

Propiedades afines de líneas y de superficies

Estudiamos las líneas y las superficies en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 que se distingue del espacio afín por la existencia de la métrica en el mismo. Todas las propiedades de las líneas y superficies examinadas anteriormente son invariantes con respecto a los movimientos en \mathbb{R}^3 y se llaman *propiedades métricas*. Sin embargo, muchas de estas propiedades son invariantes también con respecto a transformaciones más generales del espacio \mathbb{R}^3 y precisamente con respecto a transformaciones afines y se denominan *propiedades afines*. Toda transformación afín que traslada el punto $M(x, y, z)$ al punto $M'(x', y', z')$ se representa del modo

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1,$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2,$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3,$$

donde la matriz (a_{ij}) es regular. Pero si la matriz (a_{ij}) es ortogonal, entonces esta transformación es un movimiento.

928. Sea \mathcal{A} una transformación afín del espacio \mathbb{R}^3 y sea $r = r(t)$ una curva en \mathbb{R}^3 . Entonces la composición $\mathcal{A} \circ r(t)$ es curva en \mathbb{R}^3 . Demuéstrese esto.

929. Demostrar que una transformación afín hace pasar una línea a otra, o sea, el concepto de línea es afín.

930. Demostrar que una transformación afín hace pasar una superficie a otra, o sea, el concepto de superficie es afín.

931. Si (U, r) es parametrización de la superficie S y \mathcal{A} es una transformación afín, entonces $(U, \mathcal{A} \circ r)$ es la parametrización de la superficie $\mathcal{A}(S)$. Demuéstrese esto.

932. Mostrar que el concepto de tangente a una línea es afín.

933. Mostrar que el concepto de plano tangente a una superficie es afín, o sea, un plano tangente a una superficie pasa con una transformación afín a un plano tangente a la superficie transformada.

934. Si una familia monoparamétrica de líneas sobre un plano o de superficies en un espacio tiene envolvente, entonces la familia que se obtiene como resultado de una transformación afín también tiene una envolvente que es la imagen de la envolvente de la familia inicial. Demuéstrese esto.

935. Mostrar que el concepto de superficie reglada es afín.

936. Demostrar que una superficie desarrollable con la transformación afín pasa a otra superficie desarrollable, con ello la arista de retroceso de la superficie inicial pasa a la arista de retroceso de la superficie transformada.

937. Demostrar que una superficie reglada oblicua con la transformación afín pasa a la otra superficie reglada oblicua.

938. Mostrar que el concepto de plano osculador de una línea es afín.

939—957. Averiguar cuáles entre los conceptos indicados son afines y cuáles son métricos:

(939) Línea plana.

(940) Curvatura de una línea.

(941) Evoluta de una línea plana.

(942) Torsión de una línea.

(943) Normal de una línea.

(944) Binormal de una línea.

(945) Plano normal de una línea.

(946) Plano rectificante de una línea.

(947) Direcciones conjugadas y asintóticas en un punto dado de una superficie.

(948) Líneas asintóticas en una superficie.

(949) Líneas de curvatura en una superficie.

(950) Líneas geodésicas en una superficie.

(951) Curvatura total de una superficie.

(952) Curvatura media de una superficie.

(953) Superficie de curvatura total nula.

(954) Superficie de curvatura media nula (superficie mínima).

(955) Puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos de una superficie.

(956) Puntos de redondeo de una superficie.

(957) Puntos de aplanamiento de una superficie.

958. Hallar la envolvente de una familia de rectas que unen los extremos de los pares de diámetros conjugados de una elipse.

959. Hallar la ecuación de la envolvente de una familia de rectas que pasan por los pares de tales puntos de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que junto con el centro de la elipse determinan sectores elípticos de un área constante S .

960. Hallar la ecuación de la envolvente de una familia de rectas que separan de dos rectas intersecadas bajo el ángulo 2α triángulos de área constante S .

961. Hallar la envolvente de una familia de rectas que cortan de la parábola dada $y = ax^2$ segmentos de área constante S .

962. Demostrar que la figura engendrada por las tangentes a las líneas asintóticas de una superficie reglada oblicua a lo largo de una generatriz de superficie es un hiperboloide de una hoja o un paraboloides hiperbólico.

Elementos de la teoría del campo

§ 20. Campo escalar

El campo escalar se determina por la función escalar

$$u = u(P) = u(x, y, z) = u(r),$$

donde $P(x, y, z)$ es un punto del espacio y

$$r = xi + yj + zk$$

su radio vector.

El campo $u = u(P)$ se llama *plano* si existe tal sistema de coordenadas que la función u no depende de z , o sea

$$u = u(x, y).$$

Tal campo admite valores iguales sobre cada recta paralela al eje Oz , por eso se suele examinar sólo en el plano xOy .

Las superficies

$$u(x, y, z) = C,$$

donde $C = \text{const}$ se denominan *superficies de nivel del campo escalar*.

En caso de un campo plano las superficies de nivel

$$u(x, y) = C \quad (1)$$

son superficies cilíndricas con las generatrices paralelas al eje Oz .

Si el campo plano se examina solamente en el plano xOy , entonces la ecuación (1) define la colección de sus *líneas de nivel*. Si la función

$$u(r) = u(x, y, z)$$

que determina un campo escalar es diferenciable continuamente, entonces, se llama *gradiente* de este campo al campo vectorial

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

El gradiente del campo u en un punto dado $P(x, y, z)$ está orientado por la normal a la superficie de nivel

$$u(x, y, z) = C$$

que pasa por el punto P . Para cada punto este vector ofrece la velocidad máxima de variación de la función u en cuanto al valor

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

y la dirección. El gradiente del campo escalar se designa también con el símbolo ∇u , donde el signo ∇ se lee: «nabla». Ahora bien,

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

∇ se puede considerar como un operador diferencial (*operador de Hamilton*):

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

el cual, siendo aplicado al escalar u , da el grad u . Este operador es cómodo considerarlo como vector simbólico y aplicarle las reglas ordinarias del álgebra vectorial. Por ejemplo,

$$r \cdot \nabla = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

La derivada del campo escalar $u(P)$ por la dirección l definida por el vector

$$a = a_x i + a_y j + a_z k$$

se calcula con ayuda de la fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

donde

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|a|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|a|},$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

La derivada direccional está relacionada con el gradiente del campo vectorial por la fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial l} = a_0 \cdot \text{grad } u,$$

donde a_0 es el vector unitario de la dirección dada.

El punto en que la derivada del campo escalar en toda dirección es igual a cero se llama *punto estacionario* de este campo.

963—967. Hallar las líneas de nivel de los campos planos (que se examinan solamente en el plano xOy):

$$(963) \quad u = x^2 + y^2.$$

$$(964) \quad u = x^2 - y^2.$$

$$(965) \quad u = y/x^2.$$

$$(966) \quad u = 2x/(x^2 + y^2).$$

$$(967) \quad u = (2x - y + 1)/x^2.$$

968—71. Hallar las superficies de nivel de los campos escalares siguientes:

$$(968) \quad u = x + y + z.$$

$$(969) \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$(970) \quad u = x^2 + y^2 - z^2.$$

$$(971) \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 8)^2}.$$

972. Hallar la derivada del campo escalar

$$u = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$$

en el punto $M(1, 2)$ en la dirección del vector que une este punto con el punto $N(4, 6)$.

973. Hallar la derivada del campo escalar

$$u = xy^2 + z^3 - xyz$$

en el punto $M(1, 1, 2)$ en la dirección que forma con los ejes de coordenadas los ángulos $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

974—975. Hallar los puntos estacionarios de los campos escalares siguientes:

$$(974) \quad u = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$(975) \quad u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x.$$

976—979. Hallar los gradientes de los campos escalares siguientes:

$$(976) \quad u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy.$$

$$(977) \quad u = x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz.$$

$$(978) \quad u = xyz e^{x+y+z}.$$

$$(979) u = \operatorname{arctg} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}.$$

980. Hallar el gradiente del campo escalar $u = x^3 + y^3 - 3xy$ en el punto $M(2, 1)$.

981. Hallar el valor y la dirección del gradiente del campo escalar $u = x^2 + y^2 + z^2$ en el punto $M(2, -2, 1)$.

982. Hallar el valor y la dirección del gradiente del campo escalar $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ en los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 1)$. ¿En qué punto el gradiente es igual a cero?

983—984. Hallar el ángulo comprendido entre los gradientes de los campos escalares indicados en los puntos dados:

$$(983) u = \ln(y/x), \quad A(1/2, 1/4), \quad B(1, 1).$$

$$(984) u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad A(1, 2, 2), \quad B(-3, 1, 0).$$

985. Hallar el ángulo comprendido entre los gradientes de los campos $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = \arcsen \frac{x}{x+y}$ en el punto $M(1, 1, \sqrt{7})$.

986. Determinar el carácter de crecimiento del campo escalar $u = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ en la dirección del vector $a = 8i - 4j + 8k$ en el punto $M(1, 1, 1)$; hallar la velocidad de variación del campo dado.

987. Hallar los puntos en que el gradiente de la función $u = \ln\left(y + \frac{1}{x}\right)$ es igual a $-\frac{25}{16}i + j$.

988. Hallar la derivada del campo $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ en el punto $M(x, y, z)$ en la dirección de su radio vector r . ¿En qué caso esta derivada es igual al valor del gradiente?

989. Hallar la derivada del campo escalar $u = u(x, y, z)$ en la dirección del gradiente del campo $v = v(x, y, z)$. ¿En qué caso ella será igual a cero?

990—996. Demostrar la certeza de las fórmulas siguientes:

$$(990) \operatorname{grad} c = 0, \quad c = \text{const.}$$

$$(991) \text{ grad } (u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v.$$

$$(992) \text{ grad } (uv) = v \text{ grad } u + u \text{ grad } v.$$

$$(993) \text{ grad } (cu) = c \text{ grad } u, \quad c = \text{const.}$$

$$(994) \text{ grad } \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2}.$$

$$(995) \text{ grad } f(u) = f'(u) \text{ grad } u.$$

$$(996) \text{ grad } u^n = nu^{n-1} \text{ grad } u.$$

997—1004. Hallar el gradiente del campo escalar que depende de $r = |r|$, en cada uno de los casos siguientes:

$$(997) \text{ grad } r.$$

$$(998) \text{ grad } f(r).$$

$$(999) \text{ grad } r^n, \quad n \text{ es un número natural.}$$

$$(1000) \text{ grad } (1/r).$$

$$(1001) \text{ grad } \ln r.$$

$$(1002) \text{ grad } (c \cdot r), \quad c = \text{const.}$$

$$(1003) \text{ grad } ((a \cdot r)/(b \cdot r)), \quad a, b = \text{const.}$$

$$(1004) \text{ grad } (c \times r)^2, \quad c = \text{const.}$$

1005—1007. Demostrar la certeza de las fórmulas siguientes:

$$(1005) \text{ grad } f(u, v, w) = \\ = \frac{\partial f}{\partial u} \text{ grad } u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{ grad } v + \frac{\partial f}{\partial w} \text{ grad } w.$$

$$(1006) (r \cdot \nabla) r^n = nr^n. \quad (1007) (v \cdot \nabla) r = v.$$

1008. Hallar la fórmula para calcular el gradiente del campo escalar $f(u, v, w)$ definido por una función de tres coordenadas ortogonales curvilíneas.

1009. Hallar la fórmula para calcular el gradiente del campo escalar en las coordenadas cilíndricas.

1010—1014. Hallar los gradientes de los campos escalares siguientes en las coordenadas cilíndricas:

$$(1010) u = z + r\varphi. \quad (1011) u = zr\varphi.$$

$$(1012) u = z \operatorname{sen} \varphi + r. \quad (1013) u = z \cos \varphi + r^2.$$

$$(1014) u = z \operatorname{sen}^2 \varphi + r^3.$$

1015. Hallar la fórmula para calcular el gradiente del campo escalar en las coordenadas esféricas.

1016—1020. Hallar los gradientes de los campos escalares siguientes en las coordenadas esféricas:

$$(1016) u = \rho\varphi.$$

$$(1017) u = \rho\theta.$$

$$(1018) u = \rho\theta\varphi.$$

$$(1019) u = \varphi \operatorname{sen} \theta + \rho.$$

$$(1020) u = \theta \cos \varphi + \rho.$$

§ 21. Campo vectorial

El campo vectorial se determina por la función vectorial del punto $\alpha = \alpha(P) = \alpha(r) = \alpha_x(x, y, z) i + \alpha_y(x, y, z) j + \alpha_z(x, y, z) k$, donde $P(x, y, z)$ es un punto del espacio, y

$$r = xi + yj + zk$$

es su radio vector.

Llámanse *línea vectorial* de un campo a la que tiene en cada punto una tangente con la dirección del vector $\alpha(P)$.

Las líneas vectoriales (*líneas de fuerza*, *líneas de corriente*) de un campo vectorial se determinan por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{\alpha_x} = \frac{dy}{\alpha_y} = \frac{dz}{\alpha_z}.$$

Denomínase *divergencia* del campo vectorial

$$\alpha(P) = \alpha_x i + \alpha_y j + \alpha_z k$$

a la función escalar

$$\operatorname{div} \alpha = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} = \nabla \alpha.$$

Llámanse *rotación* (*rotor*) del campo vectorial $\alpha(P)$ al campo vectorial

$$\operatorname{rot} \alpha = \left(\frac{\partial \alpha_z}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right) k,$$

o bien en la forma simbólica

$$\nabla \times \alpha = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \end{vmatrix}.$$

Denomínase *flujo del campo vectorial* $a(P)$ a través de una superficie S en la dirección determinada por el vector unitario de la normal

$$n(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

con respecto a la superficie S , a la integral

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S a \cdot n \, d\sigma = \iint_S a_n \, d\sigma = \\ &= \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) \, d\sigma, \end{aligned}$$

donde a_n es el valor de la proyección del vector a sobre el sentido del vector n .

Sea S una superficie cerrada que acota una región V y sea n el vector unitario de la normal exterior a ella, entonces es válida la *fórmula de Ostrogradski*

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) d\omega = \\ = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) \, d\sigma, \end{aligned}$$

o, en forma vectorial,

$$\iiint_V \operatorname{div} a \, d\omega = \iint_S a_n \, d\sigma.$$

La *integral lineal del vector* a por la línea L se define por la fórmula

$$\int_L a \cdot dr = \int_L a_s \, ds = \int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$

donde a_s es la proyección del vector a sobre la tangente a L . La integral lineal expresa el *trabajo del campo vectorial* a a lo largo de la línea L . Si la línea L es cerrada, entonces la integral lineal se llama *circulación del campo vectorial* a a lo largo del contorno L .

Si la línea cerrada L es el contorno de una superficie orientada S , entonces es válida la *fórmula de Stokes*

$$\oint_L a \cdot dr = \iint_S n \cdot \operatorname{rot} a \, d\sigma,$$

donde n es el campo vectorial unitario de las normales a la superficie que determina la orientación de S , y la orientación de L concuerda con la de S .

El campo vectorial $a(r)$ se dice *potencial* si

$$a = \text{grad } u,$$

donde $u = u(r)$ es la función escalar (*potencial del campo vectorial a*).

Para el campo vectorial potencial a definido en una región simplemente conexa es necesario y suficiente que

$$\text{rot } a = 0.$$

En este caso el potencial u se determina por la ecuación

$$du = a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Si el potencial u se determina unívocamente, entonces

$$\int_{AB} a \cdot dr = u(B) - u(A);$$

en particular, la circulación del campo vectorial a a lo largo de cualquier contorno cerrado es igual a cero.

El campo vectorial $a(r)$ se llama *solenoidal* si en cada punto suyo

$$\text{div } a = 0;$$

en este caso el flujo del vector a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a cero.

Si el campo es a la vez potencial y solenoidal, entonces

$$\text{div } (\text{grad } u) = 0$$

y la función potencial u es *armónica*, o sea, satisface la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

o bien

$$\Delta u = 0,$$

donde

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

es el *operador de Laplace*.

1021—1025. Hallar las líneas vectoriales de los campos vectoriales siguientes:

$$(1021) \ a = -cyi + cxj, \ c = \text{const.}$$

$$(1022) \ a = xi + yj + 2zk.$$

$$(1023) \ a = x^2i + y^2j + z^2k.$$

$$(1024) \ a = yi + xj.$$

$$(1025) \ a = xi + yj + zk.$$

1026—1027. Hallar la divergencia de los campos vectoriales siguientes:

$$(1026) \ r = xyz i + (2x + 3y + z) j + (x^2 + z^2) k.$$

$$(1027) \ r = (6x^2y^2 - z^3 + yz - 5) i + (4x^3y + xz + 2) j + (xy - 3xz^2 - 3) k.$$

1028—1032. Demostrar la validez de las fórmulas siguientes:

$$(1028) \ \text{div } c = 0, \ c = \text{const.}$$

$$(1029) \ \text{div } (a + b) = \text{div } a + \text{div } b.$$

$$(1030) \ \text{div } (ca) = c \text{ div } a, \ c = \text{const.}$$

$$(1031) \ \text{div } (ua) = u \text{ div } a + a \cdot \text{grad } u.$$

$$(1032) \ \text{div } (uc) = c \cdot \text{grad } u, \ c = \text{const.}$$

1033—1040. Hallar la divergencia del campo vectorial en los casos siguientes:

$$(1033) \ \text{div } r. \qquad (1034) \ \text{div } (f(r) r).$$

$$(1035) \ \text{div } (r/r). \qquad (1036) \ \text{div } (r^n r).$$

$$(1037) \ \text{div } (\text{grad } f(r)). \qquad (1038) \ \text{div } (\text{grad } u).$$

$$(1039) \ \text{div } (u \text{ grad } u). \qquad (1040) \ \text{div } (u \text{ grad } v).$$

1041—1046. Suponiendo que c y c_1 son vectores constantes, hallar la divergencia del campo vectorial en los casos siguientes:

$$(1041) \ \text{div } (rc). \qquad (1042) \ \text{div } (r^2c).$$

$$(1043) \ \text{div } (f(r) c). \qquad (1044) \ \text{div } (r \times c).$$

$$(1045) \ \text{div } (r \cdot c_1) c \qquad (1046) \ \text{div } (r \cdot c) r.$$

1047—1048. Suponiendo que e es un vector unitario constante, calcular:

$$(1047) \operatorname{div} (e \cdot r) e. \quad (1048) \operatorname{div} (e \times (r \times e)).$$

1049. Hallar

$$\operatorname{div} \frac{x+y+z}{xyz} r.$$

1050—1051. Hallar las funciones $f(r)$ que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$(1050) \operatorname{div} (\operatorname{grad} f(r)) = 0.$$

$$(1051) 2r \operatorname{div} (\operatorname{grad} f(r)) = \operatorname{div} (r/r).$$

1052. Hallar la fórmula para la divergencia del vector a en coordenadas curvilíneas ortogonales u, v, w , si sus coordenadas cartesianas rectangulares x, y, z se expresan por las fórmulas

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w).$$

1053. Hallar la expresión para $\operatorname{div} a$ en coordenadas cilíndricas.

1054. Hallar la expresión para $\operatorname{div} a$ en coordenadas esféricas.

1055—1056. Hallar la rotación de los campos vectoriales siguientes:

$$(1055) a = y^2 z i + z^2 x j + x^2 y k.$$

$$(1056) a = xy z i + (2x + 3y - z) j + (x^2 + z^2) k.$$

1057—1059. Demostrar la validez de las fórmulas siguientes:

$$(1057) \operatorname{rot} (a + b) = \operatorname{rot} a + \operatorname{rot} b.$$

$$(1058) \operatorname{rot} (ua) = u \operatorname{rot} a + \operatorname{grad} u \times a.$$

$$(1059) \operatorname{div} (a \times b) = b \cdot \operatorname{rot} a - a \cdot \operatorname{rot} b.$$

1060—1067. Suponiendo que c y c_1 son vectores constantes, hallar la rotación del campo vectorial en los casos siguientes:

$$(1060) \operatorname{rot} c.$$

$$(1064) \operatorname{rot} r.$$

$$(1062) \operatorname{rot} (r \times c).$$

$$(1063) \operatorname{rot} ((r \cdot c) r)$$

(1064) $\text{rot} ((r \cdot c_1) c)$. (1065) $\text{rot} ((c \times r) \times c_1)$.

(1066) $\text{rot} (f(r) r)$. (1067) $\text{rot} (f(r) c)$.

1068—1071. Demostrar la validez de las fórmulas siguientes:

(1068) $\text{rot} (\text{grad } u) = 0$.

(1069) $\text{div} (\text{rot } a) = 0$.

(1070) $\text{div} (\text{grad } u) = \Delta u$.

(1071) $\text{rot rot } a = \text{grad div } a - \Delta a$,

donde

$$\Delta a = \Delta a_x i + \Delta a_y j + \Delta a_z k.$$

1072. Valiéndose de la fórmula de Ostrogradski, demostrar que el flujo del campo vectorial $a = r$ a través de la superficie cerrada que acota un volumen arbitrario V , es igual a $3V$.

1073. Calcular el flujo del campo vectorial $a = xy^2 i + x^2 y j + zk$ a través de la superficie cerrada engendrada por los planos de coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y por la parte de la superficie del paraboloido $4 - z = x^2 + y^2$, que está en el primer octante.

1074. Calcular el flujo del campo vectorial $a = x^3 i + y^3 j + z^3 k$, a través de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

1075. Calcular el flujo del campo de intensidad

$$E = \frac{qr}{r^3}$$

de la carga puntual q , a través de una esfera de radio a con centro en el punto de la carga.

1076. Calcular el flujo del campo de intensidad

$$E = \frac{qr}{r^3}$$

de la carga puntual q , a través de una superficie cerrada S que no contenga en su interior la carga q .

1077. Calcular el flujo del campo vectorial $a = xy i + (y + z) j + (x + 2z) k$, a través de la parte del plano $2x + y + z = 2$ que está en el primer octante.

1078. Calcular el flujo del vector $a = x^3i + y^3j + z^3k$:

a) a través de la superficie lateral del cono

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2} = \frac{z^2}{H^2} \quad (0 \leq z \leq H);$$

b) a través de la superficie total del cono indicado.

1079. Si S es una superficie cerrada que acota un volumen V y si a y b son vectores constantes, entonces

$$\iint_S (a \cdot r) b_n d\sigma = (a \cdot b) V.$$

Demuéstrese esto.

1080. Calcular la integral lineal del vector $a = x^3i - y^3j$ a lo largo del primer cuarto de la circunferencia $r = R \cos ti + R \operatorname{sen} tj$.

1081. Calcular la integral lineal del vector r a lo largo de una espira de la hélice $x = a \cos \varphi$, $y = a \operatorname{sen} \varphi$, $z = b\varphi$, desde $\varphi = 0$ a $\varphi = 2\pi$.

1082. Calcular la circulación del campo vectorial $a = yi - xj$ a lo largo de la línea cerrada L engendrada por los ejes de coordenadas y por el primer cuarto de la astroide $r = R \cos^3 ti + R \operatorname{sen}^3 tj$.

1083. Calcular la circulación del campo vectorial $a = y^2i$ por la línea cerrada constituida por la mitad derecha de la elipse $r = b \cos ti + c \operatorname{sen} tj$ y por el segmento del eje Oy .

1084. Calcular la circulación del campo vectorial $a = yi$ por el contorno de la circunferencia $r = b \cos ti + (b + b \operatorname{sen} t)j$.

1085. Calcular la circulación del campo vectorial $a = -yi + xj + ck$, donde $c = \text{const}$:

a) a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$;

b) a lo largo de la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

1086. Con ayuda de la fórmula de Stokes calcular la circulación del campo vectorial $a = x^2y^3i + j + zk$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, tomando en calidad de superficie acotada por la circunferencia dada la semiesfera $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

1087—1089. Calcular, tiene, o no el campo vectorial dado el potencial u y hallar u , si existe:

$$(1087) \mathbf{a} = (5x^2y - 4xy) \mathbf{i} + (3x^2 - 2y) \mathbf{j}.$$

$$(1088) \mathbf{a} = (y + z) \mathbf{i} + (x + z) \mathbf{j} + (x + y) \mathbf{k}.$$

$$(1089) \mathbf{a} = yz(2x + y + z) \mathbf{i} + xz(x + 2y + z) \mathbf{j} + \\ + xy(x + y + 2z) \mathbf{k}.$$

1090. ¿Será solenoidal el campo vectorial $\mathbf{a} = r(c \times r)$, donde c es un vector constante?

1091. Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{a} = f(r)r$ será solenoidal solamente para $f(r) = k/r^3$, donde $k = \text{const.}$

Respuestas

8. Sí. Lo contrario es falso. Efectivamente, la función vectorial definida en un semiplano abierto por la fórmula

$$r(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), & \text{si } x \geq 0, y > 0, \\ \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), & \text{si } x < 0, y > 0, \end{cases}$$

es discontinua en los puntos del semieje Oy , aunque $|r(x, y)| = 1$, o sea, la función $|r(x, y)|$ es continua.

21. $2r \cdot r'$.

22. $2r' \cdot r''$.

23. $r' \times r''$.

24. $r' r'' r^{(4)}$.

25. $(r' \times r''') \times r'' + (r' \times r'') \times r^{(4)}$.

26. $(r \cdot r') : \sqrt{r^2}$.

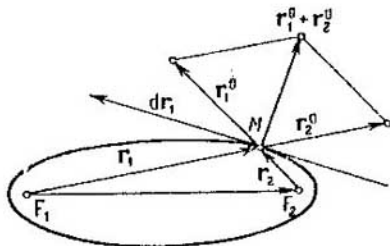


Fig. 4.

27. Designemos $r_1 = \overrightarrow{F_1M}$, $r_2 = \overrightarrow{F_2M}$ (Fig.4). Entonces $r_1 = \overrightarrow{F_1F_2} + r_2$. Diferenciando esta igualdad, obtenemos

$$dr_1 = dr_2. \quad (*)$$

Por definición de elipse $r_1 + r_2 = 2a$. Diferenciamos: $dr_1 + dr_2 = 0$. Entonces

$$r_1^0 \cdot dr_1 + r_2^0 \cdot dr_2 = 0, \quad (**)$$

donde

$$r_1^0 = \frac{r_1}{r_1}, \quad r_2^0 = \frac{r_2}{r_2}.$$

De las igualdades (*) y (**) se deduce

$$(r_1^0 + r_2^0) \cdot dr_1 = 0. \quad (***)$$

El vector $r_1^0 + r_2^0$ va por la bisectriz del ángulo comprendido entre las rectas F_1M y F_2M . Pero en virtud de (***) el vector dr_1 es perpendicular al vector $r_1^0 + r_2^0$ y, por lo tanto, va por la segunda bisectriz del ángulo indicado.

28. 1.

29. No, no se deduce. Si $r(t_0) = 0$ para cierto $t = t_0$, entonces la derivada $r'(t_0)$ no existe.

30. a) No, como muestra el ejemplo de la función vectorial $r(t) = (\cos t, \sin t)$; b) sí.

33. La necesidad es evidente. Demostremos la suficiencia. Sea

$$r'(t) = \varphi(t)r(t). \quad (*)$$

Hacemos

$$r(t) = \psi(t)e(t), \quad (**)$$

donde $|e(t)| = 1$. Diferenciando la igualdad (**) y valiéndose de (*), obtenemos

$$\psi'e + \psi e' = \varphi\psi e.$$

Multiplicando esta igualdad escalarmente por e' , encontramos $\psi e'^2 = 0$. Como $\psi \neq 0$, entonces $(e')^2 = 0$ y $e = \text{const}$.

34. Designemos con a el vector unitario ortogonal a tres vectores coplanares r' , r'' , r''' . Entonces $a \cdot r' = 0$, $a \cdot r'' = 0$, $a \cdot r''' = 0$, de donde $a' \cdot r' + a \cdot r'' = 0$, o bien $a' \cdot r' = 0$, y $a' \cdot r'' + a \cdot r''' = 0$, o bien $a' \cdot r'' = 0$. En consecuencia, $a' \perp r'$ y $a' \perp r''$, o sea, $a \parallel a'$ y, por consiguiente, $a = \text{const}$. Ahora de la relación $a \cdot r' = 0$ hallamos $(a \cdot r)' = 0$, es decir, $a \cdot r = \text{const}$; por lo tanto, la curva se encuentra en el plano (perpendicular al vector a).

OBSERVACION. La función vectorial a tiene derivada, ya que $a = (r' \times r'') / |r' \times r''|$ y según el enunciado la función vectorial r tiene derivadas de hasta tercer orden inclusive.

35. De acuerdo con el problema 33 $r'(t) = \varphi(t)a$, $a = \text{const}$. De aquí

$$r(t) = \int \varphi(t) dt a + b. \quad (*)$$

Si t se cambia sobre el segmento $[t_1, t_2]$, entonces la ecuación (*) define el segmento de la recta.

36. Tomemos como origen del sistema de coordenadas un punto con radio vector r_0 , y los vectores r_1 y r_2 los consideramos vectores

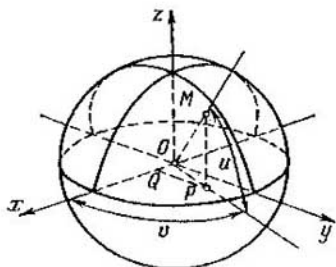


Fig. 5.

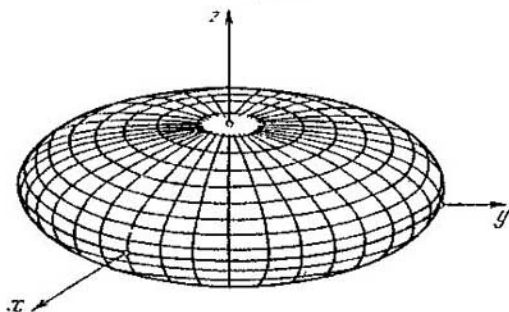


Fig. 6.

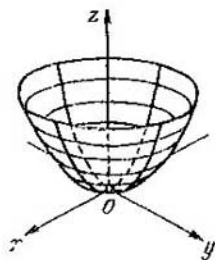


Fig. 7.

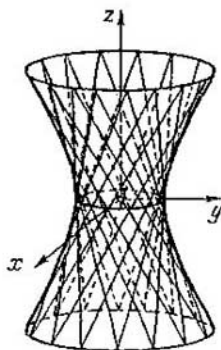


Fig. 8.

básicos de los ejes Ox y Oy (hablando en general, el sistema de coordenadas no es rectangular). Entonces las ecuaciones paramétricas de la curva serán $x = t$, $y = t^2$. Por consiguiente, $y = x^2$. Es la ecuación de una parábola. En el caso de colinealidad de los vectores r_1 y r_2 obtendremos una semirrecta o recta.

37. Segmento de una recta.

38. Un haz si $r_1 \neq 0$ y una recta si $r_1 = 0$.

39. Si la trayectoria $r = r(t)$ de un punto material de masa m se describe bajo la acción de una fuerza central F , entonces $F = mr'' = ar$, donde $a = a(t)$ es cierta función escalar. Queda por demostrarse que si la $r(t)$ de cierto punto móvil satisface la condición

$$mr'' = ar, \quad (*)$$

entonces la trayectoria de movimiento es plana.

Derivando la igualdad (*) con respecto a t :

$$mr''' = a'r + ar' = m \frac{a'}{a} r'' + ar',$$

o sea, en cada momento dado los vectores r' , r'' , r''' son coplanares. Si los vectores r' y r'' no son colineales, entonces la trayectoria será plana en virtud del problema 34. Pero, si r' y r'' son colineales, entonces en vista del problema 35, la trayectoria será rectilínea.

40. La demostración se deduce del hecho de que para la función $y = x^3$ la función inversa no es suave.

45. Sea $(I, r = r(t))$, donde $I = [\alpha, \beta]$ es la parametrización de la curva γ . Entonces la parametrización $(J, \rho = \rho(\tau))$, donde $J = [-\beta, -\alpha]$, $\rho(\tau) = r(-\tau)$, es equivalente a (I, r) . Las parametrizaciones (I, r) y (J, ρ) determinan diferentes curvas orientadas. Toda parametrización de la curva y está vinculada a la sustitución de la parametrización por una derivada positiva, ya sea con (I, r) o con (J, ρ) .

49. La necesidad es evidente. Demostremos la suficiencia. Sea r_0 un valor fijo arbitrario de la función vectorial dada y sea n un vector unitario, ortogonal al plano dado. Entonces $\partial_u r \cdot n = 0$, $\partial_v r \cdot n = 0$. Examinemos la función $f(u, v) = (r(u, v) - r_0) \cdot n$. Tenemos $\partial_u f = \partial_u r \cdot n = 0$, $\partial_v f = \partial_v r \cdot n = 0$. Así pues, $f(u, v) = \text{const}$. Pero $f(u_0, v_0) = (r_0 - r_0) \cdot n = 0$, por eso $f(u, v) \equiv 0$, o sea, $(r - r_0) \cdot n = 0$. Es la ecuación de un plano.

50. Un cilindro parabólico.

51. Un cilindro elíptico.

52. Un cilindro hiperbólico.

53. Un paraboloides elíptico.

55. $x = R \cos u \cos v$, $y = R \cos u \sin v$, $z = R \sin u$ (fig. 5).

56. $x = a \cos u \cos v$, $y = b \cos u \sin v$, $z = c \sin u$ (fig. 6).

57. $x = \sqrt{p} \cos v$, $y = \sqrt{q} \sin v$, $z = u^2/2$ (fig. 7).

58. $x = a \operatorname{ch} u \cos v$, $y = b \operatorname{ch} u \sin v$, $z = c \operatorname{sh} u$ (fig. 8.).

59. $x = a \operatorname{sh} u \cos v$, $y = b \operatorname{sh} u \sin v$, $z = c \operatorname{ch} v$ (fig. 9).

60. $x = a \cos v$, $y = b \sin v$, $z = u$ (fig. 10).

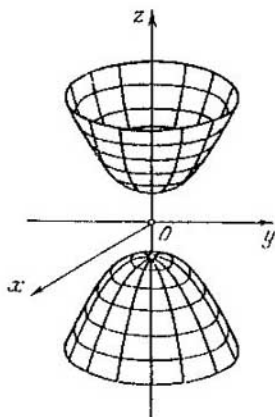


Fig. 9.

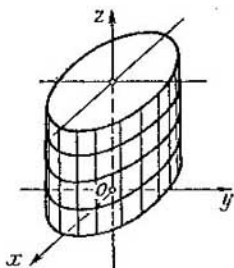


Fig. 10.

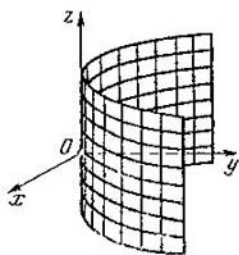


Fig. 11.

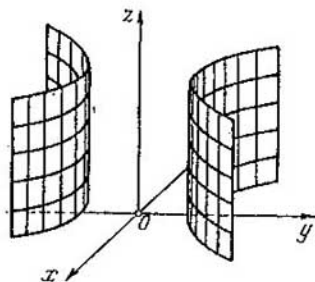


Fig. 12.

61. $x = u, y = u^2, z = v$ (fig. 11).

62. $x = a \operatorname{ch} u, y = b \operatorname{sh} u, z = v$ (fig. 12).

63. $x = au \cos v, y = bu \sin v, z = cu$ (fig. 13).

66. a) No. Por ejemplo, para la función vectorial

$$x = \frac{2au^2}{1+u^2}, \quad y = \frac{au(u^2-1)}{1+u^2}, \quad z = v$$

el conjunto indicado es un cilindro cuya directriz es una estrofoide.

67. a) Plano con rayo lanzado; b) $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < 2\pi$;
 c) $u = r \cos \varphi$, $v = r \operatorname{sen} \varphi$.

68. Escogamos en calidad de eje Ox la recta que pasa por los puntos F_1 , F_2 (fig. 14) y que está orientada desde el punto F_1 al punto F_2 .

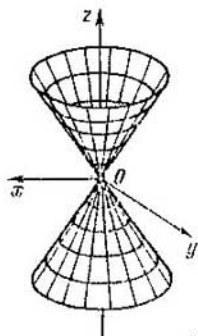


Fig. 13.

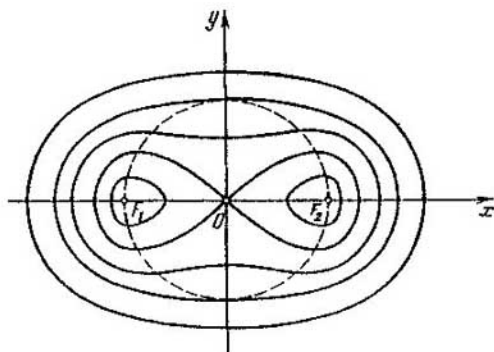


Fig. 14.

Tomemos por origen de coordenadas el centro del segmento F_1F_2 . Entonces: $F_1(-b, 0)$, $F_2(b, 0)$. Para un punto arbitrario $M(x, y)$ de la figura buscada tenemos

$$|F_1M| = \sqrt{(x+b)^2 + y^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}.$$

Según el enunciado del problema

$$\sqrt{(x+b)^2 + y^2} - \sqrt{(x-b)^2 + y^2} = a^2. \quad (*)$$

Esto es precisamente la ecuación de la figura buscada. Racionalizando:

$$[(x+b)^2 + y^2] [(x-b)^2 + y^2] = a^4. \quad (**)$$

Es evidente que las ecuaciones (*) y (**) son equivalentes. Suprimiendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos

$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = a^4 - b^4,$$

o sea, la ecuación de los *óvalos de Cassini* (véase la fig. 14). Sustituyendo aquí las expresiones de las coordenadas rectangulares cartesianas por las polares $x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$, obtenemos

$$r = b \sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\frac{a^4}{b^4} - \operatorname{sen}^2 2\varphi}},$$

o sea la ecuación de la figura buscada en coordenadas polares. Si $a = b$ la figura se llama *lemniscata de Bernoulli* (fig. 15). Sus ecuaciones son

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Si $a < b$, la figura no será imagen de una curva ni línea. La *lemniscata de Bernoulli* ($a = b$) es imagen de una curva, pero no es una línea. Cuando $a > b$, el óvalo de Cassini es línea e imagen de una curva.

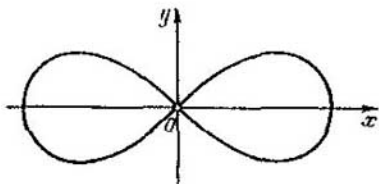


Fig. 15.

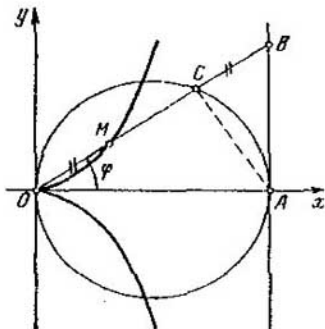


Fig. 16.

69. $x^3 = y^2(2a - x)$, $r = 2a \sin^2 \varphi / \cos \varphi$ (fig. 16). Las ecuaciones paramétricas se pueden reducir a la forma

$$x = 2a \sin^3 \varphi, \quad y = 2a \sin^3 \varphi / \cos \varphi,$$

o bien

$$x = \frac{2a}{1+t^2}, \quad y = \frac{2at}{1+t^2} \quad (t = \operatorname{ctg} \varphi).$$

La cisioide de Diocles no es línea.

$$70. \quad y = \frac{a^2}{x^2 + a^2}; \quad x = a \operatorname{ctg} t, \quad y = a \operatorname{sen}^2 t \quad (\text{fig. 17}).$$

$$71. \quad r = a\varphi \quad (\text{fig. 18}).$$

$$72. \quad r = r_0 e^{h\varphi}, \quad \text{donde } \varphi = \omega t \quad (\text{fig. 19}).$$

73. $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$, $r = a \operatorname{sen} 2\varphi$ (fig. 20). La rosa de cuatro pétalos es la imagen de una curva, pero no es una línea.

