# PROBLEMAS SOBRE LA TEORIA DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

L. VOLKOVYSKI G. LUNTS
I. ARAMANOVICH

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

Л. И. ВОЛКОВЫСКИЙ, Г. Л. ЛУНЦ,
И. Г. АРАМАНОВИЧ

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА“
МОСКВА

# PROBLEMAS SOBRE LA TEORIA DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

L. I. VOLKOVYSKI, G. L. LUNTS,
I. G. ARAMANOVICH

Segunda edición

Traducido del ruso por
CARLOS VEGA,
catedrático
de Matemáticas Superiores

EDITORIAL MIR MOSCU

Impreso en la URSS

На испанском языке

# INDICE

CAPÍTULO IV

SERIE DE LAURENT.
PUNTOS SINGULARES DE FUNCIONES ANALÍTICAS UNIFORMES.
RESIDUOS Y SUS APLICACIONES



CAPÍTULO V

DISTINTAS SERIES DE FUNCIONES.
INTEGRALES PARAMÉTRICAS



CAPÍTULO VI

PRODUCTOS INFINITOS.
FUNCIONES ENTERAS Y MEROMORFAS



CAPÍTULO VII

INTEGRALES DE TIPO DE CAUCHY.
FÓRMULAS INTEGRALES DE POISSON Y DE SCHWARZ

CAPITULO VIII

PROLONGACIÓN ANALÍTICA.
SINGULARIDADES DE CARÁCTER MULTIFORME.
SUPERFICIES DE RIEMANN



CAPITULO IX

TRANSFORMACIONES CONFORMES
(CONTINUACIÓN)



CAPITULO X

APLICACIONES A LA MECÁNICA Y A LA FÍSICA



CAPITULO XI

GENERALIZACIÓN DE FUNCIONES ANALÍTICAS

# PROLOGO DE LOS AUTORES A LA EDICION ESPAÑOLA

El libro "Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja" (TFVC) está destinado principalmente para los estudiantes de la Facultades de Mecánica y Matemáticas y de Física y Matemáticas de las Universidades, de las secciones correspondientes de los institutos pedagógicos y de los institutos politécnicos con un programa ampliado de matemáticas. Los "Problemas" contienen así mismo ciclos que se salen de los marcos de los programas. Algunos de ellos pueden servir de base para los trabajos de curso y como material para las labores de los seminarios de la TFVC.

Los autores estiman también que los "Problemas" pueden resultar útiles para personas que se especializan en la mecánica de medios continuos (hidrodinámica, teoría de elasticidad) y en electrotecnia, ya que contienen un número considerable de problemas o bien dedicados a la aplicación directa de la TFVC a estas ramas o bien relacionados con cuestiones que representan los fundamentos matemáticos de las mismas (transformaciones conformes, funciones armónicas, potenciales, integrales de tipo de Cauchy, etc.).

Para mayor comodidad en el uso de los "Problemas", en el índice, además de los títulos de los capítulos y parrágrafos, se señalan a veces los ciclos principales de problemas que éstos contienen (esto se refiere principalmente al material fundamental de estudio).

Se supone que el que recurra a los "Problemas" está familiarizado con los capítulos correspondientes de la TFVC. Si se emplea material adicional, se da la información necesaria y se hace referencia a la bibliografía. Para los libros que se mencionan con mayor frecuencia se emplea la siguiente numeración:

1 — А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, изд. 2-е, т. 1, 1967, т. 2, 1968, «Наука» (Markushévich A. I., Teoría de las funciones analíticas, vol. 1 y 11).

2 — М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е, Физматгиз, 1965 (Lavréntiev M. A. y Shabat B. V., Métodos de la teoria de funciones de variable compleja).

El primero de estos libros ha sido traducido recientemente al español por la editorial "Mir"[1] lo que sin duda facilitará a nuestros lectores el uso de los "Problemas".

Todas las sugerencias a la solución de los problemas se dan en el texto principal. Los problemas más difíciles, cuyos números están marcados con asterisco, están provistos de soluciones que se insertan en las respuestas.

Al preparar los "Problemas" se han empleado textos, manuales y monografías, tanto rusos, como extranjeros, que estaban al alcance de los autores.

Nos es sumamente grato que a la versión inglesa ya existente de nuestros "Problemas" se una ahora esta traducción al español, idioma ampliamente extendido.

Aprovechamos esta ocasión para agradecer nuestro colega, C. Vega, por la labor atenta que ha realizado al traducir nuestro libro.

*Los autores*

---

[1] *Markushévich A. I.*, Teoría de las funciones analíticas, vol. I y II, Editorial Mir, Moscú, 1970.

## CAPITULO I

# NUMEROS COMPLEJOS Y FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

En este capítulo, así como en todo este libro en general, siempre que no se diga lo contrario se emplean las notaciones: $z=x+iy=re^{i\varphi}$, $w=u+iv=\rho e^{i\theta}$ ($x$, $y$, $u$, $v$, $r$, $\rho$, $\varphi$ y $\theta$ son números reales, $r\geqslant 0$, $\rho\geqslant 0$); $\operatorname{Re} z=x$, $\operatorname{Im} z=y$, $\operatorname{Arg} z=\varphi$, $|z|=r$, $\bar{z}=x-iy$. Si no se hacen indicaciones adicionales, el valor principal del argumento $\arg z$ se define mediante las desigualdades $-\pi<\arg z\leqslant\pi$; el plano complejo cuyos puntos representan los números complejos $z$, se llamará $z$-plano; los términos "número complejo $z$" y "punto $z$" se emplean comúnmente como sinónimos.

## § 1. NUMEROS COMPLEJOS

### NÚMEROS COMPLEJOS, REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

**1.** Realice las operaciones indicadas:

1) $\frac{1}{i}$; 2) $\frac{1-i}{1+i}$; 3) $\frac{2}{1-3i}$; 4) $(1+i\sqrt{3})^3$.

**2.** Encuentre los módulos y los argumentos de los números complejos ($a$ y $b$ son números reales):

1) $3i$; 2) $-2$; 3) $1+i$; 4) $-1-i$; 5) $2+5i$; 6) $2-5i$;
7) $-2+5i$; 8) $-2-5i$; 9) $bi\,(b\neq 0)$; 10) $a+bi$ $(a\neq 0)$.

**3.** Resuelva la ecuación $\bar{z}=z^{n-1}$ (donde $n\neq 2$ es un número natural).

**4.** Halle todos los valores de las siguientes raíces y constrúyalos:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-1}$; 4) $\sqrt[6]{-8}$; 5) $\sqrt[8]{1}$;
6) $\sqrt{1-i}$; 7) $\sqrt{3+4i}$; 8) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 9) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

**5.** Demuestre que ambos valores de $\sqrt{z^2-1}$ se encuentran sobre la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la bisectriz del ángulo interior del triángulo con vértices en los puntos $-1$, $1$ y $z$, trazada por el vértice $z$.

**6.** Sean $m$ y $n$ dos números enteros. Demuestre que $(\sqrt[n]{z})^m$ toma $n/(n, m)$ diferentes valores, donde $(n, m)$ es el máximo común divisor de los números $m$ y $n$. Compruebe que los conjuntos de valores de $(\sqrt[n]{z})^m$ y de $\sqrt[n]{z^m}$ coinciden, si, y sólo si, $(n, m)=1$, es decir, si $n$ y $m$ son primos entre sí.

**7.** Demuestre las siguientes desigualdades partiendo de consideraciones geométricas:

1) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$; 2) $|z_1-z_2| \geqslant ||z_1|-|z_2||$.

Demuestre estas mismas desigualdades algebraicamente. Explique en cada caso cuándo tiene lugar el signo de igualdad.

**8.** Demuestre las siguientes desigualdades partiendo de consideraciones geométricas

1) $\left|\frac{z}{|z|}-1\right| \leqslant |\arg z|$; 2) $|z-1| \leqslant ||z|-1|+|z||\arg z|$.

**9.** Demuestre la identidad

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

y explique su significado geométrico.

**10.** Demuestre la identidad

$$|1-\bar{z}_1 z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).$$

**11.** Demuestre la desigualdad

$$|z_1+z_2| \geqslant \frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right|.$$

**12.** Sean $z_1$ y $z_2$ dos números complejos arbitrarios y sean $a_1$ y $a_2$ dos números reales $(a_1^2+a_2^2 \neq 0)$. Demuestre las desigualdades

$$|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1^2+z_2^2| \leqslant 2\frac{|a_1 z_1+a_2 z_2|^2}{a_1^2+a_2^2} \leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|.$$

*Sugerencia*. Introduzca el ángulo auxiliar $\alpha$ de manera que $\operatorname{tg}\alpha=a_1/a_2$, represente la expresión estimada en la forma $A+B$ sen $2\alpha+C$ cos $2\alpha$ y halle sus valores máximo y mínimo.

**13.** Demuestre las identidades

1) $(n-2)\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2+\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum\limits_{1 \leqslant k<s \leqslant n}|a_k+a_s|^2$;

2) $n\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2-\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum\limits_{1 \leqslant k<s \leqslant n}|a_k-a_s|^2$.

**14.** Demuestre que:

1) Si $z_1+z_2+z_3=0$ y $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, los puntos $z_1$, $z_2$ y $z_3$ son vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia unidad.

2) Si $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ y $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$, los puntos $z_1$, $z_2$, $z_3$ y $z_4$ o bien son vértices de un rectángulo o bien coinciden de dos en dos.

**15.** Encuentre los vértices de un polígono regular de $n$ lados, si su centro se encuentra en el punto $z=0$ y uno de sus vértices $z_1$ es conocido.

**16.** Sean $z_1$ y $z_2$ dos vértices adyacentes de un polígono regular de $n$ lados. Encuentre el vértice $z_3$ adyacente a $z_2$ $(z_3 \neq z_1)$.

**17.** Dados tres vértices $z_1$, $z_2$ y $z_3$ de un paralelogramo, halle su cuarto vértice $z_4$ opuesto al vértice $z_2$.

**18.** ¿Bajo qué condición tres puntos $z_1$, $z_2$ y $z_3$, distintos dos a dos, estarán sobre una misma recta?

**19.** ¿Bajo qué condición cuatro puntos $z_1$, $z_2$, $z_3$ y $z_4$, distintos dos a dos, estarán sobre una misma circunferencia o sobre una misma recta?

**20*.** Los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se encuentran a un mismo lado de una recta que pasa por el origen de coordenadas. Demuestre que los puntos $1/z_1, 1/z_2, \ldots, 1/z_n$ verifican la misma propiedad (indique respecto a qué recta) y que

$$z_1+z_2+\ldots+z_n \neq 0; \quad \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n} \neq 0.$$

**21.** Demuestre que, si $z_1+z_2+\ldots z_n=0$, cualquier recta que pase por el origen de coordenadas separa los puntos $z_1, z_2, \ldots z_n$, siempre que estos puntos no se hallen sobre dicha recta.

**22.** Demuestra que cualquier recta que pase por el centro de gravedad de un sistema de puntos materiales $z_1, z_2, \ldots z_n$ provistos de masas $m_1, m_2, \ldots m_n$ separa estos puntos, siempre que no se hallen sobre dicha recta.

---

Explique el significado geométrico de las relaciones indicadas en los problemas **23—34**.

**23.** $|z-z_0|<R$; $|z-z_0|>R$; $|z-z_0|=R$.

**24.** $|z-2|+|z+2|=5$; **25.** $|z-2|-|z+2|>3$.

**26.** $|z-z_1|=|z-z_2|$. **27.** 1) $\operatorname{Re} z \geqslant C$; 2) $\operatorname{Im} z < C$.

**28.** $0<\operatorname{Re}(iz)<i$.

**29.** $\alpha<\arg z<\beta$; $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta$ $(-\pi<\alpha<\beta\leqslant\pi)$.

**30.** $|z|=\operatorname{Re} z+1$. **31.** $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$.

**32.** $\operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$; $\operatorname{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$. **33.** $|2z|>|1+z^2|$.

**34.** 1) $|z|<\arg z$, si $0\leqslant\arg z<2\pi$;
2) $|z|<\arg z$, si $0<\arg z\leqslant 2\pi$.

En los problemas **35—38** se requiere determinar las familias de curvas en el $z$-plano definidas por las ecuaciones correspondientes.

**35.** 1) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}=C$; 2) $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=C$ $(-\infty < C < \infty)$.

**36.** 1) $\operatorname{Re} z^2=C$; 2) $\operatorname{Im} z^2=C$ $(-\infty < C < \infty)$.

**37.** $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda\ (\lambda>0)$. **38.** $\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=\alpha\ (-\pi<\alpha\leqslant\pi)$.

**39.** 1) Una familia de curvas en el $z$-plano viene dada por la ecuación

$$|z^2-1|=\lambda\quad(\lambda>0).$$

¿Para qué valores de $\lambda$ las curvas de la familia constarán de una curva simple y para qué valores se descompondrán?

2) Responda a las mismas preguntas en el caso de la familia

$$|z^2+az+b|=\lambda\quad(\lambda>0).$$

**40.** Halle las distancias máxima y mínima entre el origen de coordenadas y los puntos de la curva dada $(a>0)$:

1) $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a$; 2) $\left|z+\frac{b}{z}\right|=a$.

**41.** La función $\arg z$ queda definida uniformemente en todo punto $z\neq 0$, si tomamos $|z|-2\pi<\arg z\leqslant|z|$. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos en los que se altera la continuidad de la función $\arg z$ definida de esta forma?

**42.** ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos en los que se altera la continuidad de la función $\arg z$ definida uniformemente para todo $z\neq 0$ mediante las desigualdades $\ln|z|-2\pi<\arg z\leqslant\ln|z|$?

**43.** El valor inicial de $\operatorname{Arg} f(z)$ para $z=2$ se ha tomado igual a 0. El punto $z$ realiza una vuelta completa en el sentido opuesto al del movimiento de las agujas del reloj, manteniéndose sobre la circunferencia de centro en el origen de coordenadas y volviendo al punto $z=2$. Aceptando que $\operatorname{Arg} f(z)$ varía continuamente durante el movimiento del punto $z$, señale el valor de $\operatorname{Arg} f(2)$ después de la vuelta indicada, si

1) $f(z)=\sqrt{z-1}$; 2) $f(z)\,\sqrt[3]{z-1}$; 3) $f(z)=\sqrt{z^2-1}$;

4) $f(z)=\sqrt{z^2+2z-3}$; 5) $f(z)=\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$.

### PROYECCIÓN ESTEREOGRAFICA

**44.** Deduzca las fórmulas de la proyección estereográfica que expresan las coordenadas $(\xi, \eta, \zeta)$ de un punto $P$ de la esfera de diámetro 1, tangente en el origen de coordenadas al $z$-plano, en términos de las coordenadas $(x, y)$ del punto correspondiente $z$. Exprese también $x$ e $y$ mediante $\xi$, $\eta$ y $\zeta$ (se supone que los ejes $\xi$ y $\eta$ coinciden con los ejes $x$ e $y$ respectivamente).

*Observación*. En el problema **44** la correspondencia se establece entre los puntos del plano complejo y los de una esfera de radio 1/2 tangente a este plano. También se emplea otra forma de correspondencia, cuando se toma una esfera de radio 1 y el $z$-plano se traza por su centro. Véase, por ejemplo, [1; cap. I, § 5, n° 2].

**45.** ¿Cuáles son sobre la esfera las imágenes de los puntos $1, -1, i$ y $(1-i)/\sqrt{2}$?

**46.** ¿Cuál es en el plano la imagen del paralelo de latitud $\beta\left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$? ¿A qué corresponden los polos "sur" y "norte"?

**47.** Halle en la esfera las imágenes:

1) de los rayos $\arg z=\alpha$;
2) de las circunferencias $|z|=r$.

**48.** ¿Qué posición recíproca tienen en la esfera las imágenes de un par de puntos simétricos

1) respecto al punto $z=0$;
2) respecto al eje real;
3) respecto a la circunferencia unidad?

**49.** ¿Qué condición deben verificar los puntos $z_1$ y $z_2$ para ser proyecciones estereográficas de dos puntos diametralmente opuestos de la esfera?

**50.** ¿Qué transformación de la esfera convierte la imagen del punto $z$ en la imagen del punto $1/z$?

**51.** Halle en la esfera las imágenes de los recintos definidos por las desigualdades:

1) $\operatorname{Im} z>0$; 2) $\operatorname{Im} z<0$; 3) $\operatorname{Re} z>0$;
4) $\operatorname{Re} z<0$; 5) $|z|<1$; 6) $|z|>1$.

**52.** ¿Qué corresponde en la esfera a la familia de rectas paralelas del plano?

**53.** Demuestre que mediante la proyección estereográfica las circunferencias sobre la esfera se transforman en circunferencias o rectas del plano. ¿Cuáles son las circunferencias sobre la esfera que se transforman en rectas?

