Segunda parte

GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

VI

Capítulo

PROBLEMAS ELEMENTALES DE LA GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

§ 27. Coordenadas cartesianas rectangulares en el espacio

El sistema cartesiano de coordenadas rectangulares en el espacio se determina por una unidad lineal para las medidas de longitud y por tres ejes, perpendiculares entre sí, concurrentes en un punto y numerados en un orden determinado.

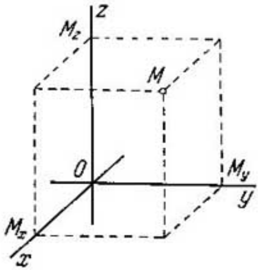


Fig. 38.

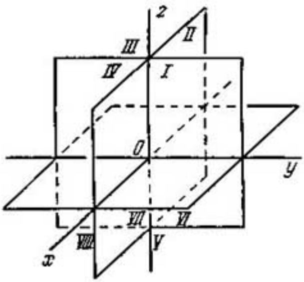


Fig. 39.

El punto de intersección de los ejes se llama origen de coordenadas y los propios ejes, ejes coordenados. El primer eje coordenado se llama eje de abscisas; el segundo, eje de ordenadas y el tercero, eje de cotas.

El origen de coordenadas se indica con la letra O, los ejes de coordenadas se indican respectivamente con los símbolos Ox, Oy, Oz.

Sea M un punto arbitrario del espacio y M_x, M_y y M_z sus proyecciones sobre los ejes coordenados (fig. 38).

Se llaman coordenadas del punto M, con respecto al sistema considerado, a los números:

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad z = OM_z$$

(fig. 38), en donde OM_x es la magnitud del segmento $\overline{OM}_x$ del eje de abscisas; OM_y, la magnitud del segmento $\overline{OM}_y$ del eje de ordenadas y OM_z, la magnitud del segmento $\overline{OM}_z$ del eje de cotas.

El número x se llama abscisa, y, ordenada y z, cota del punto M. El símbolo $M(x, y; z)$ denota que el punto M tiene las coordenadas x, y, z.

El plano Oyz divide todo el espacio en dos semiespacios: el situado en la dirección positiva del eje Ox se llama anterior y, el otro, posterior. El plano Oxz divide también el espacio en dos semiespacios: el situado en la dirección positiva del eje Oy se llama derecho y el otro, izquierdo. Por último, el plano Oxy divide el espacio en dos semiespacios: el situado en la dirección positiva del eje Oz se llama superior y el otro, inferior.

Los tres planos Oxy, Oxz y Oyz dividen conjuntamente el espacio en ocho partes, llamadas octantes coordenados y se numeran como se indica en la fig. 39.

719. Trazar (en proyecciones axonométricas) los puntos siguientes, si sus coordenadas cartesianas son: $A(3; 4; 6)$, $B(-5; 3; 1)$, $C(1; -3; -5)$, $D(0; -3; 5)$, $E(-3; -5; 0)$ y $F(-1; -5; -3)$.

720. Se dan los puntos: $A(4; 3; 5)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(2; -3; 0)$ y $D(0; 0; -3)$. Hallar las coordenadas de sus proyecciones: 1) sobre el plano Oxy; 2) sobre el plano Oxz; 3) sobre el plano Oyz; 4) sobre el eje de abscisas; 5) sobre el eje de ordenadas; 6) sobre el eje de cotas.

721. Hallar las coordenadas de los puntos simétricos a los puntos $A(2; 3; 1)$, $B(5; -3; 2)$, $C(-3; 2; -1)$ y $D(a; b; c)$ con respecto: 1) al plano Oxy; 2) al plano Oxz; 3) al plano Oyz; 4) al eje de abscisas; 5) al eje de ordenadas; 6) al eje de cotas; 7) al origen de coordenadas.

722. Se dan cuatro vértices de un cubo: $A(-a; -a; -a)$ $B(a; -a; -a)$, $C(-a; a; -a)$ y $D(a; a; a)$. Hallar los demás vértices.

723. Determinar en qué octantes pueden estar situados los puntos cuyas coordenadas satisfacen una de las condiciones siguientes:

$$1)\ x - y = 0;\quad 2)\ x + y = 0;\quad 3)\ x - z = 0;$$
$$4)\ x + z = 0;\quad 5)\ y - z = 0;\quad 6)\ y + z = 0.$$

724. Determinar en qué octantes pueden estar situados los puntos si:

$$1)\ xy > 0;\quad 2)\ xz < 0;\quad 3)\ yz > 0,\quad 4)\ xyz > 0;$$
$$5)\ xyz < 0.$$

725. Hallar el centro de una esfera de radio $R = 3$, que es tangente a los tres planos coordenados y está situada: 1) en el segundo octante; 2) en el quinto octante; 3) en el sexto octante; 4) en el séptimo octante; 5) en el octavo octante.

§ 28. Distancia entre dos puntos. División de un segmento en una razón dada

La distancia d entre dos puntos M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ y M_2 $(x_2; y_2; z_2)$ en el espacio se determina por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Las coordenadas x, y, z del punto M que divide en la razón λ el segmento $\overline{M_1M_2}$, limitado por los puntos M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ y M_2 $(x_2; y_2; z_2)$, se hallan mediante las fórmulas

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

En particular, para $\lambda = 1$, tenemos las coordenadas del punto medio del segmento dado:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

726. Se dan los puntos: A (1; -2; -3), B (2; -3; 0), C (3; 1; -9), D (-1; 1; -12). Calcular la distancia entre: 1) A y C; 2) B y D; 3) C y D.

727. Calcular la distancia del origen de coordenadas O a los puntos: A (4; -2; -4); B (-4; 12; 6), C (12; -4; 3), D (12; 16; -15).

728. Demostrar que es isósceles el triángulo cuyos vértices son A (3; -1; 2), B (0; -4; 2) y C (-3; 2; 1).

729. Demostrar que es rectángulo el triángulo cuyos vértices son A_1 (3; -1; 6), A_2 (-1; 7; -2) y A_3 (1; -3; 2).

730. Determinar si hay un ángulo obtuso entre los ángulos internos del triángulo M_1 (4; -1; 4), M_2 (0; 7; -4), M_3 (3; 1; -2).

731. Demostrar que son agudos los ángulos internos del triángulo M (3; -2; 5), N (-2; 1; -3), P (5; 1; -1).

732. Hallar en el eje de abscisas un punto cuya distancia al punto A (-3; 4; 8) sea igual a 12.

733. Hallar en el eje de ordenadas un punto equidistante de los puntos A (1; -3; 7) y B (5; 7; -5).

734. Hallar el centro C y el radio R de la superficie esférica que pasa por el punto P (4; -1; -1) y es tangente a los tres planos coordenados.

735. . ados los vértices de un triángulo: M_1 (3; 2; -5),

M_2 (1; —4; 3) y M_3 (—3; 0; 1), hallar los puntos medios de sus lados.

736. Dados los vértices de un triángulo A (2; —1; 4), B (3; 2; —6), C (—5; 0; 2), calcular la longitud de la mediana trazada desde el vértice A.

737. El centro de gravedad de una varilla homogénea está en el punto C (1; —1; 5), uno de sus extremos está en el punto A (—2; —1; 7). Averiguar las coordenadas del otro extremo de la varilla.

738. Dados dos vértices A (2; —3; —5), B (—1; 3; 2) del paralelogramo $ABCD$ y el punto de intersección de sus diagonales E (4; —1; 7), determinar los otros dos vértices de este paralelogramo.

739. Dados tres vértices A (3; —4; 7), B (—5; 3; —2) y C (1; 2; —3) del paralelogramo $ABCD$, hallar el cuarto vértice D, opuesto a B.

740. Dados tres vértices A (3; —1; 2), B (1; 2; —4) y C (—1; 1; 2) del paralelogramo $ABCD$, hallar el cuarto vértice D.

741. El segmento de una recta, limitado por los puntos A (—1; 8; 3) y B (9; —7; —2), está dividido en cinco partes iguales por los puntos C, D, E y F. Hallar las coordenadas de estos puntos.

742. Determinar las coordenadas de los extremos del segmento que es dividido en tres partes iguales por los puntos C (2; 0; 2) y D (5; —2; 0).

743. Dados los vértices de un triángulo A (1; 2; —1), B (2; —1; 3) y C (—4; 7; 5), calcular la longitud de la bisectriz del ángulo interno del vértice B.

744. Dados los vértices de un triángulo A (1; —1; —3), B (2; 1; —2) y C (—5; 2; —6), calcular la longitud de la bisectriz del ángulo externo del vértice A.

745. En los vértices de un tetraedro A (x_1; y_1; z_1), B (x_2; y_2; z_2), C (x_3; y_3; z_3), D (x_4; y_4; z_4) están concentradas masas iguales. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de este sistema de masas.

746. En los vértices del tetraedro A_1 (x_1; y_1; z_1), A_2 (x_2; y_2; z_2), A_3 (x_3; y_3; z_3), A_4 (x_4; y_4; z_4) están concentradas las masas m_1, m_2, m_3, y m_4. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de este sistema de masas.

747. Una recta pasa por dos puntos M_1 (—1; 6; 6) y M_2 (3; —6; —2). Hallar los puntos de su intersección con los planos coordenados.

VII

Capítulo

ALGEBRA VECTORIAL

§ 29. Noción de vector. Proyección de un vector

Los segmentos dirigidos se llaman también vectores geométricos o simplemente vectores. Siendo el vector un segmento dirigido, lo designaremos en el texto como se hizo anteriormente, con dos letras mayúsculas latinas y una rayita común encima de ellas; la primera letra indicará el origen y la segunda el extremo del vector. Al mismo tiempo designaremos el vector con una letra minúscula latina en negritas, que en los diagramas se coloca en el extremo de la flecha que

Fig. 40.

representa el vector (véase la fig. 40, en la que está representado el vector $\boldsymbol{a}$ con el origen A y el extremo B). A menudo, el origen del vector se llama también su punto de aplicación.

Los vectores se dicen iguales (equipolentes), si tienen la misma longitud, están situados en rectas paralelas o en una misma recta y tienen la misma dirección.

El número, igual a la longitud del vector (con respecto a la unidad lineal), se llama módulo. El módulo del vector $\boldsymbol{a}$ se representa por la notación $|\boldsymbol{a}|$ o a. Si $|\boldsymbol{a}|=1$, el vector $\boldsymbol{a}$ se llama vector unitario.

El vector unitario que tiene la misma dirección que el vector dado $\boldsymbol{a}$, se llama versor del vector $\boldsymbol{a}$ y se indica ordinariamente con el símbolo $\boldsymbol{a}^{\circ}$.

Se llama proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje u al número igual a la magnitud del segmento $\overline{A_1B_1}$ del eje u, en donde A_1 es la proyección del punto A sobre el eje u y B_1 la proyección del punto B sobre el mismo eje.

La proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje u se representa con la notación $\mathrm{pr}_u\ \overline{AB}$. Si el vector está designado por el símbolo $\boldsymbol{a}$, su proyección sobre el eje u se representa ordinariamente con la notación $\mathrm{pr}_u\ \boldsymbol{a}$.

La proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el eje u se expresa mediante su módulo y el ángulo φ que forma con el eje u, por la fórmula

$$pr_u\boldsymbol{a} = |\,\boldsymbol{a}\,|\cdot\cos\varphi. \tag{1}$$

En lo sucesivo, las proyecciones de un vector arbitrario $\boldsymbol{a}$ sobre los ejes de un sistema de coordenadas dado se designarán con las letras X, Y, Z. La igualdad

$$\boldsymbol{a} = \{X;\ Y;\ Z\}$$

indica que los números X, Y, Z son las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados.

Las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados se llaman también coordenadas (cartesianas) de él. Si se dan dos puntos M_1 (x_1

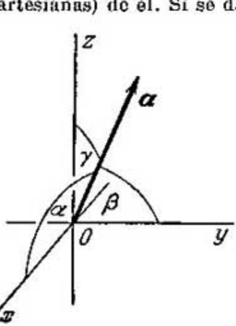


Fig. 41.

y_1; z_1) y M_2 (x_2; y_2; z_2), que son respectivamente el origen y el extremo del vector $\boldsymbol{a}$, sus coordenadas X, Y, Z están dadas por las fórmulas

$$X = x_2 - x_1,\quad Y = y_2 - y_1,\quad Z = z_2 - z_1.$$

La fórmula

$$|\,\boldsymbol{a}\,| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{2}$$

permite hallar el módulo del vector, conociendo sus coordenadas.

Si α, β, γ son los ángulos que forma el vector $\boldsymbol{a}$ con los ejes coordenados (fig. 41), entonces, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se llaman cosenos directores del vector $\boldsymbol{a}$.

De la fórmula (1), se deduce que:

$$X = |\,\boldsymbol{a}\,|\cos\alpha,\quad Y = |\,\boldsymbol{a}\,|\cos\beta,\quad Z = |\,\boldsymbol{a}\,|\cos\gamma.$$

De aquí y de la fórmula (2), tenemos que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Esta última igualdad permite hallar uno de los ángulos α, β, γ, si se conocen los otros dos.

748. Calcular el módulo de vector

$$a = \{6;\ 3;\ -2\}.$$

749. Dadas dos coordenadas de un vector $X = 4$, $Y = -12$, hallar la tercera coordenada Z, siendo $|a| = 13$.

750. Dados los puntos $A\ (3;\ -1;\ 2)$ y $B\ (-1;\ 2;\ 1)$, hallar las coordenadas de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$.

751. Hallar el punto N, con el que coincide el extremo del vector $a = \{3;\ -1;\ 4\}$, si su origen coincide con el punto $M\ (1;\ 2;\ -3)$.

752. Hallar el origen del vector $a = \{2;\ -3;\ -1\}$, si su extremo coincide con el punto $(1;\ -1;\ 2)$.

753. Dado el módulo de un vector $|a| = 2$ y los ángulos $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$, calcular la proyección del vector a sobre los ejes coordenados.

754. Calcular los cosenos directores del vector

$$a = \{12;\ -15;\ -16\}.$$

755. Calcular los cosenos directores del vector

$$a = \left\{\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ \frac{12}{13}\right\}.$$

756. ¿Puede formar un vector con los ejes coordenados los ángulos siguientes: 1) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$; 2) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 60°$; 3) $\alpha = 90°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 60°$?

757. ¿Puede formar un vector, con dos ejes coordenados, los ángulos siguientes: 1) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$; 2) $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$; 3) $\alpha = 150°$, $\gamma = 30°$?

758. Un vector forma con los ejes Ox y Oz los ángulos $\alpha = 120°$ y $\gamma = 45°$. ¿Qué ángulo forma con el eje Oy?

759. Un vector a forma con los ejes coordenados Ox y Oy los ángulos $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$. Calcular sus coordenadas, sabiendo que $|a| = 2$.

760. Hallar las coordenadas del punto M, si su radio vector forma con los ejes coordenados ángulos iguales y su módulo es igual a 3.

§ 30. Operaciones lineales con vectores

Se llama suma $a + b$ de dos vectores a y b al vector que va desde el origen del vector a al extremo del vector b; se supone que el extremo del vector a es el punto de aplicación del vector b (regla del triángulo). En la fig. 42 está representada la construcción de la suma $a + b$.

Además de la regla del triángulo, a menudo se emplea la r e g l a d e l p a r a l e l o g r a m o (que es equivalente): si los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen un origen común y sobre ellos se ha construido un paralelogramo, la suma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ será el vector que coincide con la diagonal de este paralelogramo y que parte del origen común de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (fig. 43). De aquí se deduce inmediatamente que $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

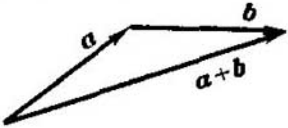


Fig. 42.

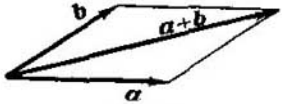


Fig. 43.

La suma de muchos vectores se efectúa mediante la aplicación sucesiva de la regla del triángulo (véase la fig. 44, en donde está representada la construcción de la suma de cuatro vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$).

Se llama diferencia $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ al vector que, al ser sumado con el vector $\boldsymbol{b}$, da el vector $\boldsymbol{a}$. Si dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen un origen común, su diferencia $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ es un vector que va del extremo

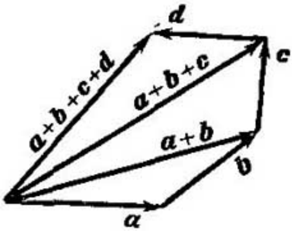


Fig. 44.

de $\boldsymbol{b}$ («sustraendo») al extremo de a («minuendo»). Dos vectores de igual longitud, situados en una recta y orientados en sentido contrario, se llaman opuestos entre sí: si uno de ellos se indica con la notación $\boldsymbol{a}$, el otro se indicará con la notación $-\boldsymbol{a}$. Es evidente, que $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$ $=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. De esto modo, la construcción de la diferencia es equivalente a sumar al vector «minuendo» el vector opuesto al «sustraendo».

El producto $\alpha\boldsymbol{a}$ (o también $\boldsymbol{a}\alpha$) del vector $\boldsymbol{a}$ por el número α es un vector cuyo módulo es igual al producto del módulo del vector $\boldsymbol{a}$ por el módulo del número α, es paralelo al vector $\boldsymbol{a}$ o está con él en una misma recta y tiene la misma dirección que el vector $\boldsymbol{a}$, si α es un número positivo, y la dirección opuesta, si α es un número negativo.

La suma de vectores y el producto de un vector por un número se llaman operaciones lineales con vectores.

Subsisten los dos teoremas fundamentales siguientes sobre las proyecciones de los vectores:

1. La proyección de la suma de vectores sobre un eje es igual a la suma de sus proyecciones sobre el mismo eje:

$$\mathrm{pr}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{pr}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{pr}_u\boldsymbol{a}_2+\ldots+\mathrm{pr}_u\boldsymbol{a}_n.$$

2. Al multiplicar un vector por un número, su proyección queda multiplicada por el mismo número:

$$\mathrm{pr}_u(\alpha\boldsymbol{a})=\alpha\mathrm{pr}_n\boldsymbol{a}.$$

En particular, si

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\ \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

se tiene:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{X_1+X_2;\ Y_1+Y_2;\ Z_1+Z_2\}$$

y

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{X_1-X_2;\ Y_1-Y_2;\ Z_1-Z_2\}.$$

Si $\boldsymbol{a}=\{X;\ Y;\ Z\}$, para cualquier número α,

$$\alpha\boldsymbol{a}=\{\alpha X;\ \alpha Y;\ \alpha Z\}.$$

Los vectores situados en una recta o en rectas paralelas, se llaman colineales. La condición de colinealidad de dos vectores

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$$

consiste en la proporcionalidad de sus coordenadas:

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1}.$$

Una terna de vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ se llama base coordenada, si estos vectores satisfacen a las condiciones siguientes:

1) el vector $\boldsymbol{i}$ está situado en el eje Ox, el vector $\boldsymbol{j}$, en el eje Oy y el vector $\boldsymbol{k}$, en el eje Oz;

2) la dirección de cada uno de los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ coincide con la dirección positiva de su eje;

3) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ son vectores unitarios, es decir, $|\boldsymbol{i}|=1$, $|\boldsymbol{j}|=1$, $|\boldsymbol{k}|=1$.

Cualquiera que sea el vector $\boldsymbol{a}$, siempre se le puede descomponer mediante los vectores básicos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, es decir, siempre se puede expresar en la forma:

$$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k};$$

los coeficientes de esta descomposición son las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ (es decir, X, Y, Z son las proyecciones del vector $\boldsymbol{a}$ sobre los ejes coordenados).

761. Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, construir los vectores siguientes: 1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; 2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; 3) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; 4) $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

762. Dados: $|\boldsymbol{a}|=13$, $|\boldsymbol{b}|=19$ y $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=24$, calcular $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

763. Dados: $|\boldsymbol{a}|=11$, $|\boldsymbol{b}|=23$ y $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=30$, determinar $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

764. Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí y $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=12$. Determinar $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ y $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

765. Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ forman un ángulo $\varphi=60°$; sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=5$ y $|\boldsymbol{b}|=8$, determinar $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ y $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

766. Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ forman un ángulo $\varphi=120°$, sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=3$ y $|\boldsymbol{b}|=5$, determinar $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ y $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

767. ¿Qué condiciones deben satisfacer los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que subsistan las siguientes relaciones?

$$1)\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|;\quad 2)\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|;\quad 3)\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|.$$

768. ¿Qué condiciones deben satisfacer los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que el vector $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ bisecte el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$?

769. Conociendo los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, construir los vectores siguientes: 1) $3\boldsymbol{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; 3) $2\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$; 4) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

770. En el triángulo ABC el vector $\overline{AB}=\boldsymbol{m}$ y el vector $\overline{AC}=\boldsymbol{n}$. Construir los vectores siguientes: 1) $\frac{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{2}$; 2) $\frac{\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}}{2}$; 3) $\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}{2}$; 4) $-\frac{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{2}$. Tomando por unidad de medida $\frac{1}{2}|\boldsymbol{n}|$, construir también los vectores: 5) $|\boldsymbol{n}|\boldsymbol{m}+|\boldsymbol{m}|\boldsymbol{n}$; 6) $|\boldsymbol{n}|\boldsymbol{m}-|\boldsymbol{m}|\boldsymbol{n}$.

771. El punto O es el centro de gravedad del triángulo ABC. Demostrar que $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$.

772. En un pentágono regular $ABCDE$ se han dado los vectores que coinciden con sus lados: $\overline{AB}=\boldsymbol{m}$, $\overline{BC}=\boldsymbol{n}$, $\overline{CD}=\boldsymbol{p}$, $\overline{DE}=\boldsymbol{q}$ y $\overline{EA}=\boldsymbol{r}$. Construir los vectores: 1) $\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$; 2) $\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{p}+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}$; 3) $2\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}-3\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}+2\boldsymbol{r}$.

773. En el paralelepípedo $ABCDA'B'C'D'$ (fig. 45) se han dado los vectores que coinciden con sus aristas: $\overline{AB}=\boldsymbol{m}$, $\overline{AD}=\boldsymbol{n}$ y $\overline{AA'}=\boldsymbol{p}$. Construir los vectores siguientes: 1) $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}$; 2) $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\frac{1}{2}\boldsymbol{p}$; 3) $\frac{1}{2}\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}$; 4) $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$; 5) $-\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}+\frac{1}{2}\boldsymbol{p}$.

774. Tres fuerzas $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ y $\boldsymbol{P}$ están aplicadas a un punto y tienen direcciones perpendiculares entre sí. Hallar la magnitud de su resultante $\boldsymbol{R}$, sabiendo que $|\boldsymbol{M}|=2$ kgf, $|\boldsymbol{N}|=10$ kgf y $|\boldsymbol{P}|=11$ kgf.

775. Se dan dos vectores $\boldsymbol{a}=\{3;\ -2;\ 6\}$ y $\boldsymbol{b}=\{-2;\ 1;\ 0\}$. Determinar las proyecciones sobre los ejes coordenados de los vectores siguientes: 1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; 2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; 3) $2\boldsymbol{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; 5) $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$; 6) $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

776. Verificar que los vectores $\boldsymbol{a}=\{2;\ -1;\ 3\}$ y $\boldsymbol{b}=\{-6;\ 3;\ -9\}$ son colineales. Determinar cuál es el más largo y en cuántas veces; cómo están dirigidos, en una misma dirección o en direcciones opuestas.

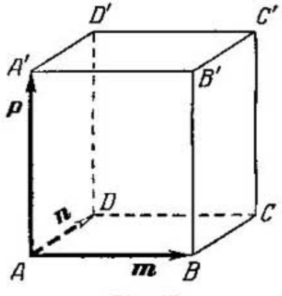


Fig. 45.

777. Determinar para qué valores de α y β los vectores $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ son colineales.

778. Verificar que los cuatro puntos $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$, $C(-1;\ 1;\ -3)$, $D(3;\ -5;\ 3)$ son vértices de un trapecio.

779. Dados los puntos $A(-1;\ 5;\ -10)$, $B(5;\ -7;\ 8)$, $C(2;\ 2;\ -7)$ y $D(5;\ -4;\ 2)$, probar que los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son colineales; determinar cuál es el más largo y en cuántas veces; ¿cómo están dirigidos, en una misma dirección o en direcciones opuestas?

780. Hallar el versor de igual dirección que el vector $\boldsymbol{a}=\{6;\ -2;\ -3\}$.

781. Hallar el versor de igual dirección que el vector $\boldsymbol{a}=\{3;\ 4;\ -12\}$.

782. Hallar el módulo de la suma y de la diferencia de los vectores $\boldsymbol{a}=\{3;\ -5;\ 8\}$ y $\boldsymbol{b}=\{-1;\ 1;\ -4\}$.

783. Dada la descomposición del vector $\boldsymbol{c}$ en la base $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$: $\boldsymbol{c}=16\boldsymbol{i}-15\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$, determinar la descomposición en

la misma base del vector $\boldsymbol{d}$, que es paralelo al vector $\boldsymbol{c}$ y tiene la dirección opuesta a él, si $|\boldsymbol{d}| = 75$.

784. Dos vectores $\boldsymbol{a} = \{2; -3; 6\}$ y $\boldsymbol{b} = \{-1; 2; -2\}$ están aplicados a un mismo punto. Hallar las coordenadas del vector $\boldsymbol{c}$ que tiene la dirección de la bisectriz del ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, si $|\boldsymbol{c}| = 3\sqrt{42}$.

785. Los vectores $\overline{AB} = \{2; 6; -4\}$ y $\overline{AC} = \{4; 2; -2\}$ coinciden con los lados del triángulo ABC. Hallar las

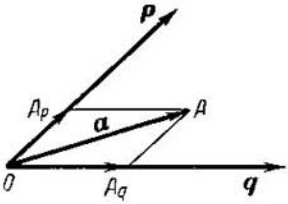


Fig. 46.

coordenadas de los vectores aplicados a los vértices del triángulo que coinciden con sus medianas AM, BN, CP.

786*). Demostrar que, si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son unos vectores cualesquiera no colineales, cada vector situado en su plano puede ser representado en la forma:

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q}.$$

Demostrar que los números α y β se determinan unívocamente por los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$. (La representación del vector $\boldsymbol{a}$ en la forma $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q}$ se llama descomposición del vector en la base $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$; los números α y β se llaman coeficientes de esta descomposición.)

D e m o s t r a c i ó n. Traslademos los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ a un origen común, que lo designaremos por la letra O (fig. 46). El extremo del vector $\boldsymbol{a}$ lo designaremos por la letra A. Tracemos por el punto A una recta paralela al vector $\boldsymbol{q}$. El punto de intersección de esta recta con la línea de acción del vector $\boldsymbol{p}$ lo indicaremos por A_p. Análogamente, trazando por el punto A una recta paralela al vector $\boldsymbol{p}$, obtendremos en la intersección con la línea de acción del vector $\boldsymbol{q}$ el punto A_q.

Según la regla del paralelogramo, se tiene;

$$\boldsymbol{a} = \overline{OA} = \overline{OA}_p + \overline{OA}_q. \qquad (1)$$

*) Los problemas 786 y 792 son fundamentales para la comprensión correcta de los demás problemas. Aquí se expone la resolución completa del primero de ellos.

Como los vectores $\overline{OA}_p$ y p están en una recta, el vector $\overline{OA}_p$ se puede obtener multiplicando el vector p por cierto número α:

$$\overline{OA}_p=\alpha p. \tag{2}$$

Por analogía,

$$\overline{OA}_q=\beta q. \tag{3}$$

De las igualdades (1), (2) y (3) obtenemos: $a=\alpha p+\beta q$. De esta manera, queda demostrada la posibilidad de la descomposición buscada. Queda por demostrar que los coeficientes α y β de esta descomposición se determinan unívocamente.

Supongamos que el vector a tiene dos descomposiciones:

$$a=\alpha p+\beta q, \quad a=\alpha' p+\beta' q,$$

y que, por ejemplo, $\alpha'\neq\alpha$. Restando miembro a miembro, se tiene:

$$(\alpha'-\alpha)\,p+(\beta'-\beta)\,q=0$$

o

$$p=\frac{\beta-\beta'}{\alpha'-\alpha}\,q.$$

Pero esta igualdad muestra que los vectores p y q son colineales; sin embargo, según la hipótesis, no lo son. Por lo tanto, la desigualdad $\alpha'\neq\alpha$ es imposible. De un modo análogo se demuestra que la desigualdad $\beta'\neq\beta$ es imposible. Así pues, $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, es decir, un vector no puede tener dos descomposiciones diferentes.

787. Dados dos vectores en el plano $p=\{2;\,-3\}$, $q=\{1;\,2\}$, hallar la descomposición del vector $a=\{9;\,4\}$ en la base p, q.

788. Dados tres vectores en el plano $a=\{3;\,-2\}$, $b=\{-2,\,1\}$ y $c=\{7;\,-4\}$, determinar la descomposición de cada uno de estos tres vectores, tomando por base los otros dos.

789. Se dan tres vectores $a=\{3;\,-1\}$, $b=\{1;\,-2\}$; $c=\{-1;\,7\}$. Determinar la descomposición del vector $p=a+b+c$ en la base a, b.

790. Tomando por base los vectores $\overline{AB}=b$ y $\overline{AC}=c$, que coinciden con los lados del triángulo ABC, determinar la descomposición de los vectores que coinciden con sus medianas, si éstos están aplicados a los vértices del triángulo.

791. En el plano se dan cuatro puntos $A\,(1;\,-2)$, $B\,(2;\,1)$, $C\,(3;\,2)$ y $D\,(-2;\,3)$. Hallar la descomposición de los vectores $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}$, tomando por base los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

792. Demostrar que si p, q y r son unos vectores cualesquiera no coplanares*), cualquier vector a en el espacio se puede expresar en la forma:

$$a = \alpha p + \beta q + \gamma r.$$

Demostrar que los números α, β, γ se determinan por los vectores a, p, q y r unívocamente. (La expresión del vector a en la forma $a = \alpha p + \beta q + \gamma r$ se llama descomposición del mismo en la base p, q, r. Los números α, β y γ se llaman coeficientes de esta descomposición.)

793. Se dan tres vectores $p = \{3; -2; 1\}$, $q = \{-1; 1; -2\}$, $r = \{2; 1; -3\}$. Hallar la descomposición del vector $c = \{11; -6; 5)$ en la base p, q, r.

794. Se dan cuatro vectores $a = \{2; 1; 0\}$, $b = \{1; -1; 2\}$, $c = \{2; 2; -1\}$ y $d = \{3; 7; -7\}$. Hallar la descomposición de cada uno de estos vectores tomando por base los otros tres.

§ 31. Producto escalar de vectores

Se llama producto escalar de dos vectores al número igual al producto de los módulos de estos vectores por el coseno del ángulo formado por ellos.

El producto escalar de los vectores a, b se representa con la notación ab (es indiferente el orden en que se escriben los factores, es decir, $ab = ba$).

Si el ángulo formado por los vectores a, b se indica por φ, su producto escalar se puede expresar mediante la fórmula

$$ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi. \tag{1}$$

El producto escalar de los vectores a, b se puede expresar también por la fórmula

$$ab = |a| \cdot \mathrm{pr}_a b, \quad \text{o} \quad ab = |b| \cdot \mathrm{pr}_b a.$$

De la fórmula (1) se deduce que $ab > 0$, si φ es un ángulo agudo y $ab < 0$, si φ es un ángulo obtuso; $ab = 0$, si, y solamente si, los vectores a y b son perpendiculares (en particular, $ab = 0$, si $a = 0$ o si $b = 0$).

El producto escalar aa se llama cuadrado escalar del vector y se designa por la notación a^2. Según la fórmula (1), resulta que el cuadrado escalar de un vector es igual al cuadrado de su módulo:

$$a^2 = |a|^2.$$

Si los vectores a y b se dan mediante sus coordenadas:

$$a = \{X_1; Y_1; Z_1\}, \quad b = \{X_2; Y_2; Z_2\},$$

su producto escalar se puede calcular por la fórmula

$$ab = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

---

*) Se dice que tres vectores no son coplanares, si después de ser trasladados a un origen común no quedan situados en un plano.

De aquí se deduce la condición necesaria y suficiente para la perpendicularidad de los vectores:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0.$$

El ángulo φ formado por los vectores

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}\quad \text{y}\quad \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$$

se da por la fórmula

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|},$$

o en coordenadas,

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

La proyección de un vector arbitrario $\boldsymbol{S}=\{X;\ Y;\ Z\}$ sobre un eje cualquiera u se determina por la fórmula

$$\mathrm{pr}_u\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Se},$$

en donde $\boldsymbol{e}$ es el vector unitario en dirección del eje u. Si se dan los ángulos α, β, γ, que forma el eje u con los ejes coordenados, tendremos que $\boldsymbol{e}=\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$ y para el cálculo de la proyección del vector $\boldsymbol{S}$ se puede aplicar la fórmula

$$pr_u\boldsymbol{S}=X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma.$$

795. Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ forman un ángulo $\varphi=\frac{2}{3}\pi$; sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, calcular: 1) $\boldsymbol{ab}$; 2) $\boldsymbol{a}^2$; 3) $\boldsymbol{b}^2$; 4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$; 5) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$; 6) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$; 7) $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2$.

796. Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí; el vector $\boldsymbol{c}$ forma con ellos ángulos iguales a $\frac{\pi}{3}$; sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $|\boldsymbol{c}|=8$, calcular: 1) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times$ $\times(\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})$; 2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$; 3) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})^2$.

797. Demostrar la identidad

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2\,(a^2+b^2)$$

y averiguar su significado geométrico.

798. Demostrar que

$$-ab\leqslant\boldsymbol{ab}\leqslant ab;$$

¿en qué casos se verificará el signo de igualdad?

799. Suponiendo que cada uno de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ es diferente de cero, determinar para qué posición relativa de ellos se verifica la igualdad:

$$(\boldsymbol{ab})\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bc}).$$

800. Dados los vectores unitarios $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, que satisfacen a la condición $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, calcular $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}$.

801. Dados tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, que satisfacen a la condición $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, y sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=1$ y $|\boldsymbol{c}|=4$, calcular $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}$.

802. Cada par de vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ forman entre sí un ángulo de 60°; sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=2$ y $|\boldsymbol{c}|=6$, determinar el módulo del vector $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

803. Sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$, determinar para qué valor de α los vectores $\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí.

804. ¿A qué condición deben satisfacer los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que el vector $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ sea perpendicular al vector $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$?

805. Demostrar que el vector $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{a}$.

806. Demostrar que el vector $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{ab})}{\boldsymbol{a}^2}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{a}$.

807. Dados los vectores $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$ y $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$, coincidentes con los lados del triángulo ABC, hallar la descomposición en la base $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ del vector que coincide con la altura BD y que está aplicado al vértice B de este triángulo.

808. Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ forman un ángulo $\varphi=\frac{\pi}{6}$; sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{b}|=1$, calcular el ángulo α formado por los vectores $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

809. Calcular el ángulo obtuso formado por las medianas trazadas desde los vértices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles.

810. Determinar el lugar geométrico de los extremos de un vector variable $\boldsymbol{x}$, si su origen está en un punto dado A y el vector $\boldsymbol{x}$ satisface a la condición

$$\boldsymbol{xa}=\alpha,$$

en donde $\boldsymbol{a}$ es un vector dado y α un número dado.

811. Determinar el lugar geométrico de los extremos de un vector variable $\boldsymbol{x}$, si su origen está en un punto dado A y el vector $\boldsymbol{x}$ satisface a las condiciones

$$\boldsymbol{xa}=\alpha, \qquad \boldsymbol{xb}=\beta,$$

en donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ son unos vectores dados, no colineales, y α, β unos números dados.

812. Dados los vectores $\boldsymbol{a}=\{4;\ -2;\ -4\}$, $\boldsymbol{b}=\{6;\ -3;\ 2\}$, calcular:

$$1)\ \boldsymbol{ab};\quad 2)\ \sqrt{\boldsymbol{a}^2};\quad 3)\ \sqrt{\boldsymbol{b}^2};\quad 4)\ (2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b});$$
$$5)\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2;\quad 6)\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2.$$

813. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{f}=\{3;\ -5;\ 2\}$, al desplazarse su punto de aplicación del origen al extremo del vector $\boldsymbol{S}(2;\ -5;\ -7)$*).

814. Dados los puntos $A(-1;\ 3;\ -7)$, $B(2;\ -1;\ 5)$ y $C(0;\ 1;\ -5)$, calcular:

$$1)\ (2\overline{AB}-\overline{CB})(2\overline{BC}+\overline{BA});\quad 2)\ \sqrt{\overline{AB}^2};\quad 3)\ \sqrt{\overline{AC}^2};$$

4) hallar las coordenadas de los vectores $(\overline{AB}\,\overline{AC})\,\overline{BC}$ y $\overline{AB}\,(\overline{AC}\,\overline{BC})$.

815. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{f}=\{3;\ -2;\ -5\}$, si su punto de aplicación se desplaza, en un movimiento rectilíneo, de la posición $A(2;\ -3;\ 5)$ a la posición $B(3;\ -2;\ -1)$.

816. Dadas tres fuerzas $\boldsymbol{M}=\{3;\ -4;\ 2\}$, $\boldsymbol{N}=\{2;\ 3;\ -5\}$ y $\boldsymbol{P}=\{-3;\ -2;\ 4\}$, aplicadas a un punto. Calcular el trabajo realizado por la resultante de estas fuerzas, si el punto de su aplicación se desplaza, en un movimiento rectilíneo, de la posición $M_1(5;\ 3;\ -7)$ a la posición $M_2(4;\ -1;\ -4)$.

817. Se dan los vértices de un cuadrilátero $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(-4;\ 1;\ 1)$ y $D(-5;\ -5;\ 3)$. Demostrar que sus diagonales AC y BD son perpendiculares entre sí.

818. Determinar para qué valor de α los vectores $\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\alpha\boldsymbol{k}$ son perpendiculares entre sí.

819. Calcular el coseno del ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}=\{2;\ -4;\ 4\}$ y $\boldsymbol{b}=\{-3;\ 2;\ 6\}$.

820. Se dan los vértices de un triángulo: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$ y $C(3;\ -2;\ 1)$. Calcular el ángulo interno del vértice B.

821. Se dan los vértices de un triángulo $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$ y $C(1;\ -2;\ 1)$. Determinar el ángulo externo del vértice A.

---

*) Si el vector $\boldsymbol{f}$ representa una fuerza, cuyo punto de aplicación se desplaza del origen al extremo del vector $\boldsymbol{S}$, el trabajo w realizado por esta fuerza se determina mediante la igualdad

$$w=\boldsymbol{f}\boldsymbol{S}.$$

822. Calculando los ángulos internos del triángulo $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$, verificar que este triángulo es isósceles.

823. El vector x es colineal al vector $a = \{6; -8; -7{,}53$ y forma un ángulo agudo con el eje Oz. Hallar sus coordenadas, sabiendo que $|x| = 50$.

824. Hallar el vector x, que es colineal al vector $a = \{2; 1; -1\}$ y satisface a la condición

$$xa = 3.$$

825. El vector x es perpendicular a los vectores $a = 3i + 2j + 2k$ y $b = 18i - 22j - 5k$ y forma con el eje Oy un ángulo obtuso. Hallar sus coordenadas, sabiendo que $|x| = 14$.

826. Hallar el vector x, si se sabe que es perpendicular a los vectores $a = \{2; 3; -1\}$ y $b = \{1; -2; 3\}$ y satisface a la condición

$$x(2i - j + k) = -6.$$

827. Se dan dos vectores: $a = \{3; -1; 5\}$ y $b = \{1; 2; -3\}$. Hallar el vector x, que es perpendicular al eje Oz y satisface a las condiciones:

$$xa = 9, \quad xb = -4.$$

828. Se dan tres vectores:

$$a = 2i - j + 3k, \quad b = i - 3j + 2k \quad \text{y} \quad c = 3i + 2j - 4k.$$

Hallar el vector x, que satisface a las condiciones:

$$xa = -5, \quad xb = -11, \quad xc = 20.$$

829. Hallar la proyección del vector $S = \{4; -3; 2\}$ sobre el eje que forma con los ejes coordenados ángulos agudos iguales.

830. Hallar la proyección del vector $S = \{\sqrt{2}; -3; -5\}$ sobre el eje que forma con los ejes coordenados Ox y Oz los ángulos $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$ y con el eje Oy un ángulo agudo β.

831. Se dan dos puntos $A(3; -4; -2)$, $B(2; 5; -2)$. Hallar la proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje que forma con los ejes coordenados Ox y Oy los ángulos $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$ y con el eje Oz un ángulo obtuso γ.

832. Calcular la proyección del vector $a = \{5; 2; 5\}$ sobre el eje del vector $b = \{2; -1; 2\}$.

833. Se dan tres vectores:

$$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}.$$

Calcular $\mathrm{pr}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

834. Se dan tres vectores:

$$\boldsymbol{a}=\{1;\ -3;\ 4\}, \quad \boldsymbol{b}=(3;\ -4;\ 2\} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{c}=\{-1;\ 1;\ 4\}.$$

Calcular $\mathrm{pr}_{b+c}\,\boldsymbol{a}$.

835. Se dan tres vectores:

$$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{c}=4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}.$$

Calcular $\mathrm{pr}_c(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

836. Una fuerza, definida por el vector $\boldsymbol{R}=\{1;\ -8;\ -7\}$, se ha descompuesto en tres direcciones perpendiculares entre sí, una de las cuales se da mediante el vector $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. Hallar la componente de la fuerza $\boldsymbol{R}$ en dirección del vector $\boldsymbol{a}$.

