D. KLETENIK

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

EDITORIAL MIR

Д. В. КЛЕТЕНИК

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Под редакцией проф. Н. В. Ефимова

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

На испанском языке

D. KLETENIK

PROBLEMAS DE GEOMETRIA ANALITICA

revisados por el profesor

N. EFIMOV

Traducido del ruso

por

EMILIANO APARICIO BERNARDO,

Candidato a Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas, Catedrático de Matemáticas Superiores del Instituto Energético de Moscú
(tercera edición)

EDITORIAL MIR
MOSCU

INDICE 513/516

Impreso en la URSS, 1968

Primera Parte

GEOMETRIA ANALITICA PLANA

I

Capítulo

PROBLEMAS ELEMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA PLANA

§ 1. El eje y segmentos del eje. Las coordenadas en la recta

Se llama eje a la recta en la que se ha elegido una dirección positiva. El segmento, limitado por los puntos A y B, se llama dirigido, si se ha convenido cuál de estos puntos es el origen y cuál el extremo del segmento. El segmento dirigido, con el origen A y con el extremo B, se designa con el símbolo $\overline{AB}$. Se llama magnitud del segmento dirigido del eje a su longitud, tomada con signo más, si la dirección del segmento (es decir, la dirección del origen al extremo) coincide con la dirección positiva del eje, y con signo menos, si esta dirección es contraria a la dirección positiva del eje. La magnitud del segmento $\overline{AB}$ se designa con el símbolo AB y su longitud con el símbolo $|AB|$. Si los puntos A y B coinciden, se dice que el segmento que determinan es nulo; es evidente que en este caso $AB = BA = 0$ (la dirección del segmento nulo es indefinida).

Supongamos dada una recta arbitraria α. Tomemos un segmento por unidad de medida de longitudes, elijamos en la recta la dirección positiva (después de lo cual la recta se convierte en eje) *) y designemos con la letra O algún punto de ella. Con esto, en la recta α queda establecido un sistema de coordenadas.

Se llama coordenada de un punto cualquiera M de la recta a (en el sistema de coordenadas establecido) al número x, igual a la magnitud del segmento OM:

$$x = OM.$$

El punto O se llama origen de coordenadas y su coordenada es igual a cero. A continuación, el símbolo $M(x)$ indica que el punto M tiene la coordenada x.

Si $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ son dos puntos arbitrarios de la recta a, la fórmula

$$M_1M_2 = x_2 - x_1$$

expresa la magnitud del segmento $\overline{M_1M_2}$ y la fórmula

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$$

expresa su longitud.

---

*) Por lo general, en los diagramas se señala de izquierda a derecha la dirección positiva en los ejes horizontales.

1. Trazar los puntos:

$$A(3),\ B(5),\ C(-1),\ D\left(\frac{2}{3}\right),\ E\left(-\frac{3}{7}\right),$$
$$F(\sqrt{2}) \text{ y } H(-\sqrt{5}).$$

2. Trazar los puntos, cuyas coordenadas satisfacen a las ecuaciones

1) $|x|=2$; 2) $|x-1|=3$; 3) $|1-x|=2$; 4) $|2+x|=2$.

3. Caracterizar geométricamente la posición de los puntos, cuyas coordenadas satisfacen a las desigualdades:

1) $x>2$; 2) $x-3\leqslant 0$; 3) $12-x<0$;

4) $2x-3\leqslant 0$; 5) $3x-5>0$; 6) $1<x<3$;

7) $-2\leqslant x\leqslant 3$;

8) $\frac{2-x}{x-1}>0$; 9) $\frac{2x-1}{x-2}>1$; 10) $\frac{2-x}{x-1}<0$; 11) $\frac{2x-1}{x-2}<1$;

12) $x^2-8x+15\leqslant 0$; 13) $x^2-8x+15>0$;

14) $x^2+x-12>0$; 15) $x^2+x-12\leqslant 0$.

4. Determinar la magnitud AB y la longitud $|AB$ del segmento definido por los puntos:

1) $A(3)$ y $B(11)$; 2) $A(5)$ y $B(2)$;

3) $A(-1)$ y $B(3)$; 4) $A(-5)$ y $B(-3)$;

5) $A(-1)$ y $B(-3)$; 6) $A(-7)$ y $B(-5)$.

5. Calcular la coordenada del punto A, si se conocen:

1) $B(3)$ y $AB=5$; 2) $B(2)$ y $AB=-3$;

3) $B(-1)$ y $BA=2$; 4) $B(-5)$ y $BA=-3$;

5) $B(0)$ y $|AB|=2$; 6) $B(2)$ y $|AB|=3$;

7) $B(-1)$ y $|AB|=5$; 8) $B(-5)$ y $|AB|=2$.

6. Caracterizar geométricamente la posición de los puntos, cuyas coordenadas satisfacen a las siguientes desigualdades:

1) $|x|<1$; 2) $|x|>2$; 3) $|x|\leqslant 2$;

4) $|x|\geqslant 3$; 5) $|x-2|<3$; 6) $|x-5|\leqslant 1$;

7) $|x-1|\geqslant 2$; 8) $|x-3|\geqslant 1$; 9) $|x+1|<3$;

10) $|x+2|>1$; 11) $|x+5|\leqslant 1$; 12) $|x+1|\geqslant 2$.

7. Determinar la razón $\lambda = \frac{AC}{CB}$, en la que el punto C divide al segmento $\overrightarrow{AB}$ en los siguientes casos:

1) $A(2)$, $B(6)$ y $C(4)$; 2) $A(2)$, $B(4)$ y $C(7)$;
3) $A(-1)$, $B(5)$ y $C(3)$; 4) $A(1)$, $B(13)$ y $C(5)$;
5) $A(5)$, $B(-2)$ y $C(-5)$.

8. Se dan tres puntos $A(-7)$, $B(-1)$ y $C(1)$. Determinar la razón λ, en la que cada uno de ellos divide al segmento limitado por los otros dos.

9. Determinar la razón $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, en la que un punto dado $M(x)$ divide al segmento $\overline{M_1M_2}$ limitado por los puntos $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$.

10. Determinar la coordenada x del punto M, que divide al segmento $\overline{M_1M_2}$ limitado por los puntos dados $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ en una razón dada $\lambda \left(\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}\right)$.

11. Determinar la coordenada x del punto medio del segmento limitado por los dos puntos dados $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$.

12. Determinar la coordenada x del punto medio del segmento limitado por los dos puntos dados en cada uno de los casos siguientes:

1) $A(3)$ y $B(5)$; 2) $C(-1)$ y $D(5)$;
3) $M_1(-1)$ y $M_2(-3)$; 4) $P_1(-5)$ y $P_2(1)$;
5) $Q_1(3)$ y $Q_2(-4)$.

13. Determinar la coordenada del punto M conociendo:

1) $M_1(3)$, $M_2(7)$ y $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = 2$;

2) $A(2)$, $B(-5)$ y $\lambda = \frac{AM}{MB} = 3$;

3) $C(-1)$, $D(3)$ y $\lambda = \frac{CM}{MD} = \frac{1}{2}$;

4) $A(-1)$, $B(3)$ y $\lambda = \frac{AM}{MB} = -2$;

5) $A(1)$, $B(-3)$ y $\lambda = \frac{BM}{MA} = -3$;

6) $A(-2)$, $B(-1)$ y $\lambda = \frac{BM}{MA} = -\frac{1}{2}$.

14. Dados dos puntos A (5) y B (—3), determinar:

1) la coordenada del punto M simétrico al punto A con respecto al punto B;

2) la coordenada del punto N simétrico al punto B con respecto al punto A.

15. El segmento limitado por los puntos A (—2) y B (19) se ha dividido en tres partes iguales. Determinar las coordenadas de los puntos de división.

16. Determinar las coordenadas de los extremos A y B del segmento dividido en tres partes iguales por los puntos P (—25) y Q (—9).

§ 2. Coordenadas cartesianas rectangulares en el plano

El sistema de coordenadas cartesiano rectangular se determina por una unidad lineal para la medición de longitudes y por dos ejes, perpendiculares entre sí, numerados en un orden determinado.

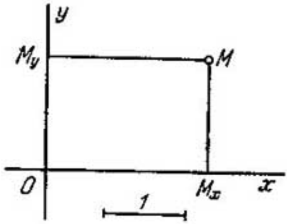

Fig. 1.

El punto de intersección de los ejes se llama origen de coordenadas, y los mismos ejes, ejes de coordenadas. El primero de los ejes coordenados se llama eje de abscisas y el segundo, eje de ordenadas.

El origen de coordenadas se indica con la letra O, el eje de abscisas con la notación Ox, y el de ordenadas con la notación Oy.

Se llaman coordenadas de un punto arbitrario M, en el sistema dado, a los números

$$x = OM_x, \qquad y = OM_y$$

(fig. 1), donde M_x y M_y son las proyecciones del punto M sobre los ejes Ox y Oy; OM_x es la magnitud del segmento $\overline{OM_x}$ del eje de abscisas, y OM_y indica la magnitud del segmento $\overline{OM_y}$ del eje de ordenadas. El número x se llama abscisa del punto M; el número y ordenada de este mismo punto. La notación M $(x; y)$ indica que la abscisa del punto M es el número x, la ordenada, el número y.

El eje Oy divide todo el plano en dos semiplanos: el que está situado en la dirección positiva del eje Ox se llama derecho y, el otro, izquierdo. Análogamente, el eje Ox divide el plano en dos semiplanos; el que está situado en la dirección positiva del eje Oy se llama superior y, el otro, inferior.

Los ejes coordenados dividen conjuntamente el plano en cuatro cuadrantes que están numerados según la siguiente regla: el primer cuadrante coordenado es el que está situado a la vez en los semiplanos derecho y superior; el segundo, en los semiplanos izquierdo y superior; el tercero, en los semiplanos izquierdo e inferior y, el cuarto, en los semiplanos derecho e inferior.

17. Trazar los puntos

$$A\ (2;\ 3),\ B\ (-5;\ 1),\ C\ (-2;\ -3),\ D\ (0;\ 3),\ E\ (-5;\ 0),\ F\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right).$$

18. Hallar las coordenadas de las proyecciones de los puntos

$$A\ (2;\ -3),\ B\ (3;\ -1),\ C\ (-5;\ 1),\ D\ (-3;\ -2),\ E\ (-5;\ -1)$$

sobre el eje de abscisas.

19. Hallar las coordenadas de las proyecciones de los puntos

$$A\ (-3;\ 2),\ B\ (-5;\ 1),\ C\ (3;\ -2),\ D\ (-1;\ 1),\ E\ (-6;\ -2)$$

sobre el eje de ordenadas.

20. Hallar las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos

1) $A\ (2;\ 3)$; 2) $B\ (-3;\ 2)$; 3) $C\ (-1;\ -1)$; 4) $D\ (-3;\ -5)$; 5) $E\ (-4;\ 6)$; 6) $F\ (a;\ b)$

con respecto al eje Ox.

21. Hallar las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos

1) $A\ (-1;\ 2)$; 2) $B\ (3;\ -1)$; 3) $C\ (-2;\ -2)$; 4) $D\ (-2;\ 5)$; 5) $E\ (3;\ -5)$; 6) $F\ (a;\ b)$

con respecto al eje Oy.

22. Hallar las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos

1) $A\ (3;\ 3)$; 2) $B\ (2;\ -4)$; 3) $C\ (-2;\ 1)$; 4) $D\ (5;\ -3)$; 5) $E\ (-5;\ -4)$; 6) $F\ (a;\ b)$

con respecto al origen de coordenadas.

23. Hallar las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos

$$1)\ A\ (2;\ 3);\ 2)\ B\ (5;\ -2);\ 3)\ C\ (-3;\ 4)$$

con respecto a la bisectriz del primer ángulo coordenado.

24. Hallar las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos

$$1)\ A\ (3;\ 5);\ 2)\ B\ (-4;\ 3);\ 3)\ C\ (7;\ -2)$$

con respecto a la bisectriz del segundo ángulo coordenado.

25. Determinar en qué cuadrantes puede estar situado el punto $M\ (x;\ y)$, si:

$$1)\ xy > 0;\ 2)\ xy < 0;\ 3)\ x - y = 0;$$
$$4)\ x + y = 0;\ 5)\ x + y > 0;\ 6)\ x + y < 0;$$
$$7)\ x - y > 0;\ 8)\ x - y < 0.$$

§ 3. Coordenadas polares

El sistema de coordenadas polares se determina por un punto O llamado polo, por un rayo OA que parte de este punto y que se denomina eje polar, y por una unidad lineal para la medición de longitudes. Además, cuando se considera un sistema polar hay que convenir en qué rotaciones alrededor del punto O se toman como positivas (en las figuras, por lo general, se toman como positivas las rotaciones en dirección contraria a la de las agujas de un reloj).

Se llaman coordenadas polares de un punto arbitraio M (con respecto al sistema dado) a los números $\rho = OM$ y $\theta = \sphericalangle AOM$ (fig. 2). El ángulo θ tiene el significado que se da a los ángulos en trigonometría. El numero ρ es la primera coordenada y se llama radio polar; el número θ es la segunda coordenada y se llama ángulo polar del punto M*).

El símbolo $M\ (\rho;\ \theta)$ indica que el punto M tiene las coordenadas polares ρ y θ.

El ángulo polar θ tiene infinidad de valores posibles (que se diferencian unos de otros en una magnitud de la forma $\pm 2n\pi$, donde n es un número entero positivo). El valor del ángulo polar que satisface a las desigualdades $-\pi < \theta \leqslant +\pi$ se llama valor fundamental.

Convengamos en que, cuando se consideren a la vez un sistema cartesiano de coordenadas y un sistema polar de coordenadas: 1) utilizaremos una misma unidad de medida, 2) en la definición de los

---

*) Aquí, OM indica la l o n g i t u d del segmento y tiene el significado que se da a las longitudes en geometría (es decir, se toma su valor absoluto sin tener en cuenta el signo). En este caso no es necesario emplear el símbolo $|OM|$, tan complicado, puesto que los puntos O y M se consideran como puntos arbitrarios del plano y no como puntos de un eje. En adelante, a menudo se empleará, en casos análogos, una simplificación semejante de los símbolos.

ángulos polares tomaremos como positivas las rotaciones en la dirección en que debe girar el semieje positivo de abscisas para que del modo más corto coincida con el semieje positivo de ordenadas (de esta manera, si los ejes de coordenadas están situados en su forma habitual, es decir, si el eje Ox está dirigido hacia la derecha y el eje Oy hacia arriba, entonces, los ángulos polares se toman como de costumbre, o sea, son positivos los ángulos que se toman en dirección contraria a la de las agujas de un reloj).

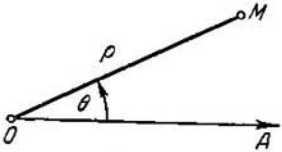

Fig. 2.

Con esta condición, si el polo del sistema de coordenadas polares coincide con el origen de coordenadas cartesianas rectangulares, y el eje polar con el semieje positivo de abscisas, el paso de las coordenadas polares de un punto arbitrario a las coordenadas cartesianas del mismo punto se efectúa mediante las fórmulas

$$x = \rho \cos \theta,$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

En este mismo caso, las fórmulas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

son las fórmulas de paso de las coordenadas cartesianas a las polares.

Convengamos en que, en lo sucesivo, al considerar conjuntamente dos sistemas de coordenadas polares, la dirección positiva de las rotaciones y la unidad de medida de los dos sistemas serán iguales.

26. Trazar los puntos, dadas sus coordenadas polares:

$$A\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right), \quad B(2;\ \pi), \quad C\left(3;\ -\frac{\pi}{4}\right), \quad D\left(4;\ 3\frac{1}{7}\right),$$

$$E(5;\ 2) \text{ y } F(1;\ -1)$$

(efectuar, aproximadamente, el trazado de los puntos D, E y F, empleando el transportador).

27. Determinar las coordenadas polares de los puntos simétricos a los puntos

$$M_1\left(3;\ \frac{\pi}{4}\right), \quad M_2\left(2;\ -\frac{\pi}{2}\right), \quad M_3\left(3;\ -\frac{\pi}{3}\right),$$

$$M_4(1;\ 2) \text{ y } M_5(5;\ -1)$$

con respecto al eje polar, si éstos están dados en un sistema de coordenadas polares.

28. Determinar las coordenadas polares de los puntos simétricos a los puntos

$$M_1\left(1;\ \frac{\pi}{4}\right),\quad M_2\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right),\quad M_3\left(2;\ -\frac{\pi}{3}\right),$$
$$M_4\left(4;\ \frac{5}{6}\pi\right) \text{ y } M_5(3;\ -2)$$

con respecto al polo, si éstos están dados en un sistema de coordenadas polares.

29. En un sistema de coordenadas polares se han dado dos vértices

$$A\left(3;\ -\frac{4}{9}\pi\right) \text{ y } B\left(5;\ \frac{3}{14}\pi\right)$$

de un paralologramo $ABCD$, cuyo punto de intersección de las diagonales coincide con el polo. Determinar los otros dos vértices de este paralelogramo.

30. En un sistema de coordenadas polares se han dado los puntos $A\left(8;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$ y $B\left(6;\ \frac{\pi}{3}\right)$. Calcular las coordenadas polares del punto medio del segmento que une los puntos A y B.

31. En un sistema de coordenadas polares se han dado los puntos

$$A\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right),\quad B\left(2;\ -\frac{\pi}{4}\right),\quad C(1;\ \pi),\quad D\left(5;\ -\frac{3}{4}\pi\right),$$
$$E(3;\ 2) \text{ y } F(2;\ -1).$$

La dirección positiva del eje polar se ha cambiado por la contraria. Determinar las coordenadas polares de estos puntos en el nuevo sistema.

32. En un sistema de coordenadas polares se han dado los puntos

$$M_1\left(3;\ \frac{\pi}{3}\right),\quad M_2\left(1;\ \frac{2}{3}\pi\right),\quad M_3(2;\ 0),$$
$$M_4\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right),\quad M_5\left(3;\ -\frac{2}{3}\pi\right) \text{ y } M_6\left(1;\ \frac{11}{12}\pi\right).$$

El eje polar ha girado de manera que en la nueva posición pasa por el punto M_1. Determinar las coordenadas de los puntos dados en el nuevo sistema (polar).

33. En un sistema de coordenadas polares se han dado los puntos $M_1\left(12;\ \frac{4}{9}\pi\right)$ y $M_2\left(12;\ -\frac{2}{9}\pi\right)$. Calcular las

coordenadas polares del punto medio del segmento que une los puntos M_1 y M_2.

34. En un sistema de coordenadas polares se han dado los puntos $M_1(\rho_1;\ \theta_1)$ y $M_2(\rho_2,\ \theta_2)$. Calcular la distancia d entre ellos.

35. En un sistema de coordenadas polares se han dado los puntos $M_1\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right)$ y $M_2\left(8;\ -\frac{\pi}{12}\right)$. Calcular la distancia d entre ellos.

36. En un sistema de coordenadas polares se han dado dos vértices adyacentes de un cuadrado $M_1\left(12;\ -\frac{\pi}{10}\right)$ y $M_2\left(3;\ \frac{\pi}{15}\right)$. Determinar su área.

37. En un sistema de coordenadas polares se han dado dos vértices opuestos de un cuadrado $P\left(6;\ -\frac{7}{12}\pi\right)$ y $Q\left(4;\ \frac{1}{6}\pi\right)$. Determinar su área.

38. En un sistema de coordenadas polares se han dado dos vértices de un triángulo equilátero $A\left(4;\ -\frac{1}{12}\pi\right)$ y $B\left(8;\ \frac{7}{12}\pi\right)$. Determinar su área.

39. Uno de los vértices del triángulo OAB está en el polo; los otros dos son los puntos $A(\rho_1;\ \theta_1)$ y $B(\rho_2;\ \theta_2)$. Calcular el área de este triángulo.

40. Uno de los vértices del triángulo OAB está en el polo O; los otros dos son los puntos $A\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right)$ y $B\left(4;\ \frac{\pi}{12}\right)$. Calcular el área de este triángulo.

41. Calcular el área del triángulo, si sus vértices $A\left(3;\ \frac{1}{8}\pi\right)$, $B\left(8;\ \frac{7}{24}\pi\right)$ y $C\left(6;\ \frac{5}{8}\pi\right)$ están dados en coordenadas polares.

42. El polo de un sistema de coordenadas polares coincide con el origen de coordenadas cartesianas rectangulares; el eje polar coincide con el semieje positivo de abscisas. En el sistema de coordenadas polares se han dado los puntos $M_1\left(6;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5;\ 0)$, $M_3\left(2;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(10;\ -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(8;\ \frac{2}{3}\pi\right)$, $M_6\left(12;\ -\frac{\pi}{6}\right)$. Determinar las coordenadas cartesianas de ellos.

43. El polo de un sistema de coordenadas polares coincide con el origen de coordenadas cartesianas rectangulares; el eje polar coincide con el semieje positivo de abscisas. En el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares se han dado los puntos $M_1(0;\ 5)$; $M_2(-3;\ 0)$; $M_3(\sqrt{3};\ 1)$; $M_4(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$; $M_5(1;\ -\sqrt{3})$. Determinar las coordenadas polares de estos puntos.

§ 4. Segmento dirigido. Proyección de un segmento sobre un eje arbitrario. Proyecciones de un segmento sobre los ejes coordenados. Longitud y ángulo polar de un segmento. Distancia entre dos puntos

Un segmento rectilíneo se llama dirigido, si se ha indicado cuál de los puntos que lo limitan es el origen y cuál es el extremo. El segmento dirigido con el origen en el punto A y con el extremo en el punto B

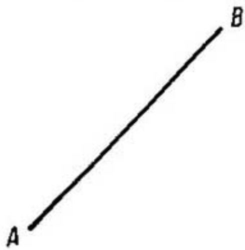

Fig. 3.

(fig. 3) se indica con el símbolo $\overline{AB}$ (es decir, lo mismo que el segmento del eje; véase § 1). La longitud del segmento dirigido $\overline{AB}$ (respecto a la unidad de medida considerada) se indica con el símbolo $|\overline{AB}|$ (o AB; véase la observación de la pág. 12).

Se llama proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre un eje u, al número igual a la magnitud del segmento $\overline{A_1B_1}$ del eje u; se supone que el punto A_1 es la proyección del punto A sobre el eje u y que el punto B_1 es la proyección del punto B sobre el mismo eje.

La proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre el eje u se indica con el símbolo $pr_u\overline{AB}$. Si en el plano se ha dado un sistema de coordenadas cartesiano rectangular, la proyección del segmento sobre el eje Ox se indica con el símbolo X y la proyección sobre el eje Oy, con el símbolo Y.

Si se conocen las coordenadas de los puntos $M_1(x_1;\ y_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2)$, las proyecciones X e Y del segmento dirigido $\overline{M_1M_2}$ sobre los ejes caoordenados pueden calcularse mediante las fórmulas

$$X = x_2 - x_1,$$
$$Y = y_2 - y_1.$$

Es decir, para hallar las proyecciones del segmento dirigido sobre los ejes coordenados es necesario restar las coordenadas de su origen de las coordenadas de su extremo.

Se llama ángulo polar del segmento $\overline{M_1M_2}$ al ángulo θ en el que hay que hacer girar el semieje positivo Ox para que su dirección coincida con la dirección del segmento $\overline{M_1M_2}$.

El ángulo θ tiene el significado que se da a los ángulos en la trigonometría. De acuerdo con esto, θ tiene una infinidad de valores posibles, que se diferencian entre sí en una magnitud de la forma $\pm 2n\pi$ (donde n es un número entero y positivo). Se llama valor fundamental del ángulo polar a uno de sus valores que satisface a las desigualdades $-\pi < \theta \leqslant +\pi$.

Las fórmulas

$$X = d\cdot\cos\theta, \quad Y = d\cdot\operatorname{sen}\theta$$

expresan las proyecciones de un segmento arbitrario sobre los ejes coordenados mediante su longitud y su ángulo polar. De aquí se deducen las fórmulas

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

y

$$\cos\theta = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

que expresan la longitud y el ángulo polar del segmento mediante sus proyecciones sobre los ejes coordenados.

Si en el plano se han dado dos puntos M_1 $(x_1;\ y_1)$ y M_2 $(x_2;\ y_2)$, la distancia d entre ellos se determina por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

44. Calcular la proyección del segmento sobre el eje u, si se han dado su longitud d y su ángulo de inclinación φ hacia el eje:

$$1)\ d=6,\ \varphi=\frac{\pi}{3}; \quad 2)\ d=6,\ \varphi=\frac{2\pi}{3};$$

$$3)\ d=7,\ \varphi=\frac{\pi}{2}; \quad 4)\ d=5,\ \varphi=0;$$

$$5)\ d=5,\ \varphi=\pi; \quad 6)\ d=4,\ \varphi=-\frac{\pi}{3}.$$

45. Trazar el segmento que parte del origen de las coordenadas, conociendo sus proyecciones sobre los ejes coordenados:

$$1)\ X=3,\quad Y=2; \quad 2)\ X=2,\quad Y=-5;$$

$$3)\ X=-5,\quad Y=0; \quad 4)\ X=-2,\quad Y=3;$$

$$5)\ X=0,\quad Y=3; \quad 6)\ X=-5,\quad Y=-1.$$

46. Trazar los segmentos que tienen el origen en el punto $M(2;\ -1)$, conociendo sus proyecciones sobre los ejes coordenados:

a) $X=4,\quad Y=3;$ b) $X=2,\quad Y=0;$

c) $X=-3,\quad Y=1;$ d) $X=-4,\quad Y=-2;$

e) $X=0,\quad Y=-3;$ f) $X=1\quad Y=-3.$

47. Dados los puntos $M_1(1;\ -2)$, $M_2(2;\ 1)$, $M_3(5;\ 0)$, $M_4(-1;\ 4)$ y $M_5(0;\ -3)$, hallar las proyecciones de los siguientes segmentos sobre los ejes coordenados:

1) $\overline{M_1M_2}$, 2) $\overline{M_3M_1}$, 3) $\overline{M_4M_5}$, 4) $\overline{M_5M_3}$.

48. Dadas las proyecciones del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre los ejes coordenados $X=5,\ Y=-4$, hallar las coordenadas de su extremo, sabiendo que su origen está en el punto $M_1(-2;\ 3)$.

49. Dadas las proyecciones del segmento $\overline{AB}$ sobre los ejes coordenados $X=4,\ Y=-5$, hallar las coordenadas de su origen, sabiendo que su extremo está en el punto $B(1;\ -3)$.

50. Trazar los segmentos que parten del origen de coordenadas, conociendo la longitud d y el ángulo polar θ de cada uno de ellos:

1) $d=5,\ \theta=\frac{\pi}{5}$; 2) $d=3,\ \theta=\frac{5}{6}\pi$;

3) $d=4,\ \theta=-\frac{\pi}{3}$; 4) $d=3,\ \theta=-\frac{4}{3}\pi$.

51. Trazar los segmentos que tienen el origen en el punto $M(2;\ 3)$, conociendo la longitud y el ángulo polar de cada uno de ellos:

1) $d=2,\ \theta=-\frac{\pi}{10}$; 2) $d=1,\ \theta=\frac{\pi}{9}$;

3) $d=5,\ \theta=-\frac{\pi}{2}$

(las coordenadas del punto M son cartesianas).

52. Calcular las proyecciones de los segmentos sobre los ejes coordenados, conociendo la longitud d y el ángulo polar θ de cada uno de ellos:

$$1)\ d=12,\ \theta=\frac{2}{3}\pi;\quad 2)\ d=6,\ \theta=-\frac{\pi}{6};$$

$$3)\ d=2,\ \theta=-\frac{\pi}{4}.$$

53. Dadas las proyecciones de los segmentos sobre los ejes coordenados:

$$1)\ X=3,\ Y=-4;\quad 2)\ X=12,\ Y=5;$$

$$3)\ X=-8,\ Y=6,$$

calcular la longitud de cada uno de ellos.

54. Dadas las proyecciones de los segmentos sobre los ejes coordenados:

$$1)\ X=1,\ Y=\sqrt{3};\quad 2)\ X=3\sqrt{2},\ Y=-3\sqrt{2};$$

$$3)\ X=-2\sqrt{3},\ Y=2,$$

calcular la longitud d y el ángulo polar θ de cada uno de ellos.

55. Dados los puntos

$$M_1(2;\ -3),\quad M_2(1;\ -4),\quad M_3(-1;\ -7)$$
$$\text{y } M_4(-4;\ 8),$$

calcular la longitud y el ángulo polar de los siguientes segmentos:

$$a)\ \overline{M_1M_2},\quad b)\ \overline{M_1M_3},\quad c)\ \overline{M_2M_4},\quad d)\ \overline{M_4M_3}.$$

56. La longitud d de un segmento es igual a 5, su proyección sobre el eje de abscisas es igual a 4. Hallar la proyección de este segmento sobre el eje de ordenadas, si forma con el eje de ordenadas: a) un ángulo agudo, b) un ángulo obtuso.

57. La longitud del segmento $\overline{MN}$ es igual a 13; su origen está en el punto $M(3;\ -2)$; la proyección sobre el eje de abscisas es igual a -12. Hallar las coordenadas del extremo de este segmento, si forma con el eje de ordenadas: a) un ángulo agudo, b) un ángulo obtuso.

58. La longitud del segmento $\overline{MN}$ es igual a 17; su extremo está en el punto $N(-7;\ 3)$ y la proyección sobre el eje de ordenadas es igual a 15. Hallar las coordenadas del origen de este segmento, si se sabe que forma con el eje de abscisas: a) un ángulo agudo, b) un ángulo obtuso.