74. $r = 2a \cos \varphi \pm 2b$, $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4b^2(x^2 + y^2)$ (fig. 21) para la cardioide $b = a$ (fig. 22). El caracol de Pascal es una línea para $b > a$.

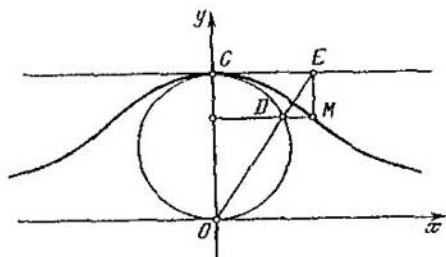


Fig. 17.

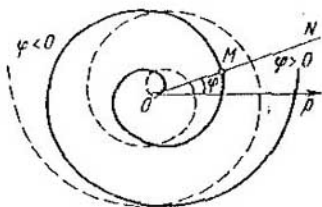


Fig. 18.

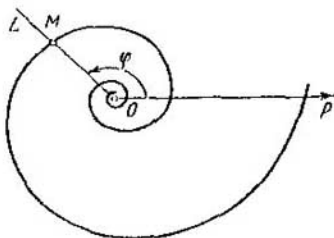


Fig. 19.

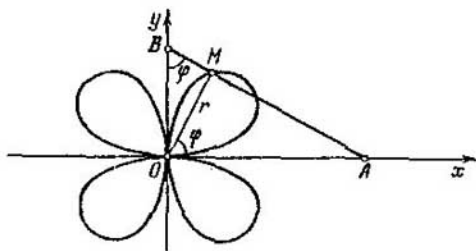


Fig. 20.

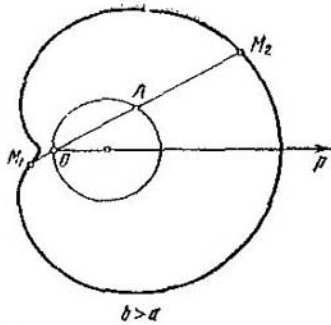
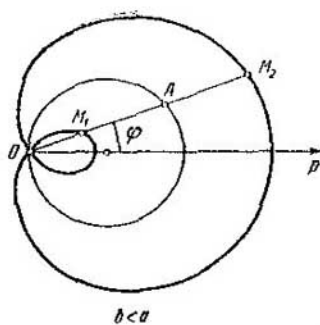


Fig. 21.

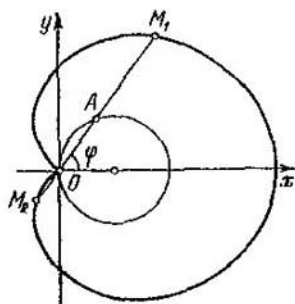


Fig. 22.

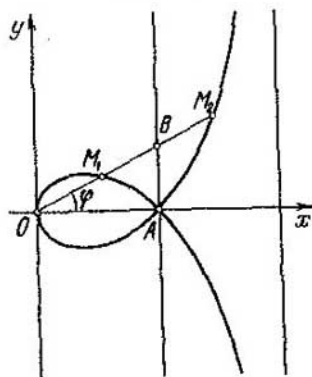


Fig. 23.

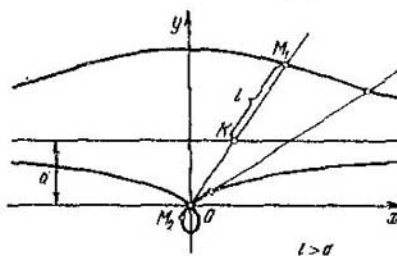
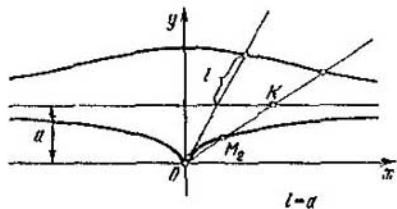
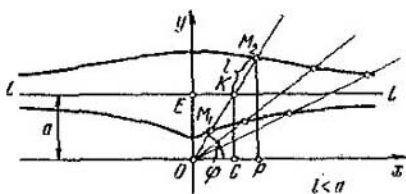


Fig. 24.

$$75. r = \frac{a(1 \pm \operatorname{sen} \varphi)}{\cos \varphi}; \quad y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x};$$

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}, \quad t = \frac{r}{a}.$$

La estrofoide ψ (fig. 23) es una curva, pero no es una línea. La figura $\psi \setminus A$ es una línea, pero no es una curva.

76. $r = \frac{a}{\operatorname{sen} \varphi} \pm l$; $(x^2 + y^2)(y - a)^2 - l^2 y^2 = 0$ (fig. 24). Ninguna conoide de Nicomedes es la imagen de una curva. La conoide es una línea cuando $l < a$.

77. $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$; $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (fig. 25). No.

78. $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$.

INDICACION.. Antes del desarrollo, el extremo del hilo se encontraba en el punto A (fig. 26). Durante el desarrollo el hilo tenso coincide con la tangente a la circunferencia, con ello la longitud de la tangente

$$|BM| = \widehat{BA} = at.$$

79. Planteemos la ecuación de la cicloide. Tomemos la recta indicada por eje Ox y supongamos que en la posición inicial el punto M coincide con el origen de las coordenadas (fig. 27). Examinemos una posición arbitraria del punto $M(x, y)$. Supongamos que el centro de la circunferencia se encuentra en el momento dado en un punto C , y que t es el ángulo que el radio CM engendra con la perpendicular CP trazada desde el punto C al eje Ox . Sea S la proyección del punto M sobre el eje Ox y sea N su proyección sobre CP .

Entonces

$$x = OS = OP - SP = \widehat{MP} - SP = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t),$$

Análogamente

$$y = SM = PN = PC - NC = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

En el caso general

$$x = at - d \operatorname{sen} t, \quad y = a - d \cos t \quad (\text{fig. 28}).$$

80. Coloquemos el origen de las coordenadas en el centro de la circunferencia fija. Supongamos que en la posición inicial el punto M coincide con el punto A en el cual la circunferencia rodante toca la fija, y hagamos que el eje de las abscisas pase por el punto A (fig. 29).

Introduzcamos las designaciones: $t = \widehat{MO_1N}$, $m = r/R$. Como

$$\widehat{AN} = \widehat{MN}, \quad \text{o bien } R \cdot \widehat{NOA} = rt, \quad \text{entonces } \widehat{NOA} = \frac{r}{R} t = mt.$$

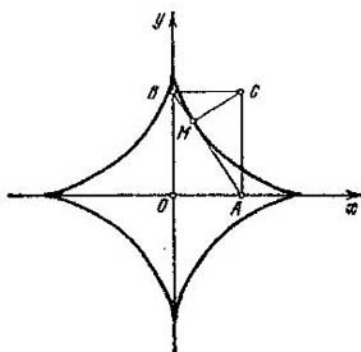


Fig. 25.

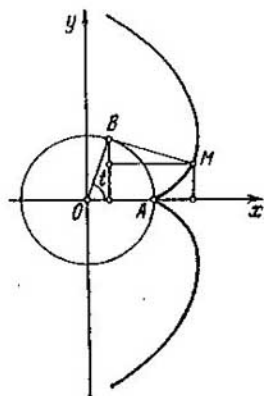


Fig. 26.

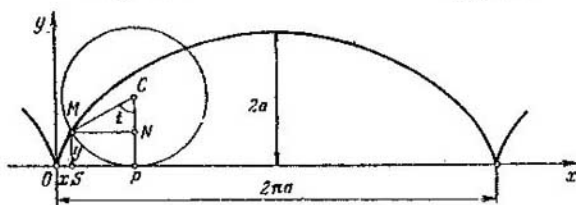


Fig. 27.

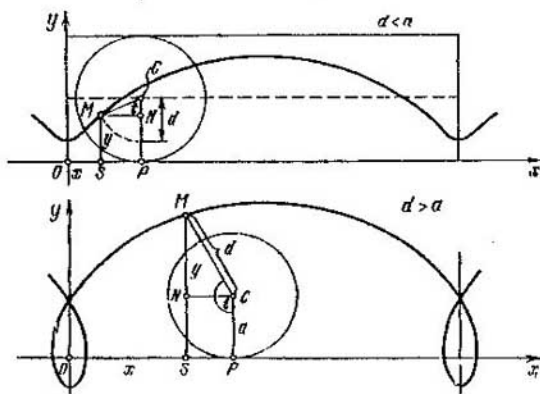


Fig. 28.

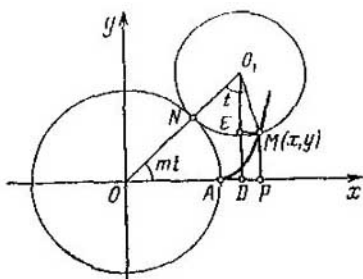


Fig. 29.

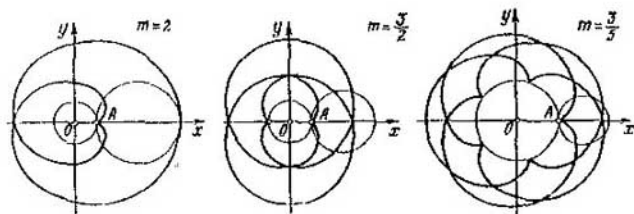


Fig. 30.

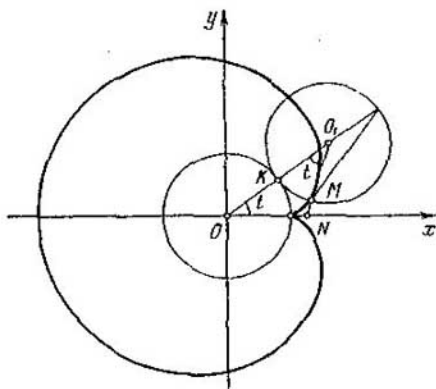


Fig. 31.

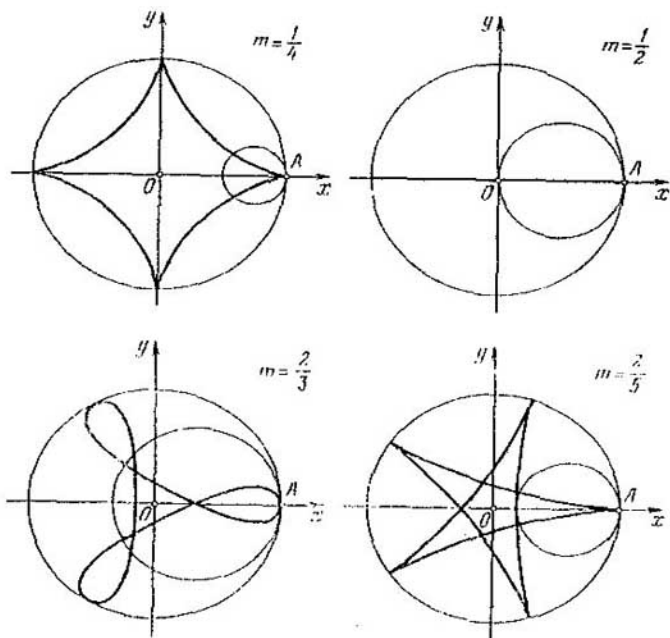


Fig. 32.

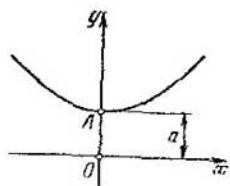


Fig. 33.

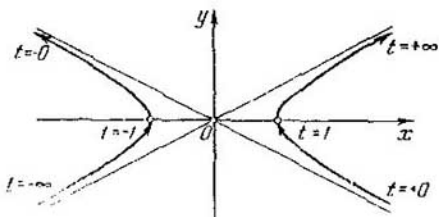


Fig. 34.

Tenemos

$$x = OP = OD + DP = OD + EM = (R + r) \cos mt + r \operatorname{sen} \widehat{MO_1E},$$

$$y = MP = O_1D - O_1E = (R + r) \operatorname{sen} mt - r \cos \widehat{MO_1E}.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \widehat{MO_1E} &= \operatorname{sen} (t - \widehat{OO_1D}) = \operatorname{sen} \left[t - \left(\frac{\pi}{2} - mt \right) \right] = \\ &= -\cos (t + mt), \quad \cos \widehat{MO_1E} = \operatorname{sen} (t + mt), \quad r = mR, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} x &= (R + mR) \cos mt - mR (t + mt), \\ y &= (R + mR) \operatorname{sen} mt - mR \operatorname{sen} (t + mt). \end{aligned}$$

Eliminando m , obtenemos

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \cos \frac{r}{R} t - r \cos \frac{R+r}{R} t, \\ y &= (R + r) \operatorname{sen} \frac{r}{R} t - r \operatorname{sen} \frac{R+r}{R} t \quad (\text{fig. 30}). \end{aligned}$$

Cuando $r = R$ obtenemos la cardiode (fig. 31).

$$\begin{aligned} 81. \quad x &= (R - mR) \cos mt + mR \cos (t - mt), \\ y &= (R - mR) \operatorname{sen} mt - mR \operatorname{sen} (t - mt), \quad r = mR. \end{aligned}$$

Cuando $R = 4r$ obtenemos una *astroide*, cuando $R = 2r$ obtenemos el *segmento de una recta* (fig. 32).

82. Los puntos M y N descansan sobre la imagen de la curva, el punto P no se encuentra sobre ella. La curva corta al eje Ox en el punto $O(0, 0)$ y al eje Oy , en los puntos $O(0, 0)$ y $A(0, -2)$. La ecuación implícita es: $y^3 + 2y^2 - x^2 = 0$.

$$83. \text{ a) } x = \frac{2a}{1+k^2}, \quad y = \frac{2ak}{1+k^2};$$

$$\text{b) } x = a + a \cos \varphi, \quad y = a \operatorname{sen} \varphi.$$

84. Una parábola.

85. La parte de la recta $x - y - 2 = 0$, donde $x \geq 2$.

86. El segmento de la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ comprendido entre los ejes de coordenadas.

87. Una semicircunferencia.

88. Rama de la hipérbola.

89. La recta $x + 2y - 1 = 0$.

90. $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, o sea, la línea llamada *catenaria* (fig. 33).

91. La circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

92. $t = \operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi$ (fig. 34).

93. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; el paso de una representación a la otra lo obtendremos suponiendo que $t = \operatorname{tg}(0/2)$ (fig. 35).

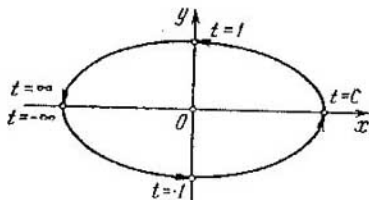


Fig. 35.

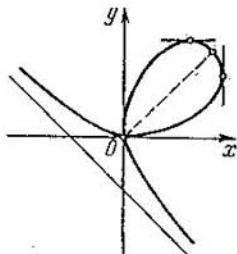


Fig. 36.

94. La circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

95. La circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

96. La recta $x = a$. 97. La recta $y = b$.

98. La elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

99. La hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

100. La parábola $y^2 = 4x + 4$. 101. La hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$.

102. La circunferencia $x^2 + y^2 - by = 0$.

103. La parábola $y^2 = -4x + 4$. 104. La parábola $y^2 = 4x + 4$.

$$105. \quad x = -\frac{\varphi_{n-1}(1, t)}{\varphi_n(1, t)}, \quad y = -\frac{t\varphi_{n-1}(1, t)}{\varphi_n(1, t)}.$$

INDICACION. Tomar como parámetro el coeficiente angular de la recta $y = tx$ que pasa por el origen de las coordenadas, y un punto de la línea.

$$106. \quad x = \frac{2a}{1+t^2}, \quad y = \frac{2at}{1+t^2}.$$

$$107. \quad x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}; \text{ la curva se llama folio de Descartes (fig. 36).}$$

$$108. \quad x = \frac{2at^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{2at^3}{1+t^3}, \text{ o sea, la cisoide de Diocles.}$$

109. $x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$, $y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi$.

Suponiendo que $\operatorname{tg}(\varphi/2) = t$, obtendremos las ecuaciones de la cardioide

$$x = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \quad y = \frac{4at}{(1+t^2)^2}.$$

110. $x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}$, $y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}$, o sea, una estrofoide. Las

ecuaciones indicadas se obtienen de las ecuaciones del problema 75 haciendo $x = x' + a$, $y = y'$.

111. En el punto A la tangente $2x - y + 2 = 0$, la normal $x + 2y + 1 = 0$; en el punto B la tangente $4x - y + 3 = 0$, la normal $x + 4y - 12 = 0$; en el punto C la tangente $6x - y + 2 = 0$, la normal $x + 6y - 49 = 0$.

112. En el punto A la tangente $y = 0$, la normal $x = 0$; en el punto B la tangente $3x - y - 2 = 0$, la normal $x + 3y - 4 = 0$.

113. En el punto $A(0, 0)$ la tangente $y = x$, la normal $x = -y$; en el punto $B(\pi/2, 1)$ la tangente $y = 1$, la normal $x = \pi/2$; en el punto $C(\pi, 0)$ la tangente $x + y - \pi = 0$, la normal $x - y - \pi = 0$.

114. En el punto $A(0, 0)$ la tangente $y = x$, la normal $y = -x$; en el punto $B(\pi/4, 1)$ la tangente $2x - y + 1 - \frac{\pi}{2} = 0$, la normal $x + 2y - 2 - \frac{\pi}{4} = 0$.

115. La tangente $2x - y + 4 = 0$, la normal $x + 2y - 3 = 0$.

116. La tangente $2x \operatorname{sen} t + 2y \operatorname{cos} t - a \operatorname{sen} 2t = 0$, la normal $x \operatorname{cos} t - y \operatorname{sen} t - a \operatorname{cos} 2t = 0$.

117. Para $t = (2k+1)\pi$, donde k es un número entero cualquiera, la tangente $y = 2a$, las normales $x = (2k+1)a\pi$. En todos los demás puntos la tangente $x - y \operatorname{tg}(t/2) + a(2 \operatorname{tg}(t/2) - t) = 0$, la normal $x \operatorname{tg}(t/2) + y - at \operatorname{tg}(t/2) = 0$.

118. La tangente $x = a(\operatorname{cos} t - \lambda \operatorname{sen} t)$, $y = b(\operatorname{sen} t + \lambda \operatorname{cos} t)$ o bien $bx \operatorname{cos} t + ay \operatorname{sen} t - ab = 0$, la normal $x = (a + b\lambda) \operatorname{cos} t$, $y = (b + a\lambda) \operatorname{sen} t$ o bien

$$ax \operatorname{sen} t - by \operatorname{cos} t + (b^2 - a^2) \operatorname{sen} t \operatorname{cos} t = 0.$$

119. La tangente $x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) + \lambda \frac{a}{2} \left(t - \frac{1}{t^2} \right)$, $y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) + \lambda \frac{b}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right)$, o bien $\frac{b}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) x - \frac{a}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) y - ab = 0$, la normal $x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) - \frac{\lambda b}{2} \left(t + \frac{1}{t^2} \right)$, $y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) + \frac{\lambda a}{2} \left(t - \frac{1}{t^2} \right)$, o bien

$$\frac{a}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) x + \frac{b}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) y - \frac{t^4 - 1}{4t^2} (a^2 + b^2) = 0.$$

120. La tangente $x + y - 3a = 0$, la normal $x - y = 0$.

121. La tangente $4x - 2y - a = 0$, la normal $2x + 4y - 3a = 0$.

122. La tangente

$$x(x^2 + y^2 - a^2)(X - x) + y(x^2 + y^2 + a^2)(Y - y) = 0,$$

la normal

$$y(x^2 + y^2 + a^2)(X - x) - x(x^2 + y^2 - a^2)(Y - y) = 0.$$

123. La tangente

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1,$$

la normal

$$\frac{(X-x)a^2}{x} - \frac{(Y-y)b^2}{y} = 0.$$

124. La tangente

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1,$$

la normal

$$\frac{(X-x)a^2}{x} + \frac{(Y-y)b^2}{y} = 0.$$

125. La tangente $yY = p(X + x)$, la normal

$$y(X - x) + p(Y - y) = 0.$$

126. La tangente (sen $\varphi + \varphi \cos \varphi$) $x - (\cos \varphi - \varphi \operatorname{sen} \varphi) y - a\varphi^2 = 0$, la normal (cos $\varphi - \varphi \operatorname{sen} \varphi$) $x + (\operatorname{sen} \varphi + \varphi \cos \varphi) y - a\varphi = 0$.

127. La tangente $y - a = 0$, la normal $x - a = 0$.

128. $A(1/2, 1/4)$.

129. No.

131. $y = 4x - 4$.

132. $A(2, -3)$.

133. $b = -1, c = -1$. 134. $M_1(2/3, 4/9), M_2(2/3, 8/27)$.

136. $y = 2x + 3, y = 2x + \frac{49}{27}$.

137. $y + 1 = (x + 7)/3$.

139. $(x \pm y)\sqrt{2} = -a, (x \pm y)\sqrt{2} = a$.

143. $M_1(0, 0), M_2(4, 4); \varphi_1 = \pi/2, \varphi_2 = \arctg(3/4)$.

144. $M_1(0, 3), M_2(0, -3); \varphi_1 = \varphi_2 = \pi/4$.

145. $M_1(1, 2), M_2(1, -2); \varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$.

146. $M_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \varphi_k = \arctg 2\sqrt{2}$, donde k es un número entero cualquiera.

152. Del $\triangle M_1 M_2 A$ obtenemos (fig. 37) $\mu_1 = \varphi/2$ (véase el problema 151), $\mu_2 = (\varphi + \pi)/2$, $\widehat{M_1 A M_2} = \mu_2 - \mu_1 = \pi/2$.

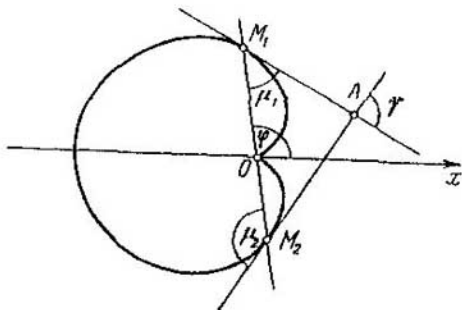


Fig. 37.

160. Suponiendo que $Y = 0$, $X = x_T$ en la ecuación de la tangente $Y - y = y'(X - x)$, obtenemos $x_T - x = -y/y'$. Por consiguiente, $|PT| = |y/y'|$ (fig. 38). Las demás fórmulas se obtienen de un modo análogo.

$$161. |MT| = \sqrt{5}/2, |PT| = 1/2, |MN| = \sqrt{5}, |PN| = 2.$$

$$162. |MT| = |\operatorname{cth} x| \operatorname{ch} x, |PT| = |\operatorname{cth} x|, |MN| = \operatorname{ch}^2 x, |PN| = |\operatorname{sh} 2x|/2.$$

$$163. y^2 = \pm 2kx + c, \text{ donde } c \text{ es una constante arbitraria.}$$

$$164. y = ce^{\pm x/k}, \text{ donde } c \text{ es una constante arbitraria.}$$

166. $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t) + c$, $y = a \operatorname{sen} t$, donde t es el ángulo formado por la tangente con la dirección positiva del eje de las abscisas. Es la familia de líneas congruentes llamadas *tractrices*. En la fig. 39 se muestra la tractriz correspondiente a $c = 0$.

$$167. S = \pi a^2/2.$$

168. Del triángulo rectangular MOT (fig. 40) tenemos $|OT| = |OM| \operatorname{tg} \mu$. Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} \mu = |r/r'|$ (véase el problema 150), obtenemos

$$|OT| = r^2/|r'|.$$

Las demás fórmulas se obtienen de un modo análogo.

169. $r = \pm \frac{k}{\varphi - \varphi_0}$, donde φ_0 es un ángulo arbitrario (en la fig. 44 el ángulo $\varphi_0 = 0$). Tales líneas se llaman *espirales hiperbólicas*.

170. Las *espirales* de Arquímedes.

171. $r = \pm k \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0)$, o sea, las circunferencias (véase el problema 102).

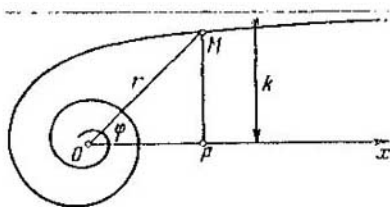


Fig. 41.

177. Tangencia de segundo orden.

178. Tangencia de primer orden. 180. El tercero.

181. $y = x^2 - 3x + 3$. 182. $x^2 + y^2 - y = 0$.183. $(x + 2y)^2 - 20x + 14y + 19 = 0$. La tangencia de tercer orden.184. Si $f(x)$ tiene para $x = 0$ derivadas de hasta un n -ésimo orden inclusive, entonces el problema tiene la solución

$$y = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}.$$

En caso contrario el problema no tiene una solución.

185. a) $\frac{(x - \pi R)^2}{12R^2} + \frac{(y + R)^2}{9R^2} = 1$, tangencia de quinto orden;b) $\frac{(x - \pi R)^2}{-12R^2} + \frac{(y - 5R)^2}{9R^2} = 1$, tangencia de quinto orden;c) $(x - \pi R)^2 = -8R(y - 2R)$, tangencia de tercer orden.186. $x = 3$, $y = 0$. 187. $x = \pm 4$, $y = 0$.188. $y = 0$. 189. $y = x - 4$, $x = 0$.190. $y = x - 2$, $x = -2$, 191. $x = 0$.192. $x = 3$, $y = -4$, $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.193. $y = -\frac{1}{2}$, $y = 2x + \frac{1}{2}$.194. $x = -\frac{1}{2}$, $2x - 4y - 3 = 0$.195. $y = \pm 2$, $x = 1$. 196. $x = 0$.197. $y = \pm x$. 198. $y = a$.199. $x = 2a$.200, 201. $O(0, 0)$, un punto múltiple.202, 203. $O(0, 0)$, un punto aislado.204. $O(0, 0)$, un punto autotangencial.205. $O(0, 0)$, un punto de retroceso de primer género. La tangente $y = 0$.

206. $O(0, 0)$. Para $l > a$ es un punto múltiple con las tangentes $y = \pm \frac{ax}{\sqrt{l^2 - a^2}}$. Para $l < a$ es un punto aislado. Para $l = a$ es un punto de retroceso de primer género con la tangente $x = 0$ (véase la fig. 24).

207. $A(a, 0)$, punto múltiple. Las tangentes son $y = \pm(x - a)$.

208. $O(0, 0)$ punto múltiple. Las tangentes son $y = \pm x$.

209. $A(0, 0)$, punto de retroceso de primer género. La tangente es $y = 0$.

210—212. No existen (fig. 42—44).

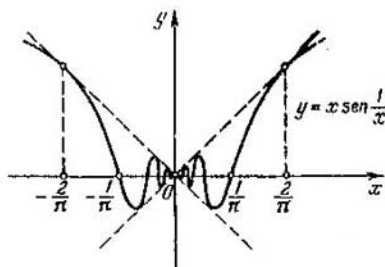


Fig. 42.

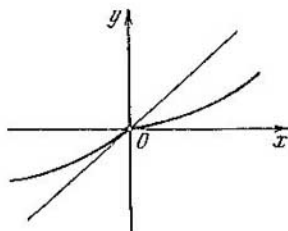


Fig. 43.

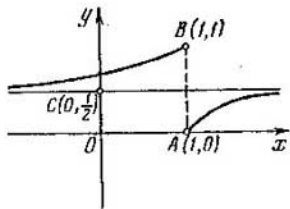


Fig. 44.

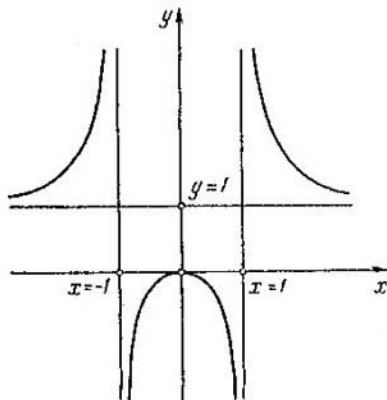


Fig. 45.

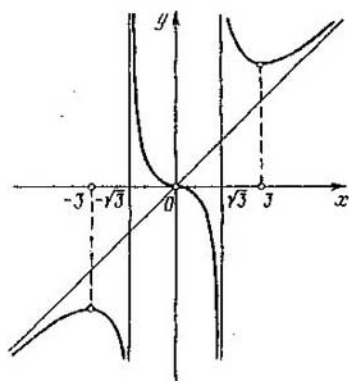


Fig. 46.

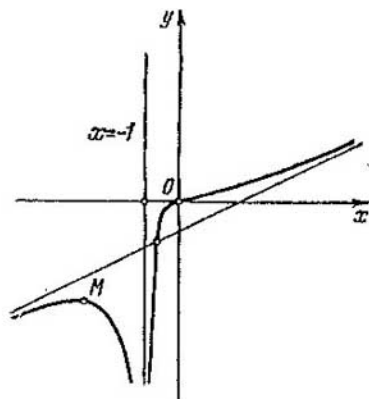


Fig. 47.

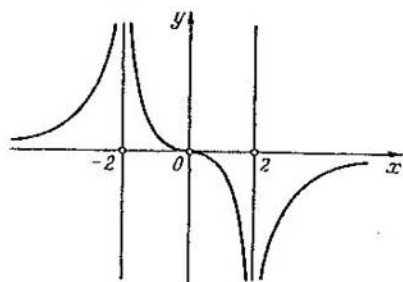


Fig. 48.

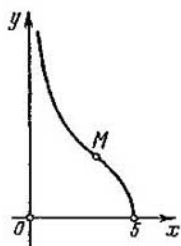


Fig. 49.

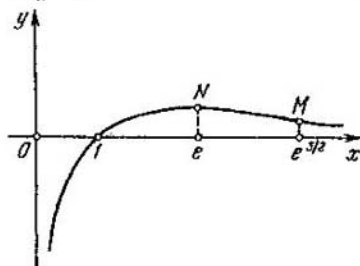


Fig. 50.

$$214. r\ddot{r} - 2\dot{r}^2 - r^2 = 0.$$

215. La función está definida para todos los valores de x , salvo cuando $x = \pm 1$. No hay puntos singulares. En el origen de coordenadas la línea toca el eje Ox . Las asíntotas son $x = \pm 1$, $y = 1$. La línea es simétrica con respecto al eje Oy (fig. 45).

216. La función no está definida solamente para $x = \pm \sqrt[3]{3}$, $y_{\text{máx}} = y(-3) = -9/2$, $y_{\text{mín}} = y(3) = 9/2$. Aquí y a continuación se tienen en cuenta extremos locales. $O(0, 0)$ es el punto de inflexión con la tangente horizontal. Las asíntotas son $y = x$, $x = \pm \sqrt[3]{3}$ (fig. 46).

217. La función no está definida solamente para $x = -1$. El origen de las coordenadas es el punto de inflexión con la tangente $y = 0$. En el punto $M(-3, -27/8)$ la tangente es también paralela al eje Ox . Las asíntotas son $x + 1 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$ (fig. 47).

218. La función no está definida para $x = \pm 2$; $O(0, 0)$ es el punto de inflexión con la tangente $y = 0$. Las asíntotas $x = \pm 2$, $y = 0$ (fig. 48).

219. El campo de definición $[0, 5]$; $M(5/\sqrt[3]{4}, 5/\sqrt[3]{4})$ es el punto de inflexión con la tangente inclinada en 135° con respecto al eje Ox . La asíntota es $x = 0$ (fig. 49).

220. La función está definida para $x > 0$; $y_{\text{máx}} = y(e) = 1/e$; $M\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$ es el punto de inflexión. Las asíntotas son $x = 0$, $y = 0$ (fig. 50).

221. La función está definida y es positiva para todos los x ; $y_{\text{máx}} = y(0) = 1$; $M_1(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$, $M_2(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$ son los puntos de inflexión. La asíntota es $y = 0$ (fig. 51).

222. La función está definida para todos los valores de x , salvo cuando $x = 0$; $M(-1/2, 1/e^2)$ es el punto de inflexión. Las asíntotas son $y = 1$, $x = 0$ (fig. 52).

223. La curva es simétrica con respecto a la bisectriz de los ángulos de coordenadas primero y tercero. La asíntota es $x - y - a = 0$; $O(0, 0)$ es el punto múltiple con las tangentes $x = 0$, $y = 0$ (véase la fig. 36).

224. La curva es cerrada, no hay puntos singulares. Los puntos de intersección con los ejes $O(0, 0)$, $M_1(1/2, 0)$. En los puntos $M_2(t = -1 + \sqrt{2})$, $M_3(t = -1 - \sqrt{2})$ las tangentes son paralelas al eje Ox . En los puntos $O(t = 0)$, $M_4(t = \pm \infty)$ las tangentes son paralelas al eje Oy . Una vez escrita la ecuación de la curva en forma implícita, es fácil demostrar que es una elipse (fig. 53).

225. La curva es simétrica con respecto al eje Ox y se encuentra en la franja $0 \leq x < 1$. La asíntota $x = 1$; $O(0, 0)$ es un punto de retroceso de primer género (fig. 54).

226. La curva es simétrica con respecto al eje Ox y se encuentra en la franja $0 \leq x < 1$. La asíntota es $x = 1$. La curva corta los ejes de las coordenadas en los puntos $O(0, 0)$, $M_4(1/2, 0)$. Por el punto M_1 la curva pasa dos veces (para $t = \pm 1$), los coeficientes angulares de las tangentes a ella son $k = \pm 2$. No hay puntos singulares. La

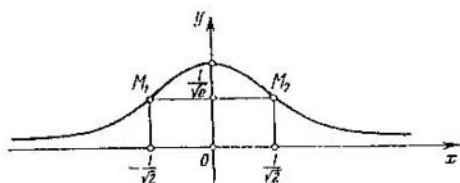


Fig. 51.

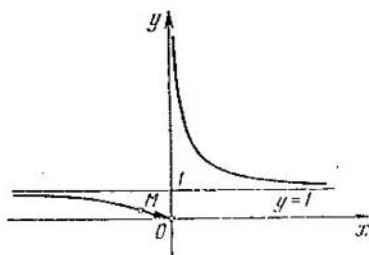


Fig. 52.

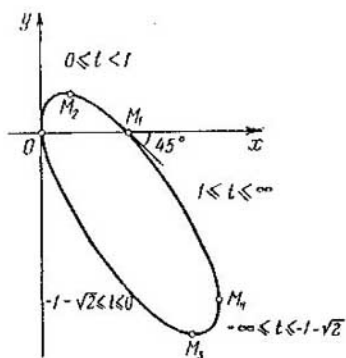


Fig. 53.

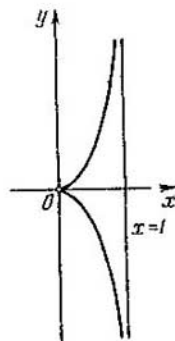


Fig. 54.

tangente a la curva es paralela al eje Oy en el origen de coordenadas y al eje Ox , en los puntos M_2 y M_3 correspondientes a los valores del parámetro $t = \pm \sqrt{\sqrt{5}-2}$ (fig. 55).

227. Cuando $t = 0$, la tangente en el punto $O(0, 0)$ coincide con el eje Oy . En los puntos $M_1(1, 4/3)$ y $M_2(1, -4/3)$, cuando $t = \pm 1$,

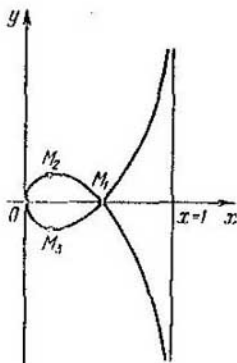


Fig. 55.

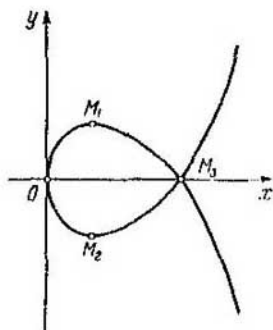


Fig. 56.

las tangentes son paralelas al eje Ox . Por el punto $M_3(3, 0)$ ($t = \pm \sqrt{3}$) la curva pasa dos veces. No hay asíntotas (fig. 56).

228. Las asíntotas son $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $y = x + 1$. La curva corta los ejes de las coordenadas solamente en el origen $O(0, 0)$ es un punto de retroceso de primer género. La tangente es paralela al eje Ox en los puntos O , M_1 , M_2 ($t = \pm \sqrt{3}$). La tangente es paralela al eje Oy en el punto M_3 ($t = 2$) (fig. 57).

229. La curva es simétrica con respecto al eje Ox . Las asíntotas son $x = -1$, $y = \pm(x - \frac{1}{2})$. La primera asíntota no corta la curva, las otras dos la cortan en los puntos M_1 ($t = -1/2$) y M_2 ($t = 1/2$); $O(0, 0)$ es un punto de retroceso de primer género. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos M_3 , M_4 ($t = \pm \sqrt{3}$) (fig. 58).

230. La curva es simétrica con respecto al eje Ox . No hay asíntotas ni puntos singulares. Los puntos $M_1(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$ y $M_2(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\sqrt{3})$ obtenidos con $t = \pm \sqrt{3}/3$ son puntos de inflexión. En el origen de las coordenadas la curva toca el eje Oy (fig. 59).

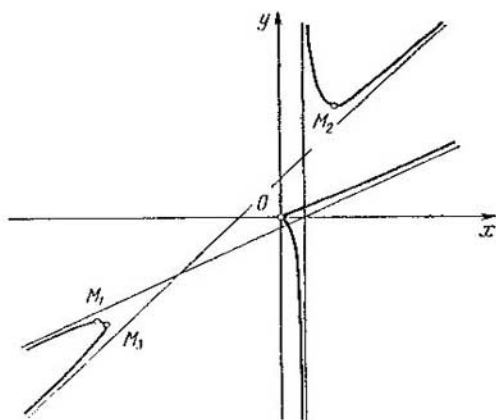


Fig. 57.

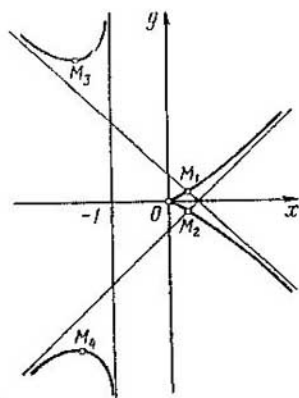


Fig. 58.

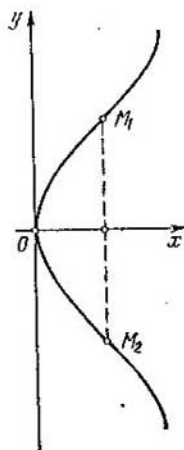


Fig. 59.

231. No hay asíntotas. $O(0, 0)$ es un punto de retroceso de segundo género con la tangente $x = 0$. La curva corta el eje Ox en los puntos O y $M_1(1, 0)$. $M_2(t = -\sqrt[3]{0,8})$ es punto de inflexión. En el punto $M_3(t = \sqrt[3]{0,4})$ la tangente es paralela al eje Ox (fig. 60).

232. La asíntota $y = 1$; $O(0, 0)$ es el punto de inflexión, la tangente al mismo coincide con el eje Oy . La tangente es paralela al eje Oy en el punto $M(t = 5/4)$ (fig. 61).

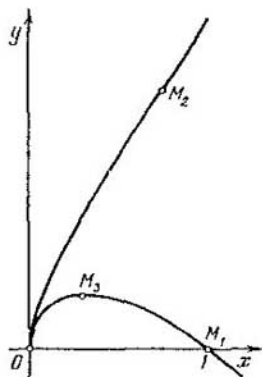


Fig. 60.