837. Se dan dos puntos $M(-5;\ 7;\ -6)$ y $N(7;\ -9;\ 9)$. Calcular la proyección del vector $\boldsymbol{a}=\{1;\ -3;\ 1\}$ sobre el eje del vector $\overline{MN}$.

838. Se dan los puntos $A(-2;\ 3;\ -4)$, $B(3;\ 2;\ 5)$, $C(1;\ -1;\ 2)$, $D(3;\ 2;\ -4)$. Calcular $\mathrm{pr}_{\overline{CD}}\,\overline{AB}$.

§ 32. Producto vectorial de vectores

Se llama producto vectorial del vector $\boldsymbol{a}$ por el vector $\boldsymbol{b}$ al vector que se indica con la notación $[\boldsymbol{ab}]$, definido por las tres condiciones siguientes:

1) el módulo del vector $[\boldsymbol{ab}]$ es igual a $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\operatorname{sen}\varphi$, en donde φ es el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

2) el vector $[\boldsymbol{ab}]$ es perpendicular a cada uno de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$;

3) la dirección del vector $[\boldsymbol{ab}]$ corresponde a «la regla de la mano derecha». Esto significa que, si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $[\boldsymbol{ab}]$ tienen un origen común, el vector $[\boldsymbol{ab}]$ tendrá la dirección del dedo cordial de la mano derecha, cuando el dedo pulgar vaya en dirección del primer factor (o sea, del vector $\boldsymbol{a}$) y el dedo índice en dirección del segundo (o sea, del vector $\boldsymbol{b}$).

El producto vectorial depende del orden de los factores:

$$[\boldsymbol{ab}]=-[\boldsymbol{ba}].$$

El módulo del producto vectorial $[\boldsymbol{ab}]$ es igual al área S del paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$:

$$|[\boldsymbol{ab}]|=S.$$

El propio producto vectorial se puede expresar por la fórmula

$$[\boldsymbol{ab}]=S\boldsymbol{e}$$

en donde $\boldsymbol{e}$ es un versor unitario de la misma dirección que el producto vectorial.

El producto vectorial $[\boldsymbol{ab}]$ se convierte en cero si, y solamente si, los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales. En particular, $[\boldsymbol{aa}] = 0$.

Si los ejes coordenados forman un sistema de mano derecha y los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se dan en este sistema mediante sus coordenadas:

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

el producto vectorial del vector $\boldsymbol{a}$ por el vector $\boldsymbol{b}$ se determina por la fórmula

$$[\boldsymbol{ab}]=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\quad -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}$$

o

$$[\boldsymbol{ab}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

839. Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ forman un ángulo $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=6$, $|\boldsymbol{b}|=5$, calcular $|[\boldsymbol{ab}]|$.

840. Se da: $|\boldsymbol{a}|=10$, $|\boldsymbol{b}|=2$ y $\boldsymbol{ab}=12$. Calcular $|[\boldsymbol{ab}]|$.

841. Se da: $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=26$ y $|[\boldsymbol{ab}]|=72$. Calcular $\boldsymbol{ab}$.

842. Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí. Sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, calcular:

$$1)\ \ |[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]|;\quad 2)\ \ |[(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})]|.$$

843. Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ forman un ángulo $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Sabiendo que $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, calcular:

$$1)\ \ [\boldsymbol{ab}]^2;\quad 2)\ \ [(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})]^2;\quad 3)\ [(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]^2.$$

844. ¿A qué condición deben satisfacer los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ para que los vectores $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ sean colineales?

845. Demostrar la identidad

$$[\boldsymbol{ab}]^2+(\boldsymbol{ab})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

846. Demostrar que

$$[\boldsymbol{ab}]^2\leqslant \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2;$$

¿en qué caso se verificará el signo de igualdad?

847. Dados los vectores arbitrarios: $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{n}$, demostrar que los vectores

$$\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{pn}],\ \boldsymbol{b}=[\boldsymbol{qn}],\ \boldsymbol{c}=[\boldsymbol{rn}]$$

son coplanares (es decir, que teniendo un origen común, se sitúan en un plano).

848. Los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ satisfacen a la condición

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0.$$

Demostrar que

$$[\boldsymbol{ab}]=[\boldsymbol{bc}]=[\boldsymbol{ca}].$$

849. Los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ están ligados por las relaciones

$$[\boldsymbol{ab}]=[\boldsymbol{cd}],\quad [\boldsymbol{ac}]=[\boldsymbol{bd}].$$

Demostrar que los vectores $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ son colineales.

850. Dados los vectores

$$\boldsymbol{a}=\{3;\ -1;\ -2\}\ \text{y}\ \boldsymbol{b}=\{1;\ 2;\ -1\},$$

hallar las coordenadas de los productos vectoriales:

1) $[\boldsymbol{ab}]$; 2) $[(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}]$; 3) $[(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\,(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]$.

851. Dados los puntos $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ y $C(3;\ 2;\ 1)$, hallar las coordenadas de los productos vectoriales: 1) $[\overline{AB}\,\overline{BC}]$; 2) $[(\overline{BC}-\overline{2CA})\,\overline{CB}]$.

852. La fuerza $\boldsymbol{f}=\{3;\ 2;\ -4\}$ está aplicada al punto $A\ (2;\ -1;\ 1)$. Determinar el momento de esta fuerza con respecto al origen de coordenadas *).

853. La fuerza $\boldsymbol{P}=\{2;\ -4;\ 5\}$ está aplicada al punto $M_0\ (4;\ -2;\ 3)$. Determinar el momento de esta fuerza con respecto al punto $A\ (3;\ 2;\ -1)$.

854. La fuerza $\boldsymbol{Q}=\{3;\ 4;\ -2\}$ está aplicada al punto $C\ (2;\ -1;\ -2)$. Determinar la magnitud y los cosenos directores del momento de esta fuerza con respecto al origen de coordenadas.

855. La fuerza $\boldsymbol{P}=\{2;\ 2;\ 9\}$ está aplicada al punto $A\ (4;\ 2;\ -3)$. Determinar la magnitud y los cosenos directores del momento de esta fuerza con respecto al punto $C\ (2;\ 4;\ 0)$.

856. Se dan tres fuerzas: $\boldsymbol{M}=\{2;\ -1;\ -3\}$, $\boldsymbol{N}=\{3;\ 2;\ -1\}$ y $\boldsymbol{P}=\{-4;\ 1;\ 3\}$, aplicadas al punto $C\ (-1;\ 4;\ -2)$. Determinar la magnitud y los cosenos directores del momento de la resultante de estas fuerzas con respecto al punto $A\ (2;\ 3;\ -1)$.

---

*) Si el vector $\boldsymbol{f}$ representa una fuerza, aplicada a cierto punto M, y el vector $\boldsymbol{a}$ va del punto O al punto M, el vector $[\boldsymbol{af}]$ representará el momento de esta fuerza respecto al punto O.

857. Se dan los puntos $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ y $C(5; 2; 6)$. Calcular el área del triángulo ABC.

858. Se dan los vértices de un triángulo $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$ y $C(1; 3; -1)$. Calcular la longitud de su altura, bajada desde el vértice B al lado AC.

859. Calcular el seno del ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a} = \{2; -2; 1\}$ y $\boldsymbol{b} = \{2; 3; 6\}$.

860. El vector $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a} = \{4; -2; -3\}$ y $\boldsymbol{b} = \{0; 1; 3\}$ y forma con el eje Oy un ángulo obtuso. Hallar sus coordenadas, sabiendo que $|\boldsymbol{x}| = 26$.

861. El vector $\boldsymbol{m}$ es perpendicular al eje Oz y al vector $\boldsymbol{a} = \{8; -15; 3\}$ y forma un ángulo agudo con el eje Ox. Hallar sus coordenadas, sabiendo que $|\boldsymbol{m}| = 51$.

862. Hallar el vector $\boldsymbol{x}$, sabiendo que es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a} = \{2; -3; 1\}$ y $\boldsymbol{b} = \{1; -2; 3\}$ y satisface a la condición:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) = 10.$$

863. Demostrar la identidad

$$(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 =$$
$$= (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (l_2 n_1 - l_1 n_2)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2.$$

N o t a. Servirse de la identidad del problema 845.

864. Se dan los vectores:

$$\boldsymbol{a} = \{2; -3; 1\}, \ \boldsymbol{b} = \{-3; 1; 2\} \ \text{y} \ \boldsymbol{c} = \{1; 2; 3\}.$$

Calcular $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}]$ y $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$.

§ 33. Producto mixto de tres vectores

Se dice que tres vectores forman una terna de vectores, si se señala cuál de ellos se toma como primero, cuál como segundo y cuál como tercero. La terna de vectores se escribe en el orden de su numeración; por ejemplo, la notación $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ indica que el vector $\boldsymbol{a}$ se toma como primer vector, $\boldsymbol{b}$ como segundo y $\boldsymbol{c}$ como tercero.

Una terna de vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ no coplanares, se dice que es una terna de mano derecha si, trasladando los vectores que la componen a un mismo origen, se sitúan, en el orden de su numeración, de igual modo que los dedos pulgar, índice y cordial de la mano derecha. Si los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ se sitúan igual que los dedos pulgar, índico y cordial de la mano izquierda, se dice que la terna de vectorse es de mano izquierda.

Se llama producto mixto de tres vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ al número, igual al producto vectorial $[\boldsymbol{ab}]$, multiplicado escalarmente por el vector $\boldsymbol{c}$, es decir, $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$.

En vista de que se verifica la identidad $[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]$, para el producto mixto $[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}$ se emplea la notación $\boldsymbol{abc}$ que es más abreviada. De este modo:

$$\boldsymbol{abc} = [\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}].$$

El producto mixto $\boldsymbol{abc}$ es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, tomado con signo más, si la terna $\boldsymbol{abc}$ es de mano derecha, y con signo menos, si es de mano izquierda. Si los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ son coplanares (y solamente en este caso), el producto mixto $\boldsymbol{abc}$ es igual a cero; o sea, la igualdad

$$\boldsymbol{abc} = 0$$

es la condición necesaria y suficiente para la coplanaridad de los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Si los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ se dan mediante sus coordenadas:

$$\boldsymbol{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}, \quad \boldsymbol{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}, \quad \boldsymbol{c} = \{X_3;\ Y_3;\ Z_3\},$$

el producto mixto $\boldsymbol{abc}$ se determina por la fórmula

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Recordemos que se supone que el sistema de ejes coordenados es de mano derecha (con lo cual la terna de vectores $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ es de mano derecha).

865. Determinar de qué mano es la terna $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (de derecha o de izquierda), si:

1) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{j}$; 2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{j}$;
3) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{k}$; 4) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{j};\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{k}$;
5) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{j}$; 6) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{k}$.

866. Los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ forman una terna de mano derecha y son perpendiculares entre sí. Sabiendo que $|\boldsymbol{a}| = 4$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $|\boldsymbol{c}| = 3$, calcular $\boldsymbol{abc}$.

867. El vector $\boldsymbol{c}$ es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, el ángulo formado por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a 30°. Sabiendo que $|\boldsymbol{a}| = 6$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, $|\boldsymbol{c}| = 3$, calcular $\boldsymbol{abc}$.

868. Demostrar, que

$$|\boldsymbol{abc}| \leqslant |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|;$$

¿en qué caso se verificará aquí el signo de igualdad?

869. Demostrar la identidad

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) + 2\boldsymbol{abc}.$$

870. Demostrar la identidad

$$\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\boldsymbol{abc},$$

en donde λ y μ son unos números cualesquiera.

871. Demostrar que si los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ satisfacen a la condición

$$[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{bc}]+[\boldsymbol{ca}]=0,$$

son coplanares.

872. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sean coplanares, es la dependencia lineal

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=0,$$

en donde, por lo menos uno de los números α, β, γ no es igual a cero.

873. Dados tres vectores:

$$\boldsymbol{a}=\{1;\ -1;\ 3\};\quad \boldsymbol{b}=\{-2;\ 2;\ 1\},\quad \boldsymbol{c}=\{3;\ -2;\ 5\},$$

calcular $\boldsymbol{abc}$.

874. Determinar si son coplanares los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, si:

1) $\boldsymbol{a}=\{2;\ 3;\ -1\}$, $\quad\boldsymbol{b}=\{1;\ -1;\ 3\}$, $\quad\boldsymbol{c}=\{1;\ 9;\ -11\}$;

2) $\boldsymbol{a}=\{3;\ -2;\ 1\}$, $\quad\boldsymbol{b}=\{2;\ 1;\ 2\}$, $\quad\boldsymbol{c}=\{3;\ -1;\ -2\}$;

3) $\boldsymbol{a}=\{2;\ -1;\ 2\}$, $\quad\boldsymbol{b}=\{1;\ 2;\ -3\}$, $\quad\boldsymbol{c}=\{3;\ -4;\ 7\}$.

875. Demostrar que los cuatro puntos $A\ (1;\ 2;\ -1)$, $B\ (0;\ 1;\ 5)$, $C\ (-1;\ 2;\ 1)$ y $D\ (2;\ 1;\ 3)$ están situados en un plano.

876. Calcular el área del tetraedro cuyos vértices están en los puntos $A\ (2;\ -1;\ 1)$, $B\ (5;\ 5;\ 4)$, $C\ (3;\ 2;\ -1)$ y $D\ (4;\ 1;\ 3)$.

877. Dados los vértices de un tetraedro:

$$A\ (2;\ 3;\ 1),\quad B\ (4;\ 1;\ -2),\quad C\ (6;\ 3;\ 7),\quad D\ (-5;\ -4;\ 8),$$

hallar la longitud de su altura bajada desde el vértice D.

878. El volumen de un tetraedro, tres de cuyos vértices están en los puntos $A\ (2;\ 1;\ -1)$, $B\ (3;\ 0;\ 1)$, $C\ (2;\ -1;\ 3)$, es $v=5$. Hallar las coordenadas del cuarto vértice D, si se sabe que está en el eje Oy.

§ 34. Producto vectorial doble de tres vectores

Supongamos que el vector $\boldsymbol{a}$ se multiplica vectorialmente por el vector $\boldsymbol{b}$ y que el vector obtenido $[\boldsymbol{ab}]$ se multiplica, a su vez, vectorialmente por el vector $\boldsymbol{c}$. Como resultado, se tiene el producto vectorial doble $[[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}]$ (es evidente que $[[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}]$ es un vector). Multiplicando vectorialmente el vector $\boldsymbol{a}$ por el vector $[\boldsymbol{bc}]$ obtenemos el producto vectorial doble $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$.

Por lo general,

$$[[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}] \neq [\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]].$$

Demostremos que se verifica la identidad

$$[[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bc}).$$

D e m o s t r a c i ó n. Consideremos un sistema (cartesiano) de coordenadas rectangulares. Para mayor comodidad, colocamos los ejes coordenados de un modo especial, a saber: el eje Ox lo dirigimos en dirección del vector $\boldsymbol{a}$ y el eje Oy lo colocamos en el plano de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (suponiendo que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen un origen común). En estas condiciones, tendremos que:

$$\boldsymbol{a} = \{X_1;\ 0;\ 0\},\quad \boldsymbol{b} = \{X_2;\ Y_2;\ 0\},\quad \boldsymbol{c} = \{X_3;\ Y_3;\ Z_3\}.$$

Ahora hallamos:

$$\left.\begin{aligned} [\boldsymbol{ab}] &= \{0;\ 0;\ X_1Y_2\},\\ [[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}] &= \{-X_1Y_2Y_3;\ X_1Y_2X_3;\ 0\}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Por otra parte,

$$\boldsymbol{ac} = X_1X_3;\quad \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac}) = \{X_1X_2X_3;\ X_1Y_2X_3;\ 0\},$$

$$\boldsymbol{bc} = X_2X_3 + Y_2Y_3;\quad \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bc}) = \{X_1X_2X_3 + X_1Y_2Y_3;\ 0;\ 0\}.$$

Por consiguiente,

$$\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bc}) = \{-X_1Y_2Y_3;\ X_1Y_2X_3;\ 0\}. \qquad (2)$$

Comparando los segundos miembros de las fórmulas (1) y (2), obtenemos:

$$[[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bc}),$$

que es lo que se pedía.

879. Demostrar la identidad

$$[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{ab}).$$

880. Resolver el problema 864 utilizando las identidades expuestas en el comienzo de este párrafo y la identidad del problema 879.

881. Dados los vértices de un triángulo $A\ (2;\ -1;\ -3)$, $B\ (1;\ 2;\ -4)$ y $C\ (3;\ -1;\ -2)$, calcular las coordenadas del vector $\boldsymbol{h}$ que es colineal a la altura bajada desde el vértice A al lado opuesto, si el vector $\boldsymbol{h}$ forma con el eje Oy un ángulo obtuso y su módulo es igual a $2\sqrt{34}$.

882. Suponiendo que cada uno de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ es diferente de cero, averiguar su posición relativa para que se verifique la igualdad

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = [[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}].$$

883. Demostrar las identidades:

1) $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] + [\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]] + [\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]] = 0$;
2) $[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}] = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc})$;
3) $[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}] + [\boldsymbol{ac}][\boldsymbol{db}] + [\boldsymbol{ad}][\boldsymbol{bc}] = 0$;
4) $[[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{abd}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{abc})$;
5) $[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{bc}][\boldsymbol{ca}] = (\boldsymbol{abc})^2$;
6) $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{ab}]]]] = a^4\boldsymbol{b}$, si los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares entre sí;
7) $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}[\boldsymbol{cd}]]] = [\boldsymbol{ac}](\boldsymbol{bd}) - [\boldsymbol{ad}](\boldsymbol{bc})$;
8) $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}[\boldsymbol{cd}]]] = (\boldsymbol{acd})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{ab})[\boldsymbol{cd}]$;
9) $[\boldsymbol{ab}]^2[\boldsymbol{ac}]^2 - ([\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{ac}])^2 = a^2(\boldsymbol{abc})^2$;
10) $[[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{bc}]][[\boldsymbol{bc}][\boldsymbol{ca}]][[\boldsymbol{ca}][\boldsymbol{ab}]] = (\boldsymbol{abc})^4$;
11) $(\boldsymbol{ab})[\boldsymbol{cd}] + (\boldsymbol{ac})[\boldsymbol{db}] + (\boldsymbol{ad})[\boldsymbol{bc}] = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bcd})$;
12) $(\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{ade}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{abd} & \boldsymbol{abe} \\ \boldsymbol{acd} & \boldsymbol{ace} \end{vmatrix}$.

884. Tres vectores, no coplanares, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{c}$ tienen un origen común. Demostrar que el plano que pasa por los extremos de estos vectores es perpendicular al vector

$$[\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{bc}] + [\boldsymbol{ca}].$$

VIII

Capítulo

ECUACION DE UNA SUPERFICIE Y ECUACION DE UNA LINEA

§ 35. Ecuación de una superficie

Se llama ecuación de una superficie dada (en el sistema de coordenadas considerado) a la ecuación de tres variables

$$F(x, y, z) = 0,$$

a la cual satisfacen las coordenadas de cada punto situado en esta superficie y no satisfacen las coordenadas de ningún otro punto situado fuera de ella.

885. Dados los puntos $M_1(2;\ -3;\ 6)$, $M_2(0;\ 7;\ 0)$, $M_3(3;\ 2;\ -4)$, $M_4(2\sqrt{2};\ 4;\ -5)$, $M_5(1;\ -4;\ -5)$, $M_6(2;\ 6;\ -\sqrt{5})$, averiguar cuáles están situados en la superficie determinada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49,$$

y cuáles no lo están. ¿Qué superficie determina la ecuación dada?

886. Hallar en la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

un punto para el cual: 1) la abscisa es igual a 1 y la ordenada es igual a 2; 2) la abscisa es igual a 2 y la ordenada es igual a 5; 3) la abscisa es igual a 2 y la cota es igual a 2; 4) la ordenada es igual a 2 y la cota es igual a 4.

887. Averiguar qué figuras geométricas representan las ecuaciones siguientes, en coordenadas cartesianas rectangulares del espacio:

$$1)\ x = 0;\quad 2)\ y = 0;\quad 3)\ z = 0;\quad 4)\ x - 2 = 0;$$
$$5)\ y + 2 = 0;\quad 6)\ z + 5 = 0;\quad 7)\ x^2 + y^2 + z^2 = 25;$$

8) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=49$;
9) $x^2+2y^2+3z^2=0$; 10) $x^2+2y^2+3z^2+5=0$;
11) $x-y=0$; 12) $x+z=0$; 13) $y-z=0$;
14) $xy=0$; 15) $xz=0$; 16) $yz=0$; 17) $xyz=0$;
18) $x^2-4x=0$; 19) $xy-y^2=0$;
20) $yz+z^2=0$.

888. Dados dos puntos $F_1(-c; 0; 0)$ y $F_2(c; 0; 0)$, deducir la ecuación del lugar geométrico de puntos cuya suma de distancias a dos puntos dados es una cantidad constante, igual a $2a$; se supone que $a>0$, $c>0$, $a>c$.

Solución. Indiquemos con la letra M un punto arbitrario del espacio y sus coordenadas con las letras x, y, z. Como el punto M puede ocupar cualquier posición, x, y, z serán cantidades variables, por lo que se llaman coordenadas variables.

El punto M está en la superficie dada cuando, y solamente cuando,

$$MF_1+MF_2=2a. \tag{1}$$

Esta es la definición de la superficie expresada por símbolos.

Representemos MF_1 y MF_2 mediante las coordenadas variables del punto M:

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}, \quad MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}.$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en la igualdad (1), tendremos la ecuación

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}=2a, \tag{2}$$

que relaciona entre sí a las coordenadas variables x, y, z. Esta es la ecuación de la superficie considerada.

En efecto, para cada punto M situado en la superficie dada, se cumple la condición (1) y, por lo tanto, las coordenadas de tal punto tendrán que satisfacer a la ecuación (2); sin embargo, la condición (1) no se cumple para ningún punto situado fuera de la superficie dada y, por lo tanto, sus coordenadas no satisfacen a la ecuación (2). De esta manera, queda resuelto el problema; los cálculos ulteriores tienen por objeto representar la ecuación de la superficie en la forma más simple.

Pasemos el segundo radical de la ecuación (2) al segundo miembro:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2-z^2};$$

elevando los dos miembros de esta igualdad al cuadrado y abriendo paréntesis, obtenemos:

$$x^2+2cx+c^2+y^2+z^2=$$
$$=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}+x^2-2cx+c^2+y^2+z^2,$$

o

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}=a^2-cx.$$

Eliminando nuevamente el radical, hallamos:

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2+a^2z^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

o

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2+a^2z^2=a^2\,(a^2-c^2). \tag{3}$$

Como $a > c$, tendremos que $a^2 - c^2 > 0$; indicaremos el número positivo $a^2 - c^2$ por b^2. La ecuación (3) tomará, entonces, la forma

$$b^2x^2+a^2y^2+a^2z^2=a^2b^2$$

o

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{4}$$

La superficie considerada se llama elipsoide de revolución. La ecuación (4) se llama ecuación canónica de este elipsoide.

889. Deducir la ecuación de la esfera cuyo centro está en el origen de coordenadas, si su radio es igual a r.

890. Deducir la ecuación de la esfera cuyo centro es C $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$, si su radio es igual a r.

891. Desde el punto P (2; 6; —5) se han trazado todos los rayos posibles hasta la intersección con el plano Oxz. Hallar la ecuación del lugar geométrico de sus puntos medios.

892. Desde el punto A (3; —5; 7) se han trazado todos los rayos posibles hasta la intersección con el plano Oxy. Hallar la ecuación del lugar geométrico de sus puntos medios.

893. Desde el punto C (—3; —5; 9) se han trazado todos los rayos posibles hasta la intersección con el plano Oyz. Hallar la ecuación del lugar geométrico de sus puntos medios.

894. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de sus distancias a los puntos F_1 (2; 3; —5) y F_2 (2; —7; —5) sea una cantidad constante, igual a 13.

895. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos F_1 ($-a$; 0; 0) y F_2 (a, 0; 0) sea igual a la cantidad constante $4a^2$.

896. Los vértices de un cubo son A ($-a$; $-a$; $-a$), B (a; $-a$; $-a$), C ($-a$; a; $-a$) y D (a; a; a). Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de sus distancias a las caras de este cubo sea una cantidad constante, igual a $8a^2$.

897. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos M_1 (1; 2; —3) y M_2 (3; 2; 1).

898. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de sus distancias a dos puntos dados $F_1(0;\ 0;\ -4)$ y $F_2(0;\ 0;\ 4)$ sea una cantidad constante, igual a 10.

899. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de sus distancias a dos puntos dados $F_1(0;\ -5;\ 0)$ y $F_2(0;\ 5;\ 0)$ sea una cantidad constante, igual a 6.

§ 36. Ecuación de una línea. El problema de la intersección de tres superficies

Una línea en el espacio se determina como la intersección de dos superficies $F(x, y, z) = 0$ y $\Phi(x, y, z) = 0$ y se da por dos ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z)=0, \\ \Phi(x,\ y,\ z)=0. \end{cases}$$

Si $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$, $\Psi(x, y, z) = 0$ son las ecuaciones de tres superficies, para hallar los puntos de sus intersecciones es necesario resolver simultáneamente el sistema:

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z)=0, \\ \Phi(x,\ y,\ z)=0, \\ \Psi(x,\ y,\ z)=0. \end{cases}$$

Cada solución x, y, z de este sistema nos proporciona las coordenadas de uno de los puntos de intersección de las superficies dadas.

900. Se dan los puntos $M_1(3;\ 4;\ -4)$, $M_2(-3;\ 2;\ 4)$, $M_3(-1;\ -4;\ 4)$ y $M_4(2;\ 3;\ -3)$. Averiguar cuáles están en la línea

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=36, \\ y+z=0 \end{cases}$$

y cuáles no lo están.

901. Averiguar cuáles de las líneas dadas a continuación pasan por el origen de coordenadas:

$$1)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2z=0, \\ y=0; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} (x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=25, \\ x+y=0; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9, \\ x-z=0. \end{cases}$$

902. Hallar en la línea
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49, \\ x^2+y^2+z^2-4z-25=0 \end{cases}$$
un punto:

1) cuya abscisa sea igual a 3;
2) cuya ordenada sea igual a 2;
3) cuya cota sea igual a 8.

903. Hallar las líneas que determinan las ecuaciones siguientes:

$$1)\ \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x=0, \\ z=0; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} y=0, \\ z=0; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} x-2=0, \\ y=0; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x+2=0, \\ y-3=0; \end{cases} \quad 6)\ \begin{cases} x-5=0, \\ z+2=0; \end{cases} \quad 7)\ \begin{cases} y+2=0, \\ z-5=0; \end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ z=0; \end{cases} \quad 9)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=49, \\ y=0; \end{cases}$$

$$10)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x=0; \end{cases} \quad 11)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=20, \\ z-2=0. \end{cases}$$

904. Hallar la ecuación de la línea de intersección del plano Oxz y la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio igual a 3.

905. Hallar la ecuación de la línea de intersección de la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio igual a 5, y el plano, paralelo al plano Oxz, situado en el semiespacio izquierdo, a la distancia de dos unidades de él.

906. Hallar la ecuación de la línea de intersección del plano Oyz y la esfera con centro en el punto C (5; -2; 1) y radio igual a 13.

907. Hallar las ecuaciones de la línea de intersección de dos esferas, una de las cuales tiene un radio igual a 6 y el centro en el origen de coordenadas y la otra, un radio igual a 5 y el centro en el punto C (1; -2; 2).

908. Hallar los puntos de intersección de las tres superficies:
$$x^2+y^2+z^2=49, \quad y-3=0, \quad z+6=0.$$

909. Hallar los puntos de intersección de las tres superficies:
$$x^2+y^2+z^2=9, \quad x^2+y^2+(z-2)^2=5, \quad y-2=0.$$

§ 37. Ecuación de una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas a uno de los ejes coordenados

Una ecuación de dos variables de la forma

$$F(x, y) = 0$$

determina, en un sistema de coordenadas del espacio, una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Oz. En el plano, en el sistema de coordenadas determinado por los ejes Ox y Oy, la ecuación $F(x, y) = 0$ determina una línea, que es, precisamente, la directriz del cilindro considerado. Pero esta línea, en el sistema de coordenadas del espacio, tiene que ser dada por dos ecuaciones

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Análogamente, la ecuación

$$F(x, z) = 0$$

(en el espacio) determina una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Oy; la ecuación $F(y, z) = 0$ determina una superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Ox.

910. Averiguar qué figuras geométricas determinan las ecuaciones siguientes en un sistema de coordenadas del espacio:

$$1)\ x^2 + z^2 = 25;\ 2)\ \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1;\ 3)\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$4)\ x^2 = 6z;\ 5)\ x^2 - xy = 0;\ 6)\ x^2 - z^2 = 0;$$

$$7)\ y^2 + z^2 = 0;\ 8)\ x^2 + 4y^2 + 4 = 0;\ 9)\ x^2 + z^2 = 2z;$$

$$10)\ y^2 + z^2 = -z.$$

911. Hallar la ecuación del cilindro que proyecta a la circunferencia

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

sobre el plano: 1) Oxy; 2) Oxz; 3) Oyz.

912. Hallar la ecuación de la proyección de la circunferencia

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 36, \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25 \end{cases}$$

sobre el plano: 1) Oxy; 2) Oxz; 3) Oyz.

IX

Capítulo

ECUACION DEL PLANO. ECUACION DE LA RECTA. ECUACIONES DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN

§ 38. Ecuación general del plano. Ecuación del plano que pasa por un punto dado y tiene un vector normal dado

En coordenadas cartesianas, cada plano se determina por una ecuación de primer grado y cada ecuación de primer grado determina un plano.

Todo vector (diferente de cero), perpendicular al plano dado, se llama vector normal del plano. La ecuación

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

determina un plano que pasa por el punto $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ y cuyo vector normal es $\boldsymbol{n}=\{A;\ B;\ C\}$.

Abriendo paréntesis de la ecuación (1) y designando el número $-Ax_0-By_0-Cz_0$ por la letra D, representamos la ecuación (1) en la forma:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Esta ecuación se llama ecuación general del plano.

913. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1(2;\ 1;\ -1)$ y cuyo vector normal es $\boldsymbol{n}=\{1;\ -2;\ 3\}$.

914. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y cuyo vector normal es $\boldsymbol{n}=\{5;\ 0;\ -3\}$.

915. El punto $P(2;\ -1;\ -1)$ es el pie de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a un plano. Hallar la ecuación de este plano.

916. Dados dos puntos $M_1(3;\ -1;\ 2)$ y $M_2(4;\ -2;\ -1)$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto M_1 y es perpendicular al vector $\overrightarrow{M_1M_2}$.

917. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1(3;\ 4;\ -5)$ y es paralelo a los dos vectores $a_1=\{3;\ 1;\ -1\}$ y $a_2=\{1;\ -2;\ 1\}$.

918. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ y es paralelo a los dos vectores

$$a_1=\{l_1;\ m_1;\ n_1\} \text{ y } a_2=\{l_2;\ m_2;\ n_2\},$$

se puede representar en la forma

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0.$$

919. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1(2;\ -1;\ 3)$ y $M_2(3;\ 1;\ 2)$ y es paralelo al vector $\boldsymbol{a}=\{3;\ -1;\ -4\}$.

920. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ y es paralelo al vector

$$a=\{l;\ m;\ n\},$$

se puede representar en la forma

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

921. Hallar la ecuación del plano que pasa por tres puntos:

$$M_1(3;\ -1;\ 2),\ M_2(4;\ -1;\ -1) \text{ y } M_3(2;\ 0;\ 2).$$

922. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por tres puntos:

$$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1),\quad M_2(x_2;\ y_2;\ z_2) \text{ y } M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$$

se puede representar en la forma:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

923. Determinar las coordenadas de algún vector normal de cada uno de los siguientes planos. Escribir, en cada caso, la expresión general de las coordenadas de un vector normal arbitrario:

1) $2x-y-2z+5=0$; 2) $x+5y-z=0$;
3) $3x-2y-7=0$; 4) $5y-3z=0$;
5) $x+2=0$; 6) $y-3=0$.

924. Determinar qué pares, de las ecuaciones dadas a continuación, determinan planos paralelos:

1) $2x-3y+5z-7=0$, $2x-3y+5z+3=0$;

2) $4x+2y-4z+5=0$, $2x+y+2z-1=0$;

3) $x-3z+2=0$, $2x-6z-7=0$.

925. Determinar qué pares, de las ecuaciones dadas a continuación, determinan planos perpendiculares:

1) $3x-y-2z-5=0$, $x+9y-3z+2=0$;

2) $2x+3y-z-3=0$, $x-y-z+5=0$;

3) $2x-5y+z=0$, $x+2z-3=0$.

926. Determinar para qué valores de l y m los pares de ecuaciones, dadas a continuación, determinan planos paralelos:

1) $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;

2) $3x-y+lz-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;

3) $mx+3y-2z-1=0$, $2x-5y-lz=0$.

927. Determinar para qué valores de l los pares de ecuaciones, dadas a continuación, determinan planos perpendiculares:

1) $3x-5y+lz-3=0$, $x+3y+2z+5=0$;

2) $5x+y-3z-2=0$, $2x+ly-3z+1=0$;

3) $7x-2y-z=0$, $lx+y-3z-1=0$.

928. Determinar los ángulos diedros formados por la intersección de los pares de planos siguientes:

1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+y\sqrt{2}-z+3=0$;

2) $3y-z=0$, $2y+z=0$;

3) $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$;

4) $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.

929. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al plano $5x-3y+2z-3=0$.

930. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1(3;\ -2;\ -7)$ y es paralelo al plano $2x-3z+5=0$.

931. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos:

$$2x-y+3z-1=0, \quad x+2y+z=0.$$

932. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1(2;\ -1;\ 1)$ y es perpendicular a los dos planos:

$$2x-z+1=0, \quad y=0.$$

933. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ y es perpendicular a los dos planos $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, se puede representar en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0.$$

934. Hallar la ecuación del plano que pasa por dos puntos $M_1(1;\ -1;\ -2)$ y $M_2(3;\ 1;\ 1)$ y es perpendicular al plano

$$x-2y+3z-5=0.$$

935. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por dos puntos $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $M_2(x_2,\ y_2;\ z_2)$ y es perpendicular al plano

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

se puede representar en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

936. Verificar que los tres planos $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ tienen un punto común y calcular sus coordenadas.

937. Demostrar que los tres planos

$$7x+4y+7z+1=0, \quad 2x-y-z+2=0,$$
$$x+2y+3z-1=0$$

pasan por una recta.

938. Demostrar que los tres planos

$$2x - y + 3z - 5 = 0, \quad 3x + y + 2z - 1 = 0,$$
$$4x + 3y + z + 2 = 0$$

se cortan en tres rectas paralelas diferentes.

939. Determinar para qué valores de a y b los planos

$$2x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y - z + b = 0,$$
$$x + ay - 6z + 10 = 0:$$

1) tienen un punto común;
2) pasan por una recta;
3) se cortan en tres rectas paralelas diferentes.

§ 39. Ecuaciones incompletas de los planos. Ecuación «segmentaria» del plano

Toda ecuación de primer grado

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(en coordenadas cartesianas) determina un plano. Si esta ecuación carece de término independiente ($D = 0$), el plano pasa por el origen de coordenadas. Si carece de una de las coordenadas variables (o sea, si uno de los coeficientes A, B, C es igual a cero), el plano es paralelo a uno de los ejes coordenados y es, precisamente, paralelo al eje homónimo de la coordenada ausente. Si, además, la ecuación carece de término independiente, el plano pasa por este eje. Si la ecuación carece de dos coordenadas variables (dos de los coeficientes A, B, C son iguales a cero), el plano es paralelo a uno de los planos coordenados; es, precisamente, paralelo al plano que pasa por los ejes homónimos de las coordenadas ausentes. Si, además, la ecuación carece de término independiente, el plano coincide con este plano coordenado.

Si en la ecuación del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

ninguno de los coeficientes A, B, C, D es igual a cero, esta ecuación se puede transformar en la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{1}$$

en donde

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$$

son las magnitudes de los segmentos que el plano intercepta en los ejes coordenados (partiendo del origen de coordenadas). La ecuación (1) se llama ecuación «segmentaria» del plano.

940. Hallar la ecuación del plano que pasa:
1) por el punto M_1 (2; —3; 3) y es paralelo al plano Oxy;
2) por el punto M_2 (1; —2; 4) y es paralelo al plano Oxz;

3) por el punto $M_3(-5; 2; -1)$ y es paralelo al plano Oyz.

941. Hallar la ecuación del plano que pasa:

1) por el eje Ox y por el punto $M_1(4; -1; 2)$;
2) por el eje Oy y por el punto $M_2(1; 4; -3)$;
3) por el eje Oz y por el punto $M_3(3; -4; 7)$.

942. Hallar la ecuación del plano que pasa:

1) por los puntos $M_1(7; 2; -3)$ y $M_2(5; 6; -4)$ y es paralelo al eje Ox;

2) por los puntos $P_1(2; -1; 1)$ y $P_2(3; 1; 2)$ y es paralelo al eje Oy;

3) por los puntos $Q_1(3; -2; 5)$ y $Q_2(2; 3; 1)$ y es paralelo al eje Oz.

943. Hallar los puntos de intersección del plano

$$2x - 3y - 4z - 24 = 0$$

con los ejes coordenados.

944. Dada la ecuación de un plano

$$x + 2y - 3z - 6 = 0,$$

escribirla en la forma «segmentaria».

945. Hallar los segmentos que el plano

$$3x - 4y - 24z + 12 = 0$$

intercepta en los ejes coordenados.

946. Calcular el área del triángulo intersectado en el ángulo coordenado Oxy por el plano

$$5x - 6y + 3z + 120 = 0.$$

947. Calcular el volumen de la pirámide limitada por el plano $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ y por los planos coordenados.

948. Un plano pasa por el punto $M_1(6; -10; 1)$ e intercepta en el eje de abscisas el segmento $a = -3$ y en el eje de cotas el segmento $c = 2$. Hallar la ecuación «segmentaria» de este plano.

949. Un plano pasa por los puntos $M_1(1; 2; -1)$ y $M_2(-3; 2; 1)$ e intercepta en el eje de ordenadas el segmento $b = 3$. Hallar la ecuación «segmentaria» de este plano.

950. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1(2; -3; -4)$ y que intercepta en los ejes coordenados segmentos de igual magnitud y diferentes de cero (se supone que cada segmento parte del origen de coordenadas).

951. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1(-1;\ 4;\ -1)$, $M_2(-13,\ 2;\ -10)$ y que intercepta en los ejes de abscisas y de cotas segmentos de igual longitud y diferentes de cero.

952. Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por el punto $M_1(4;\ 3;\ 2)$ y que interceptan en los ejes coordenados segmentos de igual longitud y diferentes de cero.

953. Hallar la ecuación del plano que intercepta en el eje Oz el segmento $c=-5$ y es perpendicular al vector $n=\{-2;\ 1;\ 3\}$.

954. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al vector $l=\{2;\ 1;\ -1\}$ y que intercepta en los ejes coordenados Ox y Oy los segmentos $a=3$, $b=-2$.

955. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al plano $2x-2y+4z-5=0$ y que intercepta en los ejes coordenados Ox y Oy los segmentos $a=-2$, $b=\frac{2}{3}$.

§ 40. Ecuación normal del plano. Distancia de un punto a un plano

Se llama ecuación normal del plano a su ecuación, escrita en la forma

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{1}$$

en donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal al plano y p es la distancia del origen de coordenadas al plano. Al calcular los cosenos directores de la normal se debe suponer que ésta tiene la dirección del origen de coordenadas al plano (si el plano pasa por el origen de coordenadas, es indiferente la elección de la dirección positiva de la normal).

Supongamos que M^* es un punto cualquiera del espacio y que d es la distancia desde él hasta el plano dado. Se llama «desviación» δ del punto M^* del plano dado, al número $+d$, si el punto M^* y el origen de coordenadas están a diversos lados del plano dado y, al número $-d$, si están en un mismo lado del plano dado (si M^* está en el mismo plano, su desviación será igual a cero).

Si el punto M^* tiene las coordenadas x^*, y^*, z^* y el plano se ha dado mediante su ecuación normal

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

la desviación del punto M^* de este plano se da por la fórmula

$$\delta=x^*\cos\alpha+y^*\cos\beta+z^*\cos\gamma-p.$$

Es evidente que $d=|\delta|$.

La ecuación general del plano

$$Ax+By+Cz+D=0$$

se reduce a la forma normal (1) después de multiplicarla por el factor *normalizador* que se determina por la fórmula

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

el signo del factor normalizador es contrario al signo del término independiente de la ecuación que se normaliza.

956. Determinar cuáles de las ecuaciones de los planos dadas a continuación están escritas en la forma normal:

1) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$; 2) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0$;

3) $\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z + 5 = 0$; 4) $-\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z - 5 = 0$;

5) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z - 3 = 0$; 6) $-\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z + 1 = 0$;

7) $\frac{5}{13}y - \frac{12}{13}z - 1 = 0$; 8) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3 = 0$;

9) $x - 1 = 0$; 10) $y + 2 = 0$;

11) $-y - 2 = 0$; 12) $z - 5 = 0$.