**54.** Sea $K$ una circunferencia del plano correspondiente a la circunferencia $K'$ sobre la esfera, sea $N$ el polo norte de la esfera y sea $S$ el vértice del cono tangente a la esfera a lo largo de $K'$ (se supone que $K'$ no es un círculo mayor). Demuestre que el centro de la circunferencia $K$ se encuentra sobre el rayo $NS$. Considere el caso en que $K'$ es un círculo mayor.

**55.** Demueste que en la proyección estereográfica los ángulos entre curvas sobre la esfera son iguales a los ángulos entre sus imágenes en el plano.

**56.** Halle la longitud $k(z, a)$ de la cuerda que une los puntos de la esfera correspondientes a los puntos $z$ y $a$. Considere también el caso en que $a$ es el punto infinito.

**57.** Dados dos puntos $z_1$ y $z_2$ (uno de los cuales puede ser el infinito), halle el lugar geométrico de los puntos del $z$-plano al que corresponde en la esfera una circunferencia equidistante de las imágenes de los puntos dados.

## § 2. FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES

Por definición se toma

$$\exp z = e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y);$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \ \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

**58.** Valiéndose de la definición de $e^z$, demuestre que

1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$; 2) $e^{z + 2\pi i} = e^z$.

3) Si $e^{z+\omega} = e^z$ para todo $z$, entonces

$$\omega = 2\pi k i \ (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

La relación $\exp i\varphi = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$ (fórmula de Euler) permite emplear para la notación de un número complejo la forma exponencial $z = re^{i\varphi}$ en lugar de la forma trigonométrica $z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$. En lo sucesivo, por $\varphi$ entenderemos generalmente el valor principal del argumento, es decir, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

**59.** Represente en la forma exponencial los números $1$, $-1$, $i$, $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$.

**60.** Halle $e^{\pm \pi i/2}$; $e^{k\pi i}$ $(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$.

**61.** Halle los módulos y los valores principales de los argumentos de los números complejos $e^{2+i}$; $e^{2-3i}$; $e^{3+4i}$; $e^{-3-4i}$; $-ae^{i\varphi}$ $(a > 0$, $|\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{-i\varphi}$ $(|\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ $(0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2\pi)$.

**62.** Halle las sumas:

1) $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;

2) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx$;

3) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos (2n-1) x$;

4) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \ldots + \operatorname{sen} (2n-1) x$;

6) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \ldots + (-1)^{n-1} \operatorname{sen} nx$.

**63.** Halle las sumas:

1) $\cos \alpha + \cos (\alpha + \beta) + \ldots + \cos (\alpha + n\beta)$;

2) $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \ldots + \operatorname{sen} (\alpha + n\beta)$.

**64.** Partiendo de la definición de las funciones correspondientes, demuestre que:

1) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$; 2) $\operatorname{sen} z = \cos \left( \frac{\pi}{2} - z \right)$;

3) $\operatorname{sen} (z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$;

4) $\cos (z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$;

5) $\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$; 6) $\operatorname{ch} (z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

**65.** Demuestre que, si $\cos(z+\omega)=\cos z$ para todo $z$, entonces, $\omega=2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

**66.** Demuestre que:

1) $\operatorname{sen} iz=i \operatorname{sh} z$; 2) $\cos iz=\operatorname{ch} z$; 3) $\operatorname{tg} iz=i \operatorname{th} z$;
4) $\operatorname{ctg} iz=-i \operatorname{cth} z$.

**67.** Exprese en términos de funciones trigonométricas e hiperbólicas de variable real las partes real e imaginaria, así como los módulos de las funciones siguientes:

1) $\operatorname{sen} z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{tg} z$; 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$; 6) $\operatorname{th} z$.

**68.** Halle las partes real e imaginaria de los siguientes valores de funciones:

1) $\cos(2+i)$; 2) $\operatorname{sen} 2i$; 3) $\operatorname{tg}(2-i)$;
4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-i \ln 2\right)$; 5) $\operatorname{cth}(2+i)$; 6) $\operatorname{th}\left(\ln 3+\frac{\pi i}{4}\right)$.

**69.** Halle para cada una de las funciones $e^z$, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{cth} z$ el conjunto de puntos $z$ donde ellas toman:

1) valores reales;
2) valores imaginarios puros.

**70.** Halle todos los valores de $z$ para los cuales

1) $|\operatorname{tg} z|=1$; 2) $|\operatorname{th} z|=1$.

Por definición se toma $\operatorname{Ln} z=\ln r+i\varphi+2\pi i k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $\ln z = \ln r+i\varphi$ $(-\pi<\varphi\leqslant\pi)$ ($\ln z$ se denomina *valor principal* de la magnitud $\operatorname{Ln} z$).

**71.** Calcule:

1) $\operatorname{Ln} 4$, $\operatorname{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$; 2) $\operatorname{Ln} i$, $\ln i$;
3) $\operatorname{Ln}\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$; 4) $\operatorname{Ln}(2-3i)$, $\operatorname{Ln}(-2+3i)$.

**72.** Halle el error en los razonamientos que conducen a la paradoja de J. Bernoulli: $(-z)^2=z^2$; por esto, $2 \operatorname{Ln}(-z)=2 \operatorname{Ln} z$ y, por consiguiente, $\operatorname{Ln}(-z)=\operatorname{Ln} z$ (!).

**73.** El valor inicial de $\operatorname{Im} f(z)$ para $z=2$ se ha tomado igual a cero. El punto $z$ realiza una vuelta completa en el sentido opuesto al del movimiento de las agujas del reloj, manteniéndose en la circunferencia de centro en el punto $z=0$ y volviendo al punto $z=2$. Aceptando que $f(z)$ varía continuamente durante el movimiento del punto $z$, señale el valor de $\operatorname{Im} f(z)$ después de dicha vuelta, si:

1) $f(z)=2 \operatorname{Ln} z$; 2) $f(z)=\operatorname{Ln}\frac{1}{z}$;
3) $f(z)=\operatorname{Ln} z-\operatorname{Ln}(z+1)$; 4) $f(z)=\operatorname{Ln} z+\operatorname{Ln}(z+1)$.

Por definición, cualesquiera que sean los números complejos $a \neq 0$ y $\alpha$, se toma

$$a^\alpha=\exp\{\alpha \operatorname{Ln} a\} \tag{1}$$

o bien $a^\alpha=e^{\alpha \operatorname{Ln} a}$ si continuamos comprendiendo $\exp z$ como $e^z$ [1].

---

[1] De acuerdo con (1) $e^z=\exp\{z \operatorname{Ln} e\}=\exp\{z(1+2\pi i k\}$. Sin embargo, si es que no se dice lo contrario, tomaremos $k=0$, es decir, $e^z=\exp z$, al igual que antes.

**74.** Halle todos los valores de las potencias siguientes:

1) $1^{\sqrt{2}}$; 2) $(-2)^{\sqrt{2}}$; 3) $2^{i}$; 4) $1^{-i}$; 5) $i^{i}$;

6) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; 7) $(3-4i)^{1+i}$; 8) $(-3+4i)^{1+i}$.

**75.** Pruebe que en el caso de un exponente racional ($\alpha = m/n$) la definición general de potencia $z^{\alpha}$ coincide con la definición corriente:

$$z^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{z})^{m}$$

(véase asimismo el problema **6**).

**76.** ¿Coinciden los conjuntos de valores de $a^{2\alpha}$, $(a^{\alpha})^2$ y $(a^2)^{\alpha}$?

Por definición, la igualdad $w = \operatorname{Arccos} z$ es equivalente a la igualdad $z = \cos w$. Análogamente se definen las funciones Arcsen $z$, Arctg $z$, Arcctg $z$ y las funciones hiperbólicas inversas Arch $z$, Arsh $z$, Arth $z$, Arcth $z$.

**77.** Demuestre las siguientes igualdades (se toman en consideración todos los valores de las raíces):

1) $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;

2) $\operatorname{Arcsen} z = -i \operatorname{Ln} i (z + \sqrt{z^2 - 1})$;

3) $\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$;

4) $\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}$; 5) $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;

6) $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$; 7) $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$;

8) $\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}$.

**78.** Demuestre que cualquiera que sea el valor de Arccos $z$ se puede escoger el valor de Arcsen $z$ de manera que la suma de estos valores sea igual a $\pi/2$. Demuestre una proposición análoga para Arctg $z$ y Arcctg $z$.

*Observación*. Las igualdades Arcsen $z$ + Arccos $z = \pi/2$ y Arctg $z$ + Arcctg $z = \pi/2$ siempre se entienden en el sentido indicado en el problema anterior.

**79.** Compruebe que todos los valores de Arccos $z$ están contenidos en la fórmula

$$\operatorname{Arccos} z = \pm i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

*donde por* $\sqrt{z^2-1}$ *se entiende uno de sus valores.*

**80.** 1) ¿Para qué valores de $z$ todos los valores de las funciones Arccos $z$, Arcsen $z$ y Arctg $z$ son reales?

2) ¿Para qué valores de $z$ la función Arsh $z$ toma valores imaginarios puros?

**81.** Halle todos los valores de las siguientes funciones:

1) Arcsen 1/2; 2) Arccos 1/2; 3) Arccos 2; 4) Arcsen $i$;

5) Arctg $(1+2i)$; 6) Arch $2i$; 7) Arth $(1-i)$.

82. Halle todas las raíces de las siguientes ecuaciones:
1) $\operatorname{sen} z+\cos z=2$; 2) $\operatorname{sen} z-\cos z=3$;
3) $\operatorname{sen} z-\cos z=i$; 4) $\operatorname{ch} z-\operatorname{sh} z=1$;
5) $\operatorname{sh} z-\operatorname{ch} z=2i$; 6) $2\operatorname{ch} z+\operatorname{sh} z=i$.

83. Halle todas las raíces de las siguientes ecuaciones:
1) $\cos z=\operatorname{ch} z$; 2) $\operatorname{sen} z=i\operatorname{sh} z$; 3) $\cos z=i\operatorname{sh} 2z$.

## § 3. SUCESIONES Y SERIES NUMERICAS

84. Demuestre que, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ converge y $|\arg c_n|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, la serie converge absolutamente.

85. Sean convergentes las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$. Demuestre que siendo $\operatorname{Re} c_n\geqslant 0$, también converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.

86. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ posee la propiedad de que las cuatro partes suyas, compuestas por los términos pertenecientes a un mismo cuadrante cerrado del plano, convergen. Demuestre que la serie dada converge absolutamente.

87. Demuestre la fórmula (transformación de Abel)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k=\sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k-b_{k+1})-S_{m-1}b_m+S_n b_n,$$

donde $1\leqslant m\leqslant n$, $S_k=a_1+a_2+\ldots+a_k$ $(k\geqslant 1)$, $S_0=0$.

88. Demuestre que para la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, donde $b_n>0$, es suficiente que sean acotadas las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y que la sucesión de números $\{b_n\}$ tienda monótonamente hacia el cero (criterio de Dirichlet).

*Sugerencia.* Recurra a la transformación de Abel.

89. Demuestre que para la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, donde $b_n$ son números reales, es suficiente que converja la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y que la sucesión $\{b_n\}$ sea monótona y acotada (criterio de Abel).

**90.** Demuestre que para la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, b_n = 0$; 2) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, |b_n - b_{n+1}|$ converja:

3) la sucesión $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$, donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, sea acotada.

**91.** Sea $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = q$. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge (absolutamente), si $q < 1$, y diverge, si $q > 1$.

**92.** *Tomando como ejemplo las series*

$$1 + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4} + \ldots \quad (1 < \alpha < \beta)$$

y

$$\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \ldots \quad (0 < \alpha < \beta < 1),$$

compruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ puede ser convergente aun cuando $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$.

**93.** Demuestre que, si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1$, para la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es suficiente que sea $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| - 1\right) < -1$ (criterio de Raabe).

**94.** Demuestre el criterio de Gauss: si $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1 + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donde $a$ no depende de $n$ y $a < -1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge absolutamente.

Analice la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ en los problemas **95—104**.

**95.** $c_n = \frac{n}{(2i)^n}$. **96.** $c_n = \frac{n!}{(in)^n}$. **97.** $c_n = e^{in}$. **98.** $c_n = \frac{e^{in}}{n}$.
**99.** $c_n = \frac{e^{in\varphi}}{n}$. **100.** $c_n = \frac{e^{in}}{n^2}$. **101.** $c_n = \frac{1}{n} e^{\pi i/n}$.

**102.** $c_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ \ldots\ (\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ \ldots\ (\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}$ (serie hipergeométrica), $\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 0$.

**103.** $c_n = \frac{\cos in}{2^n}$. **104.** $c_n = \frac{n \operatorname{sen} in}{3^n}$.

**105.** Halle los puntos de acumulación de los conjuntos:

1) $z=1+(-1)^n \frac{n}{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$;

2) $z=\frac{1}{m}+\frac{i}{n}$ ($m$, $n$ son números enteros arbitrarios);

3) $z=\frac{p}{m}+i\frac{q}{n}$ ($m$, $n$, $p$ y $q$ son números enteros arbitrarios):

4) $|z|<1$.

**106.** Demuestre que de una sucesión $\{z_n\}$ acotada de puntos se puede extraer una subsucesión convergente.

**107.** Demuestre las siguientes proposiciones:

1) La convergencia de la sucesión $\{z_n=x_n+iy_n\}$ equivale a la convergencia sumultánea de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.

2) Para que exista el límite $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$ es necesario y suficiente que existan los límites $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|\neq 0$ y (definiendo convenientemente $\arg z_n$) $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n$. Si el $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ no es un número negativo, se puede aceptar, por ejemplo, que $-\pi<\arg z_n\leqslant\pi$.

¿En qué casos la convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ equivale a la convergencia de la sucesión $\{|z_n|\}$ solamente?

**108.** Basándose en los resultados del problema **107** demuestre que:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt[n]{z}-1\right)\right]=\ln r+i\varphi+2\pi i k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

## § 4. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

### FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE REAL

En los problemas **95—115** se requiere determinar las curvas definidas por las ecuaciones dadas.

**109.** $z=1-it$; $0\leqslant t\leqslant 2$. **110.** $z=t+it^2$; $-\infty<t<\infty$.

**111.** $z=t^2+it^4$; $-\infty<t<\infty$.

**112.** $z=a(\cos t+i\operatorname{sen} t)$; $\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{2}$; $a>0$.

**113.** $z=t+\frac{i}{t}$; $-\infty<t<0$.

**114.** 1) $z=t+i\sqrt{1-t^2}$; $-1\leqslant t\leqslant 1$; 2) $z=-t+i\sqrt{1-t^2}$; (se toma el valor aritmético de la raíz).

**115.** 1) $z=a(t+i-ie^{-it})$; $-\infty<t<\infty$, $a>0$;

2) $z=ia+at-ibe^{-it}$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a>0$, $b>0$.

**116.** Dada la transformación $w = z^2$ se requiere:

1) hallar las imágenes de las curvas $x = C$, $y = C$, $x = y$, $|z| = R$ y $\arg z = \alpha$ y explicar cuáles de estas curvas se transforman biunívocamente;

2) hallar las preimágenes (en el $z$-plano) de las curvas $u = C$ y $v = C$ $(w = u + iv)$.

**117.** Dada la transformación $w = 1/z$, halle:

1) las imágenes de las curvas $x = C$, $y = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ y $|z - 1| = 1$;

2) las preimágenes de las curvas $u = C$ y $v = C$.

**118.** Para las transformaciones $w = z + \frac{1}{z}$ y $w = z - \frac{1}{z}$ halle las imágenes de las circunferencias $|z| = R$.

**119.** Para la transformación $w = z + \frac{1}{z}$ halle en el $z$-plano la preimagen de la red rectangular $(u = C,\ v = C)$ del plano $w$.

**120.** ¿En qué se transforma la circunferencia $|z| = 1$ mediante la transformación $w = z/(1 - z)^2$?

**121.** Para la transformación $w = e^z$ halle:

1) las imágenes de las curvas $x = C$, $y = C$ y $x = y$;

2) las preímágenes de la curva $\rho = \theta$ $(0 \leqslant \theta < \infty)$.

**122.** Halle en qué transforman la red rectangular $(x = C,\ y = C)$ del plano $z$ las funciones:

1) $w = z^2 + z$; 2) $w = \operatorname{cth} z$; 3) $w = e^{z^2}$.

**123.** ¿En qué transforma la función $w = e^z + z$ los segmentos de las rectas $x = C$ y las rectas $y = C$ pertenecientes a la franja $0 \leqslant y \leqslant \pi$?

**124.** ¿Qué corresponde en el $z$-plano a la red polar $|w| = R$, $\arg w = \alpha$ en las transformaciones: 1) $w = e^{1/z}$; 2) $w = e^{z^2}$?