59. Conociendo las proyecciones del segmento sobre los ejes coordenados $X=1$, $Y=-\sqrt{3}$, hallar su proyección sobre el eje que forma el ángulo $\theta=\frac{2}{3}\pi$ con el eje Ox.

60. Dados dos puntos $M_1(1;\ -5)$ y $M_2(4;\ -1)$, hallar las proyecciones del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre el eje que forma con el eje Ox el ángulo $\theta=-\frac{\pi}{6}$.

61. Dados dos puntos $P(-5;\ 2)$ y $Q(3;\ 1)$, hallar la proyección del segmento $\overline{PQ}$ sobre el eje que forma con el eje Ox el ángulo $\theta=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

62. Dados dos puntos $M_1(2;\ -2)$ y $M_2(7;\ -3)$, hallar la proyección del segmento $\overline{M_1M_2}$ sobre el eje que pasa por los puntos $A(5;\ -4)$, $B(-7;\ 1)$ y cuya dirección es: 1) de A hacia B, 2) de B hacia A.

63. Dados los puntos $A\ (0;\ 0)$, $B\ (3;\ -4)$, $C\ (-3;\ 4)$, $D\ (-2;\ 2)$ y $E\ (10;\ -3)$, determinar la distancia d entre los puntos: 1) A y B; 2) B y C; 3) A y C; 4) C y D; 5) A y D; 6) D y E.

64. Dados dos vértices adyacentes de un cuadrado $A\ (3;\ -7)$ y $B\ (-1;\ 4)$, calcular su área.

65. Dados dos vértices opuestos de un cuadrado $P\ (3,\ 5)$ y $Q\ (1;\ -3)$, calcular su área.

66. Calcular el área de un triángulo regular, si dos de sus vértices son $A\ (-3;\ 2)$ y $B\ (1;\ 6)$.

67. Dados tres vértices $A\ (3;\ -7)$, $B\ (5;\ -7)$; $C\ (-2;\ 5)$ de un paralelogramo $ABCD$, cuyo cuarto vértice D es opuesto a B, determinar las longitudes de las diagonales de este paralelogramo.

68. El lado de un rombo es igual a $5\sqrt{10}$ y dos de sus vértices opuestos son los puntos $P\ (4;\ 9)$ y $Q\ (-2;\ 1)$. Calcular el área de este rombo.

69. El lado de un rombo es igual a $5\sqrt{2}$ y dos de sus vértices opuestos son los puntos $P\ (3;\ -4)$ y $Q\ (1;\ 2)$. Calcular la longitud de la altura de este rombo.

70. Demostrar que los puntos $A\ (3;\ -5)$, $B\ (-2;\ -7)$ y $C\ (18;\ 1)$ están en una recta.

71. Demostrar que el triángulo con los vértices $A_1\ (1;\ 1)$, $A_2\ (2;\ 3)$ y $A_3\ (5;\ -1)$ es rectángulo.

72. Demostrar que los puntos $A(2; 2)$, $B(-1; 6)$, $C(-5; 3)$ y $D(-2; -1)$ son vértices de un cuadrado.

73. Averiguar si entre los ángulos internos del triángulo con los vértices $M_1(1; 1)$, $M_2(0; 2)$ y $M_3(2; -1)$ hay algún ángulo obtuso.

74. Demostrar que todos los ángulos internos del triángulo con los vértices $M(-1; 3)$, $N(1; 2)$ y $P(0; 4)$ son agudos.

75. Los puntos $A(5; 0)$, $B(0; 1)$ y $C(3; 3)$ son vértices de un triángulo. Calcular sus ángulos internos.

76. Los puntos $A(-\sqrt{3}; 1)$, $B(0; 2)$ y $C(-2\sqrt{3}; 2)$ son vértices de un triángulo. Calcular su ángulo externo con el vértice en el punto A.

77. Hallar en el eje de abscisas un punto M, cuya distancia hasta el punto $N(2; -3)$ sea igual a 5.

78. Hallar en el eje de ordenadas un punto M, cuya distancia hasta el punto $N(-8; 13)$ sea igual a 17.

79. Dados dos puntos $M(2; 2)$ y $N(5; -2)$, hallar en el eje de abscisas un punto P de modo que el ángulo MPN sea recto.

80. Por el punto $A(4; 2)$ se ha trazado una circunferencia, tangente a los dos ejes de coordenadas. Determinar su centro C y su radio R.

81. Por el punto $M_1(1; -2)$ se ha trazado una circunferencia de radio 5, tangente al eje Ox. Determinar el centro C de la misma.

82. Determinar las coordenadas del punto M_2, simétrico al punto $M_1(1; 2)$ con respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1; 0)$ y $B(-1; -2)$.

83. Dados dos vértices opuestos de un cuadrado, $A(3; 0)$ y $C(-4; 1)$, hallar los otros dos vértices.

84. Dados dos vértices adyacentes de un cuadrado, $A(2; -1)$ y $B(-1; 3)$, determinar los otros dos vértices.

85. Los vértices de un triángulo son: $M_1(-3; 6)$, $M_2(9; -10)$ y $M_3(-5; 4)$. Determinar el centro C y el radio R de la circunferencia circunscrita en él.

§ 5. División de un segmento en una razón dada

Si el punto $M(x; y)$ está en la recta que pasa por dos puntos dados $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ y se ha dado la razón $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ en la que el punto M divide al segmento $\overline{M_1M_2}$, las coordenadas del punto M se determinan mediante las fórmulas

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Si M es el punto medio del segmento $\overline{M_1M_2}$, sus coordenadas se determinan por las fórmulas

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

86. Los extremos de una varilla homogénea son A (3; —5) y B (—1; 1). Determinar las coordenadas de su centro de gravedad.

87. El centro de gravedad de una varilla homogénea está situado en el punto M (1; 4); uno de sus extremos en el punto P (—2; 2). Determinar las coordenadas del otro extremo Q de la varilla.

88. Los vértices de un triángulo son: A (1; —3), B (3; —5) y C (—5; 7). Determinar los puntos medios de sus lados.

89. Dados dos puntos A (3; —1) y B (2; 1), determinar:

1) las coordenadas de punto M simétrico al punto A con respecto al punto B;

2) las coordenadas del punto N simétrico al punto B con respecto al punto A.

90. Los puntos medios de los lados de un triángulo son: M (2; —1), N (—1; 4) y P (—2; 2). Determinar sus vértices.

91. Dados tres vértices de un paralelogramo: A (3; —5), B (5; —3) y C (—1; 3), determinar el cuarto vértice D opuesto a B.

92. Dados dos vértices adyacentes de un paralelogramo: A (—3; 5), B (1; 7) y el punto de intersección de sus diagonales M (1; 1), determinar los otros dos vértices.

93. Dados tres vértices de un paralelogramo $ABCD$: A (2; 3), B (4; —1) y C (0; 5), hallar el cuarto vértice D.

94. Los vértices de un triángulo son: A (1; 4), B (3; —9) y C (—5; 2). Determinar la longitud de la mediana trazada desde el punto B.

95. El segmento limitado por los puntos A (1; —3) y B (4; 3) ha sido dividido en tres partes iguales. Determinar las coordenadas de los puntos de división.

96. Los vértices de un triángulo son: A (2; —5), B (1; —2) y C (4; 7). Hallar el punto de intersección del lado AC con la bisectriz del ángulo interno del vértice B.

97. Los vértices de un triángulo son: $A\ (3;\ -5)$, $B\ (-3;\ 3)$ y $C\ (-1;\ -2)$. Determinar la longitud de la bisectriz del ángulo interno del vértice A.

98. Los vértices de un triángulo son: $A\ (-1;\ -1)$, $B\ (3;\ 5)$ y $C\ (-4;\ 1)$. Hallar el punto de intersección de la bisectriz del ángulo externo del vértice A con la prolongación del lado BC.

99. Los vértices de un triángulo son: $A\ (3;\ -5)$, $B\ (1;\ -3)$ y $C\ (2;\ -2)$. Determinar la longitud de la bisectriz del ángulo externo del vértice B.

100. Los puntos $A\ (1;\ -1)$, $B\ (3;\ 3)$ y $C\ (4;\ 5)$ están situados en una recta. Determinar la razón λ, en la que cada punto divide el segmento limitado por los otros dos.

101. Determinar las coordenadas de los extremos A y B del segmento que es dividido en tres partes iguales por los puntos $P\ (2;\ 2)$ y $Q\ (1;\ 5)$.

102. Una recta pasa por los puntos $M_1\ (-12;\ -13)$ y $M_2\ (-2;\ -5)$. Hallar en esta recta el punto cuya abscisa es igual a 3.

103. Una recta pasa por los puntos $M\ (2;\ -3)$ y $N\ (-6;\ 5)$. Hallar en esta recta el punto cuya ordenada es igual a -5.

104. Una recta pasa por los puntos $A\ (7;\ -3)$ y $B\ (23;\ -6)$. Hallar el punto de intersección de esta recta con el eje de abscisas.

105. Una recta pasa por los puntos $A\ (5;\ 2)$ y $B\ (-4;\ -7)$. Hallar el punto de intersección de esta recta con el eje de ordenadas.

106. Los vértices de un cuadrilátero son: $A\ (-3;\ 12)$, $B\ (3;\ -4)$, $C\ (5;\ -4)$ y $D\ (5;\ 8)$. Determinar la razón en la que su diagonal AC divide la diagonal BD.

107. Los vértices de un cuadrilátero son: $A\ (-2;\ 14)$, $B\ (4;\ -2)$, $C\ (6;\ -2)$ y $D\ (6;\ 10)$. Determinar el punto de intersección de sus diagonales AC y BD.

108. Dados los vértices de una lámina homogénea triangular $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$ y $C\ (x_3;\ y_3)$, determinar las coordenadas de su centro de gravedad.

Observación. El centro de gravedad se encuentra en el punto de intersección de las medianas.

109. El punto M de intersección de las medianas de un triángulo está situado en el eje de abscisas; dos de sus vértices son los puntos $A\ (2;\ -3)$ y $B\ (-5;\ 1)$; el tercer vértice

C está en el eje de ordenadas. Determinar las coordenadas de los puntos M y C.

110. Se han dado los vértices de una lámina homogénea triangular $A(x_1; y_1)$, $B(x_2, y_2)$, y $C(x_3; y_3)$. Uniendo los puntos medios de sus lados se forma otra lámina homogénea triangular. Demostrar que coinciden los centros de gravedad de las láminas.

Observación. Aplicar los resultados del problema 108.

111. En una lámina homogénea que tiene la forma de un cuadrado, de lado igual a 12, se ha hecho un corte cua-

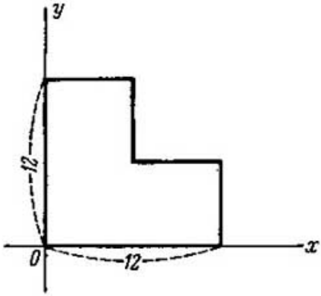

Fig. 4.

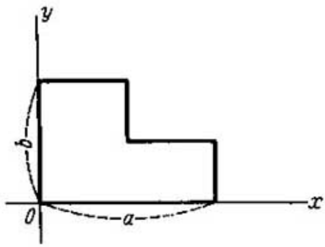

Fig. 5.

drangular; las rectas del corte pasan por el centro del cuadrado; los ejes coordenados están dirigidos por los lados de la lámina (fig. 4). Determinar el centro de gravedad de esta lámina.

112. En una lámina homogénea que tiene la forma de un rectángulo, con los lados iguales a a y b, se ha hecho un corte rectangular; las rectas del corte pasan por el centro; los ejes coordenados están dirigidos por los lados de la lámina (fig. 5). Determinar el centro de gravedad de esta lámina.

113. De una lámina homogénea que tiene la forma de un cuadrado, de lado igual a $2a$, se ha recortado un triángulo; la recta del corte une los puntos medios de dos lados adyacentes y los ejes de coordenadas están dirigidos por los lados de la lámina (fig. 6). Determinar el centro de gravedad de la misma.

114. En los puntos $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ y $C(x_3;\ y_3)$ están concentradas las masas m, n y p. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de este sistema de tres masas.

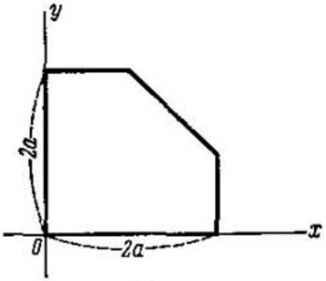

Fig. 6.

115. Los puntos $A(4;\ 2)$, $B(7;\ -2)$ y $C(1;\ 6)$ son los vértices de un triángulo de alambre homogéneo. Determinar el centro de gravedad de este triángulo.

§ 6. Area del triángulo

Cualesquiera que sean los puntos $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ y $C(x_3,\ y_3)$, el área S del triángulo ABC se determina por la fórmula

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

El segundo miembro de esta fórmula es igual a $+S$, cuando la rotación más corta del segmento $\overline{AB}$ hacia el segmento $\overline{AC}$ es positiva y a $-S$, cuando es negativa.

116. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos:

1) $A(2;\ -3)$, $B(3;\ 2)$ y $C(-2;\ 5)$;
2) $M_1(-3;\ 2)$, $M_2(5;\ -2)$ y $M_3(1;\ 3)$;
3) $M(3;\ -4)$, $N(-2;\ 3)$ y $P(4;\ 5)$.

117. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(3;\ 6)$, $B(-1;\ 3)$ y $C(2;\ -1)$. Calcular la longitud de su altura bajada desde el vértice C.

118. Determinar el área del paralelogramo, tres de cuyos vértices son los puntos $A(-2;\ 3)$, $B(4;\ -5)$ y $C(-3;\ 1)$.

119. Tres vértices de un paralelogramo son los puntos A (3; 7), B (2; —3) y C (—1; 4). Calcular la longitud de su altura bajada desde el vértice B al lado AC.

120. Dados los vértices consecutivos de una lámina homogénea cuadrangular A (2; 1), B (5; 3), C (—1; 7) y D (—7; 5), determinar las coordenadas de su centro de gravedad.

121. Dados los vértices consecutivos de una lámina homogénea pentagonal A (2; 3), B (0; 6), C (—1; 5), D (0; 1) y E (1; 1), determinar las coordenadas de su centro de gravedad.

122. El área de un triángulo es $S = 3$; dos de sus vértices son los puntos A (3; 1) y B (1; —3); el tercer vértice C está situado en el eje Oy. Determinar las coordenadas del vértice C.

123. El área de un triángulo es $S = 4$; dos de sus vértices son los puntos A (2; 1) y B (3; —2); el tercer vértice C está situado en el eje Ox. Determinar las coordenadas del vértice C.

124. El área de un triángulo es $S = 3$; dos de sus vértices son los puntos A (3; 1) y B (1; —3); el centro de gravedad de este triángulo está situado en el eje Ox. Determinar las coordenadas del tercer vértice C.

125. El área de un paralelogramo es $S = 12$ unidades cuadradas; dos de sus vértices son los puntos A (—1; 3) y B (—2; 4). Hallar los otros dos vértices de este paralelogramo, sabiendo que el punto de intersección de sus diagonales está situado en el eje de abscisas.

126. El área de un paralelogramo es $S = 17$ unidades cuadradas; dos de sus vértices son los puntos A (2; 1) y B (5; —3). Hallar los otros dos vértices de este paralelogramo, sabiendo que el punto de intersección de sus diagonales está en el eje de ordenadas.

§ 7. Transformación de coordenadas

La transformación de coordenadas cartesianas rectangulares por traslación paralela de los ejes se determina mediante las fórmulas

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b.$$

Aquí, x e y son las coordenadas de un punto arbitrario M del plano, relativo a los ejes primitivos; x', y' son las coordenadas del mismo punto, relativo a los ejes nuevos; a, b son las coordenadas del nuevo origen O', relativo a los ejes primitivos (también se dice que a es la magnitud de traslación en dirección del eje de abscisas y b, la magnitud de traslación en dirección del eje de ordenadas).

La transformación de coordenadas cartesianas rectangulares por rotación de los ejes en un ángulo α (que tiene el significado que se da a los ángulos en la trigonometría) se determina mediante las fórmulas

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha,$$
$$y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha.$$

Aquí, x e y son las coordenadas de un punto arbitrario M del plano, relativo a los ejes primitivos; x', y' son las coordenadas del mismo punto, relativo a los ejes nuevos.

Las fórmulas

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a,$$
$$y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b,$$

determinan la transformación de coordenadas por traslación paralela del sistema de ejes en una magnitud a en dirección de Ox, en una magnitud b en dirección de Oy, y por rotación sucesiva de los ejes en un ángulo α. Todas las fórmulas indicadas corresponden a la transformación de coordenadas manteniendo invariable la unidad de medida. En los problemas que siguen se supone que la unidad de medida se mantiene invariable.

127. Escribir las fórmulas de transformación de coordenadas, si el origen de coordenadas se ha trasladado (sin cambiar la dirección de los ejes) al punto: 1) A (3; 4); 2) B (—2; 1); 3) C (—3; 5).

128. El origen de coordenadas se ha trasladado (sin cambiar la dirección de los ejes) al punto O' (3; —4). Las coordenadas de los puntos A (1, 3), B (—3; 0) y C (—1; 4) están determinadas en el nuevo sistema. Calcular las coordenadas de estos puntos en el sistema de coordenadas primitivo.

129. Dados los puntos A (2; 1), B (—1; 3) y C (—2; 5), hallar sus coordenadas en el nuevo sistema, si el origen de coordenadas se ha trasladado (sin cambiar la dirección de los ejes): 1) al punto A; 2) al punto B; 3) al punto C.

130. Determinar las coordenadas primitivas del origen O' del nuevo sistema, si las fórmulas de transformación de coordenadas se han dado mediante las igualdades siguientes:

1) $x = x' + 3$, $y = y' + 5$; 2) $x = x' - 2$, $y = y' + 1$; 3) $x = x'$, $y = y' - 1$; 4) $x = x' - 5$, $y = y'$.

131. Escribir las fórmulas de transformación de coordenadas, si los ejes coordenados han girado en uno de los ángulos siguientes:

1) $60°$; 2) $-45°$; 3) $90°$; 4) $-90°$; 5) $180°$.

132. Los ejes de coordenadas han girado un ángulo $\alpha=60°$. Las coordenadas de los puntos $A(2\sqrt{3}; -4)$, $B(\sqrt{3}; 0)$ y $C(0; -2\sqrt{3})$ están determinadas en el nuevo sistema. Calcular las coordenadas de estos mismos puntos en el sistema de coordenadas primitivo.

133. Dados los puntos $M(3; 1)$, $N(-1; 5)$ y $P(-3; -1)$, hallar sus coordenadas en el nuevo sistema, si los ejes coordenados han girado un ángulo:

1) $-45°$; 2) $90°$; 3) $-90°$; 4) $180°$.

134. Determinar el ángulo α, en el que han girado los ejes, si las fórmulas de transformación de coordenadas se determinan por las siguientes igualdades:

$$1)\ x=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y',\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y';$$

$$2)\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y',\quad y=-\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'.$$

135. Determinar las coordenadas del nuevo origen O' de coordenadas, sabiendo que el punto $A(3; -4)$ está situado en el nuevo eje de abscisas, el punto $B(2; 3)$ está situado en el nuevo eje de ordenadas y los ejes de los sistemas de coordenadas primitivo y nuevo tienen respectivamente las mismas direcciones.

136. Escribir las fórmulas de transformación de coordenadas, si el punto $M_1(2; -3)$ está situado en el nuevo eje de abscisas, el punto $M_2(1; -7)$ está situado en el nuevo eje de ordenadas y los ejes de los sistemas de coordenadas primitivo y nuevo tienen respectivamente las mismas direcciones.

137. Dos sistemas de ejes coordenados Ox, Oy y Ox', Oy' tienen un origen común O y se transforman el uno en el otro mediante una rotación en cierto ángulo. Las coordenadas del punto $A(3; -4)$ están determinadas respecto al primero de ellos. Deducir las fórmulas de transformación de coordenadas, sabiendo que la dirección positiva del eje Ox' está definida por el segmento $\overline{OA}$.

138. El eje de coordenadas se ha trasladado al punto $O'(-1, 2)$, y los ejes coordenados han girado un ángulo $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$. Las coordenadas de los puntos $M_1(3; 2)$, $M_2(2; -3)$ y $M_3(13; -13)$ están determinadas en el nuevo sistema. Determinar las coordenadas de estos mismos puntos en el sistema de coordenadas primitivo.

139. Dados tres puntos: $A(5; 5)$, $B(2; -1)$ y $C(12; -6)$, hallar sus coordenadas en el nuevo sistema, si el origen de coordenadas se ha trasladado al punto B y los ejes coordenados han girado un ángulo $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

140. Determinar las coordenadas primitivas del nuevo origen y el ángulo α, en el que han girado los ejes, si las fórmulas de transformación de coordenadas se dan mediante las siguientes igualdades;

1) $x = -y' + 3$, $y = x' - 2$; 2) $x = -x' - 1$, $y = -y' + 3$;

3) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 5$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 3$.

141. Se han dado dos puntos: $M_1(9; -3)$ y $M_2(-6; 5)$. El origen de coordenadas se ha trasladado al punto M_1 y los ejes coordenados han girado de manera que la dirección positiva del nuevo eje de abscisas coincide con la dirección del segmento $\overline{M_1M_2}$. Deducir las fórmulas de transformación de coordenadas.

142. El eje polar de un sistema de coordenadas polares es paralelo al eje de abscisas de un sistema cartesiano rectangular y tiene la misma dirección que él. Se han dado las coordenadas cartesianas rectangulares del polo $O(1; 2)$ y las coordenadas polares de los puntos $M_1\left(7; \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(3; 0)$, $M_3\left(5; -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_4\left(2; \frac{2}{3}\pi\right)$ y $M_5\left(2; -\frac{\pi}{6}\right)$. Determinar las coordenadas de estos puntos en el sistema cartesiano rectangular.

143. El polo de un sistema de coordenadas polares coincide con el origen de coordenadas de un sistema cartesiano rectangular, y el eje polar tiene la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado. Se han dado las coordenadas polares de los puntos $M_1\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(3; -\frac{\pi}{4}\right)$, $M_3\left(1; \frac{3}{4}\pi\right)$, $M_4\left(6; -\frac{3}{4}\pi\right)$ y

$M_5\left(2; -\frac{\pi}{12}\right)$. Determinar las coordenadas cartesianas rectangulares de estos puntos.

144. El eje polar de un sistema de coordenadas polares es paralelo al eje de abscisas de un sistema cartesiano rectangular y tiene la misma dirección que él. Se han dado las coordenadas cartesianas rectangulares del polo O (3; 2) y de los puntos

$$M_1(5; 2),\ M_2(3; 1),\ M_3(3; 5),$$
$$M_4(3+\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}) \text{ y } M_5(3+\sqrt{3}; 3).$$

Determinar las coordenadas polares de estos puntos.

145. El polo de un sistema de coordenadas polares coincide con el origen de coordenadas cartesianas rectangulares, y el eje polar tiene la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado. Se han dado las coordenadas cartesianas rectangulares de los puntos

$$M_1(-1; 1),\ M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2}),\ M_3(1; \sqrt{3}),$$
$$M_4(-\sqrt{3}; 1) \text{ y } M_5(2\sqrt{3}; -2).$$

Determinar las coordenadas polares de los mismos.

II

Capítulo

ECUACION DE UNA LINEA

§ 8. Función de dos variables

Si existe una ley, según la cual a cada punto M del plano (o de alguna parte del plano) se le pone en correspondencia un número u, se dice que en el plano (o en la parte del plano) «está dada una función del punto»; ésta se expresa mediante una igualdad de la forma $u = f(M)$. El número u que corresponde al punto M, se llama valor de la función en el punto M. Por ejemplo, si A es un punto fijo del plano y M es un punto arbitrario, la distancia desde A hasta M es una función del punto M. En este caso, $f(M) = AM$.

Supongamos que se ha dado una función $u = f(M)$ y a la vez un sistema de coordenadas. Entonces, cada punto arbitrario M se determina por sus coordenadas x, y. De acuerdo a esto, el valor de la función en el punto M se determina por las coordenadas x, y, o dicho de otro modo, $u = f(M)$ es una función de dos variables x e y. La función de dos variables x, y se indica con la notación $f(x, y)$; si $f(M) = f(x, y)$, la fórmula $u = f(x, y)$ se llama expresión de la función en el sistema de coordenadas elegido. Así, en el ejemplo anterior $f(M) = AM$ y en un sistema de coordenadas cartesiano rectangular con el origen en el punto A, la expresión de esta función será:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

146. Se han dado dos puntos P y Q, la distancia entre los cuales es igual a a y la función $f(M) = d_1^2 - d_2^2$, donde $d_1 = MP$ y $d_2 = MQ$. Determinar la expresión de esta función, si el punto P se ha tomado como origen de coordenadas y el eje Ox está dirigido por el segmento $\overline{PQ}$.

147. Con los datos del problema 146, determinar la expresión de la función $f(M)$ (directamente y mediante una transformación de coordenadas, aplicando el resultado del problema 146), si:

1) el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ se ha tomado como origen de coordenadas y el eje Ox tiene la dirección del segmento $\overline{PQ}$;

2) el punto P se ha tomado como origen de coordenadas y el eje Ox tiene la dirección del segmento $\overline{QP}$.

148. Dados un cuadrado $ABCD$ con el lado a y una función $f(M) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$, donde $d_1 = MA$, $d_2 = MB$, $d_3 = MC$ y $d_4 = MD$, determinar la expresión de esta función, si las diagonales del cuadrado se han tomado como ejes de coordenadas (el eje Ox tiene la dirección del segmento $\overline{AC}$ y el eje Oy, la dirección del segmento $\overline{BD}$).

149. Con los datos del problema 148, determinar la expresión de la función $f(M)$ (directamente y mediante una transformación de coordenadas, aplicando el resultado del problema 148), si el punto A se ha tomado como origen de coordenadas y los ejes de coordenadas están dirigidos por sus lados (el eje Ox por el segmento $\overline{AB}$ y el eje Oy por el segmento $\overline{AD}$).

150. Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y$, determinar la expresión de esta función en el nuevo sistema de coordenadas, si el origen de coordenadas se ha trasladado (sin cambiar la dirección de los ejes) al punto $O'(3; -4)$.

151. Dada la función $f(x, y) = x^2 - y^2 - 16$, determinar la expresión de esta función en el nuevo sistema de coordenadas, si los ejes de coordenadas han girado un ángulo de $-45°$.

152. Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, determinar la expresión de esta función en el nuevo sistema de coordenadas, si los ejes de coordenadas han girado un ángulo α.

153. Hallar un punto, en el que, al trasladar el origen de coordenadas a él, la expresión de la función $f(x, y) = x^2 - 4y^2 - 6x + 8y + 3$, después de la transformación, no contenga términos de primer grado respecto a las nuevas variables.

154. Hallar un punto, en el que, al trasladar el origen de coordenadas a él, la expresión de la función $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y - 7$, después de la transformación, no contenga términos de primer grado respecto a las nuevas variables.

155. ¿Qué ángulo tienen que girar los ejes coordenados para que la expresión de la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 3$, después de la transformación, no contenga el término del producto de las nuevas variables?

156. ¿Qué ángulo tienen que girar los ejes coordenados para que la expresión de la función $f(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{3xy} + y^2$, después de la transformación, no contenga el término del producto de las nuevas variables?

§ 9. Concepto de ecuación de una línea. Determinación de la línea mediante una ecuación

Una igualdad de la forma $F(x, y) = 0$ se llama ecuación de dos variables x, y, si no se verifica para cualquier par de números x, y. También se dice que dos números $x = x_0$, $y = y_0$ satisfacen a una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, si al sustituir estos números en la ecuación, en lugar de las variables x e y, el primer miembro se convierte en cero.

Se llama ecuación de una línea dada (en el sistema de coordenadas asignado) a una ecuación de dos variables que satisfacen a las coordenadas de cualquier punto situado en la línea y que no satisfacen a las coordenadas de ningún otro punto situado fuera de ella.

En adelante, en lugar de la expresión «se ha dado la ecuación de la línea $F(x, y) = 0$» diremos, frecuentemente, de modo más abreviado: se ha dado la línea $F(x, y) = 0$.

Si se han dado dos líneas $F(x, y) = 0$ y $\Phi(x, y) = 0$, la solución común del sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

proporciona todos los puntos de su intersección. Con más exactitud, cada par de números que es solución común de este sistema determina uno de los puntos de intersección.

157. Dados los puntos*) $M_1(2; -2)$, $M_2(2; 2)$, $M_3(2; -1)$, $M_4(3; -3)$, $M_5(5; -5)$, $M_6(3; -2)$, determinar cuáles de estos puntos están en la línea definida por la ecuación $x + y = 0$ y cuáles no están en ella. ¿Qué línea define esta ecuación? (Representarla en el plano).

158. En la línea definida por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, hallar los puntos cuyas abscisas son iguales a los siguientes números: *a*) 0, *b*) -3, *c*) 5, *d*) 7; hallar en esta línea los puntos cuyas ordenadas son iguales a los siguientes números: *e*) 3, *f*) -5, *g*) -8. ¿Qué línea se define por esta ecuación? (Representarla en el plano).