957. Reducir a la forma normal cada una de las ecuaciones de los planos siguientes:

1) $2x - 2y + z - 18 = 0$; 2) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$;

3) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$; 4) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$;

5) $5y - 12z + 26 = 0$; 6) $3x - 4y - 1 = 0$;

7) $y + 2 = 0$; 8) $-x + 5 = 0$;

9) $-z + 3 = 0$; 10) $2z - 1 = 0$.

958. Calcular, para cada uno de los planos siguientes, los ángulos α, β y γ formados por la normal y los ejes coordenados y hallar la distancia p del origen de coordenadas a ellos:

1) $x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0$; 2) $x - y - z\sqrt{2} + 16 = 0$;

3) $x + z - 6 = 0$; 4) $y - z + 2 = 0$; 5) $x\sqrt{3} + y + 10 = 0$;

6) $z - 2 = 0$; 7) $2x + 1 = 0$; 8) $2y + 1 = 0$;

9) $x - 2y + 2z - 6 = 0$; 10) $2x + 3y - 6z + 4 = 0$.

959. Calcular, en cada uno de los casos siguientes, la desviación δ y la distancia d del punto al plano:

1) $M_1(-2;\ -4;\ 3)$, $2x-y+2z+3=0$;

2) $M_2(2;\ -1;\ -1)$, $16x-12y+15z-4=0$;

3) $M_3(1;\ 2;\ -3)$, $5x-3y+z+4=0$;

4) $M_4(3;\ -6;\ 7)$, $4x-3z-1=0$;

5) $M_5(9;\ 2;\ -2)$, $12y-5z+5=0$.

960. Calcular la distancia d del punto $P(-1, 1;\ -2)$ al plano que pasa por tres puntos $M_1(1;\ -1;\ 1)$, $M_2(-2;\ 1;\ 3)$ y $M_3(4;\ -5;\ -2)$.

961. Averiguar si el punto $Q(2;\ -1;\ 1)$ y el origen de coordenadas están a un mismo lado o a diversos lados de cado uno de los planos siguientes:

1) $5x-3y+z-18=0$; 2) $2x+7y+3z+1=0$;

3) $x+5y+12z-1=0$; 4) $2x-y+z+11=0$;

5) $2x+3y-6z+2=0$; 6) $3x-2y+2z-7=0$.

962. Demostrar que el plano $3x-4y-2z+5=0$ corta al segmento limitado por los puntos $M_1(3;\ -2;\ 1)$ y $M_2(-2;\ 5;\ 2)$.

963. Demostrar que el plano $5x-2y+z-1=0$ no corta al segmento limitado por los puntos $M_1(1;\ 4;\ -3)$ y $M_2(2;\ 5;\ 0)$.

964. Calcular la distancia entre los planos paralelos en cada uno de los casos siguientes:

1) $x-2y-2z-12=0$, $x-2y-2z-6=0$;

2) $2x-3y+6z-14=0$, $4x-6y+12z+21=0$;

3) $2x-y+2z+9=0$, $4x-2y+4z-21=0$;

4) $16x+12y-15z+50=0$, $16x+12y-15z+25=0$;

5) $30x-32y+24z-75=0$, $15x-16y+12z-25=0$;

6) $6x-18y-9z-28=0$, $4x-12y-6z-7=0$.

965. Dos caras de un cubo están en los planos

$$2x-2y+z-1=0,\quad 2x-2y+z+5=0.$$

Calcular el volumen de este cubo.

966. Hallar, en el eje Oy, un punto que esté a la distancia $d = 4$ del plano

$$x + 2y - 2z - 2 = 0.$$

967. Hallar, en el eje Oz, un punto equidistante del punto M (1; —2; 0) y del plano $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

968. Hallar, en el eje Ox, un punto equidistante de los dos planos

$$12x - 16y + 15z + 1 = 0, \quad 2x + 2y - z - 1 = 0.$$

969. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyas desviaciones del plano $4x - 4y - 2z + 3 = 0$ sean iguales a 2.

970. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyas desviaciones del plano $6x + 3y + 2z - 10 = 0$ sean iguales a —3.

971. Hallar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $2x - 2y - z - 3 = 0$, que están a la distancia $d = 5$ de él.

972. Hallar, en cada uno de los casos siguientes, la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos planos paralelos:

$$1)\ 4x - y - 2z - 3 = 0, \quad 4x - y - 2z - 5 = 0; \qquad 2)\ 3x + 2y - z + 3 = 0, \quad 3x + 2y - z - 1 = 0;$$

$$3)\ 5x - 3y + z + 3 = 0, \quad 10x - 6y + 2z + 7 = 0.$$

973. Hallar, en cada uno de los casos siguientes, las ecuaciones de los planos que dividen por la mitad los ángulos diedros formados por los dos planos concurrentes:

$$1)\ x - 3y + 2z - 5 = 0, \quad 3x - 2y - z + 3 = 0; \qquad 2)\ 5x - 5y - 2z - 3 = 0, \quad x + 7y - 2z - 1 = 0;$$

$$3)\ 2x - y + 5z + 3 = 0, \quad 2x - 10y + 4z - 2 = 0.$$

974. Averiguar, en cada uno de los casos siguientes, si el punto M (2; —1; 3) y el origen de coordenadas están en un mismo ángulo diedro, en ángulos diedros adyacentes o en ángulos diedros opuestos, formados por la intersección de los dos planos:

$$1)\ 2x-y+3z-5=0, \quad 2)\ 2x+3y-5z-15=0,$$
$$3x+2y-z+3=0; \quad 5x-y-3z-7=0;$$
$$3)\ x+5y-z+1=0,$$
$$2x+17y+z+2=0.$$

975. Averiguar, en cada uno de los casos siguientes, si los puntos M (2; —1; 1) y N (1; 2; —3) están en un mismo ángulo diedro, en ángulos diedros adyacentes o en ángulos diedros opuestos, formados por los dos planos:

$$1)\ 3x-y+2z-3=0, \quad 2)\ 2x-y+5z-1=0,$$
$$x-2y-z+4=0; \quad 3x-2y+6z-1=0.$$

976. Averiguar si el origen de coordenadas está situado en el ángulo agudo u obtuso formado por los dos planos:

$$x-2y+3z-5=0,$$
$$2x-y-z+3=0.$$

977. Averiguar si el punto M (3; 2; —1) está situado en el ángulo agudo u obtuso formado por los dos planos:

$$5x-y+z+3=0,$$
$$4x-3y+2z+5=0.$$

978. Hallar la ecuación del plano que divide por la mitad el ángulo diedro formado por los dos planos

$$2x-14y+6z-1=0,$$
$$3x+5y-5z+3=0,$$

en que está situado el origen de coordenadas.

979. Hallar la ecuación del plano que divide por la mitad el ángulo diedro formado por los dos planos

$$2x-y+2z-3=0,$$
$$3x+2y-6z-1=0,$$

en que está situado el punto M (1; 2; —3).

980. Hallar la ecuación del plano que divide por la mitad el ángulo diedro agudo formado por los dos planos

$$2x-3y-4z-3=0,$$
$$4x-3y-2z-3=0.$$

981. Hallar la ecuación del plano que divide por la mitad el ángulo diedro obtuso formado por los dos planos

$$3x - 4y - z + 5 = 0,$$
$$4x - 3y + z + 5 = 0.$$

§ 41. Ecuaciones de la recta

La recta, como intersección de dos planos, se determina por dos ecuaciones simultáneas de primer grado:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

con la condición de que los coeficientes A_1, B_1, C_1 de la primera de ellas no sean proporcionales a los coeficientes A_2, B_2, C_2 de la segunda (en caso contrario, estas ecuaciones determinarían planos paralelos o coincidentes).

Supongamos que una recta a está determinada por las ecuaciones (1) y que α y β son unos números cualesquiera, no simultáneamente iguales a cero; entonces la ecuación

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{2}$$

determina un plano que pasa por la recta a.

La ecuación de la forma (2) se puede determinar por cualquier plano (con la correspondiente elección de los números α y β) que pase por la recta a.

El conjunto de todos los planos que pasan por una misma recta se llama haz de planos. La ecuación de la forma (2) se llama ecuación del haz de planos.

Si $\alpha \neq 0$, poniendo $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, la ecuación (2) se reduce a la forma

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{3}$$

Esta forma de la ecuación del haz de planos es más usual que la ecuación (2), sin embargo, la ecuación (3) determina todos los planos del haz menos el que corresponde a $\alpha = 0$, es decir, menos el plano $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

982. Hallar las ecuaciones de las rectas formadas por las intersecciones del plano $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ con los planos coordenados.

983. Hallar la ecuación de la recta formada por la intersección del plano $3x - y - 7z + 9 = 0$ con el plano que pasa por el eje Ox y por el punto E (3; 2; —5).

984. Hallar los puntos de intersección de la recta

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

con los planos coordenados.

985. Demostrar que la recta

$$\begin{cases}2x-3y+5z-6=0,\\ x+5y-7z+10=0\end{cases}$$

corta el eje Oy.

986. Averiguar para qué valor de D la recta

$$\begin{cases}2x+3y-z+D=0,\\ 3x-2y+2z-6=0\end{cases}$$

corta: 1) el eje Ox; 2) el eje Oy; 3) el eje Oz.

987. Hallar las relaciones a que deben satisfacer los coeficientes de las ecuaciones de la recta

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

para que esta recta sea paralela: 1) al eje Ox; 2) al eje Oy; 3) al eje Oz.

988. Hallar las relaciones a que deben satisfacer los coeficientes de las ecuaciones de la recta

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

para que esta recta: 1) corte el eje de abscisas; 2) corte el eje de ordenadas; 3) corte el eje de cotas; 4) coincida con el eje de abscisas; 5) coincida con el eje de ordenadas; 6) coincida con el eje de cotas.

989. Hallar en el haz de planos

$$2x-3y+z-3+\lambda(x+3y+2z+1)=0$$

un plano que: 1) pase por el punto M_1 (1; —2; 3); 2) sea paralelo al eje Ox; 3) sea paralelo al eje Oy; 4) sea paralelo al eje Oz.

990. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$ y: 1) por el punto M_1 (4; —2; —3); 2) es paralelo al eje Ox; 3) es paralelo al eje Oy; 4) es paralelo al eje Oz.

991. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x-y+3z-5=0$, $x+2y-z+2=0$ y es paralelo al vector $\vec{l}=\{2; -1; -2\}$.

992. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $5x-2y-z-3=0$, $x+3y-2z+5=0$ y es paralelo al vector $\vec{l}=\{7; 9; 17\}$.

993. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ y es perpendicular al plano $x - 2y + z + 5 = 0$.

994. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

995. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x + y - z + 1 = 0$, $x + y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo al segmento limitado por los puntos $M_1(2;\ 5;\ -3)$ y $M_2(3;\ -2;\ 2)$.

996. Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos

$$\alpha(3x - 4y + z + 6) + \beta(2x - 3y + z + 2) = 0$$

y es equidistante de los puntos $M_1(3;\ -4;\ -6)$, $M_2(1;\ 2;\ 2)$.

997. Averiguar si el plano

$$4x - 8y + 17z - 8 = 0$$

pertenece al haz de planos

$$\alpha(5x - y + 4z - 1) + \beta(2x + 2y - 3z + 2) = 0.$$

998. Averiguar si el plano

$$5x - 9y - 2z + 12 = 0$$

pertenece al haz de planos

$$\alpha(2x - 3y + z - 5) + \beta(x - 2y - z - 7) = 0.$$

999. Determinar los valores de l y m para que el plano

$$5x + ly + 4z + m = 0$$

pertenezca al haz de planos

$$\alpha(3x - 7y + z - 3) + \beta(x - 9y - 2z + 5) = 0.$$

1000. Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos

$$\alpha(x - 3y + 7z + 36) + \beta(2x + y - z - 15) = 0,$$

cuya distancia al origen de coordenadas es igual a $p = 3$.

1001. Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos

$$\alpha\,(10x - 8y - 15z + 56) + \beta\,(4x + y + 3z - 1) = 0,$$

cuya distancia al punto $C\,(3;\ -2;\ -3)$ es igual a $d = 7$.

1002. Hallar la ecuación del plano que pertenece al haz de planos

$$\alpha\,(4x + 13y - 2z - 60) + \beta\,(4x + 3y + 3z - 30) = 0$$

y recorta del ángulo coordenado Oxy un triángulo de área igual a 6 unidades cuadradas.

1003. Hallar las ecuaciones de los planos que proyectan la recta

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

sobre los planos coordenados.

1004. Hallar las ecuaciones de las proyecciones de la recta

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

sobre los planos coordenados.

1005. Hallar la ecuación del plano que proyecta la recta

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

sobre el plano $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

1006. Hallar las ecuaciones de la proyección de la recta

$$\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

sobre el plano

$$2x - y + z - 1 = 0.$$

§ 42. Vector director de la recta. Ecuaciones canónicas de la recta. Ecuaciones paramétricas de la recta

Se llama vector director de una recta a un vector cualquiera, diferente de cero, situado en esta recta o en una recta paralela a ella.

En lo sucesivo, el vector director de una recta arbitraria se designará con la letra a y sus coordenadas con las letras l, m, n:

$$a = \{l;\ m;\ n\}.$$

Si se conoce uno de sus puntos M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ y el vector director $\boldsymbol{a} = \{l; m; n\}$, la recta se podrá determinar mediante (dos) ecuaciones de la forma:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (1)$$

Las ecuaciones de la recta que tienen esa forma se llaman canónicas.

Las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por dos puntos dados M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ y M_2 $(x_2; y_2; z_2)$ son de la forma:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (2)$$

Designemos por la letra t cada una de las relaciones iguales de las ecuaciones canónicas (1); tendremos:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t.$$

De aquí que

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases} \qquad (3)$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ en dirección del vector $\boldsymbol{a} = \{l; m; n\}$. En las ecuaciones (3), t se considera como un parámetro variable arbitrario; x, y, z son funciones de t. Al variar t, las cantidades x, y, z varían de modo que el punto M $(x; y; z)$ se mueve por la recta dada.

Si se interpreta el parámetro t como el tiempo variable, y las ecuaciones (3) como las ecuaciones del movimiento del punto M, estas ecuaciones determinarán un movimiento uniforme rectilíneo del punto M. Cuando $t = 0$, el punto M coincide con el punto M_0. La velocidad v del punto M es constante y se determina por la fórmula

$$v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$

1007. Hallar las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto M_1 $(2; 0; -3)$ y es paralela:

1) al vector $\boldsymbol{a} = \{2; -3; 5\}$;

2) a la recta $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$;

3) al eje Ox; 4) al eje Oy; 5) al eje Oz.

1008. Hallar las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por los dos puntos dados:

1) $(1; -2; 1)$, $(3; 1; -1)$; 2) $(3; -1; 0)$, $(1; 0; -3)$; 3) $(0; -2; 3)$, $(3; -2; 1)$; 4) $(1; 2; -4)$, $(-1; 2; -4)$.

1009. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto M_1 $(1; -1; -3)$ y es paralela

1) al vector $\boldsymbol{a} = \{2; -3; 4\}$;

2) a la recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-1}{0}$;

3) a la recta $x = 3t - 1$, $y = -2t + 3$, $z = 5t + 2$.

1010. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los dos puntos dados:

1) $(3; -1; 2)$, $(2; 1; 1)$; 2) $(1; 1; -2)$, $(3; -1; 0)$; 3) $(0; 0; 1)$, $(0; 1; -2)$.

1011. Por los puntos $M_1(-6; 6; -5)$ y $M_2(12; -6; 1)$ se ha trazado una recta. Hallar los puntos de intersección de esta recta con los planos coordenados.

1012. Dados los vértices de un triángulo $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$ y $C(4; -7; -2)$, hallar las ecuaciones paramétricas de su mediana trazada desde el vértice C.

1013. Dados los vértices de un triángulo $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$ y $C(-5; 14; -3)$, hallar las ecuaciones canónicas de la bisectriz del ángulo interno del vértice B.

1014. Dados los vértices de un triángulo $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$ y $C(-7; 11; 6)$, hallar las ecuaciones canónicas de la bisectriz del ángulo externo del vértice A.

1015. Dados los vértices de un triángulo $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ y $C(5; 1; -7)$, hallar las ecuaciones paramétricas de la altura bajada desde el vértice B al lado opuesto.

1016. Dada la recta

$$\begin{cases} 2x-5y+z-3=0, \\ x+2y-z+2=0, \end{cases}$$

calcular las proyecciones sobre los ejes coordenados de algún vector director $\boldsymbol{a}$ de ella. Hallar la expresión general de las proyecciones de un vector director arbitrario de esta recta sobre los ejes coordenados.

1017. Dada la recta

$$\begin{cases} 2x-y+3z+1=0, \\ 3x+y-z-2=0, \end{cases}$$

hallar la descomposición de algún vector director $\boldsymbol{a}$ y la expresión general de la descomposición de un vector director arbitrario de esta recta en la base $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

1018. Hallar las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto $M_1(2; 3; -5)$ y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$$

1019. Hallar las ecuaciones canónicas de las rectas siguientes:

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

1020. Hallar las ecuaciones paramétricas de las rectas siguientes:

1) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$

1021. Verificar que son paralelas las rectas:

1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ y $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

2) $x=2t+5,\ y=-t+2,\ z=t-7$

y $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0. \end{cases}$

1022. Verificar que son perpendiculares las rectas:

1) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ y $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$

2) $x=2t+1;\quad y=3t-2,\quad z=-6t+1$

y $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$

1023. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

1024. Hallar el ángulo obtuso formado por las rectas:

$$x=3t-2, \quad y=0, \quad z=-t+3;$$
$$x=2t-1, \quad y=0, \quad z=t-3.$$

1025. Hallar el coseno del ángulo formado por las rectas:

$$\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$$

1026. Demostrar que las rectas, dadas mediante sus ecuaciones paramétricas

$$x=2t-3, \quad y=3t-2, \quad z=-4t+6$$

y

$$x=t+5, \; y=-4t-1, \; z=t-4,$$

son concurrentes.

1027. Se dan las rectas

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2};$$

¿cuál debe de ser el valor de l para que estas rectas sean concurrentes?

1028. Demostrar que la condición, según la cual las dos rectas

$$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1} \quad \text{y} \quad \frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2}$$

están situadas en un plano, se puede expresar de la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

1029. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $M_1(-1; 2; -3)$, es perpendicular al vector $a=\{6; -2; -3\}$ y se corta con la recta

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}.$$

1030. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $M_1(-4; -5; 3)$ y se corta con las dos rectas

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}, \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}.$$

1031. Hallar las ecuaciones paramétricas de la perpendicular común a las dos rectas, dadas por las ecuaciones

$$x=3t-7, \; y=-2t+4, \; z=3t+4$$

y

$$x = t + 1,\ y = 2t - 9,\ z = -t - 12.$$

1032. Dadas las ecuaciones del movimiento del punto $M(x; y; z)$

$$x = 3 - 4t,\quad y = 5 + 3t,\quad z = -2 + 12t,$$

hallar su velocidad v.

1033. Dadas las ecuaciones del movimiento del punto $M(x; y; z)$

$$x = 5 - 2t,\quad y = -3 + 2t,\quad z = 5 - t,$$

hallar la distancia d recorrida por este punto en el intervalo de tiempo comprendido desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = 7$.

1034. Hallar las ecuaciones del movimiento del punto $M(x; y; z)$, cuya posición inicial es $M_0(3; -1; -5)$, si el movimiento es rectilíneo y uniforme y va en dirección del vector $\boldsymbol{s} = \{-2; 6; 3\}$ con la velocidad $v = 21$.

1035. Hallar las ecuaciones del movimiento del punto $M(x; y; z)$, si el movimiento es rectilíneo y uniforme y en el intervalo de tiempo comprendido desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = 4$, el punto ha recorrido la distancia del punto $M_1(-7; 12; 5)$ al punto $M_2(9; -4; -3)$.

1036. La posición inicial del punto $M(x; y; z)$ en un movimiento uniforme rectilíneo es $M_0(20; -18; -32)$; la dirección del movimiento es opuesta a la del vector $\boldsymbol{s} = \{3; -4; -12\}$ y la velocidad es $v = 26$. Hallar las ecuaciones del movimiento del punto M y hallar el punto con el que coincide en el tiempo $t = 3$.

1037. Los movimientos de los puntos $M(x; y; z)$ y $N(x; y; z)$ son uniformes y rectilíneos. La posición unicial del primer punto es $M_0(-5; 4; -5)$, la velocidad es $v_M = 14$ y la dirección coincide con la del vector $\boldsymbol{s} = \{3; -6; 2\}$; la posición inicial del segundo punto es $N_0(-5; 16; -6)$, la velocidad es $v_N = 13$ y la dirección es opuesta a la del vector $\boldsymbol{r} = \{-4; 12; -3\}$. Hallar las ecuaciones del movimiento de cada uno de los puntos y, verificando que se cortan sus trayectorias, hallar:

1) el punto P de intersección de sus trayectorias;

2) el tiempo que tarda el punto M en trasladarse del punto M_0 al punto P;

3) el tiempo que tarda el punto N en trasladarse del punto N_0 al punto P;

4) las longitudes de los segmentos M_0P y N_0P.

§ 43. Problemas mixtos relativos a la ecuación del plano y a las ecuaciones de la recta

1038. Demostrar que la recta

$$x = 3t - 2, \quad y = -4t + 1, \quad z = 4t - 5$$

es paralela al plano $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

1039. Demostrar que la recta

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

está situada en el plano $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

1040. Hallar el punto de intersección de la recta y el plano:

1) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}, \qquad 2x + 3y + z - 1 = 0;$

2) $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{-5}, \quad x - 2y + z - 15 = 0;$

3) $\dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{2}, \quad x + 2y - 2z + 6 = 0.$

1041. Hallar las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto $M_0(2; -4; -1)$ y por el punto medio del segmento de la recta

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0 \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases}$$

contenido entre los planos

$$5x + 3y - 4z + 11 = 0, \; 5x + 3y - 4z - 41 = 0.$$

1042. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $M_0(2; -3; -5)$ y es perpendicular al plano

$$6x - 3y - 5z + 2 = 0.$$

1043. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(1; -1; -1)$ y es perpendicular a la recta

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}.$$

1044. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(1; -2; 1)$ y es perpendicular a la recta

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

1045. ¿Para qué valor de m la recta

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$$

es paralela al plano

$$x-3y+6z+7=0?$$

1046. ¿Para qué valor de C la recta

$$\begin{cases}3x-2y+z+3=0,\\4x-3y+4z+1=0\end{cases}$$

es paralela al plano

$$2x-y+Cz-2=0?$$

1047. ¿Para qué valores de A y D la recta

$$x=3+4t,\quad y=1-4t,\quad z=-3+t$$

está situada en el plano

$$Ax+2y-4z+D=0?$$

1048. ¿Para qué valores de A y B el plano

$$Ax+By+3z-5=0$$

es perpendicular a la recta

$$x=3+2t,\quad y=5-3t,\quad z=-2-2t?$$

1049. ¿Para qué valores de l y C la recta

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$$

es perpendicular al plano

$$3x-2y+Cz+1=0?$$

1050. Hallar la proyección del punto $P(2;\ -1;\ 3)$ sobre la recta

$$x=3t,\quad y=5t-7,\quad z=2t+2.$$

1051. Hallar el punto Q que es simétrico al punto $P(4;\ 1;\ 6)$ con respecto a la recta

$$\begin{cases}x-y-4z+12=0,\\2x+y-2z+3=0.\end{cases}$$

1052. Hallar el punto Q que es simétrico al punto P (2; —5; 7) con respecto a la recta que pasa por los puntos M_1 (5; 4; 6) y M_2 (—2; —17; —8).

1053. Hallar la proyección del punto P (5; 2; —1) sobre el plano

$$2x - y + 3z + 23 = 0.$$

1054. Hallar el punto Q que es simétrico al punto P (1; 3; —4) con respecto al plano $3x + y - 2z = 0$.

1055. Hallar en el plano Oxy un punto P de modo que la suma de sus distancias a los puntos A (—1; 2; 5) y B (11; —16; 10) sea mínima.

1056. Hallar en el plano Oxz un punto P de modo que la diferencia de sus distancias a los puntos M_1 (3; 2; —5) y M_2 (8; —4; —13) sea máxima.

1057. Hallar en el plano

$$2x - 3y + 3z - 17 = 0$$

un punto P de modo que la suma de sus distancias a los puntos A (3; —4; 7) y B (—5; —14; 17) sea mínima.

1058. Hallar en el plano

$$2x + 3y - 4z - 15 = 0$$

un punto P de modo que la diferencia de sus distancias a los puntos M_1 (5; 2; —7) y M_2 (7; —25; 10) sea máxima.

1059. La posición inicial del punto M (x; y; z), en un movimiento uniforme y rectilíneo en dirección del vector $\boldsymbol{s} = \{-2; 2; 1\}$, es M_0 (15; —24; —16); la velocidad es $v = 12$. Tras verificar que la trayectoria del punto M se corta con el plano

$$3x + 4y + 7z - 17 = 0,$$

hallar:

1) el punto P de su intersección;

2) el tiempo que se necesita para que el punto M haga el recorrido desde M_0 hasta P;

3) la longitud del segmento M_0P.

1060. La posición inicial del punto M (x; y; z), en un movimiento uniforme rectilíneo, es M_0 (28; —30; —27); la velocidad es $v = 12{,}5$ y la direccion es la de la perpendicular bajada del punto M_0 al plano $15x - 16y - 12z + 26 = 0$. Hallar las ecuaciones del movimiento del punto M y determinar:

1) el punto P de intersección de su trayectoria con este plano;

2) el tiempo que se necesita para que el punto M haga el recorrido desde M_0 hasta P;

3) la longitud del segmento M_0P.

1061. La posición inicial del punto M $(x; y; z)$, en un movimiento uniforme rectilíneo en dirección del vector $s = \{-1; 2; -2\}$, es M_0 $(11; -21; 20)$; la velocidad es $v = 12$. Determinar el tiempo que necesita el punto para recorrer un segmento de su trayectoria comprendido entre los planos paralelos:

$$2x + 3y + 5z - 41 = 0, \quad 2x + 3y + 5z + 31 = 0.$$

1062. Calcular la distancia d del punto P $(1; -1; -2)$ a la recta

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}.$$

1063. Calcular la distancia d del punto P $(2; 3; -1)$ a las rectas siguientes:

$$1)\ \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2};$$

$$2)\ x = t+1; \quad y = t+2, \quad z = 4t+13;$$

$$3)\ \begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$$

1064. Tras verificar que son paralelas las rectas

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0, \end{cases} \qquad \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4},$$

calcular la distancia d entre ellas.

1065. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto M_1 $(1; 2; -3)$ y es paralelo a las rectas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

1066. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por el punto M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ y es paralelo a las rectas

$$\frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}, \quad \frac{x-a_2}{l_2} = \frac{y-b_2}{m_2} = \frac{z-c_2}{n_2},$$

se puede representar en la forma:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ t_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

1067. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ y es paralelo a la recta

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},$$

se puede representar en la forma

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

1068. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$x=2t+1, \quad y=-3t+2, \quad z=2t-3$$

y por el punto $M_1(2;\ -2;\ 1)$.

1069. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por la recta

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt$$

y por el punto $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ se puede representar en la forma:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

1070. Demostrar que las rectas

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}+\frac{z-5}{4} \text{ y } x=3t+7, \quad y=2t+2,$$
$$z=-2t+1$$

están en un plano y hallar la ecuación de este plano.

1071. Demostrar que si dos rectas

$$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}, \quad \frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2}$$

se cortan, la ecuación del plano en el que están situadas se puede representar en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

1072. Hallar la ecuación del plano que pasa por las dos rectas paralelas

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}, \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

1073. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por las dos rectas paralelas

$$x=a_1+lt, \quad y=b_1+mt, \quad z=c_1+nt$$

y

$$x=a_2+lt, \quad y=b_2+mt, \quad z=c_2+nt,$$

se puede representar en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

1074. Hallar la proyección del punto $C(3; -4; -2)$ sobre el plano que pasa por las dos rectas paralelas

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}, \quad \frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}.$$

1075. Hallar el punto Q que es simétrico al punto $P(3; -4; -6)$ con respecto al plano que pasa por los puntos $M_1(-6; 1; -5)$, $M_2(7; -2; -1)$ y $M_3(10; -7; 1)$.

1076. Hallar el punto Q que es simétrico al punto $P(-3; 2; 5)$ con respecto al plano que pasa por las rectas

$$\begin{cases} x-2y+3z-5=0, \\ x-2y-4z+3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y+3z+7=0, \\ 5x-3y+2z+5=0. \end{cases}$$

1077. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$x=3t+1, \quad y=2t+3, \quad z=-t-2$$

y es paralelo a la recta

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$$

1078. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por la recta

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

y es paralelo a la recta

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt,$$

se puede representar en la forma

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0.$$

1079. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$$

y es perpendicular al plano

$$3x+2y-z-5=0.$$

1080. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por la recta

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt$$

y es perpendicular al plano

$$Ax+By+Cz+D=0$$

se puede representar en la forma:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

1081. Hallar las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto $M_0(3;\ -2;\ -4)$, es paralela al plano

$$3x-2y-3z-7=0$$

y se corta con la recta

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}.$$

1082. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que es paralela a los planos

$$3x+12y-3z-5=0, \quad 3x-4y+9z+7=0$$

y se corta con las rectas

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}, \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

1083. Hallar la distancia más corta entre las dos rectas, en cada uno de los casos siguientes:

1) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}, \quad \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-5}=\frac{z-2}{-1};$

2) $x=2t-4, \quad y=-t+4, \quad z=-2t-1;$
$x=4t-5, \quad y=-3t+5, \quad z=-5t+5;$

3) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}; \quad x=6t+9, \quad y=-2t,$
$z=-t+2.$

§ 44. La esfera

La esfera de radio r, con centro en C (α; β; γ), se determina en coordenadas cartesianas rectangulares por la ecuación

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2.$$

La ecuación de la esfera de radio r, cuyo centro está en el origen de coordenadas, es

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

1084. Hallar la ecuación de la esfera en cada uno de los casos siguientes:

1) el centro de la esfera está en el punto C (0; 0; 0) y el radio es $r=9$;

2) el centro de la esfera está en el punto C (5; -3; 7) y el radio es $r=2$;

3) la esfera pasa por el origen de coordenadas y tiene el centro en el punto C (4; -4; -2);

4) la esfera pasa por el punto A (2; -1; -3) y tiene el centro en el punto C (3; -2; 1);

5) los puntos A (2; -3; 5) y B (4; 1; -3) son los extremos de uno de los diámetros de la esfera;

6) el centro de la esfera está en el origen de coordenadas y el plano $16x-15y-12z+75=0$ es tangente a la esfera;

7) el centro de la esfera es $C(3; -5; -2)$, y el plano $2x - y - 3z + 11 = 0$ es tangente a la esfera;

8) la esfera pasa por los tres puntos $M_1(3; 1; -3)$, $M_2(-2; 4; 1)$ y $M_3(-5; 0; 0)$ y su centro está en el plano $2x + y - z + 3 = 0$;

9) la esfera pasa por los cuatro puntos:

$$M_1(1; -2; -1), \quad M_2(-5; 10; -1), \quad M_3(4; 1; 11) \quad \text{y} \quad M_4(-8; -2; 2).$$

1085. Hallar la ecuación de la esfera de radio $r = 3$, que es tangente al plano $x + 2y + 2z + 3 = 0$ en el punto $M_1(1; 1; -3)$.

1086. Calcular el radio R de la esfera que es tangente a los planos

$$3x + 2y - 6z - 15 = 0, \quad 3x + 2y - 6z + 55 = 0.$$

1087. Una esfera tiene el centro en la recta

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

y es tangente a los planos

$$x + 2y - 2z - 2 = 0, \quad x + 2y - 2z + 4 = 0.$$

Hallar su ecuación.

1088. Hallar la ecuación de la esfera que es tangente a los dos planos paralelos

$$6x - 3y - 2z - 35 = 0, \quad 6x - 3y - 2z + 63 = 0,$$

y el punto $M_1(5; -1; -1)$ es el punto de contacto con uno de ellos.

1089. Hallar la ecuación de la esfera con el centro en $C(2; 3; -1)$, que corta en la recta

$$\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0, \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

una cuerda de longitud igual a 16.

1090. Determinar las coordenadas del centro C y el radio r de la esfera dada por cada una de las ecuaciones siguientes:

1) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 16$;

2) $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$;

3) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$;

4) $x^2+y^2+z^2-6z=0$;

5) $x^2+y^2+z^2+20y=0$.

1091. Hallar las ecuaciones paramétricas del diámetro de la esfera

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y+z-11=0,$$

que es perpendicular al plano

$$5x-y+2z-17=0.$$

1092. Hallar las ecuaciones canónicas del diámetro de la esfera

$$x^2+y^2+z^2-x+3y+z-13=0,$$

que es paralelo a la recta

$$x=2t-1,\quad y=-3t+5,\quad z=4t+7.$$

1093. Determinar la situación del punto $A\ (2;\ -1;\ 3)$ con respecto a cada una de las esferas dadas a continuación: averiguar si el punto está dentro, fuera o en la superficie:

1) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;

2) $(x+14)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=625$;

3) $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$;

4) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+22=0$;

5) $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z-3=0$.

1094. Calcular la distancia más corta del punto A a la esfera dada, en cada uno de los casos siguientes:

a) $A\,(-2;\ 6;\ -3)$, $\quad x^2+y^2+z^2=4$;

b) $A\,(9;\ -4;\ -3)$, $\quad x^2+y^2+z^2+14x-16y-24z+$
$+241=0$;

c) $A\,(1;\ -1;\ 3)$, $\quad x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0$.

1095. Determinar cómo está situado el plano con respecto a la esfera: si la corta, si es tangente o si pasa por fuera de ella. Las ecuaciones del plano y de la esfera son:

1) $z=3, \quad x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+22=0;$

2) $y=1, \quad x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+14=0;$

3) $x=5, \quad x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0.$

1096. Determinar cómo está situada la recta con respecto a la esfera: si la corta, si es tangente o si pasa por fuera de ella. Las ecuaciones de la recta y de la esfera son:

1) $x=-2t+2, \quad y=3t-\frac{7}{2}, \quad z=t-2.$

$$x^2+y^2+z^2+x-4y-3z+\frac{1}{2}=0;$$

2) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2},$

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-67=0;$$

3) $\begin{cases} 2x-y+2z-12=0, \\ 2x-4y-z+6=0, \end{cases}$

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-43=0.$$

1097. Hallar en la esfera

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$$

el punto M_1 más próximo al plano

$$3x-4z+19=0,$$

y calcular la distancia d del punto M_1 a este plano.

1098. Determinar el centro C y el radio R de la circunferencia

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100, \\ 2x-2y-z+9=0. \end{cases}$$

1099. Los puntos $A\ (3;\ -2;\ 5)$ y $B\ (-1;\ 6;\ -3)$ son los extremos de un diámetro de una circunferencia que pasa por el punto $C\ (1;\ -4;\ 1)$. Hallar la ecuación de esta circunferencia.

1100. El punto $C\ (1;\ -1;\ -2)$ es el centro de una circunferencia que corta en la recta

$$\begin{cases} 2x-y+2z-12=0, \\ 4x-7y-z+6=0 \end{cases}$$

una cuerda de longitud igual a 8. Hallar la ecuación de esta circunferencia.

1101. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos $M_1(3; -1; -2)$, $M_2(1; 1; -2)$ y $M_3(-1; 3; 0)$.

1102. Se dan dos esferas

$$(x-m_1)^2+(y-n_1)^2+(z-p_1)^2=R_1^2,$$
$$(x-m_2)^2+(y-n_2)^2+(z-p_2)^2=R_2^2,$$

que se cortan por una circunferencia situada en un plano τ. Demostrar que cualquier esfera que pase por la circunferencia de intersección de las esferas dadas y también el plano τ, se pueden representar por una ecuación de la forma

$$\alpha\,[(x-m_1)^2+(y-n_1)^2+(z-p_1)^2-R_1^2]+$$
$$+\beta\,[(x-m_2)^2+(y-n_2)^2+(z-p_2)^2-R_2^2]=0$$

con una adecuada elección de los números α y β.

1103. Hallar la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de las dos esferas:

$$2x^2+2y^2+2z^2+3x-2y+z-5=0,$$
$$x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+1=0.$$

1104. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por el origen de coordenadas y por la circunferencia

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ 2x-3y+5z-5=0. \end{cases}$$

1105. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por la circunferencia

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0, \\ 5x+2y-z-3=0 \end{cases}$$

y por el punto $A(2; -1; 1)$.

1106. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por las dos circunferencias:

$$\begin{cases} x^2+z^2=25, \\ y=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+z^2=16, \\ y=3. \end{cases}$$

1107. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2=49$ en el punto $M_1(6; -3; -2)$.

1108. Demostrar que el plano

$$2x - 6y + 3z - 49 = 0$$

es tangente a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49.$$

Calcular las coordenadas del punto de contacto.

1109. Hallar los valores de a para los cuales el plano

$$x + y + z = a$$

es tangente a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 12.$$

1110. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$$

en el punto $M_1(-1; 3; 0)$.

1111. El punto $M_1(x_1; y_1; z_1)$ está en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Hallar la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto M_1.

1112. Deducir la condición, según la cual el plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

es tangente a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

1113. El punto $M_1(x_1; y_1; z_1)$ está en la esfera

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2.$$

Hallar la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto M_1.

1114. Por los puntos de intersección de la recta

$$x = 3t - 5, \quad y = 5t - 11, \quad z = -4t + 9$$

y la esfera

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$$

se han trazado planos tangentes a esta esfera. Hallar sus ecuaciones.

1115. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

paralelos al plano

$$x + 2y - 2z + 15 = 0$$

1116. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$$

y paralelos al plano

$$4x+3z-17=0.$$

1117. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera

$$x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0$$

y paralelos a las rectas

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}, \quad \frac{x+7}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-8}{0}.$$

1118. Demostrar que se pueden trazar por la recta

$$\begin{cases} 8x-11y+8z-30=0, \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

dos planos tangentes a la esfera

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-15=0,$$

y hallar sus ecuaciones.

1119. Demostrar que no se puede trazar por la recta

$$\frac{x+6}{2}=y+3=z+1$$

un plano tangente a la esfera

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z+4=0.$$

1120. Demostrar que por la recta

$$x=4t+4, \quad y=3t+1, \quad z=t+1$$

se puede trazar solamente un plano tangente a la esfera

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+8=0,$$

y hallar su ecuación.

§ 45. Forma vectorial de las ecuaciones del plano, de la recta y de la esfera

En lo sucesivo, la notación $M(\boldsymbol{r})$ significará que $\boldsymbol{r}$ es el radio vector del punto M.

1121. Hallar la ecuación del plano α, que pasa por el punto $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ y cuyo vector normal es $\boldsymbol{n}$.

S o l u c i ó n*). Supongamos que M ($\boldsymbol{r}$) es un punto arbitrario. Este está situado en el plano α sí, y solamente si, el vector $\overline{M_0M}$ es perpendicular a $\boldsymbol{n}$. La condición de perpendicularidad de los vectores es la igualdad a cero de su producto escalar. Por lo tanto, $\overline{M_0M} \perp \boldsymbol{n}$ sí, y solamente si,

$$\overline{M_0M} \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{1}$$

Expresemos ahora el vector $\overline{M_0M}$ mediante los radios vectores de su extremo y su origen:

$$\overline{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0.$$

De aquí y de (1), obtenemos:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{n} = 0. \tag{2}$$

Esta es la forma vectorial de la ecuación del plano α, a la que satisface el radio vector $\boldsymbol{r}$ del punto M sí, y solamente si, el punto M está situado en el plano α [$\boldsymbol{r}$ es el radio vector variable de la ecuación (2)].

1122. Demostrar que la ecuación $\boldsymbol{rn} + D = 0$ determina un plano perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$. Escribir la ecuación de este plano en coordenadas, si $\boldsymbol{n} = \{A;\ B;\ C\}$.

1123. Dados el vector unitario $\boldsymbol{n}^0$ y el número $p > 0$, demostrar que la ecuación

$$\boldsymbol{rn}^0 - p = 0$$

determina un plano perpendicular al vector $\boldsymbol{n}^0$ y que p es la distancia del origen de coordenadas al plano. Escribir la ecuación de este plano en coordenadas, si el vector $\boldsymbol{n}^0$ forma con los ejes coordenados los ángulos α, β y γ.

1124. Calcular la distancia d del punto $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ al plano $\boldsymbol{rn}^0 - p = 0$. Hallar también la expresión de la distancia d en coordenadas, si

$$\boldsymbol{r}_1 = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}, \quad \boldsymbol{n}^0 = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}.$$

1125. Se dan dos puntos $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ y $M_2(\boldsymbol{r}_2)$. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto M_1 y es perpendicular al vector $\overline{M_1M_2}$. Escribir también la ecuación de este plano en coordenadas, si

$$\boldsymbol{r}_1 = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}.$$

1126. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ y es paralelo a los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$. Escribir

*) Los problemas 1121 y 1129 son esenciales para comprender bien los problemas de este parágrafo. Sus soluciones se exponen en el texto.

también la ecuación de este plano en coordenadas, si

$$r_0=\{x_0;\ y_0;\ z_0\},\quad a_1=\{l_1;\ m_1;\ n_1\},\quad a_2=\{l_2;\ m_2;\ n_2\}.$$

1127. Hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos $M_1(r_1)$, $M_2(r_2)$ y $M_3(r_3)$. Escribir también la ecuación de este plano en coordenadas, si

$$r_1=\{x_1;\ y_1;\ z_1\},\quad r_2=\{x_2;\ y_2;\ z_2\},\quad r_3=\{x_3;\ y_3;\ z_3\}.$$

1128. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(r_0)$ y es perpendicular a los planos:

$$rn_1+D_1=0,\qquad rn_2+D_2=0.$$

Escribir también la ecuación de este plano en coordenadas, si

$$r_0=\{x_0;\ y_0;\ z_0\},\quad n_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\},\quad n_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\}.$$

1129. Demostrar que la ecuación

$$[(r-r_0)\,a]=0$$

determina una recta que pasa por el punto $M_0(r_0)$ y es paralela al vector a, es decir, que a esta ecuación satisface el radio vector r del punto $M(r)$ si, y solamente si, el punto M está situado en la recta indicada.