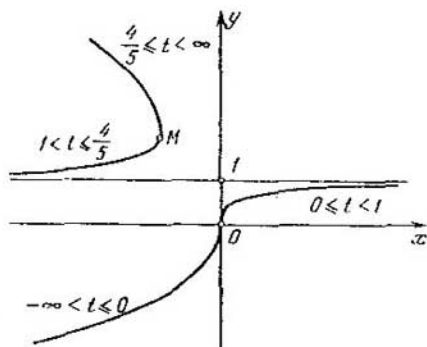


Fig. 61.

233. Las asíntotas son $x = 0$, $x + y \pm 2 = 0$; $O(0, 0)$ es el punto de inflexión con tangente $x - y = 0$ (fig. 62).

234. El origen de las coordenadas es punto de retroceso de segundo género. Los puntos de intersección con los ejes de las coordenadas son $O(0, 0)$ y $M(1, 0)$ (fig. 63).

235. La curva es simétrica con respecto a la recta $y = x$. La asíntota es $x + y - 1 = 0$. El origen de las coordenadas es punto de retroceso de primer género (para $t = 0$) con la tangente Ox . Además, la curva entra en el origen de las coordenadas tocando el eje Oy para $t = \pm \infty$ (fig. 64).

236. Las asíntotas son $2x + 9 = 0$, $2x - 9 = 0$, $x - y - 6 = 0$; $M_1(4, -4)$ es punto de retroceso de primer género con tangente $x + y = 0$. El eje Ox toca la curva en el punto $M_2(16/3, 0)$ y el eje Oy lo hace en el punto $M_3(0, -16/3)$ (fig. 65).

237. La curva es simétrica con respecto al eje Oy . Las asíntotas son $y = \pm x - 1$; $O(0, 0)$ es punto singular triple con tangentes $x = 0$ e $y = 0$. Los puntos de inflexión son $M_{1,2}(\pm 2\sqrt[4]{27}, 2\sqrt{3})$ (fig. 66).

238. La curva es simétrica con respecto al eje Oy ; $M_{1,2}(\pm 2, 0)$ son puntos de retroceso de primer género con tangentes $\pm x + y =$

$-2 = 0$. En los puntos $M_3(0, 2/3)$ y $M_4(0, 2)$ las tangentes son paralelas al eje Ox ; $M_{5,6}(\pm \frac{2}{3}\sqrt{5}, \frac{2}{3})$ son puntos de inflexión (fig. 67).

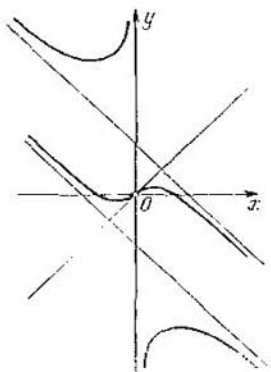


Fig. 62.

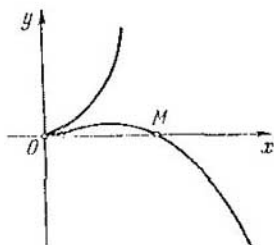


Fig. 63.

239. Ox es eje de simetría. No hay asíntotas ni puntos singulares. La línea corta al eje Ox en el punto $M_1(-1, 0)$ y al eje Oy en los puntos $M_{2,3}(0, \pm 1)$. Las tangentes a la línea son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{2,3}$ y al eje Oy en el punto M_1 . Los puntos $M_{2,3}$ son de inflexión (fig. 68).

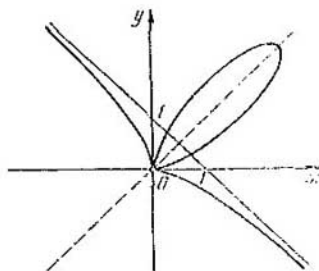


Fig. 64.

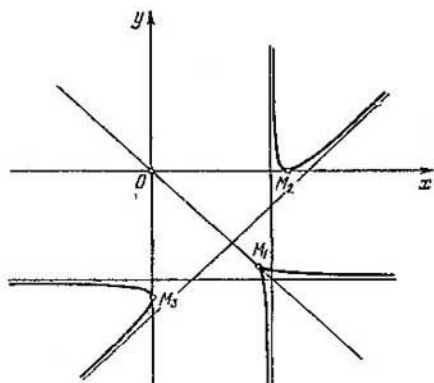


Fig. 65.

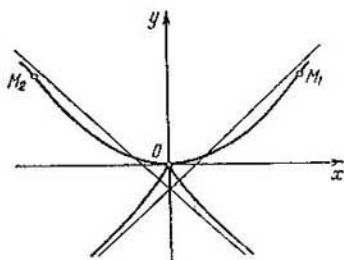


Fig. 66.

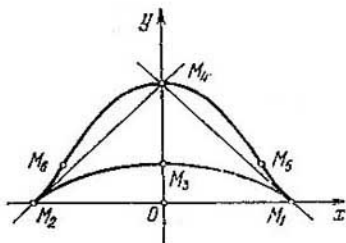


Fig. 67.

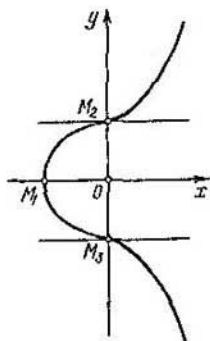


Fig. 68.

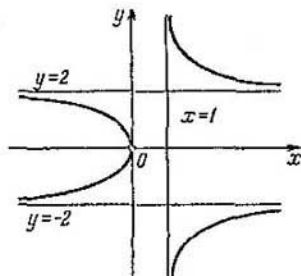


Fig. 69.

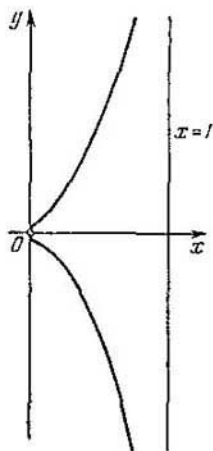


Fig. 70.

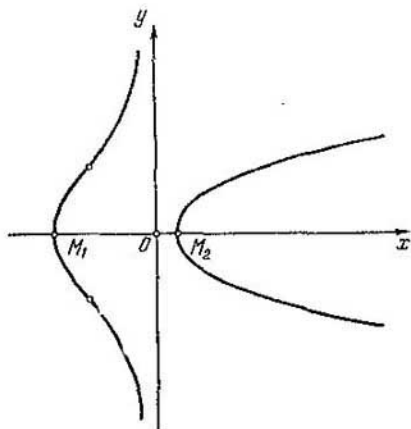


Fig. 71.

240. La línea es simétrica con respecto al eje Ox . Las asíntotas son $x = 1$, $y = \pm 2$. La línea toca el eje Oy en el origen de las coordenadas. En la franja del plano definido por las desigualdades $0 < x \leq 1$ no existen puntos que satisfagan a la ecuación dada (fig. 69).

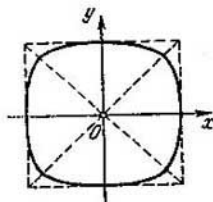


Fig. 72.

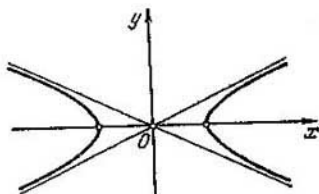


Fig. 73.

241. La línea es simétrica con respecto al eje Ox . La asíntota es $x = 1$. La tangente vertical es $x = 0$. La línea existe solamente para los valores de x en el intervalo de $0 \leq x < 1$, lo que se ve de la representación de su ecuación en la forma $y^2 = \frac{x(x^2+1)}{1-x}$ (fig. 70).

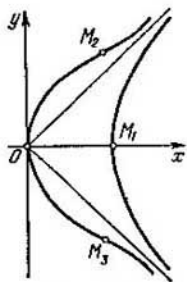


Fig. 74.

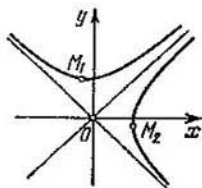


Fig. 75.

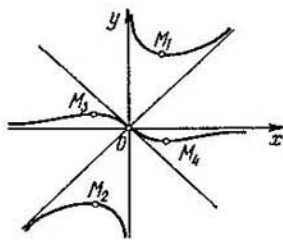


Fig. 76.

242. La línea es simétrica con respecto al eje Ox . La asíntota es $x = 0$. En los puntos $M_1 (-5/2, 0)$ y $M_2 (1/2, 0)$ las tangentes son paralelas al eje de las ordenadas. Hay dos puntos de inflexión (fig. 71).

243. La línea se encuentra por completo dentro del cuadrado con centro en el origen de coordenadas y con lados iguales a $2a$ y paralelos a los ejes de coordenadas. La línea es simétrica con respecto a los ejes de las coordenadas y a las bisectrices de los ángulos de las coordenadas (fig. 72).

244. La línea se parece a una hipérbola. Las asíntotas son $2y = \pm x$. Para $x^2 < 6$ no existen puntos que satisfagan a la ecuación dada, a excepción del punto $O(0, 0)$ que es aislado (fig. 73).

245. Las asíntotas son $y = \pm x$. Las tangentes son paralelas al eje Oy en los puntos $O(0, 0)$ y $M_1(\sqrt[3]{2}, 0)$. Hay dos puntos de inflexión, M_2 y M_3 (fig. 74).

246. Las asíntotas son $y = \pm x$. Las tangentes son paralelas a los ejes de coordenadas en los puntos $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{32}}, \frac{3}{\sqrt[3]{32}}\right)$ y $M_2\left(\frac{3}{\sqrt[3]{32}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right)$ (fig. 75).

247. Las asíntotas son $x = 0$, $y = 0$, $y = x$; $O(0, 0)$ es punto de inflexión con tangente $y = -x$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{1,2}(\sigma, (\sqrt{2} + 1)\sigma)$, $M_{3,4}(-\sigma, (\sqrt{2} - 1)\sigma)$; $\sigma = \pm 1$ (fig. 76).

248. Las asíntotas son $x = 0$, $y = 0$. La tangente es paralela al eje Ox en el punto $M(0, 1)$ (fig. 77).

249. La recta $x = 1$ y el punto aislado $O(0, 0)$.

250. Las asíntotas son $x = \pm 1$, $y = \pm 1$; $O(0, 0)$ es un punto aislado (fig. 78).

251. Las asíntotas son $y = \pm x$; $O(0, 0)$ es un punto aislado. La línea corta el eje Oy en los puntos $M_{1,2}(0, \pm\sqrt{2})$, en los cuales las tangentes son paralelas al eje Ox (fig. 79).

252. La línea es simétrica con respecto al eje Ox . Las asíntotas son $y = x + 1$, $y = -x - 1$, $x = 1$; las asíntotas $y = \pm(x + 1)$ cortan la línea en el punto $M_1(-1, 0)$; $O(0, 0)$ es un punto aislado. Además del punto O , no hay otros en la franja $-1 < x \leq 1$. La tangente a la línea es paralela al eje Oy en el punto M_1 y al eje Ox en los

puntos M_2 y M_3 con la abscisa $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (fig. 80).

253. Las asíntotas $y - x \pm \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$, $y + x \pm \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$. El origen de coordenadas es un punto aislado. La tangente es paralela al eje Ox en los puntos $M_{1,2}(0, \pm a)$, y al eje Oy , en los puntos $M_{3,4}(\pm a, 0)$ (fig. 81).

254. La línea es simétrica con respecto al eje Ox . El punto $M_0(2, 0)$ es aislado. En los puntos $M_{1,2}(-2, \pm\sqrt{2})$ la tangente es paralela al eje Ox . Hay dos puntos de inflexión $M_{3,4}$ y una asíntota, $x = 0$ (fig. 82).

255. Las asíntotas son $3x + 4 = 0$, $3x \pm 3\sqrt{3}y - 8 = 0$; $O(0, 0)$ es un punto aislado. En $M(4, 0)$ la línea se interseca con el eje Ox . La tangente en este punto es $x = 4$ (fig. 83).

256. La línea se encuentra por completo dentro del cuadrado con el centro en el origen de las coordenadas y lados iguales a $\sqrt{2 + \sqrt{8}}$ y paralelos a los ejes de las coordenadas. La línea es simétrica con respecto a estos ejes y a las bisectrices de los ángulos de las coordena-

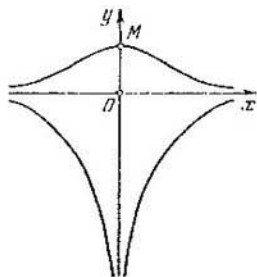


Fig. 77.

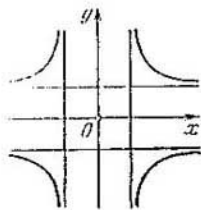


Fig. 78.

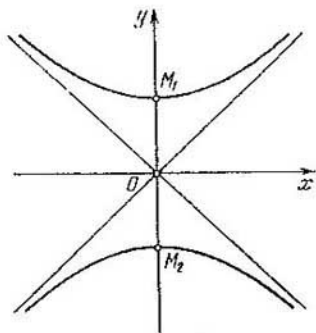


Fig. 79.

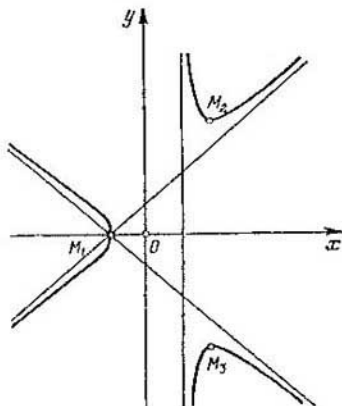


Fig. 80.

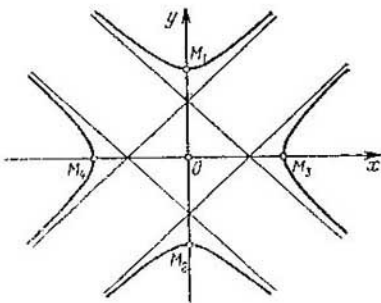


Fig. 81.

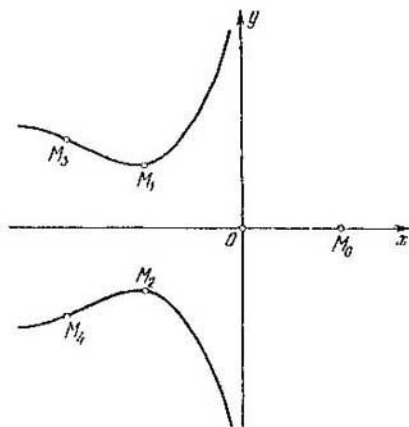


Fig. 82.

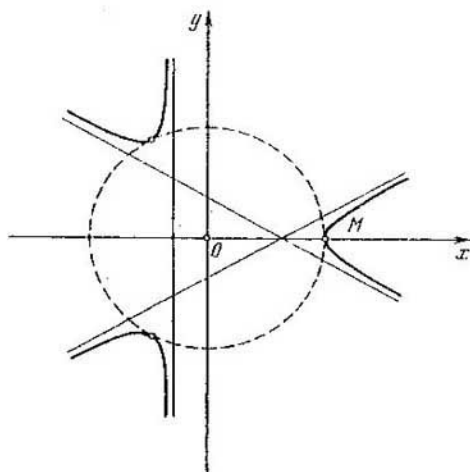


Fig. 83.

nadas. El origen de las coordenadas es un punto aislado. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{1,2}(0, \pm 1)$, $M_{3-6}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}\right)$. Las tangentes son paralelas al eje Oy en los puntos $M_{7,8}(\pm 1, 0)$, $M_{9-12}\left(\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{8}}}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (fig. 84).

257. La línea es simétrica con respecto al eje Ox y por completo se encuentra en la franja $-1 \leq x < 1$. La asíntota es $x = 1$. El origen de las coordenadas es un punto múltiple con coeficientes angulares de las tangentes $k = \pm 1$. La tangente es paralela al eje Oy en el punto $M_1(-1, 0)$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{2,3}$ con abscisa $x = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ (fig. 85).

258. La línea es simétrica con respecto a los ejes de las coordenadas. Los puntos de intersección con ellos son $O(0, 0)$, $M_{1,2}(0, \pm 1)$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{1,2}$ y al eje Oy en los puntos $M_{3-6}\left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $O(0, 0)$ es un punto múltiple con tangentes $y = \pm x$ (fig. 86).

259. La línea es simétrica con respecto al eje Ox ; $M(t, 0)$ es punto múltiple con tangentes $y = \pm(x-1)$. La asíntota es $x = 0$ (fig. 87).

260. La línea es simétrica con respecto a las bisectrices de los ángulos de las coordenadas. $O(0, 0)$ es punto múltiple con tangentes $x = 0$, $y = 0$. No hay otros puntos de intersección con los ejes de las coordenadas. Las tangentes a la línea son paralelas al eje Ox en dos puntos $M_1(\sqrt[3]{3/16}, \sqrt[3]{27/16})$, $M_2(-\sqrt[3]{3/16}, -\sqrt[3]{27/16})$ y al eje Oy en los puntos $M_3(\sqrt[3]{27/16}, \sqrt[3]{3/16})$, $M_4(-\sqrt[3]{27/16}, -\sqrt[3]{3/16})$. No hay asíntotas (fig. 88).

261. La línea es simétrica con respecto a los ejes de las coordenadas y se encuentra dentro del rectángulo acotado por las rectas $x = \pm 1$, $y = \pm 1/2$; $O(0, 0)$ es punto múltiple con tangentes $y = \pm x$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{3-6}(\pm \sqrt{2}/2, \pm 1/2)$ y al eje Oy en los puntos $M_{1,2}(\pm 1, 0)$ (fig. 89).

262. La línea es simétrica con respecto al eje Ox . Las asíntotas son $y = \pm 1$, $x = -1$, $x = -2$; $O(0, 0)$ es punto múltiple con tangentes $y\sqrt{2} = \pm x$ (fig. 90).

263. Las tangentes son paralelas al eje Ox en dos puntos $M_{2,3}(1/3, +2/3\sqrt{3})$; el punto $M_1(1, 0)$ es múltiple con tangentes $y = \pm(x-1)$. La tangente es paralela al eje Oy en el punto $O(0, 0)$ (fig. 91).

264. La línea es simétrica con respecto a las bisectrices de los ángulos de las coordenadas; $O(0, 0)$ es punto múltiple con tangentes $x = 0$, $y = 0$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos

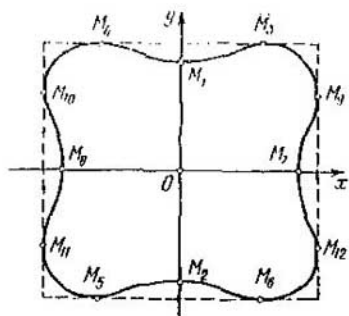


Fig. 84.

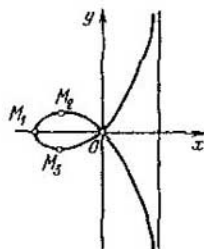


Fig. 85.

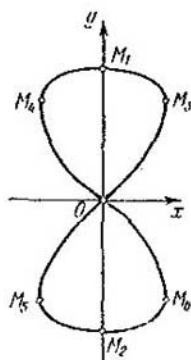


Fig. 86.

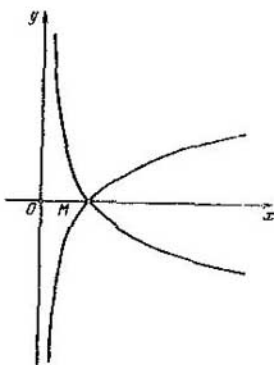


Fig. 87.

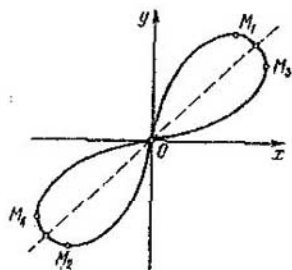


Fig. 88.

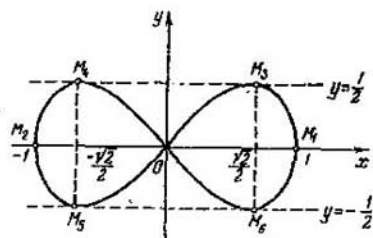


Fig. 89.

$M_{1,2}(\sigma_1^1/\sqrt{3}, \sigma_1^4/\sqrt{27})$ y al eje Oy en los puntos $M_{3,4}(\sigma_1^4/\sqrt{27}, \sigma_1^1/\sqrt{3})$, donde $4\sigma = \pm 1$ (fig. 92).

265. La asíntota $y = -x + \frac{4}{3}$ se interseca con la línea en el punto $M_1(1/9, 2/9)$; $O(0, 0)$ es un punto de retroceso de primer género con tangente $x = 0$. En el punto $M_2(1, 0)$ la tangente es paralela al eje Oy y en el punto $M_3(2/3, \sqrt[3]{4}/3)$, al eje Ox (fig. 93).

266. No hay asíntotas. $O(0, 0)$ es punto de retroceso de primer género con tangente $y = x$. La línea corta el eje Ox en el punto $M_1(27, 0)$. La tangente es paralela al eje Ox en el punto $M_2(12, 4)$ (fig. 94).

267. La línea es simétrica con respecto al eje Ox ; $O(0, 0)$ es punto de retroceso de primer género con tangente $y = 0$. Las asíntotas son $x = a$, $x \pm y = -a/2$. En la franja del plano $0 < x \leq a$ no hay puntos que satisfagan la ecuación de la línea (fig. 95).

268. $O(0, 0)$ es punto de retroceso de segundo género con tangente $y = 0$; $M_1\left(\frac{64}{225}, \frac{28672}{759375}\right)$ es punto de inflexión. En el punto $M_2\left(\frac{16}{25}, \frac{256}{3125}\right)$ la tangente es paralela al eje Ox . En el punto $M_3(1, 0)$ la línea corta el eje Ox (fig. 96).

269. La línea es simétrica con respecto al eje Oy ; $O(0, 0)$ es un punto singular por el cual pasan tres arcos. Las tangentes en él son $y = 0$, $x \pm y = 0$. No hay puntos de inflexión ni asíntotas. Los puntos en los cuales las tangentes son paralelas a los ejes de coordenadas son $M_{1,2}(\pm\sqrt{2}/4, 1/4)$, $M_{3,4}(\pm\sqrt{6}/9, 2/9)$ (fig. 97).

270. La línea es simétrica con respecto al eje Oy ; $O(0, 0)$ es punto autotangencial con tangente $y = 0$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{1,2}(\pm 6, 12)$ y al eje Oy en los puntos $M_{3,4}(\pm 6\sqrt{2}, 8)$. Hay dos puntos de inflexión $M_{5,6}$ (fig. 98).

271. La línea es simétrica con respecto al eje Ox ; $O(0, 0)$ es punto singular triple con tangentes $x = 0$, $y = 0$. Las tangentes son paralelas al eje Ox en los puntos $M_{1,2}(\sqrt{12}, \pm\sqrt{6}\sqrt{12})$ y al eje Oy en los puntos $M_{3,4}(4, \pm 4)$ (fig. 99).

272. La línea es simétrica con respecto a los ejes de las coordenadas; $O(0, 0)$ es punto autotangencial con tangente $y = 0$. La línea corta el eje Ox en los puntos $M_{1,2}(\pm 1, 0)$ en los cuales las tangentes son paralelas al eje Oy . En los puntos $M_{3-6}(\pm\sqrt{6}/3, \pm 2\sqrt{3}/9)$ las tangentes son paralelas al eje Ox ; M_{7-10} son puntos de inflexión (fig. 100).

273. Las asíntotas son $y = \pm x$; $O(0, 0)$ es punto múltiple con tangentes $x = 0$, $y = 0$. Hay cinco puntos de inflexión (fig. 101).

274. La línea se encuentra por completo dentro del cuadrado con el centro en el origen de las coordenadas y lados iguales a 4 y paralelos a los ejes de coordenadas. La línea es simétrica con respecto a los ejes de las coordenadas y a las bisectrices de los ángulos de éstas. $O(0, 0)$ es un punto singular cuádruple con tangentes $x = 0$, $y = 0$. Las tan-

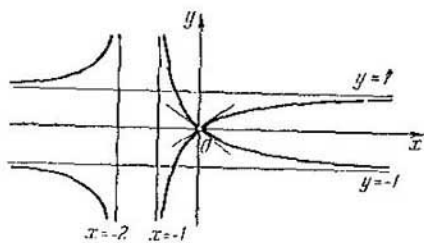


Fig. 90.

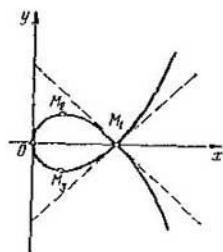


Fig. 91.

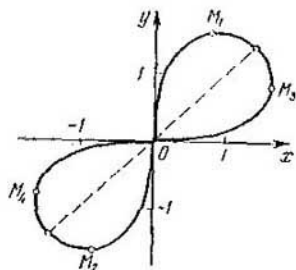


Fig. 92.

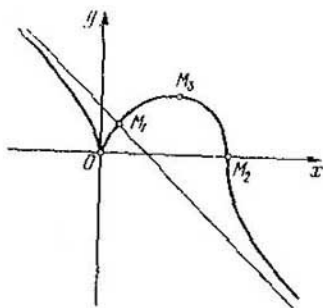


Fig. 93.

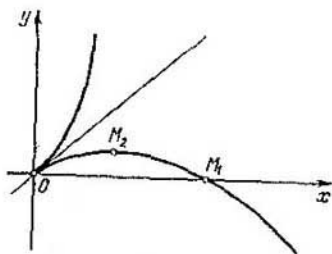


Fig. 94.

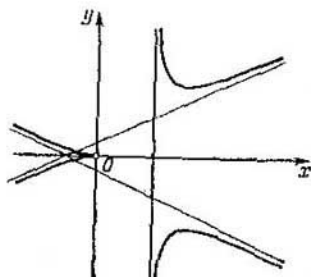


Fig. 95.

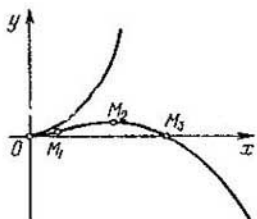


Fig. 96.

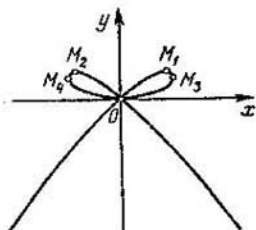


Fig. 97.

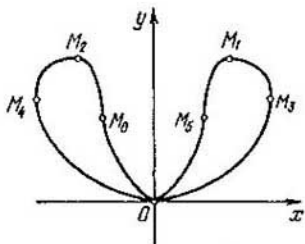


Fig. 98.

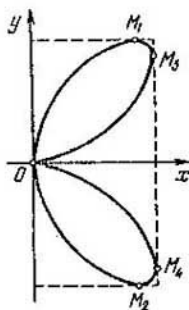


Fig. 99.

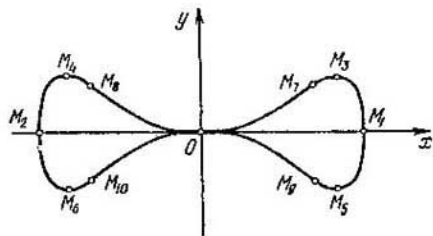


Fig. 100.

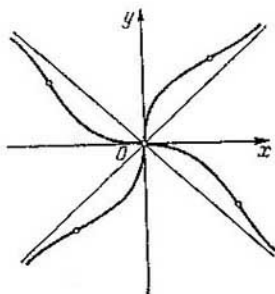


Fig. 101.

gentes son paralelas al eje Ox en los puntos M_{1-4} ($\pm\sqrt{2}, \pm 2$) y al eje Oy en los puntos M_{5-8} ($\pm 2, \pm\sqrt{2}$) (fig. 102).

275. Puesto que la función $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ es periódica con periodo 2π , es suficiente examinar el valor de φ en el intervalo $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Como el punto $(2\pi - \varphi, -r)$ es idéntico al punto $(\pi - \varphi, r)$ y los puntos

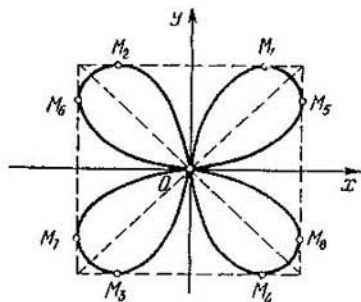


Fig. 102.

(φ, r) y $(\pi - \varphi, r)$ son simétricos con respecto a la recta $\varphi = \pi/2$, esta recta es el eje de simetría de la curva. Al variar el ángulo polar dentro de los límites de $0 \leq \varphi \leq \pi$ $r = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ será positivo, por eso para los valores indicados de φ la curva se encontrará por encima del eje polar. En virtud de la simetría con respecto a la recta $\varphi = \pi/2$ la curva estará por encima del eje polar. La curva tiene el punto múltiple $(\pi/2, 1)$. Hay una asíntota paralela al eje polar y alejada de éste en dos unidades. Por la fórmula $\operatorname{tg} \mu = r/r'$ (véase el problema 150) obtenemos

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{sen} \varphi. \quad (*)$$

Por consiguiente, la curva toca el radio vector del punto de tangencia solamente si $\varphi = 0$. En el punto M_0 múltiple las tangentes cortan al eje de simetría en un ángulo de 45° . Como la tangente a la curva es paralela al eje polar si $\mu + \varphi = k\pi$ entonces en estos puntos $\operatorname{tg} \mu = -\operatorname{tg} \varphi$. Comparando esto con la igualdad (*), obtenemos $\varphi = k\pi$; por lo tanto, la tangente buscada es el eje polar. Como la tangente es perpendicular al eje polar, si $\mu + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{tg} \mu = \operatorname{ctg} \varphi$ y, en virtud de (*), $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{sen} \varphi$, de donde $\cos \varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$, y la $\operatorname{tg}(\varphi/2) \approx 1/2$. Introduciendo las coordenadas cartesianas por las fórmulas $x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$, obtenemos dos puntos M_1 y M_2 en los cuales las tangentes son perpendiculares al eje polar: $x_1 \approx 0,3$, $y_1 \approx 0,4$; $x_2 \approx -0,3$, $y_2 \approx 0,4$ (fig. 103).

276. Fig. 104. En el polo la espiral tiene un punto de inflexión. A medida que se aleja del polo la distancia entre las espiras decrece indefinidamente.

277. Si r, φ son las coordenadas polares generalizadas (es decir r puede tomar un valor de cualquier signo), entonces la ecuación $r^2\varphi =$

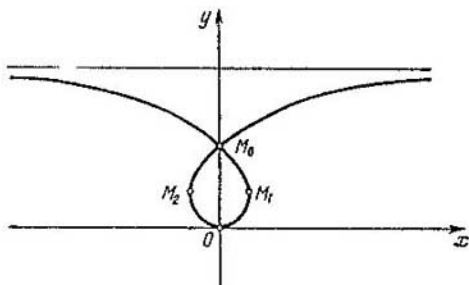


Fig. 103.

$= a^2$ define dos curvas simétricas con respecto al polo. Cada una de las curvas se acerca indefinidamente al polo y se aproxima asintóticamente al eje polar (fig. 105).

278. Fig. 106. El polo es un punto de retroceso de primer género. El eje polar en este punto es tangente.

279. Sea $a > 0$. Cuando $\varphi \rightarrow 0$, la línea se acerca asintóticamente a la recta paralela al eje polar y se halla a una distancia l del mismo. Cuando φ crece indefinidamente, la línea da un conjunto innumerable de vueltas alrededor del polo, aproximándose asintóticamente a la circunferencia de radio $r = a$ (fig. 107). Para $a = 0$ se obtiene una espiral hiperbólica (véase el problema 169, fig. 41).

280. La curva es simétrica con respecto a los ejes del sistema de coordenadas cartesianas cuyo eje Ox coincide con el eje polar. La curva corta el eje Ox en los puntos $M_{1,2} (\pm a, 0)$, $O (0, 0)$, además, el punto O es autotangencial con tangente $y = 0$. La curva tiene dos puntos múltiples: $M_3 (0, a/\sqrt{2})$ y $M_4 (0, -a/\sqrt{2})$ (fig. 108).

281. Fig. 109.

282. La familia está compuesta por las elipses que tocan el eje Oy en el origen de coordenadas y por las rectas $y = 1/2$ e $y = -1/2$. Forma parte de la familia también el eje Ox (fig. 110).

283. Cuando $C = 0$, es un par de rectas $x = 0, x - 2y = 0$. Cuando $C \neq 0$, son hipérbolas semejantes cuyas asíntotas son paralelas a las rectas indicadas. Los centros de las hipérbolas $O^*(C, C)$ llenan la recta $x - y = 0$. Una de las ramas de las hipérbolas toca el eje Ox en el origen de las coordenadas (fig. 111).

284. a) Familia de elipses confocales; b) familia de hipérbolas confocales (fig. 112).

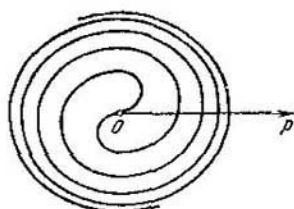


Fig. 104.

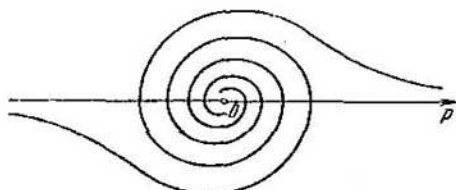


Fig. 105.

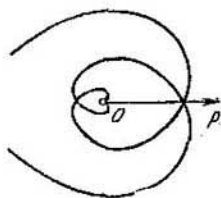


Fig. 106.

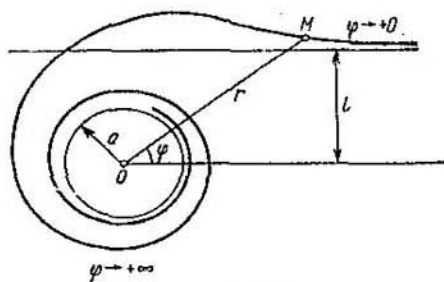


Fig. 107.

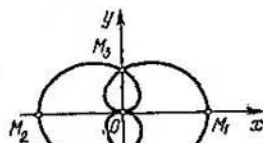


Fig. 108.

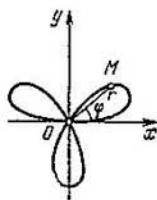


Fig. 109.

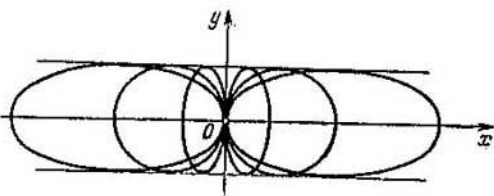


Fig. 110.

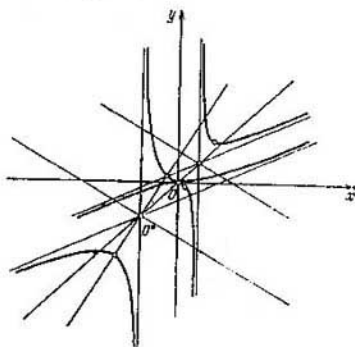


Fig. 111.

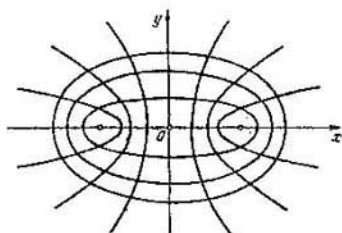


Fig. 112.

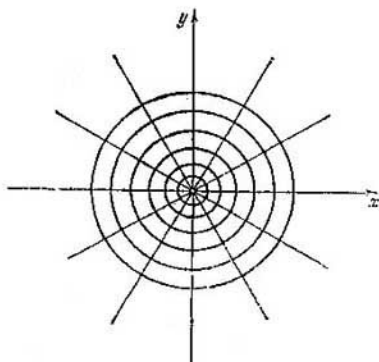


Fig. 113.

287. Circunferencias concéntricas cuyos centros coinciden con el del haz (fig. 113).

288. $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ (fig. 114).

289. $x^2 + \frac{y^2}{2} = C$ (fig. 115).

290. La familia de circunferencias intersecantes cuya línea de centros está orientada por la cuerda común de la familia dada. Colocando el origen de las coordenadas en el punto medio de la cuerda común y orientando el eje Ox por la cuerda en cuestión, obtenemos la ecuación $(x - C)^2 + y^2 = C^2 - a^2$ (fig. 116).

291. $y = \pm a$ (fig. 117). 292. $x = 0, y = 0$ (fig. 118).

293. $x^2 + y^2 = p^2$ (fig. 119). 294. $y = 0$ (fig. 120).

295. El discriminante $y = 0$ consta de los puntos singulares de las líneas de la familia (fig. 121).

296. El discriminante $y = 0$ consta de los puntos singulares de las líneas de la familia (fig. 122).

297. El discriminante se descompone en un par de rectas $x = y$ y $x - y - \frac{2}{9} = 0$. La primera consta de los puntos singulares de las curvas y la segunda es la envolvente (fig. 123).

298. La circunferencia $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ (fig. 124).

299. La parábola $y^2 + 4a(x - a) = 0$ (fig. 125).

300. Las hipérbolas $xy = \pm S/2$ (fig. 126).

301. $(A^2 + B^2)R^2 = C^2$.

302. La asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (fig. 127).

303. a) La parábola $y^2 = 4ax$ (fig. 128).

INDICACION. Tomemos la recta fijada por el eje Oy y orientemos el eje Ox a través del punto F . Sea $F(a, 0)$. Una vez escrita la ecuación del haz de rectas que pasan por F en la forma $y = C(x - a)$, obtenemos que las rectas de la familia indicada en el problema pasan por los puntos del eje Oy con las coordenadas $(0, -Ca)$ teniendo un coeficiente angular $-1/C$. b) Si $F(a, 0)$ y la circunferencia tiene la ecuación

$x^2 + y^2 = r^2$, entonces, para $r > a$ obtenemos la elipse $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - a^2} = 1$, para $r < a$ obtenemos la hipérbola $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{a^2 - r^2} = 1$ y para $r = a$ no hay envolvente (fig. 129).

304. Cicloide (fig. 130).

305. $x^2 + y^2 = (R - r)^2$, $x^2 + y^2 = (R + r)^2$ (figs. 131-133).

306. La tangente en el vértice de la parábola dada (fig. 134).

307. La envolvente se compone de la circunferencia $\left(x - \frac{3p}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3p}{4}\right)^2$ y de la directriz de la parábola $x = -p/2$ (fig. 135).

308. Escribamos las ecuaciones de la elipse en forma paramétrica:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

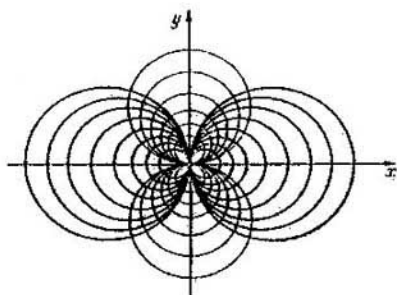


Fig. 114.

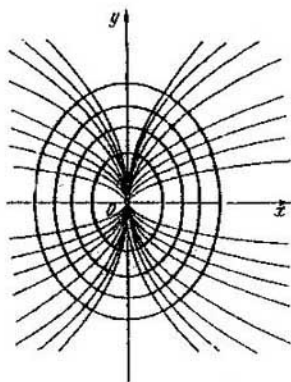


Fig. 115.