## CONTINUIDAD

**125.** Una función $f(z)$, definida en una vecindad de un punto $z_0$, *se llama continua según Heine en el punto* $z_0$, si para cualquier sucesión $\{z_n\}$, convergente hacia $z_0$, se verifica la condición $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0)$; esta misma función se llama continua según Cauchy, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que de la desigualdad $|z - z_0| < \delta$ se desprende que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Demuestre la equivalencia de ambas definiciones (véase, por ejemplo, [1, capítulo I, § 3, n° 6]).

**126.** Las funciones $\frac{\operatorname{Re} z}{z}$, $\frac{z}{|z|}$, $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$ y $\frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ están definidas para $z \neq 0$. ¿Cuáles pueden ser definidas en el punto $z = 0$ de manera que sean continuas en este punto?

**127.** ¿Serán continuas las funciones 1) $1/(1-z)$, 2) $1/(1+z^2)$ en el interior del círculo unidad ($|z|<1$)? ¿Serán uniformemente continuas?

**128.** 1) Demuestre que la función $e^{-1/|z|}$ es uniformemente continua en el círculo $|z| \leqslant R$ excluido el punto $z=0$.

2) ¿Será uniformemente continua en este mismo recinto la función $e^{-1/z^2}$?

3) ¿Será uniformemente continua la función $e^{-1/z^2}$ en el sector $0<|z| \leqslant R$, $|\arg z| \leqslant \pi/6$?

**129.** La función $w=e^{-1/z}$ está definida en todo punto excepto el punto $z=0$. Demuestre que:

1) esta función es acotada pero no continua en el semicírculo $0<|z| \leqslant 1$, $|\arg z| \leqslant \pi/2$;

2) en el interior de este semicírculo la función es continua pero no uniformemente;

3) la función es uniformemente continua en el sector $0<|z| \leqslant 1$, $|\arg z| \leqslant \alpha < \pi/2$.

**130.** La función $f(z)$ es uniformemente continua en el círculo $|z|<1$. Demuestre que existe el límite $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n)$ para todo punto $\zeta$ de la circunferencia $|z|=1$ y cualquier sucesión $z_n \longrightarrow \zeta$, $|z_n|<1$. Demuestre también que este límite no depende de la selección de la sucesión $\{z_n\}$ y que, si la función se define en la frontera del círculo por medio del paso al límite, resultará continua en todo el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$.

## § 5. FUNCIONES ANALITICAS Y ARMONICAS

### CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN

**131.** Compruebe que las condiciones de Cauchy-Riemann se verifican para las funciones $z^n$, $e^z$, $\cos z$ y $\operatorname{Ln} z$ y demuestre que

$$(z^n)'=nz^{n-1}, \quad (e^z)'=e^z, \quad (\cos z)'=-\operatorname{sen} z, \quad (\operatorname{Ln} z)'=\frac{1}{z}.$$

**132.** Halle los valores que deben tomar las constantes $a$, $b$ y $c$ para que la función $f(z)$ sea analítica:

1) $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$;

2) $f(z)=\cos x(\operatorname{ch} y+a \operatorname{sh} y)+i \operatorname{sen} x(\operatorname{ch} y+b \operatorname{sh} y)$.

**133.** Halle los recintos donde la función

$$f(z)=|x^2-y^2|+2i|xy|$$

es analítica.

**134.** $f(z)=u+iv=\rho e^{i\varphi}$ es una función analítica. Demuestre que, si una de las funciones $u$, $v$, $\rho$ o $\theta$ es igual idénticamente a una constante, la función $f(z)$ es constante.

**135.** Sea $z=re^{i\varphi}$ y sea $f(z)=u(r, \varphi)+iv(r, \varphi)$. Escriba las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

**136.** Demuestre que, si $f(z)=u+iv$ es una función analítica y $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{n}$ son vectores ortogonales, tales, que la rotación del vector $\boldsymbol{s}$ hacia el vector $\boldsymbol{n}$ en ángulo recto se realiza en el sentido opuesto al del movimiento de las agujas del reloj, resulta,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right.$ y $\frac{\partial}{\partial n}$ son derivadas de funciones de dos variables reales respecto a la dirección correspondiente).

**137.** Demuestre que la función $f(z)=\bar{z}$ no es diferenciable en ningún punto.

**138.** Demuestre que la función $w=z\operatorname{Re} z$ es diferenciable sólo en el punto $z=0$; halle $w'(0)$.

**139.** Demuestre que en el punto $z=0$ la función $f(z)=\sqrt{|xy|}$ verifica las condiciones de Cauchy-Riemann pero no tiene derivada.

**140.** Demuestre las siguientes proposiciones:

1) Si para la función $w=f(z)$ existe en el punto $z$ el límite

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left[\operatorname{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right],$$

las derivadas parciales $u_x$ y $v_y$ existen y coinciden.

2) Si existe el límite $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left[\operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$, las derivadas parciales $u_y$ y $v_x$ existen y $u_y=-v_x$.

3) Si se supone de antemano que las funciones $u$ y $v$ son diferenciables, la existencia de cualquiera de los límites de los puntos 1) ó 2) implica la existencia del otro y, por consiguiente, la diferenciabilidad de la función $f(z)$.

**141.** La función $w=f(z)$ verifica en el punto $z$ las siguientes condiciones: 1) las funciones $u$ y $v$ son diferenciables; 2) el límite $\lim\limits_{\Delta z \to \infty}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|$ existe. Demuestre que o bien $f(z)$ o bien $\overline{f(z)}$ es diferenciable en el punto $z$.

**142.** La función $w=f(z)$ verifica en el punto $z$ las siguientes condiciones: 1) las funciones $u$ y $v$ son diferenciables; 2) existe el límite $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}$. Demuestre que $f(z)$ es diferenciable en el punto $z$.

**143.** Sea $w=f(z)=u+iv$ y sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ diferenciables en el punto $z$. Demuestre que para $\Delta z \longrightarrow 0$ el conjunto de todos los posibles valores límites de la razón $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ es o bien un punto o bien una circunferencia.

Si en la relación

$$w = w(z) = f(x, y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = \varphi(z, \bar{z})$$

$z$ y $\bar{z}$ se consideran como veriables independientes, las derivadas respecto a estas variables serán iguales a

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

En lo sucesivo aceptamos la siguiente denotación:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = w_z, \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = w_{\bar{z}},$$

etc.

**144.** Demuestre las siguientes relaciones:

2) $dw = w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}$; 2) $w_z = \frac{1}{2}[(u_x + v_y) + i(-u_y + v_x)]$;

3) $w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}[(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)]$.

**145.** Demuestre que las ecuaciones de Cauchy — Riemann son equivalentes a la ecuación $w_{\bar{z}} = 0$.

**146.** Demuestre que la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ puede ser escrita en la forma $\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0$.

**147.** Demuestre que $\overline{dw} = d\bar{w}$, $\overline{w_z} = \bar{w}_{\bar{z}}$ y $\overline{w_{\bar{z}}} = \bar{w}_z$ (la raya grande significa que al valor conjugado se pasa después de la diferenciación).

**148.** Demuestre que para la función $z(w)$, inversa respecto a $w(z)$, se tiene

$$dz = \frac{\bar{w}_{\bar{z}}}{|w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2}\, dw + \frac{-w_{\bar{z}}}{|w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2}\, d\bar{w}.$$

**149.** Demuestre que el jacobiano de la transformación $w(z)$ es igual a

$$J_{w/z} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2.$$

**150.** Demuestre las siguientes igualdades:

1) $\frac{dw}{dz} = w_z + w_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}$, donde $\alpha = \arg dz$;

2) $\max\limits_{\alpha} \left|\frac{dw}{dz}\right| = |w_z| + w_{\bar{z}}|$;

3) $\min\limits_{\alpha} \left|\frac{dw}{dz}\right| = ||w_z| - |w_{\bar{z}}||$.

**151.** Demuestre que, siendo $\alpha = \arg dz$ y $\alpha' = \arg dw$, se tiene:

1) $$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{J_{w/z}}{(u_x \cos\alpha + u_y \operatorname{sen}\alpha)^2 + (v_x \cos\alpha + v_y \operatorname{sen}\alpha)^2} = \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 \frac{1}{J_{z/w}};$$

2) $$\text{máx}\, \frac{d\alpha'}{d\alpha} = p,\ \text{mín}\, \frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{1}{p},\ \text{donde}\ p = \frac{\text{máx}\left|\frac{dw}{dz}\right|}{\text{mín}\left|\frac{dw}{dz}\right|} = \frac{|w_z| + |w_{\bar z}|}{\big||w_z| - |w_{\bar z}|\big|}.$$

## FUNCIONES ARMÓNICAS

Una función $u(x, y)$ que posee en un recinto derivadas parciales continuas hasta el segundo orden inclusive y que verifica la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama *función armónica*. Dos funciones armónicas $u(x, y)$ y $v(x, y)$, ligadas por las ecuaciones de Cauchy — Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

se llaman *conjugadas*.

**152.** Demuestre las siguientes proposiciones:

1) Una combinación lineal de funciones armónicas $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x, y)$ es una función armónica.

2) Si los argumentos de una función armónica $u(x, y)$ se someten a la transformación de inversión $x = \xi/(\xi^2 + \eta)$ e $y = \eta/(\xi^2 + \eta^2)$, *la función transformada será armónica.*

3) Si los argumentos de una función armónica $u(x, y)$ se someten a la transformación $x = \varphi(\xi, \eta)$ e $y = \psi(\xi, \eta)$, donde $\varphi$ y $\psi$ son funciones armónicas conjugadas, la función transformada será armónica. (De aquí se desprende, en particular, la proposición anterior).

4) Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones armónicas conjugadas y sea el jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ diferente de cero en un recinto. Entonces las funciones inversas $x(u, v)$ e $y(u, v)$ también serán armónicas y conjugadas.

**153.** Demuestre que para toda función $u(x, y)$, armónica en un recinto simplemente conexo $G$, existe una familia de funciones armónicas conjugadas que se diferencian una de otra en una constante aditiva

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + C.$$

2) Demuestre que, si el recinto $G$ es múltiplemente conexo y está limitado por el contorno exterior $\Gamma_0$ y por los contornons interio-

res $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ (fig. 1) (cada uno de los cuales puede degenerar en un punto), la función $v(x, y)$ puede resultar multiforme y la fórmula general para sus valores será

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + \sum_{k=1}^{n} m_k \pi_k + C.$$

La integral se toma a lo largo de un camino perteneciente a $G$, $m_k$ son números enteros y

$$\pi_k = \int_{\gamma_k} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

donde $\gamma_k$ son contornos cerrados simples, cada uno de los cuales contiene en su interior una parte conexa de la frontera ($\Gamma_k$) (los números $\pi_k$ se llaman *períodos de la integral* o *constantes cíclicas*).

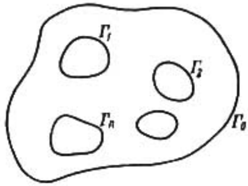

FIG. 1

Para que la función $v(x, y)$ sea uniforme es necesario y suficiente que todos los números $\pi_k$ sean iguales a cero.

*Observación*. El contorno $\Gamma_0$ puede no existir siempre que la función $u(x, y)$ sea armónica en el punto infinito. Esto significa, por definición, que la función $U(\xi, \eta)$, obtenida de la función $u(x, y)$ mediante la transformación de inversión (véase el problema **152**, 2), es armónica en el origen de coordenadas. Se puede demostrar que en este caso $\sum_{k=1}^{n} \pi_k = 0$.

**154.** Suponiendo conocido el hecho de que toda la función analítica es infinitamente diferenciable, demuestre los siguientes teoremas:

1) Las partes real e imaginaria de una función analítica $f(z) = u + iv$ son funciones armónicas conjugadas.

2) Las derivadas (de cualquier orden) de una función armónica son también funciones armónicas.

**155.** 1) ¿Será armónica la función $u^2$, siendo armónica la función $u$?

2) Sea $u$ una función armónica. ¿Para qué funciones $f$ la función $f(u)$ también será armónica?

**156.** ¿Serán armónicas las funciones $|f(z)|$, $\arg f(z)$, y $\ln |f(z)|$, siendo $f(z)$ una función analítica?

**157.** Transforme el operador de Laplace $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ a las coordenadas polares $(r, \varphi)$ y halle la solución de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ dependiente sólo de $r$.

**158.** Calcule para $n = 1, 2, 3, 4$ los polinomios armónicos $p_n(x, y)$ y $q_n(x, y)$ definidos por la igualdad $z^n = p_n + iq_n$. Encuentre la forma general de $p_n$ y $q_n$ en el sistema polar de coordenadas.

Valiéndose de las fórmulas del problema **153**, halle en los problemas **159—163** las funciones conjugadas a las funciones armónicas dadas en los recintos señalados.

**159.** $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

**160.** $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $0 < |z| \leqslant \infty$.

**161.** $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ a) en el recinto que se obtiene excluyendo del plano el semieje $y = 0$, $-\infty < x \leqslant 0$; b) en el plano con el origen de coordenadas excluido $(0 < |z| < \infty)$.

**162.** $u(x, y) = \frac{1}{2} \{\ln(x^2 + y^2) - \ln[(x-1)^2 + y^2]\}$ a) en el plano con los puntos $z = 0$ y $z = 1$ excluidos; b) en el plano con el segmento del eje real $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ excluido; c) en el plano con el rayo $y = 0$, $1 \leqslant x < \infty$ excluido.

**163.** $u(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ln[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]$ a) en el plano con los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ $(z_k = x_k + iy_k;\ z_1 \neq z_j)$ excluidos; b) en el plano del cual se ha excluido la quebrada simple (es decir, que no se interseca consigo misma) que une dos puntos dados.

**164.** ¿Existe una función analítica $f(z) = u + iv$, tal, que 1) $u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$; 2) $v = \ln(x^2 + y^2) - x^2 + y^2$; 3) $u = e^{y/x}$?

Halle en los problemas **165—168** la función analítica $f(z) = u + iv$ *a partir de su parte real o imaginaria dada.*

**165.** $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$.

**166.** $u = e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y) + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y + x^3 - 3xy^2 + y$.

**167.** $v = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$.

**168.** $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

Analice en los problemas **169—176** la existencia de funciones armónicas (diferentes de una constante) del tipo indicado y, si existen, calcúlelas.

**169.** $u = \varphi(x)$. **170.** $u = \varphi(ax + by)$ ($a$ y $b$ son números reales).

**171.** $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **172.** $u = \varphi(xy)$. **173.** $u = \varphi(x^2 + y^2)$.

**174.** $u = \varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$. **175.** $u = \varphi(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

**176.** $u = \varphi(x^2 + y)$.

En los problemas **177—180** demuestre la existencia y encuentre la función analítica $f(z)$ a partir de su módulo o su argumento dado.

**177.** $\rho = (x^2 + y^2) e^x$. **178.** $\rho = e^{r^2 \cos 2\varphi}$.

**179.** $\vartheta = xy$. **180.** $\vartheta = \varphi + r \operatorname{sen} \varphi$

**181.** Demuestre la siguiente proposición: para que una familia de curvas $\varphi(x, y) = C$, donde $\varphi$ es una función dos veces continuamente diferenciable, sea una familia de líneas equipotenciales de una función armónica es necesario y suficiente que la razón $\Delta\varphi/(\operatorname{grad} \varphi)^2$ dependa sólo de $\varphi$.

*Sugerencia.* Demuestre previamente que la función armónica requerida es de la forma $u = f[\varphi(x, y)]$.

En los problemas **182—186** halle las funciones analíticas, tales, que o bien sus partes reales, o bien sus partes imaginarias, o bien sus módulos, o bien sus argumentos se mantienen constantes a lo largo de cualquier curva de la familia correspondiente.

**182.** $x = C$. **183.** $y = C$. **184.** $y = Cx$.

**185.** $x^2 + y^2 = C$. **186.** $x^2 + y^2 = Cx$.

### SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL MÓDULO Y DEL ARGUMENTO DE LA DERIVADA

**187.** La transformación se realiza mediante las funciones $w = z^2$ y $w = z^3$. Halle el ángulo de rotación ($\vartheta$) de una dirección con origen en el punto $z_0$ y el coeficiente de dilatación ($k$) en los siguientes puntos:

1) $z_0 = 1$; 2) $z_0 = -\frac{1}{4}$; 3) $z_0 = 1 + i$; 4) $z_0 = -3 + 4i$.

**188.** ¿Qué parte del plano se contrae y qué parte se dilata, si la transformación se realiza mediante la función:

1) $w = z^2$? 2) $w = z^2 + 2z$? 3) $w = \frac{1}{z}$? 4) $w = e^z$? 5) $w = \ln(z - 1)$?

**189.** El recinto $G$ se transforma conforme y biunívocamente mediante la función $f(z)$ en el recinto $G'$. Halle las fórmulas que permiten calcular el área $S$ del recinto $G'$ y la longitud $L$ del arco en el que se transforma un arco $l$ perteneciente al recinto $G$.