159. Determinar las líneas que están dadas por las ecuaciones (construirlas en el plano):

1) $x - y = 0$; 2) $x + y = 0$; 3) $x - 2 = 0$;
4) $x + 3 = 0$; 5) $y - 5 = 0$; 6) $y + 2 = 0$;

---

*) En los casos en que no se nombre el sistema de coordenadas, se supone que es cartesiano rectangular.

7) $x=0$; 8) $y=0$; 9) $x^2-xy=0$; 10) $xy+y^2=0$;

11) $x^2-y^2=0$; 12) $xy=0$; 13) $y^2-9=0$;

14) $x^2-8x+15=0$; 15) $y^2+5y+4=0$;

16) $x^2y-7xy+10y=0$; 17) $y=|x|$; 18) $x=|y|$;

19) $y+|x|=0$; 20) $x+|y|=0$;

21) $y=|x-1|$; 22) $y=|x+2|$; 23) $x^2+y^2=16$;

24) $(x-2)^2+(y-1)^2=16$; 25) $(x+5)^2+(y-1)^2=9$;

26) $(x-1)^2+y^2=4$; 27) $x^2+(y+3)^2=1$;

28) $(x-3)^2+y^2=0$; 29) $x^2+2y^2=0$;

30) $2x^2+3y^2+5=0$; 31) $(x-2)^2+(y+3)^2+1=0$.

160. Dadas las líneas:

1) $x+y=0$; 2) $x-y=0$; 3) $x^2+y^2-36=0$;

4) $x^2+y^2-2x+y=0$; 5) $x^2+y^2+4x-6y-1=0$,

determinar cuáles de ellas pasan por el origen de coordenadas.

161. Dadas las líneas:

1) $x^2+y^2=49$; 2) $(x-3)^2+(y+4)^2=25$;

3) $(x+6)^2+(y-3)^2=25$; 4) $(x+5)^2+(y-4)^2=9$;

5) $x^2+y^2-12x+16y=0$; 6) $x^2+y^2-2x+8y+7=0$;

7) $x^2+y^2-6x+4y+12=0$,

hallar sus puntos de intersección: *a*) con el eje Ox; *b*) con el eje Oy.

162. Hallar los puntos de intersección de las dos líneas:

1) $x^2+y^2=8$, $x-y=0$;

2) $x^2+y^2-16x+4y+18=0$, $x+y=0$;

3) $x^2+y^2-2x+4y-3=0$, $x^2+y^2=25$;

4) $x^2+y^2-8x+10y+40=0$, $x^2+y^2=4$.

163. En un sistema de coordenadas polares se han dado los puntos

$$M_1\left(1;\ \frac{\pi}{3}\right),\quad M_2(2;\ 0),\quad M_3\left(2;\ \frac{\pi}{4}\right),$$

$$M_4\left(\sqrt{3};\ \frac{\pi}{6}\right)\ \text{y}\ M_5\left(1;\ \frac{2}{3}\pi\right).$$

Determinar cuáles de estos puntos están en la línea definida por la ecuación dada en coordenadas polares $\rho = 2\cos\theta$ y cuáles no lo están. ¿Qué línea está definida por esta ecuación? (Representarla gráficamente).

164. En la línea definida por la ecuación $\rho = \frac{3}{\cos\theta}$, hallar los puntos cuyos ángulos polares son iguales a los siguientes números: a) $\frac{\pi}{3}$, *b*) $-\frac{\pi}{3}$, *c*) 0, *d*) $\frac{\pi}{6}$. ¿Qué línea está definida por esta ecuación? (Construirla en el plano).

165. En la línea definida por la ecuación $\rho = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, hallar los puntos cuyos radios polares son iguales a los siguientes números: *a*) 1, *b*) 2, *c*) $\sqrt{2}$. ¿Qué línea está definida por esta ecuación? (Construirla en el plano).

166. Determinar las líneas que se determinan en coordenadas polares por las siguientes ecuaciones (construirlas en el plano):

$$1\ \rho = 5;\ \ 2)\ \theta = \frac{\pi}{3};\ \ 3)\ \theta = -\frac{\pi}{4};$$
$$4)\ \rho\cos\theta = 2;\ \ 5)\ \rho\operatorname{sen}\theta = 1;\ \ 6)\ \rho = 6\cos\theta;$$
$$7)\ \rho = 10\operatorname{sen}\theta;\ \ 8)\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2};\ \ 9)\ \operatorname{sen}\rho = \frac{1}{2}.$$

167. Construir en el plano las siguientes espirales de Arquímedes:

$$1)\ \rho = 2\theta;\ \ 2)\ \rho = 5\theta;\ \ 3)\ \rho = \frac{\theta}{\pi};\ \ 4)\ \rho = -\frac{\theta}{\pi}.$$

168. Construir en el plano las siguientes espirales hiperbólicas:

$$1)\ \rho = \frac{1}{\theta};\ \ 2)\ \rho = \frac{5}{\theta};\ \ 3)\ \rho = \frac{\pi}{\theta};\ \ 4)\ \rho = -\frac{\pi}{\theta}.$$

169. Construir en el plano las siguientes espirales logarítmicas:

$$1)\ \rho = 2^{\theta};\ \ \rho = \left(\frac{1}{2}\right)^{\theta}.$$

170. Determinar las longitudes de los segmentos intersecados por la espiral de Arquímedes

$$\rho = 3\theta$$

en el rayo que parte del polo con una inclinación al eje polar de un ángulo $\theta=\frac{\pi}{6}$. Hacer el dibujo.

171. En la espiral de Arquímedes

$$\rho=\frac{5}{\pi}\theta$$

se ha tomado un punto C cuyo radio polar es igual a 47. Determinar en cuántas partes divide esta espiral el radio polar del punto C. Hacer el dibujo.

172. En la espiral hiperbólica

$$\rho=\frac{6}{\theta}$$

hallar un punto P, cuyo radio polar sea igual a 12. Hacer el dibujo.

173. En la espiral logarítmica

$$\rho=3^{\theta}$$

hallar un punto Q, cuyo radio polar sea igual a 81. Hacer el dibujo.

§ 10. Deducción de las ecuaciones de líneas previamente dadas

En los problemas del párrafo anterior, la línea estaba definida mediante la ecuación dada. Aquí consideraremos problemas de carácter inverso: en cada uno de ellos la curva se define geométricamente y se pide hallar su ecuación.

E j e m p l o 1. Deducir en un sistema de coordenadas cartesiano rectangular la ecuación del lugar geométrico de los puntos, cuya suma de los cuadrados de distancias a dos puntos dados $A_1(-a;\ 0)$ y $A_2(a;\ 0)$ sea una cantidad constante, igual a $4a^2$.

S o l u c i ó n. Indiquemos con la letra M un punto arbitrario de la línea y con las letras x e y las coordenadas de este punto. Como el punto M puede ocupar cualquier posición en la línea, x e y son cantidades variables, llamadas coordenadas variables.

Escribamos simbólicamente la propiedad geométrica de esta línea:

$$(MA_1)^2+(MA_2)^2=4a^2. \qquad (1)$$

Al moverse el punto M, en esta igualdad pueden variar las longitudes MA_1 y MA_2. Sus expresiones mediante las coordenadas variables del punto M son:

$$MA_1=\sqrt{(x+a)^2+y^2}, \quad MA_2=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Sustituyendo estas expresiones obtenidas en la igualdad (1), hallamos la ecuación que relaciona las coordenadas x e y del punto M:

$$(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=4a^2. \tag{2}$$

Esta es la ecuación de la línea dada.

En efecto, para cada punto M situado en esta línea, se cumple la condición (1) y, por consiguiente, las coordenadas del punto M satisfacen a la ecuación (2); para cada punto M no situado en la línea, no se cumple la condición (1) y, por lo tanto, sus coordenadas no satisfacen a la ecuación (2).

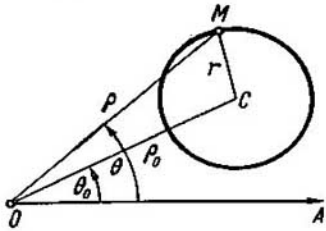

Fig. 7.

Así pues, el problema está resuelto. Se puede, sin embargo, simplificar la ecuación (2); abriendo paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos la ecuación de la línea dada en la forma

$$x^2+y^2=a^2.$$

Ahora se observa fácilmente que la línea dada es una circunferencia con el centro en el origen de coordenadas y con el radio igual a a.

Ejemplo 2. Deducir en el sistema de coordenadas polares la ecuación de la circunferencia con el centro C (ρ_0; θ_0) y con el radio r (fig. 7).

Solución. Designemos con la letra M un punto arbitrario de la circunferencia y con las letras ρ y θ sus coordenadas polares. Como el punto M puede ocupar en la circunferencia una posición arbitraria, las cantidades ρ y θ son variables. Del mismo modo que en el caso del sistema cartesiano, éstas se llaman coordenadas variables.

Todos los puntos de la circunferencia están a la distancia r del centro; escribamos esta condición simbólicamente:

$$CM=r. \tag{1}$$

Expresemos CM mediante las coordenadas variables del punto M (apliquemos el teorema de los cosenos; fig. 7):

$$CM=\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)}.$$

Sustituyendo la expresión obtenida en la igualdad (1), hallamos la ecuación que relaciona las coordenadas ρ, θ del punto M:

$$\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)}=r. \tag{2}$$

Esta es la ecuación de la circunferencia dada.

En efecto, para cada punto M situado en la circunferencia dada, se cumple la condición (1) y, por consiguiente, las coordenadas del punto M satisfacen a la ecuación (2); para cada punto M, no situado en la circunferencia dada, no se cumple la condición (1) y, por lo tanto, sus coordenadas no satisfacen a la ecuación (2).

Así pues, el problema queda resuelto. Se puede también simplificar un poco la ecuación obtenida y representarla sin radical

$$\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)=r^2-\rho_0^2.$$

174. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de los ejes coordenados.

175. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos que están a una distancia a del eje Oy.

176. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos que están a una distancia b del eje Ox.

177. Desde el punto P (6; −8) se han trazado todos los rayos posibles hasta su intersección con el eje de abscisas. Hallar la ecuación del lugar geométrico de sus puntos medios.

178. Desde el punto C (10; −3) se han trazado todos los rayos posibles hasta su intersección con el eje de ordenadas. Hallar la ecuación del lugar geométrico de sus puntos medios.

179. Hallar la ecuación de la trayectoria del punto que en cada momento de su movimiento equidista de los puntos:

1) A (3; 2) y B (2; 3); 2) A (5; −1) y B (1; −5);
3) A (5; −2) y B (−3; −2); 4) A (3; −1) y B (3; 5).

180. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos A $(-a;\ 0)$ y B $(a;\ 0)$ sea igual a c.

181. Deducir la ecuación de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio r.

182. Deducir la ecuación de la circunferencia con centro C $(\alpha;\ \beta)$ y radio r.

183. Dada la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=25$, hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de esta circunferencia cuyas longitudes sean iguales a 8.

184. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos A (−3; 0) y B (3; 0) sea igual a 50.

185. Los vértices de un cuadrado son los puntos $A\ (a;\ a)$, $B\ (-a;\ a)$, $C\ (-a;\ -a)$ y $D\ (a;\ -a)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los lados de este cuadrado sea una cantidad constante, igual a $6a^2$.

186. Por el origen de coordenadas se han trazado todas las cuerdas posibles de la circunferencia $(x-8)^2+y^2=64$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas.

187. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos en que la suma de sus distancias a dos puntos dados $F_1\ (-3;\ 0)$ y $F_2\ (3;\ 0)$ sea una cantidad constante, igual a 10.

188. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos en que la diferencia de sus distancias a dos puntos dados $F_1\ (-5;\ 0)$ y $F_2\ (5;\ 0)$ sea una cantidad constante, igual a 6.

189. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos, cuyas distancias a un punto dado $F\ (3;\ 0)$ sean iguales a sus distancias a la recta $x+3=0$.

190. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos en que la suma de sus distancias a dos puntos dados $F_1\ (-c;\ 0)$ y $F_2\ (c;\ 0)$ sea una cantidad constante, igual a $2a$. Este lugar geométrico se llama elipse y los puntos F_1 y F_2 se llaman focos de la elipse.

Demostrar que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

donde $b^2=a^2-c^2$.

191. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos en que la diferencia de sus distancias a dos puntos dados $F_1\ (-c;\ 0)$ y $F_2\ (c;\ 0)$ sea una cantidad constante, igual a $2a$. Este lugar geométrico se llama hipérbola y los puntos F_1 y F_2 se llaman focos de la hipérbola.

Demostrar que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

donde $b^2=c^2-a^2$.

192. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos para los cuales sus distancias a un punto dado $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ sean iguales a sus distancias a una recta dada

$x = -\frac{p}{2}$. Este lugar geométrico se llama parábola, el punto F se llama foco de la parábola y la recta dada, directriz.

193. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos para los cuales la razón de sus distancias a un punto dado $F(-4;\ 0)$ respecto a sus distancias a una recta dada $4x + 25 = 0$ sea igual a $\frac{4}{5}$.

194. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos para los cuales la razón de sus distancias a un punto dado $F(-5;\ 0)$ respecto a sus distancias a una recta dada $5x + 16 = 0$ sea igual a $\frac{5}{4}$.

195. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos para los cuales sus distancias mínimas a dos circunferencias dadas $(x+3)^2 + y^2 = 1$, $(x-3)^2 + y^2 = 81$ sean iguales entre sí.

196. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos para los cuales sus distancias mínimas a dos circunferencias dadas $(x+10)^2 + y^2 = 289$, $(x-10)^2 + y^2 = 1$ sean iguales entre sí.

197. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos para los cuales sus distancias mínimas a una circunferencia dada $(x-5)^2 + y^2 = 9$ y a una recta dada $x + 2 = 0$ sean iguales entre sí.

198. Una recta es perpendicular al eje polar e intercepta en él un segmento igual a 3. Hallar la ecuación de esta recta en coordenadas polares.

199. Un rayo parte del polo con una inclinación al eje polar de un ángulo $\frac{\pi}{3}$. Hallar la ecuación de este rayo en coordenadas polares.

200. Una recta pasa por el polo con una inclinación al eje polar de un ángulo de 45°. Hallar la ecuación de esta recta en coordenadas polares.

201. Hallar, en coordenadas polares, el lugar geométrico de los puntos, cuyas distancias al eje polar son iguales a 5.

202. Una circunferencia de radio $R = 5$ pasa por el polo y su centro está en el eje polar. Hallar la ecuación de esta circunferencia en coordenadas polares.

203. Una circunferencia de radio $R = 3$ es tangente al eje polar en el polo. Hallar la ecuación de esta circunferencia en coordenadas polares.

§ 11. Ecuaciones paramétricas de una línea

Designemos por las letras x e y las coordenadas de un punto M; consideremos dos funciones del argumento t:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Al variar t, generalmente, también varían las cantidades x e y y, por consiguiente, se desplaza el punto M. Las igualdades (1) se llaman ecuaciones paramétricas de la línea, que es la trayectoria del punto M; el argumento t recibe el nombre de parámetro. Si de las igualdades (1) se puede eliminar el parámetro t, obtendremos la ecuación de la trayectoria del punto M en la forma

$$F(x, y) = 0.$$

204. Los extremos de una varilla AB resbalan sobre los ejes de coordenadas. El punto M divide la varilla en

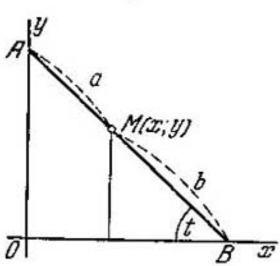

Fig. 8.

dos partes $AM = a$ y $BM = b$. Deducir las ecuaciones paramétricas del punto M, tomando por parámetro el ángulo $t = \measuredangle OBA$ (fig. 8). Eliminar después el parámetro t y hallar la ecuación de la trayectoria del punto M en la forma $F(x, y) = 0$.

205. La trayectoria del punto M es una elipse, cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (véase el problema 190). Deducir las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del punto M, tomando por parámetro t el ángulo que forma el segmento $\overline{OM}$ con el eje Ox.

206. La trayectoria del punto M es una hipérbola, cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (véase el problema 191). Deducir las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del punto M, tomando por parámetro t el ángulo que forma el segmento $\overline{OM}$ con el eje Ox.

207. La trayectoria del punto M es una parábola, cuya ecuación es $y^2 = 2px$ (véase el problema 192). Deducir las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del punto M, tomando por parámetro t:

1) la ordenada del punto M;

2) el ángulo que forma el segmento $\overline{OM}$ con el eje Ox;

3) el ángulo que forma el segmento $\overline{FM}$ con el eje Ox, siendo el punto F el foco de la parábola.

208. Dadas las ecuaciones polares de las siguientes líneas:

1) $\rho = 2R\cos\theta$; 2) $\rho = 2R\,\mathrm{sen}\,\theta$; 3) $\rho = 2p\dfrac{\cos\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}$, hallar

las ecuaciones paramétricas de estas líneas en coordenadas cartesianas rectangulares, haciendo coincidir el semieje positivo de abscisas con el eje polar y tomando por parámetro el ángulo polar.

209. Dadas las ecuaciones paramétricas de las líneas

$$1)\ \left.\begin{aligned} x &= t^2 - 2t + 1,\\ y &= t - 1;\end{aligned}\right\}\quad 2)\ \left.\begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= a\,\mathrm{sen}\,t;\end{aligned}\right\}\quad 3)\ \begin{aligned} x &= a\sec t,\\ y &= b\,\mathrm{tg}\,t;\end{aligned}$$

$$4)\ \left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),\\ y &= \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right);\end{aligned}\right\}\quad 5)\ \left.\begin{aligned} x &= 2R\cos^2 t,\\ y &= R\,\mathrm{sen}\,2t;\end{aligned}\right\}$$

$$6)\ \left.\begin{aligned} x &= R\,\mathrm{sen}\,2t,\\ y &= 2R\,\mathrm{sen}^2 t;\end{aligned}\right\}\quad 7)\ \left.\begin{aligned} x &= 2p\,\mathrm{ctg}^2 t,\\ y &= 2p\,\mathrm{ctg}\,t;\end{aligned}\right\}$$

eliminando el parámetro t, hallar las ecuaciones de estas líneas de la forma

$$F(x,\ y) = 0.$$

III

Capítulo

LINEAS DE PRIMER ORDEN

§ 12. Forma general de la ecuación de la recta. Ecuación de la recta en función del coeficiente angular. Angulo de dos rectas. Condición de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas

En coordenadas cartesianas, cada recta se determina por una ecuación de primer grado y, recíprocamente, cada ecuación de primer grado determina una recta.

La ecuación de la forma

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

se llama ecuación general de la recta.

El angula α, definido como muestra la fig. 9, se llama ángulo de inclinación de la recta respecto al eje Ox. La tangente del ángulo de

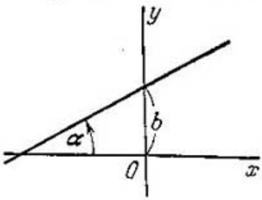

Fig. 9.

inclinación de la recta respecto al eje Ox se llama coeficiente angular de la recta y se designa ordinariamente con la letra k:

$$k=\operatorname{tg}\alpha.$$

La ecuación $y = kx + b$ se llama ecuación de la recta en función del coeficiente angular; k es el coeficiente angular y b es la magnitud del segmento que intercepta la recta en el eje Oy desde el origen de coordenadas.

Si la ecuación de la recta se da en su forma general

$$Ax+By+C=0,$$

su coeficiente angular se determina por la fórmula

$$k=-\frac{A}{B}.$$

La ecuación $y - y_0 = k(x - x_0)$ es la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0(x_0;\ y_0)$ y tiene el coeficiente angular k.

Si la recta pasa por los puntos $M_1(x_1;\ y_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2)$ su coeficiente angular se determina por la fórmula

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La ecuación

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$M_1(x_1;\ y_1) \text{ y } M_2(x_2;\ y_2).$$

Si se conocen los coeficientes angulares de dos rectas k_1 y k_2, uno de los ángulos φ formado por estas rectas se determina por la fórmula

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

El criterio de paralelismo de dos rectas es la igualdad de sus coeficientes angulares

$$k_1 = k_2.$$

El criterio de perpendicularidad de dos rectas es la relación

$$k_1 k_2 = -1 \text{ o } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Es decir, los coeficientes angulares de dos rectas perpendiculares son recíprocos en valor absoluto y contrarios de signo.

210. Determinar cuáles de los puntos $M_1(3;\ 1)$, $M_2(2;\ 3)$, $M_3(6;\ 3)$, $M_4(-3;\ -3)$, $M_5(3;\ -1)$, $M_6(-2;\ 1)$ están situados en la recta

$$2x - 3y - 3 = 0$$

y cuáles no lo están.

211. Los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 están situados en la recta

$$3x - 2y - 6 = 0;$$

sus abscisas son iguales respectivamente a los números: 4, 0, 2, -2 y -6. Determinar las ordenadas de estos puntos.

212. Los puntos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 y Q_5 están situados en la recta

$$x - 3y + 2 = 0;$$

sus ordenadas son iguales respectivamente a los números: 1, 0, 2, -1, 3. Determinar las abscisas de estos puntos.

213. Determinar los puntos de intersección de la recta

$$2x - 3y - 12 = 0$$

con los ejes coordenados y construir esta recta en el plano.

214. Hallar el punto de intersección de dos rectas

$$3x - 4y - 29 = 0, \quad 2x + 5y + 19 = 0.$$

215. Los lados AB, BC y AC del triángulo ABC son dados mediante sus ecuaciones correspondientes *)

$$4x + 3y - 5 = 0, \; x - 3y + 10 = 0, \; x - 2 = 0.$$

Determinar las coordenadas de sus vértices.

216. Dadas las ecuaciones de dos lados de un paralelogramo

$$8x + 3y + 1 = 0, \; 2x + y - 1 = 0$$

y la ecuación de una de sus diagonales

$$3x + 2y + 3 = 0,$$

determinar las coordenadas de los vértices de este paralelogramo.

217. Los lados de un triángulo están en las rectas

$$x + 5y - 7 = 0, \quad 3x - 2y - 4 = 0, \quad 7x + y + 19 = 0.$$

Calcular su área S.

218. El área de un triángulo es $S = 8$ unidades cuadradas; dos de sus vértices son los puntos A (1; −2), B (2; 3) y el tercer vértice C está en la recta

$$2x + y - 2 = 0.$$

Determinar las coordenadas del vértice C.

219. El área de un triángulo es $S = 1{,}5$ unidades cuadradas; dos de sus vértices son los puntos A (2; −3) y B (3; −2) y el centro de gravedad de este triángulo está en la recta

$$3x - y - 8 = 0.$$

Determinar las coordenadas del tercer vértice C.

220. Hallar la ecuación de la recta y trazar ésta en el plano, conociendo su coeficiente angular k y el segmen-

---

*) Aquí y en lo sucesivo, la frase «las ecuaciones de los lados» tiene el sentido de las ecuaciones de las rectas en las que están los lados.

to b que ella intercepta en el eje Oy;

$$1)\ k=\frac{2}{3},\quad b=3;\quad 2)\ k=3,\quad b=0;\quad 3)\ k=0,\quad b=-2;$$

$$4)\ k=-\frac{3}{4},\quad b=3;\quad 5)\ k=-2,\quad b=-5;$$

$$6)\ k=-\frac{1}{3},\quad b=\frac{2}{3}.$$

221. Determinar el coeficiente angular k y el segmento b que intercepta en el eje Oy cada una de las rectas:

$$1)\ 5x-y+3=0;\ 2)\ 2x+3y-6=0;$$
$$3)\ 5x+3y+2=0;\ 4)\ 3x+2y=0;\ 5)\ y-3=0.$$

222. Se da la recta

$$5x+3y-3=0.$$

Determinar el coeficiente angular k de la recta:

1) paralela a la recta dada;

2) perpendicular a la recta dada.

223. Se da la recta

$$2x+3y+4=0.$$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0\,(2;\ 1)$:

1) paralela a la recta dada;

2) perpendicular a la recta dada.

224. Dadas las ecuaciones de dos lados de un rectángulo

$$2x-3y+5=0;\ 3x+2y-7=0$$

y uno de sus vértices $A\ (2;\ -3)$, hallar las ecuaciones de los otros dos lados de este rectángulo.

225. Dadas las ecuaciones de dos lados de un rectángulo

$$x-2y=0,\ x-2y+15=0$$

y la ecuación de una de sus diagonales

$$7x+y-15=0,$$

hallar los vértices del rectángulo.

226. Hallar la proyección del punto $P\ (-6;\ 4)$ sobre la recta

$$4x-5y+3=0.$$

227. Hallar un punto Q simétrico al punto $P\ (-5;\ 13)$ relativo a la recta

$$2x-3y-3=0.$$

228. Hallar en cada uno de los casos siguientes la ecuación de la recta paralela a las dos rectas dadas y que pasa por el medio de ellas:

1) $3x - 2y - 1 = 0$, $3x - 2y - 13 = 0$; 2) $5x + y + 3 = 0$, $5x + y - 17 = 0$;

3) $2x + 3y - 6 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$; 4) $5x + 7y + 15 = 0$, $5x + 7y + 3 = 0$;

5) $3x - 15y - 1 = 0$, $x - 5y - 2 = 0$.

229. Calcular el coeficiente angular k de la recta que pasa por dos puntos dados:

a) $M_1(2; -5)$, $M_2(3; 2)$; *b*) $P(-3; 1)$, $Q(7; 8)$; *c*) $A(5; -3)$, $B(-1; 6)$.

230. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los vértices del triángulo $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; -2)$ y son paralelas a los lados opuestos.

231. Dados los puntos medios de los lados de un triángulo:

$$M_1(2; 1),\quad M_2(5; 3) \text{ y } M_3(3; -4),$$

hallar las ecuaciones de sus lados.

232. Dados dos puntos: $P(2; 3)$ y $Q(-1; 0)$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto Q, perpendicular al segmento $\overline{PQ}$.

233. Hallar la ecuación de la recta, si el punto $P(2; 3)$ es la base de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a esta recta.

234. Dados los vértices de un triángulo $M_1(2; 1)$, $M_2(-1; -1)$ y $M_3(3; 2)$, hallar las ecuaciones de sus alturas.

235. Los lados de un triángulo se dan por sus ecuaciones

$$4x - y - 7 = 0,\ x + 3y - 31 = 0,\ x + 5y - 7 = 0.$$

Hallar el punto de intersección de sus alturas.

236. Dados los vértices de un triángulo $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ y $C(3; 5)$, hallar la ecuación de la perpendicular bajada desde el vértice A a la mediana, trazada desde el vértice B.

237. Dados los vértices de un triángulo $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ y $C(5; 7)$, hallar la ecuación de la perpendicular bajada desde el vértice C a la bisectriz del ángulo interno del vértice A.

238. Hallar las ecuaciones de los lados y de las medianas del triángulo que tiene los vértices $A(3;\ 2)$, $B(5;\ -2)$, $C(1;\ 0)$.

239. Por los puntos $M_1(-1;\ 2)$ y $M_2(2;\ 3)$ se ha trazado una recta. Determinar los puntos de intersección de esta recta con los ejes coordenados.

240. Demostrar que la condición, según la cual tres puntos $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ y $M_3(x_3;\ y_3)$ están situados en una recta, puede escribirse en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

241. Demostrar que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $M_1(x_1;\ y_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2)$, puede escribirse en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

242. Dados los vértices consecutivos de un cuadrilátero convexo $A(-3;\ 1)$, $B(3;\ 9)$, $C(7;\ 6)$ y $D(-2;\ -6)$, determinar el punto de intersección de sus diagonales.

243. Dados dos vértices adyacentes $A(-3;\ -1)$ y $B(2;\ 2)$ de un paralelogramo $ABCD$ y el punto $Q(3;\ 0)$ de intersección de sus diagonales, hallar las ecuaciones de sus lados.

244. Se dan las ecuaciones de dos lados de un rectángulo $5x+2y-7=0$, $5x+2y-36=0$ y la ecuación de una de sus diagonales

$$3x+7y-10=0.$$

Hallar las ecuaciones de los otros lados y de la otra diagonal.

245. Dados los vértices de un triángulo $A(1;\ -2)$, $B(5;\ 4)$ y $C(-2;\ 0)$, hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interno y externo del vértice A.

246. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3;\ 5)$ a igual distancia de los puntos $A(-7;\ 3)$ y $B(11;\ -15)$.

247. Hallar la proyección del punto $P(-8;\ 12)$ sobre la recta que pasa por los puntos $A(2;\ -3)$ y $B(-5;\ 1)$.

248. Hallar un punto M_1, simétrico al punto M_2 $(8; -9)$, relativo a la recta que pasa por los puntos A $(3; -4)$ y B $(-1; -2)$.

249. Hallar, en el eje de abscisas, un punto P de manera que la suma de sus distancias a los puntos M $(1; 2)$ y N $(3; 4)$ sea mínima.

250. Hallar, en el eje de ordenadas, un punto P de manera que la diferencia de sus distancias a los puntos M $(-3; 2)$ y N $(2; 5)$ sea máxima.

251. Hallar en la recta $2x - y - 5 = 0$ un punto P de manera que la suma de sus distancias a los puntos A $(-7; 1)$, B $(-5; 5)$ sea mínima.

252. Hallar en la recta $3x - y - 1 = 0$ un punto P de manera que la diferencia de sus distancias a los puntos A $(4; 1)$ y B $(0; 4)$ sea máxima.