D e m o s t r a c i ó n. Consideremos un punto arbitrario $M(r)$. Supongamos que r satisface a la ecuación dada; según la regla de la sustracción de vectores $r-r_0=\overline{M_0M}$; como $[(r-r_0)\,a]=0$, tenemos que $[\overline{M_0M}a]=0$; por lo tanto, el vector $\overline{M_0M}$ es colineal al vector a. O sea, que el punto M verdaderamente está situado en la recta que pasa por el punto M_0 en dirección del vector a. Recíprocamente, supongamos que el punto M está situado en esta recta. Entonces $\overline{M_0M}$ es colineal a a. Por lo tanto, $[\overline{M_0M}a]=0$; pero $\overline{M_0M}=r-r_0$; de aquí que $[(r-r_0)\,a]=0$. O sea, que el radio vector r del punto M satisface a la ecuación dada si, y solamente si, el punto M está situado en la recta dada (r es el radio vector variable de la ecuación).

1130. Demostrar que la ecuación

$$[ra]=m$$

determina una recta paralela al vector a.

1131. Demostrar que la ecuación paramétrica

$$r=r_0+at,$$

en donde t es un parámetro variable, determina una recta que pasa por el punto $M_0(r_0)$ (es decir, al variar t, el punto $M(r)$ se mueve por la recta indicada). Escribir en coordenadas las ecuaciones canónicas de esta recta, si

$$r_0=\{x_0;\ y_0;\ z_0\},\qquad a=\{l;\ m;\ n\}.$$

1132. Una recta pasa por dos puntos: $M_1(r_1)$ y $M_2(r_2)$. Hallar sus ecuaciones en la forma indicada en los problemas 1129, 1130 y 1131.

1133. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_1(r_1)$ y es perpendicular a la recta $r=r_0+at$. Escribir también la ecuación de este plano en coordenadas, si

$$r_1=\{x_1;\ y_1;\ z_1\},\qquad a=\{l;\ m;\ n\}.$$

1134. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(r_0)$ y es paralelo a las rectas $[ra_1]=m_1$, $[ra_2]=m_2$.

1135. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(r_0)$ y es perpendicular a los planos

$$rn_1+D_1=0,\qquad rn_2+D_2=0.$$

1136. Hallar la ecuación en forma paramétrica de una recta que pasa por el punto $M_0(r_0)$ y es perpendicular al plano $rn+D=0$. Escribir también las ecuaciones canónicas de esta recta en coordenadas, si

$$r_0=\{x_0;\ y_0;\ z_0\},\qquad n=\{A;\ B;\ C\}.$$

1137. Hallar la ecuación en forma paramétrica de una recta que pasa por el punto $M_0(r_0)$ y es paralela a los planos $rn_1+D_1=0$, $rn_2+D_2=0$. Escribir también las ecuaciones canónicas de esta recta en coordenadas, si

$$r_0=\{x_0;\ y_0;\ z_0\},\quad n_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\},\quad \{n_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\}.$$

1138. Deducir la condición de pertenencia de la recta $r=r_0+at$ al plano $rn+D=0$. Escribir también esta condición en coordenadas, si

$$r_0=\{x_0;\ y_0;\ z_0\},\quad a=\{l;\ m;\ n\},\quad n=\{A;\ B;\ C\}.$$

1139. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $r=r_0+a_1t$ y es paralelo a la recta

$$[ra_2]=m.$$

1140. Deducir la condición para que dos rectas

$$r=r_1+a_1t\quad \text{y}\quad r=r_2+a_2t$$

estén situadas en un plano.

1141. Hallar el radio vector del punto de intersección de la recta $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$ y el plano $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}+D=0$. Calcular también las coordenadas x, y, z del punto de intersección, si

$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0;\ y_0;\ z_0\},\quad \boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\},\quad \boldsymbol{n}=\{A;\ B;\ C\}.$$

1142. Hallar el radio vector de la proyección de $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ sobre el plano $\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}+D=0$. Calcular también las coordenadas x, y, z de esta proyección, si

$$\boldsymbol{r}_1=\{x_1;\ y_1;\ z_1\},\qquad \boldsymbol{n}=\{A;\ B;\ C\}.$$

1143. Hallar el radio vector de la proyección del punto $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ sobre la recta $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$. Calcular también las coordenadas x, y, z de esta proyección, si

$$\boldsymbol{r}_1=\{x_1;\ y_1;\ z_1\},\quad \boldsymbol{r}_0=\{x_0;\ y_0;\ z_0\},\quad \boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}.$$

1144. Calcular la distancia d del punto $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ a la recta $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$. Expresar también la distancia d en coordenadas, si

$$\boldsymbol{r}_1=\{x_1;\ y_1;\ z_1\},\quad \boldsymbol{r}_0=\{x_0;\ y_0;\ z_0\},\quad \boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}.$$

1145. Calcular la distancia d más corta entre las dos rectas que se cruzan:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}_1t \quad \text{y} \quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{a}_2t.$$

Expresar también esta distancia d en coordenadas, si

$$\boldsymbol{r}_1=\{x_1;\ y_1;\ z_1\},\qquad \boldsymbol{r}_2=\{x_2;\ y_2;\ z_2\},$$
$$\boldsymbol{a}_1=\{l_1;\ m_1;\ n_1\},\qquad \boldsymbol{a}_2=\{l_2;\ m_2;\ n_2\}.$$

1146. Demostrar que la ecuación

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2=R^2$$

determina una esfera de radio R con centro en el punto $C(\boldsymbol{r}_0)$ (es decir, que a esta ecuación satisface el radio vector $\boldsymbol{r}$ del punto M si, y solamente si, el punto M está situado en la esfera indicada).

1147. Hallar los radios vectores de los puntos de intersección de la recta

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t$$

y la esfera

$$\boldsymbol{r}^2=R^2.$$

Calcular también las coordenadas de los puntos de intersección, si

$$\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}.$$

1148. Hallar los radios vectores de los puntos de intersección de la recta
$$r = r_0 + at$$
y la esfera
$$(r - r_0)^2 = R^2.$$
Calcular también las coordenadas de los puntos de intersección, si
$$r_0 = \{x_0;\ y_0;\ z_0\}, \qquad a = \{l;\ m;\ n\}.$$
1149. El punto $M_1(r_1)$ está situado en la esfera
$$(r - r_0)^2 = R^2.$$
Hallar la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto M_1.

1150. Hallar la ecuación de la esfera con centro en el punto $C(r_1)$ y que es tangente al plano $rn + D = 0$. Escribir también la ecuación de esta esfera en coordenadas, si
$$r_1 = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}, \qquad n = \{A;\ B;\ C\}.$$
1151. Hallar las ecuaciones de los planos que son tangentes a la esfera
$$r^2 = R^2$$
y son paralelos al plano
$$rn + D = 0.$$
Escribir también las ecuaciones de estos planos en coordenadas, si
$$n = \{A;\ B;\ C\}.$$
1152. Por el punto de intersección de la recta
$$r = r_0 + at$$
y la esfera
$$(r - r_0)^2 = R^2$$
se han trazado planos tangentes a esta esfera. Hallar sus ecuaciones.

Escribir también las ecuaciones de estos planos en coordenadas, si
$$r_0 = \{x_0;\ y_0;\ z_0\}, \qquad a = \{l;\ m;\ n\}.$$

§ 46. Superficies de segundo orden (cuádricas)

Se llama elipsoide a la superficie que en un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares apropiado se determina por la ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

La ecuación (1) se llama ecuación canónica del elipsoide. Las cantidades a, b, c son los semiejes del elipsoide (fig. 47). Si todos ellos son diferentes, el elipsoide se llama escaleno; cuando dos de ellos son iguales, el elipsoide es una superficie de revolución. Si, por ejemplo, $a = b$, el eje de revolución es Oz. Si $a = b < c$ el elipsoide de revolución se llama alargado, y si $a = b > c$ se llama achatado o esferoide. Cuando $a = b = c$ el elipsoide representa una esfera.

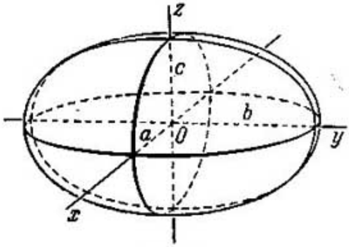


Fig. 47.

Se llaman hiperboloides a las superficies que en un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares apropiado se determinan por las ecuaciones:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{3}$$

El hiperboloide determinado por la ecuación (2) se llama hiperboloide de una hoja (fig. 48); el hiperboloide determinado por la ecuación (3) se llama hiperboloide de dos hojas (fig. 49); las ecuaciones (2) y (3) se llaman ecuaciones canónicas de los hiperboloides correspondientes. Las cantidades a, b, c se llaman semiejes del hiperboloide. En la figura 48, para el caso del hiperboloide de una hoja, están representados solamente dos de ellos (a y b). En la figura 49, para el caso del hiperboloide de dos hojas, está representado solamente uno de ellos (precisamente c). Si $a = b$, los hiperboloides determinados por las ecuaciones (2) y (3) son superficies de revolución.

Se llaman paraboloides a las superficies que en un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares apropiado se determinan por las ecuaciones:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{5}$$

en donde p y q son números positivos llamados parámetros del paraboloide.

El paraboloide determinado por la ecuación (4) se llama paraboloide elíptico (fig. 50); el paraboloide determinado por la ecuación (5)

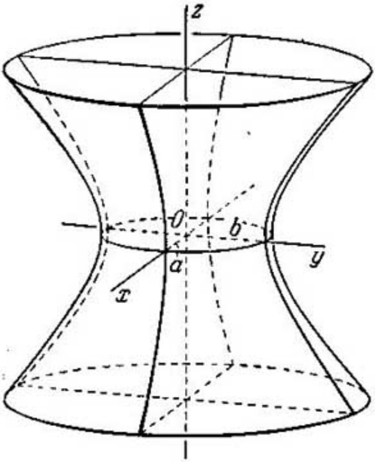


Fig. 48.

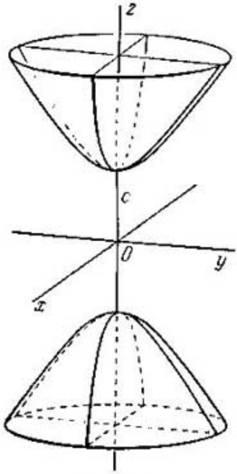


Fig. 49.

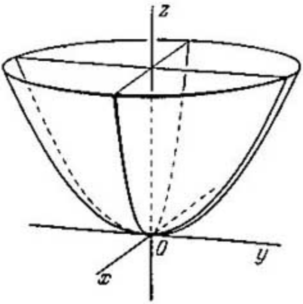


Fig. 50.

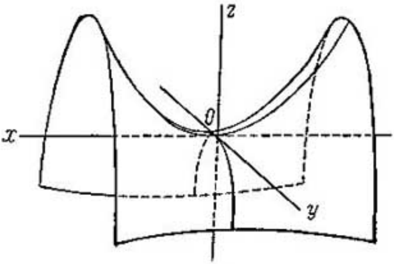


Fig. 51.

se llama paraboloide hiperbólico (fig. 51). Las ecuaciones (4) y (5) se llaman ecuaciones canónicas de los paraboloides correspondientes. Si $p = q$, el paraboloide determinado por la ecuación (4) es una superficie de revolución (en torno de Oz).

Consideremos ahora una transformación del espacio, llamada dilatación uniforme (o contracción uniforme).

Tomemos un plano arbitrario e indiquémoslo con la letra α. Sea q un número positivo. Supongamos que M es un punto arbitrario

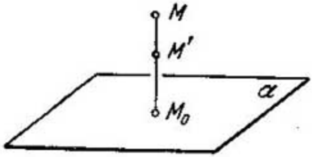


Fig. 52.

del espacio, situado fuera del plano α, y que M_0 es la base de la perpendicular bajada del punto M al plano α. Traslademos el punto M, por la recta MM_0, a una nueva posición M', de manera que se verifique la igualdad

$$M_0M' = q \cdot M_0M$$

y que el punto, en la nueva posición, esté al mismo lado del plano α en que se encontraba antes (fig. 52). Hagamos lo mismo con todos los puntos del espacio situados fuera del plano α; los puntos situados en el plano α los dejamos en su sitio. De este modo, todos los puntos del espacio, menos los que están situados en el plano α, cambian de posición; la distancia de cada punto al plano α se altera en una cantidad de veces determinada, que es común para todos los puntos. El traslado de los puntos del espacio, efectuado de la manera descrita, se llama contracción uniforme hacia el plano α (o dilatación); el número q es el coeficiente de contracción (o de dilatación).

Supongamos que se ha dado una superficie F: los puntos que la componen se trasladan, como resultado de la contracción, y en sus nuevas posiciones forman una superficie F'. Diremos que la superficie F' se ha obtenido de la superficie F como resultado de una contracción (o dilatación) uniforme del espacio. Resulta que muchas superficies de segundo orden (todas menos el paraboloide hiperbólico) se pueden obtener de las superficies de revolución mediante una contracción uniforme del espacio.

E j e m p l o. Demostrar que un elipsoide escaleno arbitrario

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

se puede obtener de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

como resultado de dos contracciones uniformes consecutivas del espacio hacia los planos coordenados; hacia el plano Oxy con el coeficiente de contracción $q_1 = \frac{c}{a}$ y hacia el plano Oxz con el coeficiente de contracción $q_2 = \frac{a}{b}$.

Demostración. Supongamos que se efectúa una contracción uniforme del espacio hacia el plano Oxy con el coeficiente $q_1 = \frac{c}{a}$ y que M' $(x'; y'; z')$ es el punto al que se traslada el punto M $(x; y; z)$. Expresemos las coordenadas x', y', z' del punto M' mediante las coordenadas x, y, z del punto M. Como la recta MM' es perpendicular al plano Oxy, tenemos que $x' = x$, $y' = y$. Por otra parte, como la distancia del punto M' al plano Oxy es igual a la distancia del punto M a este plano, multiplicada por el número $q_1 = \frac{c}{a}$, tendremos que $z' = \frac{c}{a} z$. De este modo, hallamos las expresiones buscadas:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{c}{a} z, \tag{6}$$

o

$$x = x', \quad y = y', \quad z = \frac{a}{c} z'. \tag{7}$$

Supongamos que M $(x, y; z)$ es un punto arbitrario de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Sustituyendo aquí x, y, z por sus expresiones (7), tendremos:

$$x'^2 + y'^2 + \frac{a^2}{c^2} z'^2 = a^2,$$

de donde

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

Por lo tanto, el punto M' $(x'; y'; z')$ está en el elipsoide de revolución. Análogamente, efectuando una contracción del espacio hacia el plano Oxz mediante las fórmulas

$$x' = x'', \quad y' = \frac{a}{b} y'', \quad z' = z'',$$

obtenemos un elipsoide escaleno, precisamente aquél cuya ecuación se da en el enunciado del problema.

Señalemos también, que el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico son superficies regladas, es decir, se componen de rectas; estas rectas se llaman generatrices de dichas superficies.

El hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tiene dos sistemas de generatrices que se determinan por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

en donde α y β son unos números no simultáneamente iguales a cero. El paraboloide hiberbólico

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

también tiene dos sistemas de generatrices que se determinan por las ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z,\\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z,\\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha,\end{array}\right.$$

Se llama superficie cónica o cono a la superficie engendrada por una recta (generatriz) que se mueve de manera que pasa siempre por un punto fijo S y por una línea determinada L. El punto S se llama vértice del cono y la línea L directriz.

Se llama superficie cilíndrica o cilindro a la generada por una recta (generatriz) que se mueve de manera que se mantiene siempre en dirección constante y pasa por una línea determinada L (directriz).

1153. Verificar que la línea de intersección del plano $x-2=0$ y el elipsoide

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$$

es una elipse; hallar sus semiejes y sus vértices.

1154. Verificar que la línea de intersección del plano $z+1=0$ y el hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$$

es una hipérbola; hallar sus semiejes y sus vértices.

1155. Verificar que la línea de intersección del plano $y+6=0$ y el paraboloide hiperbólico

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$$

es una parábola; hallar su parámetro y el vértice.

1156. Hallar las ecuaciones de las proyecciones sobre los planos coordenados de la intersección del paraboloide elíptico

$$y^2+z^2=x$$

y el plano

$$x+2y-z=0.$$

1157. Averiguar qué línea se forma en la intersección del elipsoide

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$$

con el plano

$$2x-3y+4z-11=0,$$

y hallar su centro.

1158. Averiguar qué línea se forma en la intersección del paraboloide hiperbólico

$$\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3}=y$$

con el plano

$$3x-3y+4z+2=0,$$

y hallar su centro.

1159. Averiguar qué líneas se determinan por las ecuaciones siguientes:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=2z, \\ 3x-y+6z-14=0; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=2z, \\ x-2y+2=0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{36}=1, \\ 9x-6y+2z-28=0, \end{cases}$$

y hallar el centro de cada una de ellas.

1160. Hallar los valores de m para los cuales la intersección del plano $x+mz-1=0$ con el hiperboloide de dos hojas

$$x^2+y^2-z^2=-1$$

sea: a) una elipse, b) una hipérbola.

1161. Hallar los valores de m para los cuales la intersección del plano $x+my-2=0$ con el paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$$

sea: a) una elipse, b) una parábola.

1162. Demostrar, que el paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$$

tiene un punto común con el plano

$$2x-2y-z-10=0$$

y hallar sus coordenadas.

1163. Demostrar que el hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$$

tiene un punto común con el plano

$$5x+2z+5=0$$

y hallar sus coordenadas.

1164. Demostrar que el elipsoide

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$$

tiene un punto común con el plano

$$4x-3y+12z-54=0$$

y hallar sus coordenadas.

1165. Hallar el valor de m para que el plano

$$x-2y-2z+m=0$$

sea tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1.$$

1166. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al vector $n=\{2;\ -1;\ -2\}$ y tangente al paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=2z.$$

1167. Trazar los planos tangentes al elipsoide

$$4x^2+16y^2+8z^2=1$$

que son paralelos al plano

$$x-2y+2z+17=0$$

y calcular la distancia entre los planos hallados.

1168. El coeficiente de contracción uniforme del espacio hacia el plano Oyz es igual a $\frac{3}{5}$. Hallar la ecuación de la superficie en que se transforma la esfera

$$x^2+y^2+z^2=25$$

mediante esta contracción.

1169. Hallar la ecuación de la superficie en que se transforma el elipsoide

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$$

al efectuar tres contracciones uniformes consecutivas del espacio hacia los planos coordenados, si el coeficiente de contracción hacia el plano Oxy es igual a $\frac{3}{4}$, hacia el plano Oxz es igual a $\frac{4}{5}$ y hacia el plano Oyz es igual a $\frac{3}{4}$.

1170. Determinar los coeficientes q_1 y q_2 de dos contracciones uniformes consecutivas del espacio hacia los planos Oxy y Oxz, que transforman la esfera

$$x^2+y^2+z^2=25$$

en el elipsoide

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1.$$

1171. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por rotación de la elipse

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

en torno del eje Oy.

Solución*). Supongamos que $M(x;\ y;\ z)$ es un punto arbitrario del espacio y que C es el pie de la perpendicular bajada del punto M al eje Oy (fig. 53). El punto M se puede trasladar al plano Oyz mediante una rotación de esta perpendicular alrededor del eje Oy; designemos este punto en dicha situación por $N(O;\ Y;\ Z)$. Como $CM=CN$ y $CM=\sqrt{x^2+z^2}$, $CN=|Z|$, tendremos que

$$|Z|=\sqrt{x^2+z^2}. \tag{1}$$

Es evidente, además, que

$$Y=y. \tag{2}$$

El punto M está situado en la superficie de revolución considerada si, y solamente si, el punto N está en la elipse dada, es decir, si

$$\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1; \tag{3}$$

*) La resolución del problema 1171 es típica en este caso.

teniendo en cuenta las igualdades (1) y (2), hallamos la ecuación para las coordenadas del punto M:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1. \qquad (4)$$

De lo anteriormente expuesto se deduce que esta ecuación se satisface si, y solamente si, el punto M está en la superficie de revo-

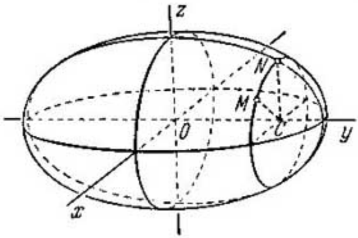


Fig. 53.

lución considerada. Por lo tanto, la ecuación (4) es la ecuación buscada de este superficie.

1172. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la elipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

alrededor del eje Ox.

1173. Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la hipérbola

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$$

alrededor del eje Oz.

1174. Demostrar que el elipsoide escaleno determinado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

se puede obtener como resultado de una rotación de la elipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

alrededor del eje Ox y una sucesiva contracción uniforme del espacio hacia el plano Oxy.

1175. Demostrar que el hiperboloide de una hoja, determinado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

se puede obtener por rotación de la hipérbola

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1,\\ y&=0\end{aligned}\right.$$

en torno del eje Oz y una sucesiva contracción uniforme del espacio hacia el plano Oxz.

1176. Demostrar que el hiperboloide de dos hojas, determinado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

se puede obtener por rotación de la hipérbola

$$\left\{\begin{aligned} \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}&=1,\\ y&=0\end{aligned}\right.$$

en torno de eje Oz y una sucesiva contracción uniforme del espacio hacia el plano Oxz.

1177. Demostrar que el paraboloide elíptico, determinado por la ecuación

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,$$

se puede obtener por rotación de la parábola

$$\left\{\begin{aligned} x^2&=2pz,\\ y&=0\end{aligned}\right.$$

en torno del eje Oz y una sucesiva contracción uniforme del espacio hacia el plano Oxz.

1178. Hallar la ecuación de la superficie generada por el movimiento de una parábola que se mantiene siempre en un plano perpendicular al eje Oy, si el eje de la parábola no cambia de dirección y su vértice resbala por otra parábola dada por la ecuación

$$\left\{\begin{aligned} y^2&=-2qz,\\ x&=0.\end{aligned}\right.$$

La parábola que se mueve tiene, en una de sus posiciones, la ecuación

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0. \end{cases}$$

1179. Demostrar que la ecuación

$$z = xy$$

determina un paraboloide hiperbólico.

1180. Hallar los puntos de intersección de la superficie y la recta:

a) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ y $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4}$;

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ y $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$;

c) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z$ y $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$;

d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$ y $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

1181. Demostrar que las intersecciones del plano

$$2x - 12y - z + 16 = 0$$

con el paraboloide hiperbólico

$$x^2 - 4y^2 = 2z$$

son generatrices de éste. Hallar las ecuaciones de estas generatrices.

1182. Demostrar que las intersecciones del plano

$$4x - 5y - 10z - 20 = 0$$

con el hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$$

son generatrices de éste. Hallar las ecuaciones de estas generatrices.

1183. Una vez comprobado que el punto $M(1; 3; -1)$ está situado en el paraboloide hiperbólico

$$4x^2 - z^2 = y,$$

hallar las ecuaciones de sus generatrices que pasan por el punto M.

1184. Hallar las ecuaciones de las generatrices del hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,$$

que son paralelas al plano

$$6x+4y+3z-17=0.$$

1185. Una vez comprobado que el punto $A(-2;\ 0;\ 1)$ está situado en el paraboloide hiperbólico

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z,$$

determinar el ángulo agudo formado por sus generatrices que pasan por el punto A.

1186. Hallar la ecuación del cono cuyo vértice está en el origen de coordenadas, si se dan las ecuaciones de su directriz:

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=b; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=a. \end{cases}$

1187. Demostrar que la ecuación

$$z^2=xy$$

determina un cono con el vértice en el origen de coordenadas.

1188. Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el origen de coordenadas, si las ecuaciones de la directriz son

$$\begin{cases} x^2-2z+1=0, \\ y-z+1=0. \end{cases}$$

1189. Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el punto $(0;\ 0;\ c)$, si las ecuaciones de la directriz son

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

1190. Hallar la ecuación del cono cuyo vértice está en el punto $(3;\ -1;\ -2)$, si las ecuaciones de la directriz son

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ x-y+z=0. \end{cases}$$

1191. El eje Oz es el eje de un cono circular que tiene el vértice en el origen de coordenadas; el punto M_1 (3; —4; 7) está situado en su superficie. Hallar la ecuación de este cono.

1192. El eje Oy es el eje de un cono circular que tiene el vértice en el origen de coordenadas; sus generatrices forman un ángulo de $60°$ con el eje Oy. Hallar la ecuación de este cono.

1193. La recta

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$$

es el eje de un cono circular cuyo vértice está situado en el plano Oyz. Hallar la ecuación de este cono, si se sabe que el punto $M_1\left(1;\ 1;\ -\frac{5}{2}\right)$ está situado en su superficie.

1194. Hallar la ecuación del cono circular, si los ejes de coordenadas son generatrices de él.

1195. Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el punto S (5; 0; 0), si las generatrices son tangentes a la esfera

$$x^2+y^2+z^2=9.$$

1196. Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el origen de coordenadas, si las generatrices son tangentes a la esfera

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9.$$

1197. Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el punto S (3; 0; —1), si sus generatrices son tangentes al elipsoide

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1.$$

1198. Hallar la ecuación del cilindro cuyas generatrices son paralelas al vector $l=\{2;\ -3;\ 4\}$, si las ecuaciones de la directriz son

$$\left\{\begin{aligned} x^2+y^2&=9,\\ z&=1.\end{aligned}\right.$$

1199. Hallar la ecuación del cilindro, si se dan las ecuaciones de la directriz

$$\left\{\begin{aligned} x^2-y^2&=z,\\ x+y+z&=0\end{aligned}\right.$$

y las generatrices son perpendiculares al plano de la directriz.

1200. Las generatrices de un cilindro circunscrito en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

son perpendiculares al plano

$$x + y - 2z - 5 = 0.$$

Hallar la ecuación de este cilindro.

1201. Las generatrices de un cilindro circunscrito en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$$

son paralelas a la recta

$$x = 2t - 3, \quad y = -t + 7, \quad z = -2t + 5.$$

Hallar la ecuación de este cilindro.

1202. Hallar la ecuación de un cilindro circular que pasa por el punto S (2; —1; 1), si la recta

$$x = 3t + 1, \quad y = -2t - 2, \quad z = t + 2,$$

es el eje del mismo.

1203. Hallar la ecuación del cilindro circunscrito en las dos esferas:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

APENDICE

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LOS DETERMINANTES

§ 1. Determinantes de segundo orden y sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Supongamos que se ha dado un cuadro de cuatro números a_1, a_2, b_1, b_2:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

El número $a_1b_2 - a_2b_1$ se llama determinante de segundo orden correspondiente al cuadro (1). Este determinante se designa con la notación $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; por consiguiente, tenemos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{2}$$

Los números a_1, a_2, b_1, b_2 se llaman elementos del determinante. Se dice que los elementos a_1, b_2 están en la diagonal principal del determinante y que a_2, b_1 están en su diagonal secundaria. O sea, que el determinante de segundo orden es igual a la diferencia de los productos de los elementos situados en las diagonales principal y secundaria.

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot 4 - (-1)\cdot 2 = -10.$$

Consideremos un sistema de dos ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} a_1x + b_1y &= h_1, \\ a_2x + b_2y &= h_2 \end{aligned} \right. \tag{3}$$

con dos incógnitas x, y. (Se supone que se han dado los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 y los términos independientes h_1, h_2.) Hagamos las notaciones

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

El determinante Δ, formado por los coeficientes de las incógnitas del sistema (3), se llama determinante de este sistema. El determinante Δ_x se forma sustituyendo los elementos de la primera columna del determinante Δ por los términos independientes del sistema (3); el determinante Δ_y se obtiene del determinante Δ, sustituyendo los elementos de su segunda columna por los términos independientes del sistema (3).

Si $\Delta \neq 0$, el sistema (3) tiene solución única; las fórmulas para hallar esta solución son

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{5}$$

Si $\Delta = 0$ y si al menos uno de los determinantes Δ_x, Δ_y es diferente de cero, el sistema (3) no tiene ninguna solución (se dice que el sistema es incompatible).

Si $\Delta = 0$ y también $\Delta_x = \Delta_y = 0$, el sistema (3) tiene infinidad de soluciones (en este caso, una de las ecuaciones del sistema es consecuencia de la otra).

Supongamos que en las ecuaciones del sistema (3) $h_1 = h_2 = 0$; entonces, el sistema (3) es de la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0, \\ a_2x+b_2y=0. \end{cases} \tag{6}$$

El sistema de ecuaciones de la forma (6) se llama homogéneo; este sistema siempre tiene solución nula: $x = 0$, $y = 0$. Si $\Delta \neq 0$, esta solución es única; pero, si $\Delta = 0$, además de la solución nula, el sistema (6) tiene infinidad de soluciones.

1204. Calcular los determinantes:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

1205. Resolver las ecuaciones:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix}=0$;

3) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$; 4) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix}=\frac{3}{2}$;

5) $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}=0$; 6) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=0$;

7) $\begin{vmatrix} 4\operatorname{sen}x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0$; 8) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\operatorname{sen}5x \\ \operatorname{sen}8x & \cos 5x \end{vmatrix}=0$.

1206. Resolver las inecuaciones:

$$1)\ \begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0;$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5; \qquad 4)\ \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14.$$

1207. Hallar todas las soluciones de cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$1)\ \begin{cases} 3x-5y=13, \\ 2x+7y=81; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 3y-4x=1, \\ 3x+4y=18; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 2x-3y=6, \\ 4x-6y=5; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} x-y\sqrt{3}=1, \\ x\sqrt{3}-3y=\sqrt{3}; \end{cases} \quad 5)\ \begin{cases} ax+by=c, \\ bx-ay=d; \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} x\sqrt{5}-5y=\sqrt{5}, \\ x-y\sqrt{5}=5. \end{cases}$$

1208. Determinar los valores de a y b para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x-ay=1, \\ 6x+4y=b \end{cases}$$

1) tenga solución única;
2) no tenga solución;
3) tenga infinidad de soluciones.

1209. Determinar el valor de a para que el sistema de ecuaciones homogéneas

$$\begin{cases} 13x+2y=0, \\ 5x+ay=0 \end{cases}$$

admita solución no nula.

§ 2. Sistema de dos ecuaciones homogéneas de primer grado con tres incógnitas

Supongamos que se ha dado un sistema de dos ecuaciones homogéneas

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases} \tag{1}$$

con tres incógnitas x, y, z. Hagamos las notaciones:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Si, por lo menos, uno de los determinantes Δ_1, Δ_2, Δ_3 no es igual a cero, todas las soluciones del sistema (1) se determinan por las fórmulas

$$x=\Delta_1 t, \quad y=-\Delta_2 t, \quad z=\Delta_3 t,$$

en donde t es un número arbitrario. Cada valor de t nos proporciona una solución particular.

Para hacer el cálculo, es conveniente tener en cuenta que los determinantes Δ_1, Δ_2, Δ_3 se obtienen eliminando sucesivamente una de las columnas del cuadro:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Si los tres determinantes Δ_1, Δ_2, Δ_3 son iguales a cero, los coeficientes de las ecuaciones del sistema (1) son proporcionales. En este caso, una de las ecuaciones del sistema es consecuencia de la otra, y en realidad el sistema se reduce a una ecuación. Claro que, tal sistema, tiene infinidad de soluciones; para obtener alguna de ellas es necesario dar a dos incógnitas valores numéricos arbitrarios y hallar la tercera mediante la ecuación.

1210. Hallar todas las soluciones de cada uno de los sistemas de las ecuaciones siguientes:

1) $\begin{cases} 3x-2y+5z=0, \\ x+2y-3z=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ 6x-4y+3z=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-3y+z=0, \\ 2x-9y+3z=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ x+2y-z=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ x+2y-3z=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x-y-2z=0, \\ x-5y+2z=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+2y-z=0, \\ 3x-5y+2z=0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x-5y+z=0, \\ x+2y-z=0; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+3y-z=0, \\ 5x-3y+z=0; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} ax+y+z=0, \\ x-y+az=0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} ax+2y-z=0, \\ 2x+by-3z=0; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x-3y+az=0, \\ bx+6y-z=0. \end{cases}$

§ 3. Determinantes de tercer orden

Supongamos que se ha dado un cuadro de nueve números a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

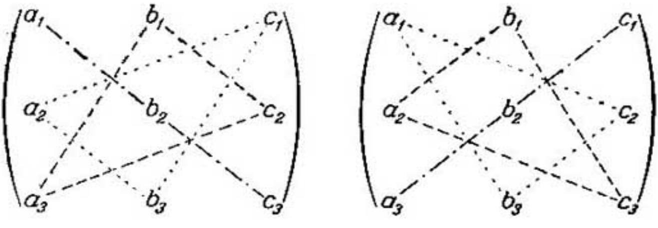
Se llama determinante de tercer orden, correspondiente al cuadro (1), al número que se designa con la notación

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

y que se define por la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \qquad (2)$$

Los números a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 se llaman elementos del determinante. Los elementos a_1, b_2, c_3 están situados en la diagonal del determinante, llamada principal; los elementos a_3, b_2, c_1 forman la diagonal secundaria. Para el cálculo conviene tener en cuenta, que los primeros tres sumandos del segundo miembro de la igualdad (2) representan productos de los elementos del determinante, tomados tres a tres, así como se indica con rayas de trazos en el esquema de la izquierda que se expone a continuación.



Para obtener los otros tres términos del segundo miembro de la igualdad (2) es necesario multiplicar tres a tres los elementos del determinante, como se indica con rayas de trazos en el esquema de la derecha, después de lo cual se deben de cambiar los signos a los productos obtenidos.

Calcular el determinante de tercer orden en los ejercicios 1211—1216.

1211. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ **1212.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

1213. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$. **1214.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

1215. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$. **1216.** $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$.

§ 4. Propiedades de los determinantes

Propiedad 1. El valor de un determinante no varía, si se cambian todas sus filas por sus columnas, es decir, si cada fila se cambia por la columna del mismo orden, o sea

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Propiedad 2. La permutación de dos columnas o de dos filas de un determinante es equivalente a su multiplicación por -1. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Propiedad 3. Un determinante que tiene dos columnas o dos filas idénticas es nulo.

Propiedad 4. La multiplicación de todos los elementos de una columna o de una fila de un determinante por un número cualquiera k es equivalente a la multiplicación del determinante por este número k. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Propiedad 5. Si todos los elementos de una columna o de una fila son iguales a cero, el mismo determinante será igual a cero. Esta propiedad constituye un caso particular de la anterior (para $k = 0$).

Propiedad 6. Si los elementos correspondientes de dos columnas o de dos filas de un determinante son proporcionales, el determinante es nulo.

Propiedad 7. Si cada elemento de la n-ésima columna o de la n-ésima fila de un determinante representa una suma de dos sumandos, el determinante se puede descomponer en una suma de dos determinantes; los elementos de la n-ésima columna, o los correspondientes de la n-ésima fila, de uno de estos determinantes, son iguales a los primeros sumandos citados y los del otro determinante, son iguales a los segundos sumandos; los elementos situados en los demás lugares son los mismos para los tres determinantes. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1'+a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'+a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'+a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

P r o p i e d a d 8. Si a los elementos de una columna (o de una fila) se les suman los elementos correspondientes de otra columna (o de otra fila), multiplicados por un factor cualquiera, el determinante no varía. Por ejemplo.

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Las propiedades ulteriores de los determinantes están relacionadas con los conceptos de complemento algebraico y menor.

Se llama menor de un elemento al determinante que resulta si en el determinante dado se suprimen la columna y la fila en cuya intersección está situado ese elemento.

El complemento algebraico de un elemento del determinante es igual al menor de este elemento, tomado con su mismo signo, si la suma de los números de orden de la columna y de la fila, en cuya intersección está situado ese elemento, es un número par, y con signo contrario, si este número es impar.

El complemento algebraico de un elemento lo indicaremos con la misma letra, pero mayúscula, y con el mismo índice que tiene la letra que designa dicho elemento.

P r o p i e d a d 9. El determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier columna (o fila) por sus complementos algebraicos.

Es decir, se verifican las igualdades siguientes:

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \qquad \Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1,$$
$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \qquad \Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2,$$
$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3, \qquad \Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3.$$

En los problemas 1217—1222 hay que demostrar que se verifican las igualdades, sin desarrollar para eso los determinantes.

1217. $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}.$$

O b s e r v a c i ó n. Aplicar la propiedad 8.

1218. $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

O b s e r v a c i ó n. Aplicar la propiedad 8.

1219. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1+\alpha a_2 & b_1+\alpha b_2 & c_1+\alpha c_2 \end{vmatrix}=0.$$

Observación. Aplicar las propiedades 7, 3, 6.

1220. $$\begin{vmatrix} \beta b_1+\gamma c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2+\gamma c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3+\gamma c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

Observación. Aplicar las propiedades 7 y 6.

1221. $$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \operatorname{sen}^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \operatorname{sen}^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}=0.$$

1222. $$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}=0.$$

En los problemas 1223—1227 hay que calcular los determinantes, aplicando solamente la propiedad 9.

1223. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1224. $$\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

1225. $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$$

1226. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

1227. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

1228. Aplicando la propiedad 8, transformar los determinantes dados en los problemas 1223—1227 de modo que en alguna columna (o fila) se conviertan en cero dos de los elementos, y, después, calcular cada uno de los determinantes aplicando la propiedad 9.

En los problemas 1229—1232 hay que calcular los determinantes.

1229. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$. **1230.** $\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{ctg}\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \end{vmatrix}$.

1231. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$. **1232.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

1233. Demostrar que se verifican las igualdades:

1) $\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \\ 1 & \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}^2\beta \\ 1 & \operatorname{sen}\gamma & \operatorname{sen}^2\gamma \end{vmatrix} = (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\gamma) \times \times (\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\alpha)$:

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}\beta & \operatorname{tg}\gamma \\ \operatorname{tg}^2\alpha & \operatorname{tg}^2\beta & \operatorname{tg}^2\gamma \end{vmatrix} = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\beta-\gamma)\operatorname{sen}(\gamma-\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}$.

1234. Resolver las ecuaciones:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

1235. Resolver las inecuaciones:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

§ 5. Resolución y discusión de un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

Consideremos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3 \end{cases} \tag{1}$$

con tres incógnitas x, y, z (se suponen dados los coeficientes a_1, b_1, ..., c_3 y los términos independientes h_1, h_2, h_3).

Hagamos las notaciones:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_3 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

El determinante Δ, formado por los coeficientes de las incógnitas del sistema (1), se llama determinante del sistema dado.

Es conveniente tener presente que los determinantes Δ_x, Δ_y, Δ_z se obtienen del determinante Δ, cambiando respectivamente la primera, segunda y tercera columna por la columna de los términos independientes del sistema dado.

Si $\Delta \neq 0$ el sistema (1) tiene solución única, la cual se halla por las fórmulas

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Supongamos que el determinante del sistema es igual a cero: $\Delta = 0$. Si $\Delta = 0$, y por lo menos uno de los determinantes Δ_x, Δ_y, Δ_z es diferente de cero, el sistema (1) no tiene solución alguna.

Si $\Delta = 0$ y, a la vez, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$, el sistema (1) también puede no tener soluciones; pero, si el sistema (1) cuenta, en estas condiciones, por lo menos con una solución, tendrá entonces infinidad de soluciones diferentes.

Se llama sistema de tres ecuaciones homogéneas de primer grado con tres incógnitas al sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0, \end{cases} \tag{2}$$

es decir, al sistema de ecuaciones cuyos términos independientes son iguales a cero. Es evidente que tal sistema siempre tiene la solución: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y se dice que es nula. Si $\Delta \neq 0$, ésta es la única solución. Si $\Delta = 0$, el sistema homogéneo (2) tiene infinidad de soluciones no nulas.

Verificar en los problemas 1236—1243, que el sistema de ecuaciones tiene solución única y hallarla.

1236. $\begin{cases} x+y-z=36, \\ x+z-y=13, \\ y+z-x=7. \end{cases}$ **1237.** $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$

1238. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$ **1239.** $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$

1240. $\begin{cases} x+y+z=36, \\ 2x-3z=-17, \\ 6x+5z=7. \end{cases}$ **1241.** $\begin{cases} 7x+2y+3z=15, \\ 5x-3y+2z=15, \\ 10x-11y+5z=36. \end{cases}$

1242. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x-y+z=b, \\ x+y-z=c. \end{cases}$ **1243.** $\begin{cases} x-y+z=a, \\ x+y-z=b, \\ y+z-x=c. \end{cases}$

1244. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=-2. \end{cases}$$

1245. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 2x-y+z=-2, \\ x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3. \end{cases}$$

1246. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 3x-y+2z=5, \\ 2x-y-z=2, \\ 4x-2y-2z=-3. \end{cases}$$

1247. Determinar los valores de a y b para que el sistema

$$\begin{cases} 3x-2y+z=b, \\ 5x-8y+9z=3, \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}$$

1) tenga solución única;
2) no tenga solución;
3) tenga infinidad de soluciones.