**190.** Halle la longitud $L$ de la espiral en la que transforma el segmento $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ la función $e^z$.

**191.** Halle el área del recinto en el que transforma el rectángulo $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 4$ la función $e^z$.

**192.** Halle el recinto $D$ en el que transforma el rectángulo $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 8$ la función $e^z$. Calcule el área del recinto $D$ utilizando la formula obtenida en el problema **189** y explique por qué esta fórmula no ofrece el resultado correcto.

CAPITULO II

# TRANSFORMACIONES CONFORMES RELACIONADAS CON FUNCIONES ELEMENTALES

## § 1. FUNCIONES LINEALES

### FUNCIONES LINEALES ENTERAS

**193.** Halle la función lineal entera que transforma el triángulo, cuyos vértices se encuentran en los puntos 0, 1 e $i$, en un triángulo semejante con vértices en 0, 2 y $1+i$.

**194.** Halle la transformación lineal entera con el punto inmóvil $1+2i$ que transforma el punto $i$ en el punto $-i$.

**195.** Halle para las transformaciones dadas el punto inmóvil finito $z_0$ (si es que existe), el ángulo de rotación $\vartheta$ alrededor del mismo y el coeficiente de dilatación $k$. Reduzca estas transformaciones a la forma canónica $w-z_0=\lambda(z-z_0)$.

1) $w=2z+1-3i$; 2) $w=iz+4$; 3) $w=z+1-2i$;
4) $w-w_1=a(z-z_1)\,(a\neq 0)$; 5) $w=az+b\,(a\neq 0)$.

**196.** Halle la forma general de la transformación lineal entera que transforma:

1) el semiplano superior en sí mismo;
2) el semiplano superior en el semiplano inferior;
3) el semiplano superior en el semiplano de la derecha;
4) el semiplano de la derecha en sí mismo.

Compruebe que en todos los casos la transformación queda definida unívocamente al indicarse un par de puntos interiores o dos pares de puntos frontera correspondientes.

**197.** Halle la forma general de la transformación lineal entera que transforma:

1) la franja $0<x<1$ en sí misma;
2) la franja $-2<y<1$ en sí misma;
3) la franja limitada por las rectas $y=x$ e $y=x-1$ en sí misma.

Estudie qué pares de puntos corresponderán uno a otro en estas transformaciones y en qué caso esta correspondencia determinará unívocamente la transformación.

**198.** Halle la función lineal entera $w(z)$ que transforma la franja comprendida entre las rectas dadas en la franja $0 < u < 1$ y que verifica la condición de normalización dada:

1) $x = a$, $x = a + h$; $w(a) = 0$;

2) $x = a$, $x = a + h$; $w\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im} w\left(a + \frac{h}{2} + i\right) < 1$;

3) $y = kx$, $y = kx + b$; $w(0) = 0$;

4) $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$; $w(b_1) = 0$.

**199.** Halle la función lineal entera que transforma el círculo $|z| < 1$ en el círculo $|w - w_0| < R$ de manera que los centros de los círculos correspondan uno al otro y el diámetro horizontal se transforme en el diámetro que forma con la dirección del eje real el ángulo $\alpha$.

### FUNCIONES HOMOGRÁFICAS

**200.** Dada la función $w = \frac{1}{z}$ halle las imágenes de las siguientes curvas:

1) la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = ax$;
2) la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = by$;
3) el haz de rectas paralelas $y = x + b$;
4) el haz de rectas $y = kx$;
5) el haz de rectas que pasan por un punto dado $z_0 \neq 0$;
6) la parábola $y = x^2$.

**201.** Halle en qué transforma la función $w = \frac{1}{z - z_0} + h$:

1) la red rectangular $x = C$ e $y = C$;
2) la red polar $|z - z_0| = R$ y $\arg(z - z_0) = \alpha$.

**202.** Dada la función $w = \frac{z - z_1}{z - z_2}$:

1) Demuestre que la preimagen de la familia $|w| = \lambda\ (0 < \lambda < \infty)$ es una familia de circunferencias (las circunferencias de Apolonio). Para un valor de $\lambda$ dado halle el radio y la posición en el $z$-plano del centro de la circunferencia correspondiente.

2) Halle las preimágenes de los rayos $\arg w = \theta$.

3) Construya la red del $z$-plano que corresponde a la red polar del $w$-plano.

4) Halle el recinto del $z$-plano que corresponde al semicírculo $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

En los problemas **203—207** explique en qué se transforman los recintos indicados mediante las funciones dadas.

**203.** El cuadrante $x > 0$, $y > 0$; $w = \frac{z - i}{z + i}$.

**204.** El semicírculo $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; $w = \frac{2z - i}{2 + iz}$.

**205.** El ángulo $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$; $w = \frac{z}{z - 1}$.

**206.** La franja $0 < x < 1$; 1) $w = \frac{z-1}{z}$; 2) $w = \frac{z-1}{z-2}$.

**207.** El anillo $1 < |z| < 2$; $w = \frac{z}{z-1}$.

**208.** Transforme en la franja vertical $0 < \operatorname{Re} w < 1$

1) el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ con el círculo $\left|z - \frac{d}{2}\right| \leqslant \frac{d}{2}$ excluido;

2) la lúnula comprendida entre las circunferencias

$$\left|z - \frac{d_1}{2}\right| = \frac{d_1}{2} \text{ y } \left|z - \frac{d_2}{2}\right| = \frac{d_2}{2} \quad (d_1 < d_2);$$

3) el exterior de los círculos $\left|z + \frac{d_1}{2}\right| = \frac{d_1}{2}$ y $\left|z - \frac{d_2}{2}\right| = \frac{d_2}{2}$ de manera que $w(d_2) = 0$.

**209.** Halle las funciones homográficas que transforman los puntos $-1$, $i$ y $1+i$ en los puntos:

1) $0$, $2i$ y $1-i$; 2) $i$, $\infty$, y $1$ respectivamente.

**210.** Halle las funciones homográficas que transforman los puntos $-1$, $\infty$ e $i$ en los puntos

1) $i$, $1$ y $1+i$; 2) $\infty$, $i$ y $1$; 3) $0$, $\infty$ y $1$ respectivamente.

**211.** Halle las funciones homográficas a partir de las siguientes condiciones:

1) los puntos $1$ e $i$ son inmóviles y el punto $0$ se transforma en el punto $-1$;

2) los puntos $\frac{1}{2}$ y $2$ son inmóviles y el punto $\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ se transforma en el $\infty$;

3) el punto $i$ es un punto inmóvil doble y el punto $1$ se transforma en el $\infty$.

**212.** Halle la función homográfica que transforma los puntos $-1$, $0$ y $1$ en los puntos $1$, $i$ y $-1$ respectivamente y explique qué corresponde al semiplano superior en esta transformación.

**213.** Halle la forma general de la transformación homográfica que transforma:

1) el semiplano superior en sí mismo;

2) el semiplano superior en el semiplano inferior;

3) el semiplano superior en el semiplano de la derecha.

**214.** Halle la transformación del semiplano superior en sí mismo con la siguiente condición de normalización:

1) $w(0) = 1$, $w(1) = 2$, $w(2) = \infty$; 2) $w(0) = 1$, $w(i) = 2i$.

*Observación.* Acerca de la transformación del semiplano superior en sí mismo con otra condición de normalización véase el problema **226**.

**215.** Halle la función $w(z)$ que transforma el círculo $|z| < R$ en el semiplano de la derecha $\operatorname{Re} w > 0$ de modo que $w(R) = 0$, $w(-R) = \infty$ y $w(0) = 1$. ¿Cuál será en esta transformación la imagen del semicírculo superior?

Dos puntos $P_1$ y $P_2$ se llaman simétricos respecto a una circunferencia $K$ de centro $O$ y radio $R$, si se encuentran sobre un mismo rayo que nace en $O$ y

$$OP_1 \cdot OP_2 = R^2.$$

**216.** Halle los puntos simétricos al punto $2+i$ respecto a las circunferencias: 1) $|z|=1$; 2) $|z-i|=3$.

**217.** Halle la imagen simétrica respecto a la circunferencia unidad de las curvas siguientes:

1) $|z|=\frac{1}{2}$; 2) $|z-1|=1$; 3) $y=2$;

4) $|z-z_0|=|z_0|$ $(z_0=x_0+iy_0)$;

5) $|z-z_0|=\sqrt{|z_0|^2-1}$ $(|z_0|>1)$;

6) la hipérbola $x^2-y^2=1$;

7) la frontera del triángulo rectilíneo con vértices $z_1$, $z_2$ y $z_3$ $(z_1 \neq 0)$.

**218.** Demuestre que para la simetría de los puntos $P_1$ y $P_2$ respecto a la circunferencia $K$ es necesario y suficiente que se verifique una de las dos condiciones siguientes:

1) toda circunferencia $K_1$ que pasa por los puntos $P_1$ y $P_2$ sea ortogonal a $K$;

2) $\frac{MP_1}{MP_2}=\text{const}$ para todo punto $M$ de la circunferencia $K$ (es decir, $K$ es una circunferencia de Apolonio respecto a los puntos $P_1$ y $P_2$).

---

**219.** La función $w=e^{i\alpha}\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}$ $(\beta=a+ib,\quad b>0)$ transforma el semiplano superior en el círculo unidad:

1) halle $\arg w(x)=\theta(x)$:

2) halle $w'(\beta)$;

3) explique qué parte del semiplano superior se contrae y qué parte se dilata.

**220.** Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ en el círculo unidad $|w|<1$ de manera que:

1) $w(i)=0$, $\arg w'(i)=-\frac{\pi}{2}$; 2) $w(2i)=0$, $\arg w'(2i)=0$;

3) $w(a+bi)=0$, $\arg w'(a+bi)=\theta$ $(b>0)$.

**221.** Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ en el círculo $|w-w_0|<R$ de manera que el punto $i$ corresponda al centro del círculo y la derivada en este punto sea positiva.

**222.** Transforme el círculo $|z|<2$ en el semiplano $\operatorname{Re} w>0$ de manera que $w(0)=1$ y $\arg w'(0)=\pi/2$.

**223.** Transforme el círculo $|z-4i|<2$ en el semiplano $v>u$ de manera que al centro del círculo corresponda el punto $-4$ y al punto $2i$ de la circunferencia, el origen de coordenadas.

**224.** Halle la forma general de la función homográfica $w(z)$ que transforma el círculo $|z| < 1$ en el semiplano de la derecha $\operatorname{Re} w > 0$ de manera que $w(z_1) = 0$ y $w(z_2) = \infty$, donde $z_1$ y $z_2$ son dos puntos dados de la circunferencia $|z| = 1$, tales, que $\arg z_1 < \arg z_2$.

*Construya la familia de curvas del círculo $|z| < 1$, correspondiente* a la red polar del semiplano $\operatorname{Re} w > 0$.

*Sugerencia.* Recurra a la forma general de la transformación homográfica *para tres pares de puntos correspondientes y halle* arg $\dfrac{e^{i\varphi} - z_1}{e^{i\varphi} - z_2}$.

**225.** Halle el centro $w_0$ y el radio $R$ de la circunferencia en la que se transforma el eje real mediante la función $w = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ ($\operatorname{Im} z_2 \neq 0$).

**226.** Halle la función que transforma el semiplano superior en sí mismo de manera que $w(a) = b$ y $\arg w'(a) = \alpha$ ($\operatorname{Im} a > 0$, $\operatorname{Im} b > 0$).

*Sugerencia.* Transforme previamente, con la correspondiente condición de normalización, ambos ejemplares del semiplano en el círculo unidad.

**227.** Transforme el semiplano superior en el inferior de manera que $w(a) = a$ y $\arg w'(a) = -\dfrac{\pi}{2}$ ($\operatorname{Im} a > 0$).

**228.** Dada la función $w = e^{i\alpha}\dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ ($|a| < 1$) que transforma el círculo unidad en sí mismo:

1) halle $\arg w(e^{i\varphi}) = \theta(\varphi)$;
2) halle $w'(0)$ y $w'(a)$;
3) explique qué parte del círculo unidad se contrae y qué parte se dilata;
4) halle máx $\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ y mín $\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ para $|z| \leqslant 1$.

**229.** *Transforme el círculo $|z| < 1$ en el círculo $|w| < 1$ de manera que:*

1) $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; 2) $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

3) $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}$; 4) $w(a) = a$, $\arg w'(a) = \alpha$.

**230.** Transforme el círculo $|z| < R_1$ en el círculo $|w| < R_2$ de manera que $w(a) = b$ y $\arg w'(a) = \alpha$ ($|a| < R_1$, $|b| < R_2$).

**231.** Transforme el círculo $|z| < 1$ en el círculo $|w - 1| < 1$ de *manera que* $w(0) = 1/2$ y $w(1) = 0$.

**232.** Transforme el círculo $|z - 2| < 1$ en el círculo $|w - 2i| < 2$ de manera que $w(2) = i$ y $\arg w'(2) = 0$.

**233.** Halle la forma general de la función homográfica $w(z)$ que transforma el círculo $|z| < R$ en sí mismo y verifica las condiciones siguientes:

1) $w(a) = 0$ ($|a| < R$); 2) $w(a) = b$ ($|a| < R$, $|b| < R$);
3) $w(\pm R) = \pm R$.

**234.** Transforme el círculo $|z|<1$ en sí mismo de manera que dos puntos interiores dados $z_1$ y $z_2$ correspondan a los puntos $\pm a\,(0<a<1)$; halle $a$.

*Sugerencia.* Emplee el resultado del problema **233**, 2) y la identidad del problema **10**.

**235.** Transforme el círculo $|z|<1$ en sí mismo de manera que el segmento $y=0$, $0\leqslant x\leqslant a\,(a<1)$ del eje real corresponda a un segmento del eje real simétrico respecto al origen de coordenadas. Halle la longitud del segmento transformado.

**236.** Demuestre que una transformación lineal que transforma un círculo en un círculo queda determinada unívocamente al especificar las imágenes de un punto interior y de un punto de la frontera.

**237.** El círculo unidad se transforma en sí mismo de manera que el punto $z_0\neq 0$ pasa al centro del círculo. Demuestre que en tal caso una semicircunferencia unidad se transforma en una semicircunferencia si, y sólo si, sus extremos se encuentran sobre el diámetro que pasa por el punto $z_0$.

**238.** Construya la transformación del círculo unidad en sí mismo en la que la preimagen del centro se encuentra sobre el eje real y el arco $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ de la circunferencia unidad se transforma en los siguientes arcos:

1) $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$; 2) $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{7\pi}{6}$.

## § 2. CUESTIONES COMPLEMENTARIAS DE LA TEORIA DE TRANSFORMACIONES LINEALES

### FORMAS CANÓNICAS DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Una transformación homográfica con un punto inmóvil $z_0$ se denomina *parabólica*. Una transformación parabólica puede ser representada en la forma conónica

$$\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+h,$$

si $z_0\neq\infty$, ó

$$w=z+h,$$

si $z_0=\infty$.

Una transformación homográfica con dos distintos puntos inmóviles $z_1$ y $z_2$ tiene la forma canónica

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=k\,\frac{z-z_1}{z-z_2},$$

si $z_1\neq\infty$, $z_2\neq\infty$ y $w-z_1=k\,(z-z_1)$, si $z_2=\infty$; una transformación con dos distintos puntos inmóviles se denomina *hiperbólica*, si $k>0$, *elíptica*, si $k=e^{i\alpha}$ y $\alpha\neq 0$, y *loxodrómica*, si $k=ae^{i\alpha}$, donde $a\neq 1$ y $\alpha\neq 0$ ($\alpha$ y $a$ son números reales, $a>0$).

**239.** Demuestre las siguientes proposiciones:

1) La transformación homográfica general $w=\frac{az+b}{cz+d}$ puede ser reducida a la forma $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, donde $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=1$.

2) Si $\alpha+\delta$ es un número real, la transformación es elíptica, cuando $|\alpha+\delta|<2$; hiperbólica, cuando $|\alpha+\delta|>2$, y parabólica, cuando $|\alpha+\delta|=2$.

3) Si $\operatorname{Im}(\alpha+\delta)\neq 0$, la transformación es loxodrómica.

**240.** Demuestre que si una transformación lineal tiene dos puntos inmóviles, el producto de las derivadas en estos puntos es igual a la unidad.

**241.** Halle las circunferencias que en la transformación parabólica $\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+n$ corresponden a sí mismas.

**242.** Halle la forma general de la transformación parabólica del círculo $|z|<R$ en sí mismo, si el punto $R$ es inmóvil.

**243.** *Demuestre las siguientes propiedades de la transformación* hiperbólica:

1) Toda circunferencia que pasa por los dos puntos inmóviles se transforma en sí misma, conservándose el sentido del recorrido.