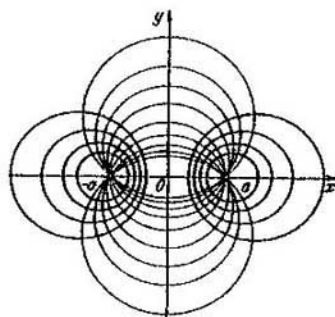


Fig. 116.

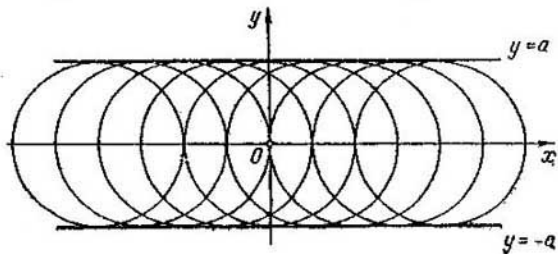


Fig. 117.

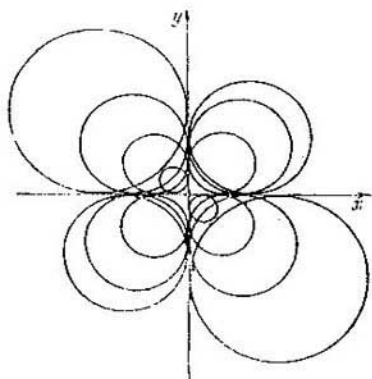


Fig. 118.

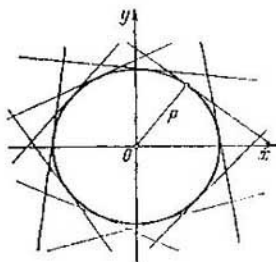


Fig. 119.

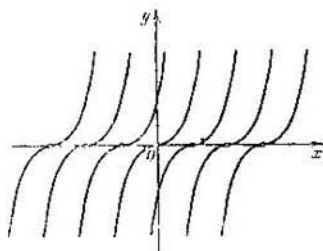


Fig. 120.

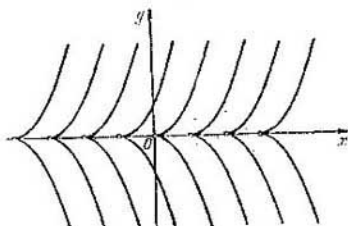


Fig. 121.

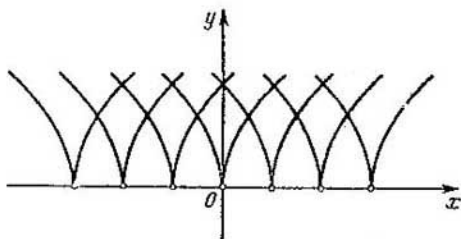


Fig. 122.

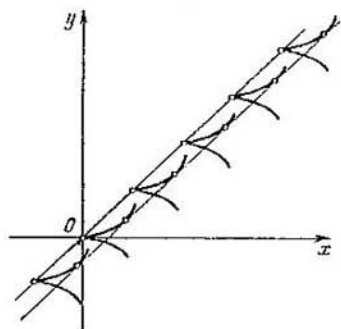


Fig. 123.

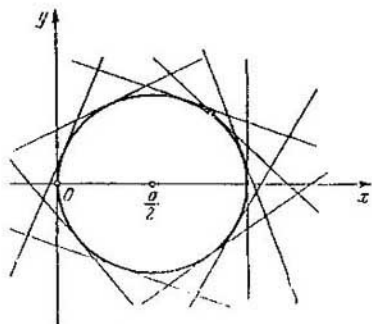


Fig. 124.

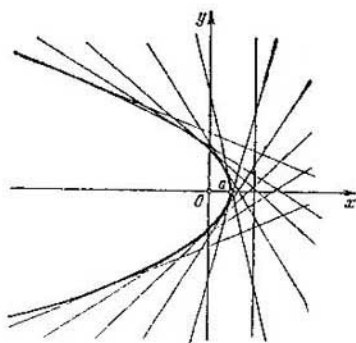


Fig. 125.

Examinemos el caso en que las cuerdas son paralelas al eje Oy . Las coordenadas del centro de la circunferencia de la familia son $x_0 = a \cos \varphi$, $y_0 = 0$, el radio $R = b \operatorname{sen} \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. La ecuación

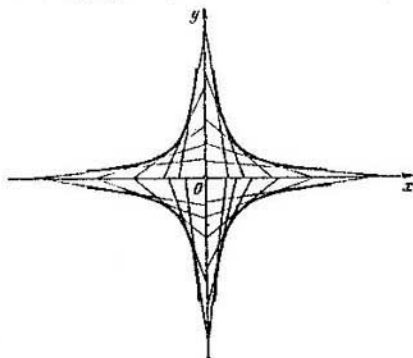


Fig. 126.

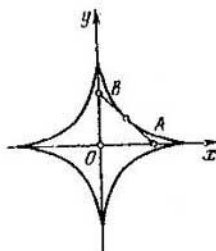


Fig. 127.

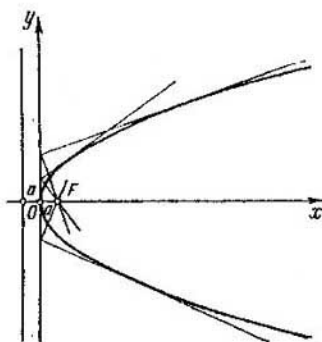


Fig. 128.

de la familia es

$$(x - a \cos \varphi)^2 + y^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

El discriminante se define por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} (x - a \cos \varphi)^2 + y^2 &= b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi, \\ a(x - a \cos \varphi) &= b^2 \cos \varphi. \end{aligned} \right\}$$

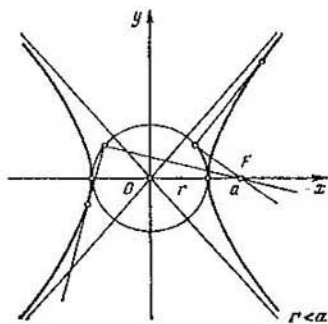
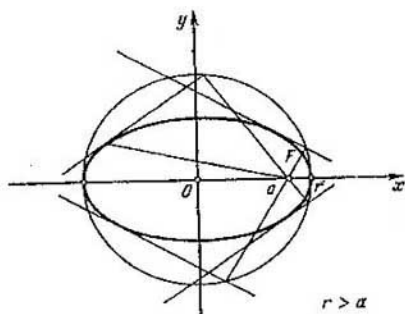


Fig. 129.

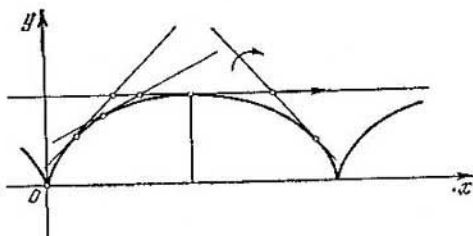


Fig. 130.

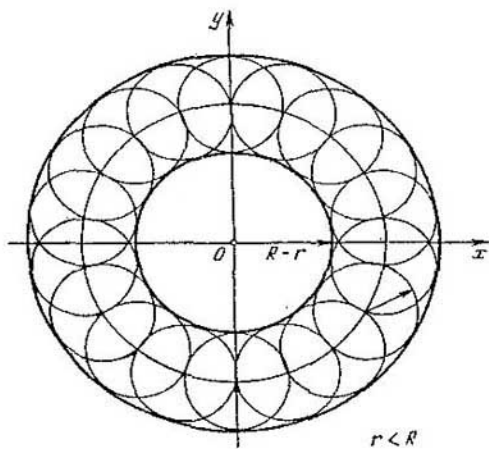


Fig. 131.

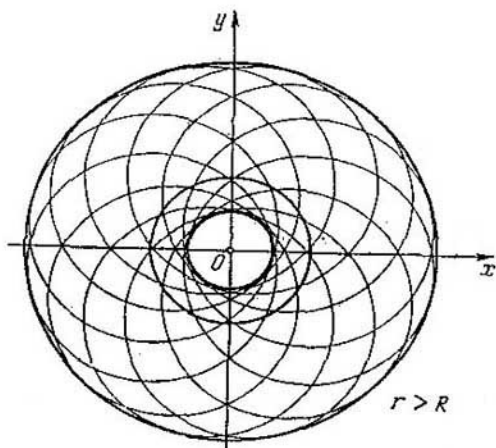


Fig. 132.

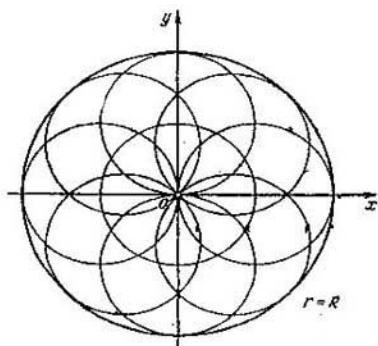


Fig. 133.

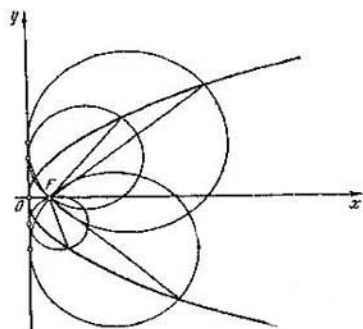


Fig. 134.

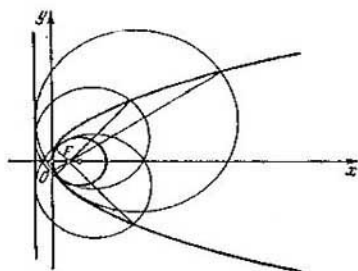


Fig. 135.

Como de la primera ecuación se deduce $|x - a \cos \varphi| \leq b \sin \varphi$, entonces de la segunda ecuación hallamos $b^2 |\cos \varphi| \leq ab \sin \varphi$ o bien $|\operatorname{tg} \varphi| \geq b/a$, es decir, el discriminante está definido sólo para aquellas circunferencias para las cuales $|\operatorname{tg} \varphi| \geq b/a$. Eliminemos el parámetro φ :

$$\cos \varphi = \frac{ax}{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{sen}^2 \varphi = 1 - \frac{a^2 x^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

La ecuación de la familia tomará la forma

$$\left(x - \frac{a^2 x}{a^2 + b^2}\right)^2 + y^2 = b^2 \left(1 - \frac{a^2 x^2}{(a^2 + b^2)^2}\right),$$

de donde $b^4 x^2 + y^2 (a^2 + b^2)^2 - b^2 (a^2 + b^2)^2 + a^2 b^2 x^2 = 0$, o bien

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Es fácil comprobar que para los valores indicados del parámetro φ , el discriminante será la envolvente (fig. 136).

Si las cuerdas son paralelas al eje Ox (fig. 137), entonces por razonamientos análogos hallamos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + b^2} = 1, \quad |\operatorname{tg} \varphi| \leq \frac{d}{a}.$$

309. INDICACIÓN. El problema se resuelve igual que el precedente. Las ecuaciones paramétricas de la hipérbola se deben tomar de forma $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$. Si las cuerdas son paralelas al eje Oy , entonces la envolvente existe solamente para $b < a$. Su ecuación es $\frac{x^2}{a^2 - b^2} -$

$-\frac{y^2}{b^2} = 1$. Ella envuelve sólo aquellas circunferencias para las cuales $|\operatorname{th} t| \leq b/a$ (fig. 138). Si las cuerdas son paralelas al eje Ox , entonces la envolvente existe para cualesquiera valores de a y b .

Para $b \neq a$ ella se define por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} = 1$,

para $b > a$ ella envuelve todas las circunferencias (fig. 139), mientras que para $b < a$ solamente aquellas para las cuales $|\operatorname{th} t| \leq b/a$ (fig. 140).

Para $b = a$ no hay envolvente (fig. 141).

310. La parábola $y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2}\right)$. Ella es envolvente de las circunferencias de una familia para las cuales $C \geq p/2$ (fig. 142).

311. $y^2 = 2(p + q)x$ (fig. 143).

312. Los puntos de la envolvente deben satisfacer al sistema de ecuaciones $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, $\frac{D(F, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = 0$.

313. Cuatro rectas $x \pm y = \pm 1$ (fig. 144).

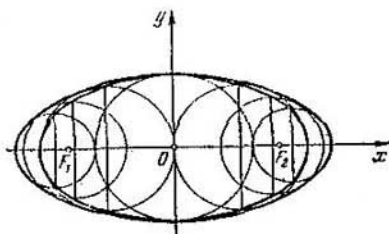


Fig. 136.

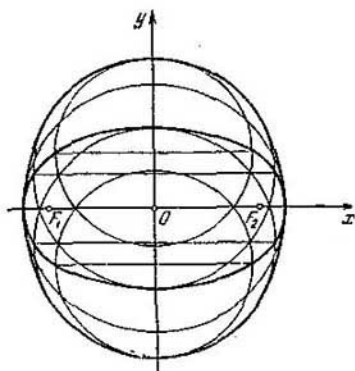


Fig. 137.

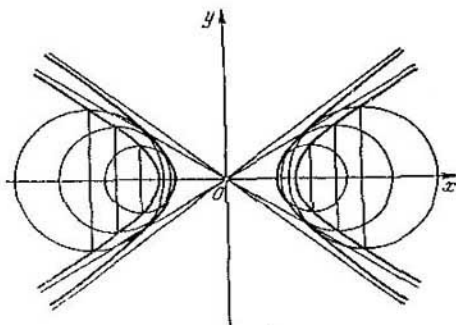


Fig. 138.

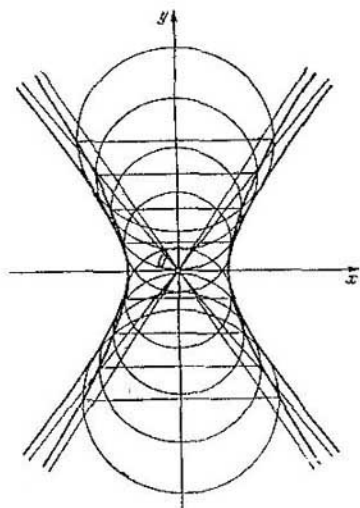


Fig. 139.

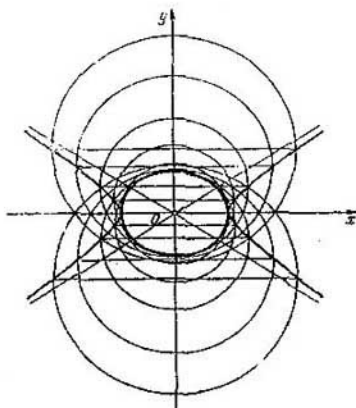


Fig. 140.

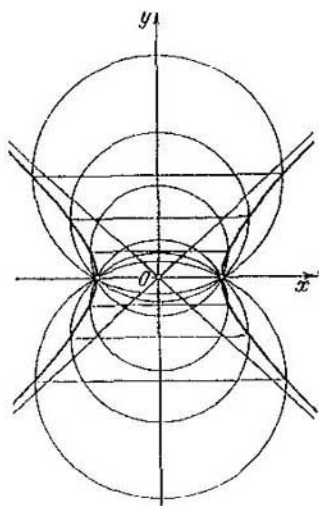


Fig. 141.

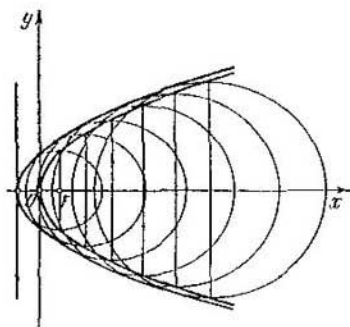


Fig. 142.

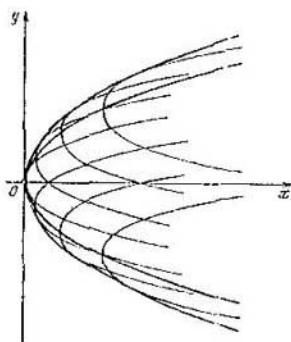


Fig. 143.

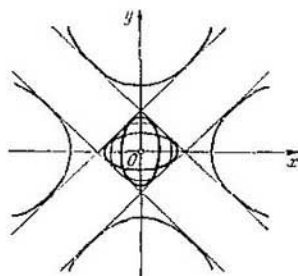


Fig. 144.

314. $x^h + y^h = a^h$, $h = m/(m-1)$; para $m = 2$ es una asteroide para $m = 1$ es la parábola $(x-y)^2 - a(2x+2y-a) = 0$, para $m = -2$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

315. Elijamos en el plano vertical dado el sistema de coordenadas xOy , colocando el origen del mismo en el punto dado y orientando el eje Oy verticalmente hacia arriba. Entonces las ecuaciones paramétricas de las líneas de la familia serán $x = v_0 t \cos \alpha$, $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}$, donde α es el parámetro de la familia. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= v_0 \cos \alpha, & \frac{\partial y}{\partial t} &= v_0 \sin \alpha - g t, \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= -v_0 t \sin \alpha, & \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= v_0 t \cos \alpha. \end{aligned}$$

Igualando al cero el jacobiano $\frac{D(x, y)}{D(t, \alpha)}$, obtenemos $v_0^2 t - g t^2 v_0 \times \sin \alpha = 0$, de donde $t = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$ y las ecuaciones paramétricas del discriminante tienen la forma

$$x = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{ctg} \alpha, \quad y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g \sin^2 \alpha}.$$

Eliminando α , obtenemos

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2v_0^2}.$$

Así, el discriminante es una parábola cuyo eje está orientado verticalmente hacia abajo por el eje Oy , el parámetro es igual a v_0^2/g y el vértice se encuentra en el punto $M_0(0, v_0^2/2g)$. El discriminante es una envolvente (fig. 145).

316. Las ecuaciones de la familia (fig. 146) son: $x = a \cos v \cos u$, $y = a \sin v \sin u$. Igualando a cero el jacobiano $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, obtenemos $\sin^2 v \cos^2 u - \cos^2 v \sin^2 u = 0$, o bien $\sin(u+v) \sin(u-v) = 0$, o bien $v = -u$, $v = \pi - u$, $v = u$, $v = -\pi + u$. El discriminante se compone de cuatro segmentos de las rectas

$$x \pm y = \pm a.$$

Estos son cuatro lados del cuadrado con vértices en los puntos de intersección de los diámetros de circunferencia que descansan sobre los ejes de coordenadas con la misma circunferencia. Cada uno de los lados del cuadrado es una envolvente (fig. 147).

$$317. s = \frac{1}{27} [(4 + 9x_2)^{3/2} - (4 + 9x_1)^{3/2}].$$

$$318. s = \sqrt{1+x_2^2} - \sqrt{1+x_1^2} - \ln \left| \frac{x_2}{x_1} \right| + \ln \frac{1 + \sqrt{1+x_1^2}}{1 + \sqrt{1+x_2^2}}.$$

$$319. s = a \left(\operatorname{sh} \frac{x_2}{a} - \operatorname{sh} \frac{x_1}{a} \right).$$

$$320. s = \ln \left| \frac{\operatorname{sh} x_2}{\operatorname{sh} x_1} \right|.$$

$$321. s = a (t_2^2 - t_1^2)/2.$$

322. $s = a (\ln \operatorname{sen} t_2 - \ln \operatorname{sen} t_1)$, donde $0 < t_1, t_2 \leq \pi/2$ o bien $\pi/2 \leq t_1, t_2 < \pi$.

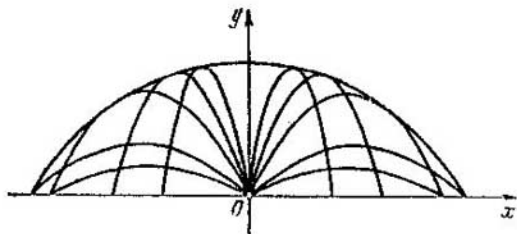


Fig. 145.

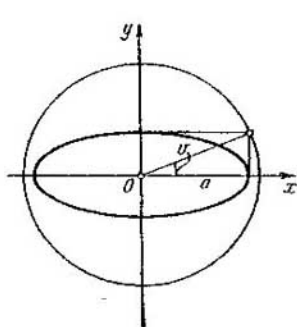


Fig. 146.

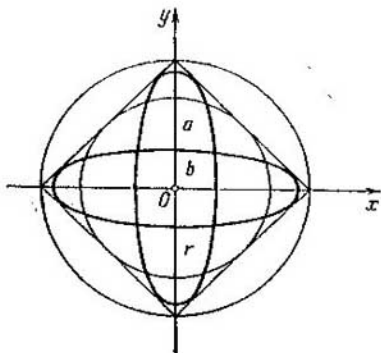


Fig. 147.

$$323. s = \ln \operatorname{tg} (5\pi/12).$$

$$324. s = 2\sqrt{3}.$$

$$325. s = \frac{15}{4} + \ln 2.$$

$$326. s = \ln \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}.$$

$$327. s = (\operatorname{ch} 4 - 1)/2.$$

$$328. s = 24a.$$

$$329. s = 2a[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].$$

$$330. s = 8a.$$

331. $s = \frac{1}{2} Sam (m + 1)$

333. $s = 8a$.

334. $s = 16af/3$.

335. $s = \frac{3}{2} \pi a$.

336. $s = \frac{a}{2} [2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})]$.

338. Una catenaria. El punto A es el vértice.

342. $x = R \cos (s/R)$, $y = R \sin (s/R)$.

343. $x = \operatorname{Arsh} (s/a)$, $y = \sqrt{a^2 + s^2}$.

344. $k = |\operatorname{sen} x| / (1 + \cos^2 x)^{3/2}$.

345. $k = a/y^2$.

346. $k = \sqrt{p/(p + 2x)^{3/2}} = p^2/(y^2 + p^2)^{3/2}$.

347. $k = \frac{6}{t(1 + 9t^2)^{3/2}}$. 348. $k = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \operatorname{cos}^2 t)^{3/2}}$.

349. $k = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}$.

350. $k = \frac{1}{4a |\operatorname{sen} (t/2)|}$. 351. $k = 2/(3a |\operatorname{sen} 2t|)$.

352. $k = (2 + \varphi^2)/a(1 + \varphi^2)^{3/2}$.

353. $k = \frac{3}{4a |\operatorname{cos} (\varphi/2)|}$.

354. $k = \frac{\operatorname{mod} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}$.

355, 356. $k = \frac{a^4 b^4}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}} = \frac{ab}{|a^2 - \varepsilon^2 x^2|^{3/2}}$,

donde ε es la excentricidad.

357. $k = 0$.

358. $k = \frac{\left| P \left(Q \frac{\partial Q}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + Q \left(P \frac{\partial P}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right|}{(P^2 + Q^2)^{3/2}}$.

359. INDICACION. $h = |t \times \Delta r|$, donde t es el vector unitario de la tangente.

363. $R = a \operatorname{ctg} t$.

367. El centro de curvatura de la elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ en el vértice A ($t = 0$) es $D(c^2/a, 0)$ y en el vértice B ($t = \pi/2$) es $E(0, -c^2/b)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$. Los puntos D y E se encuentran en la intersección de la perpendicular bajada desde el punto $C(a, b)$ a AB con los ejes de las coordenadas fig. 148).

368. $\left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}$, $x^2 + \left(y + \frac{c^2}{b}\right)^2 = \frac{a^4}{b^2}$.

369. $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 1.$

370. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2, \quad (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2.$

371. $\left(-\frac{1}{2} \ln 2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

372. Los puntos en los cuales la curvatura es mínima: $((2n + 1)\pi, a + d)$; los puntos en los cuales la curvatura es máxima: $(2n\pi, a - d)$ (n es un número natural cualquiera).

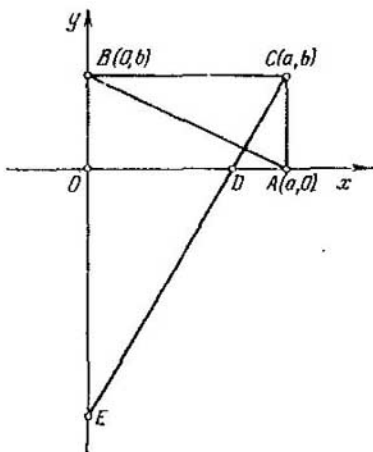


Fig. 148.

373. $A(3\pi/2, a)$ y $B(0, 0).$

376. $r = \frac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{p^2}; \quad x_0 = p + \frac{3y^2}{2p}, \quad y_0 = \frac{y^3}{p^2}.$

Hay tangencia de tercer orden en el vértice $O(0, 0)$ de la parábola.

377. Supongamos que la línea l_1 está definida por su ecuación vectorial $r_1 = r_1(s)$, donde s es la longitud del arco de esta línea, leído a partir del punto M y como origen O de la lectura de los radios vectores se toma el punto M . Escribamos las ecuaciones de la línea l_1 con respecto al sistema de referencia de Frenet, tomado en el punto M .

Sustituyendo en el desarrollo $r_1(s) = s^2 r_1 + \frac{s^3}{2} r_1'' + \dots$ las

expresiones $\dot{r}_1 = \dot{l}_1$, $r_1 = k_1 n_1$, obtenemos

$$x = s + \dots, \quad y = \frac{k_1}{2} s^2 + \dots \quad (*)$$

De un modo análogo para la línea l_2

$$x = s + \dots, \quad y = \frac{k_2}{2} s^2 + \dots \quad (**)$$

Sea P un punto sobre la tangente l , próximo al punto M , y supongamos que la perpendicular a l trazada en el punto P corta las líneas l_1 , l_2 en los puntos M_1 , M_2 . Entonces de las ecuaciones (*), (**), obtenemos, respectivamente,

$$|PM_1| = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \dots, \quad |PM_2| = \frac{1}{2} k_2 x^2 + \dots$$

Como $k_1 < k_2$, entonces $|PM_1| < |PM_2|$ (fig. 149).

$$380. \quad y = 1 \pm \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{8} \right).$$

$$381. \quad \left(y - \frac{8}{5} \right)^2 = \frac{2}{5} \left(\frac{7}{5} - x \right).$$

382. Es un punto, centro de la circunferencia.

$$383. \quad X = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad Y = \frac{b^2 - a^2}{b} \operatorname{sen}^3 t \quad (\text{fig. 150}).$$

$$384. \quad X = \frac{a^2 + b^2}{a} \operatorname{ch}^3 t, \quad Y = \frac{a^2 + b^2}{b} \operatorname{sh}^3 t \quad (\text{fig. 151}).$$

$$385. \quad X = -4x^3, \quad Y = 3x^2 + \frac{1}{2} \quad (\text{fig. 152}).$$

$$386. \quad X = \frac{1}{2k-1} [(2k-2)x - 4k^2 x^{4k-1}],$$

$$Y = \frac{1 + 2k(4k-1)x^{4k-2}}{2k(2k-1)x^{2k-2}} \quad (\text{fig. 153}).$$

$$387. \quad X = \frac{1}{2k} [(2k-1)x - (2k+1)^2 x^{4k+1}],$$

$$Y = \frac{1 + (2k+1)(4k+1)x^{4k}}{2k(2k+1)x^{2k-1}} \quad (\text{fig. 154}).$$

$$388. \quad X = 2x + \frac{1}{x}, \quad Y = \ln x - x^2 - 1 \quad (\text{fig. 155}).$$

$$389. \quad X = x + \cos x \frac{1 + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x}, \quad Y = -\frac{2 \cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \quad (\text{fig. 156}).$$

$$390. \quad X = x - \frac{1 + \cos^4 x}{\cos^3 x \operatorname{sen} 2x}, \quad Y = \operatorname{tg} x + \frac{1 + \cos^4 x}{\operatorname{sen} 2x},$$

$-\pi/2 < x < \pi/2$ (fig. 157).

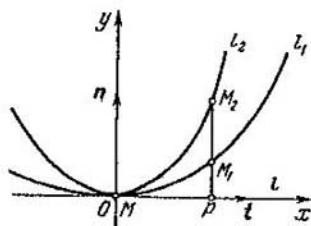


Fig. 149.

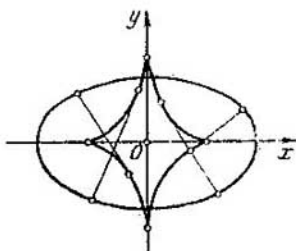


Fig. 150.

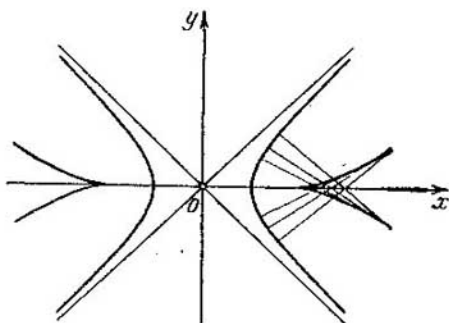


Fig. 151.

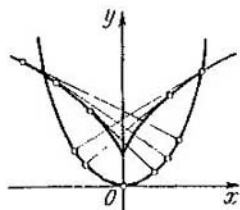


Fig. 152.

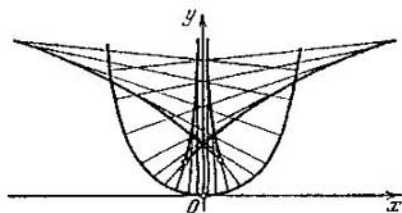


Fig. 153.

391. $X = a \ln \operatorname{tg}(t/2)$, $Y = a/\operatorname{sen} t$ o $Y = a \operatorname{ch}(X/a)$ (fig. 158).

392. $X = \frac{a}{3}(\cos \varphi - \cos^3 \varphi - 2)$, $Y = \frac{a}{3}(1 - \cos \varphi) \operatorname{sen} \varphi$.

Es una cardioide (fig. 159). Para la demostración es suficiente efectuar

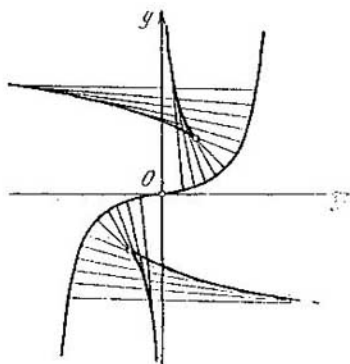


Fig. 154.

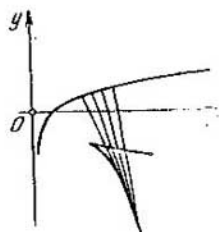


Fig. 145.

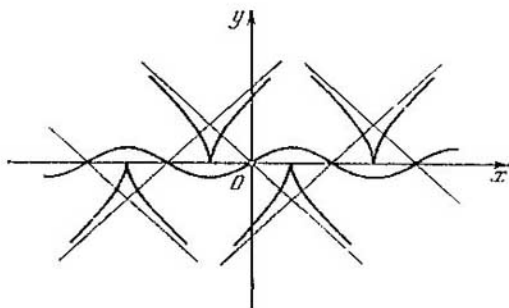


Fig. 156.

la sustitución del parámetro $\varphi = \pi - t$ y la transformación de las coordenadas por las fórmulas $X' = -(X - \frac{2}{3}a)$, $Y' = Y$.

393. Fig. 160. 394. Fig. 161.

395. Fig. 162. 396. $\ln a = a^{\pi/2}$.

397. $X = a (\cos t + (t - C) \operatorname{sen} t)$, $Y = a (\operatorname{sen} t - (t - C) \cos t)$, donde C es el parámetro de la familia de evolventes (fig. 163).

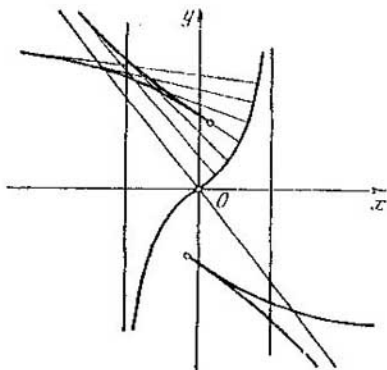


Fig. 157.

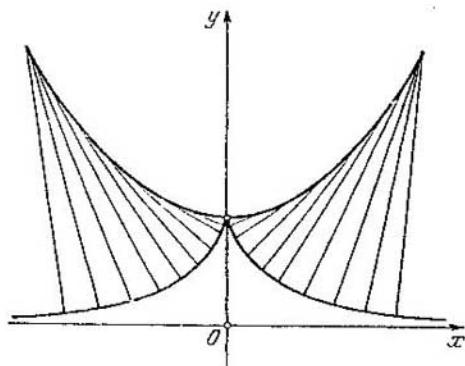


Fig. 158.

398. $X = a (\ln \operatorname{tg} (t/2) + \cos t)$, $Y = a \operatorname{sen} t$, la tractriz (véase la fig. 158).

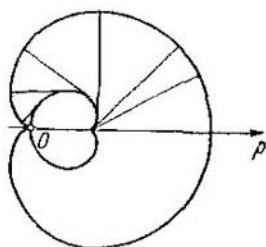


Fig. 159.

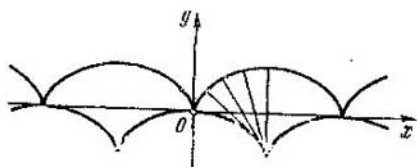


Fig. 160.

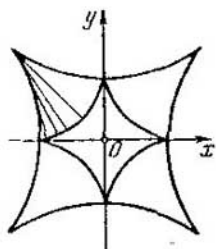


Fig. 161.

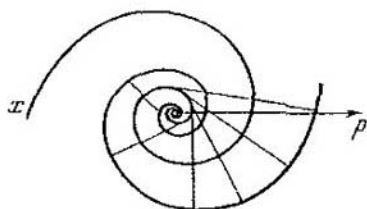


Fig. 162.

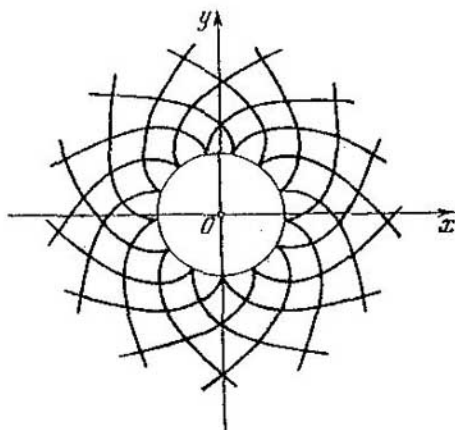


Fig. 163.

$$399. X = \frac{t}{2} + \frac{2}{\sqrt{t^2+4}} (C - \ln(t + \sqrt{t^2+4})), \quad Y = \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} \times$$

$$\times (C - \ln(t + \sqrt{t^2+4})).$$

$$400. s = 6a.$$

INDICACION. Válgase de la siguiente propiedad de la evoluta: si el radio de curvatura de la línea se cambia monótonamente, entonces la longitud del arco de la evoluta comprendido entre dos puntos suyos es igual a la diferencia de valores del radio de curvatura de la línea inicial en estos puntos.

$$401. 402. s = 8a.$$

$$403. (27s+8)^2 = \left[4 + 9 \frac{36R^2}{(27s+8)^2} \right]^3.$$

$$404. s = \sec \alpha + \ln \operatorname{tg} (\alpha/2), \quad k = \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha, \quad \text{donde } \operatorname{tg} \alpha = x.$$

$$405. R^2 = 2as.$$

$$406. R^2 + a^2 = a^2 e^{-2s/a}.$$

$$407. s^2 + 9R^2 = 16a^2.$$

408. Una circunferencia de radio $1/a$, si $a \neq 0$, y una recta si $a = 0$.

409. Una espiral logarítmica.

410. Supongamos que $s = \operatorname{tg} \alpha$. Entonces

$$x = \frac{a}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha}, \quad y = \frac{a}{\cos \alpha};$$

de aquí, $y = \operatorname{ch} (x/2)$ es una catenaria.

411. $x = a(2t + \operatorname{sen} 2t)$, $y = a(2 - \cos 2t)$, es una cicloide.

412. $x = -\frac{a}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$, $y = -a \operatorname{ctg} \alpha$, una parábola.

413. $x = \frac{a}{2} e^\alpha (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)$, $y = \frac{a}{2} e^\alpha (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)$, es una espiral logarítmica.

414. $x = a(\alpha \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)$, $y = a(\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha)$, la evolvente de una circunferencia.

415. $x = a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$, $y = \frac{a}{\cos \alpha}$, es una catenaria.

416. Si los ejes de coordenadas se eligen del modo indicado en la fig. 164, entonces las ecuaciones paramétricas de la cicloide requerida se escriben de la forma

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

La velocidad de un cuerpo que cae se determina por la fórmula $v = \sqrt{2gh}$. En nuestro problema

$$h = y - y_0 = a(\cos t_0 - \cos t),$$

donde t_0 y t corresponden a los puntos M_0 y M . Por eso

$$v = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}.$$

Pero la velocidad v es la derivada del camino s con respecto al tiempo T :

$$v = \frac{ds}{dT}.$$

Observando que para la cicloide

$$ds = 2a \operatorname{sen}(t/2) dt.$$

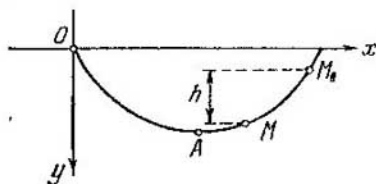


Fig. 164.

obtenemos la ecuación diferencial para determinar el tiempo T :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2a \operatorname{sen}(t/2)}{\sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}.$$

Integrándola, encontramos el tiempo T gastado por el punto material para trasladarse desde M_0 a A :

$$\begin{aligned} T &= \int_{t_0}^{\pi} \frac{2a \operatorname{sen}(t/2) dt}{\sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}} = \\ &= -2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{d \cos(t/2)}{\sqrt{\cos^2(t_0/2) - \cos^2(t/2)}} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}, \end{aligned}$$

que es lo que se necesitaba demostrar.

417. $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$ (fig. 165). Las proyecciones son: 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $y = a \operatorname{sen}(z/b)$; 3) $x = a \cos(z/b)$.

418. $x = a \cos \varphi$, $y = a \operatorname{sen} \varphi$, $z = be^{b\varphi}$.

419. Eligiendo del modo correspondiente el sistema de coordenadas, escribamos las ecuaciones de la imagen de la curva de Viviani (fig. 166) en la forma

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ x^2 + y^2 - Rx &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Tomando por parámetro u la longitud del punto M sobre la esfera, de los triángulos AOP , OPM y OPQ hallamos

$$x = R \cos^2 u, \quad y = R \cos u \operatorname{sen} u, \quad z = \pm R \operatorname{sen} u.$$

Son posibles también otras ecuaciones paramétricas. En particular, escribiendo la ecuación

$$x^2 + y^2 - Rx = 0$$

en la forma

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

y suponiendo que

$$x - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \cos t, \quad y = \frac{R}{2} \operatorname{sen} t,$$

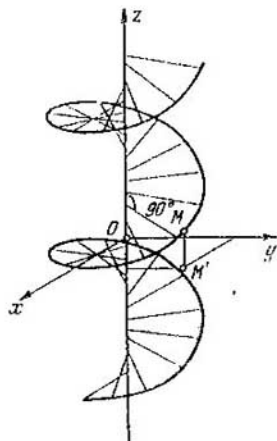


Fig. 165.