1248. Demostrar que si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{cases}$$

es compatible, se verifica la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

1249. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

1250. Hallar todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$$

1251. Determinar el valor de a para que el sistema de ecuaciones homogéneas

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ ax - 14y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

tenga solución no nula.

§ 6. Determinantes de cuarto orden

Los determinantes de cualquier orden poseen todas las propiedades de los determinantes expuestas en el § 4. En este párrafo, para el cálculo de los determinantes de cuarto orden se deben aplicar estas propiedades.

En los problemas 1252—1260 hay que calcular los determinantes de cuarto orden.

1252. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. **1253.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

1254. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. **1255.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

1256. $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$. **1257.** $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$.

1258. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$. **1259.** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$.

1260. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1261. Demostrar que si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

es compatible, se verifica la igualdad

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0.$$

RESPUESTAS E INDICACIONES A LOS PROBLEMAS

Primera parte

1. Véase la fig. 54. **2.** N o t a. La ecuación $|x| = 2$ es equivalente a las dos ecuaciones: $x = -2$ y $x = 2$; tenemos respectivamente dos puntos $A_1(-2)$ y $A_2(2)$ (fig. 55). La ecuación $|x - 1| = 3$ es equivalente a dos ecuaciones $x - 1 = -3$ y $x - 1 = 3$, de donde obtenemos $x = -2$, $x = 4$ y sus puntos correspondientes B_1 y B_2 (fig. 55). En los demás casos, las soluciones son análogas. **3.** Los

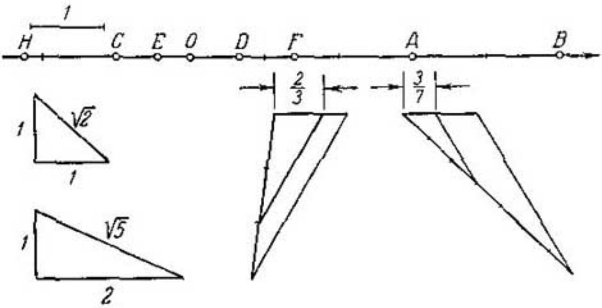


Fig. 54.

puntos están situados: 1) a la derecha del punto $M_1(2)$; 2) a la izquierda el punto $M_2(3)$, incluyendo el punto M_2; 3) a la derecha del punto $M_3(12)$; 4) a la izquierda del punto $M_4\left(\frac{3}{2}\right)$, incluyendo el punto M_4; 5) a la derecha del punto $M_5\left(\frac{5}{3}\right)$; 6) dentro del segmento limitado por los puntos $M_6(1)$ y $M_2(3)$; 7) dentro del segmento limitado por los puntos $M_7(-2)$ y $M_2(3)$, incluyendo los puntos M_7 y M_2; 8) dentro del segmento limitado por los puntos A (1) y B (2); 9) fuera del segmento limitado por los puntos P (—1) y Q (2); 10) fuera del segmento limitado por los puntos A (1) y B (2); 11) dentro del segmento limitado por los puntos P (—1) y Q (2); 12) dentro del segmento limitado por los puntos M (3) y N (5), incluyendo los puntos M y N; 13) fuera del segmento

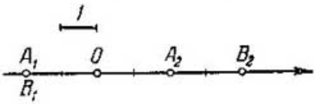


Fig. 55.

limitado por los puntos M (3) y N (5); 14) fuera del segmento limitado por los puntos P_1 (—4) y Q_1 (3); 15) dentro del segmento limitado por los puntos P_1 (—4) y Q_1 (3), incluyendo los puntos P_1 y Q_1.
4. 1) $AB = 8$, $|AB| = 8$; 2) $AB = -3$, $|AB| = 3$; 3) $AB = 4$, $|AB| = 4$; 4) $AB = 2$, $|AB| = 2$; 5) $AB = -2$, $|AB| = 2$; 6) $AB = 2$, $|AB|$ 2.
5. 1) —2; 2) 5; 3) 1; 4) —8; 5) —2 y 2; 6) —1 y 5; 7) —6 y 4; 8) —7 y —3. **6.** 1) Dentro del segmento limitado por los puntos

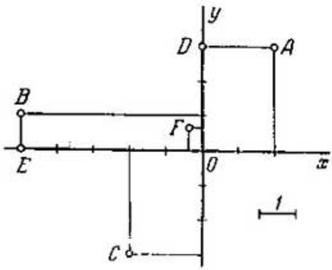


Fig. 56.

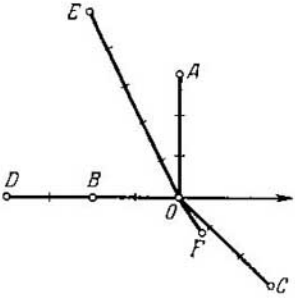


Fig. 57.

A (—1) y B (1); 2) fuera del segmento limitado por los puntos A (—2) y B (2); 3) dentro del segmento limitado por los puntos A (—2) y B (2), incluyendo los puntos A y B; 4) fuera del segmento limitado por los puntos A (—3) y B (3), incluyendo los puntos A y B; 5) dentro del segmento limitado por los puntos A (—1) y B (5); 6) dentro del segmento limitado por los puntos A (4) y B (6), incluyendo los puntos A y B; 7) fuera del segmento limitado por los puntos A (—1) y B (3), incluyendo los puntos A y B; 8) fuera del segmento limitado por los puntos A (2) y B (4), incluyendo los puntos A y B; 9) dentro del segmento limitado por los puntos A (—4) y B (2); 10) fuera del segmento limitado por los puntos A (—3) y B (—1); 11) dentro del segmento limitado por los puntos A (—6) y B (—4), incluyendo los puntos A y B; 12) fuera del segmento limitado por los puntos A (—3) y B (1), incluyendo los puntos A y B. **7.** 1) 1; 2) $-\frac{5}{3}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{10}{3}$. **8.** $\lambda_1=\frac{AB}{BC}=3$; $\lambda_2=\frac{CB}{BA}=\frac{1}{3}$; $\lambda_3=\frac{AC}{CB}=-4$; $\lambda_4=\frac{BC}{CA}=-\frac{1}{4}$; $\lambda_5=\frac{BA}{AC}=-\frac{3}{4}$; $\lambda_6=\frac{CA}{AB}=-\frac{4}{3}$. **9.** $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}$. **10.** $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$. **11.** $x=\frac{x_1+x_2}{2}$. **12.** 1) 4; 2) 2; 3) -2; 4) -2; 5) $-\frac{1}{2}$. **13.** 1) $\frac{17}{3}$; 2) $-\frac{13}{4}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 7; 5) 3; 6) 0. **14.** 1) $M(-11)$; 2) N (13). **15.** (5) y (12). **16.** A (7) y $B(-41)$. **17.** Véase fig. 56. **18.** $A_x(2;\ 0)$, $B_x(3;\ 0)$, $C_x(-5;\ 0)$, $D_x(-3;\ 0)$; $E_x(-5;\ 0)$. **19.** $A_y(0;\ 2)$, $B_y(0;\ 1)$, $C_y(0;\ -2)$, $D_y(0;\ 1)$, $E_y(0;\ -2)$. **20.** 1) $(2;\ -3)$; 2) $(-3;\ -2)$; 3) $(-1;\ 1)$; 4) $(-3;\ 5)$; 5) $(-4;\ -6)$; 6) $(a;\ -b)$. **21.** 1) $(1;\ 2)$; 2) $(-3;\ -1)$; 3) $(2;\ -2)$; 4) $(2;\ 5)$; 5) $(-3;\ -5)$; 6) $(-a;\ b)$. **22.** 1) $(-3;\ -3)$; 2) $(-2;\ 4)$; 3) $(2;\ -1)$; 4) $(-5;\ 3)$; 5) $(5;\ 4)$; 6) $(-a;\ -b)$. **23.** 1) $(3;\ 2)$; 2) $(-2;\ 5)$; 3) $(4;\ -3)$. **24.** 1) $(-5;\ -3)$; 2) $(-3;\ 4)$; 3) $(2;\ -7)$. **25.** 1) En el primero y en el tercero; 2) en el segundo y en el cuarto; 3) en el primero y en el tercero; 4) en el segundo y en el cuarto; 5) en el primero, segundo y cuarto; 6) en el segundo, tercero y cuarto; 7) en el primero, tercero y cuarto; 8) en el primero, segundo y tercero. **26.** Véase la fig. 57. **27.** $\left(3;\ -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(3;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $(1;\ -2)$, $(5;\ 1)$. **28.** $\left(1;\ -\frac{3}{4}\pi\right)$, $\left(5;\ -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(2;\ \frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(4;\ -\frac{1}{6}\pi\right)$, $(3;\ \pi-2)$. **29.** $C\left(3;\ \frac{5}{9}\pi\right)$ y $D\left(5;\ -\frac{11}{14}\pi\right)$. **30.** $\left(1;\ -\frac{2\pi}{3}\right)$. **31.** $A\left(3;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2;\ \frac{3}{4}\pi\right)$, $C(1;\ 0)$, $D\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $E(3;\ 2-\pi)$, $F(2;\ \pi-1)$. **32.** $M_1(3;\ 0)$, $M_2\left(1;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(2;\ -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4\left(5;\ -\frac{\pi}{12}\right)$, $M_5(3;\ \pi)$, $M_6\left(1;\ \frac{7}{12}\pi\right)$. **33.** $\left(6;\ \frac{\pi}{9}\right)$. **34.** $d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$. **35.** $d=7$. **36.** $9(17-4\sqrt{3})$ unid. cuad. **37.** $2(13+6\sqrt{2})$ unid. cuad. **38.** $28\sqrt{3}$ unid. cuad. **39.** $S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\times[\operatorname{sen}\theta_1-\theta_2)]$. **40.** 5 unid. cuad. **41.** $3(4\sqrt{3}-1)$ unid. cuad. **42.** $M_1(0;\ 6)$, $M_2(5;\ 0)$, $M_3(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $M_4(5;\ -5\sqrt{3})$, $M_5(-4;\ 4\sqrt{3})$, $M_6(6\sqrt{3};\ -6)$. **43.** $M_1\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(3;\ \pi)$, $M_3\left(2;\ \frac{\pi}{6}\right)$, $M_4\left(2;\ -\frac{3}{4}\pi\right)$, $M_5\left(-2;\ -\frac{\pi}{3}\right)$. **44.** 1) 3; 2) -3; 3) 0; 4) 5; 5) -5; 6) 2. **47.** 1) $X=1$, $Y=3$; 2) $X=-4$, $Y=-2$; 3) $X=1$, $Y=-7$; 4) $X=5$, $Y=3$. **48.** $(3;\ -1)$. **49.** $(-3;\ 2)$. **52.** 1) $X=-6$, $Y=6\sqrt{3}$; 2) $X=3\sqrt{3}$; $Y=-3$; 3) $X=\sqrt{2}$, $Y=-\sqrt{2}$. **53.** 1) 5; 2) 13; 3) 10. **54.** 1) $d=2$, $\theta=\frac{\pi}{3}$; 2) $d=6$, $\theta=-\frac{\pi}{4}$; 3) $d=4$, $\theta=\frac{5}{6}\pi$.

55. a) $d=\sqrt{2}$, $\theta=-\frac{3}{4}\pi$; b) $d=5$, $\theta=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi$; c) $d=13$, $\theta=\pi-\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$; d) $d=\sqrt{234}$, $\theta=-\operatorname{arctg} 5$. **56.** a) 3; b) -3. **57.** a) $(-9;\ 3)$; b) $(-9;\ -7)$. **58.** a) $(-15;\ -12)$; b) $(1;\ -12)$. **59.** -2. **60.** $\frac{3\sqrt{3}-4}{2}$. **61.** 4. **62.** 1) -5; 2) 5. **63.** 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 13. **64.** 137 unid. cuad. **65.** 34 unid. cuad. **66.** $8\sqrt{3}$ unid. cuad. **67.** 13,15. **68.** 150 unid. cuad. **69.** $4\sqrt{2}$. **73.** $\sphericalangle M_2M_1M_3$ es obtuso. **75.** $\sphericalangle BAC=45°$, $\sphericalangle ABC=45°$, $\sphericalangle ACB=90°$. **76.** 60°. Nota. Calcular las longitudes de los lados del triángulo y aplicar después el teorema de los cosenos. **77.** $M_1(6;\ 0)$ y $M_2(-2;\ 0)$. **78.** $M_1(0;\ 28)$ y $M_2(0;\ -2)$. **79.** $P_1(1;\ 0)$ y $P_2(6;\ 0)$. **80.** $C_1(2;\ 2)$, $R_1=2$; $C_2(10;\ 10)$, $R_2=10$. **81.** $C_1(-3;\ -5)$, $C_2(5;\ -5)$; **82.** $M_2(3;\ 0)$. **83.** $B(0;\ 4)$ y $D(-1;\ -3)$. **84.** A las condiciones del problema satisfacen dos cuadrados, situados simétricamente con respecto al lado AB. Los vértices de un cuadrado son $C_1(-5;\ 0)$, $D_1(-2;\ -4)$, los vértices del otro son $C_2(3;\ 6)$ y $D_2(6;\ 2)$. **85.** $C(3;\ -2)$, $R=10$. **86.** $(1;\ -2)$. **87.** $Q(4;\ 6)$. **88.** Los puntos medios de los lados AB, BC y AC son respectivamente $(2;\ -4)$, $(-1;\ 1)$, $(-2;\ 2)$. **89.** 1) $M(1;\ 3)$; 2) $N(4;\ -3)$. **90.** $(1;\ -3)$, $(3;\ 1)$ y $(-5;\ 7)$. **91.** $D(-3;\ 1)$. **92.** $(5;\ -3)$, $(1;\ -5)$. **93.** $D_1(2;\ 1)$, $D_2(-2;\ 9)$, $D_3(6;\ -3)$. Nota. El cuarto vértice del paralelogramo puede ser opuesto a cualquiera de los dados. Por lo tanto, a las condiciones del problema satisfacen tres paralelogramos **94.** 13. **95.** $(2;\ -1)$ y $(3;\ 1)$. **96.** $\left(\frac{5}{2};\ -2\right)$. **97.** $\frac{14}{3}\sqrt{2}$. **98.** $(-11;\ -3)$. **99.** 4. **100.** $\lambda_1=\frac{AB}{BC}=2$; $\lambda_2=\frac{AC}{CB}=-3$; $\lambda_3=\frac{BA}{AC}=-\frac{2}{3}$. **101.** $A(3;\ -1)$ y $B(0,\ 8)$. **102.** $(3;\ -1)$. **103.** $(4;\ -5)$. **104.** $(-9;\ 0)$. **105.** $(0;\ -3)$. **106.** 1 : 3, partiendo del punto B. **107.** $\left(4\frac{1}{2};\ 1\right)$. **108.** $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. **109.** $M(-1;\ 0)$, $C(0;\ 2)$. **111.** $(5;\ 5)$. **112.** $\left(\frac{5}{12}a;\ \frac{5}{12}b\right)$. **113.** $\left(\frac{19}{21}a;\ \frac{19}{21}a\right)$. **114.** $x=\frac{mx_1+nx_2+px_3}{m+n+p}$, $y=\frac{my_1+ny_2+py_3}{m+n+p}$. **115.** $(4;\ 2)$. Nota. El peso del alambre homogéneo es proporcional a su longitud. **116.** 1) 14 unid. cuad. 2) 12; 3) 26 unid. cuad. **117.** 5. **118.** 20 unid. cuad. **119.** 7,4. **120.** $x=-\frac{6}{11}$, $y=4\frac{1}{11}$. **121.** $x=\frac{7}{17}$, $y=3\frac{1}{3}$. **122.** $(0;\ -8)$ ó $(0;\ -2)$. **123.** $(5;\ 0)$ ó $\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$. **124.** $(5;\ 2)$ ó $(2;\ 2)$. **125.** $C_1(-7;\ -3)$, $D_1(-6;\ -4)$ ó $C_2(17;\ -3)$, $D_2(18;\ -4)$. **126.** $C_1(-2;\ 12)$, $D_1(-5;\ 16)$ ó $C_2\left(-2;\ \frac{2}{3}\right)$, $D_2\left(-5;\ \frac{14}{3}\right)$. **127.** 1) $x=x'+3$, $y=y'+4$; 2) $x=x'-2$, $y=y'+1$; 3) $x=x'-3$, $y=y'+5$. **128.** $A(4;\ -1)$, $B(0;\ -4)$, $C(2;\ 0)$. **129.** 1) $A(0;\ 0)$,

$B(-3;\ 2)$, $C(-4;\ 4)$; 2) $A(3;\ -2)$, $B(0;\ 0)$, $C(-1;\ 2)$; 3) $A(4;\ -4)$, $B(1;\ -2)$, $C(0;\ 0)$. **130.** 1) $(3;\ 5)$; 2) $(-2;\ 1)$; 3) $(0;\ -1)$; 4) $(-5;\ 0)$. **131.** 1) $x=\frac{x'-y'\sqrt{3}}{2}$, $y=\frac{x'\sqrt{3}+y'}{2}$; 2) $x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}$; 3) $x=-y'$, $y=x'$; 4) $x=y'$, $y=-x'$; 5) $x=-x'$, $y=-y'$ **132.** $A(3\sqrt{3};\ 1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{3}{2}\right)$, $C(3;\ -\sqrt{3})$. **133.** 1) $M(\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$, $N(-3\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$, $P(-\sqrt{2};\ -2\sqrt{2})$; 2) $M(1;\ -3)$, $N(5;\ 1)$, $P(-1;\ 3)$; 3) $M(-1;\ 3)$, $N(-5;\ -1)$, $P(1;\ -3)$; 4) $M(-3;\ -1)$, $N(1;\ -5)$, $P(3;\ 1)$. **134.** 1) $60°$; 2) $-30°$. **135.** $O'(2;\ -4)$. **136.** $x=x'+1$, $y=y'-3$. **137.** $x=\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'$, $y=-\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'$. **138.** $M_1(1;\ 5)$, $M_2(2;\ 0)$, $M_3(16;\ -5)$. **139.** $A(6;\ 3)$, $B(0;\ 0)$, $C(5;\ -10)$. **140.** 1) $O'(3;\ -2)$, $\alpha=90°$; 2) $O'(-1;\ 3)$, $\alpha=180°$; 3) $O'(5;-3)$, $\alpha=-45°$. **141.** $x=-\frac{15}{17}x'-\frac{8}{17}y'+9$, $y=\frac{8}{17}x'-\frac{15}{17}y'-3$. **142.** $M_1(1;\ 9)$, $M_2(4;\ 2)$, $M_3(1;\ -3)$, $M_4(0;\ 2+\sqrt{3})$, $M_5(1+\sqrt{3};\ 1)$. **143.** $M_1(0;\ 5)$, $M_2(3;\ 0)$, $M_3(-1;\ 0)$, $M_4(0;\ -6)$, $M_5(\sqrt{3};\ 1)$. **144.** $M_1(2;\ 0)$, $M_2\left(1;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_4\left(2;\ -\frac{\pi}{4}\right)$, $M_5\left(2;\ \frac{\pi}{6}\right)$. **145.** $M_1\left(\sqrt{2};\ \frac{1}{2}\pi\right)$, $M_2\left(2;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(2;\ \frac{\pi}{12}\right)$, $M_4\left(2;\ \frac{7}{12}\pi\right)$, $M_5\left(4;\ -\frac{5}{12}\pi\right)$. **146.** $f(x,\ y)=2ax-a^2$. **147.** 1) $f(x;\ y)=2ax$; 2) $f(x,\ y)=-2ax-a^2$. **148.** $f(x,\ y)=4x^2+4y^2+2a^2$. **149.** $f(x,\ y)=4x^2+4y^2-4ax-4ay+4a^2$. **150.** $f(x,\ y)=x^2+y^2-25$. **151.** $f(x,\ y)=2xy-16$. **152.** La rotación de los ejes coordenados no altera la expresión de la función. **153.** $(3;\ 1)$. **154.** No existe tal punto. **155.** $\pm45°$ ó $\pm135°$. **156.** $30°$, $120°$, $-60°$, $-150°$. **157.** Los puntos M_1, M_4 y M_5 están situados en la línea; los puntos M_2, M_3 y M_6 no están situados en ella. La ecuación determina la bisectriz del segundo y del cuarto ángulos coordenados (fig. 58). **158.** a) $(0;\ -5)$, $(0;\ 5)$; b) $(-3;\ -4)$, $(-3;\ 4)$; c) $(5;\ 0)$; d) no hay tal punto en la línea dada; e) $(-4;\ 3)$, $(4;\ 3)$; f) $(0;\ -5)$; g) no hay tal punto en la línea dada. La ecuación determina una circunferencia de radio 5 con el centro en $O(0;\ 0)$ (fig. 59). **159.** 1) La bisectriz del primero y del tercer ángulos coordenados; 2) la bisectriz del segundo y del cuarto ángulos coordenados; 3) una recta paralela al eje Oy que corta en el semieje positivo Ox, partiendo del origen de coordenadas, un segmento de longitud igual a 2 (fig. 60); 4) una recta paralela al eje Oy que corta en el semieje negativo Ox, partiendo del origen de coordenadas, un segmento igual a 3 (fig. 60); 5) una recta paralela al eje Ox, que corta en el semieje positivo Oy, partiendo del origen de coordenadas, un segmento igual a 5 (fig. 60); 6) una recta paralela al eje Ox, que corta en el semieje negativo Oy, partiendo del origen de coordenadas, un segmento igual a 2 (fig. 60); 7) la recta que coincide con el eje de ordenadas; 8) la recta que coincide con el eje de abscisas; 9) la línea se compone de dos rectas: la bisectriz del primero y del tercer ángulos coordenados

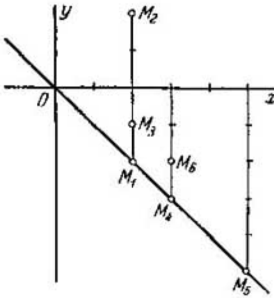


Fig. 58.

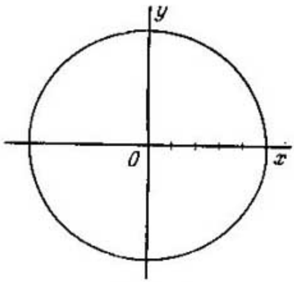


Fig. 59.

y a recta que coincide con el eje de ordenadas; 10) la línea se compone de dos rectas: la bisectriz del segundo y del cuarto ángulos coordenados y la recta que coincide con el eje de abscisas; 11) la línea se compone de las dos bisectrices de los ángulos coordenados (fig. 61); 12) la línea se compone de dos rectas: de la

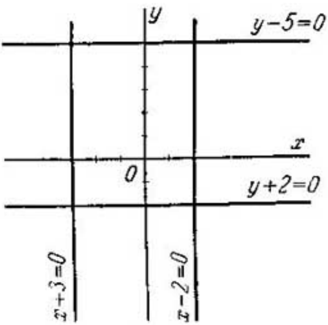


Fig. 60.

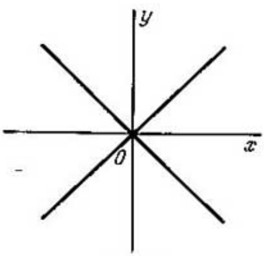


Fig. 61.

recta que coincide con el eje de abscisas y de la recta que coincide con el eje de ordenadas; 13) la línea se compone de dos rectas paralelas al eje de abscisas, que cortan en el eje de ordenadas, partiendo del origen de coordenadas, segmentos iguales a 3 y -3 (fig. 62); 14) la línea se compone de dos rectas paralelas al eje Oy,

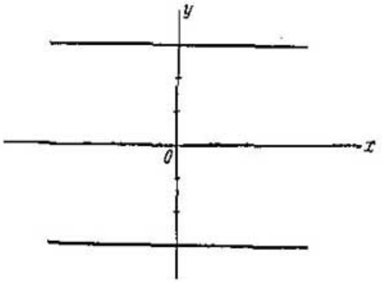


Fig. 62.

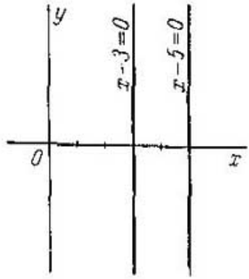


Fig. 63.

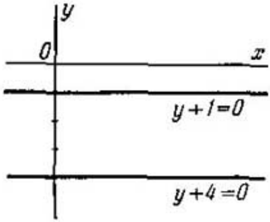


Fig. 64.

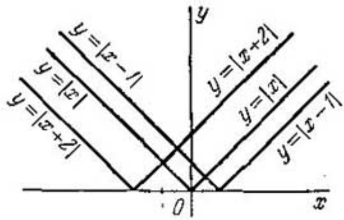


Fig. 65.

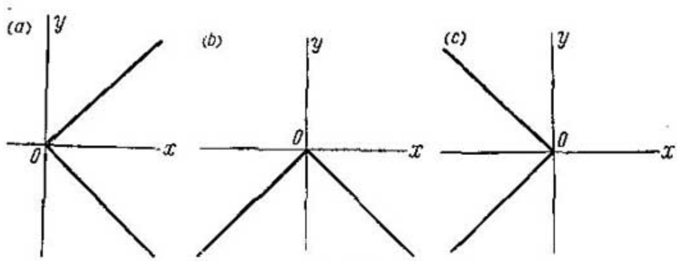


Fig. 66.

que cortan en el semieje positivo Ox, partiendo del origen de coordenadas, segmentos iguales a 3 y 5 (fig. 63); 15) la línea se compone de dos rectas paralelas al eje Ox, que cortan en el semieje negativo Oy, partiendo del origen de coordenadas, segmentos iguales a 1 y 4 (fig. 64); 16) la línea se compone de tres rectas: la recta que coincide con el eje de abscisas y dos rectas paralelas al eje de ordenadas, que cortan en el semieje positivo de abscisas, partiendo del origen de coordenadas, segmentos iguales a 2 y 5; 17) la línea se compone de dos rayos: las bisectrices del primero y del segundo ángulos coordenados (fig. 65); 18) la línea se compone de dos rayos: las bisectrices del primero

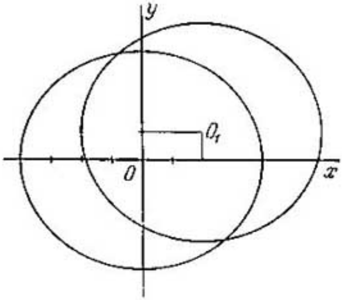


Fig. 67.

y del cuarto ángulos coordenados (fig. 66 *a*); 19) la línea se compone de dos rayos: las bisectrices del tercero y del cuarto ángulos coordenados (fig. 66 *b*); 20) la línea se compone de dos rayos: las bisectrices del segundo y del tercer ángulos coordenados (fig. 66 *c*); 21) la línea se compone de dos rayos situados en el semiplano superior, que parten del punto (1; 0) y son paralelos a las bisectrices de los ángulos coordenados (fig. 65); 22) la línea se compone de dos rayos, situados en el semiplano superior, que parten del punto (—2; 0) y son paralelos a las bisectrices de los ángulos coordenados (fig. 65); 23) una circunferencia de radio 4 con el centro en el origen de coordenadas (fig. 67); 24) una circunferencia de radio 4 con el centro O_1 (2; 1) (fig. 67); 25) una circunferencia de radio 3 con el centro (—5; 1); 26) una circunferencia de radio 2 con el centro (1; 0); 27) una circunferencia de radio 1 con el centro (0; —3); 28) la línea se compone de un punto (3; 0) y es una línea degenerada; 29) la línea se compone de un punto (0; 0) y es una línea degenerada; 30) no hay ni un punto, cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación dada («línea imaginaria»); 31) no hay ni un punto, cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación dada («línea imaginaria»). **160.** Las líneas 1), 2) y 4) pasan por el origen de coordenadas. **161.** 1) a) (7; 0), (—7; 0); b) (0; 7), (0; —7); 2) a) (0; 0), (6; 0); b) (0; 0), (0; —8); 3) a) (—10; 0), (—2; 0); b) la línea no se corta con el eje Oy; 4) la línea no se corta con los ejes coordenados; 5) a) (0; 0), (12; 0); b) (0; 0), (0; —16); 6) a) la línea no se corta con el eje Ox; b) (0; —1), (0; —7); 7) la línea no se corta con los ejes coordenados. **162.** 1) (2; 2), (—2; —2);

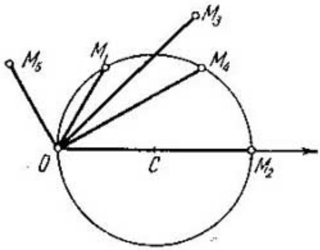


Fig. 68.

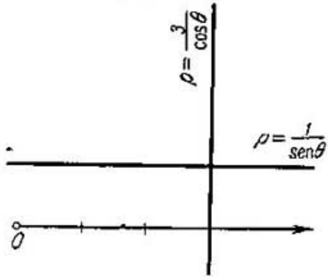


Fig. 69.

2) (1; —1), (9; —9); 3) (3; —4), $\left(1\frac{2}{5};\ -4\frac{4}{5}\right)$; 4) las líneas no se cortan. **163.** Los puntos M_1, M_2 y M_4 están en la línea dada; los puntos M_3 y M_5 no están en ella. La ecuación determina una

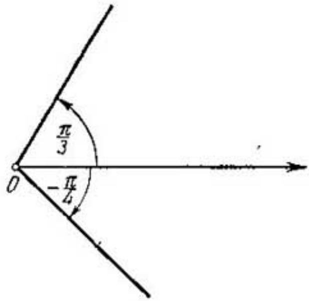


Fig. 70.

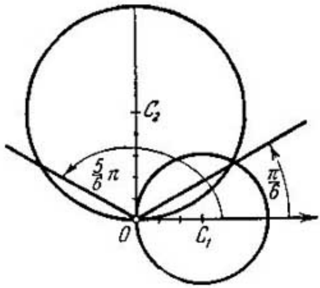


Fig. 71.

circunferencia (fig. 68). **164.** a) $\left(6;\ \frac{\pi}{3}\right)$; b) $\left(6;\ -\frac{\pi}{3}\right)$; c) (3; 0); d) $\left(2\sqrt{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$; la recta es perpendicular al eje polar y corta en él un segmento igual a 3, partiendo del polo (fig. 69). **165.** a) $\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)$; b) $\left(2;\ \frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(2;\ \frac{5}{6}\pi\right)$; c) $\left(\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$

y $\left(\sqrt{2};\ \frac{3}{4}\pi\right)$; la recta situada en el semiplano superior es paralela al eje polar y está a la distancia 1 de él (fig. 69).
166. 1) Una circunferencia de radio 5 con el centro en el polo; 2) un rayo que parte del polo y forma con el eje polar un ángulo

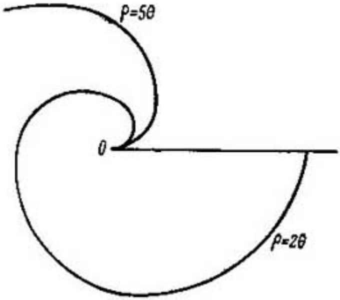


Fig. 72.

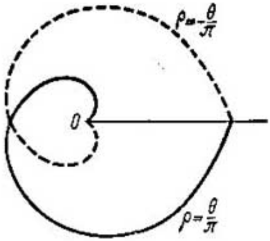


Fig. 73.

igual a $\frac{\pi}{3}$ (fig. 70); un rayo que parte del polo y forma con el eje polar un ángulo igual a $-\frac{\pi}{4}$ (fig. 70); 4) una recta perpendicular al eje polar que corta en él, partiendo del polo, un segmento

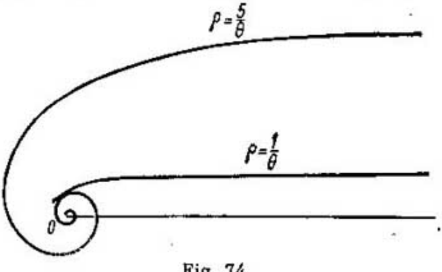


Fig. 74.

$a=2$; 5) una recta situada en el semiplano superior, paralela al eje polar y que está a la distancia igual a 1 de él; 6) una circunferencia de radio 3 con el centro C_1 (3; 0) (fig. 71); 7) una circunferencia de radio 5 con el centro $C_2=\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$ (fig. 71); 8) la línea se compone de dos rayos, que parten del polo, uno de los cuales forma con el eje polar un ángulo igual a $\frac{\pi}{6}$ y el otro forma con el mismo eje un ángulo igual a $\frac{5}{6}\pi$ (fig. 71); 9) la línea se compone de circunferencias concéntricas con el centro en el polo,

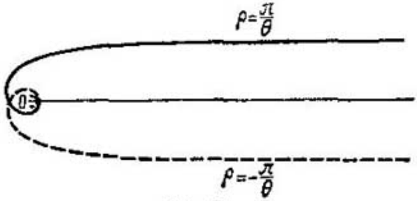


Fig. 75.

cuyos radios r se determinan por la fórmula $r=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, en donde n es un número entero positivo, arbitrario o cero.
167. Fig. 72 y fig. 73. **168.** Fig. 74 y fig. 75. **169.** Fig. 76.

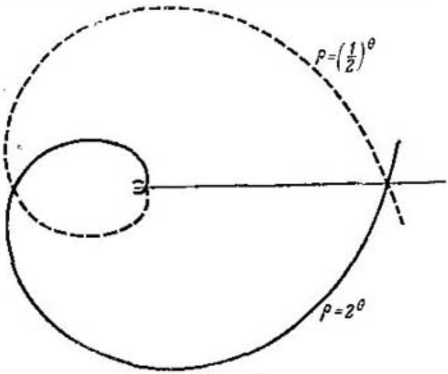


Fig. 76.

170. El segmento contiguo al polo tiene la longitud $\frac{\pi}{2}$ y cada uno de los otros segmentos tiene la longitud igual a 6π (fig. 77). **171.** En cinco partes (fig. 78). **172.** $P\left(12; \frac{1}{2}\right)$ (fig. 79). **173.** $Q\,(81; 4)$ (fig. 80). **174.** Las rectas $x\pm y=0$. **175.** Las rectas

$x \pm a = 0$. **176.** Las rectas $y \pm b = 0$. **177.** $y + 4 = 0$. **178.** $x - 5 = 0$. **179.** 1) la recta $x - y = 0$; 2) la recta $x + y = 0$; 3) la recta $x - 1 = 0$; 4) la recta $y - 2 = 0$. **180.** Las rectas $4ax \pm c = 0$. **181.** $x^2 + y^2 = r^2$. **182.** $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$. **183.** $x^2 + y^2 = 9$. **184.** $x^2 + y^2 = 16$.

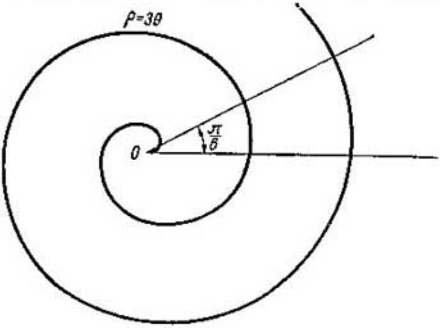


Fig. 77.

185. $x^2 + y^2 = a^2$. **186.** $(x-4)^2 + y^2 = 16$. **187.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. **188.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. **189.** $y^2 = 12x$. **192.** $y^2 = 2px$, parábola. **193.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$,

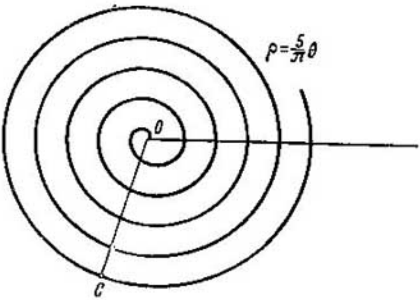


Fig. 78.

elipse. **194.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, hipérbola. **195.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, elipse. **196.** La rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. **197.** $y^2 = 20x$, parábola. **198.** $\rho \cos \theta = 3$. **199.** $\theta = \frac{\pi}{3}$. **200.** $\operatorname{tg} \theta = 1$. **201.** $\rho \operatorname{sen} \theta +$

$+5=0$, $\rho \operatorname{sen}\theta-5=0$. **202.** $\rho=10\cos\theta$. **203.** A la condición del problema satisfacen dos circunferencias, cuyas ecuaciones en coordenadas polares son $\rho+6\operatorname{sen}\theta=0$, $\rho-6\operatorname{sen}\theta=0$. **204.** $\left.\begin{array}{l} x=a\cos t, \\ y=b\operatorname{sen} t; \end{array}\right\}$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **205.** $x=\frac{ab\cos t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}}$, $y=\frac{ab\operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}}$. **206.** $x=\frac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\operatorname{sen}^2 t}}$, $y=\frac{ab\operatorname{sen} t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\operatorname{sen}^2 t}}$. **207.** 1) $x=\frac{t^2}{2p}$, $y=t$; 2) $x=2p\operatorname{ctg}^2 t$,

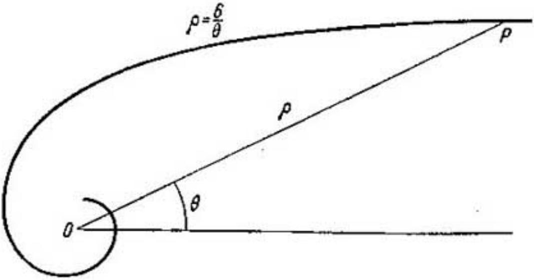


Fig. 79.