2) Toda circunferencia ortogonal a las circunferencias que pasan por los puntos inmóviles se transforma en una circunferencia que verifica la misma propiedad. (Esta propiedad se deduce directamente de la propiedad 1).

*Sugerencia.* Analice primero el caso en que los puntos inmóviles son 0 y $\infty$.

**244.** Demuestre que dada una transformación elíptica:

1) Toda circunferencia ortogonal a las circunferencias que pasan por los dos puntos inmóvoles se transforma en sí misma, conservándose el sentido del recorrido.

2) *Un arco circular que une los puntos inmóviles se transforma en* un arco circular que une los puntos inmóviles y forma un ángulo $\alpha$ con el primer arco ($\alpha=\arg k$).

**245.** a) *Demuestre que para una transformación loxodrómica se* conservan las propiedades 2) de las transformaciones hiperbólicas (véase el problema **243**) y elípticas (véase el problema **244**).

2) Demuestre que para una transformación loxodrómica no existen circunferencias inmóviles, siempre que $\alpha\neq\pi$ ($\alpha=\arg k$). Demuestre que, siendo $\alpha=\pi$, las circunferencias que pasan por los puntos inmóviles se transforman en sí mismas alterándose el sentido del recorrido.

**246.** Demuestre que para la transformación loxodrómica $w=ae^{i\alpha}z$ las espirales logarítmicas $r=Ae^{\frac{\ln a}{\alpha}\varphi}$ $(A>0)$ se transforman en sí mismas.

**247.** Demuestre que la transformación lineal $w = e^{i\lambda}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ $(a = |a|e^{i\alpha}, |a| < 1)$, que transforma el círculo unidad en sí mismo, puede ser solamente o bien elíptica, o bien parabólica, o bien hiperbólica. Explique para qué valores de $a$ tiene lugar cada uno de los casos señalados. Encuentre los puntos inmóviles de la transformación y redúzcala a la forma canónica.

### ALGUNAS FÓRMULAS DE APROXIMACIÓN PARA TRANSFORMACIONES LINEALES

**248.** El semiplano superier se transforma en el círculo unidad de manera que el punto $z = hi$ $(h > 0)$ pasa al centro del círculo. Halle la longitud $\Gamma$ de la imagen del segmento $[0, a]$ del eje real $(a > 0)$ y obtenga las fórmulas lineales de aproximación de $\Gamma$ para pequeños valores de $a/h$ y para pequeños valores de $h/a$.

**249.** El círculo unidad se transforma en sí mismo de manera que la preimagen del centro del círculo—el punto $x_0$—se encuentra sobre el eje real. Halle la longitud $\Gamma$ de la imagen del arco $0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma$ de la circunferencia unidad $(\gamma \leqslant \pi)$. ¿Cóma varía la magnitud $\Gamma/\gamma$ en dependencia del signo de $x_0$?

**250.** En las condiciones del problema **249** obtenga las fórmulas:

1) $\Gamma = \frac{1+x_0}{1-x_0}\gamma + O(\gamma^3)$ para pequeños valores de $\gamma$;

2) $\Gamma = \pi - \varepsilon \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2} + O(\varepsilon^3)$ para pequeños valores de $\varepsilon$, donde $\varepsilon = 1 - x_0$.

**251.** El círculo unidad se transforma en sí mismo de manera que el punto $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, pasa al centro. Los puntos $z_1 = d^{i\varphi_1}$ y $z_2 = e^{i\varphi_2}$ se encuentran a un mismo lado del diámetro que pasa por el punto $z_0$ $(\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant \varphi_0 + \pi)$. Aceptando que el punto $z_0$ es próximo a la circunferencia unidad, demuestre que para la longitud $\Gamma$ de la imagen del arco $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ de la circunferencia unidad es válida la fórmula

$$\Gamma = \varepsilon\left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi_2-\varphi_0}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\right] + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi_2-\varphi_0}{2}\right] + O(\varepsilon^3),$$

donde $\varepsilon = 1 - r_0$.

### TRANSFORMACIONES DE RECINTOS BICONEXOS ELEMENTALES

**252.** Demuestre que, si la transformación lineal del círculo $|z| < 1$ en sí mismo no se reduce a una rotación, no existe anillo concéntrico alguno de centro en el origen de coordenadas que se transforme en un anillo concéntrico.

*Obsrevación.* Esta proposición es un caso particular del siguiente teorema: Para que exista una transformación conforme del anillo $r_1 < |z| < r_2$ en el anillo $R_1 < |w| < R_2$ es necesario y suficiente que se cumpla la condición $R_2/R_1 = r_2/r_1$. Además, en este caso la función que realiza la transformación puede tener sólo dos formas: o bien $w=az$ o bien $w=a/z$. La transformación queda determinada unívocamente al especificar un par de puntos frontera correspondientes (véase, por ejemplo, [2, cap. II, § 3]).

**253.** 1) Transforme el anillo $2<|z|<5$ en el anillo $4<|w|<10$ de manera que $w(5)=-4$.

2) Transforme el anillo $1<|z-2i|<2$ en el anillo $2<|w-3+ +2i|<4$ de manera que $w(0)=-1-2i$.

Tiene lugar el siguiente teorema:

Toda región biconexa, cuyas fronteras no degeneran en puntos, puede ser transformada conformemente en un anillo concéntrico con la razón bien definida $\mu$ de los radios de las circunferencias interior y exterior ($\mu$ se denomina *módulo* del recinto biconexo).

**254.** Transforme el semiplano $\operatorname{Re} z>0$ sin el círculo $|z-h|<R$ $(h>R)$ en el anillo $\rho<|w|<1$ de manera que el eje imaginario se convierta en la circunferencia $|w|=1$. Halle $\rho$.

*Sugerencia.* Construya la circunferencia de centro en el origen de coordenadas y ortogonal a la circunferencia $|z-h|=R$; encuentre la transformación lineal que transforma el eje real y la circunferencia construida en dos rectas que se intersecan (ortogonalmente) y compruebe que el recinto considerado se transforma en este caso en un anillo concéntrico. Demuestre que el centro de este anillo coincide con el origen de coordenadas, si los puntos de intersección de la circunferencia construida en el eje real pasan a 0 y al $\infty$.

**255.** Transforme el semiplano $\operatorname{Re} z>0$ sin el círculo $|z-h|<1$, $h>1$, en el anillo $1<|w|<2$. Halle $h$.

**256.** Transforme el anillo excéntrico comprendido entre las circunferencias $|z-3|=9$ y $|z-8|=16$ en el anillo $\rho<|w|1$. Halle $\rho$.

**257.** Transforme el recinto biconexo comprendino entre las circunferencias $|z-z_1|=r_1$ y $|z-z_2|=r_2$ (donde o bien $|z_2|-|z_1|> >r_1+r_2$ o bien $|z_2-z_1|<|r_2-r_1|$) en un anillo circular concéntrico de centro en el origen de coordenadas. Halle el módulo ($\mu$) del recinto.

*Sugerencia.* Halle un par de puntos simétricos respecto a ambas circunferencias y transforme uno de ellos en 0 y otro en el $\infty$.

*Observación.* Es fácil ver que el método de solución recomendado en las sugerencias a los problemas **254** y **257** es el mismo.

**258.** Empleando la solución del problema anterior, halle los módulos de los recintos biconexos comprendidos entre las circunferencias dadas:

1) $|z-i|=2$, $|z+i|=5$; 2) $|z-3i|=1$, $|z-4|=2$.

### PROPIEDADES DE GRUPO DE TRANSFORMACIONES HOMOGRAFICAS

La transformación $T(z)=T_2[T_1(z)]$ se denomina *producto* de las transformaciones $T_1$ y $T_2$ y se denota en la forma $T=T_2T_1$ (el orden tiene importancia ya que, en general, $T_2T_1\neq T_1T_2$). El conjunto $G$ de transformaciones $T$ forma *un grupo*, si contiene el producto de dos cualesquiera transformaciones pertenecientes a él y si junto a la transformación $T$ contiene la transformación $T^{-1}$ inversa a ésta. El grupo compuesto por las potencias $T^n$ y $T^{-n}$ de una transformación $T$ se denomina *cíclico*. Si el grupo $G$ se obtiene a partir de las transformaciones $T_1, T_2, \ldots, T_n$ construyendo todas las transformaciones inversas, todos los productos de las transformaciones dadas y todas las transformaciones inversas a los mismos, se dice que estas transformaciones *generan* el grupo $G$. Los puntos que se obtienen a partir de un punto fijo $z$ mediante todas las transformaciones del grupo $G$ se denominan *equivalentes* o *congruentes* respecto al grupo $G$.

Se llama *recinto fundamental* del grupo $G$ a todo recinto (conexo o no conexo) que no contiene ningún par de puntos equivalentes uno al otro respecto al grupo dado y tal que una vecindad de todo punto frontera contiene puntos equivalentes a los puntos del recinto.

**259.** Sean $T_i$ transformaciones lineales:

$$T_i(z)=\frac{a_iz+b_i}{c_iz+d_i},\quad \Delta_i=\begin{vmatrix} a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{vmatrix}\neq 0\ (s=1,\ 2,\ \ldots).$$

Demuestre las siguientes proposiciones:

1) $T=T_1T_2$ es una transformación lineal con determinante $\Delta=\Delta_1\Delta_2$.

2) El producto de las transformaciones es asociativo, es decir,

$$(T_3T_2)\,T_1=T_3\,(T_2T_1).$$

3) Para toda transformación $T_1$ existe la inversa $T_i^{-1}$, es decir,

$$T_iT_i^{-1}=T_i^{-1}T_i=J,$$

donde $J(z)\equiv z$ es la transformación idéntica.

4) El producto de transformaciones no es, en general, conmutativo (dé ejemplos),

**260.** Demuestre que las transtormaciones

$$T_1=z,\ T_2=\frac{1}{z},\ T_3=1-z,\ T_4=\frac{1}{1-z},\quad T_5=\frac{z-1}{z},\quad T_6=\frac{z}{z-1}$$

forman un grupo (el grupo de *razones anarmónicas*).

**261.** Demuestre que es grupo cíclico el conjunto de transformaciones lineales consistentes en la rotación del plano alrededor del origen de coordenadas en ángulos múltiplos de $\alpha$. ¿En qué caso este grupo estará compuesto por un número finito de transformaciones?

**262.** 1) Demuestre que el conjunto de transformaciones de la forma $w=\frac{az+b}{cz+d}$, donde $a$, $b$, $c$ y $d$ son números reales enteros y $ad-bc=1$, es un grupo (este grupo se denomina *modular*).

2) Demuestre que, si $a$, $b$, $c$ y $d$ son números enteros complejos (es decir, números de forma $m+ni$, donde $m$ y $n$ son números reales enteros) que satisfacen la condición $ad-bc=1$, el conjunto de transformaciones del punto 1) también constituye un grupo (*el grupo Picard*).

**263.** Halle los recintos fundamentales de los grupos generados por las transformaciones:

1) $T(z)=e^{2\pi i/n}z$ ($n$ es un número natural); 2) $T_1(z)=e^{2\pi i/n}z$, $T_2=\frac{1}{z}$; 3) $T(z)=z+\omega$; 4) $T_1(z)=z+\omega$, $T_2(z)=-z$; 5) $T_1(z)=$

$=z+\omega_1$, $T_2(z)=z+\omega_2\left(\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1}\neq 0\right)$ (grupo *doblemente periódico*); 6) $T_1(z)=z+\omega_1$, $T_2(z)=z+\omega_2$, $T_3(z)=-z$; 7) $T_1(z)=z+\omega$; $T_2(z)=iz$; 8) $T_1(z)=z+\omega$, $T_2(z)=e^{2\pi i/3}z$; 9) $T_1(z)=z+\omega$, $T_2(z)=e^{2\pi i/6}z$.

**264.** Halle los grupos de transformaciones lineales que corresponden en la proyección estereográfica a la rotación de la esfera

1) alrededor del diámetro vertical;

2) alrededor del diámetro paralelo al eje real;

3) alrededor del diámetro paralelo al eje imaginario;

4) alrededor de aquel diámetro para el que el punto $a$ es la proyección estereográfica de uno de sus extremos.

*Sugerencia.* Si $z_1$ y $z_2$ son las imágenes de puntos de la esfera diametralmente opuestos, se tiene $z_1\bar{z}_2=-1$ (véase el problema **49**).

**265.** 1) Demuestre que el grupo de transformaciones lineales, que corresponden a la rotación de la esfera y que transforman los puntos con las proyecciones estereográficas $a$ y $b$ uno en otro, se define mediante la relación

$$\frac{w-b}{1+\bar{b}w}=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1+\bar{a}z}.$$

2) *Demuestre que la diferencial* $ds=\frac{|dz|}{1+|z|^2}$ *es invariante respecto a las transformaciones de este grupo y representa la longitud esférica del elemento de arco* $dz$ *(es decir, la longitud de la imagen de este elemento en la esfera).*

## TRANSFORMACIONES LINEALES Y LA GEOMETRIA DE LOBACHEVSKI

Cuando la geometría de Lobachevski se interpreta en el círculo unidad $|z|<1$, el papel de las rectas lo desempeñan los arcos de las circunferencias *ortogonales a la circunferencia unidad pertenecientes a este círculo; el papel del* movimiento lo desempeñan las transformaciones lineales del círculo unidad en sí mismo y el papel de la distancia entre los puntos $z_1$ y $z_2$ lo desempeña la magnitud $\rho(z_1, z_2)=\frac{1}{2}\ln(\alpha, \beta, z_2, z_1)$, donde $\alpha$ y $\beta$ son los puntos de intersección de la "recta" que pasa por los puntos $z_1$ y $z_2$ con la circunferencia unidad (el orden de los puntos es el siguiente: $\alpha$, $z_1$, $z_2$, $\beta$), mientras que $(\alpha, \beta, z_1, z_2)$ es la razón anarmónica de los puntos señalados. Los ángulos se miden igual que en la geometría de Euclides (véase, por ejemplo, [1, cap. II, § 4, nº 8]).

**266.** Demuestre que $\rho(z_1, z_2)>0$, si $z_1\neq z_2$, y que $\rho(z, z)=0$.

**267.** Demuestre que $\rho(z_1, z_3)\leqslant\rho(z_1, z_2)+\rho(z_2, z_3)$ y que el signo de igualdad debe tomarse si, y sólo si, el punto $z_3$ se encuentra en el "segmento" que une los puntos $z_1$ y $z_2$.

**268.** Demuestre que, si uno de los puntos $z_1$ o $z_2$ tiende hacia un punto de la circunferencia unidad (o ambos tienden hacia diferentes puntos de la circunferencia unidad), la longitud no euclidiana $\rho(z_1, z_2)$ tiende hacia el infinito (es decir, los puntos de la circunferencia unidad corresponden a los puntos del infinito del plano no euclidiano).

**269.** Demuestre que la diferencial $ds=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$ $(|z|<1)$ es invariante respecto al grupo de transformaciones lineales que transforman el círculo $|z|<1$ en sí mismo y representa la longitud no euclidiana del elemento de arco $dz$.

*Sugerencia*. Obtenga la forma general de la transformación del círculo $|z|<1$ en sí mismo que transforma el punto $a$ en el punto $b$ $(|a|<1, |b|<1)$.

**270.** Indique métodos de construcción de las siguientes curvas:

1) del haz de "rectas" que pasan por el punto $z_0$;

2) de la "recta" que pasa por los puntos $z_1$ y $z_2$;

3) de la equidistante de una "recta" (es decir, del lugar geométrico de los puntos "equidistantes" de la "recta" dada);

4) de las curvas límite (es decir, de las curvas ortogonales a un haz de "rectas paralelas").

**271.** 1) Demuestre que para un triángulo "rectilíneo" de ángulos $\varphi_1$, $\varphi_2$ y $\varphi_3$ es válida la desigualdad

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3<\pi.$$

2) Demuestre que, salvo un "movimiento", un triángulo "rectilíneo" se define mediante sus ángulos $\varphi_1$, $\varphi_2$ y $\varphi_3$. Construya el triángulo "rectilíneo" a partir de sus ángulos.

## § 3. FUNCIONES RACIONALES Y ALGEBRAICAS

La transformación general de un círculo o de un semiplano en un recinto simplemente conexo del $w$—plano es de la forma $w=\varphi[l(z)]$, donde $\varphi(z)$ es una transformación particular y $l$ es una transformación homográfica cualquiera del círculo o del semiplano en sí mismo (la transformación inversa es de la forma $z=l[\psi(w)]$). Es necesario tener en cuenta esta observación siempre que se busque una transformación normada, es decir, una transformación que verifique determinadas condiciones complementarias. Si no se señalan las condiciones de normalización, en la respuesta se indica, generalmente, una de las funciones transformadoras.

Un papel importante en la construcción práctica de las transformaciones conformes lo desempeñan ciertos principios generales (véase, por ejemplo, [1, cap. VIII. § 7 n° 1 y cap. V, § 3, n° 6] o [2, cap. II, §§ 1 y 3]).