253. Determinar el ángulo φ formado por las rectas

1) $5x - y + 7 = 0$, $\quad 3x + 2y = 0$;
2) $3x - 2y + 7 = 0$, $\quad 2x + 3y - 3 = 0$;
3) $x - 2y - 4 = 0$, $\quad 2x - 4y + 3 = 0$;
4) $3x + 2y - 1 = 0$, $\quad 5x - 2y + 3 = 0$.

254. Dada la recta

$$2x + 3y + 4 = 0,$$

hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto M_0 $(2; 1)$ y forma un ángulo de 45° con la recta dada.

255. El punto A $(-4; 5)$ es un vértice del cuadrado cuya diagonal está en la recta

$$7x - y + 8 = 0.$$

Hallar las ecuaciones de los lados y de la segunda diagonal de este cuadrado.

256. Dados dos vértices opuestos de un cuadrado A $(-1; 3)$ y C $(6; 2)$, hallar las ecuaciones de sus lados.

257. El punto E $(1; -1)$ es el centro de un cuadrado, uno de cuyos lados está en la recta

$$x - 2y + 12 = 0.$$

Hallar las ecuaciones de las rectas en las que están los otros lados de este cuadrado.

258. Desde el punto M_0 $(-2; 3)$ se ha dirigido hacia el eje Ox un rayo de luz con una inclinación de un ángulo α. Se sabe que $\operatorname{tg} \alpha = 3$. El rayo se ha reflejado del eje Ox.

Hallar las ecuaciones de las rectas en la que están los rayos incidente y reflejado.

259. Un rayo de luz va dirigido por la recta $x - 2y + 5 = 0$. Al llegar a la recta $3x - 2y + 7 = 0$ se ha reflejado de ella. Hallar la ecuación de la recta en la que está el rayo reflejado.

260. Dadas las ecuaciones de los lados de un triángulo

$$3x + 4y - 1 = 0,\ x - 7y - 17 = 0,\ 7x + y + 31 = 0,$$

demostrar que este triángulo es isósceles. Resolver este problema comparando los ángulos de este triángulo.

261. Demostrar que la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_1(x_1;\ y_1)$ y es paralela a la recta

$$Ax + By + C = 0,$$

puede escribirse en la forma siguiente:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

262. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_1(2;\ -3)$ y es paralela a la recta:

$$1)\ 3x - 7y + 3 = 0;\ 2)\ x + 9y - 11 = 0;$$
$$3)\ 16x - 24y - 7 = 0;\ 4)\ 2x + 3 = 0;\ 5)\ 3y - 1 = 0.$$

Resolver el problema sin calcular los coeficientes angulares de las rectas dadas.

N o t a. Aplicar el resultado del problema anterior.

263. Demostrar que la condición de perpendicularidad de las rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

puede escribirse en la forma siguiente:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

264. Determinar qué pares de rectas son perpendiculares:

1) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$;
2) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;
3) $6x - 15y + 7 = 0$, $10x + 4y - 3 = 0$,
4) $9x - 12y + 5 = 0$, $8x + 6y - 13 = 0$;
5) $7x - 2y + 1 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$;
6) $5x - 7y + 3 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$.

Resolver el problema sin calcular los coeficientes angulares de las rectas dadas.

Nota. Aplicar la condición de perpendicularidad de las rectas deducida en el problema 263.

265. Demostrar que la fórmula para determinar el ángulo φ formado por las rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

puede escribirse en la siguiente forma:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} .$$

266. Determinar el ángulo φ formado por las dos rectas:

1) $3x - y + 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$; 2) $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} - 5 = 0$, $(3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 7 = 0$; 3) $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0$, $x\sqrt{6} - 3y + 3 = 0$.

Resolver el problema sin calcular los coeficientes angulares de las rectas dadas.

Nota. Aplicar la fórmula obtenida en el problema 265 para determinar el ángulo formado por dos rectas.

267. Dados dos vértices de un triángulo $M_1(-10; 2)$ y $M_2(6; 4)$, cuyas alturas se cortan en el punto $N(5; 2)$, determinar las coordenadas del tercer vértice M_3.

268. Dados dos vértices $A(3; -1)$ y $B(5; 7)$ del triángulo ABC y el punto $N(4; -1)$ de intersección de sus alturas, hallar las ecuaciones de los lados de este triángulo.

269. En el triángulo ABC se dan: la ecuación del lado AB, que es $5x - 3y + 2 = 0$, y las ecuaciones de las alturas AN y BN, que son respectivamente $4x - 3y + 1 = 0$ y $7x + 2y - 22 = 0$. Hallar las ecuaciones de los otros dos lados y de la tercera altura.

270. Hallar las ecuaciones de los lados del triángulo ABC, si se dan uno de sus vértices $A(1; 3)$ y las ecuaciones de dos medianas

$$x - 2y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad y - 1 = 0.$$

271. Hallar las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se dan uno de sus vértices $B(-4; -5)$ y las ecuaciones de dos alturas

$$5x + 3y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad 3x + 8y + 13 = 0.$$

272. Hallar las ecuaciones de los lados de un triángulo, conociendo uno de los vértices A (4; —1) y las ecuaciones de dos bisectrices

$$x - 1 = 0 \quad \text{y} \quad x - y - 1 = 0.$$

273. Hallar las ecuaciones de los lados de un triángulo, conociendo uno de sus vértices B (2; 6) y las ecuaciones de la altura $x - 7y + 15 = 0$ y de la bisectriz $7x + y + 5 = 0$, trazadas desde uno de sus vértices.

274. Hallar las ecuaciones de los lados de un triángulo, conociendo uno de sus vértices B (2; —1) y las ecuaciones de la altura

$$3x - 4y + 27 = 0$$

y de la bisectriz

$$x + 2y - 5 = 0,$$

trazadas desde diferentes vértices.

275. Hallar las ecuaciones de los lados de un triángulo, conociendo uno de sus vértices C (4; —1) y las ecuaciones de la altura

$$2x - 3y + 12 = 0$$

y de la mediana

$$2x + 3y = 0,$$

trazadas desde un vértice.

276. Hallar las ecuaciones de los lados de un triángulo, conociendo uno de sus vértices B (2; —7) y las ecuaciones de la alura

$$3x + y + 11 = 0$$

y de la mediana

$$x + 2y + 7 = 0,$$

trazadas desde diferentes vértices.

277. Hallar las ecuaciones de los lados de un triángulo, conociendo uno de sus vértices C (4; 3) y las ecuaciones de la bisectriz

$$x + 2y - 5 = 0$$

y de la mediana

$$4x + 13y - 10 = 0,$$

trazadas desde un vértice

278. Hallar las ecuaciones de los lados de un triángulo, conociendo uno de sus vértices $A(3; -1)$ y las ecuaciones de la bisectriz

$$x - 4y + 10 = 0$$

y de la mediana

$$6x + 10y - 59 = 0,$$

trazadas desde diferentes vértices.

279. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y forma con las rectas

$$x - y + 12 = 0, \quad 2x + y + 9 = 0$$

un triángulo, cuyo área es igual a 1,5 unidades cuadradas.

280. Entre las rectas que pasan por el punto $P(3; 0)$ hallar una cuyo segmento, comprendido entre las rectas

$$2x - y - 2 = 0, \quad x + y + 3 = 0,$$

sea dividido por la mitad en el punto P.

281. Por el punto $P(-3; -1)$ se han trazado todas las rectas posibles. Demostrar que el segmento de cada una de ellas, comprendido entre las rectas

$$x - 2y - 3 = 0, \quad x - 2y + 5 = 0,$$

se divide por la mitad en el punto P.

282. Por el punto $P(0; 1)$ se han trazado todas las rectas posibles. Demostrar que entre ellas no hay una recta cuyo segmento, comprendido entre las rectas

$$x - 2y - 3 = 0, \quad x - 2y + 17 = 0,$$

sea dividido por la mitad en el punto P.

283. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas, sabiendo que la longitud de su segmento, comprendido entre las rectas

$$2x - y + 5 = 0, \quad 2x - y + 10 = 0,$$

es igual a $\sqrt{10}$.

284. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $C(-5; 4)$, sabiendo que la longitud de su segmento, comprendido entre las rectas

$$x + 2y + 1 = 0, \quad x + 2y - 1 = 0,$$

es igual a 5.

§ 13. Ecuaciones incompletas de la recta. Discusión de las ecuaciones simultáneas de dos y de tres rectas. Ecuación «segmentaria» de la recta

Si en la ecuación de la recta, dada en su forma general

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

se anula uno o dos de los tres coeficientes (incluyendo el término independiente), la ecuación se llama incompleta. Pueden darse los casos siguientes:

1) $C = 0$; la ecuación es de la forma $Ax + By = 0$ y determina una recta que pasa por el origen de coordenadas.

2) $B = 0$ $(A \neq 0)$; la ecuación es de la forma $Ax + C = 0$ y determina una recta perpendicular al eje Ox. Esta ecuación se puede representar de la forma $x = a$, en la que $a = -\frac{C}{A}$ es la magnitud del segmento que intercepta la recta en el eje Ox, partiendo del origen de coordenadas.

3) $B = 0$, $C = 0$ $(A \neq 0)$; la ecuación puede representarse en la forma $x = 0$ y determina el eje de ordenadas.

4) $A = 0$ $(B \neq 0)$; la ecuación es de la forma $By + C = 0$ y determina una recta perpendicular al eje Oy. Esta ecuación se puede representar en la forma $y = b$, en la que $b = -\frac{C}{B}$ es la magnitud del segmento que la recta intercepta en el eje Oy, partiendo del origen de coordenadas.

5) $A = 0$, $C = 0$ $(B \neq 0)$; la ecuación se puede representar en la forma $y = 0$ y determina el eje de abscisas.

Si ninguno de los coeficientes de la ecuación (1) es igual a cero, ésta puede reducirse a la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2}$$

en la que $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$ son las magnitudes de los segmentos que intercepta la recta en los ejes coordenados.

La ecuación (2) se llama ecuación «segmentaria» de la recta.

Si se dan dos rectas mediante las ecuaciones

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

se pueden presentar los tres casos siguientes:

a) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, las rectas tienen un punto común;

b) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, las rectas son paralelas;

c) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, las rectas coinciden, es decir, las dos ecuaciones determinan una misma recta.

285. Determinar para qué valor de a la recta

$$(a+2)\,x+(a^2-9)\,y+3a^2-8a+5=0$$

1) es paralela al eje de abscisas;
2) es paralela al eje de ordenadas;
3) pasa por el origen de coordenadas.

Escribir en cada caso la ecuación de la recta.

286. Determinar para qué valores de m y n la recta

$$(m+2n-3)\,x+(2m-n+1)\,y+6m+9=0$$

es paralela al eje de abscisas e intercepta en el eje de ordenadas un segmento igual a -3 (partiendo del origen de coordenadas). Escribir la ecuación de esta recta.

287. Determinar para qué valores de m y n la recta

$$(2m-n+5)\,x+(m+3n-2)\,y+2m+7n+19=0$$

es paralela al eje de ordenadas e intercepta en el eje de abscisas un segmento igual a $+5$ (partiendo del origen de coordenadas). Escribir la ecuación de esta recta.

288. Demostrar que, en los casos siguientes, se cortan las dos rectas dadas y hallar el punto de su intersección:

1) $x+5y-35=0,\quad 3x+2y-27=0;$
2) $14x-9y-24=0,\quad 7x-2y-17=0;$
3) $12x+15y-8=0,\quad 16x+9y-7=0;$
4) $8x-33y-19=0,\quad 12x+55y-19=0;$
5) $3x+5=0,\quad y-2=0.$

289. Demostrar que, en los casos siguientes, son paralelas las dos rectas dadas:

1) $3x+5y-4=0,\quad 6x+10y+7=0;$
2) $2x-4y+3=0,\quad x-2y=0;$
3) $2x-1=0,\quad x+3=0;$
4) $y+3=0,\quad 5y-7=0.$

290. Demostrar que, en los casos siguientes, coinciden las dos rectas dadas:

1) $3x+5y-4=0,\quad 6x+10y-8=0;$
2) $x-y\sqrt{2}=0,\quad x\sqrt{2}-2y=0;$
3) $x\sqrt{3}-1=0,\quad 3x-\sqrt{3}=0.$

291. Determinar para qué valores de a y b las dos rectas

$$ax - 2y - 1 = 0, \quad 6x - 4y - b = 0$$

1) tienen un punto común; 2) son paralelas; 3) coinciden.

292. Determinar para qué valores de m y n las dos rectas

$$mx + 8y + n = 0, \quad 2x + my - 1 = 0$$

1) son paralelas; 2) coinciden; 3) son perpendiculares.

293. Determinar para qué valor de m las dos rectas

$$(m - 1)\,x + my - 5 = 0, \quad mx + (2m - 1)\,y + 7 = 0$$

se cortan en un punto situado en el eje de abscisas.

294. Determinar para qué valor de m las dos rectas

$$mx + (2m + 3)\,y + m + 6 = 0,$$
$$(2m + 1)\,x + (m - 1)\,y + m - 2 = 0$$

se cortan en un punto situado en el eje de ordenadas.

295. Verificar si se cortan o no en un punto las tres rectas en los casos siguientes:

1) $2x + 3y - 1 = 0$, $4x - 5y + 5 = 0$, $3x - y + 2 = 0$;
2) $3x - y + 3 = 0$, $5x + 3y - 7 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$;
3) $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 17 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$.

296. Demostrar que si las tres rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0,$$

se cortan en un punto, entonces

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

297. Demostrar que si

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

las tres rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0,$$

se cortan en un punto o son paralelas.

298. Determinar para qué valor de a las tres rectas $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $ax + y - 13 = 0$

se cortan en un punto.

299. Se dan las rectas:

$$1)\ 2x + 3y - 6 = 0; \quad 2)\ 4x - 3y + 24 = 0,$$
$$3)\ 2x + 3y - 9 = 0; \quad 4)\ 3x - 5y - 2 = 0;$$
$$5)\ 5x + 2y - 1 = 0.$$

Hallar sus ecuaciones «segmentarias» y trazar estas rectas en el plano.

300. Calcular el área del triángulo que forma la recta

$$3x - 4y - 12 = 0$$

con los ejes coordenados.

301. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_1\ (3;\ -7)$ e intercepta en los ejes coordenados segmentos iguales y diferentes de cero (cada segmento se considera dirigido a partir del origen de coordenadas).

302. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\ (2;\ 3)$ e intercepta en los ejes coordenados segmentos de igual longitud, considerando cada segmento desde el origen de coordenadas.

303. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $C\ (1;\ 1)$ e intercepta en el ángulo coordenado un triángulo de área igual a 2 unidades cuadradas.

304. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $B\ (5;\ -5)$ e intercepta en el ángulo coordenado un triángulo de área igual a 50 unidades cuadradas.

305. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\ (8;\ 6)$ e intercepta en el ángulo coordenado un triángulo de área igual a 12 unidades cuadradas.

306. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\ (12;\ 6)$ e intercepta en el ángulo coordenado un triángulo de área igual a 150 unidades cuadradas.

307. Por el punto $M\ (4;\ 3)$ se ha trazado una recta que intercepta en el ángulo coordenado un triángulo de área igual a 3 unidades cuadradas. Determinar los puntos de intersección de esta recta con los ejes coordenados.

308. Por el punto $M_1\ (x_1;\ y_1)$, siendo $x_1 y_1 > 0$, se ha trazado una recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

que intercepta en el ángulo coordenado un triángulo de área igual a S. Determinar la relación entre las cantidades x_1, y_1 y S para que los segmentos a y b tengan el mismo signo.

§ 14. Ecuación normal de la recta. Problema del cálculo de la distancia de un punto a una recta

Dada una recta en el plano xOy, tracemos por el origen de coordenadas una perpendicular a la recta dada y llamémosla normal. Señalemos por P el punto de intersección de la normal con la recta dada y establezcamos la dirección positiva de la normal del punto O al punto P.

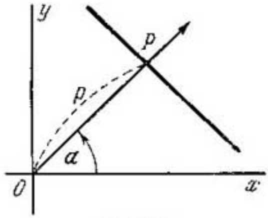

Fig. 10.

Si α es el ángulo polar de la normal y p la longitud del segmento $\overline{OP}$ (fig. 10), la ecuación de la recta dada se puede escribir en la forma

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \operatorname{sen}\alpha - p = 0;$$

la ecuación de esta forma se llama normal.

Dados una recta cualquiera y un punto arbitrario M^*; designemos por d la distancia del punto M^* a la recta dada. Se llama «desviación» δ del punto M^* de la recta (o distancia dirigida) al número $+d$, si el punto dado y el origen de coordenadas están situados a diversos lados de la recta dada, y $-d$, si el punto dado y el origen de coordenadas están situados a un mismo lado de la recta dada. (Para los puntos que están en la misma recta, $\delta = 0$.) Si se dan las coordenadas x^*, y^* del punto M^* y la ecuación normal de la recta $x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p = 0$, la desviación δ del punto M^* de esta recta se puede calcular por la fórmula

$$\delta = x^*\cos\alpha + y^*\operatorname{sen}\alpha - p.$$

De esta manera, para hallar la desviación de cualquier punto M^* de la recta dada es necesario sustituir en el primer miembro de la ecuación normal de esta recta las coordenadas variables por las coordenadas del punto M^*. El número obtenido es igual a la desviación buscada.

Para hallar la distancia d del punto a la recta es suficiente calcular la desviación y tomar su módulo:

$$d = |\delta|.$$

Si se da la ecuación general de la recta $Ax+By+C=0$, para reducirla a la forma normal es necesario multiplicar todos los términos de esta ecuación por el factor normalizador μ, que se define por la fórmula

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

El signo del factor normalizador tiene que ser contrario al signo del término independiente de la ecuación que se normaliza.

309. Determinar cuáles de las ecuaciones siguientes de las rectas son normales:

$$1)\ \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0;\quad 2)\ \frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0;$$

$$3)\ \frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0;\quad 4)\ -\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0;$$

$$5)\ -x+2=0;\ 6)\ x-2=0;\ 7)\ x+2=0;\ 8)\ -y-2=0.$$

310. Reducir, en los casos siguientes, la ecuación general de la recta a la forma normal

$$1)\ 4x-3y-10=0;\ 2)\ \frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0;$$

$$3)\ 12x-5y+13=0;\ 4)\ x+2=0;\ 5)\ 2x-y-\sqrt{5}=0.$$

311. Dadas las ecuaciones de las rectas

$$1)\ x-2=0;\ 2)\ x+2=0;\ 3)\ y-3=0;$$

$$4)\ y+3=0;\ 5)\ x\sqrt{3}+y-6=0;\ 6)\ x-y+2=0;$$

$$7)\ x+y\sqrt{3}+2=0;$$

8) $x\cos\beta-y\operatorname{sen}\beta-q=0$, $q>0$; β es un ángulo agudo;
9) $x\cos\beta+y\operatorname{sen}\beta+q=0$, $q>0$; β es un ángulo agudo;

determinar el ángulo polar α de la normal y el segmento p para cada una de las rectas dadas. Construir estas rectas en el plano valiéndose de los valores obtenidos de los parámetros α y p (en los dos últimos casos, verificar la construcción de la recta tomando $\beta=30°$ y $q=2$).

312. Calcular la magnitud de la desviación δ y la distancia d del punto a la recta en cada uno de los casos siguientes:

1) $A\ (2;\ -1)$, $4x+3y+10=0$;
2) $B\ (0;\ -3)$, $5x-12y-23=0$;
3) $P\ (-2;\ 3)$, $3x-4y-2=0$;
4) $Q\ (1;\ -2)$, $x-2y-5=0$.

313. Determinar si el punto M (1; —3) y el origen de coordenadas están a un mismo lado o a diferentes lados de cada una de las siguientes rectas:

$$1)\ 2x - y + 5 = 0;\ 2)\ x - 3y - 5 = 0;$$
$$3)\ 3x + 2y - 1 = 0;\ 4)\ x - 3y + 2 = 0;$$
$$5)\ 10x + 24y + 15 = 0.$$

314. El punto A (2; —5) es un vértice de un cuadrado, uno de cuyos lados está en la recta

$$x - 2y - 7 = 0.$$

Calcular el área de este cuadrado.

315. Dadas las ecuaciones de dos lados de un rectángulo

$$3x - 2y - 5 = 0, \quad 2x + 3y + 7 = 0$$

y uno de sus vértices A (—2; 1), calcular el área de este rectángulo.

316. Demostrar que la recta

$$2x + y + 3 = 0$$

corta el segmento limitado por los puntos A (—5; 1) y B (3; 7).

317. Demostrar que la recta

$$2x - 3y + 6 = 0$$

no corta el segmento limitado por los puntos M_1 (—2; —3) y M_2 (1; —2).

318. Los vértices consecutivos de un cuadrilátero son los puntos A (—3; 5), B (—1; —4), C (7; —1) y D (2; 9). Determinar si este cuadrilátero es convexo.

319. Los vértices consecutivos de un cuadrilátero son los puntos A (—1; 6), B (1; —3), C (4; 10) y D (9; 0). Determinar si este cuadrilátero es convexo.

320. Dados los vértices de un triángulo: A (—10; —13), B (—2; 3) y C (2; 1), calcular la longitud de la perpendicular bajada desde el vértice B a la mediana trazada desde el vértice C.

321. Los lados AB, BC y CA del triángulo ABC vienen dados respectivamente por las ecuaciones

$$x + 21y - 22 = 0, \quad 5x - 12y + 7 = 0,$$
$$4x - 33y + 146 = 0.$$

Calcular la distancia desde el centro de gravedad de este triángulo hasta el lado BC.

322. Calcular la distancia d entre las rectas paralelas en cada uno de los casos siguientes:

$$1)\ 3x-4y-10=0,\quad 2)\ 5x-12y+26=0,$$
$$6x-8y+5=0;\quad 5x-12y-13=0;$$
$$3)\ 4x-3y+15=0,\quad 4)\ 24x-10y+39=0,$$
$$8x-6y+25=0;\quad 12x-5y-26=0.$$

323. Dos lados de un cuadrado están en las rectas

$$5x-12y-65=0,\quad 5x-12y+26=0.$$

Calcular su área.

324. Demostrar que la recta

$$5x-2y-1=0$$

es paralela a las rectas

$$5x-2y+7=0,\quad 5x-2y-9=0$$

y divide por la mitad la distancia entre ellas.

325. Dadas tres rectas paralelas

$$10x+15y-3=0,\quad 2x+3y+5=0,$$
$$2x+3y-9=0,$$

determinar si la primera de ellas está entre las otras dos y calcular la razón en que divide la distancia entre ellas.

326. Demostrar que se pueden trazar por el punto $P\ (2;\ 7)$ dos rectas de manera que sus distancias al punto $Q\ (1;\ 2)$ sean iguales a 5. Hallar las ecuaciones de estas rectas.

327. Demostrar que se pueden trazar por el punto $P\ (2;\ 5)$ dos rectas de manera que sus distancias al punto $Q\ (5;\ 1)$ sean iguales a 3. Hallar las ecuaciones de estas rectas.

328. Demostrar que sólo se puede trazar una recta por el punto $C\ (7;\ -2)$ de manera que su distancia al punto $A\ (4;\ -6)$ sea igual a 5. Hallar su ecuación.

329. Demostrar que no se puede trazar por el punto $B\ (4;\ -5)$ una recta de manera que su distancia al punto $C\ (-2;\ 3)$ sea igual a 12.

330. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos, si sus desviaciones de la recta $8x-15y-25=0$ son iguales a -2.

331. Hallar las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta $3x - 4y - 10 = 0$, que se encuentran a una distancia de ella de $d = 3$.

332. Dados dos vértices adyacentes de un cuadrado $A (2; 0)$ y $B (-1; 4)$, hallar las ecuaciones de sus lados.

333. El punto $A (5; -1)$ es un vértice de un cuadrado, uno de cuyos lados está en la recta

$$4x - 3y - 7 = 0.$$

Hallar las ecuaciones de las rectas en las que están los otros lados de este cuadrado.

334. Dadas las ecuaciones de dos lados de un cuadrado

$$4x - 3y + 3 = 0, \quad 4x - 3y - 17 = 0$$

y uno de sus vértices $A (2; -3)$, hallar las ecuaciones de los otros dos lados de este cuadrado.

335. Dadas las ecuaciones de dos lados de un cuadrado

$$5x + 12y - 10 = 0, \quad 5x + 12y + 29 = 0,$$

hallar las ecuaciones de los otros dos lados, si el punto $M_1 (-3; 5)$ está en un lado de este cuadrado.

336. Las desviaciones del punto M de las rectas

$$5x - 12y - 13 = 0 \text{ y } 3x - 4y - 19 = 0$$

son iguales respectivamente a -3 y -5. Determinar las coordenadas del punto M.

337. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P (-2; 3)$ a igual distancia de los puntos $A (5; -1)$ y $B (3; 7)$.

338. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de las rectas paralelas:

$$1)\ 3x - y + 7 = 0, \quad 2)\ x - 2y + 3 = 0,$$
$$3x - y - 3 = 0; \quad x - 2y + 7 = 0;$$
$$3)\ 5x - 2y - 6 = 0,$$
$$10x - 4y + 3 = 0.$$

339. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas concurrentes:

$$1)\ x - 3y + 5 = 0, \quad 2)\ x - 2y - 3 = 0,$$
$$3x - y - 2 = 0; \quad 2x + 4y + 7 = 0;$$
$$3)\ 3x + 4y - 1 = 0,$$
$$5x + 12y - 2 = 0.$$

340. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto P (2; —1) y junto con las rectas

$$2x - y + 5 = 0, \quad 3x + 6y - 1 = 0$$

forman triángulos isósceles.

341. Determinar si el punto M (1; —2) y el origen de coordenadas están en un ángulo, en ángulos adyacentes o en ángulos opuestos formados por la intersección de dos rectas:

$$\begin{array}{ll} 1)\ 2x - y - 5 = 0, & 2)\ 4x + 3y - 10 = 0, \\ \quad 3x + y + 10 = 0; & \quad 12x - 5y - 5 = 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3)\ x - 2y - 1 = 0, \\ \quad 3x - y - 2 = 0. \end{array}$$

342. Averiguar si los puntos M (2; 3) y N (5; —1) están en un ángulo, en ángulos adyacentes o en ángulos opuestos formados por la intersección de dos rectas:

$$\begin{array}{ll} 1)\ x - 3y - 5 = 0, & 2)\ 2x + 7y - 5 = 0, \\ \quad 2x + 9y - 2 = 0; & \quad x + 3y + 7 = 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3)\ 12x + y - 1 = 0, \\ \quad 13x + 2y - 5 = 0. \end{array}$$

343. Averiguar si el origen de coordenadas está dentro o fuera del triángulo, cuyos lados son dados por las ecuaciones

$$7x - 5y - 11 = 0, \quad 8x + 3y + 31 = 0,$$

$$x + 8y - 19 = 0.$$

344. Averiguar si el punto M (—3; 2) está dentro o fuera del triángulo, cuyos lados son dados por las ecuaciones

$$x + y - 4 = 0, \quad 3x - 7y + 8 = 0,$$
$$4x - y - 31 = 0.$$

345. Averiguar qué ángulo (agudo u obtuso) formado por las rectas

$$3x - 2y + 5 = 0 \text{ y } 2x + y - 3 = 0,$$

contiene el origen de coordenadas.

346. Averiguar qué ángulo (agudo u obtuso) formado por las rectas

$$3x - 5y - 4 = 0 \text{ y } x + 2y + 3 = 0,$$

contiene el punto M (2; —5).

347. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas

$$3x - y - 4 = 0 \text{ y } 2x + 6y + 3 = 0,$$

que contiene el origen de coordenadas.

348. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas

$$x - 7y + 5 = 0, \quad 5x + 5y - 3 = 0,$$

que es adyacente al ángulo que contiene el origen de coordenadas.

349. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas

$$x + 2y - 11 = 0 \text{ y } 3x - 6y - 5 = 0,$$

en el que está el punto M (1; —3).

350. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas

$$2x - 3y - 5 = 0, \quad 6x - 4y + 7 = 0,$$

que es adyacente al ángulo que contiene el punto C (2; —1).

351. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las dos rectas

$$3x + 4y - 5 = 0, \quad 5x - 12y + 3 = 0.$$

352. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo obtuso formado por las dos rectas

$$x - 3y + 5 = 0, \quad 3x - y + 15 = 0.$$

§ 15. Ecuación de un haz de rectas

El conjunto de rectas que pasan por un punto S se llama haz de rectas con el centro S.

Si $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ son las cuaciones de dos rectas que se cortan en el punto S, la ecuación

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (1)$$

en la que α y β son unos números cualesquiera, pero no simultáneamente iguales a cero, determina una recta que pasa también por el punto S.

Es más, siempre se pueden elegir los números α y β de manera que la ecuación (1) represente una recta cualquiera (asignada previamente) que pase por el punto S, es decir, una recta arbitraria del haz con el centro en S. Por eso, la ecuación (1) se llama ecuación del haz (con el centro en S).

Si $\alpha \neq 0$, dividiendo los dos miembros de la ecuación (1) por α y suponiendo que $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ tendremos:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2) = 0. \qquad (2)$$

Por medio de esta ecuación se puede determinar cualquier recta del haz con el centro en S, excluyendo la que corresponde a $\alpha = 0$, es decir, excluyendo la recta $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

353. Hallar el centro del haz de rectas dado por la ecuación

$$\alpha (2x + 3y - 1) + \beta (x - 2y - 4) = 0.$$

354. Hallar 'a ecuación de la recta que pertenece al h̶a̶ de rectas

$$\alpha (x + 2y - 5) + \beta (3x - 2y + 1) = 0$$

y que:

1) pasa por el punto A (3; —1);
2) pasa por el origen de coordenadas;
3) es paralela al eje Ox;
4) es paralela al eje Oy;
5) es paralela a la recta $4x + 3y - 5 = 0$;
6) es perpendicular a la recta $2x + 3y + 7 = 0$.

355. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas

$$3x - 2y + 5 = 0, \quad 4x + 3y - 1 = 0$$

e intercepta en el eje de ordenadas un segmento $b = -3$. Resolver el problema sin hallar las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas.

356. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas

$$2x + y - 2 = 0, \quad x - 5y - 23 = 0$$

y divide por la mitad el segmento limitado por los puntos M_1 (5; —6) y M_2 (—1; —4). Resolver el problema sin calcular las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas.

357. Dada la ecuacion de un haz de rectas

$$\alpha (3x - 4y - 3) + \beta (2x + 3y - 1) = 0,$$

escribir la ecuación de la recta de este haz que pasa por el centro de gravedad de una lámina triangular homogénea, cuyos vértices sean los puntos $A(-1; 2)$, $B(4; -4)$ y $C(6; -1)$.

358. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha(3x - 2y - 1) + \beta(4x - 5y + 8) = 0,$$

hallar la recta de este haz que pasa por la mitad del segmento de la recta

$$x + 2y + 4 = 0,$$

comprendido entre las rectas

$$2x + 3y + 5 = 0, \quad x + 7y - 1 = 0.$$

359. Dadas las ecuaciones de los lados de un triángulo $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$, hallar las ecuaciones de las alturas de este triángulo sin determinar las coordenadas de sus vértices.

360. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas

$$2x + 7y - 8 = 0, \quad 3x + 2y + 5 = 0$$

con una inclinación de 45° respecto a la recta

$$2x + 3y - 7 = 0.$$

Resolver el problema sin calcular las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas.

361. En el triángulo ABC se dan la ecuación de la altura AN: $x + 5y - 3 = 0$; la de la altura BN: $x + y - 1 = 0$ y la del lado AB: $x + 3y - 1 = 0$. Hallar las ecuaciones de los otros dos lados y de la tercera altura sin determinar las coordenadas de los vértices y de los puntos de intersección de las alturas de este triángulo.

362. Hallar las ecuaciones de los lados del triángulo ABC, conociendo uno de sus vértices $A(2; -1)$ y las ecuaciones de la altura

$$7x - 10y + 1 = 0$$

y de la bisectriz

$$3x - 2y + 5 = 0,$$

trazadas desde un vértice. Resolver el problema sin calcular las coordenadas de los vértices B y C.

363. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (2x + y + 8) + \beta (x + y + 3) = 0,$$

hallar las rectas de este haz, cuyos segmentos, comprendidos entre las rectas

$$x - y - 5 = 0, \quad x - y - 2 = 0,$$

sean iguales a $\sqrt{5}$.

364. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (3x + y - 1) + \beta (2x - y - 9) = 0,$$

demostrar que la recta

$$x + 3y + 13 = 0$$

pertenece a este haz.

365. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (5x + 3y + 6) + \beta (3x - 4y - 37) = 0,$$

demostrar que la recta

$$7x + 2y - 15 = 0$$

no pertenece a este haz.

366. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (3x + 2y - 9) + \beta (2x + 5y + 5) = 0,$$

determinar el valor de C, para que la recta

$$4x - 3y + C = 0$$

pertenezca a este haz.

367. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (5x + 3y - 7) + \beta (3x + 10y + 4) = 0,$$

determinar para qué valores de a, la recta

$$ax + 5y + 9 = 0$$

no pertenece a este haz.

368. El centro del haz de rectas

$$\alpha (2x - 3y + 20) + \beta (3x + 5y - 27) = 0$$

es el vértice de un cuadrado cuya diagonal está en la recta

$$x + 7y - 16 = 0.$$

Hallar las ecuaciones de los lados y de la segunda diagonal de este cuadrado.

369. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (2x + 5y + 4) + \beta (3x - 2y + 25) = 0,$$

hallar la recta de este haz que intercepta en los ejes coordenados unos segmentos de igual magnitud (partiendo del origen de coordenadas) y diferentes de cero.

370. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (2x + y + 1) + \beta (x - 3y - 10) = 0,$$

hallar las rectas de este haz que interceptan en los ejes coordenados segmentos de igual magnitud (partiendo del origen de coordenadas).

371. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (21x + 8y - 18) + \beta (11x + 3y + 12) = 0,$$

hallar las rectas de este haz que interceptan en los ángulos coordenados triángulos de área igual a 9 unidades cuadradas.

372. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (2x + y + 4) + \beta (x - 2y - 3) = 0,$$

demostrar que entre las rectas de este haz existe solamente una que está a la distancia $d = \sqrt{10}$ del punto P (2; —3). Escribir la ecuación de esta recta.

373. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (2x - y - 6) + \beta (x - y - 4) = 0,$$

demostrar que no hay entre las rectas de este haz una que esté a la distancia $d = 3$ del punto P (3; —1).

374. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas

$$3x + y - 5 = 0, \quad x - 2y + 10 = 0$$

y está a la distancia $d = 5$ del punto C (—1; —2). Resolver el problema sin calcular las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas.

375. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha (5x + 2y + 4) + \beta (x + 9y - 25) = 0,$$

escribir las ecuaciones de las rectas de este haz, que junto con las rectas

$$2x - 3y + 5 = 0, \quad 12x + 8y - 7 = 0$$

forman triángulos isósceles.

376. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas

$$11x + 3y - 7 = 0, \quad 12x + y - 19 = 0$$

a igual distancia de los puntos A (3; —2) y B (—1; 6). Resolver el problema sin calcular las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas.

377. Dadas las ecuaciones de dos haces de rectas

$$\alpha_1 (5x + 3y - 2) + \beta_1 (3x - y - 4) = 0,$$
$$\alpha_2 (x - y + 1) + \beta_2 (2x - y - 2) = 0,$$

hallar la ecuación de la recta que pertenece a los dos haces sin determinar sus centros.

378. Dados los lados AB, BC, CD y DA del cuadrilátero $ABCD$ por sus ecuaciones correspondientes

$$5x + y + 13 = 0, \quad 2x - 7y - 17 = 0,$$
$$3x + 2y - 13 = 0, \quad 3x - 4y + 17 = 0,$$

hallar las ecuaciones de sus diagonales AC y BD sin determinar las coordenadas de sus vértices.

379. El centro del haz de rectas

$$\alpha (2x + 3y + 5) + \beta (3x - y + 2) = 0$$

es uno de los vértices de un triángulo, dos de cuyas alturas se dan por las ecuaciones

$$x - 4y + 1 = 0, \quad 2x + y + 1 = 0.$$

Hallar las ecuaciones de los lados de este triángulo.

§ 16. Ecuación polar de la recta

La recta trazada por el polo, perpendicular a la recta dada, se llama normal. Designemos con P el punto en el que la normal corta a la recta; elijamos en la normal la dirección positiva desde el punto O hacia el punto P. El ángulo, en el que hay que hacer girar el eje polar hasta que cubra el segmento $\overline{OP}$, lo llamaremos ángulo polar de la normal.

380. Deducir la ecuación polar de la recta, conociendo su distancia p del polo y el ángulo polar α de la normal.

S o l u c i ó n. 1^er^ m é t o d o. Tomemos en la recta dada s (fig. 11) un punto arbitrario M con las coordenadas polares ρ y θ. Designemos con la letra P el punto de intersección de la recta s con su normal. En el triángulo rectángulo OPM hallamos:

$$\rho = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)} \tag{1}$$

Hemos obtenido una ecuación de dos variables ρ y θ, a la que satisfacen las coordenadas de cualquier punto M situado en la recta s,

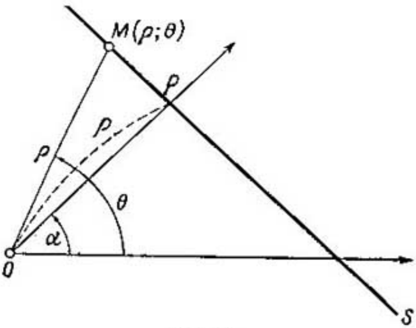

Fig. 11.

y no satisfacen a las coordenadas de ningún punto que no esté situado en esta recta. Por lo tanto, la ecuación (1) es la ecuación de la recta s. De esta manera, queda resuelto el problema.

2^0 m é t o d o. Consideremos un sistema cartesiano de coordenadas rectangular, cuyo semieje positivo de abscisas coincida con el eje polar del sistema polar dado. En este sistema cartesiano, la ecuación normal de la recta s es:

$$x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha - p = 0. \tag{2}$$

Sirvámonos de las fórmulas de transformación de coordenadas polares en cartesianas:

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\theta. \tag{3}$$

Sustituyendo x e y en la ecuación (2) por las expresiones (3), obtenemos:

$$\rho(\cos\theta\cos\alpha + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha) = p$$

o

$$\rho = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)}.$$

381. Deducir la ecuación polar de la recta, si se dan.

1) el ángulo β de inclinación de la recta respecto al eje polar y la longitud p de la perpendicular bajada desde el polo a esta recta. Escribir la ecuación de esta recta en el caso de que

$$\beta=\frac{\pi}{6}, \ p=3;$$

2) el segmento a que intercepta la recta en el eje polar, partiendo del polo, y el ángulo polar α de la normal a esta recta. Escribir la ecuación de esta recta en el caso de que

$$a=2, \ \alpha=-\frac{2}{3}\pi;$$

3) el ángulo β de inclinación de la recta respecto al eje polar y el segmento a, que intercepta la recta en el eje polar, partiendo del polo. Escribir la ecuación de esta recta en el caso de que

$$\beta=\frac{\pi}{6}, \quad a=6.$$

382. Deducir la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $M_1(\rho_1; \theta_1)$ con una inclinación respecto al eje polar de un ángulo β.

383. Deducir la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $M_1(\rho_1; \theta_1)$, si el ángulo polar de la normal es igual a α.

384. Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por los puntos $M_1(\rho_1; \theta_1)$ y $M_2(\rho_2; \theta_2)$.

IV

Capítulo

PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LAS LINEAS DE SEGUNDO ORDEN

§ 17. La circunferencia

La ecuación

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \qquad (1)$$

determina una circunferencia de radio R con centro $C(\alpha; \beta)$.

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas, es decir, si $\alpha=0$, $\beta=0$, la ecuación (1) toma la forma

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (2)$$

385. Hallar la ecuación de la circunferencia en cada uno de los casos siguientes:

1) el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas y su radio $R=3$;

2) el centro de la circunferencia coincide con el punto $C(2; -3)$ y su radio $R=7$;

3) la circunferencia pasa por el origen de coordenadas y su centro coincide con el punto $C(6; -8)$;

4) la circunferencia pasa por el punto $A(2; 6)$ y su centro cincide con el punto $C(-1; 2)$;

5) los puntos $A(3; 2)$ y $B(-1; 6)$ son extremos de uno de los diámetros de la circunferencia;

6) el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas y la recta $3x-4y+20=0$ es tangente a la circunferencia;

7) el centro de la circunferencia coincide con el punto $C(1; -1)$ y la recta $5x-12y+9=0$ es tangente a la circunferencia;

8) la circunferencia pasa por los puntos $A(3; 1)$ y y $B(-1; 3)$ y su centro está situado en la recta $3x-y-2=0$;

9) la circunferencia pasa por tres puntos: $A(1; 1)$, $B(1; -1)$ y $C(2; 0)$;

10) la circunferencia pasa por tres puntos: $M_1(-1; 5)$, $M_2(-2; -2)$ y $M_3(5; 5)$.

386. El punto $C(3; -1)$ es el centro de una circunferencia que intercepta en la recta

$$2x - 5y + 18 = 0$$

una cuerda, cuya longitud es igual a 6. Hallar la ecuación de esta circunferencia.

387. Escribir las ecuaciones de las circunferencias de radio $R = \sqrt{5}$, que son tangentes a la recta $x - 2y - 1 = 0$ en el punto $M_1(3; 1)$.

388. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a las dos rectas paralelas: $2x + y - 5 = 0$, $2x + y + 15 = 0$ y, a una de ellas, en el punto $A(2; 1)$.

389. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasan por el punto $A(1; 0)$ y son tangentes a las dos rectas paralelas:

$$2x + y + 2 = 0, \quad 2x + y - 18 = 0.$$

390. Hallar la ecuación de la circunferencia que, teniendo el centro en la recta

$$2x + y = 0,$$

es tengente a las rectas

$$4x - 3y + 10 = 0, \quad 4x - 3y - 30 = 0.$$

391. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a dos rectas concurrentes: $7x - y - 5 = 0$, $x + y + 13 = 0$ y, a una de ellas, en el punto $M_1(1; 2)$.

392. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y son tangentes a las dos rectas concurrentes:

$$x + 2y - 9 = 0, \quad 2x - y + 2 = 0.$$

393. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que, teniendo sus centros en la recta

$$4x - 5y - 3 = 0,$$

son tangentes a las rectas

$$2x - 3y - 10 = 0, \quad 3x - 2y + 5 = 0.$$

394. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasan por el punto $A(-1; 5)$ y son tangentes a las dos rectas concurrentes:

$$3x + 4y - 35 = 0, \quad 4x + 3y + 14 = 0.$$

395. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a las tres rectas:

$$4x - 3y - 10 = 0, \quad 3x - 4y - 5 = 0 \quad \text{y} \quad 3x - 4y - 15 = 0.$$

396. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a las tres rectas:

$$3x + 4y - 35 = 0, \quad 3x - 4y - 35 = 0 \quad \text{y} \quad x - 1 = 0.$$

397. ¿Qué ecuaciones de las expuestas a continuación determinan circunferencias? Hallar el centro C y el radio R de cada una de ellas:

1) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$; 6) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$;
2) $(x+2)^2 + y^2 = 64$; 7) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$;
3) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 0$; 8) $x^2 + y^2 + x = 0$;
4) $x^2 + (y-5)^2 = 5$; 9) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$;
5) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$; 10) $x^2 + y^2 + y = 0$.

398. Averiguar qué líneas determinan las siguientes ecuaciones:

1) $y = +\sqrt{9 - x^2}$; 6) $y = 15 - \sqrt{64 - x^2}$;
2) $y = -\sqrt{25 - x^2}$ 7) $x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$;
3) $x = -\sqrt{4 - y^2}$; 8) $x = -2 + \sqrt{9 - y^2}$;
4) $x = +\sqrt{16 - y^2}$; 9) $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$;
5) $y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$; 10) $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$.

Representar estas líneas en el plano.

399. Determinar cómo está situado el punto A (1; -2) con relación a cada una de las siguientes circunferencias: dentro, fuera o en el contorno:

1) $x^2 + y^2 = 1$; 3) $x^2 + y^2 = 9$;
2) $x^2 + y^2 = 5$; 4) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$;
5) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$,

400. Determinar la ecuación de. a línea de los centros de las dos circunferencias dadas por las ecuaciones:

1) $(x-3)^2+y^2=9$ y $(x+2)^2+(y-1)^2=1$;

2) $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ y $(x+2)^2+(y+5)^2=25$;

3) $x^2+y^2-4x+6y=0$ y $x^2+y^2-6x=0$;

4) $x^2+y^2-x+2y=0$ y $x^2+y^2+5x+2y-1=0$.

401. Hallar la ecuación del diámetro de la circunferencia

$$x^2+y^2+4x-6y-17=0,$$

que es perpendicular a la recta

$$5x+2y-13=0.$$

402. Hallar la distancia mínima del punto a la circunferencia en cada uno de los casos siguientes:

a) $A(6;\ -8)$, $x^2+y^2=9$;

b) $B(3;\ 9)$, $x^2+y^2-26x+30y+313=0$;

c) $C(-7;\ 2)$; $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

403. Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta $7x-y+12=0$ y la circunferencia

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25.$$

404. Determinar cómo está situada la recta con relación a la circunferencia (la corta, es tangente o pasa fuera de ella), si la recta y la circunferencia se dan mediante las siguientes ecuaciones:

1) $y=2x-3$ y $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;

2) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ y $x^2+y^2-8x+2y+12=0$;

3) $y=x+10$ y $x^2+y^2-1=0$.

405. Determinar para qué valores del coeficiente angular k la recta $y=kx$

1) corta a la circunferencia $x^2+y^2-10x+16=0$;

2) es tangente a esta circunferencia;

3) pasa fuera de esta circunferencia.

406. Deducir la condición según la cual, la recta $y=kx+b$ es tangente a la circunferencia $x^2+y^2=R^2$.

407. Hallar la ecuación del diámetro de la circunferencia

$$(x-2)^2+(y+1)^2=16;$$

que pasa por la mitad de la cuerda que intercepta en la recta

$$x-2y-3=0.$$

408. Hallar la ecuación de la cuerda de la circunferencia

$$(x-3)^2+(y-7)^2=169,$$

que se divide por la mitad en el punto M (8,5; 3,5).

409. Determinar la longitud de la cuerda de la circunferencia

$$(x-2)^2+(y-4)^2=10,$$

que se divide por la mitad en el punto A (1; 2).

410. Dada la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha\,(x-8y+30)+\beta\,(x+5y-22)=0,$$

hallar las rectas de este haz, en las que la circunferencia

$$x^2+y^2-2x+2y-14=0$$

intercepta cuerdas de longitud $2\sqrt{3}$.

411. Dadas dos circunferencias

$$(x-m_1)^2+(y-n_1)^2=R_1^2,$$
$$(x-m_2)^2+(y-n_2)^2=R_2^2,$$

que se cortan en los puntos $M_1\,(x_1;\ y_1)$ y $M_2\,(x_2;\ y_2)$, demostrar que cualquier circunferencia que pasa por los puntos M_1, M_2, y también la recta M_1M_2, se pueden determinar por una ecuación de la forma

$$\alpha\,[(x-m_1)^2+(y-n_1)^2-R_1^2]+\beta\,[(x-m_2)^2+$$
$$+(y-n_2)^2-R_2^2]=0,$$

eligiendo adecuadamente los números α y β.

412. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A (1; —1) y por el punto de intersección de las dos circunferencias

$$x^2+y^2+2x-2y-23=0,$$
$$x^2+y^2-6x+12y-35=0.$$

413. Hallar la ecuación de la circunferencia que pas-por el origen de coordenadas y por el punto de intersección de las dos circunferencias:

$$(x+3)^2+(y+1)^2=25, \ (x-2)^2+(y+4)^2=9.$$

414. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las dos circunferencias:

$$x^2+y^2+3x-y=0, \quad 3x^2+3y^2+2x+y=0,$$

415. Calcular la distancia del centro de la circunferencia

$$x^2+y^2=2x$$

a la recta que pasa por el punto de intersección de las dos circunferencias:

$$x^2+y^2+5x-8y+1=0,$$
$$x^2+y^2-3x+7y-25=0.$$

416. Determinar la longitud de la cuerda común a las dos circunferencias:

$$x^2+y^2-10x-10y=0,$$
$$x^2+y^2+6x+2y-40=0.$$

417. El centro de una circunferencia está en la recta

$$x+y=0.$$

Hallar la ecuación de esta circunferencia, si se sabe que pasa por el punto de intersección de las dos circunferencias:

$$(x-1)^2+(y+5)^2=50, \ (x+1)^2+(y+1)^2=10.$$

418. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2+y^2=5$$

en el punto $A(-1; 2)$.

419. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$(x+2)^2+(y-3)^2=25$$

en el punto $A(-5; 7)$.

420. Hallar en la circunferencia

$$16x^2+16y^2+48x-8y-43=0$$

el punto M_1 más próximo a la recta

$$8x - 4y + 73 = 0,$$

y calcular la distancia d del punto M_1 a esta recta.

421. El punto $M_1(x_1, y_1)$ está en la circunferencia

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Hallar la ecuación de la tangente a esta circunferencia en el punto M_1.

422. El punto $M_1(x_1; y_1)$ está en la circunferencia

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Hallar la ecuación de la tangente a esta circunferencia en el punto M_1.

423. Determinar el ángulo agudo formado por la intersección de la recta

$$3x - y - 1 = 0$$

y la circunferencia

$$(x - 2)^2 + y^2 = 5$$

(se llama ángulo formado por una recta y una circunferencia al ángulo comprendido entre la recta y la tangente a la circunferencia trazada en el punto de intersección).

424. Determinar el ángulo formado por la intersección de las dos circunferencias:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8, \quad (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$$

(se llama ángulo formado por dos circunferencias al ángulo comprendido entre sus tangentes en el punto de intersección).

425. Deducir la condición según la cual dos circunferencias

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = R_1^2, \; (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 = R_2^2$$

se cortan, formando un ángulo recto.

426. Demostrar que las dos circunferencias

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny - m^2 + n^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2nx + 2my + m^2 - n^2 = 0$$

se cortan, formando un ángulo recto.

427. Desde el punto $A\left(\frac{5}{3};\ -\frac{5}{3}\right)$ se han trazado tangentes a la circunferencia

$$x^2+y^2=5.$$

Hallar sus ecuaciones.

428. Desde el punto A (1; 6) se han trazado tangentes a la circunferencia

$$x^2+y^2+2x-19=0.$$

Hallar sus ecuaciones.

429. Se da la ecuación de un haz de rectas

$$\alpha\,(3x+4y-10)+\beta\,(3x-y-5)=0.$$

Hallar las rectas de este haz que son tangentes a la circunferencia

$$x^2+y^2+2x-4y=0.$$

430. Desde el punto A (4; 2) se han trazado tangentes a la circunferencia

$$x^2+y^2=10.$$

Determinar el ángulo formado por estas tangentes.

431. Desde el punto P (2; —3) se han trazado tangentes a la circunferencia

$$(x-1)^2+(y+5)^2=4.$$

Hallar la ecuación de la cuerda que une los puntos de contacto.

432. Desde el punto C (6; —8) se han trazado tangentes a la circunferencia

$$x^2+y^2=25.$$

Calcular la distancia d del punto C a la cuerda que une los puntos de contacto.

433. Desde el punto P (—9; 3) se han trazado tangentes a la circunferencia

$$x^2+y^2-6x+4y-78=0.$$

Calcular la distancia d del centro de la circunferencia a a la cuerda que une los puntos de contacto.

434. Desde el punto M (4; —4) se han trazado tangentes a la circunferencia

$$x^2+y^2-6x+2y+5=0.$$

Calcular la longitud d de la cuerda que une los puntos de contacto.

435. Calcular la longitud de la tangente trazada desde el punto A $(1; -2)$ a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0.$$

436. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0,$$

que son paralelas a la recta

$$2x + y - 7 = 0.$$

437. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$

que son perpendiculares a la recta

$$x - 2y + 9 = 0.$$

438. Hallar, en coordenadas polares, la ecuación de la circunferencia, si se han dado el radio R y las coordenadas polares de su centro C $(R;\ \theta_0)$.

439. Hallar, en coordenadas polares, la ecuación de la circunferencia, si se han dado el radio R y las coordenadas polares del centro de la circunferencia:

$$1)\ C(R;\ 0);\ 2)\ C(R;\ \pi);\ 3)\ C\left(R;\ \frac{\pi}{2}\right);\ 4)\ C\left(R;\ -\frac{\pi}{2}\right).$$

440. Determinar las coordenadas polares del centro y el radio de cada una de las circunferencias:

$$1)\ \rho = 4\cos\theta;\ 2)\ \rho = 3\,\mathrm{sen}\,\theta;\ 3)\ \rho = -2\cos\theta;$$

$$4)\ \rho = -5\,\mathrm{sen}\,\theta;\ 5)\ \rho = 6\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right);$$

$$6)\ \rho = 8\,\mathrm{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right);\ 7)\ \rho = 8\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right).$$

441. Las ecuaciones de las circunferencias se dan en coordenadas polares:

1) $\rho = 3\cos\theta$; 2) $\rho = -4\,\mathrm{sen}\,\theta$; 3) $\rho = \cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta$.
Hallar sus ecuaciones en coordenadas cartesianas rectangulares, con la condición de que el eje polar coincida con el semieje positivo Ox y el polo con el origen de coordenadas.

442. Las ecuaciones de las circunferencias se dan en coordenadas cartesianas rectangulares:

$$1)\ x^2+y^2=x;\quad 2)\ x^2+y^2=-3x;\quad 3)\ x^2+y^2=5y;$$
$$4)\ x^2+y^2=-y;\quad 5)\ x^2+y^2=x+y.$$

Hallar las ecuaciones de estas circunferencias en coordenadas polares, con la condición de que el eje polar coincida con el semieje positivo Ox y el polo con el origen de coordenadas.

443. Hallar la ecuación polar de la tangente a la circunferencia $\rho=R$ en el punto $M_1\ (R;\ \theta_0)$.

§ 18. La elipse

Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es una candidad constante, mayor que la distancia entre los focos. La suma constante de las distancias de un punto arbitrario de la elipse a los focos se indica mediante $2a$. Los focos de la elipse se designan por las letras F_1 y F_2; la distancia entre ellos por $2c$. Según la definición de la elipse, $2a>2c$ o $a>c$.

Si los ejes del sistema cartesiano rectangular de coordenadas se han elegido de manera que los focos de la elipse se sitúan simétricamente en el eje de abscisas, con respecto al origen de coordenadas, la ecuación de la elipse en este sistema de coordenadas es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

en donde $b=\sqrt{a^2-c^2}$; es evidente que $a>b$. La ecuación de la forma (1) se llama ecuación canónica de la elipse.

En el sistema de coordenadas elegido como se ha indicado, los ejes de coordenadas son los ejes de simetría de la elipse y el origen de coordenadas su centro de simetría (fig. 12). Los ejes de simetría de la elipse se llaman simplemente ejes, su centro de simetría se llama simplemente centro. Los puntos, en los que la elipse corta a sus ejes, se llaman vértices. En la fig. 12 los vértices de la elipse son los puntos A', A, B' y B. Frecuentemente, se llaman también ejes de la elipse a los segmentos $A'A=2a$ y $B'B=2b$; asimismo, al segmento $OA=a$ se lo llama semieje mayor de la elipse y al segmento $OB=b$, semieje menor.

Si los focos de la elipse están situados en el eje Oy (simétricamente con respecto al origen de coordenadas), la ecuación de elipse es también de la forma (1), pero en este caso $b>a$; por lo tanto, si deseamos indicar con la letra a el semieje mayor, debemos cambiar de lugar las letras a y b en la ecuación (1). Sin embargo, para simplificar los enunciados de los problemas, es conveniente indicar siempre con la letra a el semieje situado en el eje Ox y con la letra b, el semieje situado en el eje Oy, independientemente de cuál sea mayor, si a o b. Si $a=b$, la ecuación (1) determina una circunferencia, considerada como un caso particular de la elipse. El número

$$\varepsilon=\frac{c}{a},$$

en donde a es el semieje mayor, se llama excentricidad de la elipse. Es evidente que $\varepsilon<1$ (para la circunferencia $\varepsilon=0$). Si $M(x, y)$

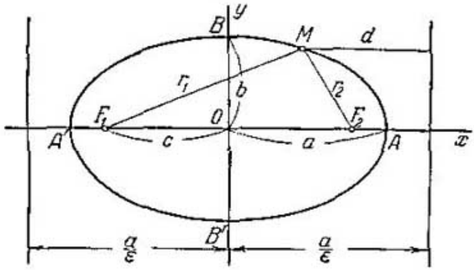

Fig. 12.

es un punto arbitrario de la elipse, los segmentos $F_1M=r_1$ y $F_2M=r_2$ (fig. 12) se llaman radios focales del punto M. Los radios focales se pueden calcular mediante las fórmulas

$$r_1=a+\varepsilon x, \qquad r_2=a-\varepsilon x.$$

Si la elipse está definida por la ecuación (1) y $a>b$, las rectas

$$x=-\frac{a}{\varepsilon}, \qquad x=\frac{a}{\varepsilon}$$

(fig. 12) se llaman directrices de la elipse $\left(\text{si } b>a, \text{ las directrices se definen por las ecuaciones } y=-\frac{b}{\varepsilon},\ y=\frac{b}{\varepsilon}\right)$.

Cada directriz posee la propiedad siguiente: si r es la distancia de un punto arbitrario de la elipse a un foco y d es la distancia del mismo punto a la directriz, unilateral a este mismo foco, la razón $\frac{r}{d}$ es una cantidad constante, igual a la excentricidad de la elipse

$$\frac{r}{d}=\varepsilon.$$

Si dos planos α y β forman un ángulo agudo φ, la proyección sobre el plano β de una circunferencia de radio a, situada en el plano α, es una elipse cuyo semieje mayor es a; el semieje menor b de esta elipse se determina por la fórmula

$$b=a\cos\varphi$$

(fig. 13).

Si la directviz de un cilindro circular es una circunferencia de radio b, la sección de este cilindro por un plano que forma con el eje del cilindro un ángulo agudo φ, será una elipse, cuyo semieje menor es igual a b; el semieje mayor a de esta elipse se determina por la fórmula

$$a=\frac{b}{\operatorname{sen}\varphi}$$

(fig. 14).

444. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos están en el eje de abscisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, sabiendo, además, que:

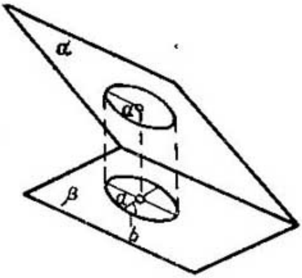

Fig. 13.