$y=2p\operatorname{ctg} t$; 3) $x=\frac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}$, $y=p\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$. **208.** 1) $\left.\begin{array}{l} x=2R\cos^2\theta, \\ y=R\operatorname{sen} 2\theta; \end{array}\right\}$ 2) $\left.\begin{array}{l} x=R\operatorname{sen} 2\theta, \\ y=2R\operatorname{sen}^2\theta; \end{array}\right\}$ 3) $\left.\begin{array}{l} x=2p\operatorname{ctg}^2\theta, \\ y=2p\operatorname{ctg}\theta. \end{array}\right\}$ **209.** 1) $x-y^2=0$; 2) $x^2+y^2-a^2=0$; 3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$; 4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$; 5) $x^2+y^2-2Rx=0$; 6) $x^2+y^2-2Ry=0$; 7) $2px-y^2=0$. **210.** Los puntos M_1, M_3 y M_4 están situados en la recta dada; los puntos M_2, M_5 y M_6 no están situados en ella. **211.** 3, -3, 0, -6 y -12. **212.** 1, -2, 4, -5 y 7. **213.** (6; 0), (0; -4). **214.** (3; -5). **215.** $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 4)$. **216.** (1; -3), (-2; 5), (5; -9) y (8; -17). **217.** $S=17$ unid. cuad. **218.** $C_1(-1; 4)$ ó $C_2\left(\frac{25}{7}; -\frac{36}{7}\right)$. **219.** $C_1(1; -1)$ ó $C_2(-2; -10)$. **220.** 1) $2x-3y+9=0$; 2) $3x-y=0$; 3) $y+2=0$; 4) $3x+4y-12=0$. 5) $2x+y+5=0$; 6) $x+3y-2=0$. **221.** 1) $k=5$, $b=3$; 2) $k=-\frac{2}{3}$; $b=2$; 3) $k=-\frac{5}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$; 4) $k=-\frac{3}{2}$, $b=0$; 5) $k=0$, $b=3$. **222.** 1) $-\frac{5}{3}$; 2) $\frac{3}{5}$. **223.** 1) $2x+3y-7=0$; 2) $3x-2y-4=0$. **224.** $3x+2y=0$, $2x-3y-13=0$. **225.** (2; 1), (4; 2), (-1; 7), (1; 8). **226.** (-2; -1). **227.** $Q(11; -11)$. **228.** 1) $3x-2y-7=0$; 2) $5x+y-7=0$; 3) $8x+12y+5=0$; 4) $5x+7y+9=0$; 5) $6x-30y-7=$

$=0$. 229. a) $k=7$; b) $k=\frac{7}{10}$; c) $k=-\frac{3}{2}$. 230. $5x-2y-33=0$, $x+4y-11=0$, $7x+6y+33=0$. 231. $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=$ $=0$, $2x-3y-18=0$. 232. $x+y+1=0$. 233. $2x+3y-13=0$. 234. $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$. 235. (3; 4). 236. $4x+$ $+y-3=0$. 237. $x-5=0$. 238. La ecuación del lado AB: $2x+y-$ $-8=0$; BC: $x+2y-1=0$; CA: $x-y-1=0$. La ecuación de la

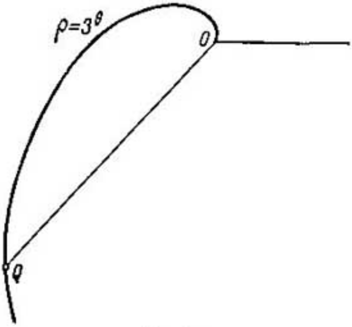


Fig. 80.

mediana trazada por el vértice A: $x-3=0$; por el vértice B: $x+y-$ $-3=0$; por el vértice C: $y=0$. 239. $(-7;\ 0)$, $\left(0;\ +2\frac{1}{3}\right)$. 242. (1; 3). 243. $3x-5y+4=0$; $x+7y-16=0$; $3x-5y-22=0$; $x+7y+$ $+10=0$. 244. Las ecuaciones de los lados del rectángulo: $2x-5y+$ $+3=0$, $2x-5y-26=0$; la ecuación de su diagonal: $7x-3y-33=$ $=0$. 245. $5x+y-3=0$ es la bisectriz del ángulo interno; $x-5y-$ $-11=0$ es la bisectriz del ángulo externo. 246. $x+y-8=0$, $11x-$ $-y-28=0$. Nota. A las condiciones del problema satisfacen dos rectas: una de ellas pasa por el punto P y por la mitad del segmento que une los puntos A y B; la otra pasa por el punto P y es paralela al segmento $\overline{AB}$. 247. $(-12;\ 5)$. 248. $M_1(10;\ -5)$. 249. $P\left(\frac{5}{3};\ 0\right)$. Nota. El problema se puede resolver por el método siguiente: 1) se verifica que los puntos M y N están situados a un lado del eje de abscisas; 2) se halla el punto simétrico a uno de los puntos dados con respecto al eje de abscisas, por ejemplo, el punto N_1, simétrico al punto N; 3) hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos M y N_1; 4) resolviendo simultáneamente la ecuación hallada y la ecuación del eje de abscisas se obtienen las coordenadas del punto buscado. 250. $P(0;\ 11)$. 251. $P(2;\ -1)$. 252. $P(2;\ 5)$. 253. 1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi=0$, las rectas son paralelas; 4) $\varphi=$ $=\operatorname{arctg}\frac{16}{11}$. 254. $x-5y+3=0$ ó $5x+y-11=0$. 255. Ecuaciones de los lados del cuadrado: $4x + 3y + 1 = 0$, $3x - 4y + 32 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$; ecuación de su segunda diagonal: $x + 7y - 31 = 0$. **256.** $3x - 4y + 15 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$. **257.** $2x + y - 16 = 0$, $2x + y + 14 = 0$, $x - 2y - 18 = 0$. **258.** $3x - y + 9 = 0$, $3x + y + 9 = 0$. **259.** $29x - 2y + 33 = 0$. **262.** 1) $3x - 7y - 27 = 0$; 2) $x + 9y + 25 = 0$; 3) $2x - 3y - 13 = 0$; 4) $x - 2 = 0$; 5) $y + 3 = 0$. **264.** Son perpendiculares 1), 3) y 4). **266.** 1) $\varphi = 45°$, 2) $\varphi = 60°$; 3) $\varphi = 90°$. **267.** $M_3(6; -6)$. **268.** $4x - y - 13 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$. **269.** $BC: 3x + 4y - 22 = 0$; $CA: 2x - 7y - 5 = 0$; $CN: 3x + 5y - 23 = 0$. **270.** $x + 2y - 7 = 0$; $x - 4y - 1 = 0$; $x - y + 2 = 0$. N o t a. El problema se puede resolver por el método

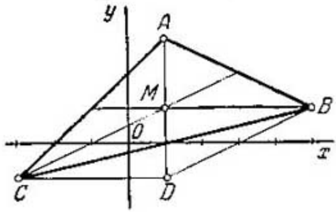


Fig. 81.

siguiente: 1. Se verifica que el vértice A no está situado en ninguna de las rectas dadas. 2. Se halla el punto de intersección de las medianas y se señala con alguna letra, por ejemplo, con M. Conociendo el punto M y el vértice A se puede hallar la ecuación de la tercera mediana. 3. En le recta que pasa por los puntos A y M se traza el segmento $MD = AM$ (fig. 81). Después, conociendo el punto medio M del segmento AD y uno de sus extremos A, se hallan las coordenadas del punto D. 4. Se verifica que el cuadrilátero $BDCM$ es un paralelogramo (sus diagonales se dividen entre sí por la mitad) y se hallan las ecuaciones de las rectas DB y DC. 5. Se calculan las coordenadas de los puntos B y C. 6. Conociendo todos los vértices del triángulo se pueden hallar las ecuaciones de sus lados. **271.** $3x - 5y - 13 = 0$, $8x - 3y + 17 = 0$, $5x + 2y - 1 = 0$. **272.** $2x - y + 3 = 0$, $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$. N o t a. Si en un lado de un ángulo se da un punto A, el punto simétrico al punto A con respecto a la bisectriz de este ángulo estará en el otro lado. **273.** $4x - 3y + 10 = 0$, $7x + y - 20 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$. **274.** $4x + 7y - 1 = 0$, $y - 3 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$. **275.** $3x + 7y - 5 = 0$, $3x + 2y - 10 = 0$, $9x + 11y + 5 = 0$. **276.** $x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$. **277.** $x + y - 7 = 0$, $x + 7y + 5 = 0$, $x - 8y + 20 = 0$. **278.** $2x + 9y - 65 = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$. **279.** $x + 2y = 0$, $23x + 25y = 0$. **280.** $8x - y - 24 = 0$. **283.** $3x + y = 0$, $x - 3y = 0$. **284.** $3x + 4y - 1 = 0$, $7x + 24x - 61 = 0$. **285.** 1) $a = -2$, $5y - 33 = 0$; 2) $a_1 = -3$, $x - 56 = 0$; $a_2 = 3$, $5x + 8 = 0$; 3) $a_1 = 1$, $3x - 8y = 0$; $a_2 = \frac{5}{8}$; $33x - 56y = 0$. **286.** $m = 7$, $n = -2$, $y + 3 = 0$. **287.** $m = -4$, $n = 2$; $x -$

$-5=0$. **288.** 1) $(5;\ 6)$; 2) $(3;\ 2)$; 3) $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right)$; 4) $\left(2;\ -\frac{1}{11}\right)$; 5) $\left(-\frac{5}{3};\ 2\right)$. **291.** 1) Para $a \neq 3$; 2) para $a=3$ y $b \neq 2$; 3) para $a=3$ y $b=2$. **292.** 1) $m=-4$, $n \neq 2$ ó $m=4$, $n \neq -2$; 2) $m=-4$, $n=2$ ó $m=4$, $n=-2$; 3) $m=0$, n es arbitrario. **293.** $m=\frac{7}{12}$. **294.** A las condiciones del problema satisfacen dos valores de m: $m_1=0$,

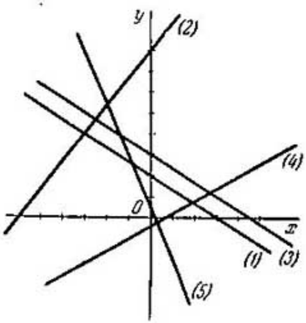


Fig. 82.

$_2=6$. **295.** 1) se cortan; 2) no se cortan; 3) no se cortan. **298.** $a=-7$. **299.** 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{8}=1$; 3) $\frac{x}{9/2}+\frac{y}{3}=1$; 4) $\frac{x}{2/3}+\frac{y}{-2/5}=1$; 5) $\frac{x}{1/5}+\frac{y}{1/2}=1$ (fig. 82). **300.** 6 unid. cuad. **301.** $x+y+4=0$. **302.** $x+y-5=0$, $x-y+1=0$, $3x-2y=0$. **303.** Solución. Escribimos la ecuación «segmentaria» de la recta buscada

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{1}$$

El problema consiste en hallar los valores de los parámetros a y b. El punto $C(1;\ 1)$ está situado en la recta buscada y, por consiguiente, sus coordenadas satisfacen a la ecuación (1). Sustituyendo en la ecuación (1) las coordenadas variables por las coordenadas del punto C y reduciendo a un común denominador tendremos:

$$a+b=ab. \tag{2}$$

Señalemos ahora que el área R del triángulo que intercepta la recta en el ángulo coordenado se determina por la fórmula $\pm S=\frac{ab}{2}$; $+S$ cuando los segmentos a y b son de un mismo signo, y $-S$ cuando estos segmentos son de signo contrario. Según las

condiciones del problema tenemos:
$$ab=\pm 4. \tag{3}$$
Resolviendo el sistema de ecuaciones (2) y (3): $\left.\begin{matrix} a+b=4, \\ ab=4; \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} a+b=-4, \\ ab=-4; \end{matrix}\right\}$ obtenemos: $a_1=2$, $b_1=2$; $a_2=-2+2\sqrt{2}$, $b_2=$ $=-2-2\sqrt{2}$; $a_3=-2-2\sqrt{2}$, $b_3=-2+2\sqrt{2}$. Así pues, a las condiciones del problema satisfacen tres rectas. Sustituyendo en la ecuación (1) los valores obtenidos de los parámetros a y b tenemos: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$, $\frac{x}{-2+2\sqrt{2}}+\frac{y}{-2-2\sqrt{2}}=1$, $\frac{x}{-2-2\sqrt{2}}+$ $+\frac{y}{-2+2\sqrt{2}}=1$. Después de simplificar estas ecuaciones obtenemos: $x+y-2=0$, $(1+\sqrt{2})\,x+(1-\sqrt{2})\,y-2=0$, $(1-\sqrt{2})\,x+$ $+(1+\sqrt{2})y-2=0$. **304.** A las condiciones del problema satisfacen las tres rectas siguientes: $(\sqrt{2}+1)\,x+(\sqrt{2}-1)\,y-10=0$, $(\sqrt{2}-1)\,x+$ $+(\sqrt{2}+1)\,y+10=0$, $x-y-10=0$. **305.** $3x-2y-12=0$, $3x-8y+$ $+24=0$. **306.** $x+3y-30=0$, $3x+4y-60=0$, $3x-y-30=0$, $x-$ $-12y+60=0$. **307.** A las condiciones del problema satisfacen dos rectas, que se cortan con los ejes coordenados respectivamente en los puntos (2; 0), (0; -3) y (-4; 0), $\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$. **308.** $S \geqslant 2x_1y_1$. **309.** Las ecuaciones de las rectas 1), 4), 6) y 8) han sido dadas en la formula normal. **310.** 1) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$, 2) $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-10=0$, 3) $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-1=0$, 4) $-x-2=0$, 5) $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-1=0$. **311.** 1) $\alpha=0$, $p=2$; 2) $\alpha=\pi$, $p=2$; 3) $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $p=3$; 4) $\alpha=-\frac{\pi}{2}$, $p=3$; 5) $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $p=3$; 6) $\alpha=-\frac{\pi}{4}$, $p=\sqrt{2}$; 7) $\alpha=-\frac{2}{3}\pi$, $p=1$; 8) $\alpha=-\beta$, $p=q$; 9) $\alpha=\beta-\pi$, $p=q$. **312.** 1) $\delta=-3$, $d=3$; 2) $\delta=1$, $d=1$; 3) $\delta=-4$, $d=4$; 4) $\delta=0$, $d=0$, el punto Q está situado en la recta. **313.** 1) A un lado; 2) a diversos lados; 3) a un lado; 4) a un lado; 5) a diversos lados. **314.** 5 unid. cuad. **315.** 6 unid. cuad. **318.** Es convexo. **319.** No es convexo. **320.** 4. **321.** 3. **322.** 1) $d=2{,}5$; 2) $d=3$; 3) $d=0{,}5$; 4) $d=3{,}5$. **323.** 49 unid. cuad. **325.** En la razón 2 : 3, a partir de la segunda recta. **326.** Solución. El problema de trazar por el punto P rectas a la distancia 5 de punto Q es equivalente al problema de trazar por el punto P tangentes a la circunferencia de radio 5 con el centro en Q. Calculemos la distancia QP; $QP=\sqrt{(2-1)^2+(7-2)^2}=\sqrt{26}$. Se ve que la distancia QP es mayor que el radio de la circunferencia; por lo tanto, desde el punto P se pueden trazar dos tangentes a esta circunferencia. Hallemos estas ecuaciones. La ecuación de cualquier recta que pasa por el punto P es de la forma
$$y-7=k\,(x-2) \tag{1}$$
o $kx-y+7-2k=0$, en donde k es por ahora un coeficiente angular indeterminado. Reduzcamos esta ecuación a la forma normal. Con

esto fin, hallamos el factor normalizador

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Multiplicando la ecuación (1) por μ, obtenemos la ecuación normal buscada:

$$\frac{kx-y+7-2k}{\pm\sqrt{k^2+1}} = 0. \qquad (2)$$

Sustituyendo las coordenadas x e y por las del punto Q en el primer miembro de la ecuación (2), tenemos: $\frac{|k-2+7-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$. Resolviendo esta ecuación hallamos dos valores de k: $k_1 = -\frac{5}{12}$, $k_2 = 0$. Sustituyendo en la ecuación (1) el coeficiente angular por los valores hallados, obtenemos las ecuaciones buscadas: $y-7 = -\frac{5}{12}(x-2)$ ó $5x+12y-94=0$ e $y-7=0$. El problema queda resuelto. **327.** $7x+24y-134=0$, $x-2=0$. **328.** $3x+4y-13=0$. **330.** $8x-15y+9=0$. **331.** $3x-4y-25=0$, $3x-4y+5=0$. **332.** A las condiciones del problema satisfacen dos cuadrados situados simétricamente con respecto al lado AB. Las ecuaciones de los lados de uno de ellos son: $4x+3y-8=0$, $4x+3y+17=0$, $3x-4y-6=0$, $3x-4y+19=0$. Las ecuaciones de los lados del otro son: $4x+3y-8=0$, $4x+3y-33=0$, $3x-4y-6=0$, $3x-4y+19=0$. **333.** A las condiciones del problema satisfacen dos cuadrados; los otros lados de uno de ellos están situados en las rectas: $3x+4y-11=0$, $4x-3y-23=0$, $3x+4y-27=0$; los otros lados del segundo están en las rectas: $3x+4y-11=0$, $4x-3y-23=0$, $3x+4y+5=0$. **334.** $3x+4y+6=0$, $3x+4y-14=0$ ó $3x+4y+6=0$, $3x+4y+26=0$. **335.** $12x-5y+61=0$, $12x-5y+22=0$ ó $12x-5y+61=0$, $12x-5y+100=0$. **336.** $M(2, 3)$. **337.** $4x+y+5=0$, $y-3=0$. **338.** 1) $3x-y+2=0$; 2) $x-2y+5=0$; 3) $20x-8y-9=0$. **339.** 1) $4x-4y+3=0$, $2x+2y-7=0$; 2) $4x+1=0$, $8y+13=0$; 3) $14x-8y-3=0$, $64x+112y-23=0$. **340.** $x-3y-5=0$, $3x+y-5=0$. *Nota.* Las rectas buscadas pasan por el punto P y son perpendiculares a las bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas dadas. **341.** 1) En un ángulo; 2) en ángulos adyacentes; 3) en ángulos opuestos. **342.** 1) En ángulos opuestos; 2) en ángulos adyacentes; 3) en un ángulo. **343.** Dentro del triángulo. **344.** Fuera del triángulo. **345.** El ángulo agudo. **346.** El ángulo obtuso. **347.** $8x+4y-5=0$. **348.** $x+3y-2=0$. **349.** $3x-19=0$. **350.** $10x-10y-3=0$. **351.** $7x+56y-40=0$. **352.** $x+y+5=0$. **353.** $S(2; -1)$. **354.** 1) $3x+2y-7=0$, 2) $2x-y=0$; 3) $y-2=0$; 4) $x-1=0$; 5) $4x+3y-10=0$; 6) $3x-2y+1=0$. **355.** $74x+13y+39=0$. **356.** $x-y-7=0$. **357.** $7x+19y-2=0$. **358.** $x-y+1=0$. **359.** $4x-5y+22=0$, $4x+y-18=0$, $2x-y+1=0$. **360.** $x-5y+13=0$, $5x+y+13=0$. **361.** $5x-y-5=0$ (BC), $x-y+3=0$ (AC), $3x-y-1=0$ (CN). **362.** $x-5y-7=0$, $5x+y+17=0$, $10x+7y-13=0$. **363.** $2x+y+8=0$, $x+2y+1=0$. **366.** $C=-29$. **367.** $a \neq -2$. **368.** Las ecuaciones de los lados del cuadrado: $4x+3y-14=0$, $3x-4y+27=0$, $3x-4y+2=0$, $4x+3y+11=0$; la ecuación de su segunda diagonal: $7x-y+13=0$. **369.** $x+y+5=0$. **370.** $x+y+2=0$, $x-y-4=0$, $3x+y=0$. **371.** $2x+y-6=0$, $9x+2y+18=0$. **372.** $3x-y+1=0$. **374.** $3x-4y+20=0$, $4x+3y-15=0$. **375.** $x+5y-13=0$, $5x-y+13=0$. **376.** A las condiciones del problema satisfacen dos rectas: $7x+y-9=0$, $2x+y+1=0$. **377.** $5x-2y-7=0$. **378.** AC: $3x+8y-7=0$, BD: $8x-3y+7=0$. **379.** $4x+y+5=0$, $x-2y-1=0$, $2x+5y-11=0$. **381.** 1) $\rho\,\mathrm{sen}\,(\beta-\theta)=p$, $\rho\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=3$; 2) $\rho\cos(\theta-\alpha)=a\cos\alpha$, $\rho\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=-1$; 3) $\rho\,\mathrm{sen}\,(\beta-\theta)=a\,\mathrm{sen}\,\beta$, $\rho\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=3$. **382.** $\rho\,\mathrm{sen}\,(\beta-\theta)=\rho_1\,\mathrm{sen}\,(\beta-\theta_1)$. **383.** $\rho\cos(\theta-\alpha)=\rho_1\cos(\theta_1-\alpha)$. **384.** $\dfrac{\rho\,\mathrm{sen}\,(\theta-\theta_1)}{\rho_2\,\mathrm{sen}\,(\theta_2-\theta_1)}=\dfrac{\sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1)}}{\sqrt{\rho_2^2+\rho_1^2-2\rho_2\rho_1\cos(\theta_2-\theta_1)}}$. **385.** 1) $x^2+y^2=9$; 2) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; 3) $(x-6)^2+(y+8)^2=100$; 4) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$; 5) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$; 6) $x^2+y^2=16$; 7) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$; 8) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$; 9) $(x-1)^2+y^2=1$; 10) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$. **386.** $(x-3)^2+(y+1)^2=38$. **387.** $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ y $(x-2)^2+(y-3)^2=5$. **388.** $(x+2)^2+(y+1)^2=20$. **389.** $(x-5)^2+(y+2)^2=20$ y $\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{22}{5}\right)^2=20$. **390.** $(x-1)^2+(y+2)^2=16$. **391.** $(x+6)^2+(y-3)^2=50$ y $(x-29)^2+(y+2)^2=800$. **392.** $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ y $\left(x-\frac{22}{5}\right)^2+\left(y+\frac{31}{5}\right)^2=\frac{289}{5}$. **393.** $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{81}{13}$, $(x+8)^2+(y+7)^2=\frac{35}{13}$. **394.** $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ y $\left(x+\frac{202}{49}\right)^2+\left(y-\frac{349}{49}\right)^2=\left(\frac{185}{49}\right)^2$. **395.** $\left(x+\frac{10}{7}\right)^2+\left(y+\frac{25}{7}\right)^2=1$ y $\left(x-\frac{30}{7}\right)^2+\left(y-\frac{5}{7}\right)^2=1$. **396.** $(x-5)^2+y^2=16$, $(x+15)^2+y^2=256$, $\left(x-\frac{35}{3}\right)^2+\left(y-\frac{40}{3}\right)^2=\left(\frac{32}{3}\right)^2$ y $\left(x-\frac{35}{3}\right)^2+\left(y+\frac{40}{3}\right)^2=\left(\frac{32}{3}\right)^2$. **397.** Las ecuaciones 1), 2), 4), 5), 8) y 10) determinan circunferencias; 1) $C(5;\ -2)$, $R=5$; 2) $C(-2;\ 0)$, $R=8$; 3) la ecuación determina un punto único $(5;\ -2)$; 4) $C(0;\ 5)$, $R=\sqrt{5}$; 5) $C(1;\ -2)$, $R=5$; 6) la ecuación no determina en el plano ninguna figura geométrica; 7) la ecuación determina un punto único $(-2;\ 1)$; 8) $C\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$, $R=\frac{1}{2}$; 9) la ecuación no determina en el plano ninguna figura geométrica; 10) $C\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$; $R=\frac{1}{2}$. 398. 1) Una semicircunferencia de radio $R=3$ con el centro en el origen de coordenadas, situada en el semiplano superior (fig. 83);

2) una semicircunferencia de radio $R=5$ con el centro en el origen de coordenadas, situada en el semiplano inferior (fig. 84); 3) una semicircunferencia de radio $R=2$ con el centro en el origen de coordenadas, situada en el semiplano izquierdo (fig. 85); 4) una semicircunferencia de radio $R=4$ con el centro en el origen de coordenadas, situada en el semiplano derecho (fig. 86); 5) una semicircunferencia de radio $R=8$ con el centro C (0; 15), situada sobre la recta $y-15=0$ (fig. 87); 6) una semicircunferencia de radio $R=8$ con el centro en C (0; 15), situada bajo la recta $y-15=0$ (fig. 88); 7) una semicircunferencia de radio $R=3$ con el centro $C(-2;0)$, situada a la izquierda de la recta $x+2=0$ (fig. 89); 8) una semicircunferencia de radio $R=3$ con el centro $C(-2;\ 0)$, situada a la derecha de la recta $x+2=0$ (fig. 90); 9) una semicircunferencia de radio $R=5$ con el centro $C(-2;\ -3)$, situada bajo la recta $y+3=0$ (fig.91); 10) una semicircunferencia de radio $R=7$ con el centro $C(-5;\ -3)$, situada a la derecha de la recta $x+5=0$ (fig. 92). **399.** 1) Fuera de la circunferencia; 2) en la circunferencia; 3) dentro de la circunferencia; 4) en la circunferencia; 5) dentro de la circunferencia. **400.** 1) $x+5y-3=0$; 2) $x+2=0$; 3) $3x-y-9=0$; 4) $y+1=0$. **401.** $2x-5y+19=0$. **402.** a) 7; b) 17; c) 2. **403.** $M_1(-1;\ 5)$ y $M_2(-2;\ -2)$. **404.** 1) Se corta con la circunferencia; 2) es tangente a la circunferencia; 3) pasa por fuera de la circunferencia. **405.** 1) $|k|<\frac{3}{4}$; 2) $k=\pm\frac{3}{4}$; 3) $|k|>\frac{3}{4}$. **406.** $\frac{b^2}{1+k^2}=R^2$. **407.** $2x+y-3=0$. **408.** $11x-7y-69=0$. **409.** $2\sqrt{5}$. **410.** $2x-3y+8=0$, $3x+2y-14=0$. **412.** $x^2+y^2+6x-9y-17=0$. **413.** $13x^2+13y^2+3x+71y=0$. **414.** $7x-4y=0$. **415.** 2. **416.** 10. **417.** $(x+3)^2+(y-3)^2=10$. **418.** $x-2y+5=0$. **419.** $3x-4y+43=0$. **420.** $M_1\left(-\frac{7}{2};\ \frac{5}{4}\right)$; $d=2\sqrt{5}$. **421.** $x_1x+y_1y=R^2$. **422.** $(x_1-\alpha)(x-\alpha)+(y_1-\beta)(y-\beta)=R^2$. **423.** 45°. **424.** 90°. **425.** $(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2=R_1^2+R_2^2$. **427.** $x-2y-5=0$ y $2x-y-5=0$. **428.** $2x+y-8=0$ y $x-2y+11=0$. **429.** $2x+y-5=0$, $x-2y=0$. **430.** 90°. **431.** $x+2y+5=0$. **432.** $d=7{,}5$. **433.** $d=6$. **434.** $d=\sqrt{10}$. **435.** 3. **436.** $2x+y-1=0$ y $2x+y+19=0$. **437.** $2x+y-5=0$ y $2x+y+5=0$. **438.** $\rho=2R\cos(\theta-\theta_0)$ (fig. 93). **439.** 1) $\rho=2R\cos\theta$ (fig. 94); 2) $\rho=-2R\cos\theta$ (fig. 95); 3) $\rho=2R$ sen θ (fig. 96); 4) $\rho=-2R$ sen θ (fig. 97). **440.** 1) (2; 0) y $R=2$; 2) $\left(\frac{3}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ y $R=\frac{3}{2}$; 3) $(1;\ \pi)$ y $R=1$; 4) $\left(\frac{5}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right)$ y $R=\frac{5}{2}$; 5) $\left(3;\ \frac{\pi}{3}\right)$ y $R=3$; 6) $\left(4;\ -\frac{5}{6}\pi\right)$ y $R=4$; 7) $\left(4;\ -\frac{\pi}{6}\right)$ y $R=4$. **441.** 1) $x^2+y^2-3x=0$; 2) $x^2+y^2+4y=0$; 3) $x^2+y^2-x+y=0$. **442.** 1) $\rho=\cos\theta$; 2) $\rho=-3\cos\theta$; 3) $\rho=5$ sen θ; 4) $\rho=$ sen θ; 5) $\rho=\cos\theta+$ sen θ. **443.** $\rho=R\sec(\theta-\theta_0)$. **444.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 5) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$;

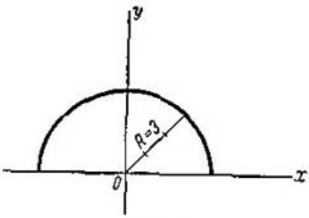


Fig. 83.

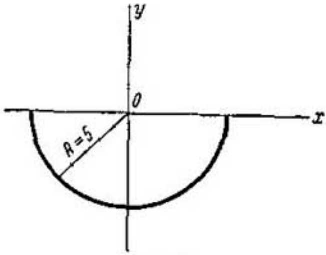


Fig. 84.

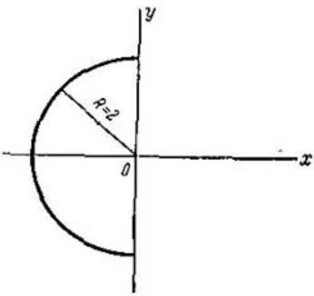


Fig. 85.

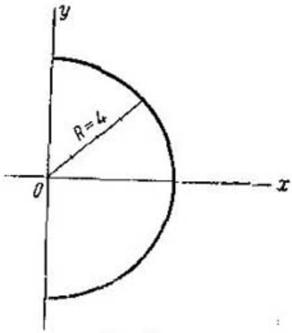


Fig. 86.

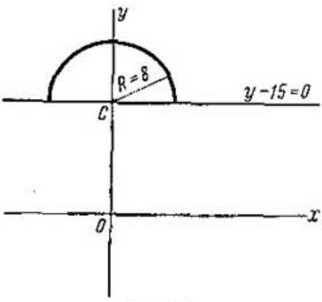


Fig. 87

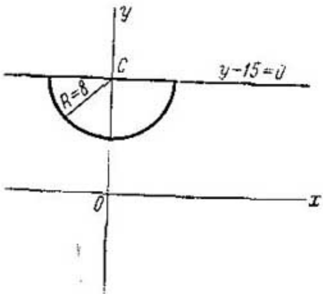


Fig. 88.

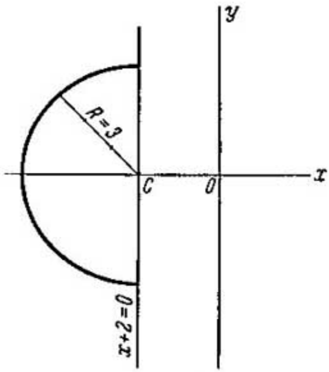


Fig. 89.

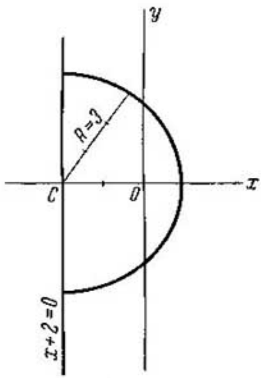


Fig. 90.

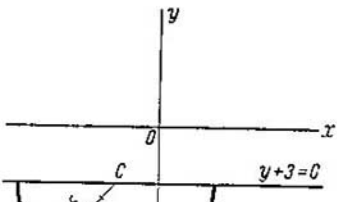


Fig. 91.

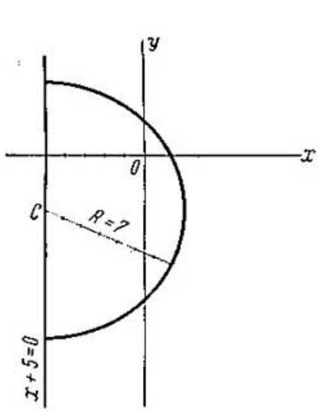


Fig. 92.

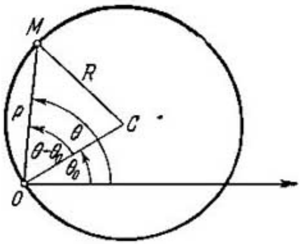


Fig. 93.

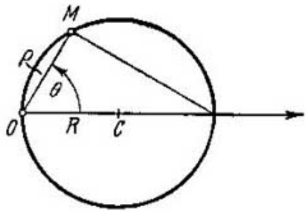


Fig. 94.

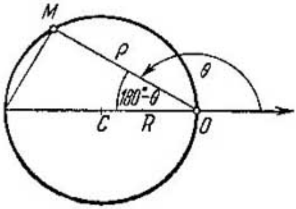


Fig. 95.

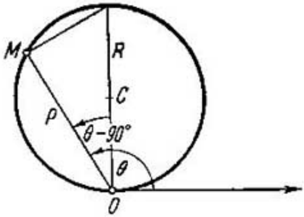


Fig. 96.

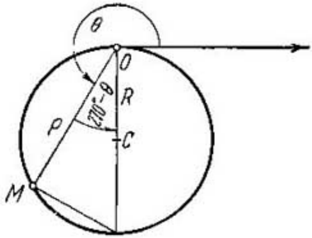


Fig. 97.

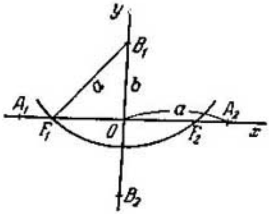


Fig. 98.

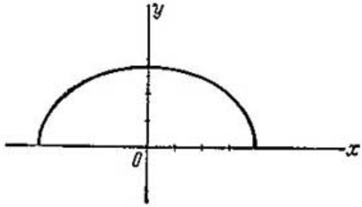


Fig. 99.

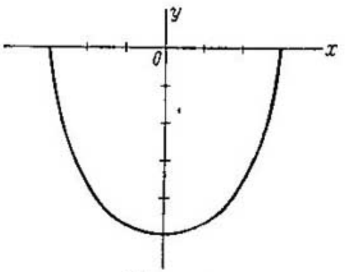


Fig. 100.

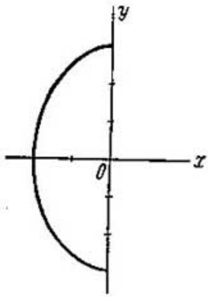


Fig. 101.

6) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; 7) $\frac{x^2}{5}+y^2=1$; 8) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 9) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$ ó $\frac{x^2}{117/4}+\frac{y^2}{9}=1$; 10) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. **445.** 1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; 6) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$. **446.** 1) 4 y 3; 2) 2 y 1; 3) 5 y 1; 4) $\sqrt{15}$ y $\sqrt{3}$; 5) $\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$; 7) 1 y $\frac{1}{2}$; 8) 1 y 4; 9) $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$; 10) $\frac{1}{3}$ y 1. **447.** 1) 5 y 3; 2) $F_1(-4; 0)$; $F_2(4; 0)$; 3) $\varepsilon=\frac{4}{5}$; 4) $x=\pm\frac{25}{4}$. **448.** 16 unid. cuad. **449.** 1) $\sqrt{5}$ y 3; 2) $F_1(0; -2)$, $F_2(0; 2)$; 3) $\varepsilon=\frac{2}{3}$; 4) $y=\pm\frac{9}{2}$. **450.** $\frac{4\sqrt{5}}{45}$ unid. cuad. **451.** $\frac{b^2}{c}$. **452.** Véase la fig. 98.

453. $\left(-3;\ -\frac{8}{5}\right)$, $\left(-3;\ \frac{8}{5}\right)$. 454. Los puntos A_1 y A_6 están en la elipse; A_2, A_4 y A_8 están dentro de la elipse; A_3, A_5, A_7, A_9 y A_{10} están fuera de la elipse. 455. 1) La mitad de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ situada en el semiplano superior (fig. 99); 2) la mitad de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, situada en el semiplano inferior (fig 100); 3) la mitad de la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, situada en el semiplano izquierdo (fig. 101); 4) la mitad de la elipse $x^2+\frac{y^2}{49}=1$, situada en el semiplano derecho (fig. 102). 456. 15. 457. 8. 458. $5x+12y+10=0$, $x-2=0$. 459. $r_1=2{,}6$, $r_2=7{,}4$. 460. 20. 461. 10.

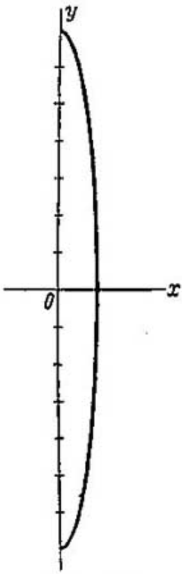


Fig. 102.

462. $(-5;\ 3\sqrt{3})$ y $(-5;\ -3\sqrt{3})$. 463. $\left(-2;\ \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ y $\left(-2;\ -\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$. 464. 3 y 7. 465. 1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$; 4) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$; 5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$; 6) $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{192}=1$; 7) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$. 466. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. 467. $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 468. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. 469. $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$. 470. $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$. 471. 1) $C\ (3;\ -1)$; los semiejes son: 3 y $\sqrt{5}$, $\varepsilon=\frac{2}{3}$; las ecuaciones de las directrices son: $2x-15=0$, $2x+3=0$; 2) $C\ (-1;\ 2)$; 2), los semiejes son: 5 y 4, $\varepsilon=\frac{3}{5}$; las ecuaciones de las directrices son: $3x-22=0$; $3x+28=0$; 3) $C\ (1;\ -2)$; los semiejes son: $2\sqrt{3}$ y 4, $\varepsilon=\frac{1}{2}$; las ecuaciones de las directrices son: $y-6=0$, $y+10=0$. 472. 1) La mitad de la elipse $\frac{(x-3)^2}{25}+$

$+\frac{(y+7)^2}{4}=1$ situada sobre la recta $y+7=0$ (fig. 103); 2) la mitad de la elipse $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$ situada bajo la recta $y-1=0$ (fig. 104); 3) la mitad de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$ situada en el semiplano izquierdo (fig. 105); 4) la mitad de la elipse $\frac{(x+5)^2}{4}+$ $+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ situada a la derecha de la recta $x+5=0$ (fig. 106).

473. 1) $\frac{(x-2)^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; 2) $2x^2-2xy+2y^2-3=0$; 3) $68x^2+48xy+$ $+82y^2-625=0$; 4) $11x^2+2xy+11y^2-48x-48y-24=0$. **474.** $5x^2+$ $+9y^2+4x-18y-55=0$. **475.** $4x^2+3y^2+32x-14y+59=0$. **476.** $4x^2+5y^2+14x+40y+81=0$. **477.** $7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0$. **478.** $17x^2+8xy+23y^2+30x-40y-175=0$. **479.** $x^2+2y^2-6x+24y+$ $+31=0$. **480.** $\left(4;\ \frac{3}{2}\right)$, $(3;\ 2)$. **481.** $\left(3;\ \frac{8}{5}\right)$, la recta es tangente a la elipse. **482.** La recta pasa por fuera de la elipse. **483.** 1) La recta se corta con la elipse; 2) pasa por fuera de la elipse; 3) es tangente a la elipse. **484.** 1) Se corta con la elipse, si $|m|<5$; 2) es tangente a la elipse, si $m=\pm 5$; 3) pasa por fuera de la elipse, si $|m|>5$. **485.** $k^2a^2+b^2=m^2$. **486.** $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$. **488.** $3x+2y-$ $-10=0$ y $3x+2y+10=0$. **489.** $x+y-5=0$ y $x+y+5=0$. **490.** $2x-y-12=0$, $2x-y+12=0$; $d=\frac{24\sqrt{5}}{5}$. **491.** $M_1(-3;\ 2)$; $d=\sqrt{13}$. **492.** $x+y-5=0$ y $x+4y-10=0$. **493.** $4x-5y-10=0$. **494.** $d=18$. **495.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ó $\frac{x^2}{80}+\frac{4y^2}{5}=1$. **496.** $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$. **499.** $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$. Nota. Aplicar la propiedad de la elipse enunciada en el problema 498. **500.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. Nota. Aplicar la propiedad de la elipse enunciada en el problema 498. **502.** $2x+11y-10=0$. Nota. Aplicar la propiedad de la elipse enunciada en el problema 501. **503.** $(3;\ 2)$ y $(3;\ -2)$. **504.** $R=\frac{mn\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ **505.** $10{,}5\sqrt{3}$. **506.** $\varphi=60°$. **507.** 16,8. **508.** 60°. **509.** En una elipse, cuya ecuación es $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **510.** $x^2+y^2=9$. **511.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$. **512.** $q=\frac{4}{3}$. **513.** $q=$ $=\frac{2}{3}$. **514.** $q_1=\frac{4}{3}$, $q_2=\frac{4}{5}$. **515.** 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 5) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; 6) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$; 7) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 8) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 9) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. **516.** 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{324}=$

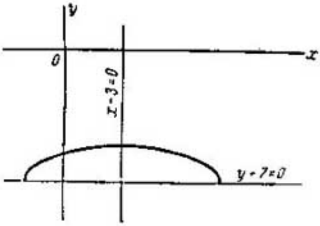


Fig. 103.

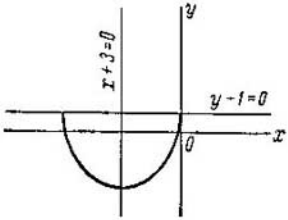


Fig. 104.

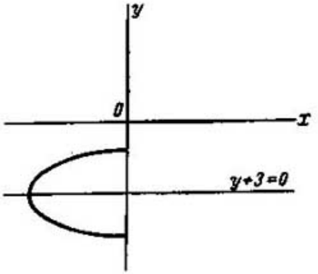


Fig. 105.

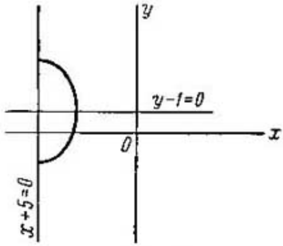


Fig. 106.

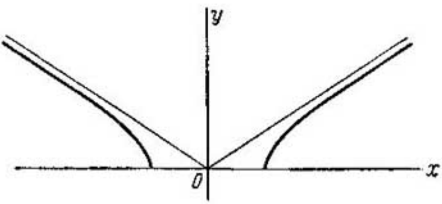


Fig. 107.

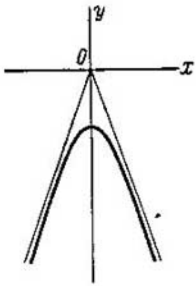


Fig. 108.

$=-1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 3) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$; 4) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$; 5) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$. **517.** 1) $a=3$, $b=2$; 2) $a=4$, $b=1$; 3) $a=4$, $b=2$. 4) $a=1$, $b=1$; 5) $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{5}{3}$; 6) $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{4}$; 7) $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{8}$. **518.** 1) $a=3$, $b=4$; 2) $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$, 3) $\varepsilon=\frac{5}{3}$; 4) $y=\pm\frac{4}{3}x$; 5) $x=\pm\frac{9}{5}$. **519.** 1) $a=3$, $b=4$; 2) $F_1(0;\ -5)$, $F_2(0;\ 5)$; 3) $\varepsilon=\frac{5}{4}$; 4) $y=\pm\frac{4}{3}x$; 5) $y=\pm\frac{16}{5}$. **520.** 12 unid. cuad. **521.** 1) La parte de la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ situada en el semiplano superior (fig. 107); 2) la rama de la hipérbola $x^2-\frac{y^2}{9}=-1$ situada en

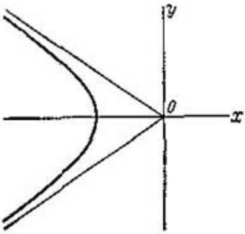


Fig. 109.