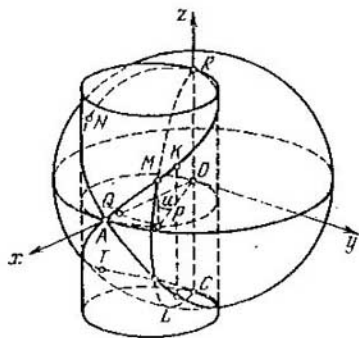


Fig. 166.

obtenemos

$$x = \frac{R}{2} (1 + \cos t), \quad y = \frac{R}{2} \operatorname{sen} t, \quad z = \pm R \operatorname{sen} \frac{t}{2}.$$

420. a) Introduciendo el sistema polar de coordenadas, la posición del punto M la determinamos por su distancia r a partir del punto O , por la latitud $\psi = \widehat{POL}$ y por la longitud $\varphi = \widehat{xOP}$ (fig. 167). Según el enunciado $\psi = \frac{\pi}{2} - \lambda$, donde $\lambda = \widehat{xOL}$ y $\varphi = \omega t$. Determinando r de la condición $\frac{dr}{dt} = mr$ y sustituyendo el valor hallado de

$r = r_0 e^{mt}$ en las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \psi \cos \varphi, \\ y &= r \cos \psi \sin \varphi, \\ z &= r \operatorname{sen} \psi, \end{aligned} \right\}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} x &= a e^{kt} \cos \varphi, & y &= a e^{kt} \sin \varphi, & z &= b e^{kt}, \\ \text{donde } k &= m/\omega, & a &= r_0 \operatorname{sen} \lambda, & b &= r_0 \cos \lambda. \end{aligned}$$

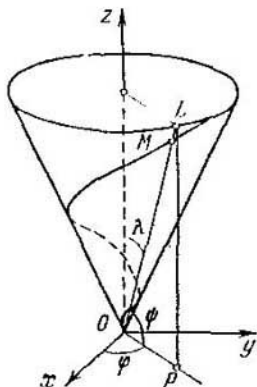


Fig. 167.

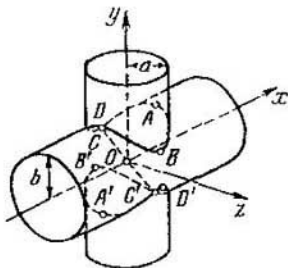


Fig. 168.

b) $x = at \cos t, y = at \sin t, z = bt.$

$$421. \quad \left. \begin{aligned} x^2 + z^2 &= a^2, \\ y^2 + z^2 &= b^2, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 t}, \\ z &= a \sin t. \end{aligned} \right\}$$

Para $a = b$ obtenemos dos elipses (fig. 168).

422. INDICACION. Eliminar el parámetro t .

423. $y = x^2, z = 0; z = x^2, y = 0; z^2 = y^3, x = 0.$

424. $x^2 - y^2 = a^2, z = 0; x = a \operatorname{ch}(z/c), y = 0; y = a \operatorname{sh}(z/c), x = 0.$

425. $x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0, z = 0.$

INDICACION. Eliminar z de estas ecuaciones.

428. Por ejemplo, $y = x^2$, $z = e^x$.

429. Las ecuaciones de los cilindros buscados son:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1, \quad \frac{y}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1.$$

432. Las rectas $x = y$, $z = 1$; $x = -y$, $z = 1$; $x = y$, $z = -1$; $x = -y$, $z = -1$.

$$433. \frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y-1}{2} = \frac{z - \frac{a\pi}{4}}{a}.$$

$$434. \frac{x-e}{e} = \frac{y-e^{-1}}{-e^{-1}} = \frac{z-1}{2}.$$

$$435. x = y + 1 = z.$$

$$436. x + \frac{a}{2} (4 - \pi) = y = \frac{1}{\sqrt{2}} z - a; \quad \eta = \frac{\pi}{4}.$$

$$437. M_1 (-2, 12, 14), M_2 (-2, 3, -4).$$

$$438. \left. \begin{array}{l} x = 2, \\ 2y - z = 0, \end{array} \right\} y + 2z = 0.$$

$$439. \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}; \quad x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

De la intersección de las tangentes con el plano xOy resulta la parábola $y = \frac{3}{4}x^2$.

$$441. \frac{X-x}{2yz} = \frac{Y-y}{z(R-2x)} = \frac{Z-z}{-Ry}; \quad 2yzX + z(R-2x)Y - RyZ = 0.$$

442. La circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2/(a^2 + b^2), \quad z = b/\sqrt{a^2 + b^2}$$

(las ecuaciones de la hélice se toman en la forma $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$).

444. Sean $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ las ecuaciones paramétricas de la línea. Son justas las identidades

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

$$\Phi(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0.$$

Estas relaciones determinan las relaciones de las diferenciales en la forma

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dy & dz & dx \\ \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dz & dx & dy \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

De este modo, las ecuaciones de la tangente toman la forma

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y-y & Z-z & X-x \\ \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z-z & X-x & Y-y \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

y la ecuación del plano normal

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} (X-x) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} (Y-y) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix} (Z-z) = 0,$$

o bien

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

$$445. \quad \frac{X-x}{ay} = \frac{Y-y}{bx} = \frac{Z-z}{xy};$$

$$ay(X-x) + bx(Y-y) + xy(Z-z) = 0, \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

$$446. \quad \frac{X}{x} - \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 1, \quad xyz \neq 0.$$

$$451. \quad 3x + 3y + z + 1 = 0, \quad 3x - 3y + z - 1 = 0, \\ 108x - 18y + z - 216 = 0.$$

$$453. \quad bX + aY + abZ = 2ab.$$

$$454. \quad \{X \operatorname{sen}(t-\alpha) - Y \cos(t-\alpha)\} \operatorname{sen} \alpha + Z = t \operatorname{sen} \alpha +$$

$$+ \cos \alpha.$$

$$455. \quad 4x - y + z - 9 = 0.$$

$$457. \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1} \text{ son las ecuaciones de la normal principal,}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{9} \text{ son las ecuaciones de la binormal.}$$

458. $\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{-9}$ son las ecuaciones de la normal principal,

$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$ son las ecuaciones de la binormal.

460. $A(1, \ln 2, -4)$.

462. $t = \frac{j+k}{\sqrt{2}}$, $n = \frac{2i-j+k}{\sqrt{6}}$, $b = \frac{i+j-k}{\sqrt{3}}$,

463. $t = -\frac{3}{5} \cos ti + \frac{3}{5} \sin tj - \frac{4}{5} k$, $n = \sin ti + \cos tj$,
 $b = \frac{4}{5} \cos ti - \frac{4}{5} \sin tj - \frac{3}{5} k$.

464. $t = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin \frac{t}{2} i + \cos \frac{t}{2} j - k \right)$, $n = \cos \frac{t}{2} i - \sin \frac{t}{2} j$.

$b = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin \frac{t}{2} i + \cos \frac{t}{2} j + k \right)$.

466. De la tangente:

$$\frac{X-a \cos t}{-a \sin t} = \frac{Y-a \sin t}{a \cos t} = \frac{Z-bt}{b};$$

del plano normal:

$$(a \sin t) X - (a \cos t) Y - bZ + b^2 t = 0;$$

de la binormal:

$$\frac{X-a \cos t}{a \sin t} = \frac{Y-a \sin t}{-b \cos t} = \frac{Z-bt}{a};$$

del plano osculador:

$$(b \sin t) X - (b \cos t) Y + aZ - abt = 0;$$

de la normal principal:

$$\frac{X-a \cos t}{\cos t} = \frac{Y-a \sin t}{\sin t}, \quad Z = bt;$$

el plano rectificante:

$$X \cos t + Y \sin t - a = 0;$$

$t = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (-a \sin ti + a \cos tj + bk)$, $n = -\cos ti - \sin tj$,

$b = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (b \sin ti - b \cos tj + ak)$.

467. $\rho_1 = r - \frac{r \cdot k}{r \cdot k} r$, $\rho_2 = r - \frac{r \cdot k}{r \cdot k} r$,

$$\rho_3 = r - \frac{\dot{r} \cdot k}{kr} (\dot{r} \times r),$$

donde el punto sobre la letra significa la derivación con respecto al parámetro s .

$$468. s = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

$$469. X = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad Y = a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad Z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$470. s = 8\sqrt{2}a.$$

$$471. s = 9a.$$

$$473. s = a\sqrt{2} \operatorname{sh} t.$$

$$474. ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

INDICACION. Las coordenadas cilíndricas r, φ, z están relacionadas con las coordenadas rectangulares cartesianas x, y, z por las fórmulas $x = r \cos \varphi, y = r \operatorname{sen} \varphi, z = z$ (fig. 169).

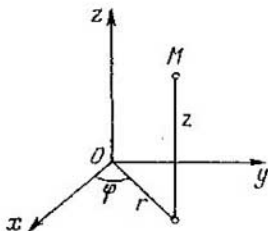


Fig. 169.

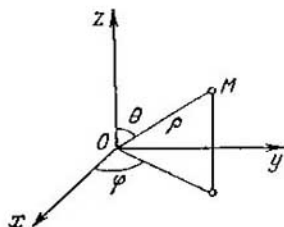


Fig. 170.

$$475. ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2.$$

INDICACION. Las coordenadas esféricas ρ, θ, φ están relacionadas con las coordenadas rectangulares cartesianas x, y, z por las fórmulas $x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, z = \rho \cos \theta$ (fig. 170).

476. INDICACION. Empleando las fórmulas de Frenet

$$\dot{t} = kn, \quad \dot{n} = -kt + \kappa b, \quad \dot{b} = -\kappa n$$

y tomado en consideración que $\dot{r} = t$, hallamos

$$\ddot{r} = k n, \quad \ddot{r} = \dot{t} = (kn)' = -k^2 t + \kappa \dot{\kappa} b + k \dot{n}.$$

477. Escribiendo el vector buscado en la forma

$$\omega = at + bn + cb$$

y utilizando los datos del problema, hallamos

$$\omega = \kappa t + kb.$$

El vector ω es la velocidad angular instantánea del sistema de referencia de Frenet al moverse el punto por la línea con la velocidad igual a la unidad.

484. $k = a/(a^2 + b^2)$ $\kappa = b/(a^2 + b^2)$, 485. $k = 2/(1 + a^2)$.

486. $k = \kappa = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}$.

487. $k = -\kappa = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$.

488. $k = -\kappa = 2t/(1 + 2t^2)^2$.

489. $k = \frac{3}{25 \operatorname{sen} t \cos t}$, $\kappa = \frac{4}{25 \operatorname{sen} t \cos t}$.

490. $a = b$.

491. Los puntos correspondientes a los valores del parámetro

$$t = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

492. Los puntos correspondientes a los valores del parámetro

$$t = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

494. $x - 4y + 2z + 1 = 0$.

495.
$$\begin{vmatrix} x - c_1 & y - c_2 & z - c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

496. $f(t) = c_1 + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \operatorname{cos} t$.

497. a) Sea a el vector unitario de la dirección fija. Entonces

$$a \cdot t = \operatorname{cos} v \quad (v = \operatorname{const}). \quad (*)$$

Derivamos la igualdad (*) con respecto a s :

$$a \cdot \dot{t} = 0.$$

Por consiguiente, $ka \cdot n = 0$. Excluyendo el caso en que $k = 0$ (rectas), obtenemos

$$a \cdot n = 0. \quad (**)$$

Por lo tanto, las normales principales son perpendiculares a la dirección fija.

Y viceversa, si el vector n en el punto corriente es perpendicular a la dirección fija, entonces es cierta la igualdad (*).

b) Suponiendo que $\kappa \neq 0$ y teniendo en cuenta la tercera fórmula de Frenet, obtenemos de (**)

$$a \cdot \dot{b} = 0,$$

de donde

$$a \cdot b = \operatorname{const}. \quad (***)$$

Por el contrario, diferenciando (***), obtenemos (**).

c) Diferenciando (**), obtenemos

$$ka \cdot t = \alpha a \cdot b,$$

de donde

$$\frac{k}{\alpha} = (a \cdot b)/(a \cdot t) = \text{const.}$$

Inversamente, de la primera y de la tercera fórmulas de Frenet se deduce

$$\frac{\dot{t}}{k} + \frac{\dot{b}}{\alpha} = 0,$$

de donde

$$\frac{\alpha}{k} \dot{t} + \dot{b} = 0, \quad \frac{\alpha}{k} t + b = \text{const.} = a.$$

Multiplicando escalarmente por u , obtenemos $a \cdot n = 0$. Por lo tanto, se cumple la condición (**).

498. INDICACIÓN.

$$\ddot{r} \cdot \ddot{r} \cdot \ddot{r} = k^5 \left(\frac{x}{k} \right)^3,$$

luego vélgase del problema 497.

501. Sea $(1, u, v)$ la dirección fija. El ángulo comprendido entre la tangente a la línea y esta dirección se define por la ecuación

$$\cos \varphi = \frac{a + 2btu + 3ct^2v}{\sqrt{1+u^2+v^2} \sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9c^2t^4}}.$$

La condición de independencia de φ con respecto a t consiste en que la fracción

$$\begin{aligned} \frac{(3cot^2 + 2btu + a)^2}{9c^2t^4 + 4b^2t^2 + a^2} &= \\ &= \frac{9c^2v^2t^4 + 12bcuvt^3 + 2(2b^2u^2 + 3acv)t^2 + 4abut + a^2}{9c^2t^4 + 4b^2t^2 + a^2} \end{aligned}$$

no depende de t . Para esto es suficiente que

$$4abu = 0, \quad 12bcuv = 0, \quad \frac{9c^2v^2}{9c^2} = \frac{2(2b^2u^2 + 3acv)}{4b^2} = \frac{a^2}{a^2},$$

de donde

$$u = 0, \quad v^2 = 1, \quad 2b^2 = \pm 3ac.$$

502. INDICACIÓN. En este caso $\dot{e} \cdot t = 0$. Diferénciese esta relación y empléense las fórmulas de Frenet.

505. La ecuación de las líneas se puede escribir de la forma

$$r = r(s), \quad \rho = r + \lambda n. \quad (*)$$

Dado que $\rho' \perp n$ hallamos que $\lambda = \text{const}$, de la condición de carácter coplanar de los vectores ρ' , ρ'' , n obtenemos

$$\dot{x} + \lambda (kx - kx) = 0.$$

Dividamos la última igualdad por x^2 :

$$\left(-\frac{1}{x}\right)' + \lambda \left(\frac{k}{x}\right)' = 0, \quad (**)$$

$$-\frac{1}{x} + \lambda \frac{k}{x} = -\mu,$$

de donde

$$\lambda k + \mu x = 1. \quad (***)$$

Inversamente. De (***) se deduce (**). Sustituyendo el valor de λ de (***) en (*) obtenemos la ecuación de la línea buscada.

509. Según el enunciado del problema $t^* = t$. Derivando esta igualdad con respecto a s , obtenemos

$$k^* n^* \frac{ds^*}{ds} = kn.$$

Pero como $n^* = n$, entonces

$$k^* \frac{ds^*}{ds} = k. \quad (*)$$

Luego, derivando con respecto a s la igualdad $b^* = b$, obtenemos

$$-x^* n^* \frac{ds^*}{ds} = -xn,$$

de donde

$$x^* \frac{ds^*}{ds} = x. \quad (**)$$

Por último, comparando (*) y (**), encontramos las relaciones buscadas

$$\frac{k^*}{k} = \frac{ds}{ds^*} = \frac{x^*}{x}.$$

$$510. k^* = \frac{\sqrt{k^2 + x^2}}{|s|k} \quad x^* = \frac{x^2}{sk(k^2 + x^2)} \left(\frac{k}{x}\right)'$$

Si $\frac{k}{x} = \text{const}$, entonces $x^* = 0$.

$$512. x = \frac{k}{k^2 + x^2} \cos \varphi, \quad y = \frac{k}{k^2 + x^2} \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \frac{k}{k^2 + x^2} \varphi.$$

513. La curvatura y la torsión de la hélice son constantes; por consiguiente existe un número infinito de pares de valores de λ y μ para los cuales $\lambda k + \mu x = 1$. A ellos les corresponden las hélices que están sobre los cilindros coaxiales al dado.

Inversamente, supongamos que a la línea de Bertrand C le corresponden dos líneas que tengan con la dada las normales principales

comunes. Entonces

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 k + \mu_1 \kappa &= t, \\ \lambda_2 k + \mu_2 \kappa &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y, por lo tanto, $\mu_1 \neq \mu_2$. No puede ser $\lambda_1/\lambda_2 = \mu_1/\mu_2$, pues entonces de (*) resultaría que $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$. Por lo tanto, $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$ y de las relaciones (*) obtenemos determinados valores para k y κ (constantes), o sea, la línea es una hélice.

$$514. k = \kappa = \frac{a}{2a^2 + s^2}. \quad 515. k = \kappa = \frac{c\sqrt{2}}{4c^2 + s^2}.$$

517. Lo inverso no es cierto, ya que en la expresión del vector r entra κ .

518. Como la distancia entre dos puntos de la línea es equivalente a la longitud del arco Δs entre ellos, entonces el problema se reduce al cálculo de la distancia mínima entre las rectas

$$\rho = r(s) + e(s)\lambda,$$

$$\rho = r(s + \Delta s) + e(s + \Delta s)\lambda,$$

donde $e(s)$ es sucesivamente igual a t, u, b .

Calculemos la distancia mínima por la fórmula

$$d = \frac{|(r(s + \Delta s) - r(s), e(s), e(s + \Delta s))|}{\sqrt{(e(s) \times e(s + \Delta s))^2}},$$

para $e = t$

$$d_1 = \frac{|(\Delta r, t(s), t(s + \Delta s))|}{\sqrt{(t(s) \times t(s + \Delta s))^2}} = \frac{|(\Delta r, t, \Delta t)|}{\sqrt{(t \times \Delta t)^2}},$$

$$\Delta r = t\Delta s + \frac{1}{2}kn\Delta s^2 + \frac{1}{6}(\kappa kb + kkn - k^2t)\Delta s^3 + \dots,$$

$$\Delta t = kn\Delta s + \dots,$$

de donde

$$d_1 = \frac{\Delta s^3}{6} k\kappa + \dots;$$

d_1 es un infinitésimo de tercer orden si $k\kappa \neq 0$. De un modo análogo hallamos que d_2 y d_3 son infinitésimos de primer orden.

520. Cuando el paso de la hélice es igual a la longitud de la circunferencia del cilindro.

$$522. R = (e^t + e^{-t})^2 \sqrt{\frac{1}{2} + (e^t - e^{-t})^2}.$$

$$523. R = 3\sqrt{2}e^t.$$

526. La hélice cuyo paso es igual al de la hélice inicial y que está sobre un cilindro circular con eje Oz y radio b^2/a .

528. $x = f(u) \cos v, y = f(u) \operatorname{sen} v, z = g(u)$ (fig. 171).

529. $x = (a + b \cos u) \cos v, y = (a + b \cos u) \operatorname{sen} v, z = b \operatorname{sen} u$ (fig. 172).

530. $x = a \operatorname{ch}(u/a) \cos v, y = a \operatorname{ch}(u/a) \operatorname{sen} v, z = u$ (fig. 173.)

531. $x = a \operatorname{sen} u \cos v, y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, z = a (\ln \operatorname{tg}(u/2) + \frac{1}{2} \cos u)$ (fig. 174).

532. Una vez escritas las ecuaciones de dos familias de generatrices rectilíneas y despejados de ellas x, y, z , obtendremos

$$x = a(u + v) \quad y = b(v - u), \quad z = 2uv \quad (\text{fig. 175}).$$

Las ecuaciones paramétricas de la superficie $z = pxy$ son:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = puv.$$

533. $x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = v.$

534. $x = a \operatorname{ch} u, \quad y = b \operatorname{sh} u, \quad z = v$, del cilindro hiperbólico (véase la fig. 12);

$x = u, \quad y = u^2, \quad z = v$, del cilindro parabólico (véase la fig. 11).

535. $r = \rho(u) + ve.$

536. $x = u + v, \quad y = u^2 + 2v, \quad z = u^3 + 3v.$

537. Las ecuaciones paramétricas de la superficie son:

$$x = \cos u - v, \quad y = \operatorname{sen} u + 3v, \quad z = -2v,$$

de donde

$$\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}z\right)^2 = 1.$$

538. INDICACIÓN. Si la directriz está definida por las ecuaciones

$$X = X(t), \quad Y = Y(t), \quad Z = Z(t),$$

entonces las ecuaciones paramétricas de la superficie cilíndrica serán

$$x = X(t) + \lambda t, \quad y = Y(t) + \lambda m, \quad z = Z(t) + \lambda n.$$

Eliminando de aquí λ y t , obtenemos una ecuación de la forma

$$f(nx - lz, ny - mz) = 0.$$

539. $(nx - lz)^2 + (ny - mz)^2 = an(ny - mz).$

540. b) Por ejemplo, $x = v^2 + 1, y = v^2 - 1, z = 2v;$

c) $\frac{x-10}{3} = \frac{y-12}{2} = \frac{z-4}{-1}.$

541. $x - a = v[f(u) - a], \quad y - b = v[\varphi(u) - b], \quad z - c = v[\psi(u) - c].$

Eliminando de estas ecuaciones los parámetros u y v , obtenemos una ecuación de la forma

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

542. $(b - cy)^2 = 2p(z - c)(az - cx).$

543. $(x + 1)^2 = 2y^2 + z^2.$

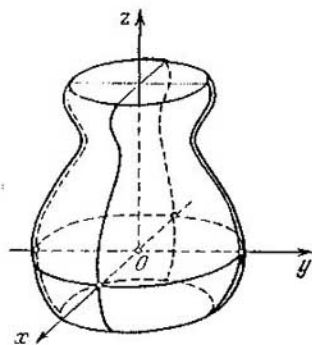


Fig. 171.

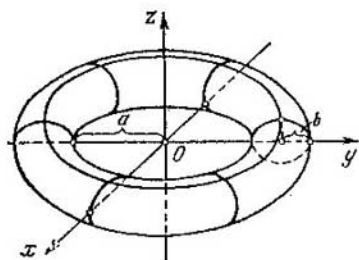


Fig. 172.

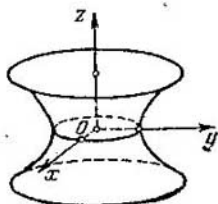


Fig. 173.

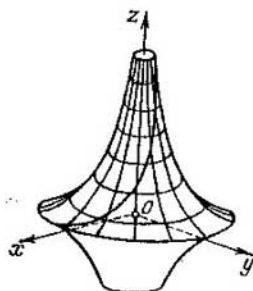


Fig. 174.

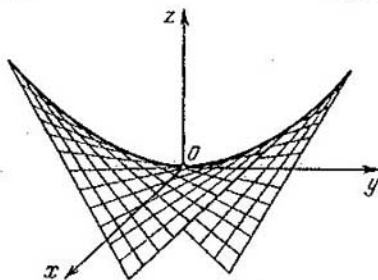


Fig. 175.

544. *A* pertenece, *B* no pertenece.

545. Un cilindro elíptico.

546. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$, una elipsoide.

547. El paraboloide de rotación $z = x^2 + y^2$.

548. u es la distancia entre el punto y el vértice del cono, v es la longitud del arco de la línea cuyos puntos están alojados del vértice a una distancia 1.

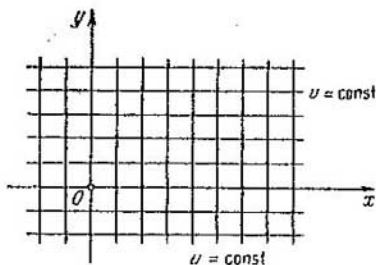


Fig. 176.

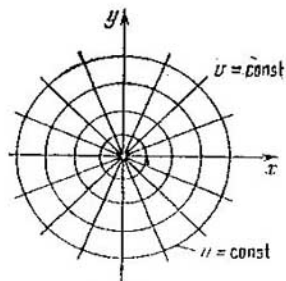


Fig. 177.

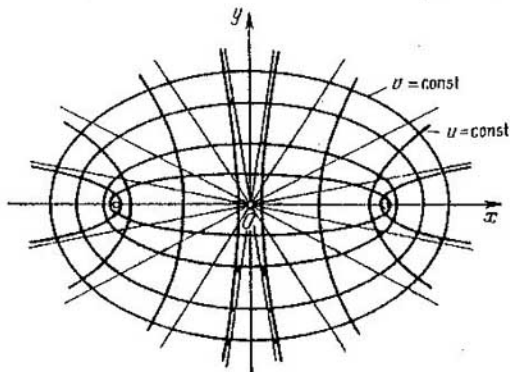


Fig. 178.

549. Dos familias de rectas paralelas (fig. 176).

550. Los rayos que parten del origen de las coordenadas y una familia de circunferencias concéntricas con centro en el mismo (fig. 177).

551. Las líneas $v = \text{const}$ son una familia de elipses confocales y un segmento $[-1, 1]$ del eje Ox ; las líneas $u = \text{const}$ son una familia de hipérbolas confocales e intervalos $-\infty, 1]$ y $[1, \infty[$ del eje Oz (fig. 178).

552. Las generatrices rectilíneas.

553. a) $x = a \cos(u + v)$, $y = a \sin(u + v)$, $z = bu$;

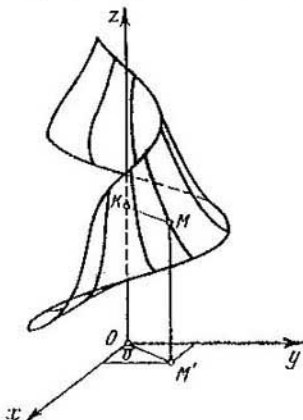


Fig. 179.

b) $x = a \cos u$, $y = a \sin u$, $z = bu + v$;

c) $x = a \cos(u + v)$, $y = a \sin(u + v)$, $z = b(u - v)$.

554. $r = \rho(u) + v\rho'(u)$.

555. Las ecuaciones de la figura

$$x = a(\cos u - v \sin u), \quad y = a(\sin u + v \cos u), \quad z = b(u + v).$$

No es una superficie. Sin embargo, si de la figura se excluyen los puntos de la hélice inicial, se obtiene una superficie.

556. Si como eje de rotación se toma Oz , entonces las ecuaciones del helicoides tendrán la forma

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u) + av,$$

donde u es la distancia $|MK|$ entre el punto M del helicoides y el eje; v es el ángulo de giro del plano de perfil, medido a partir del plano xOz ; a es una constante, o sea, la relación entre la velocidad del movimiento de avance y la velocidad angular (fig. 179).

557. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$, es la ecuación del helicoides directo (fig. 180). $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = mu + av$, la del helicoides oblicuo (fig. 181).

558. $x = a(1 - u) \cos v$, $y = a(1 - u) \sin v$, $z = bv$, es la ecuación del helicoides directo.

559. $x = u \cos v, y = u \operatorname{sen} v, z = f(v).$

En particular, si

$$f(v) = av + b,$$

se obtiene un helicoido directo.

560. $z(x^2 + y^2) = 2axy.$

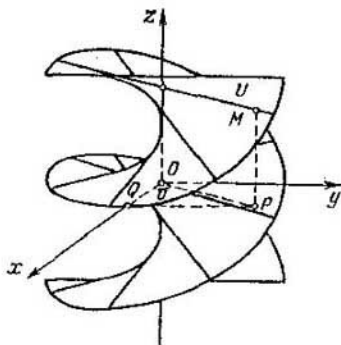


Fig. 180.

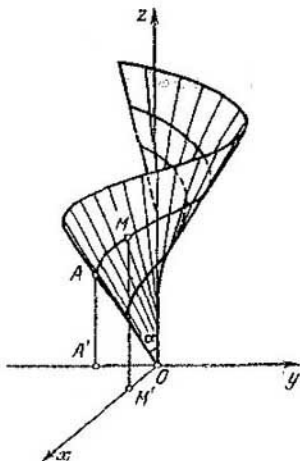


Fig. 181.

561. $x = u \cos v, y = u \operatorname{sen} v, z = a/\cos v.$

562. $r = \rho(s) + a \left(\frac{\ddot{\rho}}{|\dot{\rho}|} \cos \alpha + \frac{\dot{\rho} \times \ddot{\rho}}{|\dot{\rho} \times \ddot{\rho}|} \operatorname{sen} \alpha \right),$

donde α es el ángulo comprendido entre la normal principal de la línea y el radio de la circunferencia, que va a un punto arbitrario de la superficie del tubo.

565. En vez de u y v introduzcamos las nuevas variables φ y ψ mediante las fórmulas

$$u = c \cos \frac{\varphi - \psi}{2}, \quad v = \frac{\varphi + \psi}{2}, \quad 0 \leq \varphi - \psi < \frac{\pi}{2},$$

y sustituycamos estos valores en la ecuación vectorial del helicoido

$$r = u (\cos v i + \operatorname{sen} v j) + avk.$$

Haciendo

$$\rho(t) = c(\cos ti + \operatorname{sen} tj) + atk,$$

obtenemos la ecuación del helicoido en la forma

$$r = \frac{1}{2} \rho(\varphi) + \frac{1}{2} \rho(\psi).$$

566. Las ecuaciones de los paraboloides

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z$$

se pueden representar de la forma

$$r = \left(ui + \frac{u^2}{2p} k \right) + \left(vj \pm \frac{v^2}{2q} k \right).$$

567. Sea $M_0(x_0, y_0, z_0)$ cierto punto de una superficie de segundo orden $f(x, y, z) = 0$. Una recta arbitraria que pasa por el punto M_0 :

$$\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} = \frac{z-z_0}{1}$$

corta esta superficie en el punto M cuya z -coordenada se determina por la ecuación de segundo grado

$$f(x_0 + u(z-z_0), y_0 + v(z-z_0), z) = 0.$$

Esta ecuación tiene, por suposición, una raíz z_0 de donde resulta que la segunda raíz, la cual es la z -coordenada del punto M , se expresará mediante una función racional de u y v , con lo que se demuestra la afirmación.

569. a) Las rectas tangentes son:

$$y=0, z=\lambda \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-\lambda}{\lambda};$$

los planos normales:

$$x-1=0, \quad (x-1) + y + \lambda(z-\lambda) = 0;$$

b) $\cos \alpha = -1/\sqrt{2+\lambda^2}$.

$$571. 18x + 3y - 4z - 41 = 0.$$

$$572. 3x - y - 2z - 4 = 0; \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}.$$

$$573. 6x + 3y - 2z - 7 = 0; \quad \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-2}.$$

$$574. x + y - \sqrt{2}z = 0; \text{ la normal es } \frac{x-\sqrt{2}}{1} = \frac{y-\sqrt{2}}{1} = \frac{z-2}{-\sqrt{2}};$$

la tangente a la línea es $u=2; x+y=2\sqrt{2}, z=2$.

$$575. 3x + 12y - z - 18 = 0; \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}.$$

$$576. 3x + 4y + 12z - 169 = 0; \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}.$$

$$577. 3x - 2y + 3z - 4 = 0; \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}.$$

$$578. \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1;$$

$$x = x_0 \left(1 + \frac{t}{a^2}\right), \quad y = y_0 \left(1 + \frac{t}{b^2}\right), \quad z = z_0 \left(1 + \frac{t}{c^2}\right).$$

$$579. x \cos u \cos v + y \cos u \sin v - z \sin u + \alpha (\ln \operatorname{tg}(u/2)) \sin u = 0.$$

$$580. xa \sin v - ya \cos v + zu - auv = 0;$$

$$\frac{x - u \cos v}{a \sin v} = \frac{y - u \sin v}{-a \cos v} = \frac{z - av}{u}.$$

A lo largo de la línea $u = u_0$ las normales conservan un ángulo constante con el eje Ox . A lo largo de la línea $v = v_0$ las normales son paralelas al plano osculador.

$$581. 12x + 9y + 20z - 230 = 0.$$

$$582. x + y + z - 3 = 0.$$

586. Las coordenadas curvilineas de los puntos se definen por las ecuaciones

$$\operatorname{tg} u = \pm C/\sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} v = B/A.$$

$$593. (R - r(s)) \dot{r}(s) \ddot{r}(s) = 0.$$

El plano tangente es invariable a lo largo de la generatriz $s = s_0$; él coincide con el plano osculador de la línea $r = r(s)$ para $s = s_0$.

598. La ecuación del plano osculador se puede representar de la forma

$$f'(c) (x \operatorname{sen} c - y \operatorname{cos} c) - u \{ax \operatorname{cos} c + ay \operatorname{sen} c - z + f(c)\} = 0,$$

de donde se deduce que todos los planos pasan por la recta

$$y = x \operatorname{tg} c, \quad ax \operatorname{cos} c + ay \operatorname{sen} c - z + f(c) = 0.$$

599. Tomemos el punto de intersección de las normales como origen de los radios vectores. Entonces

$$r \cdot \partial_u r = 0, \quad r \cdot \partial_v r = 0,$$

de donde resulta que $r^2 = \text{const.}$

601. Si α es el vector director de la recta dada y el origen de los radios vectores se toma sobre esta recta, entonces los vectores r , α y $\partial_u r \times \partial_v r$ se encuentran en un mismo plano y

$$r \cdot (\alpha \times (\partial_u r \times \partial_v r)) = 0.$$

Según la regla del producto vectorial doble obtenemos

$$(r \cdot \partial_u r) (\alpha \cdot \partial_v r) - (r \cdot \partial_v r) (\alpha \cdot \partial_u r) = 0.$$

Pero esto se puede escribir de forma que el determinante funcional sea igual a cero

$$\partial_u r^2 \partial_v (\alpha \cdot r) - \partial_v r^2 \partial_u (\alpha \cdot r) = 0.$$

De aquí resulta que entre las magnitudes r^2 y $a \cdot r$ existe la dependencia funcional

$$r^2 = f(a \cdot r).$$

Escogiendo el eje Oz a lo largo del vector a , obtenemos

$$x^2 + y^2 = f(z),$$

que es la superficie de rotación.

605. Sea

$$R = r(s) + ut(s)$$

la ecuación de una superficie; y $r(s)$ la arista de retroceso. Tenemos

$$\partial_s R = t + ukn, \quad \partial_u R = t.$$

El vector de la normal a la superficie

$$N = \partial_s R \times \partial_u R = uk(n \times t)$$

está orientado por la binormal a la línea $r(s)$ que es lo que era necesario demostrar.

606. NECESIDAD. Sea a el vector del plano director ortogonal. Entonces $e \cdot a = 0$. De aquí $e' \cdot a = 0$, $e'' \cdot a = 0$. Por consiguiente, $ee'e'' = 0$. Si e'' fuese igual a 0, entonces e' sería un vector constante. Pero $e \cdot e' = 0$ y $e \cdot a = 0$. Entonces e es constante y la superficie degenera en cilindro.

SUFICIENCIA. Sea $ee'e'' = 0$, $e'' \neq 0$. Entonces el vector $c = (e \times e')/|e'|$ es constante, ya que $e' = 0$. El vector e es ortogonal al vector constante c , o sea, es paralelo al plano constante.

607. El eje del helicoido.

608. La parábola mínima de la superficie.

609. La línea inicial.

610. $R = r + \frac{k}{k^2 + \kappa^2} n$, donde k es curvatura de la línea inicial y κ su torsión.

611. Tomemos como directriz de la superficie oblicua

$$R = r(s) + ue(s)$$

la línea de garganta. Entonces $t \cdot e' = 0$. El vector de la normal a lo largo de la generatriz fija es $t_0 \times e_0 + u(e'_0 \times e_0)$; por eso la ecuación de la superficie engendrada por las normales de la superficie inicial puede ser escrita en la forma

$$R = r_0 + ue_0 + v(t_0 \times e_0 + u(e'_0 \times e_0)).$$

Los vectores e_0 , $t_0 \times e_0$, $e'_0 \times e_0$ son mutuamente ortogonales. Escogemos un sistema rectangular de coordenadas de modo que su origen se encuentre en el punto e_0 y las direcciones de los ejes de las coordenadas coincidan con los vectores indicados. Entonces las ecuaciones de la superficie obtenida serán

$$x = u, \quad y = av, \quad z = buv,$$

o bien

$$z = \frac{b}{a} xy.$$

Esto es un paraboloido hiperbólico. Su vértice es el punto r_0 , es decir, está sobre la línea de garganta.

612. Escribiendo las ecuaciones de la línea en forma paramétrica:

$$x = t/(t^2 - 1), \quad y = 1/(t^2 - 1), \quad z = t,$$

obtenemos

$$\Phi(t) = t^3(t^2 - 2)/(t^2 - 1)^2.$$

613. La magnitud $\Phi(t)$ tiene un segundo orden de infinitud con respecto a t y, por consiguiente, el primer orden de tangencia.

615. Sea definida la línea por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x(t), & y &= y(t), & z &= z(t); \\ \Phi(t) &= \begin{vmatrix} x(t) - x(t_0) & y(t) - y(t_0) & z(t) - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Representando las diferencias

$$x(t) - x(t_0), \quad y(t) - y(t_0), \quad z(t) - z(t_0)$$

por la fórmula de Taylor e igualando a cero en la expresión $\Phi(t)$ el coeficiente para $(t - t_0)^3$, obtenemos

$$\begin{vmatrix} x'''(t_0) & y'''(t_0) & z'''(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto, la torsión de la línea es igual a cero.

617. $x^2 + y^2 = 1$, de un cilindro circular.

618. $xy + yz = 1$, de un cilindro hiperbólico.

619. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz = 0$, de un cono sin vértice.

620. Por ejemplo, $(x - C)^2 + y^2 = C^2$, $C \neq 0$.

621. Por ejemplo, $(x - C)^2 + y^2 + z^2 = C^2$, $C \neq 0$.

622. La envolvente es el cilindro $y^2 + z^2 = 1$; las características son las circunferencias $y^2 + z^2 = 1$, $x - C = 0$; no existe una arista de retroceso.

623. Para las esferas construidas sobre las cuerdas paralelas al eje Oy

$$\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

El elipsoide envuelve las esferas para las cuales $|\operatorname{tg} \varphi| \geq b/a$, donde φ es el parámetro de la elipse en las ecuaciones

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \operatorname{sen} \varphi.$$

Para las esferas construidas sobre las cuerdas paralelas al eje Ox

$$\frac{y^2}{a^2 + b^2} + \frac{x^2 + z^2}{a^2} = 1, \quad |\operatorname{tg} \varphi| \leq \frac{b}{a}.$$

Para la hipérbola $x = a \operatorname{ch} \varphi$, $y = b \operatorname{sh} \varphi$ obtenemos:

a) si las cuerdas son paralelas al eje Oy , entonces para $b \geq a$ no hay una envolvente, para $b < a$ la envolvente se define por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Ella envuelve las esferas para las cuales $|\operatorname{tg} \varphi| \leq b/a$;

b) si las cuerdas son paralelas al eje Ox , entonces la ecuación de la envolvente para $b \neq a$ tiene la forma

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} = 1.$$

Si $b > a$, ella envuelve todas las esferas, para $b < a$ envuelve las esferas para las cuales $|\operatorname{tg} \varphi| \leq b/a$. Si $b = a$ la envolvente es el plano $y = 0$ (compárese con los problemas 308, 309).

624. La hélice

$$x = b \cos \alpha, \quad y = b \operatorname{sen} \alpha, \quad z = b\alpha.$$

625. $xyz = \frac{2}{9} V.$

626. $x^2 + y^2 + (z - C)^2 = a^2 C^2 / (a^2 + 1).$

INDICACION. Las esferas son generadas por la rotación de las circunferencias tomadas en el plano xOz que tocan las rectas $x = \pm az$ y tienen los centros sobre el eje Oz .

627. La ecuación de la familia:

$$(R - \rho(s))^2 = a^2.$$

Derivando con respecto a s , obtenemos

$$(R - \rho) \cdot t = 0,$$

de donde

$$R - \rho = \lambda b + \mu n, \quad \lambda^2 + \mu^2 = a^2.$$

Haciendo

$$\lambda = a \cos \alpha, \quad \mu = a \operatorname{sen} \alpha,$$

obtenemos la ecuación del discriminante en la forma

$$R = \rho + a(b \cos \alpha + n \operatorname{sen} \alpha).$$

628. La ecuación de la familia es:

$$(x - b \cos \varphi)^2 + (y - b \operatorname{sen} \varphi)^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

La ecuación del discriminante:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

En el caso de $a > b$ la arista de retroceso se reduce a dos puntos $(0, 0, \pm \sqrt{a^2 - b^2})$, o a un punto $(0, 0, 0)$ si $a = b$.