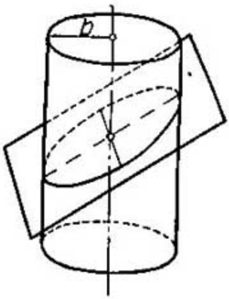

Fig. 14.

1) sus semiejes son iguales a 5 y a 2;

2) su eje mayor es igual a 10 y la distancia entre los focos $2c = 8$;

3) su eje menor es igual a 24 y la distancia entre los focos $2c = 10$;

4) la distancia entre sus focos $2c = 6$ y la excentricidad $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

5) su eje mayor es igual a 20 y la excentricidad $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

6) su eje menor es igual a 10 y la excentricidad $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

7) la distancia entre sus directrices es igual a 5 y la distancia entre sus focos $2c = 4$;

8) su eje mayor es igual a 8 y la distancia entre sus directrices es igual a 16;

9) su eje menor es igual a 6 y la distancia entre sus directrices es igual a 13;

10) la distancia entre sus directrices es igual a 32 y la excentricidad $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

445. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos están en el eje de ordenadas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, sabiendo, además, que:

1) sus semiejes son iguales respectivamente a 7 y 2;

2) su eje mayor es igual a 10 y la distancia entre sus focos $2c = 8$;

3) la distancia entre sus focos $2c = 24$ y la excentricidad $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

4) su eje menor es igual a 16 y la excentricidad $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

5) la distancia entre sus focos $2c = 6$ y la distancia entre las directrices es igual a $16\frac{2}{3}$;

6) la distancia entre sus directrices es igual a $10\frac{2}{3}$ y la excentricidad $\varepsilon = \frac{3}{4}$.

446. Determinar los semiejes de cada una de las elipses siguientes:

$$1)\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1;\quad 2)\ \frac{x^2}{4}+y^2=1;\quad 3)\ x^2+25y^2=25;$$

$$4)\ x^2+5y^2=15;\quad 5)\ 4x^2+9y^2=25;$$

$$6)\ 9x^2+25y^2=1;\quad 7)\ x^2+4y^2=1;$$

$$8)\ 16x^2+y^2=16;\quad 9)\ 25x^2+9y^2=1;$$

$$10)\ 9x^2+y^2=1.$$

447. Dada la elipse

$$9x^2+25y^2=225,$$

hallar:

1) sus semiejes;

2) sus focos;

3) su excentricidad;

4) las ecuaciones de sus directrices.

448. Calcular el área del cuadrilátero que tiene dos vértices en los focos de la elipse

$$x^2+5y^2=20,$$

y los otros dos coinciden con los extremos de su eje menor.

449. Dada la elipse

$$9x^2 + 5y^2 = 45,$$

hallar:

1) sus semiejes;
2) sus focos;
3) su excentricidad;
4) las ecuaciones de sus directrices.

450. Calcular el área del cuadrilátero que tiene dos vértices en los focos de la elipse

$$9x^2 + 5y^2 = 1,$$

y los otros dos coinciden con los extremos de su eje menor.

451. Calcular la distancia del foco $F(c;\ 0)$ de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a la directriz unilateral con este foco.

452. Construir los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

sirviéndose solamente de un compás (se supone que están marcados los ejes de coordenadas y que se ha dado la unidad de medida).

453. Hallar en la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

los puntos cuyas abscisas son iguales a -3.

454. Determinar cuáles de los puntos $A_1(-2;\ 3)$, $A_2(2;\ -2)$, $A_3(2;\ -4)$, $A_4(-1;\ 3)$, $A_5(-4;\ -3)$, $A_6(3;\ -1)$, $A_7(3;\ -2)$, $A_8(2;\ 1)$, $A_9(0;\ 15)$ y $A_{10}(0;\ -16)$ están en la elipse

$$8x^2 + 5y^2 = 77,$$

cuáles están dentro y cuáles fuera de ella.

455. Averiguar qué líneas determinan las ecuaciones siguientes:

$$1)\ y = +\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2};\quad 2)\ y = -\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2};$$

$$3)\ x = -\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2};\quad 4)\ x = +\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}.$$

Representar estas líneas en el plano.

456. La excentricidad de una elipse es $\varepsilon = \frac{2}{3}$, el radio focal de un punto M de la elipse es igual a 10. Calcular la distancia del punto M a la directriz unilateral a este foco.

457. La excentricidad de una elipse es $\varepsilon = \frac{2}{5}$, la distancia de un punto M de la elipse a la directriz es igual a 20. Calcular la distancia del punto M al foco unilateral a esta directriz.

458. Se da el punto $M_1\left(2;\ -\frac{5}{3}\right)$ en la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1;$$

hallar las ecuaciones de las rectas en las que están los radios focales del punto M_1.

459. Habiendo verificado que el punto $M_1(-4;\ 2{,}4)$ está en la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

determinar los radios focales del punto M_1.

460. La excentricidad de una elipse es $\varepsilon = \frac{1}{3}$, su centro coincide con el origen de coordenadas y uno de los focos es $F(-2;\ 0)$. Calcular la distancia del punto M_1 de la elipse, cuya abscisa es igual a 2, a la directriz unilateral al foco dado.

461. La excentricidad de una elipse es $\varepsilon = \frac{1}{2}$, su centro coincide con el origen de coordenadas y una de sus directrices se da mediante la ecuación $x = 16$. Calcular la distancia del punto M_1 de la elipse, cuya abscisa es igual a -4, al foco unilateral a la directriz dada.

462. Determinar los puntos de la elipse

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1,$$

cuyas distancias al foco derecho son iguales a 14.

463. Determinar los puntos de la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1,$$

cuyas distancias al foco izquierdo son iguales a 2,5.

464. Por el foco de la elipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{15}=1$$

se ha trazado una perpendicular a su eje mayor. Determinar las distancias de los puntos de intersección de esta perpendicular con la elipse hasta los focos.

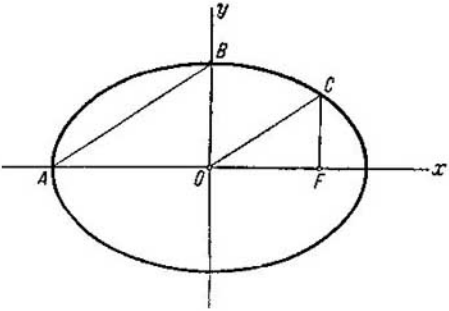

Fig. 15.

465. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos están situados en el eje de abscisas y són simétricos con respecto al origen de coordenadas, si se dan:

1) el punto $M_1(-2\sqrt{5}; 2)$ de la elipse y su semieje menor $b=3$;

2) el punto $M_1(2; -2)$ de la elipse y su semieje mayor $a=4$;

3) los puntos $M_1(4; -\sqrt{3})$ y $M_2(2\sqrt{2}; 3)$ de la elipse;

4) el punto $M_1(\sqrt{15}; -1)$ de la elipse y la distancia entre sus focos $2c=8$;

5) el punto $M_1\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ de la elipse y su excentricidad $\varepsilon=\frac{2}{3}$;

6) el punto $M_1(8; 12)$ de la elipse y la distancia $r_1=20$ desde él hasta el foco izquierdo;

7) el punto $M_1(-\sqrt{5}; 2)$ de la elipse y la distancia entre sus directrices es igual a 10.

466. Determinar la excentricidad ε de la elipse, si:

1) su eje menor se ve desde uno de los focos formando un ángulo de 60°;

2) el segmento entre los focos se ve desde los vértices del eje menor formando un ángulo recto;

3) la distancia entre las directrices es el triple de la distancia entre los focos;

4) el segmento de la perpendicular bajada desde el centro de la elipse a su directriz se divide por la mitad en el vértice de la elipse.

467. Por el foco F de la elipse se ha trazado una perpendicular a su eje mayor (fig. 15). Determinar para qué valor de la excentricidad de la elipse serán paralelos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{OC}$.

468. Hallar la ecuación de la elipse de semiejes a y b con el centro $C(x_0;\ y_0)$, si se sabe que los ejes de simetría de la elipse son paralelos a los ejes coordenados.

469. La elipse es tangente al eje de abscisas en el punto $A(3;\ 0)$ y al eje de ordenadas en el punto $B(0;\ -4)$. Hallar la ecuación de esta elipse, sabiendo que sus ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados.

470: El punto $C(-3;\ 2)$ es el centro de una elipse, que es tangente a los dos ejes coordenados. Hallar la ecuación de esta elipse, sabiendo que sus ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados.

471. Verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determina una elipse y hallar las coordenadas del centro C, los semiejes, la excentricidad y las ecuaciones de las directrices:

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;

2) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$;

3) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

472. Determinar qué líneas definen las ecuaciones siguientes:

1) $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$; 2) $y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$;

3) $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$; 4) $x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$.

Representar estas líneas en el plano.

473. Hallar la ecuación de la elipse, sabiendo que:

1) su eje mayor es igual a 26 y los focos son $F_1(-10;\ 0)$, $F_2(14;\ 0)$;

2) su eje menor es igual a 2 y los focos son $F_1(-1; -1)$, $F_2(1; 1)$;

3) sus focos son $F_1\left(-2; \frac{3}{2}\right)$, $F_2\left(2; -\frac{3}{2}\right)$ y la excentricidad es $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) sus focos son $F_1(1; 3)$, $F_2(3; 1)$ y la distancia entre sus directrices es igual a $12\sqrt{2}$.

474. Hallar la ecuación de la elipse, si se conoce su excentricidad $\varepsilon = \frac{2}{3}$, su foco $F(2; 1)$ y la ecuación de la directriz correspondiente

$$x - 5 = 0.$$

475. Hallar la ecuación de la elipse, si se conoce su excentricidad $\varepsilon = \frac{1}{2}$, su foco $F(-4; 1)$ y la ecuación de la directriz correspondiente

$$y + 3 = 0.$$

476. El punto $A(-3; -5)$ está en una elipse, uno de cuyos focos es $F(-1; -4)$ y la directriz correspondiente se da mediante la ecuación

$$x - 2 = 0.$$

Hallar la ecuación de esta elipse.

477. Hallar la ecuación de la elipse, si se conoce su excentricidad $\varepsilon = \frac{1}{2}$, el foco $F(3; 0)$ y la ecuación de la directriz correspondiente

$$x + y - 1 = 0.$$

478. El punto $M_1(2; -1)$ está en la elipse, uno de cuyos focos es $F(1; 0)$ y la directriz correspondiente se da mediante la ecuación

$$2x - y - 10 = 0.$$

Hallar la ecuación de esta elipse.

479. El punto $M_1(3; -1)$ es un extremo del eje menor de una elipse, cuyos focos están en la recta

$$y + 6 = 0.$$

Hallar la ecuación de esta elipse, conociendo su excentricidad $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

480. Hallar los puntos de intersección de la recta

$$x + 2y - 7 = 0$$

y la elipse

$$x^2 + 4y^2 = 25.$$

481. Hallar los puntos de intersección de la recta

$$3x + 10y - 25 = 0$$

y la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

482. Hallar los puntos de intersección de la recta

$$3x - 4y - 40 = 0$$

y la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

483. Determinar la posición de la recta con relación a la elipse (la corta, es tangente o pasa fuera de ella), si la recta y la elipse se dan mediante las siguientes ecuaciones:

$$1)\ 2x - y - 3 = 0, \qquad 2)\ 2x + y - 10 = 0,$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1; \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$3)\ 3x + 2y - 20 = 0,$$

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1.$$

484. ¿Para qué valores de m la recta

$$y = -x + m:$$

1) corta a la elipse

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1;$$

2) es tangente a ella;
3) pasa fuera de esta elipse?

485. Deducir la condición, según la cual la recta

$$y = kx + m$$

es tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

486. Hallar la ecuación de la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

en uno de sus puntos $M_1(x_1;\ y_1)$.

487. Demostrar que las tangentes a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

trazadas en los extremos de un mismo diámetro son paralelas. (Se llama diámetro de la elipse a la cuerda que pasa por su centro.)

488. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse

$$\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1,$$

que son paralelas a la recta

$$3x+2y+7=0.$$

489. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse

$$x^2+4y^2=20,$$

que son perpendiculares a la recta

$$2x-2y-13=0.$$

490. Trazar las tangentes a la elipse

$$\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$$

paralelas a la recta

$$4x-2y+23=0$$

y calcular la distancia d entre ellas.

491. Hallar en la elipse

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$$

el punto M_1 más próximo a la recta

$$2x-3y+25=0,$$

y calcular la distancia d del punto M_1 a esta recta

492. Desde el punto $A\left(\frac{10}{3};\ \frac{5}{3}\right)$ se han trazado tangentes a la elipse

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$$

Hallar sus ecuaciones.

493. Desde el punto $C(10; -8)$ se han trazado tangentes a la elipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Hallar la ecuación de la cuerda que une los puntos de contacto.

494. Desde el punto $P(-16; 9)$ se han trazado tangentes a la elipse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

Calcular la distancia d del punto P a la cuerda de la elipse que une los puntos de contacto.

495. Una elipse pasa por el punto A $(4; -1)$ y es tangente a la recta

$$x+4y-10=0.$$

Hallar la ecuación de esta elipse, si sus ejes coinciden con los ejes coordenados.

496. Hallar la ecuación de la elipse que es tangente a las dos rectas

$$3x-2y-20=0, \quad x+6y-20=0,$$

si sus ejes coinciden con los ejes coordenados.

497. Demostrar que el producto de la distancia del centro de la elipse al punto de intersección de una tangente arbitraria con el eje focal por la distancia del mismo centro hasta la base de la perpendicular bajada desde el punto de contacto al eje focal, es una cantidad constante, igual al cuadrado del semieje mayor de la elipse.

498. Demostrar que el producto de las distancias de los focos a cualquier tangente de la elipse es igual al cuadrado del semieje menor.

499. La recta

$$x-y-5=0$$

es tangente a una elipse cuyos focos están en los puntos $F_1(-3; 0)$ y $F_2(3; 0)$. Hallar la ecuación de esta elipse.

500. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos están situados en el eje de abscisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, si se conoce la ecuación de la tangente a la elipse

$$3x+10y-25=0$$

y su semieje menor $b=2$.

501. Demostrar que la recta, tangente a la elipse en un punto M, forma ángulos iguales con los radios focales F_1M, F_2M y pasa por fuera del ángulo F_1MF_2.

502. Desde el foco izquierdo de la elipse

$$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$$

se ha dirigido un rayo de luz con una inclinación al eje Ox de un ángulo obtuso α. Se sabe que $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Llegando el rayo a la elipse se ha reflejado de ella. Hallar la ecuación de la recta en la que está situado el rayo reflejado.

503. Determinar los puntos de intersección de las dos elipses:

$$x^2+9y^2-45=0,\quad x^2+9y^2-6x-27=0.$$

504. Verificando que las dos elipses

$$n^2x^2+m^2y^2-m^2n^2=0,$$

$$m^2x^2+n^2y^2-m^2n^2=0\quad (m\neq n)$$

se cortan en cuatro puntos situados en una circunferencia con el centro en el origen de coordenadas, determinar el radio R de esta circunferencia.

505. Dos planos α y β forman un ángulo $\varphi=30°$. Determinar los semiejes de la elipse formada por la proyección sobre el plano β de una circunferencia de radio $R=10$, situada en el plano α.

506. Una elipse, cuyo semieje menor es igual a 6, es la proyección de una circunferencia de radio $R=12$. Determinar el ángulo φ formado por los planos, en los que están la elipse y la circunferencia.

507. La directriz de un cilindro circular es una circunferencia de radio $R=8$. Determinar los semiejes de la elipse obtenida en la sección de este cilindro al ser cortado por un plano que forma con su eje un ángulo $\varphi=30°$.

508. La directriz de un cilindro circular es una circunferencia de radio $R=\sqrt{3}$. Determinar qué ángulo debe formar un plano con el eje del cilindro, para que en su sección se obtenga una elipse con un semieje mayor $a=2$.

509. Se llama contracción uniforme (o dilatación uniforme) del plano hacia el eje de abscisas a una transformación de los puntos del plano, según la cual un punto arbitrario $M(x, y)$ se traslada al punto $M'(x', y')$ (fig. 16) de manera que

$$x' = x, \quad y' = qy,$$

en donde $q > 0$ es una constante, llamada coeficiente de contracción (o dilatación) uniforme.

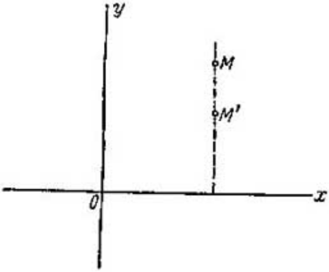

Fig. 16.

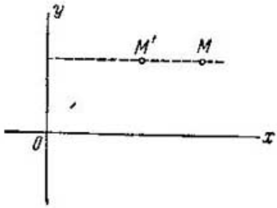

Fig. 17.

La contracción (o dilatación) uniforme del plano hacia el eje Oy se define por analogía mediante las ecuaciones

$$x' = qx, \quad y' = y$$

(fig. 17).

Determinar en qué línea se transforma la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 25,$$

si el coeficiente de contracción uniforme del plano hacia el eje de abscisas es $q = \frac{4}{5}$.

510. El coeficiente de contracción uniforme del plano hacia el eje Oy es igual a $\frac{3}{4}$. Determinar la ecuación de la línea en que se transforma la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

mediante tal contracción.

511. Hallar la ecuación de la línea en que se transforma la elipse

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$$

después de dos contracciones uniformes consecutivas del plano hacia los ejes coordenados, si los coeficientes de las contracciones uniformes del plano hacia los ejes Ox y Oy son respectivamente iguales a $\frac{4}{3}$ y $\frac{6}{7}$.

512. Determinar el coeficiente q de contracción uniforme del plano hacia el eje Ox, según la cual la elipse

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

se transforma en la elipse

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

513. Determinar el coeficiente q de contracción uniforme del plano hacia el eje Oy, según la cual la elipse

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}=1$$

se transforma en la elipse

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1.$$

514. Determinar los coeficientes q_1 y q_2 de dos contracciones uniformes consecutivas del plano hacia los ejes Ox y Oy, según las cuales la elipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

se transforma en la circunferencia

$$x^2+y^2=16.$$

§ 19. La hipérbola

Se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos para los cuales la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es una cantidad constante; la diferencia indicada se toma en su valor absoluto y suele designarse con $2a$. Los focos de la hipérbola se designan con las letras F_1 y F_2 y la distancia entre ellos con $2c$. Según la definición de la hipérbola, $2a < 2c$ o $a < c$.

Si los ejes del sistema de coordenadas cartesiano rectangular se han elegido de manera que los focos de la hipérbola se sitúan en el eje de abscisas, simétricamente con respecto al origen de coordenadas, la ecuación de la hipérbola en este sistema de coordenadas es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

en donde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. La ecuación de la forma (1) se llama ecuación canónica de la hipérbola. En el sistema de coordenadas elegido como se ha indicado, los ejes de coordenadas son los ejes de simetría de la hipérbola y el origen de coordenadas es su centro de simetría (fig. 18). Los ejes de simetría de la hipérbola se llaman abreviadamente ejes, y su centro de simetría, centro de la hipérbola. La hipérbola corta uno de sus ejes; los puntos de intersección se llaman vértices de la hipérbola. En la fig. 18, los vértices de la hipérbola son los puntos A' y A.

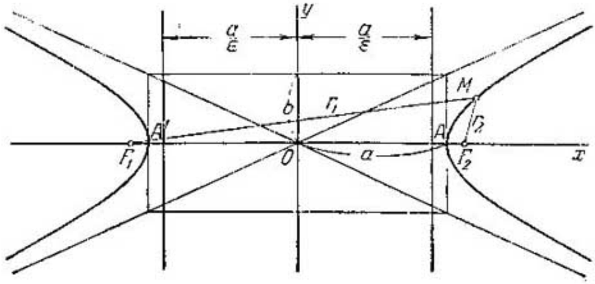

Fig. 18.

El rectángulo con los lados $2a$ y $2b$, situado simétricamente con respecto a los ejes de la hipérbola y que es tangente a ella en sus vértices, se llama rectángulo principal de la hipérbola.

Los segmentos de longitud $2a$ y $2b$, que unen los puntos medios de los lados del rectángulo principal de la hipérbola, se llaman también ejes. Las diagonales del rectángulo principal (prolongadas indefinidamente) son las asíntotas de la hipérbola y sus ecuaciones son:

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$

La ecuación

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

determina una hipérbola simétrica con respecto a los ejes coordenados y tiene los focos en el eje de ordenadas; la ecuación (2), así como la ecuación (1), se llama ecuación canónica de la hipérbola; en este caso, la diferencia constante de las distancias de un punto arbitrario de la hipérbola a los focos es igual a $2b$.

Las dos hipérbolas, que en un mismo sistema de coordenadas se determinan por las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

se llaman conjugadas.

La hipérbola con los semiejes iguales ($a = b$) se llama equilátera y su ecuación canónica es de la forma

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{o} \quad -x^2 + y^2 = a^2.$$

El número

$$\varepsilon=\frac{c}{a},$$

en donde a es la distancia del centro de la hipérbola a su vértice, se llama excentricidad de la hipérbola. Es evidente que para cualquier hipérbola $\varepsilon>1$. Si $M(x;\ y)$ es un punto arbitrario de la hipérbola, los segmentos F_1M y F_2M (véase la fig. 18) se llaman radios focales del punto M. Los radios focales de los puntos de la rama derecha de la hipérbola se calculan por las fórmulas

$$r_1=\varepsilon x+a,\quad r_2=\varepsilon x-a,$$

y los radios focales de los puntos de la rama izquierda, por las fórmulas

$$r_1=-\varepsilon x-a,\quad r_2=-\varepsilon x+a.$$

Si la hipérbola se da mediante la ecuación (1), las rectas determinadas por las ecuaciones

$$x=-\frac{a}{\varepsilon},\quad x=\frac{a}{\varepsilon},$$

se llaman directrices (véase la fig. 18). Si la hipérbola se da mediante la ecuación (2), las directrices se determinan por las ecuaciones

$$y=-\frac{b}{\varepsilon},\quad y=\frac{b}{\varepsilon}.$$

Cada directriz tiene la siguiente propiedad: si r es la distancia de un punto arbitrario de la hipérbola a uno de los focos y d es la distancia desde el mismo punto hasta la directriz, unilateral a este foco, la razón $\frac{r}{d}$ es una cantidad constante, igual a la excentricidad de la hipérbola:

$$\frac{r}{d}=\varepsilon.$$

515. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están situados en el eje de abscisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, sabiendo, además, que:

1) sus ejes $2a=10$ y $2b=8$;

2) la distancia entre los focos $2c=10$ y el eje $2b=8$;

3) la distancia entre los focos $2c=6$ y la excentricidad $\varepsilon=\frac{3}{2}$;

4) el eje $2a=16$ y la excentricidad $\varepsilon=\frac{5}{4}$;

5) las ecuaciones de las asíntotas

$$y=\pm\frac{4}{3}x$$

y la distancia entre los focos $2c=20$;

6) la distancia entre las directrices es igual a $22\frac{2}{13}$ y la distancia entre los focos $2c=26$;

7) la distancia entre las directrices es igual a $\frac{32}{5}$ y el eje $2b=6$;

8) la distancia entre las directrices es igual a $\frac{8}{3}$ y la excentricidad $\varepsilon=\frac{3}{2}$;

9) las ecuaciones de las asíntotas son

$$y=\pm\frac{3}{4}x$$

y la distancia entre las directrices es igual a $12\frac{4}{5}$.

516. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están situados en el eje de ordenadas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, sabiendo, además, que:

1) sus semiejes $a=6$, $b=18$ (señalamos con la letra a el semieje situado en el eje de abscisas);

2) la distancia entre los focos $2c=10$ y la excentricidad $\varepsilon=\frac{5}{3}$;

3) las ecuaciones de las asíntotas son

$$y=\pm\frac{12}{5}x$$

y la distancia entre los vértices es igual a 48;

4) la distancia entre las directrices es igual a $7\frac{1}{7}$ y la excentricidad $\varepsilon=\frac{7}{5}$;

5) las ecuaciones de las asíntotas son

$$y=\pm\frac{4}{3}x$$

y la distancia entre las directrices es igual a $6\frac{2}{5}$.

517. Determinar los semiejes a y b de cada una de las hipérbolas siguientes:

$$1)\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;\quad 2)\ \frac{x^2}{16}-y^2=1;\quad 3)\ x^2-4y^2=16;$$

$$4)\ x^2-y^2=1;\quad 5)\ 4x^2-9y^2=25;\quad 6)\ 25x^2-16y^2=1;$$

$$7)\ 9x^2-64y^2=1.$$

518. Dada la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$, hallar:

1) los semiejes a y b; 2) los focos; 3) la excentricidad; 4) las ecuaciones de las asíntotas; 5) las ecuaciones de las directrices.

519. Dada la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = -144$, hallar:

1) los semiejes a y b; 2) los focos; 3) la excentricidad; 4) las ecuaciones de las asíntotas; 5) las ecuaciones de las directrices.

520. Calcular el área del triángulo formado por las asíntotas de la hipérbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

y la recta

$$9x + 2y - 24 = 0.$$

521. Averiguar qué líneas determinan las ecuaciones siguientes:

1) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$,

2) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$,

3) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$,

4) $y = +\frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$.

Representar estas líneas en el plano.

522. Se da el punto $M_1(10; -\sqrt{5})$ en la hipérbola

$$\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

Hallar las ecuaciones de las rectas, en las cuales están los radios focales del punto M_1.

523. Habiendo verificado que el punto $M_1\left(-5; \frac{9}{4}\right)$ está en la hipérbola

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

determinar los radios focales del punto M_1.

524. La excentricidad de una hipérbola es $\varepsilon = 2$; el radio focal de su punto M trazado desde uno de los focos es igual a 16. Calcular la distancia del punto M a la directriz, unilateral a este foco.

525. La excentricidad de una hipérbola es $\varepsilon = 3$; la distancia de un punto M de la hipérbola a la directriz es igual a 4. Calcular la distancia del punto M al foco, unilateral a esta directriz.

526. La excentricidad de una hipérbola es $\varepsilon = 2$; su centro está en el origen de coordenadas y uno de los focos es $F\,(12;\ 0)$. Calcular la distancia del punto M_1 de la hipérbola, de abscisa igual a 13, a la directriz correspondiente al foco dado.

527. La excentricidad de una hipérbola es $\varepsilon = \frac{3}{2}$; su centro está en el origen de coordenadas y una de sus directrices se da mediante la ecuación $x = -8$. Calcular la distancia del punto M_1 de la hipérbola, de abscisa igual a 10, al foco correspondiente a la directriz dada.

528. Determinar los puntos de la hipérbola

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1,$$

cuyas distancias al foco derecho son iguales a 4,5.

529. Determinar los puntos de la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$$

cuyas distancias al foco izquierdo son iguales a 7.

530. Por el foco izquierdo de la hipérbola

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$

se ha trazado una perpendicular al eje que contiene los vértices. Determinar las distancias de los focos a los puntos de intersección de esta perpendicular con la hipérbola.

531. Construir los focos de la hipérbola

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1,$$

sirviéndose solamente del compás (se supone que están representados los ejes de coordenadas y que se ha dado la unidad de medida).

532. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en el eje de abscisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, si se dan:

1) los puntos $M_1\,(6;\ -1)$ y $M_2\left(-8;\ 2\sqrt{2}\right)$ de la hipérbola;

2) el punto $M_1(-5, 3)$ de la hipérbola y la excentricidad $\varepsilon=\sqrt{2}$;

3) el punto $M_1\left(\frac{9}{2};\ -1\right)$ de la hipérbola y las ecuaciones de las asíntotas

$$y=\pm\frac{2}{3}x;$$

4) el punto $M_1\left(-3;\ \frac{5}{2}\right)$ de la hipérbola y las ecuaciones de las directrices

$$x=\pm\frac{4}{3};$$

5) las ecuaciones de las asíntotas

$$y=\pm\frac{3}{4}x$$

y las ecuaciones de las directrices

$$x=\pm\frac{16}{5}.$$

533. Determinar la excentricidad de una hipérbola equilátera.

534. Determinar la excentricidad de la hipérbola, si el segmento comprendido entre sus vértices se ve desde los focos de la hipérbola conjugada bajo un ángulo de 60°.

535. Los focos de una hipérbola coinciden con los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Hallar la ecuacion de la hipérbola, si su excentricidad es $\varepsilon=2$.

536. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en los vértices de la elipse

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$$

y las directrices pasan por los focos de esta elipse.

537. Demostrar que la distancia del foco de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

a su asíntota es igual a b.

538. Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

a sus dos asíntotas es una cantidad constante, igual a $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

539. Demostrar que el área del paralelogramo, limitado por las asíntotas de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

y las rectas trazadas por cualquiera de sus puntos y paralelas a las asíntotas, es una cantidad constante, igual a $\frac{ab}{2}$.

540. Hallar la ecuación de la hipérbola, si se conocen sus semiejes a y b, así como su centro $C(x_0;\ y_0)$ y los focos están situados en una recta:

1) paralela al eje Ox;
2) paralela al eje Oy.

541. Verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determina una hipérbola y hallar las coordenadas de su centro C, los semiejes, la excentricidad, las ecuaciones de las asíntotas y las ecuaciones de las directrices:

1) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;
2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$;
3) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.

542. Averiguar qué líneas determinan las ecuaciones siguientes:

1) $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$;

2) $y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$;

3) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$;

4) $x=5-\frac{3}{4}\sqrt{y^2+4y-12}$.

Representar estas líneas en el plano.