### *Principio de simetría de Riemann-Schwarz*

Sea $D_1$ un recinto, cuya frontera contiene un arco $C$ de una circunferencia (en particular, un segmento rectilíneo), y sea $\omega=f_1(z)$ una función que realiza la transformación conforme de este recinto en un recinto $D_1^*$ de manera que el arco $C$ se transforma de nuevo en un arco de una circunferencia o en un segmento rectilíneo $C^*$. Entonces, la función $f_2(z)$, que en los puntos simétricos respecto a $C$ toma valores simétricos a los valores de $f_1(z)$ respecto a $C^*$ [1)],

---

[1)] Si C y $C^*$ son segmentos de los ejes reales (esto siempre se puede lograr realizando transformaciones homográficas complementarias), se tiene $f_2(z)=\overline{f_1(\bar{z})}$.

será analítica en el recinto $D_2$ simétrico al recinto $D_1$ respecto a $C$ y lo transformará en un recinto $D_2^*$ simétrico a $D_1^*$ respecto a $C^*$.

La función

$$w=\begin{cases} f_1(z) & \text{en } D_1 \\ f_1(z)=f_2(z) & \text{en } C, \\ f_2(z) & \text{en } D_2 \end{cases}$$

realiza la transformación conforme del recinto $D_1+C+D_2$ en el recinto $D_1^*+C^*+D_2^*$ [1].

*Principio de correspondencia de fronteras*

Sean $D$ y $D^*$ dos recintos simplemente conexos y sean $C$ y $C^*$ sus fronteras, con la particularidad de que el recinto $D^*$ pertenece íntegramente a una parte finita del plano. Si la función $w=f(z)$ es analítica en $D$ y continua en $\overline{D}$ y realiza una transformación biunívoca de $C$ en $C^*$ conservando el sentido del recorrido, realiza una transformación biunívoca y conforme del recinto $D$ en $D^*$.

Al resolver los problemas de este parágrafo, así como del siguiente, se recomienda, en los casos en que la transformación se realiza mediante una rama de una función multiforme, vigilar la correspondencia de los puntos de las fronteras del recinto que se transforma y de su imagen (esto se refiere especialmente a los problemas de transformación de recintos con cortes).

**272.** Mediante la función $w=z^2$ y su inversa halle la transformación conforme de los siguientes recintos:

1) del interior de la rama derecha de la hipérbola equilateral $x^2-y^2=a^2$ en el semiplano superior;

2) del exterior de la parábola $y^2=2px$, $p>0$ (es decir, del recinto limitado por esta parábola que no contiene su foco) en el semiplano superior.

*Observación.* Acerca de la transformación de recintos limitados por curvas de segundo grado, véanse también los problemas **302**, **303**, **330—332** y **367**.

**273.** Empleando las funciones del problema anterior, transforme:

1) el interior de la circunferencia $r=a\cos\varphi\ (a>0)$ en el interior de la cardioide $\rho=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$;

2) el interior de la misma circunferencia en el interior de la rama derecha de la lemniscata $\rho=\sqrt{\cos 2\theta}$;

3) en el círculo $|z|<1$ en el interior de la cardioide $\rho=A(1+\cos\theta)$, $A>0$, de manera que sea $w(0)=A/8$ y $w'(0)>0$.

**274.** Halle el recinto en el que la función $w=R(z+mz^2)$, $R>0$, $0\leqslant m\leqslant 1/2$ transforma el círculo $|z|<1$. Halle las imágenes de la red polar del $z$—plano.

**275.** Halle el recinto en el que la función $w=z+z^2$ transforma el semicírculo $|z|<1$, $\operatorname{Re} z>0$.

**276.** 1) Halle el recinto en el que la función $w=R\left(z+\frac{z^n}{n}\right)$, $R>0$, $n$ es un número entero, $n>1$, transforma el círculo $|z|<1$.

[1] La transformación será biunívoca, siempre que los recintos $D_1$ y $D_2$, así como $D_1^*$ y $D_2^*$ no se intersequen.

2) Halle el recinto en el que la función $w=R\left(z+\frac{1}{nz^n}\right)$, $R>0$, $n$ un es número entero, $n>1$, transforma el exterior del círculo unidad $|z|>1$.

*Observación*. Acerca de las transformaciones que realiza la función

$$w=R\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

(función de *Zhukovski*) véanse el problema **298** y los siguientes.

**277.** 1) Analice para qué valores de $m$ la función $w=R(z+mz^n)$, donde $n$ es un número natural, realiza una transformación conforme del círculo $|z|<1$ en un determinado recinto y halle este recinto.

2) Analice estas mismas cuestiones para la transformación del exterior del círculo $|z|<1$ mediante la función $w=R\left(z+\frac{m}{z^n}\right)$ y del interior del mismo círculo mediante la función $w=R\left(\frac{1}{z}+mz^n\right)$.

### TRANSFORMACIONES DE LUNULAS CIRCULARES Y DE RECINTOS CON CORTES

**278.** 1) Transforme el ángulo $0<\arg z<\pi\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 2)$ en el semiplano superior.

2) Transforme el ángulo $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ en el semiplano superior de manera que $w(1-i)=2$, $w(i)=-1$, $w(0)=0$.

**279.** Halle la función $w(z)$ que transforma el semicírculo $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ en el semiplano superior y que verifica las condiciones:

1) $w(-1)=0$, $w(0)=1$, $w(1)=\infty$;

2) $w(\pm 1)=\pm 1$, $w(0)=\infty$;

3) $w\left(\frac{i}{2}\right)=i$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

**280.** Halle la función $w(z)$ que transforma el semicírculo $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ en el círculo $|w|<1$ y que verifica las condiciones:

1) $w(\pm 1)=\pm 1$, $w(0)=-i$; 2) $w\left(\frac{i}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

**281.** Halle la función $w(z)$ que transforma el recinto $|z|>1$, $\operatorname{Im} z>0$ en el semiplano superior.

**282.** Transforme en el semiplano superior:

1) el sector $|z|<R$, $0<\arg z<\pi\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 2)$;

2) el recinto $|z|>R$, $0<\arg z<\pi\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 2)$.

**283.** Transforme en el semiplano superior las siguientes lúnulas circulares (biángulos):

1) $|z|<1$, $|z-i|<1$; 2) $|z|<1$, $|z-i|>1$;

3) $|z|>1$, $|z-i|<1$; 4) $|z|>1$, $|z-i|>1$;

5) $|z|>2$, $|z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$.

**284.** Transforme en el semiplano superior el exterior del semicírculo unidad superior.

En los problemas **285—296** transforme los recintos indicados en el semiplano superior.

**285.** El plano con un corte a lo largo del segmento $[-1, 1]$.

**286.** El plano con un corte a lo largo del segmento $[-i, i]$.

**287.** El plano con un corte a lo largo del segmento $[z_1, z_2]$.

**288.** El plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -R]$ y $[R, \infty)$ $(R > 0)$.

**289.** El plano con un corte a lo largo del rayo perteneciente al primer cuadrante que parte del punto $i$ y es paralelo a la recta $y = x$.

**290.** El plano con un corte a lo largo del arco circular que une los puntos $-1$ y $1$ y que pasa por el punto $ih$, donde $0 < h < 1$.

**291.** El semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ con un corte a lo largo del segmento $[0, ih]$, $h > 0$.

**292.** El semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ con un corte que va desde $ih$ hasta el $\infty$ a lo largo del semieje imaginario positivo $(h > 0)$.

**293.** El semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ con un corte a lo largo del arco de la circunferencia $|z| = 1$ que va desde el punto $z = 1$ al punto $z = e^{i\alpha}$, donde $0 < \alpha < \pi$.

**294.** El ángulo $0 < \arg z < z < \pi\beta$, donde $0 < \beta < 2$, con un corte a lo largo del arco de la circunferencia $|z| = 1$ que va desde el punto $z = 1$ al punto $z = e^{i\alpha}$, donde $0 < \alpha < \beta$.

**285.** El exterior del semicírculo unidad superior con un corte a lo largo del segmento $[0, -i]$ (el exterior de una "pala").

*Sugerencia.* Mediante una transformación lineal se reduce al problema anterior.

**296.** 1) El círculo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del radio $[0, 1]$.

2) El exterior del círculo unidad con un corte a lo largo del rayo $[1, \infty)$.

**297.** Halle la transformación del círculo $|z| < 1$ en el $w$—plano con un corte a lo largo del rayo $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$ sujeta a las condiciones $w(0) = 0$ y $w'(0) > 0$.

## FUNCIÓN DE ZHUKOVSKI

**298.** Halle la transformación de la red polar $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ mediante la función de Zhukovski $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

**299.** Halle el recinto en el que la función de Zhukovski transforma:

1) el círculo $|z| < R < 1$; 2) el recinto $|z| > R > 1$; 3) el círculo $|z| < 1$; 4) el recinto $|z| > 1$; 5) el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$; 6) el semiplano $\operatorname{Im} z < 0$; 7) el semicírculo $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; 8) el semicírculo $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z < 0$; 9) el recinto $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; 10) el recinto $1 < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$; 11) el recinto $R < |z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; 12) el recinto $\frac{1}{R} < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$; 13) el ángulo $\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{\pi}{2} + \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

**300.** Halle la transformación de la red polar mediante las funciones:

1) $w = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$; 2) $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$ $(a > 0)$;

3) $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{c^2}{z}\right)$, $c = |c| e^{i\gamma}$ $(0 \leqslant \gamma < \pi)$.

**301.** Empleando la función de Zhukovski, transforme:

1) el exterior del segmento $[-c, c]$ $(c > 0)$ en el exterior del círculo unidad de manera que $w(\infty) = \infty$ y $\arg w'(\infty) \alpha$;

2) el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el exterior del círculo unidad de manera que $w(\infty) = \infty$ y $\arg w'(\infty) = 0$.

**302.** Transforme el semiplano superior sin la semielipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, $y > 0$ en el semiplano superior.

**303.** Transforme el recinto biconexo comprendido entre las elipses confocales $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2 + k^2} + \frac{y^2}{b^2 + k^2} = 1$ $(a > b)$ en un anillo circular concéntrico de centro en el origen de las coordenadas y halle el módulo (véase la pág. 37) del recinto biconexo dado.

**304.** Halle el recinto en el que la función de Zhukovski transforma el círculo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del segmento $[a, 1]$ $(-1 < a < 1)$. Analice los casos en que $a > 0$ y en que $a < 0$.

En los problemas **305—309** transforme los recintos señalados en el semiplano superior.

**305.** El círculo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del segmento $[1/2, 1]$.

**306.** El círculo $|z| < 1$ con cortes a lo largo del radio $[-1, 0]$ y del segmento $[a, 1]$ $(0 < a < 1)$.

**307.** El exterior del círculo unidad con cortes a lo largo del segmento $[-a, -1]$ y del rayo $[1, \infty)$, donde $a > 1$.

**308.** La mitad superior del círculo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del segmento $[0, \alpha i]$ $(0 < \alpha < 1)$.

**309.** La mitad superior del círculo $|z| < 1$ con un corte a lo largo del segmento $[\alpha i, i]$ $(0 < \alpha < 1)$.

**310.** Transforme el círculo $|z| < 1$ sin el segmento $[(1-h) \times \times e^{i\alpha}, e^{i\alpha}]$ en el círculo unidad del plano $w$.

**311.** Transforme el círculo $|z|<1$ con un corte a lo largo del segmento $[a, 1]$, $0<a<1$, en el círculo $|w|<1$ de manera que $w(0)=0$ y $w'(0)>0$. Halle $w'(0)$ y la longitud del arco correspondiente al corte. *¿Para qué valor de $a$ el corte se transformará* en una semicircunferencia?

*Sugerencia.* Es conveniente transformar primero tanto el recinto dado como el círculo $|w|<1$ en el exterior del segmento.

**312.** Transforme el círculo $|z|<1$ con cortes a lo largo de los segmentos $[a, 1]$ y $[-1, -b]$ $(0<a<1,\ 0<b<1)$ en el círculo $|w|<1$ de manera que $w(0)=0$ y $w'(0)>0$. Determine $w'(0)$ y *las longitudes de los arcos correspondientes a los cortes.*

**313.** Representando la función de Zhukovski en la forma

$$\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2,$$

halle:

1) la imagen de la circunferencia $C$, que pasa por los puntos $z=\pm 1$ formando el ángulo $\alpha\ (-\pi<\alpha<\pi)$ con el eje real en el punto *1*, y *el recinto en el que se transforma el exterior de esta* circunferencia;

2) la imagen de la circunferencia $C'$, que pasa por el punto $z=1$ formando el ángulo $\alpha$ con el eje real y que contiene en su interior el punto $-1$, así como el recinto en el que se transforma el exterior de esta circunferencia.

**314.** Halle las imágenes de las circunferencias y de los recintos del $z$—plano, de los que se habla en el problema **313**, si la función transformadora $w(z)$ viene dada por la ecuación

$$\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2-\delta} \quad (0<\delta<2,\ w>0 \ \text{ para } \ z>1).$$

2) ¿Cuál es en esta transformación la imagen del interior de la circunferencia $C$?

**315.** Transforme el exterior del círculo unidad $|z|>1$ en el $w$—plano con un corte a lo largo del arco $\arg\frac{w-1}{w+1}=\beta\ (0<|\beta|<\pi)$ de manera que $w(\infty)=\infty$ y $\arg w'(\infty)=\alpha$.

En los problemas **316—319** halle los recintos en los que, mediante las funciones indicadas, se transforman los recintos dados.

**316.** El círculo $|z|<1$; $w=\frac{z}{z^2+1}$.

**317.** El semicírculo $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$; $w=\frac{1}{z^2+1}$.

**318.** El ángulo $0<\arg z<\frac{\pi}{n}$; $w=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$.

**319.** El sector $-\frac{\pi}{n}<\arg z<\frac{\pi}{n}$, $|z|<1$; $w=\frac{z}{(1+z^n)^{2/n}}$

$(w(z)>0$ para $z>0)$.

*Sugerencia.* Represente la función transformadora en la forma

$$w = F\{f[\varphi(z)]\}, \text{ donde } \varphi(t) = t^n, \ f(t) = \frac{t}{(1+t)^2}, \ F(t) = \sqrt[n]{t}.$$

APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE SIMETRÍA

**320.** 1) Empleando la solución del problema **319** y el principio de simetría halle la imagen del círculo unidad en la transformación $w = \frac{z}{(1+z^n)^{2/n}}$.

2) Halle la función que transforma el interior (y el exterior) del círculo unidad en el exterior de la "estrella"

$$|w| \leqslant 1, \ \arg w = 2\pi k/n \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

**321.** Transforme en el exterior del círculo unidad:

1) todo el plano con cortes a lo largo de los segmentos $[-1, 1]$ y $[-i, i]$ (el exterior de una cruz);

2) todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, $(-i\infty, -i]$ e $[i, +i\infty)$.

**322.** 1)* Empleando la función del problema **318** transforme el sector $|z| < 1$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$ ($n$ es un número entero) en sí mismo de manera que los segmentos de los radios $|z| \leqslant \alpha$, $\arg z = 0$ y $|z| \leqslant \alpha$, $\arg z = \pi/n$ $(0 < \alpha < 1)$ se transformen en los radios correspondientes.

2) Transforme el exterior del círculo unidad con cortes a lo largo de los segmentos $1 \leqslant |z| \leqslant \alpha$, $\arg z = 2k\pi/n$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ en el exterior del círculo unidad.

**323.** Transforme en el semiplano superior y en el exterior del círculo unidad el exterior de la cruz formada por el segmento $[-a, b]$ del eje real y por el segmento $[-ci, ci]$ del eje imaginario $(a \geqslant 0, \ b \geqslant 0, \ c \geqslant 0, \ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

*Sugerencia.* Halle la función que transforma el semiplano superior con un corte a lo largo del segmento $[0, ci]$ en el semiplano superior y recurra al principio de simetría según el cual el exterior de la cruz se transforma en todo el plano con un corte a lo largo de un segmento del eje real.

**324.** Transforme en el semiplano superior el plano con cortes a lo largo del rayo $[-a, +\infty)$ $(a \geqslant 0)$ y a lo largo del segmento $[-ci, ci]$ $(c > 0)$.

*Sugerencia.* Véase la sugerencia al problema **323**.

**325.** Transforme en el exterior del círculo unidad el plano con cortes a lo largo de la parte negativa del eje imaginario y a lo largo de la mitad inferior de la circunferencia unidad.

*Sugerencia.* Mediante una transformación lineal se reduce al problema **321, 1)**.