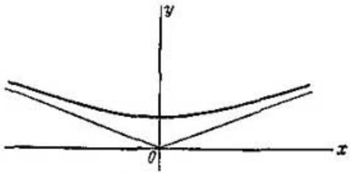


Fig. 110.

el semiplano inferior (fig. 108); 3) la rama de la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ situada en el semiplano izquierdo (fig. 109); 4) la rama de la hipérbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=-1$ situada en el semiplano superior (fig. 110). **522.** $x+4\sqrt{5}y+10=0$ y $x-10=0$. **523.** $r_1=2\frac{1}{4}$, $r_2=10\frac{1}{4}$. **524.** 8. **525.** 12. **526.** 10. **527.** 27. **528.** $\left(10;\ \frac{9}{2}\right)$ y $\left(10;\ -\frac{9}{2}\right)$. **529.** $(-6;\ 4\sqrt{3})$ y $(-6;\ -4\sqrt{3})$. **530.** $2\frac{1}{12}$ y $26\frac{1}{12}$. **531.** Véase la fig. 111. **532.** 1) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$; 2) $x^2-y^2=16$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ ó $\frac{x^2}{^{61}/_9}-\frac{y^2}{^{305}/_{16}}=1$; 4) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **533.** $\varepsilon=\sqrt{2}$. **534.** $\varepsilon=\sqrt{3}$. **535.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. **536.** $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$. **540.** 1) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-$

$-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$; 2) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$. **541.** 1) C (2; -3), $a=3$, $b=4$, $e=5/3$; las ecuaciones de las directrices: $5x-1=0$, $5x-19=0$; las ecuaciones de las asíntotas: $4x-3y-17=0$, $4x+3y+1=0$; 2) C (-5; 1), $a=8$, $b=6$, $e=1{,}25$; las ecuaciones de las directrices: $x=-11{,}4$ y $x=1{,}4$; las ecuaciones de las asíntotas: $3x+4y+11=0$ y $3x-4y+19=0$; 3) C (2; -1), $a=3$, $b=4$, $e=1{,}25$; las ecuaciones de las directrices: $y=-4{,}2$, $y=2{,}2$; las ecuaciones de las asíntotas: $4x+3y-5=0$, $4x-3y-11=0$. **542.** 1) La parte de la hipérbola

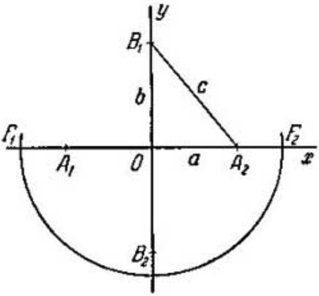


Fig. 111.

$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$ situada sobre la recta $y+1=0$ (fig. 112); 2) la rama de la hipérbola $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-7)^2}{9}=-1$ situada bajo la recta $y-7=0$ (fig. 113); 3) la rama de la hipérbola $\frac{(x-9)^2}{16}-$ $-\frac{(y+2)^2}{4}=1$ situada a la izquierda de la recta $x-9=0$ (fig. 114); 4) la parte de la hipérbola $\frac{(x-5)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=-1$ situada a la izquierda de la recta $x-5=0$ (fig. 115). **543.** 1) $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$; 2) $24xy+7y^2-144=0$; 3) $2xy+2x-2y+7=0$. **544.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **545.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=-1$. **546.** $x^2-4y^2-6x-24y-47=0$. **547.** $7x^2-$ $-6xy-y^2+26x-18y-17=0$. **548.** $91x^2-100xy+16y^2-136x+$ $+86y-47=0$. **549.** $xy=\frac{a^2}{2}$, si los ejes antiguos giran un ángulo de $-45°$; $xy=-\frac{a^2}{2}$, si giran un ángulo de $+45°$. **550.** 1) C (0; 0), $a=b=6$; las ecuaciones de las asíntotas: $x=0$ e $y=0$; 2) C (0; 0), $a=b=3$; las ecuaciones de las asíntotas: $x=0$ e $y=0$; 3) C (0; 0),

$a=b=5$; las ecuaciones de las asíntotas: $x=0$ e $y=0$. 551. (6; 2) y $\left(\frac{14}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. 552. $\left(\frac{25}{4}; 3\right)$, la recta es tangente a la hipérbola. 553. La recta pasa por fuera de la hipérbola. 554. 1) Es tangente a la hipérbola; 2) se corta con la hipérbola en dos puntos; 3) pasa por fuera de la hipérbola. 555. 1) Se corta con la hipérbola, si $|m|>4{,}5$; 2) es tangente a la hipérbola, si $m=\pm 4{,}5$; 3) pasa por fuera de la hipérbola, si $|m|<4{,}5$. 556. $k^2a^2-b^2=m^2$. 557. $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$. 559. $3x-4y-10=0$, $3x-4y+10=0$. 560. $10x-3y-32=0$, $10x-3y+32=0$. 561. $x+2y-4=0$; $x+2y+4=0$; $d=\frac{8\sqrt{5}}{5}$. 562. $M_1(-6; 3)$; $d=\frac{11}{13}\sqrt{13}$. 563. $5x-3y-16=0$, $13x+5y+48=0$. 564. $2x+5y-16=0$. 565. $d=\frac{17}{10}\sqrt{10}$. 566. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{45}=1$, $\frac{3x^2}{10}-\frac{4y^2}{45}=1$. 567. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$. 568. $x=-4$, $x=4$, $y=-1$ e $y=1$. 572. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$. 573. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 575. $2x+11y+6=0$. Nota. Aplicar la propiedad de la hipérbola enunciada en el problema 574. 577. $x^2-y^2=16$. 578. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 579. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$. 580. $q=\frac{2}{3}$. 581. $q=2$. 582. $q_1=2$; $q_2=\frac{5}{7}$. 583. 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-x$; 3) $x^2=\frac{1}{2}y$; 4) $x^2=-6y$. 584. 1) $p=3$; en el semiplano derecho, simétricamente al eje Ox; 2) $p=2{,}5$; en el semiplano superior, simétricamente al eje Oy; 3) $p=2$; en el semiplano izquierdo, simétricamente al eje Ox; 4) $p=\frac{1}{2}$; en el semiplano inferior, simétricamente al eje Oy. 585. 1) $y^2=4x$; 2) $y^2=-9x$; 3) $x^2=y$; 4) $x^2=-2y$. 586. 40 cm. 587. $x^2=-12y$. 588. 1) La parte de la parábola $y^2=4x$ situada en el primer ángulo coordenado (fig. 116); 2) la parte de la parábola $y^2=-x$ situada en el segundo ángulo coordenado (fig. 117); 3) la parte de la parábola $y^2=-18x$ situada en el tercer ángulo coordenado (fig. 118); 4) la parte de la parábola $y^2=4x$ situada en el cuarto ángulo coordenado (fig. 119); 5) la parte de la parábola $x^2=5y$ situada en el primer ángulo coordenado (fig. 120); 6) la parte de la parábola $x^2=-25y$ situada en el tercer ángulo coordenado (fig. 121); 7) la parte de la parábola $x^2=3y$ situada en el segundo ángulo coordenado (fig. 122); 8) la parte de la parábola $x^2=-16y$ situada en el cuarto ángulo coordenado (fig. 123). 589. $F(6; 0)$, $x+6=0$. 590. 12. 591. 6. 592. (9; 12); (9; −12). 593. $y^2=-28x$. 594. 1) $(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)$; 2) $(y-\beta)^2=-2p(x-\alpha)$. 595. 1) $(x-\alpha)^2=2p(y-\beta)$; 2) $(x-\alpha)^2=-2p(y-\beta)$. 596. 1) $A(2; 0)$, $p=2$, $x-1=0$; 2) $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, $p=3$, $6x-13=0$; 3) $A\left(0; -\frac{1}{3}\right)$, $p=3$,

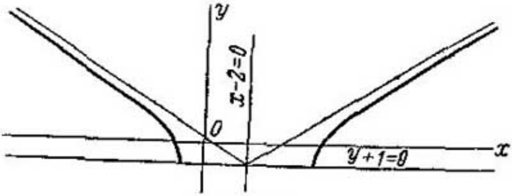


Fig. 112.

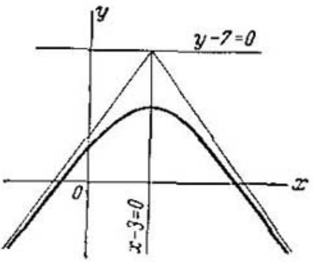


Fig. 113.

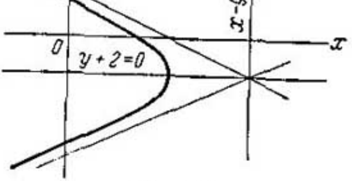


Fig. 114.

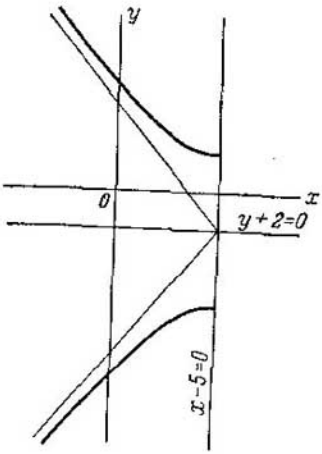


Fig. 115.

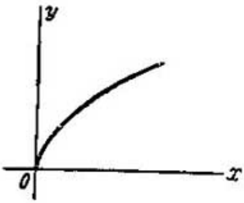


Fig. 116.

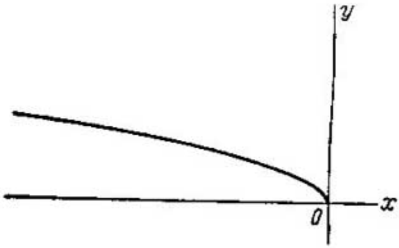


Fig. 117.

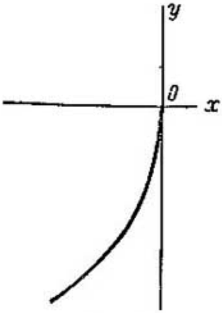


Fig. 118.

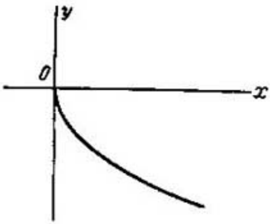


Fig. 119.

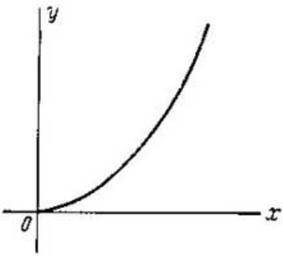


Fig. 120.

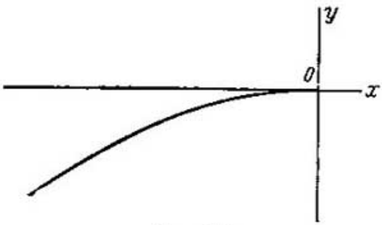


Fig. 121.

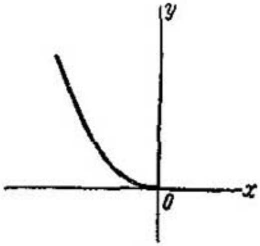


Fig. 122

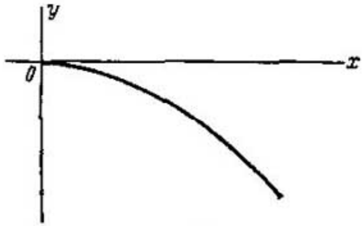


Fig. 123.

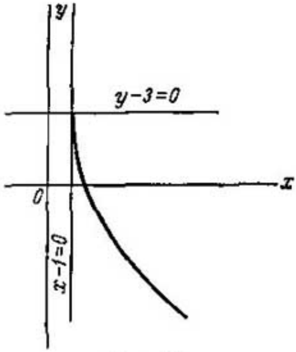


Fig. 124.

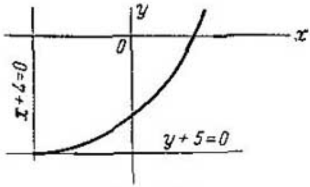


Fig. 125.

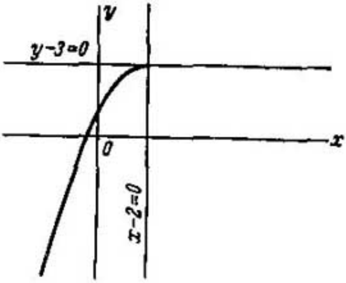


Fig. 126.

$6y+11=0$; 4) $A(0;\ 2)$, $p=\frac{1}{2}$, $4y-9=0$. **597.** 1) $A(-2;\ 1)$, $p=2$; 2) $A(1;\ 3)$, $p=\frac{1}{8}$; 3) $A(6;\ -1)$ $p=3$. **598.** 1) $A(-4;\ 3)$, $p=\frac{1}{4}$; 2) $A(1;\ 2)$, $p=2$; 3) $A(0;\ 1)$, $p=\frac{1}{2}$. **599.** 1) La parte de la parábola $(y-3)^2=16(x-1)$ situada bajo la recta $y-3=0$ (fig. 124); 2) la parte de la parábola $(x+4)^2=9(y+5)$ situada a la derecha de la recta $x+4=0$ (fig. 125); 3) la parte de la parábola $(x-2)^2=-2(y-3)$ situada a la izquierda de la recta $x-2=0$ (fig. 126); 4) la parte de la parábola $(y+5)^2=-3(x+7)$ situada bajo la recta $y+5=0$ (fig. 127). **600.** $x=\frac{1}{4}y^2-y+7$. **601.** $y=\frac{1}{8}x^2-x+3$. **602.** $x^2+2xy+y^2-6x+2y+9=0$. **603.** $F(9;\ -8)$. **604.** $4x^2-4xy+y^2+32x+34y+$

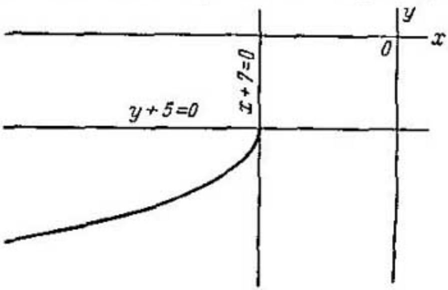


Fig. 127.

$+89=0$. **605.** $(2;\ 1)$, $(-6;\ 9)$. **606.** $(-4;\ 6)$, la recta es tangente a la parábola. **607.** La recta y la parábola no se cortan. **608.** 1) Es tangente a la parábola; 2) corta a la parábola en dos puntos; 3) pasa por fuera de la parábola. **609.** 1) $k<\frac{1}{2}$; 2) $k=1/2$; 3) $k>1/2$. **610.** $p=2bk$. **612.** $y_1y=p(x+x_1)$. **613.** $x+y+2=0$. **614.** $2x-y-16=0$. **615.** $d=2\sqrt{13}$. **616.** $M_1(9;\ -24)$; $d=10$. **617.** $3x-y+3=0$ y $3x-2y+12=0$. **619.** $5x-18y+25=0$. **620.** $d=13\frac{5}{13}$. **621.** $(6;\ 12)$ y $(6;\ -12)$. **622.** $(10;\ \sqrt{30})$, $(10;\ -\sqrt{30})$, $(2;\ \sqrt{6})$, $(2;\ -\sqrt{6})$. **623.** $(2;\ 1)$, $(-1;\ 4)$, $\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2};\ \frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)$ y $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2};\ \frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)$. **625.** $y-18=0$. Nota. Aplicar la propiedad de la parábola enunciada en el problema 624. **628.** 1) $\rho=\frac{16}{5-3\cos\theta}$; 2) $\rho=\frac{16}{5+3\cos\theta}$. **629.** 1) $\rho=\frac{9}{4-5\cos\theta}$; 2) $\rho=-\frac{9}{4-5\cos\theta}$. **630.** 1) $\rho=\frac{144}{5+13\cos\theta}$; 2) $\rho=-\frac{144}{5+13\cos\theta}$.

631. $\rho=\frac{3}{1-\cos\theta}$. **632.** 1) Una elipse; 2) una parábola; 3) una rama de una hipérbola; 4) una elipse; 5) una rama de una hipérbola: 6) una parábola. **633.** 13, 12. **634.** 8,6. **635.** $\rho=-\frac{21}{2\cos\theta}$, $\rho=\frac{29}{2\cos\theta}$. **636.** Las ecuaciones de las directrices; $\rho=-\frac{34}{5\cos\theta}$, $\rho=-\frac{16}{5\cos\theta}$; las ecuaciones de las asíntotas: $\rho=\frac{20}{3\operatorname{sen}\theta-4\cos\theta}$, $\rho=-\frac{20}{3\operatorname{sen}\theta+4\cos\theta}$. **637.** $\left(6;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(6;\ -\frac{\pi}{4}\right)$. **638.** $\left(3;\ \frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(3;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$. **639.** 1) $\left(\frac{p}{2};\ \pi\right)$; 2) $\left(p;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(p;\ -\frac{\pi}{2}\right)$. **640.** $\rho^2=\frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$. **641.** $\rho^2=\frac{b^2}{\varepsilon^2\cos^2\theta-1}$. **642.** $\rho=\frac{2p\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$. **643.** $8x+25y=0$. **644.** $9x-32y-73=0$. **645.** $x-y=0$, $x+4y=0$. **646.** $x+2y=0$, $8x-9y=0$. **647.** $x+2y=0$, $2x-3y=0$. **654.** $2x-5y=0$. **655.** $7x+y-20=0$. **656.** $x-8y=0$, $2x-y=0$. **657.** $x-2y=0$, $3x-y=0$; $x+2y=0$, $3x+y=0$. **661.** $y+2=0$. **662.** $2x-y+1=0$. **665.** Las líneas 1), 2), 5) y 8) tienen un centro único; 3), 7) no tienen centro; 4), 6) tienen infinidad de centros. **666.** 1) $(3;\ -2)$; 2) $(0;\ -5)$; 3) $(0;\ 0)$; 4) $(-1;\ 3)$. **667.** 1) $x-3y-6=0$; 2) $2x+y-2=0$; 3) $5x-y+4=0$. **668.** 1) $9x^2-18xy+6y^2+2=0$; 2) $6x^2+4xy+y^2-7=0$; 3) $4x^2+6xy+y^2-5=0$; 4) $4x^2+2xy+6y^2+1=0$. **669.** a) $m\neq 4$, n es arbitrario; b) $m=4$, $n\neq 6$; c) $m=4$, $n=6$. **670.** a) $k=2$; b) $k_1=-1$, $k_2=5$; c) para todos los valores de $k\neq 2$ que satisfacen a las desigualdades $-1<k<5$; d) para $k<-1$ y para $k>5$. **671.** $x^2-8y^2-4=0$. **672.** $x^2+xy+y^2+3y=0$. **673.** 1) Ecuación elíptica; determina una elipse $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$; $O'(5;\ -2)$ es el nuevo origen; 2) ecuación hiperbólica; determina una hipérbola $\frac{x'^2}{16}-\frac{y'^2}{9}=1$; $O'(3;\ -2)$ es el nuevo origen; 3) ecuación elíptica $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{9}=-1$; no determina ninguna figura geométrica (es la ecuación de una «elipse imaginaria»); 4) ecuación hiperbólica; determina una hipérbola degenerada, un par de rectas concurrentes $4x'^2-y'^2=0$; el nuevo origen es $O'(-1;\ -1)$; 5) ecuación elíptica; determina una elipse degenerada (un punto) $2x'^2+3y'^2=0$. **674** *). 1) Ecuación hiperbólica; determina una hipérbola $\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{4}=1$; $\operatorname{tg}\alpha=-2$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) ecuación elíptica; determina una elipse $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{4}=1$; $\alpha=45°$; 3) ecuación elíptica; determina una

---

*) En los problemas 674 1) —5) α es el ángulo medido desde la dirección positiva del eje antiguo de abscisas hasta el nuevo.

elipse degenerada, un punto $x'^2+4y'^2=0$; $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) ecuación hiperbólica; determina una hipérbola degenerada, un par de rectas concurrentes $x'^2-y'^2=0$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$; 5) ecuación elíptica; no deter-

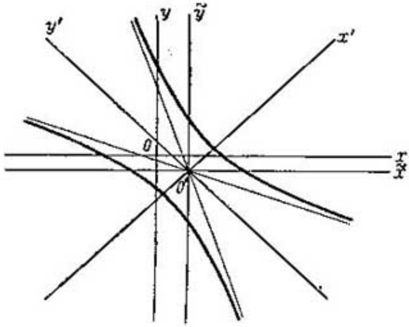


Fig. 128.

mina ninguna figura geométrica (es la ecuación de una «elipse imaginaria»); su ecuación en coordenadas nuevas es de la forma $\frac{x'^2}{4}+y'^2=-1$; $\alpha=45°$. **675.** 1) hiperbólica; 2) elíptica; 3) parabólica; 4) elíptica; 5) parabólica; 6) hiperbólica. **676.** 1) Ecuación hiperbólica; determina una hipérbola, cuya ecuación se reduce a la forma $x'^2-\frac{y'^2}{4}=1$ después de dos transformaciones sucesivas de coordenadas $x=\tilde{x}+2$, $y=\tilde{y}-1$ y $\tilde{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ (fig. 128); 2) ecuación elíptica; determina una elipse, cuya ecuación se reduce a la forma $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1$ después de dos transformaciones sucesivas de coordenadas $x=\tilde{x}-1$, $y=\tilde{y}+1$ y $\tilde{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ (fig. 129); 3) ecuación hiperbólica; determina una hipérbola, cuya ecuación se reduce a la forma $\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{36}=1$ después de dos transformaciones sucesivas de coordenadas $x=$

$=\tilde{x}+3,\ y=\tilde{y}-4$ y $\tilde{x}=\dfrac{x'-2y'}{\sqrt{5}},\ \tilde{y}=\dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$ (fig. 130); 4) ecuación hiperbólica; determina una hipérbola degenerada: un par de rectas concurrentes, cuyas ecuaciones se reducen a la forma $x'^2-4y'^2=0$ después de dos transformaciones sucesivas de coordenadas $x=\tilde{x}-2,\ y=\tilde{y}$ y $\tilde{x}=\dfrac{x'+3y'}{\sqrt{10}},\ \tilde{y}=\dfrac{-3x'+y'}{\sqrt{10}}$ (fig. 131); 5) ecuación elíptica; no determina ninguna figura geométrica: «elipse imaginaria»; su ecuación se reduce a la forma $x'^2+2y'^2=-1$ después de dos transformaciones sucesivas de coordenadas

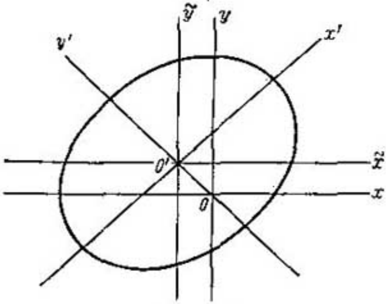


Fig. 129.

$x=\tilde{x}-1,\ y=\tilde{y}$ y $\tilde{x}=\dfrac{x'+3y'}{\sqrt{10}},\ \tilde{y}=\dfrac{-3x'+y'}{\sqrt{10}}$; 6) ecuación elíptica; determina una elipse degenerada; un punto; su ecuación se reduce a la forma $2x'^2+3y'^2=0$ después de dos transformaciones sucesivas de coordenadas: $x=\tilde{x},\ y=\tilde{y}-2$ y $\tilde{x}=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ \tilde{y}=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$. **677.** 1) $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{5}=1$, elipse; 2) $9x^2-16y^2=5$, hipérbola; 3) $x^2-4y^2=0$, hipérbola degenerada: un par de rectas concurrentes, cuyas ecuaciones son $x-2y=0$, $x+2y=0$; 4) $2x^2+3y^2=-1$: «elipse imaginaria»; la ecuación no determina ninguna figura geométrica; 5) $x^2+2y^2=0$: elipse degenerada; la ecuación determina un punto: el origen de coordenadas; 6) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, elipse; 7) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$, hipérbola; 8) $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$, elipse. **678.** 1) 3 y 1; 2) 3 y 2; 3) 1 y $\dfrac{1}{2}$; 4) 3 y 2. **679.** a) $x=2,\ y=3$; b) $x=3,\ y=-3$; c) $x=1,\ y=-1$; d) $x=-2$; $y=1$. **680.** 1) 2 y 1; 2) 5 y 1; 3) 4 y 2; 4) 1 y $\dfrac{1}{2}$. **681.** a) $x+y-1=0,\ 3x+y+1=0$; b) $x-4y-2=0,\ x-2y+2=0$; c) $x-y=0$,

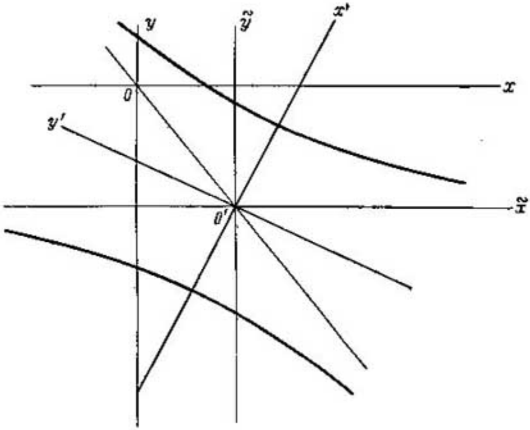


Fig. 130.

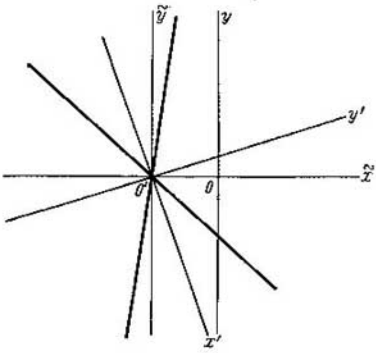


Fig. 131.

$x-3y=0$; d) $x+y-3=0$, $x+3y-3=0$. 682. 1) Elipse; 2) hipérbola; 3) un par de rectas concurrentes (hipérbola degenerada); 4) la ecuación no determina ninguna figura geométrica («elipse imaginaria»); 5) un punto (elipse degenerada). 689. 1) ecuación parabólica; determina una parábola, cuya ecuación se reduce a la forma $y''^2=2x''$ después de dos transformaciones sucesivas de coordenadas: $x=\frac{-4x'+3y'}{5}$, $y=\frac{-3x'-4y'}{5}$ y $x'=x''-3$, $y'=y''+2$ (fig. 132); 2) ecuación parabólica; determina una parábola degenerada: un par de rectas paralelas, cuyas ecuaciones se reducen

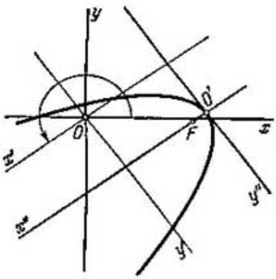


Fig. 132.

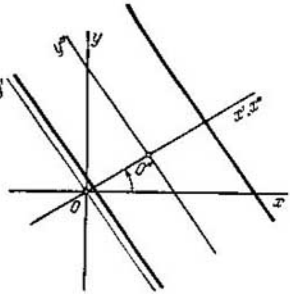


Fig. 133.

a la forma $x''^2=1$ después de dos transformaciones sucesivas de coordenadas: $x=\frac{3x'-2y'}{\sqrt{13}}$, $y=\frac{2x'-3y'}{\sqrt{13}}$ y $x'=x''+\frac{4}{\sqrt{13}}$, $y'=y''$ (fig. 133); 3) ecuación parabólica; no determina ninguna figura geométrica; se reduce a la forma $y''^2+1=0$ después de dos transformaciones sucesivas de coordenadas: $x=\frac{3x'-4y'}{5}$, $y=\frac{4x'+3y'}{5}$ y $x'=x''$, $y'=y''-4$. **690.** 1) $y^2=6x$, parábola; 2) $y^2=25$, parábola degenerada: un par de rectas paralelas cuyas ecuaciones son $y-5=0$, $y+5=0$; 3) $y^2=0$, parábola degenerada: un par de rectas coincidentes que se confunden con el eje de abscisas. **693.** 1) $(x+2y)^2+4x+y-15=0$; 2) $(3x-y)^2-x+2y-14=0$; 3) $(5x-2y)^2+3x-y+11=0$; 4) $(4x+2y)^2-5x+7y=0$; 5) $(3x-7y)^2+3x-2y-24=0$. **697.** 1) 3; 2) 3; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$. **699.** a) $2x+y-5=0$, $2x+y-1=0$; b) $2x-3y-1=0$, $2x-3y+11=0$; c) $5x-y-3=0$, $5x-y+5=0$; **700.** a) $x-3y+2=0$; b) $3x+5y+7=0$; c) $4x-2y-9=0$. **701.** $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4$. **702.** $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$; $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$. **703.** $\rho^2=S\operatorname{sen}2\theta$; $(x^2+y^2)^2=2Sxy$. **705.** $\rho=\frac{v}{\omega}\theta$ y $\rho=-\frac{v}{\omega}\theta$. **706.** $(2r-x)y^2=x^3$. **707.** $x(a^2+y^2)=a^3$. **708.** $\rho=\frac{a}{\cos\theta}\pm b$; $x^2y^2+(x+a)^2(x^2-b^2)=0$. **709.** $\rho=\frac{a}{\cos\theta}\pm a\operatorname{tg}\theta$; $x^2[(x+a)^2+y^2]=a^2y^2$. **710.** $\rho=2a\cos\theta\pm b$; $(x^2+y^2-2ax)^2=b^2(x^2+y^2)$. **711.** $\rho=a\,|\operatorname{sen}2\theta|$; $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$. **712.** $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$; $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **713.** $\rho=a\cos^3\theta$, $(x^2+y^2)^2=ax^3$. **714.** $x=a(\cos t+t\operatorname{sen}t)$, $y=a(\operatorname{sen}t-t\cos t)$. **715.** $x=a(t-\operatorname{sen}t)$;

$y=a(1-\cos t)$; $x+\sqrt{y(2a-y)}=a\arccos\frac{a-y}{a}$. **716.** $x=a(2\cos t-$ $-\cos 2t)$, $y=a(2\,\mathrm{sen}\,t-\mathrm{sen}\,2t)$; $\rho=2a(1-\cos\theta)$. **717.** $x=(a+b)\times$ $\times\cos t-a\cos\frac{a+b}{a}t$, $y=(a+b)\,\mathrm{sen}\,t-a\,\mathrm{sen}\,\frac{a+b}{a}t$. **718.** $x=(b-a)\times$ $\times\cos t+a\cos\frac{b-a}{a}t$, $y=(b-a)\,\mathrm{sen}\,t-a\,\mathrm{sen}\,\frac{b-a}{a}t$.

Segunda parte

720. 1) (4; 3; 0), (—3; 2; 0), el punto C está situado en el plano Oxy y, por lo tanto, su proyección sobre este plano coincide con él; (0; 0; 0); 2) (4; 0; 5), (—3; 0; 1), (2; 0, 0), el punto D está situado en el plano Oxz y, por lo tanto, su proyección sobre este plano coincide con él; 3) (0; 3; 5), (0; 2; 1), (0; —3; 0), el punto D está situado en el plano Oyz y, por lo tanto, su proyeccion sobre este plano coincide con él; 4) (4; 0; 0), (—3; 0; 0), (2; 0; 0), (0; 0; 0); 5) (0; 3; 0), (0; 2; 0), (0; —3: 0), (0; 0; 0); 6) (0; 0; 5), (0; 0; 1), (0; 0; 0), el punto D está situado en el eje de cotas y, por lo tanto, su proyección sobre este eje coincide con él. **721.** 1) (2; 3; —1), (5; —3; —2), (—3; 2; 1), (a; b; $-c$); 2) (2; —3; 1), (5; 3; 2), (—3; —2; —1); (a; $-b$; c); 3) (—2; 3; 1), (—5; —3; 2), (3; 2; —1), ($-a$; b; c); 4) (2; —3; —1), (5; 3; —2) (—3; —2; 1), (a; $-b$; $-c$); 5) (—2; 3; —1), (—5; —3; —2), (3; 2; 1), ($-a$; b; $-c$); 6) (—2; —3; 1), (—5; 3; 2), (3; —2; —1), ($-a$; $-b$; c); 7) (—2; —3; —1), (—5; 3; —2), (3; —2; 1), ($-a$; $-b$; $-c$). **722.** (a; a; $-a$), (a; $-a$; a), ($-a$; a; a), ($-a$; $-a$; a). **723.** 1) En el primero, tercero, quinto y séptimo; 2) en el segundo, cuarto, sexto y octavo; 3) en el primero, tercero, sexto y séptimo; 4) en el segundo, cuarto, quinto y octavo; 5) en el tercero, cuarto, sexto y séptimo. **724.** 1) En el primero, tercero, quinto y séptimo; 2) en el segundo, tercero, quinto y octavo; 3) en el primero, segundo, séptimo y octavo; 4) en el primero; tercero, sexto y octavo; 5) en el segundo, cuarto, quinto y séptimo. **725.** 1) (—3; 3; 3); 2) (3; 3; —3); 3) (—3; 3; —3); 4) (—3; —3; —3); 5) (3; —3; —3). **726.** 1) 7; 2) 13; 3) 5. **727.** $OA=6$; $OB=14$; $OC=13$; $OD=25$. **730.** $\sphericalangle M_1M_3M_2$ es obtuso. **732.** (5; 0; 0) y (—11; 0; 0). **733.** (0; 2; 0). **734.** C (3; —3; —3), $R=3$. **735.** (2; —1; —1); (—1; —2; 2), (0; 1; —2). **736.** 7. **737.** $x=4$, $y=-1$, $z=3$. **738.** C (6; 1; 19) y D (9; —5; 12). **739.** D (9; —5; 6). **740.** El cuarto vértice del paralelogramo puede coincidir con uno de los puntos: D_1 (—3; 4; —4), D_2 (1; —2; 8), D_3 (5; 0; —4). **741.** C (1; 5; 2), D (3; 2; 1), E (5; —1; 0), F (7; —4; —1). **742.** A (—1; 2; 4), B (8; —4; —2). **743.** $\frac{2}{3}\sqrt{74}$. **744.** $\frac{3}{2}\sqrt{14}$. **745.** $x=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$, $z=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}$. **746.** $x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4x_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$, $y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+m_4y_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$, $z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3+m_4z_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$. **747.** (2; —3; 0), (1; 0; 2), (0; 3; 4). **748.** $|a|=7$. **749.** $z=\pm 3$. **750.** $\overline{AB}=\{-4;\ 2;\ -1\}$, $\overline{BA}=\{4;\ -3;\ 1\}$. **751.** N (4; 1; 1).

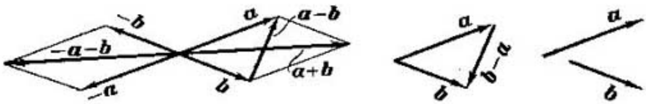


Fig. 134.

752. $(-1; 2; 3)$. **753.** $X=\sqrt{2}$, $Y=1$, $Z=-1$. **754.** $\cos\alpha=\frac{12}{25}$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$, $\cos\gamma=-\frac{16}{25}$. **755.** $\cos\alpha=\frac{3}{13}$, $\cos\beta=\frac{4}{13}$, $\cos\gamma=\frac{12}{13}$. **756.** 1) Puede; 2) no puede; 3) puede. **757.** 1) No puede; 2) puede;

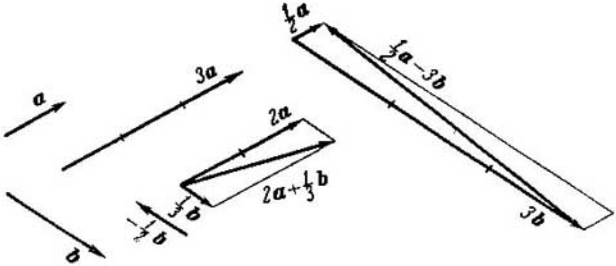


Fig. 135.

3) no puede. **758.** 60° ó 120°. **759.** $a=\{1;\ -1;\ \sqrt{2}\}$ o $a=\{1;\ -1;\ -\sqrt{2}\}$. **760.** $M_1(\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ \sqrt{3})$, $M_2(-\sqrt{3};\ -\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$. **761.** Véase la fig. 134. **762.** $|a-b|=22$. **763.** $|a+b|=20$. **764.** $|a+b|=|a-b|=13$. **765.** $|a+b|=\sqrt{129}\approx 11{,}4$, $|a-b|=7$. **766.** $|a+b|=\sqrt{19}\approx 4{,}4$, $|a-b|=7$. **767.** 1) Los vectores a y b tienen que ser perpendiculares entre sí; 2) el ángulo formado por los vectores a y b tiene que ser agudo; 3) el ángulo formado por los vectores a y b tiene que ser obtuso. **768.** $|a|=|b|$. **769.** Véase la fig. 135. **774.** $|R|=15$. **775.** 1) $\{1;\ -1;\ 6\}$; 2) $\{5;\ -3;\ 6\}$; 3) $\{6;\ -4;\ 12\}$; 4) $\left\{1;\ -\frac{1}{2};\ 0\right\}$; 5) $\{0;\ -1;\ 12\}$; 6) $\left\{3;\ -\frac{5}{3};\ 2\right\}$. **776.** El vector b es el triple de largo que el vector a; sus direcciones son opuestas. **777.** $\alpha=4$, $\beta=-1$. **779.** El vector $\overline{AB}$ es el doble de largo que el vector $\overline{CD}$; tienen una misma dirección. **780.** $a^0=\left\{\frac{6}{7};\ -\frac{2}{7};\ -\frac{3}{7}\right\}$. **781.** $a^0=\left\{\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ -\frac{12}{13}\right\}$. **782.** $|a+b|=6$, $|a-b|=14$. **783.** $d=-48i+45j-36k$. **784.** $c=\{-3;\ 15;\ 12\}$. **785.** $\overline{AM}=\{3;\ 4;\ -3\}$, $\overline{BN}=\{0;\ -5;\ 3\}$, $\overline{CP}=\{-3;\ 1;\ 0\}$.

787. $a=2p+5q$. 788. $a=2b+c$, $b=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c$, $c=a-2b$. 789. $p=2a-3b$. 790. $\overline{AM}=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, $\overline{BN}=\frac{1}{2}c-b$, $\overline{CP}=\frac{1}{2}b-c$, en donde M, N y P son los puntos medios de los lados del triángulo ABC. 791. $\overline{AD}=11\overline{AB}-7\overline{AC}$, $\overline{BD}=10\overline{AB}-7\overline{AC}$, $\overline{CD}=11\overline{AB}-8\overline{AC}$, $\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}=32\overline{AB}-22\overline{AC}$. 793. $c=2p-3q+r$. 794. $d=2a-3b+c$, $c=-2a+3b+d$, $b=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}c-\frac{1}{3}d$, $a=\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d$. 795. 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) -61; 6) 37; 7) 73. 796. 1) -62; 2) 162; 3) 373. 797. La suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados. 798. $-ab=ab$, si los vectores a y b son colineales y tienen direcciones opuestas; $ab=ab$, si los vectores a y b son colineales y tienen direcciones iguales. 799. Si el vector b es perpendicular a los vectores a y c, y también, si los vectores a y c son colineales. 800. $ab+bc+ca=-\frac{3}{2}$. 801. $ab+bc+ca=-13$. 802. $|p|=10$. 803. $\alpha=\pm\frac{3}{5}$. 804. $|a|=|b|$. 807. $\overline{BD}=\frac{bc}{c^2}c-b$. 808. $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. 809. $\varphi=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$. 810. El plano es perpendicular al eje del vector a e intercepta en él un segmento, cuya magnitud, medida desde el punto A, es igual a $\frac{\alpha}{|a|}$. 811. La recta de intersección de los planos que son perpendiculares a los ejes de los vectores a y b y que interceptan en estos ejes segmentos, cuyas magnitudes, medidas desde el punto A, son iguales a $\frac{\alpha}{|a|}$ y $\frac{\beta}{|b|}$. 812. 1) 22; 2) 6; 3) 7; 4) -200; 5) 129; 6) 41. 813. 17. 814. 1) -524; 2) 13; 3) 3; 4) $(\overline{AB}\cdot\overline{AC})\cdot\overline{BC}=\{-70;\ 70;\ -350\}$ y $\overline{AB}\,(\overline{AC}\cdot\overline{BC})=\{-78;\ 104;\ -312\}$. 815. 31. 816. 13. 818. $\alpha=-6$. 819. $\cos\varphi=\frac{5}{21}$. 820. 45°. 821. $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$. 823. $x=\{-24;\ 32;\ 30\}$. 824. $x=\left\{1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right\}$. 825. $x=-4i-6j+12k$. 826. $x=\{-3;\ 3;\ 3\}$. 827. $x=\{2;\ -3;\ 0\}$. 828. $x=2i+3j-2k$. 829. $\sqrt{3}$. 830. -3. 831. -5. 832. 6. 833. -4. 834. 5. 835. -11. 836. $X=-\frac{14}{3}$, $Y=-\frac{14}{3}$, $Z=-\frac{7}{3}$. 837. 3. 838. $-6\frac{5}{7}$. 839. $|[ab]|=15$. 840. $|[ab]|=16$. 841. $ab=\pm 30$. 842. 1) 24; 2) 60. 843. 1) 3; 2) 27; 3) 300. 844. Los vectores a y b tienen que ser colineales. 846. Si los vectores a y b son perpendiculares. 850. 1) $\{5;\ 1;\ 7\}$; 2) $\{10;\ 2;\ 14\}$; 3) $\{20;\ 4;\ 28\}$. 851. 1) $\{6;\ -4;\ -6\}$; 2) $\{-12;\ 8;\ 12\}$. 852. $\{2;\ 11;\ 7\}$.