543. Hallar la ecuación de la hipérbola, sabiendo que:

1) la distancia entre sus vértices es igual a 24 y los focos son $F_1(-10; 2)$, $F_2(16; 2)$;

2) los focos son $F_1(3; 4)$, $F_2(-3; -4)$ y la distancia entre las directrices es igual a 3,6;

3) el ángulo entre las asíntotas es igual a 90° y los focos son $F_1(4; -4)$, $F_2(-2; 2)$.

544. Hallar la ecuación de la hipérbola, si se conoce su excentricidad $\varepsilon = \frac{5}{4}$, el foco $F(5; 0)$ y la ecuación de la directriz correspondiente

$$5x - 16 = 0.$$

545. Hallar la ecuación de la hipérbola, si se conoce su excentricidad $\varepsilon = \frac{13}{12}$, el foco $F(0; 13)$ y la ecuación de la directriz correspondiente

$$13y - 144 = 0.$$

546. El punto $A(-3; -5)$ está en una hipérbola, uno de cuyos focos es $F(-2; -3)$ y la directriz correspondiente se da mediante la ecuación

$$x + 1 = 0.$$

Hallar la ecuación de esta hipérbola.

547. Hallar la ecuación de la hipérbola, si se conoce su excentricidad $\varepsilon = \sqrt{5}$, el foco $F(2; -3)$ y la ecuación de la directriz correspondiente

$$3x - y + 3 = 0.$$

548. El punto $M_1(1; -2)$ está en una hipérbola, uno de cuyos focos es $F(-2; 2)$, y la directriz correspondiente se da mediante la ecuación

$$2x - y - 1 = 0.$$

Hallar la ecuación de esta hipérbola.

549. Se da la ecuación de una hipérbola equilátera

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Hallar su ecuación en el nuevo sistema, tomando sus asíntotas por ejes de coordenadas.

550. Habiendo verificado que cada una de las ecuaciones siguientes determina una hipérbola, hallar para cada una de ellas su centro, los semiejes, las ecuaciones de las asíntotas y construir cada una de ellas en el plano:

1) $xy = 18$, 2) $2xy - 9 = 0$, 3) $2xy + 25 = 0$.

551. Hallar los puntos de intersección de la recta

$$2x - y - 10 = 0$$

y la hipérbola

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

552. Hallar los puntos de intersección de la recta

$$4x - 3y - 16 = 0$$

y la hipérbola

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

553. Hallar los puntos de intersección de la recta

$$2x - y + 1 = 0$$

y la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

554. Determinar, en los casos siguientes, la posición de la recta con relación a la hipérbola y verificar si la corta, es tangente o pasa fuera de ella:

1) $x - y - 3 = 0$, $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$;

2) $x - 2y + 1 = 0$, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

3) $7x - 5y = 0$, $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

555. Determinar los valores de m para los que la recta

$$y = \frac{5}{2}x + m:$$

1) corta a la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$;
2) es tangente a ella;
3) pasa por fuera de esta hipérbola.

556. Deducir la condición, según la cual, la recta

$$y = kx + m$$

es tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

557. Hallar la ecuación de la tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

en su punto $M_1(x_1; y_1)$.

558. Demostrar que las tangentes a la hipérbola, trazadas desde un mismo diámetro, son paralelas.

559. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola

$$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1,$$

que son perpendiculares a la recta

$$4x+3y-7=0.$$

560. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1,$$

que son paralelas a la recta

$$10x-3y+9=0.$$

561. Trazar las tangentes a la hipérbola

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=-1,$$

que son paralelas a la recta

$$2x+4y-5=0$$

y calcular la distancia d entre ellas.

562. Hallar en la hipérbola

$$\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$$

el punto M_1 más próximo a la recta

$$3x+2y+1=0$$

y calcular la distancia d del punto M_1 a esta recta.

563. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola

$$x^2-y^2=16,$$

trazadas desde el punto $A(-1; -7)$.

564. Desde el punto C (1; —10) se han trazado tangentes a la hipérbola

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1.$$

Hallar la ecuación de la cuerda que une los puntos de contacto.

565. Desde el punto P (1; —5) se han trazado tangentes a la hipérbola

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1.$$

Calcular la distancia d del punto P a la cuerda de la hipérbola que une los puntos de contacto.

566. Una hipérbola pasa por el punto A ($\sqrt{6}$; 3) y es tangente a la recta

$$9x+2y-15=0.$$

Hallar la ecuación de esta hipérbola, si sus ejes coinciden con los ejes coordenados.

567. Hallar la ecuación de la hipérbola que es tangente a las dos rectas:

$$5x-6y-16=0, \quad 13x-10y-48=0,$$

si sus ejes coinciden con los ejes coordenados.

568. Habiendo verificado que los puntos de intersección de la elipse

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$$

y la hipérbola

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$$

son los vértices de un rectángulo, hallar las ecuaciones de sus lados.

569. Se da la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

y una tangente cualquiera de ella; P es el punto de intersección de la tangente y el eje Ox; Q es la proyección del punto de contacto sobre el mismo eje. Demostrar que

$$OP\cdot OQ=a^2.$$

570. Demostrar que los focos de la hipérbola están situados a diversos lados de cualquier tangente de ella.

571. Demostrar que el producto de las distancias de los focos de cualquier tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

es una cantidad constante, igual a b^2.

572. La recta

$$2x-y-4=0$$

es tangente a una hipérbola cuyos focos están en los puntos $F_1(-3;\ 0)$ y $F_2(3;\ 0)$. Hallar la ecuación de esta hipérbola.

573. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están situados en el eje de abscisas y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, si se conoce la ecuación de la tangente a la hipérbola

$$15x+16y-36=0$$

y la distancia entre sus vértices es $2a=8$.

574. Demostrar que la recta, tangente a la hipérbola en cierto punto M, forma ángulos iguales con los radios focales F_1M y F_2M y pasa por dentro del ángulo F_1MF_2.

575. Desde el foco derecho de la hipérbola

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$$

se ha dirigido un rayo de luz que forma con el eje Ox un ángulo α $\left(\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi\right)$. Se sabe que $\operatorname{tg}\alpha=2$. Llegando a la hipérbola, el rayo se ha reflejado de ella. Hallar la ecuación de la recta en la que está situado el rayo reflejado.

576. Demostrar que, teniendo focos comunes, la elipse y la hipérbola se cortan, formando un ángulo recto.

577. El coeficiente de contracción uniforme del plano hacia el eje Ox es igual a $\frac{4}{3}$. Determinar la ecuación de la línea, en la cual se transforma la hipérbola

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

después de esta contracción.

Observación. Véase el problema 509.

578. El coeficiente de contracción uniforme del plano hacia el eje Oy es igual a $\frac{4}{5}$. Determinar la ecuación de la línea, en la cual se transforma la hipérbola

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$$

después de esta contracción.

579. Hallar la ecuación de la línea, en la cual se transforma la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 9,$$

después de dos contracciones uniformes consecutivas del plano hacia los ejes coordenados, si los coeficientes de contracción uniforme del plano hacia los ejes Ox y Oy son respectivamente iguales a $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{3}$.

580. Determinar el coeficiente q de contracción uniforme del plano hacia el eje Ox, según la cual, la hipérbola

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1$$

se transforma en la hipérbola

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1.$$

581. Determinar el coeficiente q de contracción uniforme del plano hacia el eje Oy, según la cual, la hipérbola

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

se transforma en la hipérbola

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

582. Determinar los coeficientes q_1 y q_2 de dos contracciones uniformes consecutivas del plano hacia los ejes Ox y Oy, según las cuales, la hipérbola

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$$

se transforma en la hipérbola

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1.$$

§ 20. La parábola

Se llama parábola al lugar geométrico de los puntos, para cada uno de los cuales la distancia a un punto fijo del plano, llamado foco, es igual a la distancia a una recta fija, llamada directriz. El foco de la parábola se designa por la letra F, la distancia del foco a la directriz por la letra p. El número p se llama parámetro de la parábola.

Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano rectangular tal, que el eje de abscisas pase por el foco de la parábola dada, sea perpendicular a la directriz y tenga la dirección de la directriz al

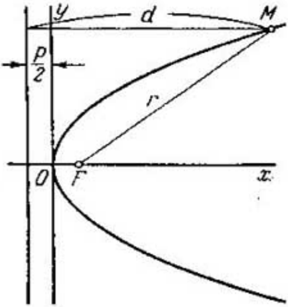

Fig. 19.

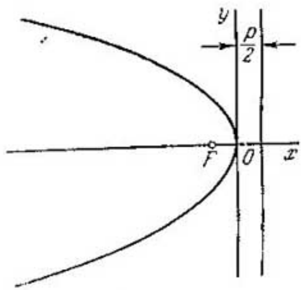

Fig. 20.

foco; el origen de coordenadas lo supondremos situado a igual distancia del foco y de la directriz (fig. 19). En este sistema de coordenadas, la parábola dada se determina por la ecuación

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

La ecuación (1) se llama ecuación canónica de la parábola. En este mismo sistema de coordenadas la directriz de la parábola tiene la ecuación

$$x = -\frac{p}{2}.$$

El radio focal de un punto arbitrario M $(x;\ y)$ de la parábola (es decir, la longitud del segmento FM) se puede calcular por la fórmula

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

La parábola tiene un eje de simetría, llamado eje, con el cual se corta en un punto único. El punto de intersección de la parábola y el eje se llama vértice. En el sistema de coordenadas elegido, como se ha indicado anteriormente, el eje de la parábola coincide con el eje de abscisas, el vértice está en el origen de coordenadas y toda la parábola se encuentra en el semiplano derecho.

Si el sistema de coordenadas se ha elegido de manera que el eje de abscisas coincide con el eje de la parábola y el origen de coordenadas con el vértice, pero la parábola está en el semiplano izquierdo (fig. 20), su ecuación será:

$$y^2 = -2px. \tag{2}$$

Si el origen de coordenadas se encuentra en el vértice y el eje coincide con el eje de ordenadas, la parábola tendrá la ecuación

$$x^2 = 2py, \tag{3}$$

en el caso de que esté situada en el semiplano superior (fig. 21), y la ecuación

$$x^2 = -2py, \tag{4}$$

en el caso de que esté situada en el semiplano inferior (fig. 22).

Cada una de las ecuaciones de la parábola (2), (3), (4), así como la ecuación (1), se llama ecuación canónica.

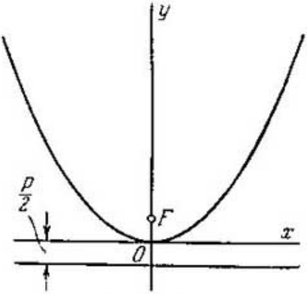

Fig. 21.

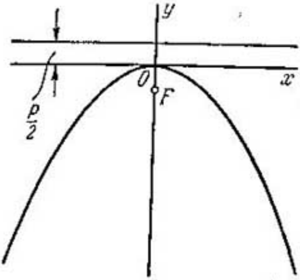

Fig. 22.

583. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen de coordenadas, sabiendo que:

1) la parábola está situada en el semiplano derecho, es simétrica con respecto al eje Ox y su parámetro es $p = 3$;

2) la parábola está situada en el semiplano izquierdo, es simétrica con respecto al eje Ox y su parámetro es $p = 0{,}5$;

3) la parábola está situada en el semiplano superior, es simétrica con respecto al eje Oy y su parámetro es $p = \frac{1}{4}$;

4) la parábola está situada en el semiplano inferior, es simétrica con respecto al eje Oy y su parámetro es $p = 3$;

584. Determinar el valor del parámetro y la situación de las parábolas siguientes con respecto a los ejes coordenados:

1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$; 3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$.

585. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen de coordenadas, sabiendo que:

1) la parábola es simétrica con respecto al eje Ox y pasa por el punto A (9; 6);

2) la parábola es simétrica con respecto al eje Ox y pasa por el punto B (—1; 3);

3) la parábola es simétrica con respecto al eje Oy y pasa por el punto C (1; 1);

4) la parábola es simétrica con respecto al eje Oy y pasa por el punto D (4; —8).

586. Un cable de acero está colgado por los dos extremos; los puntos de suspensión están situados a una misma altura y a una distancia de 20 m. La magnitud de la flexión a la distancia de 2 m de los puntos de suspensión en sentido horizontal, es igual a 14,4 cm. Determinar la magnitud de la flexión de este cable en su punto medio (la flecha), suponiendo que el cable tiene la forma de un arco de parábola.

587. Hallar la ecuación de la parábola que tiene el foco F (0; —3) y pasa por el origen de coordenadas, sabiendo que su eje sirve de eje Oy.

588. Averiguar las líneas que determinan las ecuaciones siguientes:

$$1)\ y=+2\sqrt{x},\ 2)\ y=+\sqrt{-x},\ 3)\ y=-3\sqrt{-2x},$$
$$4)\ y=-2\sqrt{x},\ 5)\ x=+\sqrt{5y},\quad 6)\ x=-5\sqrt{-y},$$
$$7)\ x=-\sqrt{3y},\ 8)\ x=+4\sqrt{-y}.$$

Representar estas líneas en el plano.

589. Hallar el foco F y la ecuación de la directriz de la parábola

$$y^2 = 24x.$$

590. Calcular el radio focal del punto M de la parábola

$$y^2 = 20x,$$

si la abscisa del punto M es igual a 7.

591. Calcular el radio focal del punto M de la parábola

$$y^2 = 12x,$$

si la ordenada del punto M es igual a 6.

592. Hallar en la parábola

$$y^2 = 16x,$$

los puntos cuyos radios focales son iguales a 13.

593. Hallar la ecuación de la parábola, si se da el foco $F(-7;\ 0)$ y la ecuación de la directriz

$$x - 7 = 0.$$

594. Hallar la ecuación de la parábola, sabiendo que su vértice coincide con el punto $(\alpha;\ \beta)$, el parámetro es igual a p, el eje es paralelo al eje Ox y la parábola se prolonga indefinidamente:

1) en la dirección positiva del eje Ox;

2) en la dirección negativa del eje Ox.

595. Hallar la ecuación de la parábola, sabiendo que su vértice coincide con el punto $(\alpha;\ \beta)$, el parámetro es igual a p, el eje es paralelo al eje Oy y la parábola se prolonga indefinidamente:

1) en la dirección positiva del eje Oy (es decir, la parábola es ascendiente);

2) en la dirección negativa del eje Oy (es decir, la parábola es descendiente).

596. Verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determina una parábola y hallar las coordenadas de su vértice A, la magnitud del parámetro p y la ecuación de la directriz:

$$1)\ y^2 = 4x - 8, \qquad 2)\ y^2 = 4 - 6x,$$
$$3)\ x^2 = 6y + 2, \qquad 4)\ x^2 = 2 - y.$$

597. Verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determina una parábola y hallar las coordenadas de su vértice A y la magnitud del parámetro p:

$$1)\ y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2, \qquad 2)\ y = 4x^2 - 8x + 7,$$

$$3)\ y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7.$$

598. Verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determina una parábola y hallar las coordenadas de su vértice A y la magnitud del parámetro p:

$$1)\ x = 2y^2 - 12y + 14, \qquad 2)\ x = -\frac{1}{4}y^2 + y,$$

$$3)\ x = -y^2 + 2y - 1.$$

599. Averiguar las líneas que determinan las ecuaciones siguientes:

$$1)\ y=3-4\sqrt{x-1}, \qquad 2)\ x=-4+3\sqrt{y+5},$$
$$3)\ x=2-\sqrt{6-2y}, \qquad 4)\ y=-5+\sqrt{-3x-21}.$$

Representar estas líneas en el plano.

600. Hallar la ecuación de la parábola, si se dan su foco F (7; 2) y la directriz

$$x-5=0.$$

601. Hallar la ecuación de la parábola, si se dan su foco F (4: 3) y la directriz

$$y+1=0.$$

602. Hallar la ecuación de la parábola, si se dan su foco F (2; —1) y la directriz

$$x-y-1=0.$$

603. Dado el vértice de una parábola A (6; —3) y la ecuación de su directriz

$$3x-5y+1=0,$$

hallar el foco F de esta parábola.

604. Dado el vértice de una parábola A (—2; —1) y la ecuación de su directriz

$$x+2y-1=0,$$

hallar la ecuación de esta parábola.

605. Hallar los puntos de intersección de la recta

$$x+y-3=0$$

y la parábola

$$x^2=4y.$$

606. Hallar los puntos de intersección de la recta

$$3x+4y-12=0$$

y la parábola

$$y^2=-9x.$$

607. Hallar los puntos de intersección de la recta

$$3x-2y+6=0$$

y la parábola

$$y^2 = 6x.$$

608. Determinar, en los casos siguientes, la posición relativa de la recta y la parábola: si la corta, si es tangente o pasa por fuera de ella:

$$1)\ x-y+2=0, \qquad y^2=8x;$$
$$2)\ 8x+3y-15=0, \quad x^2=-3y;$$
$$3)\ 5x-y-15=0, \qquad y^2=-5x.$$

609. ¿Para qué valores del coeficiente angular k, la recta

$$y = kx + 2:$$

1) corta a la parábola $y^2 = 4x$;
2) es tangente a ella;
3) pasa por fuera de esta parábola?

610. Deducir la condición, según la cual, la recta

$$y = kx + b$$

es tangente a la parábola

$$y^2 = 2px.$$

611. Demostrar que se puede trazar una, y solamente una, tangente a la parábola

$$y^2 = 2px,$$

cuyo coeficiente angular sea igual a $k \neq 0$.

612. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola

$$y^2 = 2px$$

en su punto $M_1(x_1;\ y_1)$.

613. Hallar la ecuación de la recta que es tangente a la parábola

$$y^2 = 8x$$

y paralela a la recta

$$2x + 2y - 3 = 0.$$

614. Hallar la ecuación de la recta que es tangente a la parábola

$$x^2 = 16y$$

y perpendicular a la recta

$$2x + 4y + 7 = 0.$$

615. Trazar una tangente a la parábola

$$y^2 = 12x$$

que sea paralela a la recta

$$3x - 2y + 30 = 0$$

y calcular la distancia d entre esta tangente y la recta dada.

616. Hallar en la parábola

$$y^2 = 64x$$

el punto M_1 más próximo a la recta

$$4x + 3y - 14 = 0$$

y calcular la distancia d del punto M_1 a esta recta.

617. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la parábola

$$y^2 = 36x$$

trazadas desde el punto A (2; 9).

618. Se ha trazado una tangente a la parábola

$$y^2 = 2px.$$

Demostrar que el vértice de esta parábola está en medio del punto de intersección de la tangente con el eje Ox y de la proyección del punto de contacto sobre el eje Ox.

619. Desde el punto A (5; 9) se han trazado tangentes a la parábola

$$y^2 = 5x.$$

Hallar la ecuacion de la cuerda que une los puntos de contacto.

620. Desde el punto P (—3; 12) se han trazado tangentes a la parábola

$$y^2 = 10x.$$

Calcular la distancia d del punto P a la cuerda de la parábola que une los puntos de contacto.

621. Determinar los puntos de intersección de la elipse

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$$

y de la parábola

$$y^2 = 24x.$$

622. Determinar los puntos de intersección de la hipérbola

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$$

y de la parábola

$$y^2 = 3x.$$

623. Determinar los puntos de intersección de las dos parábolas:

$$y = x^2 - 2x + 1, \quad x = y^2 - 6y + 7.$$

624. Demostrar que la recta, que es tangente a la parábola en un punto M, forma ángulos iguales con el radio focal del punto M y con el rayo que, partiendo del punto M, va paralelo al eje de la parábola en la dirección en que la parábola se prolonga indefinidamente.

625. Desde el foco de la parábola

$$y^2 = 12x$$

se ha dirigido un rayo de luz hacia el eje Ox, formando con él un ángulo agudo α. Se sabe que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Al llegar a la parábola se ha reflejado el rayo de ella. Hallar la ecuación de la recta en la que está el rayo reflejado.

626. Demostrar que dos parábolas que tienen un eje común y un foco común, situados entre sus vértices, se cortan formando un ángulo recto.

627. Demostrar que, si dos parábolas con los ejes perpendiculares entre sí se cortan en cuatro puntos, estos puntos están situados en una circunferencia.

§ 21. Ecuación polar de la elipse, de la hipérbola y de la parábola

La ecuación polar común a la elipse, a una rama de la hipérbola y a la parábola es

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}, \qquad (1)$$

en donde ρ y θ son las coordenadas polares de un punto arbitrario de la línea; p es el parámetro focal (la mitad de la cuerda focal que es perpendicular al eje); ε es la excentricidad (para la parábola $\varepsilon = 1$). Se supone que el sistema polar de coordenadas se ha elegido de manera que el polo está en el foco y el eje polar va por el eje de la línea en dirección contraria a la directriz más próxima a este foco.

628. Dada la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

hallar su ecuación polar, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

1) en el foco izquierdo de la elipse;
2) en el foco derecho.

629. Dada la ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1,$$

hallar la ecuación polar de su rama derecha, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el foco está:

1) en el foco derecho de la hipérbola;
2) en el foco izquierdo.

630. Dada la ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1,$$

hallar la ecuación polar de su rama izquierda, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está:

1) en el foco izquierdo de la hipérbola;
2) en el foco derecho.

631. Dada la ecuación de la parábola

$$y^2=6x,$$

hallar su ecuación polar, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el foco de la parábola.

632. Determinar las líneas que se dan en coordenadas polares mediante las ecuaciones siguientes:

1) $\rho=\dfrac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$, 2) $\rho=\dfrac{6}{1-\cos\theta}$, 3) $\rho=\dfrac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\theta}$,

4) $\rho=\dfrac{12}{2-\cos\theta}$, 5) $\rho=\dfrac{5}{3-4\cos\theta}$, 6) $\rho=\dfrac{1}{3-3\cos\theta}$

633. Verificar que la ecuación

$$\rho=\frac{144}{13-5\cos\theta}$$

determina una elipse y hallar sus semiejes.

634. Verificar que la ecuación

$$\rho = \frac{18}{4-5\cos\theta}$$

determina la rama derecha de una hipérbola y hallar sus semiejes.

635. Verificar que la ecuación

$$\rho = \frac{21}{5-2\cos\theta}$$

determina una elipse y hallar las ecuaciones polares de sus directrices.

636. Verificar que la ecuación

$$\rho = \frac{16}{3-5\cos\theta}$$

determina la rama derecha de una hipérbola y hallar las ecuaciones polares de las directrices y de las asíntotas de esta hipérbola.

637. Hallar en la elipse

$$\rho = \frac{12}{3-\sqrt{2}\cos\theta}$$

los puntos cuyos radios polares son iguales a 6.

638. Hallar en la hipérbola

$$\rho = \frac{15}{3-4\cos\theta}$$

los puntos cuyos radios polares son iguales a 3.

639. Hallar en la parábola

$$\rho = \frac{p}{1-\cos\theta}$$

los puntos:

1) cuyos radios polares sean mínimos;

2) cuyos radios polares sean iguales al parámetro de la parábola.

640. Dada la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

hallar su ecuación polar, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el centro de la elipse.

641. Dada la ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

hallar su ecuación polar, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el centro de la hipérbola.

642. Dada la ecuación de la parábola

$$y^2 = 2px,$$

hallar su ecuación polar, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el vértice de la parábola.

§ 22. Diámetros de las líneas de segundo orden

En los cursos de geometría analítica se demuestra que los puntos medios de las cuerdas paralelas de las líneas de segundo orden están situados en una recta. Esta recta se llama diámetro de la línea de segundo orden. El diámetro que divide por la mitad alguna cuerda (y, por lo tanto, todas las cuerdas paralelas a ella), se llama conjugado a esta cuerda (y a todas las cuerdas paralelas a ella).

Todos los diámetros de la elipse y de la hipérbola pasan por el centro. Si la elipse se ha dado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

el diámetro conjugado a las cuerdas que tienen el coeficiente angular k, se determina por la ecuación

$$y=-\frac{b^2}{a^2k}x.$$

Si la hipérbola se ha dado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

el diámetro conjugado a las cuerdas que tienen el coeficiente angular k, se determina por la ecuación

$$y=\frac{b^2}{a^2k}x.$$

Todos los diámetros de la parábola son paralelos a su eje. Si la parábola se ha dado mediante la ecuación

$$y^2=2px,$$

el diámetro conjugado a las cuerdas que tienen el coeficiente angular k, se determina por la ecuación

$$y=\frac{p}{k}\ .$$

Si uno de los diámetros de la elipse o de la hipérbola divide por la mitad las cuerdas paralelas a otro diámetro, este último divide entonces por la mitad las cuerdas paralelas al diámetro anterior. Tales diámetros se llaman conjugados entre sí.

Si k y k' son los coeficientes angulares de dos diámetros conjugados entre sí de la elipse (1), tendremos que

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{3}$$

Si k y k' son los coeficientes angulares de dos diámetros conjugados entre sí de la hipérbola (2), tendremos que

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}. \tag{4}$$

Las relaciones (3) y (4) se llaman condiciones de conjugación de los diámetros de la elipse y de la hipérbola, respectivamente.

El diámetro de la línea de segundo orden, perpendicular a las cuerdas conjugadas, se llama principal.

643. Hallar la ecuación del diámetro de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

que pasa por la mitad de la cuerda que intercepta en la recta

$$2x - y - 3 = 0.$$

644. Hallar la ecuación de la cuerda de la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

que pasa por el punto A (1; —2) y es dividida en él por la mitad.

645. Hallar las ecuaciones de dos diámetros conjugados entre sí de la elipse

$$x^2 + 4y^2 = 1,$$

uno de los cuales forma un ángulo de 45° con el eje Ox.

646. Hallar las ecuaciones de dos diámetros conjugados entre sí de la elipse

$$4x^2 + 9y^2 = 1,$$

si uno de ellos es paralelo a la recta

$$x + 2y - 5 = 0.$$

647. Hallar las ecuaciones de dos diámetros conjugados entre sí de la elipse

$$x^2 + 3y^2 = 1,$$

si uno de ellos es perpendicular a la recta

$$3x + 2y - 7 = 0.$$

648. En el plano está representada una elipse. Construir su centro sirviéndose de una regla y un compás.

649. Demostrar que los ejes de la elipse forman el único par de sus diámetros principales.

650. Aplicando las propiedades de los diámetros conjugados, demostrar que cada diámetro de la circunferencia es principal.

651. a) En la elipse se ha inscrito un triángulo isósceles de manera que uno de sus vértices coincide con uno de los vértices de la elipse. Demostrar que la base de este triángulo es paralela a uno de los ejes de la elipse.

b) Demostrar que los lados del rectángulo inscrito en la elipse son paralelos a los ejes de esta elipse.

c) En el plano está representada una elipse. Construir sus diámetros principales, sirviéndose de una regla y un compás.

652. Demostrar que las cuerdas de la elipse que unen un punto arbitrario de ella con los extremos de cualquier diámetro de esta elipse, son paralelas al par de sus diámetros conjugados.

653. a) Demostrar que la suma de los cuadrados de dos semidiámetros conjugados de la elipse es una cantidad constante (igual a la suma de los cuadrados de sus semiejes).

b) Demostrar que el área del paralelogramo, construido sobre dos semidiámetros conjugados de la elipse, es una cantidad constante (igual al área del rectángulo construido sobre sus semiejes).

654. Hallar la ecuación del diámetro de la hipérbola

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

que pasa por la mitad de la cuerda que intercepta en la recta

$$2x - y + 3 = 0.$$

655. Dada la hipérbola

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{7} = 1,$$

hallar la ecuación de la cuerda que pasa por el punto A (3; —1) y se divide en él por la mitad.

656. Hallar las ecuaciones de dos diámetros conjugados de la hipérbola

$$x^2 - 4y^2 = 4,$$

si uno de ellos pasa por el punto A (8; 1).

657. Hallar las ecuaciones de los diámetros conjugados de la hipérbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1,$$

que forman un ángulo de 45°.

658. En el plano está representada una hipérbola. Construir su centro, sirviéndose de una regla y un compás.

659. Demostrar que los ejes de la hipérbola forman el único par de sus diámetros principales.

660. En el plano está representada una hipérbola. Construir sus diámetros principales, sirviéndose de una regla y un compás.

661. Hallar la ecuación del diámetro de la parábola

$$y^2 = 12x,$$

que pasa por la mitad de la cuerda que intercepta en la recta

$$3x + y - 5 = 0.$$

662. Dada la parábola

$$y^2 = 20x,$$

hallar la ecuación de la cuerda que pasa por el punto A (2; 5) y se divide en él por la mitad.

663. Demostrar que el eje de la parábola es el único diámetro principal.

664. En el plano está representada una parábola. Construir su diámetro principal empleando una regla y un compás.

V

Capítulo

SIMPLIFICACION DE LA ECUACION GENERAL DE LA LINEA DE SEGUNDO ORDEN. ECUACIONES DE ALGUNAS CURVAS QUE SE PRESENTAN EN LAS MATEMATICAS Y EN SUS APLICACIONES

§ 23. Centro de la línea de segundo orden

Se llama línea de segundo orden, a la línea que en cierto sistema de coordenadas cartesiano se determina mediante una ecuación de segundo grado. Se ha convenido en escribir la ecuación general de segundo grado (de dos variables) en la forma:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (1)$$

Se llama centro de una línea al punto del plano con respecto al cual los puntos de esta línea están situados en pares de puntos simétricos. Las líneas de segundo orden que tienen un solo centro se llaman centrales.