629. La envolvente

$$[(y - R)^2 + z^2 - R^2][(y + R)^2 + z^2 - R^2] = 0$$

representa dos cilindros. No hay arista de retroceso (fig. 182).

630. El discriminante se define por el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} (R - r(s)) \cdot b(s) &= 0, \\ (R - r(s)) \cdot n(s) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Las características son las tangentes a la línea dada, la arista de retroceso es la misma línea.

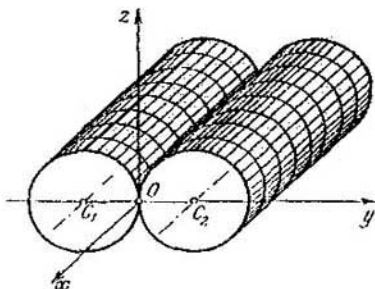


Fig. 182.

631. El discriminante se define por el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} (R - r(s)) \cdot t(s) &= 0, \\ (R - r(s)) \cdot n(s) k(s) - 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Las características son paralelas a las binormales y pasan por los centros de curvatura de la línea. La arista de retroceso

$$R = r + \frac{1}{k} n + \frac{1}{\kappa} \frac{1}{k} b$$

se compone de los centros de las esferas osculatrices de la línea.

632. El discriminante se define por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} (R - r(s)) \cdot n(s) &= 0, \\ (R - r(s)) \cdot (\kappa(s) b(s) - k(s) t(s)) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Las características están orientadas por los vectores de Darboux (véase el problema 477). La arista de retroceso

$$R = r + \frac{k\kappa}{k\kappa' - k'\kappa} t + \frac{k^2}{k\kappa' - k'\kappa} b.$$

633. La ecuación del cono con eje Ox :

$$-x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + y^2 + z^2 = 0.$$

Damos una vuelta alrededor del eje Oy :

$$-(x \cos \alpha + z \operatorname{sen} \alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + (-x \operatorname{sen} \alpha + z \cos \alpha)^2 + y^2 = 0,$$

o bien

$$y^2 \cos^2 \alpha + z^2 \cos 2\alpha - xz \operatorname{sen} 2\alpha = 0.$$

Hagamos girar este cono alrededor del eje Oz en un ángulo β (β es el parámetro de la) familia):

$$(-x \operatorname{sen} \beta + y \operatorname{cos} \beta)^2 \operatorname{cos}^2 \alpha + z^2 \operatorname{cos} 2\alpha - \\ - z(x \operatorname{cos} \beta + y \operatorname{sen} \beta) \operatorname{sen} 2\alpha = 0. \quad (*)$$

Derivando la igualdad (*) con respecto a β , obtenemos

$$(-x \operatorname{sen} \beta + y \operatorname{cos} \beta)(x \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + y \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta + z \operatorname{sen} \alpha) = 0.$$

El plano

$$x \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + y \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta + z \operatorname{sen} \alpha = 0$$

es perpendicular al eje del cono y tiene con éste sólo un punto común. Eliminando β de la ecuación

$$-x \operatorname{sen} \beta + y \operatorname{cos} \beta = 0$$

y de la ecuación de la familia (*), obtenemos la ecuación de la envolvente

$$z(z \operatorname{cos} 2\alpha - \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} 2\alpha) = 0.$$

Ahora bien, el plano $z = 0$ y el cono $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{ctg}^2 2\alpha = 0$ forman una superficie envolvente.

635. Examinemos una de las generatrices rectilíneas l de la superficie dada σ . En todos los puntos suyos el plano tangente π a σ será el mismo. Construyamos las tangentes a todas las líneas de sección σ por los planos paralelos en los puntos que están sobre la generatriz l . Es evidente que todas estas tangentes serán paralelas. Pero entonces las normales a estas secciones planas en todos los puntos de la generatriz l también serán paralelas y, en consecuencia, se encontrarán todas en un mismo plano π^* . Por consiguiente, la superficie sobre la cual están las evolutas de secciones planas es la envolvente de los planos π^* , o sea, es también desarrollable.

$$636. z = a, \quad z = -a.$$

637. Tomemos sobre la superficie una línea arbitraria D y construyamos en cada punto suyo el plano tangente. Entonces la superficie se puede considerar como envolvente de estos planos, ya que según el enunciado del problema cada uno de ellos toca la superficie dada por la línea. Por otro lado, estos planos tangentes forman una familia con un parámetro (el arco s de la línea D). Por consiguiente, solamente una superficie desarrollable puede ser envolvente, o sea, las líneas de tangencia son rectas.

638. Sean $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), los puntos dados. Tomemos la ecuación del plano en la forma normal:

$$x \operatorname{cos} \alpha + y \operatorname{cos} \beta + z \operatorname{cos} \gamma - p = 0.$$

Las distancias entre el punto M_i y el plano

$$d_i = x_i \operatorname{cos} \alpha + y_i \operatorname{cos} \beta + z_i \operatorname{cos} \gamma - p.$$

Según el enunciado del problema

$$\cos \alpha \sum_{i=1}^n x_i + \cos \beta \sum_{i=1}^n y_i + \cos \gamma \sum_{i=1}^n z_i - np = b = \text{const.}$$

Escribamos esta relación en la forma

$$\cos \alpha \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \cos \beta \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} + \cos \gamma \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} - p = \frac{b}{n}.$$

Esta condición expresa el hecho de que el punto con las coordenadas

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}$$

se encuentra a una misma distancia a partir de todos los planos de la familia; por consiguiente, la envolvente es una esfera con el centro en este punto.

639. $ds^2 = (f'^2 + g'^2) du^2 + f^2 dv^2.$

640. $ds^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 u dv^2).$

641. $ds^2 = (a^2 \operatorname{sen}^2 u + c^2 \cos^2 u) du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2.$

642. $ds^2 = (a^2 \operatorname{sh}^2 u + c^2 \operatorname{ch}^2 u) du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 u dv^2.$

643. $ds^2 = (a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u) du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 u dv^2.$

644. $ds^2 = (1 + 4u^2) du^2 + u^2 dv^2.$

645. $ds^2 = du^2 + R^2 dv^2.$

646. $ds^2 = (1 + k^2) du^2 + u^2 dv^2.$

647. $ds^2 = b^2 du^2 + (a + b \cos u)^2 dv^2.$

648. $ds^2 = \operatorname{ch}^2 (u/a) du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 (u/a) dv^2.$

649. $ds^2 = a^2 \operatorname{cig}^2 u du^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 u dv^2.$

650. $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2.$

651. $ds^2 = [1 + f'^2(u)] du^2 + 2af'(u) du dv + (a^2 + u^2) dv^2.$

652. a) Para la superficie $R = r(u) + vt(u)$ engendrada por las tangentes a la línea $r = r(u)$

$$ds^2 = (1 + k^2 v^2) du^2 + 2du dv + dv^2,$$

donde k es la curvatura de la línea inicial.

b) Para la superficie $R = r(u) + vn(u)$ engendrada por las normales principales,

$$ds^2 = [(1 - kv)^2 + \kappa^2 v^2] du^2 + dv^2,$$

c) Para la superficie $R = r(u) + vb(u)$ engendrada por las binormales

$$ds^2 = (1 + \kappa^2 v^2) du^2 + dv^2,$$

donde κ es la torsión de la línea $r = r(u)$.

653. $ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2) dy^2$, donde $p = \partial_x z$, $q = \partial_y z$.

654. En los casos de a), b), d).

655.

$$E' = \frac{1}{J^2} [E (\partial_v v')^2 - 2F \partial_u v' \partial_v v' + G (\partial_v v')^2],$$

$$G' = \frac{1}{J^2} [E (\partial_u u')^2 - 2F \partial_u u' \partial_v u' + G (\partial_u u')^2],$$

$$F' = \frac{1}{J^2} [-E \partial_v u' \partial_v v' + F (\partial_u u' \partial_v v' + \partial_v u' \partial_u v') - G \partial_u u' \partial_u v'],$$

$$H' = \frac{H}{|J|},$$

donde

$$J = \frac{D(u', v')}{D(u, v)} \neq 0.$$

658. Las coordenadas curvilíneas expresan las longitudes de los arcos de las líneas de coordenadas, la red de coordenadas es de Chébi-shev.

659. De la esfera: $ds^2 = d\tilde{u}^2 + R^2 \cos^2(\tilde{u}/R) d\tilde{v}^2$.

Del toro: $ds^2 = d\tilde{u}^2 + (a + b \cos(\tilde{u}/b))^2 d\tilde{v}^2$.

Del catenoide: $ds^2 = d\tilde{u}^2 + (a^2 + \tilde{u}^2) d\tilde{v}^2$.

De la pseudoesfera: $ds^2 = d\tilde{u}^2 + e^{-2\tilde{u}/a} d\tilde{v}^2$.

INDICACION. \tilde{u} es el parámetro natural del meridiano.

660. $ds^2 = d\tilde{u}^2 - c^{-2\tilde{u}/a} d\tilde{v}^2$. Suponiendo que $\tilde{u}^* = \tilde{v}$, $\tilde{v}^* = ac^{\tilde{u}/a}$, obtenemos

$$ds^2 = \frac{a^2}{v^2} (du^2 + dv^2).$$

$$661. \quad \cos \varphi = \frac{a^2 xy}{\sqrt{1+a^2x^2} \sqrt{1+a^2y^2}}.$$

663. Tomemos la primera forma cuadrática en el aspecto

$$ds^2 = du^2 + G(u) dv^2.$$

Entonces

$$\cos \alpha = \frac{du}{\sqrt{du^2 + G(u) dv^2}},$$

de donde

$$v \operatorname{ctg} \alpha = \pm \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{G(u)}}.$$

664. Tomando la primera forma cuadrática de la esfera en el aspecto

$$ds^2 = du^2 + R^2 \cos^2(u/R) dv^2,$$

obtenemos

$$v \operatorname{ctg} \alpha = \pm \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2R} \right).$$

666. Escribiendo la ecuación del cono en la forma $r = v e(u)$, $|e(u)| = 1$, obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha \ln v = \int |e'(u)| du + C.$$

667. Si la ecuación de la superficie se toma en la forma indicada en el problema 652, obtenemos $u + v = \text{const.}$

668. Escribiendo la primera forma cuadrática de la superficie S del modo

$$ds^2 = (1 + k^2 v^2) du^2 + 2du dv + dv^2,$$

obtenemos

$$(\operatorname{sen}^2 \alpha - k^2 v^2 \cos^2 \alpha) du^2 + 2 \operatorname{sen}^2 \alpha du dv + \operatorname{sen}^2 \alpha dv^2 = 0.$$

$$669. (E\partial_\varphi \varphi - F\partial_u \varphi) du + (F\partial_v \varphi - G\partial_u \varphi) dv = 0.$$

$$670. v - \operatorname{tg} u = \text{const.}$$

$$671. u^2 + u + 1 = C_1 e^{-v} \quad (C_1 = \text{const.})$$

$$672. v = \frac{1}{2u^2} + \lambda.$$

$$673. X = \frac{U-V}{2} \cos V, \quad Y = \frac{U-V}{2} \operatorname{sen} V, \quad Z = \frac{U+V}{2},$$

donde $U = 2u + v$, $V = v$.

$$674. ER - FQ + GP = 0.$$

$$676. (1 + a^2 x^2) y^2 = C_1, \quad (1 + a^2 y^2) x^2 = C_2.$$

$$678. \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \pm v = \text{const.}$$

$$679. u \pm \ln \operatorname{tg}(v/2) = \text{const.}$$

$$680. \left. \begin{aligned} ay + \sqrt{1 + a^2 y^2} &= C(ax + \sqrt{1 + a^2 x^2}), \\ z &= axy \end{aligned} \right\}$$

y

$$\left. \begin{aligned} ay + \sqrt{1 + a^2 y^2} &= \frac{C_1}{\sqrt{1 + a^2 x^2} + ax}, \\ z &= axy. \end{aligned} \right\}$$

$$681. a) ds^2 = (8u^2 + v^2) du^2 + 2uv du dv + (8v^2 + u^2) dv^2;$$

$$b) ds = 2 \sqrt{2v^2 + 1} dv, \quad ds = \sqrt{8u^2 + 1} du.$$

$$ds = 2 \sqrt{2a^4 - a^2 + 2u} du;$$

$$c) \quad s = 3 \sqrt{2a^4 + a^2 + 2}.$$

$$682. \quad \cos \alpha = \pm (1 - a^2)/(1 + a^2).$$

$$683. \quad p = \frac{10}{3} a; \quad \cos \alpha = 1, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

$$684. \quad s = | \operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1 |. \quad 685. \quad \cos \alpha = -3/5.$$

$$686. \quad \cos \alpha = 2/3. \quad 687. \quad s = \sqrt{2} | u_2 - u_1 |.$$

$$688. \quad ds^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 u \, du^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 u \frac{du^2}{\operatorname{sen}^2 u} = \frac{a^2 du^2}{\operatorname{sen}^2 u}.$$

$$s = a \left| \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\operatorname{sen} u} \right| = a \left| \ln \operatorname{tg} \frac{u_2}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{u_1}{2} \right| = a |v_2 - v_1|.$$

Examinemos la familia

$$v = a \ln \operatorname{tg} (u/2) + C.$$

El punto $M_1 (u_1, v_1)$ pertenece a la línea

$$v = -a \ln \operatorname{tg} (u/2) + C_1,$$

y el punto $M_2 (u_2, v_2)$ descansa sobre la línea

$$v = -a \ln \operatorname{tg} (u/2) + C_2,$$

o sea,

$$v_1 = -a \ln \operatorname{tg} (u_1/2) + C_1, \quad v_1 = a \ln \operatorname{tg} (u_1/2) + C,$$

$$v_2 = -a \ln \operatorname{tg} (u_2/2) + C_2, \quad v_2 = a \ln \operatorname{tg} (u_2/2) + C;$$

pues

$$v_1 = \frac{C_1 + C}{2}, \quad v_2 = \frac{C_2 + C}{2};$$

por eso

$$s = a |v_1 - v_2| = \frac{a |C_2 - C_1|}{2},$$

es decir, no depende de C .

689. a) Tomemos las ecuaciones de la esfera en la forma

$$x = R \cos u \cos v, \quad y = R \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = R \operatorname{sen} u.$$

Pongamos uno de los catetos sobre la línea $u = 0$ y el segundo, sobre la línea $v = \alpha$; pongamos uno de los vértices en el punto $B (u = 0, v = 0)$ y el segundo, en el punto $A (u = \beta, v = \alpha)$ (fig. 183). Entonces las longitudes de los catetos resultan $a = R\alpha$, $b = R\beta$, respectivamente. Para calcular c es necesario hallar la longitud del arco de la línea

$$Ay + Bz = 0$$

(sobre la superficie de la esfera) entre los puntos indicados. La ecuación de la hipotenusa en coordenadas curvilíneas es: $A \cos u \operatorname{sen} v + B \operatorname{sen} u = 0$. Puesto que ella pasa por el punto $(u = \beta, v = \alpha)$, entonces

$$\operatorname{sen} v = k \operatorname{tg} u,$$

donde

$$k = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} \beta},$$

$$\begin{aligned} c = s &= R \sqrt{1-k^2} \int_0^\beta \frac{\cos u \, du}{\sqrt{1-(1+k^2)\operatorname{sen}^2 u}} = \\ &= R \operatorname{arcsen}(\sqrt{1+k^2} \operatorname{sen} \beta) = R \operatorname{arcsen} \sqrt{1-\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \end{aligned}$$

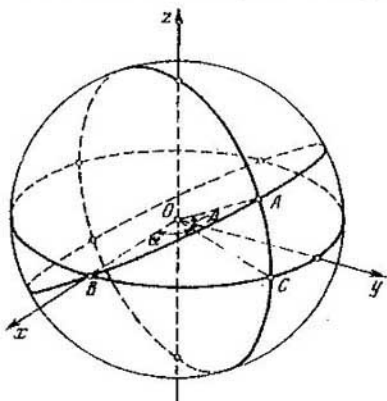


fig. 183.

de donde

$$\cos(c/R) = \cos \alpha \cos \beta = \cos(a/R) \cos(b/R).$$

$$b) \quad S = R^2 \int_D \int \cos u \, du \, dv = R^2 \int_0^\alpha dv \int_0^{f(v)} \cos u \, du,$$

de donde

$$f(v) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} v}{k},$$

$$\begin{aligned} S &= R^2 \int_0^\alpha \operatorname{sen} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} v}{k} \, dv = R^2 \int_0^\alpha \frac{\operatorname{sen} v \, dv}{\sqrt{(1+k^2)\cos^2 v}} = \\ &= R^2 \left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \right). \end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{S}{R^2} &= \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - k^2} - k \cos \alpha}{1 - k^2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{1 - \cos \gamma} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} (a/R) \operatorname{sen} (c/R)}{1 + \cos (c/R)}. \end{aligned}$$

Valiéndonos de la relación

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma},$$

obtenemos

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma},$$

$$\cos (A + B) = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{1 - \cos \gamma},$$

$$\operatorname{sen} \left(A + B - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{1 - \cos \gamma}.$$

Comparando con lo antecedente, hallamos

$$S = R^2 \left(A + B - \frac{\pi}{2} \right).$$

$$690. \quad S = \frac{a^2}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

$$691. \quad S = a^2 \left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right].$$

692. $S = 2a^2 (\pi - 2)$, donde a es el radio de la esfera.

693. $S = 2\varphi_0 R^2$, donde R es el radio de la esfera.

695. INDICACION. Tómese la ecuación de la superficie cónica en la forma $r = ve(u)$, donde $|e(u)| = 1$, y compárese su primera forma cuadrática con la primera forma cuadrática del plano en coordenadas polares.

696. Según se muestra en el problema 652, la primera forma cuadrática de tal superficie puede ser escrita del modo

$$ds^2 = [1 + v^2 k^2(u)] \cdot du^2 + 2du \, dv + dv^2,$$

donde $k(u)$ es la curvatura de la línea l .

Vamos a deformar la línea l sin estiramiento de modo que en cada punto suyo se conserve la curvatura. Como en la expresión ds^2 no entra la torsión de la línea, entonces la deformación correspondiente de la superficie engendrada por las tangentes a la línea l será la superposición de la superficie inicial sobre la deformada. Una vez que l se ha convertido en una línea plana, superponemos la superficie de las tangentes sobre el plano.

697. La primera forma cuadrática del helicoide directo

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = av$$

lione el aspecto

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2.$$

Supongamos que el catenoido está engendrado por la rotación de la catenaria

$$x = a \operatorname{ch}(z/a), \quad y = 0$$

alrededor del eje Oz . Las ecuaciones paramétricas de la catenaria se pueden representar en la forma

$$x = \sqrt{u^2 + a^2}, \quad y = 0, \quad z = a \ln \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a},$$

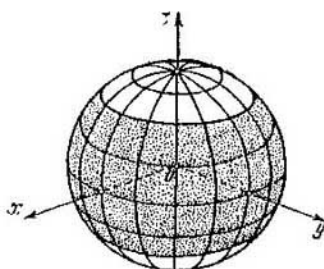


Fig. 184.

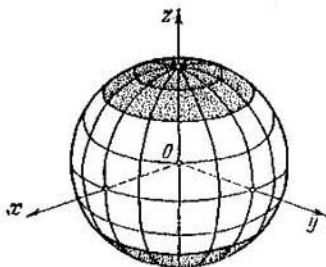


Fig. 185.

lo que se puede verificar por comprobación directa. Entonces las ecuaciones paramétricas del catenoido serán

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u^2 + a^2} \cos v, \\ y &= \sqrt{u^2 + a^2} \operatorname{sen} v, \\ z &= a \ln \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a}. \end{aligned}$$

Calculando ahora la primera forma cuadrática del catenoido, obtenemos (*).

701, 702. Una esfera.

703. Una semiesfera sin circunferencia de frontera.

704. Una zona esférica sin circunferencias de frontera (fig. 184).

705. Dos segmentos esféricos sin fronteras (fig. 185).

706. Un círculo máximo.

707. Una mitad del círculo máximo sin extremos.

708. Dos arcos simétricos del círculo máximo.

709. Dos paralelas (si la normal se orienta fuera del cono).

710. Una esfera sin dos puntos diametralmente opuestos.

711. Una esfera con el círculo máximo excluido.

712. Una esfera tomada dos veces; si el eje del toro se representa verticalmente, entonces las paralelas superior e inferior del mismo se aplican a los polos de la esfera.

713. Un cuarto del círculo máximo tomado dos veces sin un extremo.

714. Una semiesfera sin polo, tomada un número infinito de veces.

$$716. \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} [(f'g'' - f''g') du^2 + fg' dv^2].$$

$$717. \quad \varphi_2 = R (du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

$$718. \quad \varphi_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + c^2 \cos^2 u}} (du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

$$719. \quad \varphi_2 = \frac{-ac}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 u + c^2 \operatorname{ch}^2 u}} (du^2 - \operatorname{ch}^2 u dv^2).$$

$$720. \quad \varphi_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u}} (du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2).$$

$$721. \quad \varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2}} (du^2 + u^2 dv^2).$$

$$722. \quad \varphi_2 = R dv^2.$$

$$723. \quad \varphi_2 = \frac{ku}{\sqrt{1 + k^2}} dv^2.$$

$$724. \quad \varphi_2 = b du^2 + \cos u (a + b \cos u) dv^2.$$

$$725. \quad \varphi_2 = -\frac{1}{a} (du^2 - a^2 dv^2).$$

$$726. \quad \varphi_2 = -a \operatorname{ctg} u (du^2 - \operatorname{sen}^2 u dv^2).$$

$$727. \quad \varphi_2 = -\frac{2a du dv}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

$$729. \quad \varphi_2 = \frac{\partial_{xx}f dx^2 - 2\partial_{xy}f dx dy + \partial_{yy}f dy^2}{\sqrt{1 + (\partial_{xx}f)^2 + (\partial_{yy}f)^2}}.$$

Del enunciado del problema

$$\partial_{xx}f = 0, \quad \partial_{xy}f = 0, \quad \partial_{yy}f = 0.$$

La solución general de este sistema es:

$$f = ax + by + c.$$

$$730. \quad \varphi_2 = -\frac{a}{u^2 + a^2} du^2 + a dv^2,$$

$$k_{n|k} = \text{const} = -a/(u^2 + a^2), \quad k_{n|u} = \text{const} = a/(u^2 + a^2).$$

731. Si la ecuación de la superficie se toma en la forma indicada en el problema 554, entonces

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \kappa/vk,$$

donde k y κ son, respectivamente, la curvatura y la torsión de la línea dada.

732. $k_1 = a/b^2, \quad k_2 = a/c^2.$

733. $\frac{du}{dv} = \pm \sqrt{u^2 + a^2}; \quad k_1 = -k_2 = \frac{a}{u^2 + a^2}.$

735. $k_1 = \sqrt{3}/9, \quad k_2 = -\sqrt{3}/3.$

736. $k_1 = 1/p, \quad k_2 = 1/q,$

738. a) $k_n = \frac{-du^2}{\sqrt{1+u^2} [(1+u)^2 du^2 + dv^2]},$ donde $u = x, v = z;$

b) $k_n = -1/(1+u^2)^{3/2};$

c) $k_n = -1/21 \sqrt{5}.$

739. a) $k_1 = 1/2 \sqrt{5}, \quad k_2 = 0;$

b) $x-2=0, \quad z-1=0; \quad \frac{x-2}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad y=0;$

c) $k = 2/9 \sqrt{5}.$

740. a) $4x^2 + 9y^2 = 1;$

b) $R = 2/13.$

741. INDICACIÓN. Escribamos la fórmula de Euler en la forma

$$\frac{1}{r_i} = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} - \frac{R_1 - R_2}{2R_1 R_2} \cos 2 \left(\varphi + \frac{i-1}{n} \pi \right),$$

donde $1/R_1, 1/R_2$ son las curvaturas principales, $i = 1, 2, \dots, n.$

742. Una esfera.

744. Superficies desarrollables.

746. 1) Para la superficie engendrada por la rotación de la línea $x = f(u), y = 0, z = g(u)$ alrededor del eje $Oz,$

$$K = \frac{g' (f' g'' - f'' g')}{f (f'^2 + g'^2)^2}.$$

2) Para la esfera $K = 1/R^2.$

3) Para el elipsoide de rotación

$$K = -\frac{c^2}{(a^2 \cos^2 u + c^2 \sin^2 u)^2}.$$

4) Para el hiperboloide de rotación de una hoja

$$K = -\frac{c^2}{(a^2 \operatorname{sh}^2 u + c^2 \operatorname{ch}^2 u)^2}.$$

5) Para el hiperboloide de rotación de dos hojas

$$K = \frac{c^2}{(a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u)^2}.$$

6) Para el paraboloide de rotación

$$K = \frac{4}{(1 + 4u^2)^2}.$$

7) Para el cilindro circular

$$K = 0.$$

8) Para el cono circular

$$K = 0.$$

9) Para el toro

$$K = \frac{\cos u}{b(a + b \cos u)}.$$

10) Para el catenoide

$$K = -\frac{1}{a^2 \operatorname{ch}^4(u/a)}.$$

11) Para la pseudoesfera

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

747. Uno de los radios principales de curvatura de la superficie es igual al radio de curvatura de la parábola $y^2 = 2px$:

$$R_1^2 = p^2 \left(1 + \frac{2x}{p}\right)^3.$$

El segundo radio principal de curvatura es igual al segmento que va de la normal de la parábola a la directriz:

$$R_2^2 = \frac{p^2}{4} \left(1 + \frac{2x}{p}\right)^2.$$

De este modo, $|R_1| = 2|R_2|$.

748. $K = -\frac{1}{A^2} (\partial_{uu} \ln A + \partial_{vv} \ln A)$ (véase el problema 660).

749. $K = -\frac{\partial_{uu} \sqrt{G}}{\sqrt{G}}$. 750. $K = -1$.

751. $K^{-1} = pq \left(1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right)^2$.

753.

$$K = \frac{-1}{(\partial_x F)^2 + (\partial_y F)^2 + (\partial_z F)^2} \begin{vmatrix} \partial_{xx} F & \partial_{xy} F & \partial_{xz} F & \partial_x F \\ \partial_{yx} F & \partial_{yy} F & \partial_{yz} F & \partial_y F \\ \partial_{zx} F & \partial_{zy} F & \partial_{zz} F & \partial_z F \\ \partial_x F & \partial_y F & \partial_z F & 0 \end{vmatrix}.$$

754. $K = \frac{1}{2}c$.

755. Si la superficie de las normales principales está definida por la ecuación

$$\rho = r(s) + v n(s),$$

entonces

$$K = -\frac{\kappa^2}{[(1 - vk)^2 + v^2 \kappa^2]^2},$$

donde k y κ son, respectivamente, la curvatura y la torsión de la línea $r = r(s)$.

Si la superficie de las binormales está definida por la ecuación

$$\rho = r(s) + v b(s),$$

entonces

$$K = -\frac{\kappa^2}{(1 + v^2 \kappa^2)^2},$$

donde κ es la torsión de la línea $r = r(s)$.

756. $H = 0$, $K = -a^2/(a^2 + u^2)^2$, la curvatura total es constante sobre las hélices.

$$757. \quad K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad H = \frac{(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs}{2(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}$$

donde $p = \partial_x z$, $q = \partial_y z$, $r = \partial_{xx} z$, $s = \partial_{xy} z$, $t = \partial_{yy} z$.

758.

$$K = \frac{f' f''}{\rho(1 + f'^2)^2}, \quad H = \frac{f''}{2(1 + f'^2)^{3/2}} + \frac{f'}{2\rho\sqrt{1 + f'^2}},$$

759. $H = -1/2a$.

761. Si el eje del toro es vertical, entonces las paralelas superior e inferior del mismo se componen de puntos parabólicos; estas paralelas separan la parte exterior del toro, constituida por puntos elípticos, de su parte interior compuesta por puntos hiperbólicos.

762. Todos los puntos de la superficie son elípticos (fig. 186).

763. Los vértices de la sinusoide describen líneas compuestas de puntos parabólicos; los puntos de inflexión de la sinusoide describen líneas que no pertenecen a la superficie. Ambas familias de líneas indicadas dividen toda la superficie en zonas, con curvatura total de igual signo, dos zonas contiguas (por arriba o por abajo) tienen curvaturas de signos diferentes (fig. 187).

764. El punto $x = 1$, $y = z = 0$ es singular y divide la superficie en dos partes: para $x > 1$ los puntos de superficie son elípticos y para $x < 1$, son hiperbólicos (fig. 188).

765. Todos los puntos de la superficie son hiperbólicos (fig. 189).

766. Si el producto $AB \geq 0$, entonces todos los puntos de la superficie son hiperbólicos (fig. 190); si $AB < 0$, sobre la superficie pueden tenerse puntos de los tres tipos (fig. 191).

767. Elípticos. 768. Hiperbólicos.

769, 770. Elípticos.

771. Hiperbólicos.

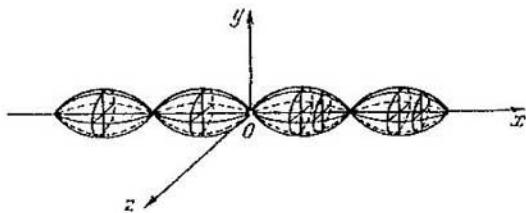


Fig. 186.

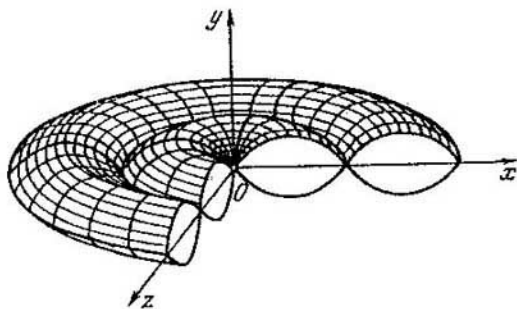


Fig. 187.

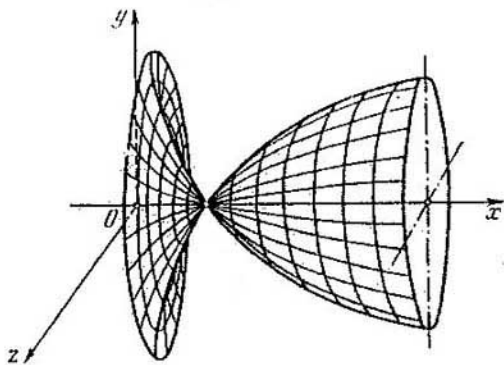


Fig. 188.

772-775. Parabólicos.

776. Si $f''f'' < 0$, los puntos son elípticos si $f''f'' > 0$, son hiperbólicos si $f''f'' = 0$, son parabólicos.

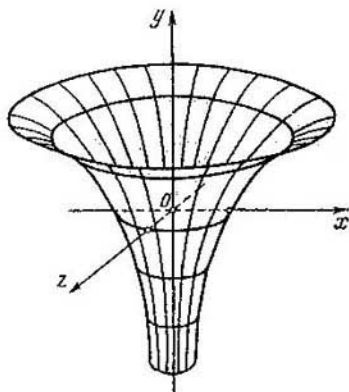


Fig. 189.

778. La necesidad es evidente. Demostremos la suficiencia. Sea

$$L = \lambda E, \quad M = \lambda F, \quad N = \lambda G.$$

Sustituimos los valores de los coeficientes de las formas cuadráticas:

$$\begin{aligned} -\partial_u m \cdot \partial_u r &= \lambda \partial_u r^2, & -\partial_u m \cdot \partial_v r &= \lambda \partial_u r \cdot \partial_v r, \\ \text{o bien} & & (m_u + \lambda r_u) \cdot r_u &= 0, & (m_u + \lambda r_u) \cdot r_v &= 0. \end{aligned}$$

Adjuntando aquí la igualdad

$$(m_u + \lambda r_u) \cdot m = 0,$$

obtenemos

$$m_u + \lambda r_u = 0.$$

De un modo análogo se demuestra la igualdad a cero del vector $m_v + \lambda r_v$. Así,

$$m_u = -\lambda r_u, \quad m_v = -\lambda r_v. \quad (*)$$

Derivando la primera ecuación con respecto a v y la segunda con respecto a u , obtenemos

$$m_{uv} = -\lambda_v r_u - \lambda r_{uv}, \quad m_{vu} = -\lambda_u r_v - \lambda r_{vu},$$

de donde

$$\lambda_v r_u - \lambda_u r_v = 0.$$

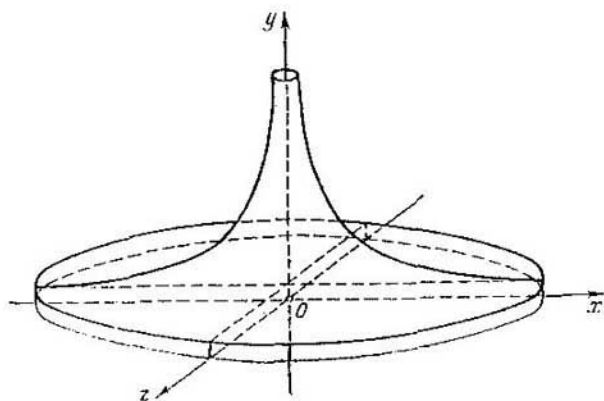


Fig. 190.

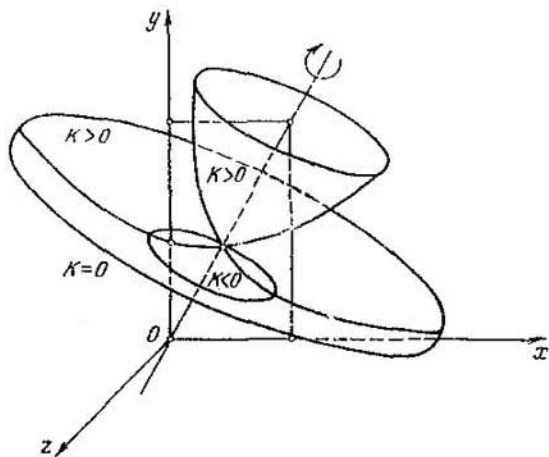


Fig. 191.

Si por lo menos una de las magnitudes $\lambda_u \lambda_v$, fuese distinta de cero, los vectores r_u y r_v resultarían colineales lo que es imposible. Excluyendo este caso, obtenemos $\lambda = \text{const.}$ Integramos las ecuaciones (*):

$$r = -\frac{m}{\lambda} + r_0, \quad \text{o bien } (r - r_0)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

(una esfera).

780. Construimos la evoluta de cualquier meridiano y hallamos los puntos P_1, P_2, \dots , de su encuentro con el eje de rotación. Sean M_1, M_2, \dots los puntos de la evolvente (del meridiano) que les corresponden. Entonces las paralelas que pasan por estos puntos se componen de puntos de redondeo.

781. Las hiperélicas descritas por los vértices de la sinusoides y solamente ellas (véanse los problemas 780 y 389).

782. Dos puntos, o sea, los puntos de encuentro del elipsoide con el eje de rotación.

783. El vértice del paraboloides.

784. En el paraboloides

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > q > 0,$$

hay dos puntos de redondeo:

$$A_{1,2} (0, \pm \sqrt{pq - q^2}, (p - q)/2).$$

785. En el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c > 0,$$

hay cuatro puntos de redondeo:

$$A_{1-4} \left(\pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right).$$

786. En el hiperboloides de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > b > 0,$$

hay cuatro puntos de redondeo

$$A_{1-4} \left(0, \pm b \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}, \pm c \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2}} \right).$$

789. Por ejemplo, la superficie engendrada por la rotación de la parábola $y = x^2$ alrededor del eje Oy .

790. Por ejemplo, sobre el cilindro $y = x^2$ el eje Oz se compone de puntos de aplastamiento.

791. Vélgase del problema 729.

792. $M du + N dv = 0, L du + M dv = 0.$

793. $LR - MQ + NP = 0.$

795. $\left(L \frac{\partial \varphi}{\partial v} - M \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) du + \left(M \frac{\partial \varphi}{\partial v} - N \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) dv = 0.$

$$797. \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = C_1.$$

$$798. b(1, 0, -1).$$

$$799. (LB - MA) du + (MB - NA) dv = 0.$$

$$801. v = \operatorname{arctg} u + C.$$

804. Al tomar las ecuaciones de la pseudoesfera en la forma $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = a \ln \operatorname{tg}(u/2) + a \cos u$, obtenemos

$$\ln \operatorname{tg}(u/2) \pm v = C.$$

Si se introducen los parámetros nuevos

$$u' = \ln \operatorname{tg}(u/2) + v,$$

$$v' = \ln \operatorname{tg}(u/2) - v,$$

entonces la red de coordenadas será asintótica y los coeficientes de la primera forma cuadrática cumplirán los requisitos del problema 657.

806. Si partimos de las ecuaciones

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \operatorname{sen} v, \quad z = \varphi(u)$$

de la superficie de rotación, obtenemos

$$(f' \varphi'' - f'' \varphi') du^2 + f \varphi' dv^2 = 0.$$

$$807. u \pm v = \text{const.}$$

808. Si se toma la ecuación del toro en la forma

$$x = (a + b \cos u) \cos v, \quad y = (a + b \cos u) \operatorname{sen} v, \\ z = b \operatorname{sen} u,$$

entonces la ecuación diferencial de las líneas asintóticas será

$$b du^2 + \cos u (a + b \cos u) dv^2 = 0.$$

Tiene la solución general

$$v + C = \pm \int \frac{\sqrt{b} du}{\sqrt{-\cos u (a + b \cos u)}}$$

para $\pi/2 < u < 3\pi/2$.

Es evidente que las líneas $u = \pi/2$, $u = 3\pi/2$ son también las soluciones de la ecuación diferencial (sus soluciones singulares). Envuelven las familias de las líneas asintóticas situadas sobre la parte interior de la superficie del toro (fig. 192).

809. Las generatrices rectilíneas y sus trayectorias ortogonales, o sea, las hélices.

810. Las generatrices rectilíneas.

811. La ecuación de la superficie tiene la forma $x^2z - y^2z = 0$. La ecuación diferencial de las líneas asintóticas es:

$$2y^2 dx^2 - 3xy dx dy + x^2 dy^2 = 0,$$

o bien

$$(x dy - y dx)(2y dx - x dy) = 0.$$

Por consiguiente, existen dos familias de líneas asintóticas:

1) $y = c_1 x, \quad z = c_1^2$;

2) $y = c_2 x^2, \quad z = c_2^2 x^3$.

814. Si $k_1 + k_2 = 0$, entonces de la fórmula de Euler resulta que

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 0,$$

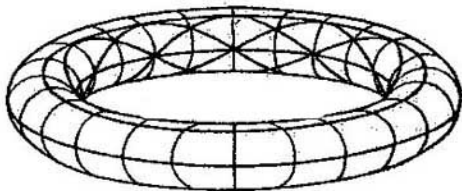


Fig. 102.

donde φ es el ángulo formado por las direcciones asintótica y principal. De aquí se deduce que $\varphi = \pm \pi/4$, es decir, entre las direcciones asintóticas el ángulo es igual a $\pi/2$.

817. Tomemos la red de las líneas asintóticas de la superficie dada como red de coordenadas. Entonces $L = 0, N = 0$. Para que la red correspondiente sobre la superficie paralela también se componga de líneas asintóticas debe cumplirse la condición $L^* = 0, N^* = 0$. Puesto que

$$L^* = aKE + (1 - 2aH) L,$$

$$N^* = aKG + (1 - 2aH) N,$$

entonces para $K \neq 0$ los coeficientes L^*, N^* no son iguales a cero, que es lo que demuestra lo exigido en el problema.