853. $\{-4;\ 3;\ 4\}$. 854. 15; $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{15}$, $\cos\gamma=\frac{11}{15}$. 855. 28; $\cos\alpha=-\frac{3}{7}$, $\cos\beta=-\frac{6}{7}$, $\cos\gamma=\frac{2}{7}$. 856. $\sqrt{66}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{66}}$, $\cos\beta=-\frac{4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma=-\frac{7}{\sqrt{66}}$. 857. 14 unid. cuad. 858. *5*. 859. sen $\varphi=\frac{5\sqrt{17}}{21}$. 860. $\{-6;\ -24;\ 8\}$. 861. $\mathbf{m}=\{45;\ 24;\ 0\}$. 862. $\mathbf{x}=\{7;\ 5;\ 1\}$. 864. $[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}]=\{-7;\ 14;\ -7\}$; $[\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]]=\{10;\ 13;\ 19\}$. 865. 1) De mano derecha; 2) de mano izquierda; 3) de mano izquierda; 4) de mano derecha; 5) los vectores son coplanares; 6) de mano izquierda. 866. $\mathbf{abc}=24$. 867. $\mathbf{abc}=\pm 27$; el signo más, si la terna de vectores **a**, **b**, **c** es de mano derecha, y el signo menos, si esta terna es de mano izquierda. 868. Si los vectores **a**, **b**, **c** son perpendiculares entre sí. 873. $\mathbf{abc}=-7$. 874. 1) Son coplanares; 2) no son coplanares; 3) son coplanares. 876. 3 unid. cúb. 877. 11. 878. D_1 (0; 8; 0); D_2 (0; -7; 0). 881. $X=-6$, $Y=-8$, $Z=-6$. 882. Los vectores **a** y **c** tienen que ser colineales o el vector **b** tiene que ser perpendicular a los vectores **a** y **c**. 885. Los puntos M_1, M_2, M_4 están situados en la superficie, los puntos M_3, M_5, M_6 no lo están. La ecuación determina una esfera de radio 7 con el centro en el origen de coordenadas. 886. 1) (1; 2; 2) y (1; 2; -2); 2) no hay tal punto en la superficie dada; 3) (2; 1; 2) y (2; -1; 2); 4) no hay tal punto en la superficie dada. 887. 1) El plano Oyz; 2) el plano Oxz; 3) el plano Oxy; 4) un plano paralelo al plano Oyz y situado en el semiespacio próximo a una distancia de dos unidades; 5) un plano paralelo al plano Oxz y situado en el semiespacio izquierdo a una distancia de dos unidades; 6) un plano paralelo al plano Oxy y situado en el semiespacio inferior a una distancia de cinco unidades; 7) una esfera de radio 5 con el centro en el origen de coordenadas; 8) una esfera de radio 7 con el centro en el punto (2; -3; 5); 9) la ecuación determina un punto único: el origen de coordenadas; 10) la ecuación no representa en el espacio ninguna figura geométrica; 11) un plano, que divide por la mitad el ángulo diedro comprendido entre los planos Oxz y Oyz y que pasa por el 1°, 3°, 5° y 7° octantes; 12) un plano que divide por la mitad el ángulo diedro comprendido entre los planos Oxy y Oyz y pasa por el 2°, 3°, 5° y 8° octantes; 13) un plano que divide por la mitad el ángulo diedro comprendido entre los planos Oxy y Oxz y que pasa por el 1°, 2°, 7° y 8° octantes; 14) los planos Oxz y Oyz; 15) los planos Oxy y Oyz; 16) los planos Oxy y Oxz; 17) los tres planos coordenados; 18) el plano Oyz y un plano paralelo al plano Oyz, situado en el semiespacio próximo a una distancia de cuatro unidades; 19) el plano Oxz y un plano que divide por la mitad el ángulo diedro comprendido entre los planos Oxz y Oyz y que pasa por el 1°, 3°, 5° y 7° octantes; 20) el plano Oxy y un plano que divide por la mitad el ángulo diedro comprendido entre los planos Oxy y Oxz y que pasa por el 3°, 4°, 5° y 6° octantes. 889. $x^2+y^2+z^2=r^2$. 890. $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$. 891. $y-3=0$. 892. $2z-7=0$. 893. $2x+3=0$. 894. $20y+53=0$. 895. $x^2+y^2+z^2=a^2$. 896. $x^2+y^2+z^2=a^2$. 897. $x+2z=0$. 898. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$. 899. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1$. 900. Los puntos M_1,

M_3 están situados en la línea dada; los puntos M_2, M_4 no lo están. **902.** 1) (3; 2; 6) y (3; —2; 6); 2) (3; 2; 6) y (—3; 2; 6); 3) no hay tal punto en la línea dada. **903.** 1) El eje de cotas; 2) el eje de ordenadas; 3) el eje de abscisas; 4) una recta que pasa por el punto (2; 0; 0) y es paralela al eje Oz; 5) una recta que pasa por el punto (—2; 3; 0) y es paralela al eje Oz; 6) una recta que pasa por el punto (5; 0; —2) y es paralela al eje Oy; 7) una recta que pasa por el punto (0; —2; 5) y es paralela al eje Ox; 8) una circunferencia de radio 3 con el centro en el origen de coordenadas y situada en el plano Oxy; 9) una circunferencia de radio 7 con el centro en el origen de coordenadas y situada en el plano Oxz; 10) una circunferencia de radio 5 con el centro en el origen de coordenadas y situada en el plano Oyz; 11) una circunferencia de radio 4 con el centro en el punto (0; 0; 2) situada en el plano

$z-2=0$. **904.** $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=0. \end{cases}$ **905.** $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ y+2=0. \end{cases}$

906. $\begin{cases} (x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=169, \\ x=0, \end{cases}$ **907.** $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=36, \\ (x-1)^2+(y+2)^2+ \\ +(z-2)^2=25. \end{cases}$

908. (2; 3; —6), (—2; 3; —6). **909.** (1; 2; 2), (—1; 2; 2). **910.** 1) Una superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje Oy, y que tiene por directriz una circunferencia que en el plano Oxz se determina por la ecuación $x^2+z^2=25$; 2) una superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje Ox y cuya directriz es una elipse determinada en el plano Oyz por la ecuación $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$; 3) una superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje Oz y cuya directriz es una hipérbola determinada en el plano Oxy por la ecuación $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 4) una superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje Oy y cuya directriz es una parábola determinada en el plano Oxz por la ecuación $x^2=6z$; 5) una superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje Oz, que tiene por directrices un par de rectas que se determinan en el plano Oxy mediante las ecuaciones $x=0$, $x-y=0$; esta superficie cilíndrica se compone de dos planos; 6) una superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje Oy y que tiene por directrices un par de rectas que se determinan en el plano Oxz mediante las ecuaciones $x-z=0$, $x+z=0$; esta superficie cilíndrica se compone de dos planos; 7) el eje de abscisas; 8) la ecuación no determina en el espacio figura geométrica alguna; 9) una superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje Oy y cuya directriz es una circunferencia; la directriz se determina en el plano Oxz mediante la ecuación $x^2+(z-1)^2=1$; 10) una superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje Ox; la directriz se determina en el plano Oyz mediante la ecuación $y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. **911.** 1) x^2+5y^2-

$-8y-12=0$; 2) $4x^2+5z^2+4z-60=0$; 3) $2y-z-2=0$. 912. 1) $\begin{cases} 8x^2+4y^2-36x+16y-3=0, \\ z=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-2z-7=0, \\ y=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4y^2+8z^2+16y+20z-31=0, \\ x=0. \end{cases}$ 913. $x-2y+3z+3=0$. 914. $5x-3z=0$. 915. $2x-y-z-6=0$. 916. $x-y-3z+2=0$. 917. $x+4y+7z+16=0$. 919. $9x-y+7z-40=0$. 921. $3x+3y+z-8=0$. 923. 1) $\boldsymbol{n}=\{2;\ -1;\ -2\}$, $\boldsymbol{n}=\{2\lambda;\ -\lambda;\ -2\lambda\}$; 2) $\boldsymbol{n}=\{1;\ 5;\ -1\}$, $\boldsymbol{n}=\{\lambda;\ 5\lambda;\ -\lambda\}$; 3) $\boldsymbol{n}=\{3;\ -2;\ 0\}$, $\boldsymbol{n}=\{3\lambda;\ -2\lambda;\ 0\}$; 4) $\boldsymbol{n}=\{0;\ 5;\ -3\}$, $\boldsymbol{n}=\{0;\ 5\lambda;\ -3\lambda\}$; 5) $\boldsymbol{n}=\{1;\ 0;\ 0\}$, $\boldsymbol{n}=\{\lambda;\ 0;\ 0\}$; 6) $\boldsymbol{n}=\{0;\ 1;\ 0\}$; $\boldsymbol{n}=\{0;\ \lambda;\ 0\}$, en donde λ es un número arbitrario, diferente de cero. 924. 1) y 3) determinan planos paralelos. 925. 1) y 2) determinan planos perpendiculares. 926. 1) $l=3$, $m=-4$; 2) $l=3$, $m=-\frac{2}{3}$; 3) $l=-3\frac{1}{3}$; $m=-1\frac{1}{5}$. 927. 1) 6; 2) -19; 3) $-\frac{1}{7}$. 928. 1) $\frac{1}{3}\pi$ y $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{1}{4}\pi$ y $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos\frac{2}{15}$ y $\pi-\arccos\frac{2}{15}$. 929. $5x-3y+2z=0$. 930. $2x-3z-27=0$. 931. $7x-y-5z=0$. 932. $x+2z-4=0$. 934. $4x-y-2z-9=0$. 936. $x=1$, $y=-2$, $z=2$. 939. 1) $a\neq 7$; 2) $a=7$, $b=3$; 3) $a=7$, $b\neq 3$. 940. 1) $z-3=0$; 2) $y+2=0$; 3) $x+5=0$. 941. 1) $2y+z=0$; 2) $3x+z=0$; 3) $4x+3y=0$. 942. 1) $y+4z+10=0$; 2) $x-z-1=0$; 3) $5x+y-13=0$. 943. $(12;\ 0;\ 0)$, $(0;\ -8;\ 0)$, $(0;\ 0;\ -6)$. 944. $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}=1$. 945. $a=-4$, $b=3$, $c=\frac{1}{2}$. 946. 240 unid. cuad. 947. 8 unid. cúb. 948. $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$. 949. $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-\frac{3}{2}}=1$.

950. $x+y+z+5=0$. 951. $2x-21y+2z+88=0$, $2x-3y-2z+12=0$. 952. $x+y+z-9=0$, $x-y-z+1=0$, $x-y+z-3=0$, $x+y-z-5=0$. 953. $2x-y-3z-15=0$. 954. $2x-3y+z-6=0$. 955. $x-3y-2z+2=0$. 956. Los planos 1), 4), 5), 7), 9), 11) y 12) se han dado mediante ecuaciones normales. 957. 1) $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-6=0$; 2) $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0$; 3) $\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{11}{14}=0$; 4) $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}=0$; 5) $-\frac{5}{13}y+\frac{12}{13}z-2=0$; 6) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}=0$; 7) $-y-2=0$; 8) $x-5=0$; 9) $z-3=0$; 10) $z-\frac{1}{2}=0$. 958. 1) $\alpha=60°$, $\beta=45°$, $\gamma=60°$, $p=5$; 2) $\alpha=120°$, $\beta=60°$, $\gamma=45°$, $p=8$; 3) $\alpha=45°$, $\beta=90°$, $\gamma=45°$, $p=3\sqrt{2}$; 4) $\alpha=90°$, $\beta=135°$, $\gamma=45°$, $p=\sqrt{2}$; 5) $\alpha=150°$, $\beta=120°$, $\gamma=90°$, $p=5$; 6) $\alpha=90°$, $\beta=90°$, $\gamma=0°$, $p=2$; 7) $\alpha=180°$, $\beta=90°$, $\gamma=90°$, $p=\frac{1}{2}$; 8) $\alpha=90°$, $\beta=180°$, $\gamma=90°$, $p=\frac{1}{2}$; 9) $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$,

$\beta=\pi-\arccos\frac{2}{3}$, $\gamma=\arccos\frac{2}{3}$, $p=2$; 10) $\alpha=\pi-\arccos\frac{2}{7}$, $\beta=\pi-\arccos\frac{3}{7}$, $\gamma=\arccos\frac{6}{7}$, $p=\frac{4}{7}$. **959.** 1) $\delta=-3$, $d=3$; 2) $\delta=1$, $d=1$; 3) $\delta=0$, $d=0$, el punto M_3 está situado en el plano; 4) $\delta=-2$, $d=2$; 5) $\delta=-3$, $d=3$. **960.** $d=4$. **961.** 1) A un lado; 2) a un lado; 3) a diversos lados; 4) a un lado; 5) a diversos lados; 6) a diversos lados. **964.** 1) $d=2$; 2) $d=3{,}5$; 3) $d=6{,}5$; 4) $d=1$; 5) $d=0{,}5$; 6) $d=\frac{5}{6}$. **965.** 8 unid. cúb. **966.** A la condición del problema satisfacen dos puntos: $(0;\ 7;\ 0)$, $(0;\ -5;\ 0)$. **967.** A la condición del problema satisfacen dos puntos: $(0;\ 0;\ -2)$ y $\left(0;\ 0;\ -6\frac{4}{13}\right)$. **968.** A la condición del problema satisfacen dos puntos: $(2;\ 0;\ 0)$ y $\left(\frac{11}{43};\ 0;\ 0\right)$. **969.** $4x-4y-2z+15=0$. **970.** $6x+3y+2z+11=0$. **971.** $2x-2y-z-18=0$, $2x-2y-z+12=0$. **972.** 1) $4x-y-2z-4=0$; 2) $3x+2y-z+1=0$; 3) $20x-12y+4z+13=0$. **973.** 1) $4x-5y+z-2=0$. $2x+y-3z+8=0$; 2) $x-3y-1=0$, $3x+y-2z-1=0$; 3) $3x-6y+7z+2=0$, $x+4y+3z+4=0$. **974.** 1) El punto M y el origen de coordenadas están situados en ángulos adyacentes; 2) el punto M y el origen de coordenadas están situados en un mismo ángulo; 3) el punto M y el origen de coordenadas están situados en ángulos opuestos. **975.** 1) Los puntos M y N están situados en ángulos adyacentes; 2) los puntos M y N están situados en ángulos opuestos. **976.** El origen de coordenadas está situado dentro del ángulo agudo. **977.** El punto M está situado dentro del ángulo obtuso. **978.** $8x-4y-4z+5=0$. **979.** $23x-y-4z-24=0$. **980.** $x-y-z-1=0$. **981.** $x+y+2z=0$. **982.** $\begin{cases}5x-7y-3=0,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}5x+2z-3=0,\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}7y-2z+3=0,\\ x=0.\end{cases}$ **983.** $\begin{cases}3x-y-7z+9=0,\\ 5y+2z=0.\end{cases}$ **984.** $(2;\ -1;\ 0)$; $\left(1\frac{1}{3};\ 0;\ -\frac{1}{3}\right)$; $(0;\ 2;\ -1)$ **986.** 1) $D=-4$; 2) $D=9$; 3) $D=3$. **987.** 1) $A_1=A_2=0$ y por lo menos uno de los números D_1, D_2 es diferente de cero; 2) $B_1=B_2=0$ y por lo menos uno de los números D_1, D_2 es diferente de cero; 3) $C_1=C_2=0$ y por lo menos uno de los números D_1, D_2 es diferente de cero. **988.** 1) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{D_1}{D_2}$; 2) $\frac{B_1}{B_2}=\frac{D_1}{D_2}$; 3) $\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$; 4) $A_1=D_1=0$, $A_2=D_2=0$; 5) $B_1=D_1=0$ $B_2=D_2=0$; 6) $C_1=D_1=0$, $C_2=D_2=0$. **989.** 1) $2x+15y+7z+7=0$; 2) $9y+3z+5=0$; 3) $3x+3z-2=0$; 4) $3x-9y-7=0$; **990.** 1) $23x-2y+21z-33=0$; 2) $y+z-18=0$; 3) $x+z-3=0$; 4) $x-y+15=0$: **991.** $5x+5z-8=0$. **992.** $\alpha(5x-2y-z-3)+\beta(x+3y-2z+5)=0$

Nota. La recta de intersección de los planos $5x-2y-z-3=0$, $x+3y-2z+5=0$ es paralela al vector $l=\{7;\ 9;\ 17\}$; por lo tanto, a la condición del problema satisfacen todos los planos del haz de planos que pasan por esta recta. **993.** $11x-2y-15z-3=0$. **994.** $\alpha(5x-y-2z-3)+\beta(3x-2y-5z+2)=0$. Nota. La recta de intersección de los planos $5x-y-2z-3=0$, $3x-2y-5z+2=0$ es perpendicular al plano $x+19y-7z-11=0$; por lo tanto, a la condición del problema satisfacen todos los planos del haz de planos que pasan por esta recta. 995. $9x+7y+8z+7=0$. 996. $x-2y+z-2=0$, $x-5y+4z-20=0$. 997. Pertenece. 998. No pertenece. 999. $l=-5$, $m=-11$. 1000. $3x-2y+6z+21=0$, $189x+$ $+28y+48z-591=0$. 1001. $2x-3y-6z+19=0$,6 $x-2y-3z+18=0$. 1002. $4x-3y+6z-12=0$, $12x-49y+38z+84=0$. 1003. $4x+3y-$ $-5=0$, $5x+3z-7=0$. $5y-4z+1=0$. 1004. $\left\{\begin{array}{r}7x-y+1=0,\\ z=0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{r}5x-z-1=0,\\ y=0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{r}5y-7z-12=0,\\ x=0.\end{array}\right.$ 1005. $x-8y+5z-3=0$. 1006. $\left\{\begin{array}{r}2x-4y-8z+1=0,\\ 2x-y+z-1=0.\end{array}\right.$ 1007. 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=$ $=\frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$. 1008. 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$; 3) $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{-2}$; 4) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{0}$. 1009. 1) $x=2t+1$, $y=-3t-1$, $z=4t-3$; 2) $x=2t+1$, $y=5t-1$, $z=-3$; 3) $x=3t+1$, $y=-2t-1$, $z=5t-3$. 1010. 1) $x=t+2$, $y=-2t+1$, $z=t+1$; 2) $x=t+3$, $y=-t-1$, $z=t$; 3) $x=0$, $y=t$, $z=-3t+1$. 1011. (9; -4; 0) (3; 0; -2), (0; 2; -3). 1012. $x=5t+4$, $y=-11t-7$, $z=-2$. 1013. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+7}{-8}$. 1014. $\frac{x-2}{6}=$ $=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{-7}$. 1015. $x=3t+3$, $y=15t+1$, $z=19t-3$. 1016. $\boldsymbol{a}=$ $=\{1;\ 1;\ 3\}$; $\boldsymbol{a}=\{\lambda;\ \lambda;\ 3\lambda\}$, en donde λ es un número arbitrario diferente de cero. 1017. $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a}=-2\lambda\boldsymbol{i}+11\lambda\boldsymbol{j}+5\lambda\boldsymbol{k}$, en donde λ es un número arbitrario diferente de cero. 1018. $\frac{x-2}{2}=$ $=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$. 1019. 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$. S o l u c i ó n. Suponiendo, por ejemplo, $z_0=0$ y resolviendo el sistema, hallamos: $x_0=2$, $y_0=-1$; por lo tanto, ya conocemos un punto de la recta: $M_0(2;\ -1;\ 0)$. Hallamos ahora el vector director. Tenemos que $\boldsymbol{n}_1=\{1;\ -2;\ 3\}$, $\boldsymbol{n}_2=\{3;\ 2;\ -5\}$; y de aquí que $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2]=$ $\{4;\ 14;\ 8\}$, o sea, que $l=4$, $m=14$, $n=8$. Las ecuaciones canónicas de la recta dada se obtienen sustituyendo los valores hallados de x_0, y_0, z_0 y de l, m, n en las ecuaciones $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=$ $=\frac{z-z_0}{n}$: $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{8}$ ó $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$; 2) $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$; 3) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$. 1020. 1) $x=t+1$, $y=-7t$, $z=-19t-2$; 2) $x=-t+1$, $y=3t+2$, $z=5t-1$. 1023. $60°$. 1024. $135°$ 1025. $\cos\varphi=\pm\frac{4}{21}$. 1027. $l=3$. 1029. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$. 1030. $\frac{x+4}{3}=$

$=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}$. **1031.** $x=2t-5$, $y=-3t+1$, $z=-4t$. **1032.** $v=13$ **1033.** $d=21$. **1034.** $x=3-6t$, $y=-1+18t$, $z=-5+9t$. **1035.** $x=-7+4t$, $y=12-4t$, $z=5-2t$. **1036.** $x=20-6t$, $y=-18+8t$, $z=-32+24t$; (2; 6; 40). **1037.** Las ecuaciones del movimiento del punto M son: $x=-5+6t$, $y=4-12t$, $z=-5+4t$; las ecuaciones del movimiento del punto N son: $x=-5+4t$, $y=16-12t$, $z=-6+3t$; 1) P (7; -20; 3); 2) un intervalo de tiempo igual a 2; 3) un intervalo de tiempo igual a 3; 4) $M_0P=28$, $N_0P=39$. **1040.** 1) (2; -3; 6); 2) la recta es paralela al plano; 3) la recta se encuentra en el plano. **1041.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{5}=\frac{z+1}{3}$. **1042.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$. **1043.** $2x-3y+4z-1=0$. **1044.** $x+2y+3z=0$. **1045.** $m=-3$. **1046.** $C=-2$. **1047.** $A=3$, $D=-23$. **1048.** $A=-3$, $B=4\frac{1}{2}$. **1049.** $l=-6$, $C=\frac{3}{2}$. **1050.** (3; -2; 4). S o l u c i ó n. El punto buscado se halla resolviendo simultáneamente las ecuaciones de la recta dada y la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a esta recta. Fijémonos en que el vector director de la recta dada {3; 5; 2} es un vector normal del plano considerado. La ecuación del plano que pasa por el punto P (2; -1; 3) y que tiene por vector normal $n=\{3;\ 5;\ 2\}$, es de la forma $3(x-2)+5(y+1)+2(z-3)=0$ ó $3x+5y+2z-7=0$. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones $\begin{cases} x=3t,\ x=5t-7,\ z=2t+2, \\ 3x+5y+2z-7=0, \end{cases}$ hallamos las coordenadas de la proyección buscada $x=3$, $y=-2$, $z=4$. **1051.** Q (2; -3; 2). **1052.** Q (4; 1; -3). **1053.** (1; 4; -7). S o l u c i ó n. El punto buscado se halla resolviendo simultáneamente la ecuación del plano dado y las ecuaciones de la recta trazada por el punto P y perpendicular a este plano. Advirtamos ante todo, que el vector normal de este plano {2; -1; 3} es un vector director de la recta buscada. Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P (5; 2; -1), cuyo vector director es $a=\{2;\ -1;\ 3\}$, son de la forma: $x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=3t-1$. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones $\begin{cases} 2x-y+3z+23=0, \\ x=2t+5,\ y=-t+2,\ z=3t-1, \end{cases}$ hallamos las coordenadas de la proyección buscada: $x=1$, $y=4$, $z=-7$. **1054.** Q (-5; 1; 0). **1055.** P (3; -4; 0). N o t a. El problema puede resolverse del modo siguiente: 1) verificamos que los puntos A y B están situados a un lado del plano Oxy. 2) Hallamos el punto simétrico a uno de los puntos dados con respecto al plano Oxy; por ejemplo, el punto B_1, simétrico al punto B. 3) Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B_1. 4) Hallando la solución simultánea de las ecuaciones de la recta y de la ecuación del plano Oxy obtenemos las coordenadas del punto buscado. **1056.** P (-2; 0; 3). **1057.** P (-2; -2; 5). **1058.** P (-1; 3; -2). **1059.** 1) P (-25; 16; 4); 2) durante un intervalo de tiempo igual a 5; 3) $M_0P=60$. **1060.** $x=28-7{,}5t$, $y=-30+8t$, $z=-27+6t$; 1) P (-2; 2; -3); 2) desde $t_1=0$ hasta $t_2=4$; 3) $M_0P=50$. **1061.** Durante un intervalo de tiempo igual a 3. **1062.** $d=7$. S o l u c i ó n. Tomemos algún punto en la recta $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$, por ejemplo, el punto $M_1(-3;\ -2;\ 8)$; supongamos que M_1 es el punto de aplicación del vector director $\boldsymbol{a}=\{3;\ 2;\ -2\}$ de la recta. El módulo del producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\overline{M_1P}$ nos proporciona el área del paralelogramo construido sobre estos vectores como lados; la altura de este paralelogramo bajada desde el vértice P será la distancia buscada d. Por lo tanto, la fórmula que nos permite calcular la distancia d es $d=\frac{|[\boldsymbol{a}\overline{M_1P}]|}{|\boldsymbol{a}|}$. Calculemos ahora las coordenadas del vector $\overline{M_1P}$, conociendo las coordenadas de su extremo y de su origen: $\overline{M_1P}=\{4;\ 1;\ -10\}$. Hallemos el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\overline{M_1P}$: $[\boldsymbol{a}\overline{M_1P}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -10 \end{vmatrix}=-18\boldsymbol{i}+22\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$. Determinemos su módulo: $|[\boldsymbol{a}\overline{M_1P}]|=\sqrt{18^2+22^2+5^2}=\sqrt{833}=7\sqrt{17}$. Calculemos el módulo del vector $\boldsymbol{a}$: $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$. La distancia buscada es $d=\frac{7\sqrt{17}}{\sqrt{17}}=7$. **1063.** 1) 21; 2) 6; 3) 15. **1064.** $d=25$. **1065.** $9x+11y+5z-16=0$. **1068.** $4x+6y+5z-1=0$. **1070.** $2x-16y-13z+31=0$. **1072.** $6x-20y-11z+1=0$. **1074.** $(2;\ -3;\ -5)$. **1075.** $Q(1;\ 2;\ -2)$. **1076.** $Q(1;\ -6;\ 3)$. **1077.** $13x-14y+11z+51=0$. **1079.** $x-8y-13z+9=0$. **1081.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}$. **1082.** $x=8t-3,\ y=-3t-1,\ z=-4t+2$. **1083.** 1) 13; 2) 3; 3) 7. **1084.** 1) $x^2+y^2+z^2=81$; 2) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=4$; 3) $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=36$; 4) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$; 5) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$; 6) $x^2+y^2+z^2=9$; 7) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$; 8) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$; 9) $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$. **1085.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$ y $x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$. **1086.** $R=5$. **1087.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=4$. **1088.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$. **1089.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$. **1090.** 1) $C(3;\ -2;\ 5)$, $r=4$; 2) $C(-1;\ 3;\ 0)$, $r=3$; 3) $C(2;\ 1;\ -1)$, $r=5$; 4) $C(0;\ 0;\ 3)$, $r=3$; 5) $C(0;\ -10;\ 0)$, $r=10$. **1091.** $x=5t-1,\ y=-t+3,\ z=2t-0{,}5$. **1092.** $\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-3}=\frac{z+\frac{1}{2}}{4}$. **1093.** 1) fuera de la esfera; 2) y 5) en la superficie de la esfera; 3) y 4) dentro de la esfera. **1094.** a) 5; b) 21; c) 7. **1095.** 1) El plano corta a la esfera; 2) el plano es tangente a la esfera; 3) el plano pasa por fuera de la esfera. **1096.** 1) La recta corta a la esfera; 2) la recta pasa por fuera de la esfera; 3) la recta es tangente a la esfera. **1097.** $M_1(-2;\ -2;\ 7)$, $d=3$. **1098.** $C(-1;\ 2;\ 3)$, $R=8$. **1099.** $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36, \\ 2x-z-1=0. \end{cases}$

1100. $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=65,\\ 18x-22y+5z-30=0.\end{cases}$ 1101. $\begin{cases}(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=27,\\ x+y-2=0.\end{cases}$
1103. $5x-8y+5z-7=0$. 1104. $x^2+y^2+z^2-10x+15y-25z=0$. 1105. $x^2+y^2+z^2+13x-9y+9z-14=0$. 1106. $x^2+(y+2)^2+z^2=41$. 1107. $6x-3y-2z-49=0$. 1108. $(2;\ -6;\ 3)$. 1109. $a=\pm 6$. 1110. $2x-y-z+5=0$. 1111. $x_1x+y_1y+z_1z=r^2$. 1112. $A^2R^2+B^2R^2+C^2R^2=D^2$. 1113. $(x_1-\alpha)(x-\alpha)+(y_1-\beta)(y-\beta)+(z_1-\gamma)(z-\gamma)=r^2$. 1114. $3x-2y+6z-11=0$, $6x+3y+2z-30=0$. 1115. $x+2y-2z-9=0$, $x+2y-2z+9=0$. 1116. $4x+3z-40=0$, $4x+3z+10=0$. 1117. $4x+6y+5z-103=0$, $4x+6y+5z+205=0$. 1118. $2x-3y+4z-10=0$, $3x-4y+2z-10=0$. 1120. $x-y-z-2=0$. 1122. $Ax+By+Cz+D=0$. 1123. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$. 1124. $d=|\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}-p|$; $d=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p|$. 1125. $(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0$; $(x_2-x_1)(x-x_1)+(y_2-y_1)(y-y_1)+(z_2-z_1)(z-z_1)=0$.

1126. $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$; $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0$. 1127. $(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0$; $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$. 1128. $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$; $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=0$. 1131. $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$.

1132. $[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]=0$; $[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]=[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2]$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)t$. 1133. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0$; $l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$. 1134. $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$. 1135. $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$. 1136. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{n}t$, $\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$. 1137. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2]\,t$, $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$. 1138. $\begin{cases}\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{n}+D=0,\\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}=0;\end{cases}$ $\begin{cases}Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,\\ Al+Bm+Cn=0.\end{cases}$

1139. $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$. 1140. $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=0$. 1141. $\boldsymbol{r}_0-\dfrac{\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{n}+D}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}}\boldsymbol{a}$; $x=x_0-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}\,l$, $y=y_0-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}\,m$, $z=z_0-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}\,n$. 1142. $\boldsymbol{r}_1-\dfrac{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}+D}{\boldsymbol{n}^2}\boldsymbol{n}$, $x=x_1-\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A^2+B^2+C^2}\,A$, $y=y_1-\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A^2+B^2+C^2}\,B$, $z=z_1-\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A^2+B^2+C^2}\,C$. 1143. $\boldsymbol{r}_0+\dfrac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}$, $x=x_0+\dfrac{(x_1-x_0)\,l+(y_1-y_0)\,m+(z_1-z_0)\,n}{l^2+m^2+n^2}\,l$, $y=y_0+\dfrac{(x_1-x_0)\,l+(y_1-y_0)\,m+(z_1-z_0)\,n}{l^2+m^2+n^2}\,m$, $z=z_0+\dfrac{(x_1-x_0)\,l+(y_1-y_0)\,m+(z_1-z_0)\,n}{l^2+m^2+n^2}\,n$. 1144. $d=\dfrac{\sqrt{[(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a}]^2}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2}}$,

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ n & l\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

1145. $d=\dfrac{|a_1a_2(r_2-r_1)|}{\sqrt{[a_1a_2]^2}}$; $d=\dfrac{\text{valor abs.}\begin{Vmatrix} l_1 & l_2 & x_2-x_1 \\ m_1 & m_2 & y_2-y_1 \\ n_1 & n_2 & z_2-z_1\end{Vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_1 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2\end{vmatrix}^2}}$.

1147. $\dfrac{R}{|a|}a$ y $-\dfrac{R}{|a|}a$; $x_1=\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $y_1=\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $z_1=\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ y $x_2=-\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $y_2=-\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $z_2=-\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$. 1148. $r_0+\dfrac{R}{|a|}a$ y $r_0-\dfrac{R}{|a|}a$; $x_1=x_0+\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $y_1=y_0+\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $z_1=z_0+\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$ y $x_2=x_0-\dfrac{Rl}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $y_2=y_0-\dfrac{Rm}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $z_2=z_0-\dfrac{Rn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$. 1149. $(r_1-r_0)(r-r_0)=R^2$. 1150. $(r-r_1)^2=\dfrac{(r_1n+D)^2}{n^2}$; $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\dfrac{(Ax_1+By_1+Cz_1+D)^2}{A^2+B^2+C^2}$.

1151. $\dfrac{nr}{|n|}-R=0$, $\dfrac{nr}{|n|}+R=0$; $\dfrac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}-R=0$, $\dfrac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+R=0$. 1152. $\dfrac{a(r-r_0)}{|a|}-R=0$, $\dfrac{a(r-r_0)}{|a|}+R=0$; $\dfrac{l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}-R=0$, $\dfrac{l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}+R=0$. 1153. 3, $\sqrt{3}$; (2; 3; 0), (2; -3; 0), (2; 0; $\sqrt{3}$), (2; 0; $-\sqrt{3}$). 1154. 4,3; (4; 0; -1), (-4; 0; -1). 1155. 15; $\left(0;\ -6;\ -\dfrac{3}{2}\right)$. 1156. Las ecuaciones de las proyecciones: a) sobre el plano Oxy: $\begin{cases} x^2+4xy+5y^2-x=0, \\ z=0,\end{cases}$ b) sobre el plano Oxz: $\begin{cases} x^2-2xz+5z^2-4x=0, \\ y=0;\end{cases}$ c) sobre el plano Oyz: $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0, \\ x=0.\end{cases}$ 1157. Una elipse; el centro de esta elipse es (2; -1; 1). N o t a. El centro de la proyección es la proyección del centro de la sección. 1158. Una hipérbola; el centro de esta hipérbola es (1; -1; -2). 1159. 1) Una elipse; el centro de esta elipse es (-1; 1; 3); 2) una parábola; no tiene centro; 3) una hipérbola;

el centro de esta hipérbola es $(2;\ -3;\ -4)$. **1160.** a) $1<|m|<\sqrt{2}$; b) $|m|<1$. **1161.** a) $m\neq 0$ y $m\geqslant-\frac{1}{4}$, pero, si $m=-\frac{1}{4}$ resulta una elipse degenerada, un punto; b) $m=0$. **1162.** $(9;\ 5;\ -2)$. **1163.** $(3;\ 0;\ -10)$. **1164.** $(6;\ -2;\ 2)$. **1165.** $m=\pm 18$. **1166.** $2x-y-2z-4=0$. **1167.** $x-2y+2z-1=0$, $x-2y+2z+1=0$; $\frac{2}{3}$. **1168.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2+z^2}{25}=1$. **1169.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$. **1170.** $q_1=\frac{2}{5}$, $q_2=\frac{4}{5}$. **1172.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$. **1173.** $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. **1178.** $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$. **1180.** a) $(3;\ 4;\ -2)$ y $(6;\ -2;\ 2)$ b) $(4;\ -3;\ 2)$, la recta es tangente a la superficie; c) la recta no tiene puntos comunes con la superficie; d) la recta está situada en la superficie. **1181.** $\left\{\begin{aligned} 2x-12y-z+16&=0,\\ x-2y+4&=0;\end{aligned}\right.$ $\left\{\begin{aligned} 2x-12y-z+16&=0,\\ x+2y-8&=0.\end{aligned}\right.$ **1182.** $\left\{\begin{aligned} y+2z&=0,\\ x-5&=0;\end{aligned}\right.$ $\left\{\begin{aligned} 2x-5z&=0,\\ y+4&=0.\end{aligned}\right.$ **1183.** $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{-2}$; $\frac{x}{1}=\frac{y+9}{12}=\frac{z+3}{2}$. **1184.** $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{-2}$, $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-4}$. **1185.** $\arccos\frac{1}{17}$. **1186.** 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; 3) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$. **1188.** $x^2+y^2-z^2=0$. **1189.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z-c)^2}{c^2}=0$. **1190.** $3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$. **1191.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{49}=0$. **1192.** $x^2-3y^2+z^2=0$. **1193.** $35x^2+35y^2-52z^2-232xy-116xz+116yz+232x-70y-116z+35=0$. **1194.** $xy+xz+yz=0$, el eje del cono pasa por el primero y séptimo octantes; $xy+xz-yz=0$, el eje del cono pasa por el segundo y octavo octantes; $xy-xz-yz=0$, el eje del cono pasa por el tercero y quinto octantes; $xy-xz+yz=0$, el eje del cono pasa por el cuarto y sexto octantes. **1195.** $9x^2-16y^2-16z^2-90x+225=0$. **1196.** $x^2+4y^2-4z^2+4xy+12xz-6yz=0$. **1197.** $4x^2-15y^2-6z^2-12xz-36x+24z+66=0$. **1198.** $16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y-26z-23=0$. **1199.** $x^2-y^2-2xz+2yz+x+y-2z=0$. **1200.** $5x^2+5y^2+2z^2-2xy+4xz+4yz-6=0$. **1201.** $45x^2+72y^2+45z^2+36xy+72xz-36yz+54x+216y-54z-567=0$. **1202.** $5x^2+10y^2+13z^2+12xy-6xz+4yz+26x+20y-38z+3=0$. **1203.** $x^2+4y^2+5z^2-4xy-125=0$. **1204.** 1) 18; 2) 10; 3) 0; 4) -50; 5) 0; 6) x_2-x_1; 7) 0; 8) 1. **1205.** 1) $x=12$; 2) $x=2$; 3) $x_1=-1$, $x_2=-4$; 4) $x_1=-1/6$; $x_2=1^1/_2$; 5) $x_{1,2}=\pm 2i$; 6) $x_1=2x_{2,3}=-2\pm i$; 7) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$, en donde n es un número entero; 8) $x=\frac{\pi}{6}(2n+1)$, en dondo n es un número entero arbitrario.

1206. 1) $x>3$; 2) $x>-10$; 3) $x<-3$; 4) $-1<x<7$. **1207.** 1) $x=16$, $y=7$; 2) $x=2$, $y=3$; 3) el sistema no tiene soluciones; 4) el sistema tiene infinidad de soluciones diferentes y cada una de ellas se puede calcular mediante la fórmula $y=\frac{x-1}{\sqrt{3}}$, en donde los valores numéricos de x se dan arbitrariamente y se calculan los valores de y; 5) $x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}$, $y=\frac{bc-ad}{a^2+b^2}$; 6) el sistema no tiene soluciones. **1208.** 1) $a\neq-2$; 2) $a=-2$, $b\neq 2$; 3) $a=-2$, $b=2$. **1209.** $a=10/13$. **1210.** 1) $x=-2t$, $y=7t$, $z=4t$; 2) $x=2t$, $y=3t$; $z=0$; 3) $x=0$, $y=t$, $z=3t$; 4) $x=0$, $y=t$, $z=2t$; 5) $x=2t$; $y=5t$, $z=4t$; 6) $x=4t$, $y=2t$, $z=3t$; 7) $x=t$, $y=5t$; $z=11t$; 8) $x=3t$, $y=4t$, $z=11t$; 9) $x=0$, $y=t$, $z=3t$; 10) $x=(a+1)t$, $y=(1-a^2)t$, $z=-(a+1)t$ con la condición de que $a\neq-1$ (si $a=-1$, cualquier solución del sistema se compone de tres números x, y, z, en donde x, y son arbitrarios y $z=x+y$); 11) $x=(b-6)t$, $y=(3a-2)t$, $z=(ab-4)t$ con la condición de que $a\neq\frac{2}{3}$ o $b\neq 6$ $\left(\text{si } a=\frac{2}{3} \text{ y } b=6,\ x,\ y \text{ son arbitrarios y } z=\frac{2}{3}x+2y\right)$; 12) $x=3(1-2a)t$, $y=(ab+1)t$, $z=3(b+2)t$ con la condición de que $a\neq-\frac{1}{2}$ ó $b\neq-2$ $\left(\text{si } a=-\frac{1}{2} \text{ y } b=-2, \text{ entonces } x,\ y \text{ son arbitrarios y } z=2(3y-x)\right)$. **1211.** -12. **1212.** 29. **1213.** 87. **1214.** 0. **1215.** -29. **1216.** $2a^3$. **1223.** -4. **1224.** 180. **1225.** 87. **1226.** 0. **1227.** $(x-y)(y-z)(z-x)$. **1229.** $2a^2b$. **1230.** $\operatorname{sen} 2\alpha$. **1231.** $xyz(x-y)(y-z)(z-x)$. **1232.** $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$. **1234.** 1) $x=-3$; $x_1=-10$, $x_2=2$. **1235.** 1) $x>7/2$; 2) $-6<x<=4$. **1236.** $x=24\frac{1}{2}$, $y=21\frac{1}{2}$, $z=10$. **1237.** $x=1$, $y=1$, $z=1$. **1238.** $x=2$, $y=3$, $z=4$. **1239.** $x=1$, $y=3$, $z=5$. **1240.** $x=13\frac{1}{4}$, $y=8\frac{1}{4}$, $z=14\frac{1}{2}$. **1241.** $x=2$, $y=-1$ $z=1$. **1242.** $x=\frac{b+c}{2}$, $y=\frac{a-b}{2}$, $z=\frac{a-c}{2}$. **1243.** $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{b+c}{2}$, $z=\frac{a+c}{2}$. **1244.** El sistema tiene infinidad de soluciones y cada una de ellas se puede calcular por las fórmulas $x=2z-1$, $y=z+1$, en donde z toma valores arbitrarios. **1245.** El sistema no tiene soluciones. **1246.** El sistema no tiene soluciones. **1247.** 1) $a\neq-3$; 2) $a=-3$, $b\neq\frac{1}{3}$; 3) $a=-3$, $b=\frac{1}{3}$. **1249.** El sistema tiene solución única; $x=0$, $y=0$, $z=0$. **1250.** El sistema tiene infinidad de soluciones y cada una de las cuales se puede hallar mediante las fórmulas $x=2t$, $y=-3t$, $z=5t$, en donde t toma valores arbitrarios. **1251.** $a=5$. **1252.** 30. **1253.** -20. **1254.** 0. **1255.** 48. **1256.** 1800. **1257.** $(b+c+d)(b-c-d)(b-c+d)(b+c-d)$. **1258.** $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$. **1259.** $(a+b+c+d)(a-b+c-d)[(a-c)^2+(b-d)^2]$. **1260.** $(be-cd)^2$.

INDICE

Primera parte

GEOMETRIA ANALITICA PLANA