El punto S $(x_0; y_0)$ es centro de la línea determinada por la ecuación (1) cuando, y solamente cuando, sus coordenadas satisfacen a las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} Ax_0+By_0+D=0,\\ Bx_0+Cy_0+E=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Designemos por δ el determinante de este sistema:

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C\end{vmatrix}.$$

La cantidad δ se forma con los coeficientes de los términos superiores de la ecuación (1) y se llama discriminante de los términos superiores de esta ecuación.

Si $\delta \neq 0$, el sistema (2) es compatible y determinado, es decir, tiene solución, que, además, es única. En este caso se pueden hallar las coordenadas del centro mediante las fórmulas:

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C\end{vmatrix}}, \quad y_0=\frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C\end{vmatrix}}.$$

La desigualdad $\delta \neq 0$ caracteriza la línea central de segundo orden.

Si $S(x_0;\ y_0)$ es el centro de la línea de segundo orden, después de la transformación de coordenadas mediante las fórmulas

$$x=\tilde{x}+x_0,\quad y=\tilde{y}+y_0$$

(que corresponde al traslado del origen de coordenadas al centro de la línea) su ecuación tomará la forma

$$A\tilde{x}^2+2B\tilde{x}\tilde{y}+C\tilde{y}^2+\tilde{F}=0,$$

en la que A, B, C son los mismos que en la ecuación dada (1) y $\tilde{F}$ se determina mediante la fórmula

$$\tilde{F}=Dx_0+Ey_0+F.$$

Si $\delta \neq 0$, se verifica también la fórmula siguiente:

$$\tilde{F}=\frac{\Delta}{\delta},$$

en donde

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

El determinante Δ se llama discriminante del primer miembro de la ecuación general de segundo grado.

665. Determinar cuáles de las líneas siguientes son centrales (es decir, tienen un centro único), cuáles no tienen centro y cuáles tienen infinidad de centros:

1) $3x^2-4xy-2y^2+3x-12y-7=0;$
2) $4x^2+5xy+3y^2-x+9y-12=0;$
3) $4x^2-4xy+y^2-6x+8y+13=0;$
4) $4x^2-4xy+y^2-12x+6y-11=0;$
5) $x^2-2xy+4y^2+5x-7y+12=0;$
6) $x^2-2xy+y^2-6x+6y-3=0;$
7) $4x^2-20xy+25y^2-14x+2y-15=0;$
8) $4x^2-6xy-9y^2+3x-7y+12=0.$

666. Verificar que las líneas dadas a continuación son centrales y hallar para cada una de ellas las coordenadas del centro:

1) $3x^2+5xy+y^2-8x-11y-7=0;$
2) $5x^2+4xy+2y^2+20x+20y-18=0;$
3) $9x^2-4xy-7y^2-12=0;$
4) $2x^2-6xy+5y^2+22x-36y+11=0.$

667. Verificar que cada una de las líneas dadas a continuación tiene infinidad de centros; hallar para cada una de ellas la ecuación del lugar geométrico de los centros:

1) $x^2-6xy+9y^2-12x+36y+20=0$;
2) $4x^2+4xy+y^2-8x-4y-21=0$;
3) $25x^2-10xy+y^2+40x-8y+7=0$.

668. Verificar que cada una de las ecuaciones dadas a continuación determina una línea central; transformar cada una de ellas mediante un traslado del origen de coordenadas al centro:

1) $3x^2-6xy+2y^2-4x+2y+1=0$;
2) $6x^2+4xy+y^2+4x-2y+2=0$;
3) $4x^2+6xy+y^2-10x-10=0$;
4) $4x^2+2xy+6y^2+6x-10y+9=0$.

669. ¿Para qué valores de m y n la ecuación

$$mx^2+12xy+9y^2+4x+ny-13=0$$

determina:

a) una línea central;
b) una línea sin centro;
c) una línea que tiene infinidad de centros?

670. Dada la ecuación de la línea

$$4x^2-4xy+y^2+6x+1=0,$$

determinar para qué valores del coeficiente angular k la recta

$$y=kx$$

a) corta a esta línea en un punto;
b) es tangente a esta línea;
c) corta a esta línea en dos puntos;
d) no tiene puntos comunes con esta línea.

671. Hallar la ecuación de la línea de segundo orden, que, teniendo el centro en el origen de coordenadas, pasa por el punto M (6; $-$ 2) y es tangente a la recta

$$x-2=0$$

en el punto N (2; 0).

672. El punto P (1; -2) es el centro de una línea de segundo orden que pasa por el punto Q (0; -3) y es tangente al eje Ox en el origen de coordenadas. Hallar la ecuación de esta línea.

§ 24. Reducción de la ecuación de la línea central de segundo orden a la forma más simple

Supongamos que se da una ecuación

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

que determina una línea central de segundo orden ($\delta = AC - B^2 \neq 0$). Trasladando el origen de coordenadas al centro S (x_0; y_0) de esta línea y transformando la ecuación (1) mediante las fórmulas

$$x=\tilde{x}+x_0, \quad y=\tilde{y}+y_0,$$

obtenemos;

$$A\tilde{x}^2+2B\tilde{x}\tilde{y}+C\tilde{y}^2+\tilde{F}=0. \qquad (2)$$

Para calcular $\tilde{F}$ se puede aplicar la fórmula

$$\tilde{F}=Dx_0+Ey_0+F$$

o la fórmula

$$\tilde{F}=\frac{\Delta}{\delta}.$$

La reducción ulterior de la ecuación (2) se consigue mediante una transformación de coordenadas

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}&=x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha, \\ \tilde{y}&=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

que corresponde a una rotación de los ejes en un ángulo α.

Si se ha elegido el ángulo α de manera que

$$B\operatorname{tg}^2\alpha-(C-A)\operatorname{tg}\alpha-B=0, \qquad (4)$$

la ecuación de la línea en las coordenadas nuevas toma la forma

$$A'x'^2+C'y'^2+\tilde{F}=0, \qquad (5)$$

en donde $A' \neq 0$, $C' \neq 0$.

N o t a. La ecuación (4) permite hallar $\operatorname{tg}\alpha$, mientras que en las fórmulas (3) figuran $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Conociendo $\operatorname{tg}\alpha$ se puede hallar $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ mediante las fórmulas de la trigonometría

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Entre los coeficientes de las ecuaciones (1) y (5) existen las importantes relaciones

$$A'C'=AC-B^2,$$
$$A'+C'=A+C,$$

que permiten determinar los coeficientes A' y C' sin hacer ninguna transformación de coordenadas.

Una ecuación de segundo orden se llama elíptica, si $\delta > 0$; hiperbólica, si $\delta < 0$ y parabólica, si $\delta = 0$. La ecuación de una línea central solamente puede ser elíptica o hiperbólica.

Toda ecuación elíptica es una ecuación, bien de una elipse ordinaria, bien de una elipse degenerada (es decir, determina un punto único), o de una elipse imaginaria (en este caso, la ecuación no determina ninguna figura geométrica).

Toda ecuación hiperbólica determina, bien una hipérbola ordinaria, bien una hipérbola degenerada (es decir, un par de rectas concurrentes).

673. Determinar el tipo de cada una de las ecuaciones siguientes *): reducir cada una de ellas a la forma más simple mediante un traslado paralelo de los ejes coordenados; averiguar qué figuras geométricas determinan y representar en un plano la situación de estas figuras con relación a los ejes de coordenadas antiguos y nuevos:

1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;
2) $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$;
3) $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0$;
4) $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$;
5) $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$.

674. Reducir cada una de las ecuaciones siguientes a la forma más simple; hallar el tipo de cada una de ellas; averiguar las figuras geométricas que determinan y representar en un plano la posición de estas figuras con respecto a los ejes coordenados antiguos y nuevos:

1) $32x^2+52xy-7y^2+180=0$;
2) $5x^2-6xy+5y^2-32=0$;
3) $17x^2-12xy+8y^2=0$;
4) $5x^2+24xy-5y^2=0$;
5) $5x^2-6xy+5y^2+8=0$.

675. Calculando el discriminante de los términos superiores de las ecuaciones siguientes, determinar el tipo de cada una de ellas:

1) $2x^2+10xy+12y^2-7x+18y-15=0$;
2) $3x^2-8xy+7y^2+8x-15y+20=0$;
3) $25x^2-20xy+4y^2-12x+20y-17=0$;
4) $5x^2+14xy+11y^2+12x-7y+19=0$;
5) $x^2-4xy+4y^2+7x-12=0$;
6) $3x^2-2xy-3y^2+12y-15=0$.

---

*) Es decir, determinar cuáles de ellas son elípticas, cuáles hiperbólicas y cuáles parabólicas.

676. Reducir cada una de las ecuaciones siguientes a la forma canónica; hallar el tipo de cada una de ellas; averiguar qué figuras geométricas determinan; representar en cada caso, en un plano, los ejes del sistema inicial de coordenadas, los ejes de los otros sistemas de coordenadas que se emplean durante la resolución y las figuras geométricas que determinan las ecuaciones dadas:

1) $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$;
2) $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$;
3) $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$;
4) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$;
5) $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0$;
6) $5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0$.

677. Hacer lo mismo que en el problema anterior para las ecuaciones:

1) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$;
2) $11x^2-20xy-4y^2-20x-8y+1=0$;
3) $7x^2+60xy+32y^2-14x-60y+7=0$;
4) $50x^2-8xy+35y^2+100x-8y+67=0$;
5) $41x^2+24xy+34y^2+34x-112y+129=0$;
6) $29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0$;
7) $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$;
8) $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$.

678. Sin transformar las coordenadas, verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determina una elipse y hallar las magnitudes de sus semiejes:

1) $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$;
2) $8x^2+4xy+5y^2+16x+4y-28=0$;
3) $13x^2+18xy+37y^2-26x-18y+3=0$;
4) $13x^2+10xy+13y^2+46x+62y+13=0$.

679. Sin transformar las coordenadas, verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determina un punto único (una elipse degenerada) y hallar sus coordenadas:

a) $5x^2-6xy+2y^2-2x+2=0$;
b) $x^2+2xy+2y^2+6y+9=0$;
c) $5x^2+4xy+y^2-6x-2y+2=0$;
d) $x^2-6xy+10y^2+10x-32y+26=0$.

680. Sin transformar las coordenadas, verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determina una hipérbola y hallar las magnitudes de sus semiejes:

1) $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$;
2) $12x^2+26xy+12y^2-52x-48y+73=0$;
3) $3x^2+4xy-12x+16=0$;
4) $x^2-6xy-7y^2+10x-30y+23=0$.

681. Sin transformar las coordenadas, verificar que cada una de las ecuaciones siguientes determina un par de rectas concurrentes (una hipérbola degenerada) y hallar sus ecuaciones:

a) $3x^2+4xy+y^2-2x-1=0$;
b) $x^2-6xy+8y^2-4y-4=0$;
c) $x^2-4xy+3y^2=0$;
d) $x^2+4xy+3y^2-6x-12y+9=0$.

682. Sin transformar las coordenadas, averiguar qué figuras geométricas determinan las ecuaciones siguientes:

1) $8x^2-12xy+17y^2+16x-12y+3=0$;
2) $17x^2-18xy-7y^2+34x-18y+7=0$;
3) $2x^2+3xy-2y^2+5x+10y=0$;
4) $6x^2-6xy+9y^2-4x+18y+14=0$;
5) $5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0$.

683. Demostrar que, para cualquier ecuación elíptica, los coeficientes A y C no pueden convertirse en cero y son números de un mismo signo.

684. Demostrar que una ecuación elíptica de segundo grado ($\delta>0$) determina una elipse cuando, y solamente cuando, A y Δ son números de signo contrario.

685. Demostrar que una ecuación elíptica de segundo grado ($\delta>0$) es la ecuación de una elipse imaginaria cuando, y solamente cuando, A y Δ son números de igual signo.

686. Demostrar que una ecuación elíptica de segundo grado ($\delta > 0$) determina una elipse degenerada (un punto) cuando, y solamente cuando, $\Delta = 0$.

687. Demostrar que una ecuación hiperbólica de segundo grado ($\delta < 0$) determina una hipérbola cuando, y solamente cuando, $\Delta \neq 0$.

688. Demostrar que una ecuación hiperbólica de segundo grado ($\delta < 0$) determina una hipérbola degenerada (un par de rectas concurrentes) cuando, y solamente cuando, $\Delta = 0$.

§ 25. Reducción de la ecuación parabólica a la forma más simple

Supongamos que la ecuación

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

es parabólica, es decir, satisface a la condición

$$\delta = AC - B^2 = 0.$$

En este caso, la línea definida por la ecuación (1) o no tiene centro o tiene infinidad de centros. Resulta conveniente comenzar la simplificación de la ecuación parabólica mediante una rotación de los ejes coordenados, o sea, transformando primero la ecuación (1) mediante las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \\ y &= x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

El ángulo α se halla de la ecuación

$$B \operatorname{tg}^2\alpha - (C - A)\operatorname{tg}\alpha - B = 0; \tag{3}$$

entonces, la ecuación (1), en coordenadas nuevas, se reduce a la forma

$$A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0, \tag{4}$$

en donde $A' \neq 0$, o a la forma

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0, \tag{5}$$

en donde $C' \neq 0$.

La simplificación ulterior de las ecuaciones (4) y (5) se consigue mediante un traslado paralelo de los ejes (girados).

689. Verificar que cada una de las ecuaciones siguientes es parabólica; reducir cada una de ellas a la forma más simple; averiguar qué figuras geométricas determinan; representar en cada caso, en un plano, los ejes del sistema de coordenadas inicial, los ejes de los otros sistemas de coordenadas que aparecen durante la resolución y la figura geométrica determinada por la ecuación dada:

1) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$;

2) $9x^2+12xy+4y^2-24x-16y+3=0$;

3) $16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0$.

690. Hacer lo mismo que en el problema anterior para las ecuaciones:

1) $9x^2+24xy+16y^2-18x+226y+209=0$;

2) $x^2-2xy+y^2-12x+12y-14=0$;

3) $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$.

691. Demostrar que, para cualquier ecuación parabólica, los coeficientes A y C no pueden ser números de signo contrario y no pueden convertirse en cero simultáneamente.

692. Demostrar que cualquier ecuación parabólica puede escribirse en la forma:

$$(\alpha x+\beta y)^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Demostrar también que las ecuaciones elípticas e hiperbólicas no pueden tener esta forma.

693. Verificar que las ecuaciones siguientes son parabólicas y escribir cada una de ellas en la forma indicada en el problema 692:

1) $x^2+4xy+4y^2+4x+y-15=0$;

2) $9x^2-6xy+y^2-x+2y-14=0$;

3) $25x^2-20xy+4y^2+3x-y+11=0$;

4) $16x^2+16xy+4y^2-5x+7y=0$;

5) $9x^2-42xy+49y^2+3x-2y-24=0$.

694. Demostrar que, si una ecuación de segundo grado es parabólica y está escrita en la forma

$$(\alpha x+\beta y)^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

el discriminante del primer miembro de la ecuación se determina mediante la fórmula

$$\Delta=-(D\beta-E\alpha)^2.$$

695. Demostrar que la ecuación parabólica

$$(\alpha x+\beta y)^2+2Dx+2Ey+F=0$$

después de la transformación

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta, \qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{\alpha}{\beta}$$
$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta,$$

se reduce a la forma

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

en donde

$$C' = \alpha^2 + \beta^2, \quad D' = \pm\sqrt{\frac{-\Delta}{\alpha^2+\beta^2}},$$

y Δ es el discriminante del primer miembro de la ecuación dada.

696. Demostrar que la ecuación parabólica determina una parábola cuando, y solamente cuando, $\Delta \neq 0$. Demostrar que en este caso el parámetro de la parábola se determina mediante la fórmula

$$p = \sqrt{\frac{-\Delta}{(A+C)^3}}.$$

697. Verificar, sin transformación de coordenadas, que cada una de las ecuaciones siguientes determina una parábola y hallar el parámetro de esta parábola:

1) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 120x + 90y = 0;$

2) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 54x - 178y + 181 = 0;$

3) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0;$

4) $9x^2 - 6xy + y^2 - 50x + 50y - 275 = 0.$

698. Demostrar que una ecuación de segundo grado es la ecuación de una línea degenerada cuando, y solamente cuando, $\Delta = 0$.

699. Verificar, sin transformación de coordenadas, que cada una de las ecuaciones siguientes determina un par de rectas paralelas y hallar sus ecuaciones:

a) $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0;$

b) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 20x - 30y - 11 = 0;$

c) $25x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y - 15 = 0.$

700. Verificar, sin transformación de coordenadas, que cada una de las ecuaciones siguientes determina una recta (un par de rectas coincidentes) y hallar la ecuación de esta recta:

a) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$;

b) $9x^2 + 30xy + 25y^2 + 42x + 70y + 49 = 0$;

c) $16x^2 - 16xy + 4y^2 - 72x + 36y + 81 = 0$.

§ 26. Ecuaciones de algunas curvas que se presentan en las matemáticas y en sus aplicaciones

701. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que el producto de sus distancias a dos puntos

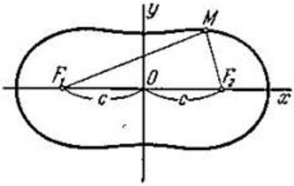

Fig. 23.

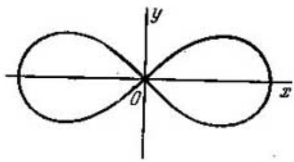

Fig. 24.

dados $F_1(-c; 0)$ y $F_2(c; 0)$ es una cantidad constante, igual a a^2. Este lugar geométrico de puntos se llama óvalo de Cassini (fig. 23).

702. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que el producto de sus distancias a dos puntos dados $F_1(-a; 0)$ y $F_2(a; 0)$ es una cantidad constante, igual a a^2. Este lugar geométrico de puntos se llama lemniscata (fig. 24). (Hallar, primero, la ecuación de la lemniscata directamente y, después, considerándola como un caso particular del óvalo de Cassini). Hallar también la ecuación de la lemniscata en coordenadas polares, haciendo coincidir el eje polar con el semieje positivo Ox y el polo con el origen de coordenadas.

703. Hallar la ecuación del lugar geométrico de las bases de las perpendiculares bajadas desde el origen de coordenadas a las rectas que interceptan en el ángulo coordenado triángulos de un area constante, igual a S.

Observación. Hallar, primero, la ecuación en coordenadas polares, haciendo coincidir el polo con el origen de coordenadas y el eje polar con el semieje positivo Ox.

704. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos del problema 703 es una lemniscata (véase el problema 702).

Observación. Hacer girar los ejes coordenados un ángulo de 45°.

705. Un rayo a, cuya posición inicial coincidía con el eje polar, gira alrededor del polo O con una velocidad angular constante ω. Hallar, en el sistema polar de coordenadas dado, la ecuación de la trayectoria de un punto M que se mueve uniformemente por el rayo a con una velocidad v, si en su posición inicial coincide con el punto O (la espiral de Arquímedes, (fig. 25).

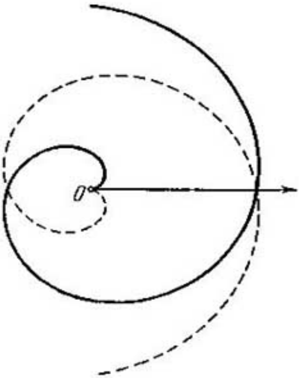

Fig. 25.

706. Se da la recta $x = 2r$ y una circunferencia de radio r que pasa por el origen de coordenadas O y es tangente a la recta; desde el punto O se ha trazado un rayo que corta a la circunferencia dada en el punto B y a la recta dada en el punto C; en él se ha marcado un segmento $OM = BC$ (fig. 26). Al girar el rayo, varía la longitud del segmento OM y el punto M describe una curva llamada cisoide. Hallar la ecuación de la cisoide.

707. Se da la recta $x = a$ $(a > 0)$ y una circunferencia de diámetro a que pasa por el origen de coordenadas O y es tangente a la recta dada; desde el punto O se ha trazado un rayo que corta a la circunferencia en el punto A y a la recta dada en el punto B. Desde los puntos A y B se han trazado rectas paralelas a los ejes Oy y Ox, respectivamente (fig. 27). Al girar el rayo, el punto M de intersección de estas rectas, describe una línea llamada curva de Agnesi. Hallar su ecuación.

708. Desde el punto A $(-a; 0)$, en donde $a > 0$, se ha trazado un rayo AB (fig. 28), en el cual, a ambos lados del punto B, se han trazado unos segmentos BM y BN de igual longitud b $(b = \text{const.})$. Al girar el rayo, los puntos M y N describen una curva, llamada concoide. Hallar su ecuación, primero, en coordenadas polares, tomando el punto A por polo y dirigiendo el eje polar en la dirección

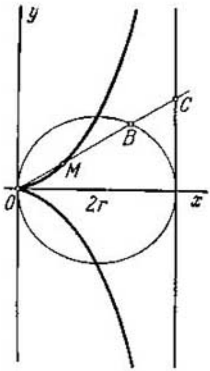

Fig. 26.

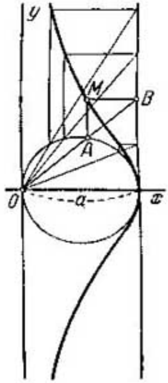

Fig. 27.

positiva del eje Ox y, después, pasando al sistema cartesiano de coordenadas rectangulares dado.

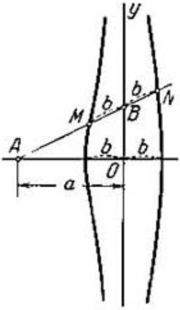

Fig. 28.

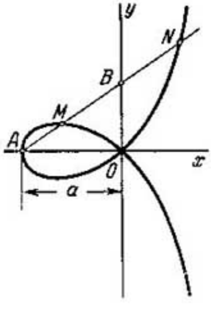

Fig. 29.

709. Desde el punto A $(-a; 0)$, en donde $a > 0$, se ha trazado un rayo AB (fig. 29), en el cual, a ambos lados del punto B se han trazado unos segmentos BM y BN, iguales a OB. Al girar el rayo, los puntos M y N describen una curva, llamada e s t r o f o i d e. Hallar su ecuación, primero, en coordenadas polares, tomando el punto A por polo y dirigiendo el eje polar en la dirección positiva del eje Ox y, después, pasando al sistema cartesiano de coordenadas rectangulares dado.

710. Desde el origen de coordenadas se ha trazado un rayo que corta a una circunferencia dada $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) en el punto B (fig. 30); en el rayo, a ambos

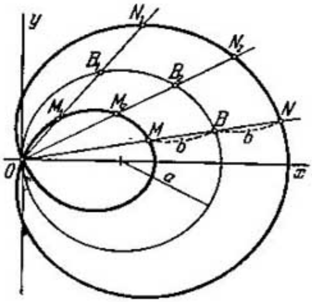

Fig. 30.

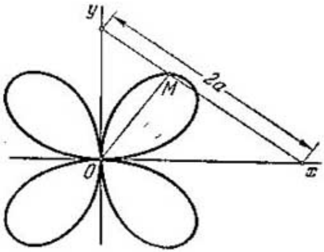

Fig. 31.

lados del punto B, se han trazado unos segmentos, iguales a BM y BN de longitud constante b. Al girar el rayo, los puntos M y N describen una curva, llamada c a r a c o l d e P a s c a l (fig. 30). Hallar su ecuación, primero, en coordenadas polares, tomando el origen de coordenadas por polo y el semieje positivo Ox por eje polar y, después, pasando al sistema cartesiano de coordenadas rectangulares.

711. Un segmento de longitud $2a$ se mueve de manera que sus extremos están situados todo el tiempo en los ejes de coordenadas. Hallar la ecuación de la trayectoria de la base M de la perpendicular bajada del origen de coordenadas al segmento (fig. 31), primero, en coordenadas polares, tomando el origen de coordenadas por polo y el semieje positivo Ox por eje polar y, después, pasando al sistema cartesiano de coordenadas rectangulares. El punto M describe una curva llamada r o s a d e c u a t r o h o j a s.

712. Un segmento de longitud a se mueve de manera que sus extremos están situados todo el tiempo en los ejes de coordenadas (fig. 32). Por los extremos del segmento se han trazado rectas paralelas a los ejes coordenados hasta su intersección en el punto P. Hallar la ecuación de la

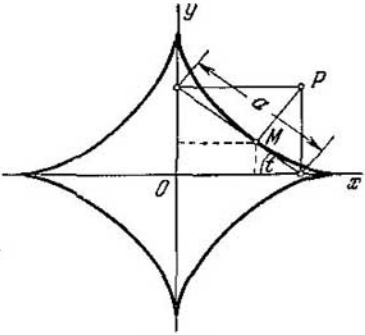

Fig. 32.

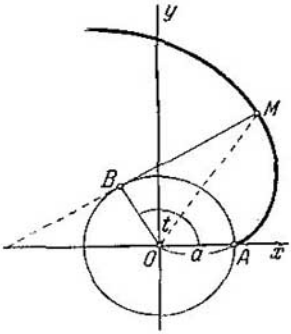

Fig. 33.

trayectoria de la base M de la perpendicular bajada del punto P al segmento. Esta trayectoria se llama a s t r o i d e.

N o t a. Hallar, primero, las ecuaciones paramétricas de la astroide, eligiendo el parámetro t como se indica en la fig. 32 (eliminar, después, el parámetro t).

713. Desde el punto B de intersección del rayo OB con la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$ se ha bajado una perpendicular BC al eje Ox. Desde el punto C se ha bajado una perpendicular CM al rayo OB. Deducir la ecuación de la trayectoria del punto M, primero, en coordenadas polares, tomando el origen de coordenadas por polo y el semieje positivo Ox por eje polar y, después, pasando al sistema cartesiano de coordenadas rectangulares.

714. Un hilo, enrollado en la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, se desenrolla de manera que se mantiene tangente a la circunferencia en el punto B, donde el hilo se separa de ella (fig. 33). Hallar las ecuaciones paramétricas de la línea que describe el extremo del hilo, si éste, en su posición inicial, está en el punto A $(a;\ 0)$, donde $a > 0$. La línea considerada se llama evolvente de la circunferencia.

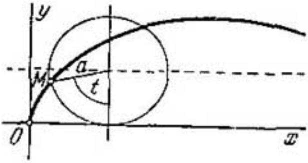

Fig. 34.

715. Un círculo de radio a rueda sobre el eje Ox sin resbalar. La trayectoria de un punto M de la circunferencia de este círculo se llama cicloide (fig. 34). Deducir las ecuaciones paramétricas de la cicloide, tomando por parámetro t el ángulo en que gira la circunferencia rodante

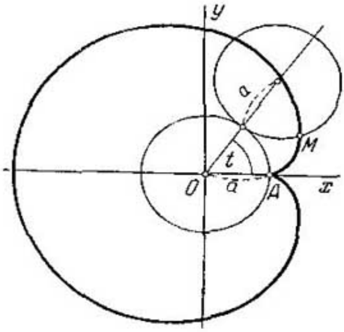

Fig. 35.

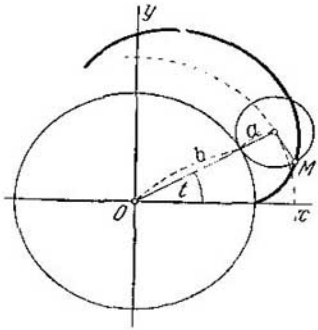

Fig. 36.

alrededor de su centro; se supone que en el momento inicial $(t = 0)$ el punto M está en el origen de coordenadas. Eliminar el parámetro t de las ecuaciones obtenidas.

716. Un círculo de radio a rueda exteriormente, sin resbalar, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. La trayectoria de un punto M de la circunferencia del círculo rodante se llama c a r d i o i d e (fig. 35). Deducir las ecuaciones paramétricas de la cardioide, tomando por parámetro t el ángulo que forma con el eje Ox el radio de la circunferencia fija, trazado al punto de contacto con la circunferencia rodante. Se supone que en el momento inicial ($t = 0$) el punto M estaba a la derecha, en el eje Ox. Pasar a coordenadas polares, suponiendo que la dirección del eje polar coincide con la dirección positiva del eje de abscisas y que el polo está en el punto A.

Demostrar que la cardioide es un caso particular del caracol de Pascal (véase el problema 710).

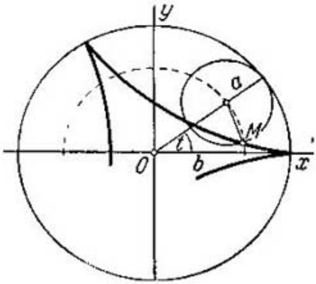

Fig. 37.

717. Un círculo de radio a rueda exteriormente, sin resbalar, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = b^2$. La trayectoria de un punto M de la circunferencia del círculo rodante se llama e p i c i c l o i d e (fig. 36). Deducir las ecuaciones paramétricas de la epicicloide, tomando por parámetro t el ángulo que forma con el eje Ox el radio de la circunferencia fija, trazado por el punto de su contacto con la circunferencia rodante; se supone que en el momento inicial ($t = 0$) el punto M estaba a la derecha, en el eje Ox. Demostrar que la cardioide (véase el problema 716) es una forma particular de la epicicloide.

718. Un círculo de radio a rueda interiormente, sin resbalar, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = b^2$. La trayectoria de un punto M de la circunferencia del círculo rodante se llama h i p o c i c l o i d e (fig. 37). Deducir las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide, tomando por parámetro t el ángulo que forma con el eje Ox el radio de la circunferencia fija, trazado por el punto de su contacto con la circunferencia rodante; se supone que en el momento inicial ($t = 0$) el punto M estaba a la derecha, en el eje Ox. Demostrar que la astroide (véase el problema 712) es una forma particular de la hipocicloide.