820. Las generatrices rectilíneas y sus trayectorias ortogonales, que son secciones planas.

821. Las generatrices rectilíneas y las líneas de intersección de esferas de radio arbitrario con centro en el vértice de la superficie cónica, con la superficie cónica.

822. Los paralelos y meridianos.

823. Las líneas de coordenadas.

824. Las generatrices rectilíneas y sus trayectorias ortogonales.

825. Si la ecuación del helicoido se toma en la forma

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av,$$

entonces la ecuación diferencial de las líneas de curvatura es

$$(a^2 + u^2) dv^2 - du^2 = 0,$$

de donde

$$v = \pm \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c.$$

826.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2z, \\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{qC} &= \frac{q-p}{1+C} \quad (C \neq 0), \end{aligned} \right\}$$

así como las secciones del paraboloide elíptico por los planos $x = 0$ o $y = 0$.

831. $R = r(s) + R_1 m(s)$, donde $k_1 = 1/R_1$ es la curvatura principal a lo largo de la línea dada. Así, pues, la envolvente de las normales de la superficie a lo largo de la línea de curvatura se compone de los centros de la curvatura principal. Su plano osculador coincide con el plano de la sección normal de la línea de curvatura en el punto correspondiente.

834. Tomemos la red ortogonal sobre la superficie dada como red de coordenadas. Entonces $F = 0$. Para la red ortogonal correspondiente sobre la superficie paralela debe ser $F^* = 0$.

Tomemos las ecuaciones de las superficies en examen en la forma

$$r = r(u, v) \quad y \quad r = r(u, v) + am(u, v).$$

Entonces

$$F^* = 2a(aH - 1)M,$$

de donde resulta que $F^* = 0$ en dos casos: a) $M = 0$; entonces la red ortogonal sobre la superficie dada está constituida por las líneas de curvatura; b) $a = 1/H$; entonces la superficie dada tiene una curvatura media constante y a cualquier red ortogonal sobre la misma le corresponderá también una red ortogonal.

835. Esto es posible solamente para un elipsoide de rotación.

845. Supongamos que las generatrices rectilíneas son paralelas al eje Oz . Entonces la ecuación de la superficie se puede tomar en la forma

$$r = f(u)i + \varphi(u)j + vk,$$

donde u la consideramos como parámetro natural de la línea directriz. Buscaremos la ecuación de la geodésica en la forma

$$v = v(u). \quad (*)$$

Entonces

$$N = r_u \times r_v = \varphi'k - f'j, \quad dr = (f'i + \varphi'j + v'k) du,$$

$$d^2r = (f''i + \varphi''j + v''k) du^2$$

y la ecuación para determinar las líneas geodésicas será

$$\begin{vmatrix} \varphi'' - f'' & 0 \\ f'' & \varphi'' v' \\ f'' & \varphi'' v'' \end{vmatrix} = 0,$$

o bien

$$(\varphi'^2 + f'^2) v'' - (\varphi' \varphi'' + f' f'') v' = 0.$$

Por lo tanto $\varphi'^2 + f'^2 = 1$; por lo tanto

$$\varphi' \varphi'' + f' f'' = \frac{1}{2} (\varphi'^2 + f'^2)' = 0.$$

Ahora bien, $v'' = 0$; por lo tanto, $v = c_1 u + c_2$. La ecuación vectorial de la familia de líneas geodésicas será

$$r = f(u) i + \varphi(u) j + (c_1 u + c_2) k,$$

de donde

$$\cos \theta = \cos(\widehat{r_u, Oz}) = \frac{\frac{dr}{du} \cdot k}{\left| \frac{dr}{du} \right|} = \frac{c_1}{\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + c_1^2}} = \frac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}}.$$

Por consiguiente, las geodésicas halladas son hélices generalizadas.

Además, las geodésicas son las generatrices rectilíneas. Estas han quedado fuera de la solución general, ya que sus ecuaciones no se pueden representar en la forma (*).

Como por cada punto de la superficie cilíndrica pasa bien una hélice generalizada, o bien una generatriz rectilínea, entonces cada una de estas líneas es geodésica.

848. Los círculos máximos de la esfera.

852. Véanse los problemas 477, 632, 851.

$$856. k_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}. \quad 857. k_g = \frac{|u|}{u^2 + a^2}.$$

$$858. k_g|_{u=c} = \frac{|u|}{u^2 + f'^2(v)}, \quad k_g|_{v=c} = 0.$$

863. Tomemos las ecuaciones del helicoido directo en la forma

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

Observemos, ante todo, que las líneas geodésicas son generatrices rectilíneas, o sea, las líneas $v = \text{const}$. Suponiendo ahora que $dv \neq 0$, obtenemos la ecuación diferencial de las líneas geodésicas

$$\frac{d^2 u}{dv^2} - \frac{2u}{a^2 + u^2} \left(\frac{du}{dv} \right)^2 - u = 0.$$

Para resolver la ecuación introduzcamos nuevas variables suponiendo que u es una variable independiente y $p = \frac{du}{dv}$ es función de u . Entonces la ecuación tomará la forma

$$p \frac{dp}{du} - \frac{2u}{a^2 + u^2} p^2 - u = 0.$$

Suponiendo que $z = p^2$, obtenemos

$$\frac{dz}{du} - \frac{4u}{a^2 + u^2} z - 2u = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$z = (a^2 + u^2)^2 \left(C_1 - \frac{1}{a^2 + u^2} \right),$$

de donde

$$v = \int \frac{du}{(a^2 + u^2) \sqrt{C_1 - \frac{1}{a^2 + u^2}}} + C_2.$$

864. Tomemos la primera forma cuadrática de la pseudoesfera en el aspecto

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

(véase el problema 660). Entonces las ecuaciones diferenciales de las geodésicas serán

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{1}{y} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{2}{y} \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Λ este sistema lo satisfacen las líneas $x = \text{const.}$

Si $x \neq \text{const.}$, este sistema se puede sustituir por la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{1}{y} = 0$$

cuya solución general es

$$(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2.$$

865. INDICACIÓN. Considerando a lo largo de la geodésica v como función de u , obtenemos la ecuación diferencial de las líneas geodésicas de la superficie de Liouville

$$2(f + \varphi) \frac{d^2v}{du^2} = -\frac{df}{du} \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + \frac{d\varphi}{d} \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - \frac{df}{du} \frac{dv}{du} + \frac{d\varphi}{dv},$$

o bien

$$(f + \varphi) du^2 d(dv^2) = (du^2 + dv^2) (d\varphi du^2 - df dv^2),$$

de donde

$$d \left(\frac{\varphi du^2 - f dv^2}{du^2 + dv^2} \right) = 0.$$

Integrando esta relación, obtenemos las ecuaciones buscadas.

866. INDICACIÓN. Comprobar primeramente que

$$\rho \cos \mu = e r t,$$

donde e es el vector unitario orientado por el eje de rotación; r es radio vector del punto corriente de la geodésica que se lee a partir del origen O elegido sobre el eje de rotación; t es el vector tangente unitario de la geodésica. Comprobar luego que la diferencial del producto obtenido mixto es igual a cero. El teorema recíproco no es cierto, ya que a

lo largo de cualquier paralela la relación indicada se cumple, pero, sin embargo, no toda paralela es una geodésica.

867. Sea r_0 el radio del paralelo más ancho L del elipsoide de rotación y sea M_0 un punto sobre este paralelo. Examinemos la geodésica que pasa por el punto M_0 bajo el ángulo $\mu_0 = 0$ respecto al paralelo L . Según el teorema de Clairaut a lo largo de esta geodésica

$$\rho \cos \mu = r_0;$$

de aquí se deduce que

$$\rho = r_0, \quad \cos \mu = 1.$$

De este modo, $\mu = 0$ y la geodésica coincide con el paralelo L .

Tomemos ahora la geodésica que corta el paralelo en un ángulo recto, o sea, $\mu_0 = \pi/2$. Según el teorema de Clairaut $\rho \cos \mu = 0$; por consiguiente, $\mu = \pi/2$ y la geodésica coincide con el meridiano.

Supongamos ahora que $0 < \mu_0 < \pi/2$. Designemos $r_0 \cos \mu_0 = C_0$, obtendremos que a lo largo de la geodésica $\rho \cos \mu = C_0$. De aquí resulta que ella corta todos los paralelos de elipsoide con radios $\rho < C_0$ en un ángulo no nulo y, tocando el paralelo con radio $\rho = C_0$ regresa al paralelo L (fig. 193).

868. Sea r_0 el radio del paralelo más estrecho L_0 del hiperboloide de rotación de una hoja y sea M_1 un punto que está sobre el paralelo L_1 distinto de L_0 .

Es evidente que para las geodésicas que pasan por el punto M_1 la constante C en el teorema de Clairaut puede tomar los valores dentro de los límites de $0 \leq C \leq r_1$, donde r_1 es el radio del paralelo L_1 . Si $C < r_0$, entonces la geodésica corta todos los paralelos de la superficie bajo un ángulo no nulo.

Para $C \geq r_0$ toda línea geodésica se situará en la parte de la superficie que está acotada por el paralelo L de radio C y contiene el punto M_1 y cortará todos los paralelos de esta parte de la superficie, salvo L . Si $C > r_0$, la geodésica toca el paralelo L ; si $C = r_0$, la geodésica se aproxima infinitamente al paralelo L , dando en este caso un número infinito de vueltas sobre la superficie (fig. 194).

869. Sean r_0 y r_1 los radios de los paralelos más estrecho y más ancho, respectivamente. La constante C en el teorema de Clairaut puede tomar los valores dentro de los límites $0 \leq C \leq r_1$. Las geodésicas del toro son todos los meridianos (para $C = 0$), el paralelo más estrecho (para $C = r_0$) y el más ancho (para $C = r_1$). Si C no es igual a los valores indicados, la geodésica oscila entre dos paralelos de radio C lo mismo que una sinusóide. Por último, sobre el toro existen geodésicas (para $C = r_0$) que se dovanan en el toro, acercándose infinitamente al paralelo más estrecho por ambos lados y dando un número infinito de vueltas (fig. 195).

870. INDICACIÓN. Vélgase de un sistema semigeodésico de coordenadas.

871. Las condiciones de ortonormalidad del sistema de referencia tienen la forma

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

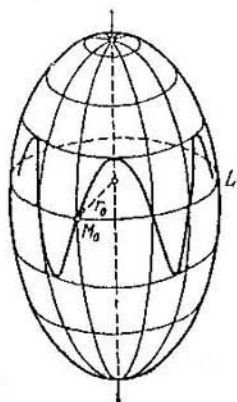


Fig. 193.

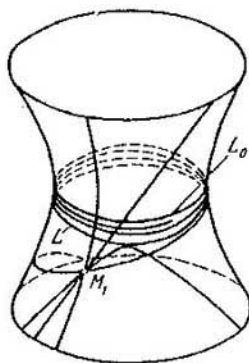


Fig. 194.

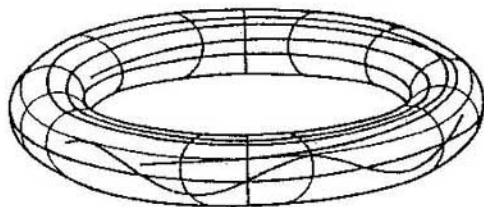


Fig. 195.

Derivando estas igualdades y empleando las fórmulas (2) del § 18, obtenemos

$$\begin{aligned} de_1 \cdot e_j + e_j \cdot de_j &= 0, \\ \sum_{h=1}^3 \omega_i^h e_h \cdot e_j + \sum_{h=1}^3 \omega_j^h e_i \cdot e_h &= 0, \\ \sum_{h=1}^3 \omega_i^h \delta_{hj} + \sum_{h=1}^3 \omega_j^h \delta_{ih} &= 0 \\ \omega_i^i + \omega_j^j &= 0. \end{aligned}$$

872. Como M es el radio vector de un punto de la superficie, dM pertenece al plano tangente y por eso es una combinación lineal de los vectores e_1 y e_2 .

873. La función vectorial e_3 determina la aplicación esférica de la superficie, por eso $de_3(h) = \mathcal{A}(h)$, donde \mathcal{A} es el operador principal. Para el vector h que tiene la dirección principal, $\mathcal{A}(h) = \lambda h$. Si e_1 es tangente a la línea de curvatura γ , entonces

$$de_3(e_1) = \omega_1^1(e_1) e_1 + \omega_1^2(e_1) e_2$$

será colineal a e_1 , es decir $\omega_1^2(e_1) = 0$ en los puntos de la línea γ .

874. Puesto que M es el radio vector de un punto de la superficie, la función vectorial M será la transformación idéntica de la superficie y $dM(h) = h$ para todo vector tangente h . En particular,

$$\begin{aligned} dM(e_1) &= \omega^1(e_1) e_1 + \omega^2(e_1) e_2 = e_1, \\ dM(e_2) &= \omega^1(e_2) e_1 + \omega^2(e_2) e_2 = e_2. \end{aligned}$$

875. Como los vectores e_1, e_2 son unitarios y $|\partial_u r| = \sqrt{E}$, $|\partial_v r| = \sqrt{G}$, entonces del enunciado del problema obtendremos $\partial_u r = \sqrt{E} e_1$, $\partial_v r = \sqrt{G} e_2$. Luego

$$\begin{aligned} \omega^1 &= f_1 du + f_2 dv, \quad f_1 = \omega^1(\partial_u r), \quad f_2 = \omega^1(\partial_v r), \\ \omega^1(\partial_u r) &= \omega^1(\sqrt{E} e_1) = \sqrt{E} \omega^1(e_1) = \sqrt{E}, \\ \omega^1(\partial_v r) &= \omega^1(\sqrt{G} e_2) = \sqrt{G} \omega^1(e_2) = 0. \end{aligned}$$

Por eso $\omega^1 = \sqrt{E} du$. Lo mismo para la forma ω^2 .

876. Para las 1-formas ω^1, ω^2 las expresiones requeridas se obtuvieron en el problema 875. Para $\omega_1^1 = \lambda du + \mu dv$ del problema 874 resulta que $\mu = 0$. Designando $\lambda = p_1 \sqrt{E}$, obtenemos $\omega_1^1 = p_1 \sqrt{E} du$. Análogamente, $\omega_2^2 = p_2 \sqrt{G} dv$.

Para la forma $\omega_1^2 = f du + g dv$ designemos $f = q_1 \sqrt{E}$, $g = q_2 \sqrt{G}$.

877. Examinemos cierto sistema ortonormalizado de referencia

$$(M_0, e_1^0, e_2^0, e_3^0)$$

con el origen en el punto M . Si el sistema (4) del § 18 es completamente integrable, existe la solución única

$$M = M(u, v), \quad e_i = e_i(u, v)$$

que satisface las condiciones iniciales

$$M(u_0, v_0) = M_0, \quad e_i(u_0, v_0) = e_i^0.$$

Geoméricamente esto quiere decir que existe una superficie con cada punto de la cual está relacionando el sistema ortonormalizado de referencia (M, e_1, e_2, e_3) .

878. Sean cumplidas las condiciones (3), entonces

$$d\omega_1^2 = (\partial_u(q_2 \sqrt{G}) - \partial_v(q_1 \sqrt{E})) du \wedge dv,$$

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^2 = -p_1 \sqrt{E} p_2 \sqrt{G} du \wedge dv;$$

por eso de las condiciones (5) se deduce que $d\omega_2^2 = \omega_1^2 \wedge \omega_3^2$. Es análogo para las demás formas y para la afirmación contraria.

881. La curvatura normal de la línea y definida por las ecuaciones interiores $u = u(s)$, $v = v(s)$ se halla por la fórmula

$$k_n = \frac{\Phi_2(Y')}{\Phi_1(Y')} = \frac{p_1 E (u')^2 + p_2 G (v')^2}{E (u')^2 + G (v')^2}.$$

Si γ es la línea de coordenadas $v = 0$, entonces $v' = 0$, $k_1 = p_1$. Es análogo para la segunda línea de coordenadas.

882. El desplazamiento de un punto con radio vector $F = M + \lambda e_1$, que pertenece a la recta Me_1 es igual a

$$d(M + \lambda e_1) = (\sqrt{E} du + d\lambda) e_1 +$$

$$+ [\sqrt{G} dv + \lambda (q_1 \sqrt{E} du + q_2 \sqrt{G} dv)] e_2 + p_1 \sqrt{E} du e_3.$$

Cuando el punto M se desplaza por la primera línea de coordenadas $u = \text{const}$, entonces $\partial_v M = \sqrt{G} e_2$ y el punto F se desplaza por la arista de retroceso, es decir el vector $\partial_v(M + \lambda e_1)$ es colineal al vector e_1 , de donde

$$\partial_v(M + \lambda e_1) = \partial_v \lambda e_1, \quad 1 + \lambda q_2 = 0.$$

De un modo análogo obtendremos $1 - \lambda q_1 = 0$.

883. Sea h el vector tangente único de una curva en una superficie. Entonces

$$h = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2 = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{E}} \partial_u r + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{G}} \partial_v r,$$

$$k_n(h) = \frac{\Phi_2(h)}{\Phi_1(h)} = \frac{p_1 E \frac{\cos^2 \varphi}{E} + p_2 G \frac{\sin^2 \varphi}{G}}{E \frac{\cos^2 \varphi}{E} + G \frac{\sin^2 \varphi}{G}} = p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \sin^2 \varphi.$$

884. Escojamos en un punto M del plano tangente a la superficie, el sistema rectangular de coordenadas cartesianas (M, e_1, e_2) , y a las coordenadas de un punto arbitrario en este sistema las designamos x e y . Si φ es el ángulo comprendido entre la primera línea de coordena-

das y una sección normal arbitraria, entonces, de la definición de la indicatriz de Dupin, resulta que

$$x = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{|k_n|}}, \quad y = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{|k_n|}}.$$

Entonces, de la fórmula de Euler

$$k_n = p_1 \cos^2 \varphi + p_2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

obtendremos

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 = \pm 1.$$

885. INDICACION. La fórmula se deduce de las primeras tres ecuaciones del sistema (5) del § 18.

886. Al desplazarse por la línea asintótica

$$e_3 d^2 M = p_1 F du^2 + p_2 G dv^2 = 0.$$

Por eso, de las ecuaciones (2) y (3) del § 18 y de la fórmula $K = p_1 p_2$ resulta que

$$K dA^2 + de_3^2 = 0,$$

de donde

$$K + \left(\frac{de_3}{ds} \right)^2 = 0.$$

Como a lo largo de la línea asintótica el vector binormal b coincide con el vector e_3 , entonces

$$\frac{de_3}{ds} = -\kappa n.$$

Por consiguiente, $K + \kappa^2 = 0$.

887. Las expresiones indicadas se obtienen de las fórmulas (2) y (3) del § 18 y

$$k_g = \left(e_3 \frac{dM}{ds} \frac{d^2 M}{ds^2} \right).$$

888. Del problema 878 tenemos $d\omega_1^2 = \omega_1^2 \wedge \omega_3^2$ y por las fórmulas (3) del § 18

$$d\omega_1^2 = -p_1 p_2 \sqrt{EG} du \wedge dv, \quad \omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{EG} du \wedge dv,$$

de donde

$$d\omega_1^2 = -k\omega^1 \wedge \omega^2.$$

889. Examinemos sobre la superficie los vectores $a = a^\alpha e_\alpha$, $b = b^\beta e_\beta$.

Al trasladarlos en paralelo por la superficie tenemos

$$da = a^\beta \omega_\beta^2 e_3, \quad db = b^\beta \omega_\beta^2 e_3,$$

$$d(a \cdot b) = da \cdot b + a \cdot db = (a^\beta \omega_\beta^2 e_3) \cdot b^\alpha \cdot e_\alpha + a^\alpha e_\alpha \cdot (b^\beta \omega_\beta^2 e_3).$$

Como $e_3 \cdot e_\alpha = 0$, entonces $d(a \cdot b) = 0$ y, por consiguiente, el producto escalar de los vectores, al trasladarlos en paralelo, se con-

serva. Y por eso se conservan también las longitudes de los vectores y los ángulos comprendidos entre ellos.

891. Derivando la relación $\xi \cdot e_1 = \cos \varphi$, hallamos

$$-\operatorname{sen} \varphi d\varphi = d\xi \cdot e_1 + \xi \cdot de_1 = a^\alpha \omega_\alpha^2 e_3 \cdot e_1 + \xi \cdot de_1 = \xi \cdot de_1.$$

Si en lugar de ξ se toman otros vectores trasladables a lo largo de la línea dada, entonces los ángulos φ formados por ellos con el vector ξ se distinguirán unos de otros en un valor constante, ya que los ángulos comprendidos entre los vectores se conservan al trasladar a éstos en paralelo. Por lo tanto, $d\varphi$, para cualquier vector que se traslada en paralelo, tendrá un mismo valor. Al escoger en calidad de ξ el vector e_2 , obtenemos

$$-d\varphi = e_2 \cdot de_1 = \omega \zeta = q_1 \sqrt{E} du + q_2 \sqrt{G} dv.$$

892. De la fórmula (6) del § 18 tenemos

$$\Delta\varphi = \int_L \dots (q_1 \sqrt{E} du + q_2 \sqrt{G} dv),$$

por la fórmula

$$\int_L P dx + Q dy = \int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

utilizando (5) del § 18, hallamos

$$\Delta\varphi = \int_D \int K \sqrt{EG} du dv.$$

Puesto que

$$K = p_1, p_2, \quad d\sigma = \sqrt{EG} du dv,$$

entonces

$$\Delta\varphi = \int_D \int K d\sigma.$$

893. Sean $\frac{dA}{ds}$ el vector unitario de la tangente al contorno L en el punto A ; s la longitud del arco de la línea L ; a el vector unitario en la superficie que recorre en paralelo el contorno L . En este caso

$$\cos \psi = a \cdot \frac{dA}{ds}, \quad da = a^\alpha \omega_\alpha^2 e_3.$$

De aquí

$$-\operatorname{sen} \psi d\psi = a \cdot \frac{d^2 A}{ds^2} ds.$$

Supongamos que en cierto punto A_0 del contorno L

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{dA}{ds} \times e_3.$$

Entonces,

$$d\psi = \left(e_3 \frac{dA}{ds} \frac{d^2A}{ds^2} \right) ds,$$

o bien

$$d\psi = k_g ds.$$

Una vez que el punto A ha recorrido por completo la frontera L , el vector $\frac{dA}{ds}$ girará a partir de la posición inicial A_0 en un ángulo de 2π ; el ángulo de giro del vector α respecto al vector $\frac{dA}{ds}$ será

$$\Delta\psi = \int_L k_g ds.$$

Por consiguiente,

$$\Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi.$$

896. De la fórmula

$$\iint_D K d\sigma + \int_L k_g ds = 2\pi$$

para $k_g = 0$ resulta que

$$\iint_D K d\sigma = 2\pi.$$

Pero esta igualdad no puede existir, si en todos los puntos de la superficie $K \leq 0$.

897. Sobre el plano xOy se proyecta la región interior de la elipse

$$2x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x + 18y - 16 = 0, \quad z = 0;$$

sobre el plano yOz se proyecta la región interior de la elipse

$$5y^2 + 8z^2 + 32y - 32z - 4 = 0, \quad x = 0;$$

sobre el plano xOz se proyecta la región interior de la elipse

$$23x^2 + 54z^2 + 18x - 216z - 324 = 0, \quad y = 0.$$

900. Mostremos que cada una de las líneas asintóticas l es recta. Supongamos lo contrario. Las normales a la superficie a lo largo de la línea l son paralelas al plano fijo; por eso $m \cdot e = 0$, donde e es un vector constante. Como sobre la línea asintótica el vector de la binormal $b = \pm m$, entonces $b \cdot e = 0$. Derivando esta igualdad, obtenemos

$$\kappa n \cdot e = 0.$$

Pero $\kappa \neq 0$, ya que en caso contrario $b = m$ es un vector constante y la imagen esférica de la línea asintótica será un punto. Y bien,

$$b \cdot e = n \cdot e = 0;$$

por consiguiente, $t = \pm c$, de donde

$$\frac{dt}{ds} = kn = 0 \quad \text{y} \quad k = 0$$

contrariamente a lo supuesto. Así, la superficie S es reglada. Ella no puede ser desarrollable, ya que en este caso la imagen esférica de la línea asintótica es un punto.

901. Si las ecuaciones de la superficie de rotación se escriben en la forma

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \sin v, \quad z = u,$$

entonces la anulación de la curvatura media da

$$1 + \varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0.$$

Efectuemos la sustitución de las variables tomando como función nueva $p = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$ y a φ como nueva variable independiente. Entonces,

$$1 - p^2 - \varphi p \frac{dp}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{2} d(\ln(1 + p^2)),$$

de donde

$$c^2 p^2 = 1 + p^2.$$

Pasando a las variables iniciales, obtenemos

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{c^2\varphi^2 - 1}} = du,$$

$$(1 + u^2) f'(u) = a, \quad f'u = a/(1 + u^2).$$

Integrando esta ecuación, nos queda,

$$f(u) + b = z + b = a \operatorname{arctg} u.$$

Por consiguiente,

$$u = \operatorname{tg} \frac{z+b}{a}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z+b}{a}.$$

Esta es la ecuación implícita del helicoido directo

$$x = \tilde{u} \cos \tilde{v}, \quad y = \tilde{u} \sin \tilde{v}, \quad z = a\tilde{v} - b.$$

904. Los coeficientes de la primera y la segunda formas cuadráticas de las superficies S y S^* están vinculados por las relaciones

$$E^* = (1 - a^2K) E + 2a(aH - 1) L,$$

$$F^* = (1 - a^2K) F + 2a(aH - 1) M,$$

$$G^* = (1 - a^2K) G + 2a(aH - 1) N,$$

$$L^* = aKE + (1 - 2aH) L,$$

$$M^* = aKF + (1 - 2aH) M,$$

$$N^* = aKG + (1 - 2aH) N.$$

De aquí obtenemos las expresiones buscadas:

$$K^* = \frac{K}{1 - 2aH + a^2K}, \quad H^* = \frac{H - aK}{1 - 2aH + a^2K}.$$

905. Sustituyendo $a = 1/2H$ en la fórmula

$$K^* = \frac{K}{1 - 2aH + a^2K},$$

obtenemos

$$K^* = 4H^2 = \text{const.}$$

906. Supongamos que en la superficie S las líneas de las coordenadas coinciden con las de curvatura. Utilizando el operador principal, obtenemos

$$r_u^* = (1 - ak_1) r_u, \quad r_v^* = (1 - ak_2) r_v.$$

Por lo tanto, los coeficientes de las primeras formas cuadráticas de las superficies S y S^* están enlazados por las relaciones

$$E^* = (1 - ak_1)^2 E, \quad G^* = (1 - ak_2)^2 G, \quad F^* = F = 0.$$

De aquí

$$d\sigma^* = (1 - ak_1)(1 - ak_2) d\sigma$$

y

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{d\sigma - d\sigma^*}{2a d\sigma} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{1}{2} ak_1 k_2 \right) = \frac{k_1 + k_2}{2} = H.$$

907. Sea S la superficie mínima y sea S^* una superficie paralela a ésta, además, la distancia entre ellas medida por la normal es igual a a . Según se deduce del problema 906, los elementos correspondientes de las superficies S^* y S están enlazados por la relación

$$d\sigma^* = (1 + a^2K) d\sigma,$$

donde K es la curvatura total de la superficie S . Por consiguiente

$$\iint_D d\sigma^* = \iint_D d\sigma + a^2 \iint_D K d\sigma.$$

Como sobre la superficie mínima $K \leq 0$, entonces

$$\iint_D d\sigma^* \leq \iint_D d\sigma.$$

910. Para que las rectas tengan una envolvente (es decir, engendren una superficie desarrollable), hay que hacer

$$p = c \pm \frac{t^2}{2}, \quad c = \text{const.}$$

La figura constituida por las aristas de retroceso se determina por la ecuación

$$9(xz - y)^2 - 4z^3 = 0.$$

Las ecuaciones de las aristas de retroceso son:

$$x = c \pm \frac{t^2}{2}, \quad y = -\frac{t^2}{6} \mp ct, \quad z = \mp t.$$

La línea de intersección con el plano xOy es:

$$8(x - c)^3 - 9y^2 = 0.$$

911. Tomemos el eje del cilindro como eje Oz y el Ox lo situamos en el plano secante. Entonces las ecuaciones del cilindro tendrán la forma

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = u$$

y la ecuación del plano secante será

$$z = Ay.$$

Cortemos el cilindro por la generatriz que interseca al eje Ox y coloquémoslo sobre el plano xOz . Puesto que después de la superposición el papel de abscisa lo desempeñará la longitud del arco de la sección perpendicular del cilindro $s = at$, entonces, la ecuación de la línea buscada será

$$z = aA \operatorname{sen}(s/a),$$

o sea, una senoide.

912. Supongamos que el plano δ que pasa por la recta d corta la esfera por la circunferencia γ . Examinemos el cono circular que toca la esfera a lo largo de γ . Sus generatrices tocan las trayectorias ortogonales de la circunferencia. Pero los vértices de todos esos conos se encuentran sobre la recta d' , polar a d . Por lo tanto, las trayectorias ortogonales serán circunferencias formadas por la intersección de la esfera con el haz de los planos que pasan por d' .

913. La ecuación general del movimiento del punto por la superficie tiene la forma

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F + Rn - \mu |R| t,$$

donde F es la fuerza externa, R es la reacción normal de la superficie, μ es el coeficiente de rozamiento, t es el vector unitario de la tangente a la trayectoria y n es el vector unitario de la normal a la superficie. Como

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} t + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dt}{ds},$$

entonces, cuando $F = 0$, la ecuación de movimiento tomará la forma

$$m \left(\frac{d^2 s}{dt^2} t + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dt}{ds} \right) = Rn - \mu |R| t.$$

Multiplicándola escalarmente por $t \times n$, obtenemos

$$tm \frac{dt}{ds} = \frac{dr}{ds} m \frac{d^2 r}{ds^2} = 0,$$

es decir, el punto se mueve por la línea geodésica (véase el problema 843).

914. $X = F_x \Phi$, $Y = F_y \Phi$, $Z = F_z \Phi$, donde

$$\Phi = \frac{x F_x + y F_y + z F_z}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

y el punto $M(x, y, z)$ satisface a la ecuación

$$F(x, y, z) = 0.$$

915. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + \epsilon b^2 y^2 + \epsilon' c^2 z^2$.

916. $2x(x^2 + y^2 + z^2) = ax^2 + by^2$.

917. $x(x^2 + y^2 + z^2) + axy = 0$.

919. Es una superficie desarrollable.

920. Solamente en las superficies desarrollables.

922. Tomemos una de las familias dadas de geodésicas como líneas de coordenadas u del sistema semigeodésico de coordenadas. Entonces

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2.$$

Si φ es el ángulo comprendido entre las líneas de coordenadas u y las líneas geodésicas de la segunda familia, entonces

$$\cos \varphi = \frac{du}{\sqrt{du^2 + G dv^2}}.$$

Teniendo en cuenta la constancia del ángulo φ , obtenemos

$$\frac{du}{dv} = a \sqrt{G}, \quad \text{donde } a = \text{const.}$$

Sustituyendo lo obtenido en la ecuación diferencial de las líneas geodésicas, nos resulta $G_u = 0$; por consiguiente, $G = G(v)$ y la primera forma cuadrática se reduce a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Por el contrario, sea S una superficie desarrollable. Como ella se puede superponer al plano y con la superposición las líneas geodésicas pasan a las geodésicas y los ángulos entre las líneas se conservan, entonces es suficiente señalar que en el plano existen las familias indicadas de geodésicas.

923. La generatriz de una superficie cónica en la cual existe un punto de una línea geodésica, se encuentra en el plano rectificante de esta línea. Por eso la perpendicular trazada desde el vértice del cono al plano osculador corta la tangente. Su longitud es

$$d = p \operatorname{sen} \alpha,$$

donde p es el segmento de la generatriz, α es el ángulo comprendido entre esta última y la tangente. Al poner la superficie cónica sobre el plano la línea geodésica se convierte en una recta y la distancia d a lo largo de la misma es constante. Pero las magnitudes p y α tienen un mismo valor que sobre el cono, por eso también sobre el cono $p \operatorname{sen} \alpha = d$ es constante.

Para demostrar el teorema recíproco basta determinar que las líneas dotadas de la propiedad indicada se convierten en rectas al superponer el cono sobre el plano.

924. Tomemos sobre una superficie el sistema semigeodésico de coordenadas. Entonces

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2.$$

Sobre la línea $u=0$ tenemos $\sqrt{G}|_{u=0} = 1$. De la ecuación de las líneas geodésicas obtendremos, además, $\left. \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right|_{u=0} = 0$. En el sistema semigeodésico de coordenadas

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

(véase el problema 749).

1) Si $K = 0$, entonces

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u^2} = 0$$

y la solución de esta ecuación que satisface a las condiciones iniciales indicadas anteriormente será $\sqrt{G} = 1$. Por eso, para todas las superficies de curvatura total nula la primera forma cuadrática se reduce al aspecto

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

y, por lo tanto, todas ellas son aplicables una a otra.

2) Si $K = \frac{1}{a^2}$ ($a = \text{const}$), entonces

$$\sqrt{G} = \cos(u/a) \quad \text{y} \quad ds^2 = du^2 + \cos^2(u/a) dv^2.$$

3) Si $K = -1/a^2$ ($a = \text{const}$), entonces

$$ds^2 = du^2 + \text{ch}^2(u/a) dv^2.$$

933. Un plano tangente a una superficie S en un punto M tiene como vectores directores suyos a $\partial_u r$ y $\partial_v r$, donde (U, v) es la parametrización de S . Para la transformación afín $\mathcal{A}(U, \mathcal{A} \circ r)$ es la parametrización de la superficie $\mathcal{A}(S) = S'$ y $\partial_u (\mathcal{A} \circ r)$ y $\partial_v (\mathcal{A} \circ r)$ serán los vectores directores del plano tangente de la superficie S' en el punto $\mathcal{A}(M) = M'$. Pero $\partial_u (\mathcal{A} \circ r) = \mathcal{A}(\partial_u r)$, $\partial_v (\mathcal{A} \circ r) = \mathcal{A}(\partial_v r)$. Por eso, bajo el efecto de \mathcal{A} , el plano tangente a S pasa a ser plano tangente a S' .

939. Afín.

940. Métrico, ya que, por ejemplo, una circunferencia con ayuda de la transformación afín puede pasar a ser elipse.

941—946. Métricos.

947—948. Afines. 949—952. Métricos.

953. Afín.

954. Métrico, así, por ejemplo, con la transformación afín

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = kz$$

del catenoide

$$x = a \text{ ch}(u/a) \cos v, \quad y = a \text{ ch}(u/a) \text{ sen } v, \quad z = u$$

una de las secciones normales principales (la circunferencia en el plano xOy) no cambia su curvatura, mientras que la segunda sección (el meridiano del catenoide) la cambia. Como resultado varía la curvatura media.

955. Afín, ya que los tipos de puntos se distinguen por la cantidad de direcciones asintóticas en un punto dado de la superficie.

956. Métrico.

957. Afín.

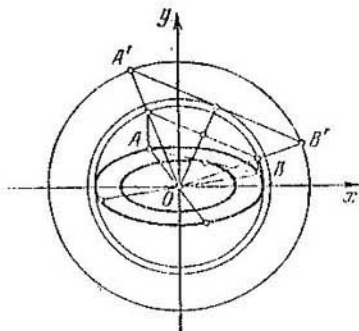


Fig. 196.

958. Valgámonos del carácter afín del problema. Hagamos pasar la elipse dada a una circunferencia

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

por la transformación afín

$$x' = \frac{1}{a} x, \quad y' = \frac{1}{b} y.$$

Entonces los diámetros conjugados pasarán a ser diámetros recíprocamente perpendiculares de la circunferencia, y la circunferencia

$$x'^2 + y'^2 = 1/2$$

erá la envoltura de las imágenes de las cuerdas de la elipse. Por eso la envolvente buscada será la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

(fig. 196).

959. Utilicemos el carácter afín del problema. Transformemos la elipse dada en una circunferencia

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

mediante la transformación afín

$$x' = x/a, \quad y' = y/b,$$

y sirvámolos de la fórmula conocida $S' = S\Delta$, donde Δ es el determinante de la transformación afín. En nuestro caso $\Delta = 1/ab$ y $S' = S/ab$. La envolvente de las imágenes de las rectas dadas será una circunferencia de radio $R' = \cos S'$, o sea,

$$x'^2 + y'^2 = R'^2.$$

Por lo tanto, la ecuación buscada será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \frac{S}{ab}.$$

Esto es una elipse, semejante a la dada, con coeficientes de semejanza $\cos(S/ab)$.

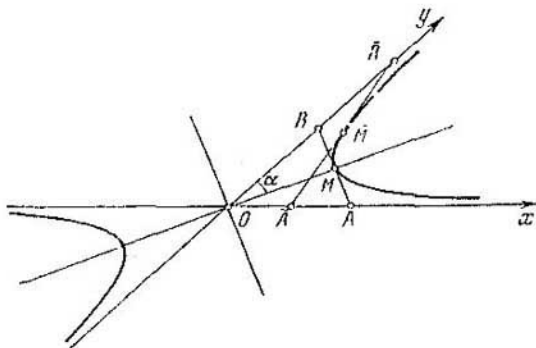


Fig. 197.

960. Adoptemos las rectas dadas como ejes del sistema afín de coordenadas y los vectores de longitud unitaria como vectores de escala sobre las mismas (fig. 197). Tomemos la recta AB de la familia, perpendicular a una de las bisectrices de los ángulos de coordenadas. Examinemos la hipérbola que tiene como asíntotas los ejes de coordenadas y toca la recta AB en el punto $M(a, a)$. Su ecuación tiene la forma $xy = c$. Expresemos c por medio de S :

$$OA = OB = 2a, \quad S = 2a^2 \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Como el punto M pertenece a la hipérbola, entonces $a^2 = c$ y obtenemos

$$c = \frac{S}{2 \operatorname{sen} 2\alpha}.$$

Por consiguiente, la ecuación de la hipérbola será

$$xy = \frac{S}{2 \operatorname{sen} 2\alpha}. \quad (*)$$

Efectuemos ahora un giro hiperbólico que haga pasar la hipérbola (*) sobre sí misma y traslade el punto M , a cualquier punto \bar{M} . Como es sabido, en este caso la cuerda AB pasará a ser tangente de la hipérbola en el punto \bar{M} , que corta del ángulo de las coordenadas un triángulo de la misma área S , o sea, a una recta arbitraria de la familia dada.

De este modo, la hipérbola (*) es la envolvente de la familia de rectas que cortan de los ángulos de coordenadas primero y tercero los triángulos de área S . Análogamente, la hipérbola conjugada

$$xy = -\frac{S}{2 \operatorname{sen} 2\alpha}$$

es la envolvente de la familia de rectas que cortan los triángulos de área S de los ángulos de coordenadas segundo y cuarto.

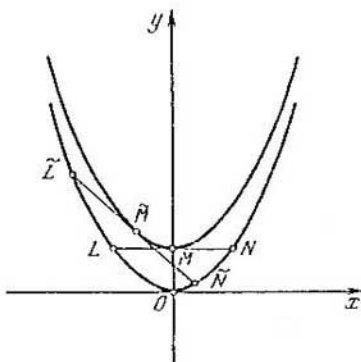


Fig. 198.