**326.** Transforme en el semiplano superior el plano con cortes a lo largo del segmento $[-\alpha i, 0]$ $(\alpha > 1)$ y a lo largo de la mitad *inferior de la circunferencia unidad (fig. 2).*

*Sugerencia.* Mediante una transformación lineal se reduce al problema **323.**

**327.** Transforme en el semiplano superior el plano con cortes a lo largo del segmento $[-1, b]$ $(b > -1)$ y a lo largo del arco circular con extremos en los puntos $e^{\pm i\alpha}$ que pasa por el punto $z = -1$ (fig. 3).

**328.** *Transforme en el semiplano superior el exterior del círculo unidad con cortes a lo* largo de los segmentos: $[i, bi]$, $[-bi, -i]$, $[1, a]$ y $[-a, -1]$ $(a > 1,\ b > 1)$.

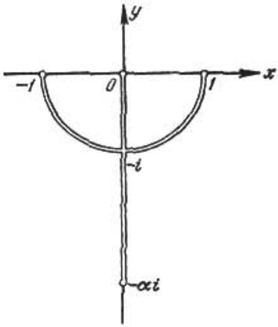


FIG. 2

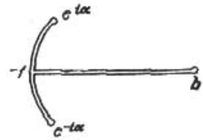


FIG. 3

*Sugerencia.* La función de Zhukovski transforma el recinto considerado en el recinto del problema **323.**

**329*.** Transforme en el exterior del círculo unidad el exterior de la "estrella" representada en la fig. 4.

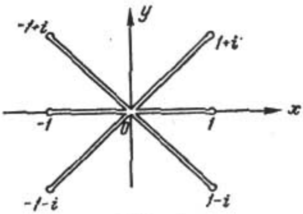


FIG. 4

**330*.** Transforme en el semiplano superior el interior de la rama derecha de la hipérbola

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 1.$$

**331.** Transforme en el semiplano superior el exterior de la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}=1$.

**332.** Transforme en el semiplano superior el recinto comprendido entre las ramas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

### TRANSFORMACIONES MULTIVALENTES ELEMENTALES

En los problemas **333** y **334** se consideran transformaciones que llevan a recintos multivalentes (superficies de Riemann) [1].

**333.** Halle los recintos que se obtienen al transformar mediante la función $w=z^2$

1) la parte del anillo $r_1<|z|<r_2$, $0<\arg z<\pi+\alpha$ $(0<\alpha\leqslant\pi)$;
2) el recinto $|z^2-1|<a$ $(0<a<\infty)$.

**334.** Halle los recintos que se obtienen al transformar mediante la función de Zhukovski $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

1) el círculo $|z|<R$ $(R>1)$;

*Sugerencia.* Es conveniente considerar primero las transformaciones del círculo $|z|<1$ y del anillo $1<|z|<R$ (véase el problema **299**).

2) el círculo $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<R$ $(0<R<\infty)$.

Construya las superficies de Riemann de las funciones dadas en los problemas **335—337.**

**335.** 1) $w=\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$; 2) $w=\sqrt{z^2-1}$.

**336.** 1) $w=\sqrt{z(z^2+1)}$; 2) $w=\sqrt{\frac{z^2+1}{z}}$. **337.** $\sqrt[3]{z^2-1}$.

## § 4. FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES

### FUNCIONES TRASCENDENTES FUNDAMENTALES

338. Explique en qué transforma la función $w=e^z$

1) la red rectangular $x=C$, $y=C$;
2) las rectas $y=kx+b$;
3) la franja $\alpha<y<\beta$ $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$;
4) la franja comprendida entre las rectas $y=x$ e $y=x+2\pi$;
5) la semifranja $x<0$, $0<y<\alpha\leqslant 2\pi$;
6) la semifranja $x>0$, $0<y<\alpha\leqslant 2\pi$;
7) el rectángulo $\alpha<x<\beta$, $\gamma<y<\delta$ $(\delta-\gamma\leqslant 2\pi)$.

---

[1] Aquí se dan solamente algunos problemas elementales de este tipo. El § 2 del capítulo VIII está dedicado especialmente a las superficies de Riemann.



4 Зак. 1032

**339.** ¿Cuál el la preimagen del semiplano superior en la transformación $w=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ ($n$ es un número natural)? ¿Cuál es la preimagen límite del semiplano superior para $n\to\infty$?

**340.** Explique en qué transforma la función $w=\ln z$

1) la red polar $|z|=R$, $\arg z=\vartheta$;
2) las espirales logarítmicas $r=Ae^{k\varphi}$ $(A>0)$;
3) el ángulo $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$;
4) el sector $|z|<1$, $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$;
5) el anillo $r_1<|z|<r_2$ con un corte a lo largo del segmento $[r_1r_2]$.

La parte real y la parte imaginaria de la función

$$w=\xi+i\eta=\ln\frac{a+z}{a-z}$$

se denominan *coordenadas bipolares* del punto $z=x+iy$ respecto a los polos $\pm a$ $(a>0)$.

**341.** 1) Demuestre que la función $w$ transforma univalentemente todo el $z$—plano con cortes a lo largo de $(-\infty, -a]$ y $[a, \infty)$ en la franja $-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$ del plano $w$, con la particularidad de que a las orillas superiores de los cortes corresponde la recta $\eta=\pi$, mientras que a las inferiores, la recta $\eta=-\pi$ (fig. 5).

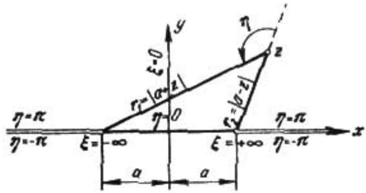


FIG. 5

2) Demuestre la validez de las relaciones:

$$x=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi+\cos\eta},\quad y=\frac{a\,\mathrm{sen}\,\eta}{\mathrm{ch}\,\xi+\cos\eta},$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=r=a\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\xi-\cos\eta}{\mathrm{ch}\,\xi+\cos\eta}}.$$

3) Demuestre que las preimágenes de los segmentos $\xi=\xi_0$, $-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$ son las circunferencias de Apolonio

$$(x-a\,\mathrm{cth}\,\xi_0)^2+y^2=\left(\frac{a}{\mathrm{sh}\,\xi_0}\right)^2$$

respecto a los puntos $\pm a$ (la preimagen del segmento $\xi=0$, $-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$ es el eje de ordenadas) (fig. 6).

4) Demuestra que las preimágenes de las curvas $\eta = \eta_0$ son los arcos de las circunferencias

$$x^2 + (y + a \operatorname{ctg} \eta_0)^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sen} \eta_0}\right)^2,$$

que pasan por los puntos $\pm a$ y que pertenecen al semiplano superior, si $\eta_0 > 0$, y al semiplano inferior, si $\eta_0 < 0$. A la línea $\eta = 0$ corresponde el segmento $[-a, a]$. Los arcos, correspondientes a los

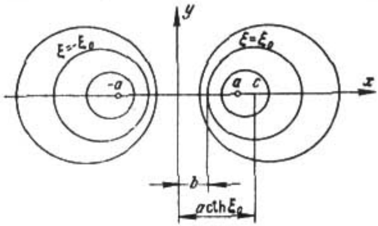


FIG. 6

valores $\eta = \eta_0$ y $\eta = \eta_0 - \pi$ $(\eta_0 > 0)$, complementan el uno al otro formando una circunferencia completa (fig. 7).

5) Halle las magnitudes de los segmentos $b$ (véase la fig. 6) y $l$ (véase la fig. 7).

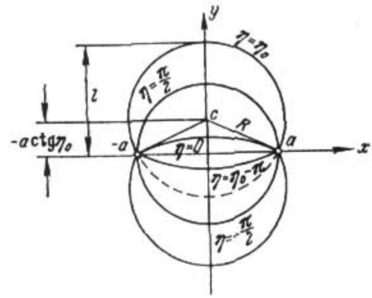


FIG. 7

*Observación*. La red de coordenadas construida de esta forma en el $z$—plano se denomina *red bipolar*.

**342.** Explique en qué transforma la función $w = \cos z$

1) la red rectangular $x = C$, $y = C$;

2) la semifranja $0 < x < \pi$, $y < 0$;

3) la semifranja $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$;

4) la semifranja $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$;

5) la franja $0 < x < \pi$,

6) el *rectángulo* $0 < x < \pi$, $-h < y < h$ $(h > 0)$.

**343.** Explique en qué transforma la función $w = \arcsin z$

1) el *semiplano superior*;

2) el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ del eje real;

3) el primer cuadrante;

4) el semiplano $x < 0$ con un corte a lo largo del rayo $(-\infty, -1]$ del eje real.

**344.** Explique en qué transforma la función $w = \operatorname{ch} z$

1) la red rectangular $x = C$, $y = C$;

2) la franja $0 < y < \pi$;

3) la semifranja $x > 0$, $0 < y < \pi$.

**345.** Explique en qué transforma la función $w = \operatorname{Arsh} z$;

1) el plano con cortes a lo largo de los rayos $1 \leqslant y < \infty$ y $-\infty < y \leqslant -1$ del eje imaginario;

2) el primer cuadrante.

**346.** Explique en qué transforma la función $w = \operatorname{tg} z$

1) la red rectangular $x = C$, $y = C$;

2) la semifranja $0 < x < \pi$, $y > 0$;

3) la franja $0 < x < \pi$;

4) la franja $0 < x < \frac{\pi}{4}$;

5) la franja $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

**347.** Explique en qué transforma la función $w = \operatorname{cth} z$

1) la franja $0 < y < \pi$; 2) la semifranja $0 < y < \pi$, $x > 0$.

### TRANSFORMACIONES REDUCIBLES A TRANSFORMACIONES DE FRANJAS Y DE SEMIFRANJAS

Transforme en el semiplano superior los recintos indicados en los problemas **348—353.**

**348.** La franja comprendida entre las rectas $y = x$ e $y = x + h$.

**349.** La semifranja $x < 1$, $0 < y < h$.

**350.** La lúnula circular comprendida entre las circunferencias $|z| = 2$ y $|z-1| = 1$.

**351.** El recinto comprendido entre las circunferencias $|z| = 2$ y $|z-3| = 1$ (el plano con círculos excluidos).

**352.** El recinto definido por las desigualdades:

$$|z-1| > 1, \ |z+1| > 1, \ \operatorname{Im} z > 0.$$

(el semiplano superior con semicírculos excluidos).

**353.** El recinto comprendido entre las parábolas confocales $y^2=4(x+1)$ e $y^2=8(x+2)$.

*Sugerencia.* Véase el problema **272**, 2).

**354.** Halle la función $w(z)$ que transforma el recinto comprendido entre la circunferencia $|z|=1$ y la recta $\operatorname{Im} z=1$ (el semiplano $\operatorname{Im} z<1$ con el círculo excluido):

1) en el círculo $|w|<1$ con la normalización $w(-3i)=0$ y $\arg w'(-3i)=\frac{\pi}{3}$;

2) en el círculo $|w|<1$ con la normalización $w(-3i)=\frac{-1+i}{2}$ y $\arg w'(-3i)=\frac{\pi}{2}$;

3) en el semiplano superior con la normalización $w(-3i)=1+i$ y $\arg w'(-3i)=\pi$.

## APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE SIMETRÍA

**355.** Transforme en el semiplano superior:

1) la franja $0<x<1$ con un corte a lo largo del rayo $x=\frac{1}{2}$, $h\leqslant y<\infty$;

2) la franja $0<x<1$ con cortes a lo largo de los rayos $x=\frac{1}{2}$, $h_1\leqslant y<\infty$ y $x=\frac{1}{2}$, $-\infty<y\leqslant h_2\,(h_2<h_1)$.

*Sugerencia.* Transforme primero la franja $0<x<\frac{1}{2}$ en el semiplano superior. La función transformadora, de acuerdo con el principio de simetría, transformará el recinto dado en todo el plano con un corte determinado.

En los problemas **356—366** transforme en el semiplano superior los recintos indicados.

**356.** La tranja $0<x<1$ con un corte a lo largo del segmento $0\leqslant x\leqslant h$, $y=0\,(h<1)$.

**357.** La franja $0<x<1$ con cortes a lo largo de los segmentos $0\leqslant x\leqslant h_1$, $y=0$ y $1-h_2\leqslant x\leqslant 1$, $y=0\,(h_1+h_2<1)$.

**358.** La semifranja $0<x<\pi$, $y>0$ con un corte a lo largo del segmento $x=\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant h$.

**359.** La semifranja $0<x<\pi$, $y>0$ con un corte a lo largo del rayo $x=\frac{\pi}{2}$, $h\leqslant y<\infty\,(h>0)$.

**360.** La semifranja $0<x<\pi$, $y>0$ con cortes a lo largo del segmento $x=\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant h_1$ y a lo largo del rayo $x=\frac{\pi}{2}$, $h_2\leqslant y<\infty\,(h_2>h_1)$.

**361.** El recinto comprendido entre las circunferencias $|z-1|=1$ y $|z+1|=1$ con un corte a lo largo del rayo $2\leqslant x<\infty$, $y=0$.

**362.** El recinto comprendido entre las circunferencias $|z-1|=1$ y $|z-2|=2$ con un corte a lo largo del segmento $y=0$, $2\leqslant x\leqslant \leqslant a\,(a<4)$.

**363.** El recinto comprendido entre las circunferencias $|z-1|=1$ y $|z-2|=2$ con cortes a lo largo de los segmentos $y=0$, $2\leqslant x\leqslant a$ e $y=0$, $b\leqslant x\leqslant 4$ $(a<b)$.

**364.** El recinto comprendido entre el eje imaginario y la circunferencia $|z-1|=1$ con cortes a lo largo del segmento $y=0$, $2\leqslant x\leqslant a$ y a lo largo del rayo $y=0$, $b\leqslant x<\infty$ $(a<b)$.

**365.** El recinto comprendido entre las circunferencias $|z-1|=1$ y $|z+1|=1$ con un corte a lo largo del segmento $x=0$, $-\alpha\leqslant \leqslant y\leqslant \beta\,(\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0)$.

**366.** El recinto $|z-1|>1$, $|z+1|>1$, $\operatorname{Im} z>0$ (el semiplano superior con semicírculos excluidos) con un corte a lo largo del segmento $x=0$, $0\leqslant y\leqslant h$.

**367.** Transforme el interior de la parábola $y^2=4\alpha^2(x+\alpha^2)$ en el semiplano superior y en el círculo unidad.

*Sugerencia.* Haga un corte a lo largo del eje de simetría de la parábola, transforme (mediante la función $\sqrt{z}$) la mitad superior de la parábola en una semifranja, después en un semiplano y recurra al principio de simetría.

**368*.** Transforme en el semiplano superior el semiplano superior con cortes a lo largo de los segmentos $0\leqslant y\leqslant a$, $x=\frac{\pi}{2}+ + k\pi\,(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm\ldots)$ (fig. 8).

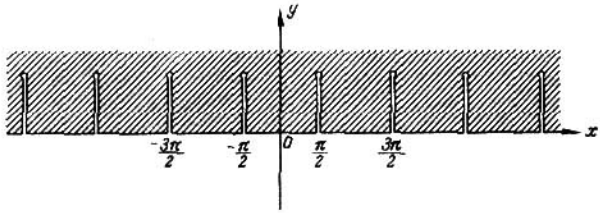


FIG. 8

**369.** Transforme el plano con cortes paralelos $-a\leqslant x\leqslant a$, $y=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ en el plano con cortes a lo largo de los segmentos $[k\pi-b,\ k\pi+b]$ $\left(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ 0<b<\right.$ $\left.<\frac{\pi}{2}\right)$ del eje real.

*Sugerencia.* Haga un corte complementario a lo largo del eje imaginario, transforme uno de los recintos obtenidos en el semiplano superior y recurra al principio de simetría.

**370.** Transforme en el exterior del círculo unidad el plano con cortes a lo largo de los rayos $\left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ y a lo largo de los segmentos $-a \leqslant y \leqslant a$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (fig. 9).

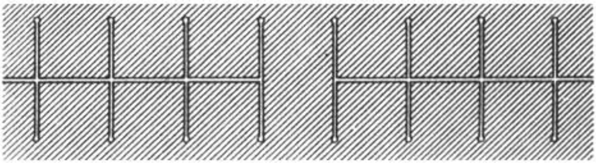

FIG. 9

*Sugerencia.* La función que resuelve el problema **368** transforma el recinto dado en el plano con cortes a lo largo de los rayos $\left(-\infty, -\frac{1}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{\operatorname{ch} a}}\right]$ y $\left[\frac{1}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{\operatorname{ch} a}}, +\infty\right)$.

**371.** Transforme en el semiplano superior el plano ccn cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, p]$ y $[q, +\infty)$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant p < q \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

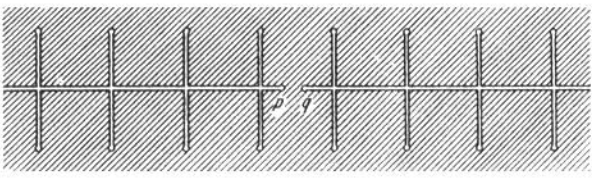


FIG. 10

y a lo largo de los segmentos $-a \leqslant y \leqslant a$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (fig. 10).