961. Examinemos la recta LN de la familia que es perpendicular al eje Oy y lo corta en el punto $M(0, b)$. Expresemos b por S :

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{b/a}} ax^2 dx \text{ de donde } b = \left(\frac{9aS^2}{4} \right)^{1/3}.$$

Construyamos la parábola que se obtiene de la dada por el desplazamiento de b a lo largo del eje Oy (fig. 198). Su ecuación es:

$$y = ax^2 + \left(\frac{9aS^2}{4} \right)^{1/3}. \quad (*)$$

Efectuemos ahora un giro hiperbólico que traslade la parábola (*) sobre sí misma y el punto M a un punto \tilde{M} cualquiera. Con ello la parábola $y = ax^2$ también se trasladará sobre sí misma y la cuerda LN , pasará a ser tangente a la parábola (*) en el punto \tilde{M} , o sea, será una recta arbitraria de la familia dada. Así, pues, la parábola (*) es la envolvente buscada.

962. Sea

$$\rho = r(u) + ve(u)$$

la ecuación de una superficie reglada oblicua. Su segunda forma cuadrática tiene el aspecto

$$\mathfrak{T}_2 = L du^2 + 2M du dv,$$

donde

$$L = \frac{v^2 (e'ce'') + v (e'er'' + r'ee'') + r'er''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \frac{r''ce'}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

De la condición

$$L du^2 + 2M du dv = 0$$

hallamos que la dirección asintótica, distinta de la dirección de la generatriz rectilínea, se caracteriza por el vector

$$\rho_u + \rho_v \frac{dv}{du} = r' + ve' - \frac{L}{2M} e$$

($M \neq 0$, según el enunciado del problema).

La ecuación de la superficie engendrada por las tangentes a las líneas asintóticas a lo largo de la generatriz correspondiente a $u = u_0$, tiene la forma

$$R = r_0 + ve_0 + w \left(r'_0 + ve'_0 - \frac{L_0}{2M_0} e_0 \right). \quad (*)$$

Escogamos un sistema afín de coordenadas con origen en el punto A_0 , con radio vector r_0 y con vectores de escala de los ejes de coordenadas r'_0 , e_0 , e'_0 . Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{e'_0 e_0 e''_0}{r'_0 e_0 e'_0} = a, \quad \frac{e'_0 e_0 r''_0 + r'_0 e_0 e''_0}{r'_0 e_0 e'_0} = b, \quad \frac{r'_0 e_0 e'_0}{r'_0 e_0 e'_0} = c$$

(a , b , c son constantes). Entonces, las ecuaciones de la superficie (*) se puede escribir de forma

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= w, \\ x_2 &= v - \frac{w}{2} (av^2 + bv + c), \\ x_3 &= vw. \end{aligned} \right\}$$

De donde

$$x_1 x_2 = x_3 - \frac{a}{2} x_3^2 - \frac{b}{2} x_1 x_3 - \frac{c}{2} x_1^2.$$

Transformando las coordenadas por las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1, \\ \tilde{x}_2 &= \frac{c}{2} x_1 + x_2 + \frac{b}{2} x_3, \\ \tilde{x}_3 &= x_3, \end{aligned} \right\}$$

obtendremos

$$\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \frac{a}{2} \tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_3 = 0.$$

Si $a \neq 0$, obtendremos un hiperboloide de una hoja; si $a = 0$, un paraboloides hiperbólico (la condición $a = 0$ significa que la superficie inicial se compone de rectas paralelas a cierto plano).

963. $x^2 + y^2 = C$, o sea, circunferencias concéntricas y el punto $O(0, 0)$.

964. $x^2 - y^2 = C$, hipérbolas equilaterales coasintóticas y sus asíntotas (fig. 199).

965. $y = Cx^2$, o sea, parábolas y la recta $y = 0$.

966. Las circunferencias $C(x^2 + y^2) = 2x$ y recta (fig. 200).

967. $Cx^2 = 2x - y + 1$, parábolas con los ejes paralelos al eje Oy , que pasan por el punto $(0, 1)$ y tocan en este punto la recta $2x - y + 1 = 0$, y esta misma recta (fig. 201).

968. Los planos paralelos $x + y + z = C$.

969. Las esferas concéntricas $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$.

970. $x^2 + y^2 - z^2 = C$, hiperboloides de una hoja y de dos hojas con un cono asíntótico común, y el propio cono (fig. 202).

971. $-4C^2(x^2 + y^2) + 4(256 - C^2)z^2 = C^2(256 - C^2)$ ($C \geq 0$). Cuando $C = 0$ se obtiene el plano xOy ; cuando $0 < C < 16$, hiperboloides de rotación de dos hojas con eje de rotación Oz (fig. 203); cuando $C = 16$, el eje Oz ; cuando $C > 16$, elipsoides de rotación con eje de rotación Oz (fig. 204).

972. 1.

973. 5.

974. $(0, 0), (1, 1)$.

975. $N(7, 2, 1)$.

976. $(2x - y - z)i + (5y + z - x)j + (6z - x + y)k$.

977. $3(x^2 - ayz)i + 3(y^2 - axz)j + 3(z^2 - ayz)k$.

978. $e^{x+y+z} [yz(x+1)i + xz(y+1)j + xy(z+1)k]$.

979. $\frac{1}{1+x^2}i + \frac{1}{1+y^2}j + \frac{1}{1+z^2}k$.

980. $9i - 3j$.

981. $|\text{grad } u| = 6; \cos \alpha = 2/3, \cos \beta = -2/3, \cos \gamma = 1/3$.

982. $\text{grad } u(O) = 3i - 2j - 6k, |\text{grad } u(O)| = 7,$

$$\cos \alpha = 3/7, \cos \beta = -2/7, \cos \gamma = -6/7;$$

$$\text{grad } u(A) = 7i, |\text{grad } u(A)| = 7.$$

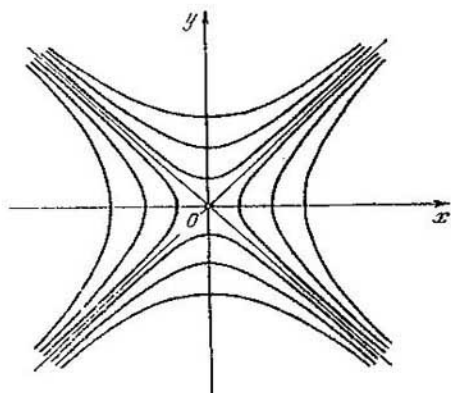


Fig. 199.

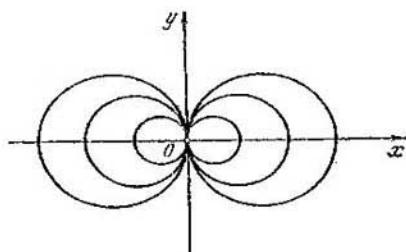


Fig. 200.

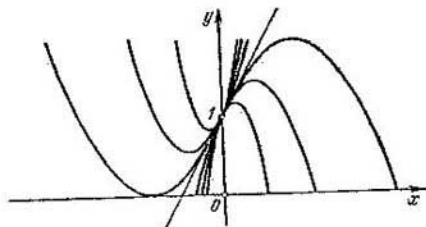


Fig. 201.

$$\cos \alpha = 1, \cos \beta = 0, \cos \gamma = 0; \text{grad } u = 0$$

en el punto $N(-2, 1, 1)$.

983. $\cos \varphi = 3/\sqrt{10}$.

984. $\cos \varphi = -8/2025$.

985. $\pi/2$. 986. Crecer; 12.

987. $M_1(4/5, -1/4)$, $M_2(-4/5, 9/4)$.

988. $2u/r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; si $a = b = c$.

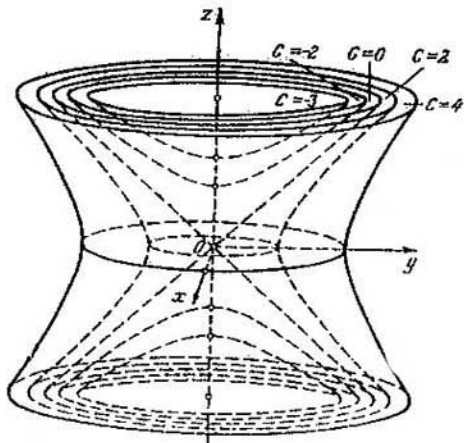


Fig. 202.

989. $\frac{\text{grad } u \cdot \text{grad } v}{|\text{grad } v|}$; si $\text{grad } u \perp \text{grad } v$.

997. Como $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces

$$\text{grad } r = \frac{\partial r}{\partial x} i + \frac{\partial r}{\partial y} j + \frac{\partial r}{\partial z} k = \frac{x}{r} i + \frac{y}{r} j + \frac{z}{r} k = \frac{r}{r}$$

998. $f'(r) r/r$.

999. $\pi r^{n-2} r$.

1000. $-r/r^2$.

1001. r/r^2 .

1002. Sea $c = c_1 i + c_2 j + c_3 k$. Entonces $u = c \cdot r = c_1 x + c_2 y + c_3 z$, de donde $\frac{\partial u}{\partial x} = c_1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = c_2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = c_3$. Por eso, $\text{grad } u = \text{grad } (c \cdot r) = c_1 i + c_2 j + c_3 k = c$.

$$1003. \frac{a(b \cdot r) - b(a \cdot r)}{(b \cdot r)^2},$$

$$1004. 2r(c \cdot c) - 2c(c \cdot r) = 2c \times (r \times c).$$

1008. {Sean e_u, e_v, e_w los versores de un sistema móvil de referencia. Los vectores e_u, e_v están en el plano tangente a la superficie de coordenadas $w = \text{const}$; por eso el vector e_w es ortogonal a este plano

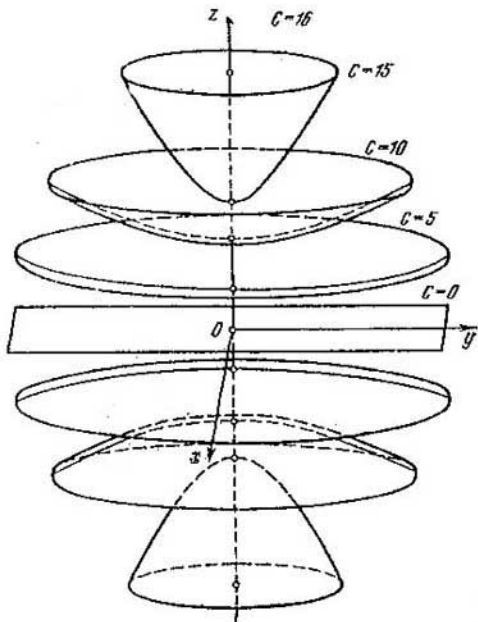


Fig. 203.

y, por consiguiente, ortogonal a la superficie de coordenadas $w = \text{const}$. Por esta razón este vector es colineal al gradiente del escalar w , o sea,

$$e_w = k_3 \text{grad } w, \quad (*)$$

donde k_3 es cierto factor. Examinemos la línea $u = u(s), v = v(s), w = w(s)$. Derivando el radio vector

$$r = r[u(s), v(s), w(s)]$$

de un punto arbitrario suyo, obtenemos

$$\frac{dr}{ds} = r_u \frac{du}{ds} + r_v \frac{dv}{ds} + r_w \frac{dw}{ds}.$$

Multipliquemos esta igualdad escalarmente por grad w :

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{ds} r_w \cdot \text{grad } w,$$

de donde $r_w \cdot \text{grad } w = 1$. Observando que $r_w = |r_w| e_w$ y multiplicando la igualdad (*) escalarmente por r_w , obtendremos $|r_w| = k_3$.

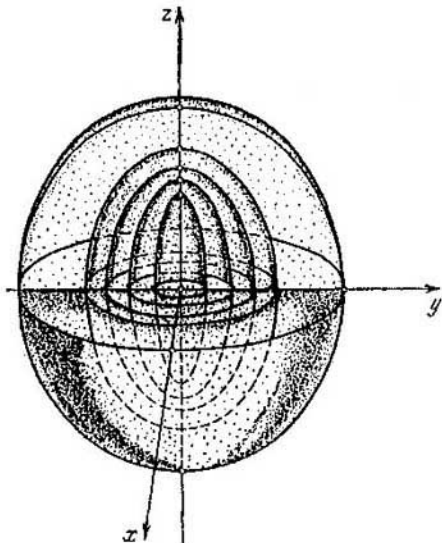


Fig. 204.

De la misma igualdad (*) hallamos $1 = k_3 |\text{grad } w|$. Aplicando razonamientos análogos a las superficies de coordenadas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ obtenemos en total

$$\text{grad } f(u, v, w) = \frac{e_u}{k_1} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{e_v}{k_2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{e_w}{k_3} \frac{\partial f}{\partial w},$$

donde

$$k_1 = |r_u| = 1/|\text{grad } u|,$$

$$k_2 = |r_v| = 1/|\text{grad } v|, \quad k_3 = |r_w| = 1/|\text{grad } w|.$$

$$1009. \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z.$$

$$1010. \varphi e_r + e_\varphi + e_z. \quad 1011. z\varphi e_r + ze_\varphi + r\varphi e_z.$$

$$1012. e_r + \frac{z \cos \varphi}{r} e_\varphi + \sin \varphi e_z.$$

$$1013. 2re_r - \frac{z \sin \varphi}{r} e_\varphi + \cos \varphi e_z.$$

$$1014. 3r^2 e_r + \frac{z \sin 2\varphi}{r} e_\varphi + \sin^2 \varphi e_z.$$

$$1015. \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi.$$

$$1016. \varphi e_\rho + \frac{1}{\sin \theta} e_\varphi. \quad 1017. \Delta e_\rho + e_\theta.$$

$$1018. \theta \varphi e_\rho + \varphi e_\theta + \frac{\theta}{\sin \theta} e_\varphi. \quad 1019. e_\rho + \frac{\varphi \cos \theta}{\rho} e_\theta + \frac{1}{\rho} e_\varphi.$$

$$1020. e_\rho + \frac{\cos \varphi}{\rho} e_\theta - \frac{\theta}{\rho} e_\varphi.$$

$$1021. x^2 + y^2 = C_1^2, z = C_2. \quad 1022. y = C_1 x, z = C_2 x^2.$$

$$1023. y - x = C_1 xy, x - z = C_2 xz.$$

$$1024. x^2 - y^2 = C_1, z = C_2 x^2.$$

$$1025. x = C_1 y, x = C_2 z.$$

$$1026. yz + 3 + 2z.$$

$$1027. 12xy^2 + 4xz - 6xz.$$

$$1033. 3.$$

$$1034. \text{div} (f(r)r) = f(r) \text{div } r + r \cdot \text{grad } f(r) \text{ Puesto que } \text{div } r = 3, \text{ grad } f(r) = f'(r) \frac{r}{r}, \text{ entonces}$$

$$\text{div} (f(r)r) = 3f(r) + rf'(r).$$

$$1035. 2/r. \quad 1036. (n + s) r^n.$$

$$1037. \text{div} (\text{grad } f(r)) = \text{div} \left(\frac{f'(r)}{r} r \right) = \frac{f'(r)}{r} \text{div } r + r \times$$

$$\times \text{grad } \frac{f'(r)}{r} = \frac{3f'(r)}{r} + r \cdot \frac{r \text{ grad } f'(r) - f'(r) \text{ grad } r}{r^2} = \frac{3f'(r)}{r} +$$

$$+ r \frac{rf''(r) \frac{r}{r} - f'(r) \frac{r}{r}}{r^2} = \frac{3f'(r)}{r} + r \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2} \cdot \frac{r}{r} = f''(r) +$$

$$+ \frac{2}{r} f'(r).$$

1038. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

1039. $u \Delta u + (\text{grad } u)^2$. 1040. $u \Delta u + \text{grad } u \text{ grad } v$.

1041. $\frac{c \cdot r}{r}$. 1042. $2c \cdot r$. 1043. $f'(r) \frac{c \cdot r}{r}$.

1044. 0. 1045. $c \cdot c_1$. 1046. $4c \cdot c_1$. 1047. 1.

1448. 2. 1049. $\frac{x+y+z}{xyz}$

1050 $\text{div} (\text{grad } f(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$.

La solución general de esta ecuación es $f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}$.

1051. Como $\text{div} \frac{r}{r} = \frac{2}{r}$ y $\text{div} (\text{grad } f(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$, entonces según el enunciado $2rf''(r) + 4f'(r) = \frac{2}{r}$, de donde $f(r) =$

$-\ln r + \frac{c_1}{r} + c_2$.

1052. $\text{div } a = \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u} (MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v} (NLav) + \frac{\partial}{\partial w} (LMAw) \right]$,

donde a_u, a_v, a_w son las proyecciones del vector a sobre las tangentes a las líneas de referencia correspondientes,

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}.$$

Las magnitudes L, M, N se llaman *coeficientes de Lamé*.

1053. $\text{div } a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right]$.

1054. $\text{div } a = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (a_\rho \rho^2 \sin \theta) + \rho \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \rho \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$.

1055. $(x^2 - 2xz) i + (y^2 - 2xy) j + (z^2 - 2yz) k$.

1056. $i + (xy - 2x) j + (2 - xz) k$.

1060. 0. 1061. 0. 1062. $-2c$. 1063. $c \times r$.

1064, 1065. $c_1 \times c$. 1066. 0. 1067. $\frac{f'(r)}{r} (r \times c)$.

1073. Para calcular el flujo valgámos de la fórmula de Ostro-

gradski $\Pi = \int_S a_n d\sigma = \int_V \int_V \int_V \operatorname{div} a \, dw$. Como $\operatorname{div} a = y^2 + x^2 + 1$,

entonces

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_V \int_V \int_V (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iint_D (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy \int_0^{4-x^2-y^2} dz = \iint_D (x^2 + y^2 + 1) \times \\ &\quad \times (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Pasemos a las coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_D \int_D (r^2 + 1) (4 - r^2) r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 (-r^5 + 3r^3 + 4r) \, dr = \frac{14\pi}{3}. \end{aligned}$$

1074. $\operatorname{div} a = 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Por la fórmula de Ostrogradski

$$\Pi = \int_V \int_V \int_V 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dw = 3 \cdot 8 \int_{V_1} \int_{V_1} \int_{V_1} (x^2 + y^2 + z^2) \, dw,$$

donde V_1 es el volumen de la parte de la esfera comprendida en el primer octante. Pasemos a las coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} &= \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \theta, \\ &\quad dw = \rho^2 \operatorname{sen} \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \\ 24 \int_V \int_V \int_V \rho^4 \operatorname{sen} \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta &= \\ &= 24 \int_0^{\pi} \rho^4 \, d\rho \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi = 2,4\pi R^6. \end{aligned}$$

1075. $4\pi q$. 1076. 0. 1077. $10/3$.

1078. a) $\frac{1}{10} \pi R^2 H (3R^2 + 2H^2)$; b) $\frac{3}{10} \pi R^2 H (R^2 + 2H^2)$.

1080. Sobre la circunferencia $a = R^3 \cos^3 t i - R^3 \operatorname{sen}^3 t j$, $dr = -R \operatorname{sen} t \, dt i + R \cos t \, dt j$. Por consiguiente, $a \cdot dr = -\frac{1}{2} R^4 \operatorname{sen} 2t \, dt$. Al moverse por el arco de la circunferencia L en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj el parámetro t varía dentro de los límites de 0 a $\pi/2$. Por eso la integral lineal

a lo largo de L será igual a

$$A = \int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} R^3 \sin 2t \, dt = -\frac{1}{2} R^3.$$

1081. $2\pi^2 b^2$.

1082. La línea L consta de dos segmentos BO (sobre el eje Oy), OA (sobre el eje Ox) y de un arco AB de la astroide. El recorrido por L hace falta efectuarlo en el sentido contrario a las agujas del reloj. Por eso la circulación del vector será igual a

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BO} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{OA} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}.$$

Calculemos por separado cada una de las integrales del segundo miembro. Sobre la astroide

$$\mathbf{a} = R \sin^3 t \, \mathbf{i} - R \cos^3 t \, \mathbf{j},$$

$$d\mathbf{r} = -3R \cos^2 t \sin t \, dt \, \mathbf{i} + 3R \sin^2 t \cos t \, dt \, \mathbf{j}.$$

Por eso $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{3}{4} R^2 \sin^2 2t \, dt$. Al moverse por el arco AB en la dirección de A a B el parámetro t varía dentro de los límites de 0 a $\pi/2$. Tendremos

$$\int_{AB} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{3}{4} R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \, dt = -\frac{3}{16} \pi R^2.$$

Sobre el segmento OA $\mathbf{a} = -x\mathbf{j}$, $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}$ y $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Por eso

$$\int_{OA} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Análogamente $\int_{BO} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Por lo tanto, la circulación buscada es igual a $-\frac{3}{16} \pi R^2$.

1083. 0 . 1084. $-\pi b^2$. 1085. a) 2π ; b) 2π .

1086. $-\pi/R^3/8$. 1087. No lo tiene.

1088. $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, por eso el campo \mathbf{a} es potencial y su potencial u se determina por la ecuación

$$du = (y+z) dx + (x+z) dy + (x+y) dz.$$

Esta ecuación es equivalente al sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= y + z, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x + z, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= x + y. \end{aligned} \right\}$$

De la primera ecuación del sistema resulta que $u = (y + z)x + \varphi(y, z)$. Sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos $\partial\varphi(y, z)/\partial y = z$, de donde $\varphi(y, z) = zy + \psi(z)$. Sustituyendo $u = xy + xz + zy + \psi(z)$ en la tercera ecuación, obtendremos $\psi'(z) = 0$, o sea, $\psi(z) = C = \text{const.}$ De este modo, $u = xy + yz + zx + C$.

1089. $u = xyz(x + y + z) + C$.

1090. Sí.

Índice de materias

- Ángulo entre líneas de una superficie 86
Aplicación 9
— conforme 87, 701—715, 818, 838, 839, 900—908
— — de superficies 87, 699, 700
— del conjunto X en el conjunto Y 9
— derivada (o diferencial) 22
— equiareal 93
— de superficies 700
— esférica de una superficie 94
— gaussiana 94
— inversa 9
— lineal 11, 12
— suave 22
— — de superficies 22
— superficial isométrica (isometría) 87, 694—698, 700, 911, 918—921, 924—927
Área de una región cerrada en la superficie 87
Arista de retroceso 604, 605, 936
— — — de una envolvente 83, 936
Asíntota de una línea (curva) 39
Astroide 77, 81_r, 116, 139, 172, 174, 302_r, 335, 351, 394, 400
Base canónica 10
— móvil sobre una superficie 21
— positiva 12
Base (i, f, k) 12
— (i_1, i_2, \dots, i_n) 12
Bases equivalentes 12
Bastón 277
Bicilíndrica 421
Binormal 60, 609, 944
Cambio de parametrización 20
— — parámetro 18
Cambio birregular 18
— de la clase C^h 18
— regular 18
— simple 18
— suave sobre una superficie 20
Caminos equivalentes 18
Campo escalar 126
— — plano 126
— vectorial 14, 21, 127
— — básico 21
— — continuo 22
— — normal a lo largo de una curva 114
— — paralelo a lo largo de una curva 115
— — potencial 133, 1087—1089
— — sobre una superficie 21
— — solenoidal 133, 1090
— — suave sobre una superficie 22
Caracol de Pascal 74
Característica de una familia 83
Cardioide 74, 80_r, 109_r, 151, 152, 159, 209, 333, 353, 360, 392, 402, 407

1) En el índice de materias las cifras claras indican el número de página y las escritas en negrilla, el número de problema. El subíndice "r" hace referencia a la respuesta del problema correspondiente. En ambos casos es útil recurrir tanto al planteo como a la solución del problema.

- Catenaria 90_r, 319, 338_r, 339—
 341, 343, 345, 365, 391_r, 398,
 410_r, 415_r
 Catenoide 530, 648, 697, 698,
 710, 725, 730, 746_r, 807, 901
 Centro de curvatura de una curva
 50
 Cicloide 79, 117, 304_r, 339, 350,
 364, 393, 401, 411_r
 — corta 79, 372
 — larga 79, 372
 Cilindro circular 553, 645, 722,
 746_r, 759, 911
 — elíptico 51, 60_r, 545_r, 706, 772
 — hiperbólico 52, 62_r, 534, 708,
 774
 — parabólico 50, 61_r, 534, 707,
 773
 Circulación del campo vectorial
 132, 1082—1086
 Circulo de curvatura 50, 378, 379
 Circunferencia 89, 91, 95, 102,
 142, 155, 171_r, 342, 382, 397,
 408_r
 — osculatriz 19, 50, 375, 519
 Cisoide de Diocles 69, 108_r, 199,
 205
 Clausura de un conjunto 11
 Coeficientes de Lamé 1052_r
 — de la primera forma cuadrática
 (fundamental) 86
 — — — segunda forma cuadrática
 (fundamental) 95
 Componente del campo con res-
 pecto a una base móvil 22
 Componentes de una función vec-
 torial 14, 1
 Composición de aplicaciones 10
 Conoide de Nicomedes 76, 198,
 206
 Condición de conjugación de dos
 familias unidas en superficie
 993_r
 Conjunto abierto 1
 — cerrado 11
 — conexo 11
 Cono 63_r, 775
 — circular 646, 709, 723, 737,
 746_r
 Conoide directo 559—561
 Construcción de una línea 41, 42
 Continuidad de una función vec-
 torial 15, 7, 13
 Coordenadas cilíndricas 474_r, 100
 — curvilíneas 20
 — esféricas 475_r, 1015
 — isotérmicas 660, 748
 — semigeodésicas 749
 Correspondencia biunívoca 9
 — de formas 13
 Curva 7, 18, 23
 — birregular 18
 — de Agnesi 70, 188
 — de Viviani 419, 441
 — orientada 19
 — parametrizada 18, 19
 — plana 18, 28
 — regular 18
 — simple 18
 — unicursal 105
 Curvatura 19, 66
 — de la curva (línea) 19, 50, 66,
 354, 358, 359, 479, 481, 940
 — geodésica 108, 854—859, 887
 — — integral 892—894
 — integral de una región 892,
 894
 — media de una superficie 95,
 741, 757, 758, 814, 815, 905,
 906, 952, 954
 — normal de la superficie en la
 dirección dada 95
 Curvatura normal en una línea
 95, 741
 — — principal de una super-
 ficie 95
 — — — en una línea 95, 881
 — primera 66
 — segunda (torsión) 66
 — total (o gaussiana) 96, 743,
 748—750, 752—754, 757, 758,
 885, 896, 924—926, 951, 953
 Derivada covariante de un campo
 vectorial 114
 — de k -ésimo orden de una fun-
 ción vectorial 15
 — — — una aplicación 22
 — — — función vectorial 15, 16,
 16—26, 30—35

- Derivada un campo escalar por una dirección 121, 972, 973, 988, 989
 — — — — vectorial a lo largo de una curva 114
 Desarrollo de una circunferencia 78, 141, 321, 397
 Difeomorfismo de la clase C^h 18
 — — una superficie sobre otra 87
 Diferencial 16
 — de una aplicación 22
 — exterior de 1-forma 113
 Diferenciación de una función vectorial 15—26
 — por parámetro 55
 Dirección asintótica 103, 815, 947
 — principal de una línea en una superficie 106
 — — de una superficie 95
 Direcciones conjugadas 103, 947
 Discriminante de una familia 46, 83
 Distancia entre dos puntos 10, 11
 Divergencia 131, 1028—1054, 1059, 1069—1071

 Ecuación de la catenoide 530, 730
 — — — normal a una línea (curva) 33
 — — Laplace 133
 — — la pseudoesfera 531, 579
 — — — tratriz 531
 — del helicoide directo 558_r, 580 650
 — — plano osculador 61
 — — — rectificante 61
 — — — normal 61
 — — — tangente 76
 — del toro 529, 586
 — de una superficie cilíndrica 538
 — — la superficie 72
 — vectorial de una línea (curva) 28
 — — — — región sobre una superficie 72
 — — — — explícita de una línea 28
 — — — — de una superficie 72
 — — — — implícita de una línea 28

 Ecuación de una superficie 72
 Ecuaciones de la binormal 61
 — — — — evoluta 55
 — — — — normal 77
 — — — — principal 60
 Ecuaciones del paraboloido hiperbólico 532
 — de la tangente a las líneas (curvas) 32, 60
 — — movimiento de un sistema de referencia móvil 114
 — — una figura 11
 — intrínsecas de una curva 55
 — paramétricas de la superficie — — — — una línea (curva) 28, 58
 Elipse 27, 37, 93, 118, 123, 348, 335, 383
 Elipsoide 56_r, 546_r, 578, 702, 767, 785, 835
 — de rotación 641, 718, 742, 746_r, 782, 817
 Entorno de un punto 11
 Envolvente de una familia de líneas 46, 312, 934
 — — — — superficies 83, 93 934
 Epicloide 80, 331
 — cónica 420, 435, 440, 493, 523
 — de Galileo 278
 — — Fermat 276
 — hiperbólica 168_r, 169_r, 279_r
 — logarítmica 72, 154, 155, 337, 362, 395, 396, 400_r, 413_r, 423_r
 Equivalencia de bases 12
 — — caminos 18
 Esfera 11, 55, 509, 604, 640, 664, 664, 670, 679, 689, 701, 717, 746_r, 778_r, 779, 827, 848
 — osculatriz 521—527
 Espacio afín puntual 10
 — euclidiano α -dimensional \mathbb{R}^n 1
 Espacio vectorial real n -dimensional 10
 — — tangente 14
 — — a una superficie 21
 Espiral de Arquímedes 71, 126, 153, 170_r, 336, 352
 Evoluta 55, 400—402, 941
 Evolvente 55, 70, 78, 510
 — de una esfera 414

- Familia biparamétrica de superficies 83
 — monoparamétrica de superficies 83
 — regular de líneas 103
 — uniparamétrica de líneas en una superficie 103
- Figura 11
- Flujo del campo vectorial 132, 1072—1078
- Folio de Descartes 107_r, 223
- Forma bilineal 13
 — — antisimétrica (2-forma) 13
 — — simétrica 13
 — cuadrática 13
 — diferencial lineal (1-forma) 112
 — lineal 12
 — suave 112
- Formas en la superficie (1-forma y 2-forma) 112
- Fórmula de Euler 96, 883
 — — Frenet 66, 476—478
 — — Ostrogradski 132, 1072, 1073_r
 — — Stokes 132, 1086
 — — Taylor 16
- Frontera de un conjunto 11
- Función 9
 — armónica 133
 — de la clase C^h 15
 — — — — C^∞ 15
 — suave 15
 — en un segmento 116
 — vectorial 14
 — — continua en un punto 15
 — — diferenciable 17
 — — de m variables escalares 14
 — — diferenciable 16
 — — de las clases C^1 , C^h , C^∞ 17
 — — dos veces diferenciable 17
 — — suave 16
- Funciones coordenadas 13
- Generatriz 77
- Gradiente de un campo escalar 58, 120, 900, 1020, 1031, 1032, 1037—1040, 1050, 1051, 1058, 1068, 1070, 1071
- Holice 58, 417, 442, 454, 461, 466, 468, 469, 484, 511—513, 520, 526, 1081
 — cónica 420, 431, 485
 — generalizada 497—501, 510
- Helicoide de forma general 556, 561
 — directo 557, 558_r, 559_r, 565, 580, 607, 650, 675, 678, 682, 683, 687, 690, 694, 714, 727, 733, 734, 756, 794, 857, 863, 902, 927
 — oblicuo 557, 671, 673, 801
- Hipérbola 38, 92, 101, 119, 124, 140, 300_r, 349, 356, 384
 — equilátera 101, 370
- Hiperboloide de dos hojas 59_r, 732, 769, 786
 — — una hoja 58_r, 552, 768, 810
 — — rotación de dos hojas 643, 705, 720, 746_r
 — — — — una hoja 608, 642, 704, 719, 746, 868
- Hipocicloide 81, 331
- Imagen de una aplicación 9
 — — un camino 13
 — — una curva 18
 — — un conjunto 9
 — — — elemento 9
- Indicatriz de Dupin 96, 740, 815, 884
 — lineal esférica 442
- Integral lineal de un vector 132, 1080, 1081
 — $[\alpha, \beta]$ 16
- Interioridad de un conjunto 11
- Investigación de líneas (curvas) 41
- Inyección 9
- Isometría 87
- Lemniscata de Bernoulli 68_r, 156, 173, 208, 366
- Límite de una función vectorial 15, 2—6

- Línea 7, 18, 23
 — asintótica 103, 802, 803, 805, 813—815, 817, 818, 849, 859, 862, 886, 900, 948, 962
 — de Bertrand 505—508, 513
 — — curvatura 106, 819, 828, 830, 836, 839, 850, 861, 873, 949
 — — garganta (de estricción) 77, 607—610
 — — la clase Ch 18
 — — nivel 126, 158
 — — puntos singulares 41
 — elemental 19
 — esférica 443, 525
 — geodésica 108, 840—843, 849, 850, 853, 866, 870, 890, 895, 913, 921, 921, 922, 950
 — isocrónica 416
 — plan 19, 28, 450, 480, 502, 503, 939
 — (camino) suave sobre una superficie 20
 — unicursal 105—110
 — vectorial de un campo 131
 Líneas coordenadas 21
 — de corriente 131
 — — fuerza 131
 Longitud del arco de una curva 49, 474, 475
 — — — — línea 49, 330_r, 331_r, 336_r
 — — — — en la superficie 87
 — de una normal 160, 165
 — — — polar 168, 171
 — — — subnormal 160, 163
 — — — polar 168, 170
 — — — subtangente 160, 164
 — — — polar 168, 189
 — — — tangente 160, 166
 — — — polar 168
 Loxodromia 663, 664
 Lúnula esférica 693

 Matriz de aplicación lineal 12
 — — Jacobi 17
 Movimiento 123

 Normal 33
 — a una línea 33, 943
 — — — superficie 21, 77, 599—601
 — principal 60

 Operador de Hamilton 127
 — — Laplace 133
 — principal de una superficie 94
 Orientación continua de una superficie 22
 — de una superficie 22
 — — un espacio 12
 — negativa de un espacio 12
 — positiva de un espacio 12
 Origen de las coordenadas 10
 Ovals de Cassini 68, 122

 Parábola 36, 100, 125, 346, 361, 378, 385, 399, 412
 — de seguridad 315
 — — rotación 644, 660_r, 721, 746_r, 783
 — elíptica 953, 57_r, 566, 703, 736, 740, 751, 770, 784, 797, 826
 — hiperbólica 532, 566, 661, 676, 880, 771
 Parametrización concordada con la orientación 22
 — de una curva 18
 — — — línea 18
 — — — superficie 20
 — natural de una curva 19
 Parámetro natural 19, 62
 Perfil de un helicoides 556
 Pertenencia de una función a la clase Ch 15
 Plano 549—551, 728, 729, 791, 816, 844, 901
 — director 606
 — normal 60, 61
 Plano osculador 61, 449, 450, 503, 527, 615, 938
 — rectificante 60
 — tangente a una superficie 21, 76, 77, 568, 588, 933
 Podaria de una superficie 914—917

- Potencial de un campo vectorial 133
- Primera forma cuadrática (fundamental) de la superficie 86, 653—658, 899
- Producto directo (cartesiano) 11
- escalar de vectores 11
- exterior de formas lineales 13
- de las 1-formas 112
- Propiedad bisectorial de la tangente a la elipse 27
- Propiedades afines 123
- métricas 123
- de la transformación afín 928—938
- Pseudoesfera 531, 579, 649, 659, 660, 688, 711, 726, 746_r, 804, 864, 926
- Punto 10
- aislado 41
- autolángencial 41
- de adherencia 11
- — aplanamiento 95, 789—791, 957
- — redondeo 95, 778, 780—788, 956
- — garganta 77
- — inflexión 40, 213, 214
- — retroceso de primer género 40
- — — segundo género 40
- Punto elíptico 96, 955
- estacionario de un campo polar 122
- hiperbólico 96, 832, 955
- interior 11
- irregular 40
- parabólico 96, 898, 899, 955
- singular 40, 41, 200—209
- — doble 41
- umbilico 95
- Radio de curvatura de una curva 50, 375, 378
- — una esfera osculatriz 521
- vector del centro de una esfera osculatriz 521
- Recta 96, 97, 408_r, 479
- Red de líneas 103
- Red de conjugadas 103, 792—797, 799—801, 836
- — — coordenadas de Chébishev 677, 658, 804
- — — ortogonales 834, 836, 870
- Región 11
- cerrada 11
- Representación explícita de una línea (curva) 28
- implícita de una línea (curva) 28
- interior del camino (línea) 21
- Rosa de cuatro pétalos 73, 109
- — tres pétalos 281
- Rotación del campo vectorial 131, 1055—1071
- Rotor 131
- Sección normal 96
- Segunda curvatura 66
- diferencial de una función vectorial 17
- — — la función vectorial $r = r(u, v)$ 17
- forma cuadrática (fundamental) de la superficie 95, 728, 729, 880
- Sistema de coordenadas en una superficie isotérmica, 660
- — — semigeodésicas 109
- — — ecuaciones diferenciales completamente integrables 877
- Sistema de referencia 10
- — — de Cartan 114
- — — Frenet 20
- — — móvil 113
- — — $(O; i_1, i_2, \dots, i_n)$ 9
- Sobreyección 9
- Suavidad de una función vectorial 16, 29
- Superficie 7, 20, 23
- cilíndrica 533, 535, 538, 604, 694, 820, 845
- cónica 541, 548, 584, 604, 606, 695, 821
- de Catalán 606
- — la clase C^k 20
- — Liouville 698, 865
- — nivel 126, 1093—1096

- Superficie rotación 528, 600, 601, 639, 656, 663, 698, 899, 716, 745, 746_r, 760, 780, 806, 822, 846, 847, 966, 901
- Superficie de traslación 563—566, 591, 796
- desarrollable 77, 602—605, 634, 535, 715, 743, 800, 817, 824, 851, 852, 918_r, 920_r, 922, 963
- elemental 20
- mínima 814, 901—903, 907, 954
- orientada 22
- paralela 592, 603, 817, 833, 834, 904, 905, 907
- rectilínea generatriz 77
- reglada 77, 602, 882, 935
- — desarrollable 77
- — oblicua 77, 611, 830, 930, 937, 962
- tangente a una línea 554, 593, 604, 605, 652, 667, 696, 731
- — — — hélice 555, 570
- tubular 562, 589, 627
- Superficies aplicables 87
- paralelas entre sí 592
- Tangencia 32
- de líneas (curvas) 33, 175—182, 374—377, 517—519, 524
- de orden k 33
- — una línea a una superficie 76, 612—616
- Tangente 32
- a las líneas (curvas) 21, 33, 60, 150, 444, 932
- Teorema de Beltrami — Ennéper 886
- — Clairaut 866
- — Gauss — Bonnet 894
- Toro 529, 581, 586, 647, 712, 724, 746_r, 761, 808, 869
- Torsión geodésica 109, 860—862
- de una curva 66, 480, 942
- Trabajo de un campo vectorial 132
- Tratriz 166_r, 167, 322, 363, 391, 398, 466
- Transformación afín 123
- Trayectorias ortogonales 665—667, 669—676
- Triángulo geodésico 895
- Valor propio 95
- dad bidimensional 20
- unidimensional 19
- Vector 10
- de curvatura 19, 374
- — Darboux 477, 852
- propio 95
- tangente a una superficie 21
- tangente a R^2 14
- unitario de la binormal 21
- — — — normal principal 61
- — — — tangente 61
- Vectores de referencia de Frenet 60
- Vértice de una curva 54
- ϵ -entorno de un punto 11
- 1-forma 112
- 1-forma en la superficie 112
- 1-forma suave 112
- 2-forma 13
- 2-forma en la superficie 112

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Bizhski per., 2. 129820, I-110, GSP, URSS.