**372*.** Transforme en el semiplano superior el plano con cortes a lo largo de los rayos $0 \leqslant y < \infty$, $x = \frac{k\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

En los *problemas* **373—376** las *transformaciones* conducen a recintos multivalentes (véase la llamada de la pág. 49).

**373.** Halle los recintos en los que transforma la función $w = e^z$

1) el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$;
2) la semifranja $0 < x < a$, $y > 0$;
3) la franja $0 < x < a$.

**374.** Halle los recintos en los que transforma la función $w = \cos z$

1) la franja $-\pi/2 < x < \pi/2$;
2) la franja $0 < x < 2\pi$.

**375.** Halle el recinto en el que la función $w = \operatorname{tg} z$ transforma la franja $0 < x < 2\pi$.

**376.** Construya la superficie de Riemann en la que la función $w = e^{1/z}$ transforma el $z$-plano.

## § 5. FRONTERAS DE UNIVALENCIA, CONVEXIDAD Y ESTELARIDAD

Sea $w = f(z)$ una función analítica en el origen de coordenadas y sea $f(0) = 0$.

En los problemas **377—385** $r_1$ es el radio máximo del círculo, de centro en el origen de coordenadas, en el que la función $w = f(z)$ es univalente; $r_2$ es el radio máximo del círculo, de centro en el origen de coordenadas, que es transformado univalentemente por medio de la función $w = f(z)$ en un recinto convexo, y $r_3$ es el radio máximo del círculo, de centro en el origen de coordenadas, que es transformado univalentemente por medio de la función $w = f(z)$ en un recinto estelar respecto al punto $w = 0$. (Un recinto se llama *estelar* respecto a un punto dado si cualquier punto del recinto se puede unir con el punto dado mediante un segmento rectilíneo que pertenece íntegramente al recinto). Es evidente que $r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_1$.

**377.** Halle $r_1$, $r_2$ y $r_3$ para la función $w = \frac{1}{1-z}$ y construya las imágenes de los círculos $|z| < r_1$, $|z| < r_2$ y $z < r_3$.

**378.** Halle $r_1$ para cada una de las funciones siguientes:

1) $w = z + z^2$, 2) $w = z + az^2$ ($a$ es un número real);
3) $w = z/(1-z)^2$.

**379.** Demuestre que para la transformación $w = f(z)$ la curvatura de la imagen de la circunferencia $|z| = r$ se expresa mediante la fórmula $k = \frac{1 + \operatorname{Re}[zf''(z)/f'(z)]}{|zf'(z)|}$.

**380.** Demuestre que una función analítica $f(z)$ transforma la circunferencia $|z| = r$ en una curva convexa si, y sólo si, $\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\pi}{2} + \varphi + \arg f'(z)\right] = 1 + \operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f'(z)}\right] \geqslant 0$ para todos los $\varphi$ ($z = re^{i\varphi}$).

**381.** Demuestre que el círculo $|z| < r$ se transforma mediante una función analítica $f(z)$ ($f(0) = 0$ en un recinto estelar respecto al punto $w=0$ si, y sólo si, $\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f(z)=\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\geqslant 0$ para todos los $\varphi$ $\left(z-re^{i\varphi}\right)$.

**382.** Demuestre que: 1) Si la funcion $w=f(z)$ $(f(0)=0)$ transforma el círculo $|z|<1$ en un recinto estelar respecto al punto $w=0$, la función $w_1=\int\limits_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt$ transforma este mismo círculo en un recinto convexo.

2) Si $w=f(z)$ transforma el circulo $|z|<1$ en un recinto convexo, la función $w_1=zf'(z)$ realiza la transformación de este círculo en un recinto estelar respecto al punto $w=0$.

**383.** Halle $r_2$ para cada una de las funciones siguientes:

1) $w=z+z^2$;

2) $w=z+az^2$ ($a$ es un número real);

3) $w=z/(1-z)^2$.

**384.** Halle $r_1$ y $r_2$ para la función $w=e^z-1$.

**385.** Halle $r_3$ para cada una de las funciones siguientes:

1) $w=z+z^2$;

2) $w=z+az^2$ ($a$ es un número real);

3) $w=z/(1-z)^2$.

*Sugerencia.* En la solución del problema **385**, 3) conviene partir directamente de la desigualdad $\frac{\partial}{\partial\varphi}[\varphi+\arg f'(z)]\geqslant 0$.

## CAPITULO III

# INTEGRALES Y SERIES DE POTENCIAS

En los problemas de este capítulo, así como en los capítulos siguientes, siempre que no se diga lo contrario, el recorrido de contornos simples (es decir, que no se intersecan consigo mismos) cerrados se realiza en la dirección positiva.

### § 1. INTEGRACION DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

**386.** Mediante la *sumación directa demuestre las siguientes* igualdades:

1) $\int\limits_{z_0}^{z_1} dz = z_1 - z_0$; 2) $\int\limits_{z_0}^{z_1} z\,dz = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2)$.

**387.** Sea $C$ un contorno simple cerrado que limita el área $S$. Demuestre las siguientes igualdades:

1) $\int\limits_C x\,dz = iS$; 2) $\int\limits_C y\,dz = -S$; 3) $\int\limits_C \bar{z}\,dz = 2iS$.

**388.** Calcule las integrales $I_1 = \int x\,dz$ e $I_2 = \int y\,dz$ siguiendo los caminos siguientes:

1) a lo largo del radio vector del punto $z = 2 + i$;

2) a lo largo de la semicircunferencia $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (el camino se inicia en el punto $z = 1$);

3) a lo largo de la circunferencia $|z - a| = R$.

**389.** Calcule la integral $\int |z|\,dz$ siguiendo los caminos siguientes:

1) a lo largo del radio vector del punto $z = 2 - i$;

2) a lo largo de la semicircunferencia $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (el camino se inicia en el punto $z = 1$);

3) a lo largo de la semicircunferencia $|z|=1$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ (el camino se inicia en el punto $z=-i$);

4) a lo largo de la circunferencia $|z|=R$.

**390.** Calcule la integral $\int_C |z|\,\bar{z}\,dz$, donde $C$ es un contorno cerrado compuesto por la semicircunferencia superior $|z|=1$ y por el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y=0$.

**391.** Calcule la integral $\int_C \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, donde $C$ es la frontera del semianillo representado en la fig. 11.

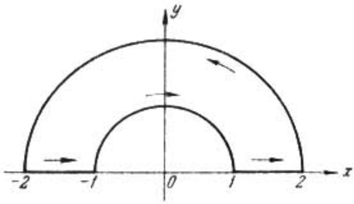


FIG. 11

**392.** Calcule la integral $\int (z-a)^n\,dz$ ($n$ es un número entero):

1) a lo largo de la semicircunferencia $|z-a|=R$, $0 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \pi$ (el camino se inicia en el punto $z=a+R$);

2) a lo largo de la circunferencia $|z-a|=R$;

3) a lo largo del perímetro del cuadrado de centro en el punto $a$ y de lados paralelos a los ejes de coordenadas.

En los problemas **393—396** la rama de la función multiforme que figura como integrando se determina especificando su valor en un punto del contorno de integración. Si el contorno es cerrado, en calidad del punto inicial del camino de integración siempre se toma aquel punto en el que se da el valor del integrando (debe tenerse en cuenta que la magnitud de la integral puede depender de la selección de este punto inicial).

**393.** Calcule la integral $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ a lo largo de los contornos siguientes:

1) a lo largo de la semicircunferencia $|z|=1$, $y \geqslant 0$, $\sqrt{1}=1$;

2) a lo largo de la semicircunferencia $|z|=1$, $y \geqslant 0$, $\sqrt{1}=-1$;

3) a lo largo de la semicircunferencia $|z|=1$, $y \leqslant 0$, $\sqrt{1}=1$;

4) a lo largo de la circunferencia $|z|=1$, $\sqrt{1}=1$;

5) a lo largo de la circunferencia $|z|=1$, $\sqrt{-1}=i$.

**394.** Calcule la integral $\int\limits_C \operatorname{Ln} z\,dz$, donde:

1) $C$ es la circunferencia unidad y $\operatorname{Ln} 1 = 0$;
2) $C$ es la circunferencia unidad y $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$;
3) $C$ es la circunferencia $|z| = R$ y $\operatorname{Ln} R = \ln R$;
4) $C$ es la circunferencia $|z| = R$ y $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i$.

**395.** Calcule la integral $\int\limits_{|z|=1} z^n \operatorname{Ln} z\,dz$, donde $n$ es un número entero y

1) $\operatorname{Ln} 1 = 0$; 2) $\operatorname{Ln}(-1) = \pi i$.

**396.** Calcule la integral $\int\limits_{|z|=1} z^{\alpha}\,dz$, donde $\alpha$ es un número complejo cualquiera y $1^{\alpha} = 1$.

**397.** Demuestre que $\int\limits_{|z|=1} a^z\,dz = 0$ como quiera que escoja el valor inicial de la función $a^z$.

**398.** ¿Para qué valores de $\alpha\,(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ existen las integrales:

$$1)\ I_1 = \int e^{-\frac{1}{z}}\,dz; \quad 2)\ I_p = \int e^{-\frac{1}{z^p}}\,dz$$

($p$ es un número natural) tomadas a lo largo del radio vector del punto $z = e^{i\alpha}$?

---

**399.** Demuestre que para $|a| \neq R$ se tiene

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{dz}{|z-a|\,|z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}.$$

**400.** Demuestre las siguientes proposiciones:

1) Si $f(z)$ es continua en una vecindad del origen de coordenadas, se tiene

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\,d\varphi = 2\pi f(0).$$

2) Si $f(z)$ es continua en una vecindad del punto $z = a$, se tiene

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

**401.** Demuestre las siguientes proposiciones:

1) Si $f(z)$ es continua en la semifranja $x \geqslant x_0$, $0 \leqslant y \leqslant h$ y el límite $\lim\limits_{x \to \infty} f(x+iy) = A$ no depende de $y$ y existe uniformemente

respecto a $y$, se tiene $\lim\limits_{x \to \infty} \int\limits_{\beta_x} f(z)\,dz = iAh$, donde $\beta_x$ es el segmento $0 \leqslant y \leqslant h$ de la recta vertical recorrido desde abajo hacia arriba.

2) Si $f(z)$ es continua en el sector $0 < |z-a| \leqslant r_0$, $0 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$ y existe el límite

$$\lim_{a \to a} (z-a) f(z) = A,$$

se tiene

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{\gamma_r} f(z)\,dz = iA\alpha,$$

donde $\gamma_r$ es el arco de la circunferencia $|z-a| < r$ perteneciente al sector dado y recorrido en la dirección positiva.

3) Si $f(z)$ es continua en el recinto $|z| \geqslant R_0$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$ y existe el límite $\lim\limits_{z \to \infty} zf(z) = A$, se tiene

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = iA\alpha,$$

donde $\Gamma_R$ es el arco de la circunferencia $|z| = R$ perteneciente al recinto dado y recorrido en la dirección positiva respecto al origen de coordenadas.

**402.** Demuestre los teoremas siguientes:

1) Si $f(z)$ es continua en el recinto $|z| \leqslant R_0$, $\operatorname{Im} z \geqslant a$ ($a$ es un número real fijo) y en este recinto $f(z) \to 0$ para $z \to \infty$, se tiene para cualquier número positivo $m$

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{\Gamma_R} e^{imz} f(z)\,dz = 0,$$

donde $\Gamma_R$ es el arco de la circunferencia $|z| = R$, perteneciente al recinto dado (lema de *Jordan*).

*Sugerencia.* Al estimar el módulo de la integral a lo largo de la semicircunferencia $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$ recurra a la desigualdad $\operatorname{sen}\theta \geqslant 2\theta/\pi$ válida para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, y al realizar las estimaciones a lo largo de los arcos pertenecientes al semiplano inferior (en el caso en que $a < 0$) recurra a que la longitud de cada uno de ellos tiende hacia $|a|$ para $R \to \infty$.

2) Si $f(z)$ es continua en el semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma$ ($\sigma$ es un número real fijo) y en este semiplano $f(z) \to 0$ para $z \to \infty$, se tiene para cualquier número negativo $t$

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{\Gamma_R} e^{zt} f(z)\,dz = 0,$$

donde $\Gamma_R$ es el arco de la circunferencia $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma$. Si $f(z)$ es continua en el semiplano $\operatorname{Re} z \leqslant \sigma$, la proposición es válida si $t$ es positivo y si $\Gamma_R$ es el arco de la circunferencia $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \leqslant \sigma$.

*Observación.* La demostración de ambos teoremas se puede ver, por ejemplo, en [2, capítulo V, § 2, n° 73].

## § 2. TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY [1]

**403.** Demuestre que, si el camino no pasa por el origen de coordenadas, se tiene

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi + 2\pi i k,$$

donde $k$ es un número entero que indica cuántas veces el circuito de integración rodea el origen de coordenadas ($z = re^{i\varphi}$).

**404.** Demuestre que, si el camino no pasa por los puntos $\pm i$, se tiene

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

donde $k$ es un número entero.

**405.** Demuestre que, si $C$ es un contorno simple cerrado arbitrario que no pasa por el punto $a$ y $n$ es un número entero, se tiene

$$\int_C (z-a)^n \, dz = \begin{cases} 0, \text{ si } n \neq -1, \\ 2\pi i, \text{ si } n = -1 \text{ y } a \text{ se encuentra dentro de } C, \\ 0, \text{ si } n = -1 \text{ y } a \text{ se encuentra fuera de } C. \end{cases}$$

**406.** El teorema integral de Cauchy puede ser generalizado en la forma siguiente: si $f(z)$ es continua en un recinto cerrado $G$ acotado por un contorno simple rectificable $C$ y es analítica en el interior de $G$, entonces $\int_C f(z)\, dz = 0$. Demuestre esto en el caso de un contorno estelar [2].

*Sugerencia.* Aceptando que $C$ es estelar respecto al origen de coordenadas, considere los contornos $C_\lambda: \zeta = \lambda z$ $(0 < \lambda < 1,\ z \in C)$ y realice el paso al límite para $\lambda \longrightarrow 1$ (véase, por ejemplo, [1, cap. III, § 2, nº 3] o [2, cap. I, § 4, nº 12).

**407.** Demuestre las proposiciones siguientes:

1) Si $f(z)$ es analítica en la franja $0 \leqslant y \leqslant h$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x+iy) = 0$ y la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ existe, entonces la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x+ih)\, dx$ también existe y ambas integrales coinciden.

2) Si $f(z)$ es analítica en el ángulo $0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$, $\lim\limits_{z \to \infty} zf(z) = 0$ y la integral $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ existe, entonces la integral

---

[1] Los problemas de cálculo de integrales, propuestos en este y el siguiente parágrafo, tienen en general, carácter ilustrativo. La mayoría de problemas de este tipo aparece en el § 4 del capítulo IV dedicado a la aplicación de la teoría de residuos.

[2] Un contorno se denomina estelar respecto a un punto, si todo rayo que parte de este punto interseca el contorno en un punto.

$\int f(z)\,dz$ tomada a lo largo del rayo $z=re^{i\alpha}$, $0\leqslant r<\infty$, también existe y ambas integrales coinciden.

*Sugerencia.* Emplee los resultados del problema **401.**

**408.** Demuestre que $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$

*Sugerencia.* Integre la función $f(z)=e^{-z^2}$ a lo largo de la frontera del rectángulo $|x|\leqslant R$, $0\leqslant y\leqslant b$ y emplee la integral de Poisson $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$

**409.** Demuestre las igualdades $\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx=\int\limits_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ (integrales de Fresnel).

*Sugerencia.* Integre la función $f(z)=e^{iz^2}$ a lo largo de la frontera de sector $0\leqslant|z|\leqslant R$, $0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}$ y emplee el resultado del problema **402,** 1) (tomando $z^2=\zeta$).

**410.** Demuestre que $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ (integral de Dirichlet).

*Sugerencia.* Integre la función $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ a lo largo de la frontera del recinto $r\leqslant|z|\leqslant R$, $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ y emplee los resultados de los problemas **401** y **402**.

**411.** Demuestre que para $0<s<1$ son válidas las igualdades:

1) $\int\limits_0^\infty x^{s-1}\cos x\,dx=\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}$, 2) $\int\limits_0^\infty x^{s-1}\operatorname{sen} x\,dx=\Gamma(s)\operatorname{sen}\frac{\pi s}{2}$.

*Sugerencia.* Integre la función $f(z)=z^{s-1}e^{-iz}$ a lo largo de la frontera del recinto $r\leqslant|z|\leqslant R$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant 0$ y emplee los resultados de los problemas **401,** 2) y **402,** 1) y la representación integral para la función Gamma:

$$\Gamma(t)=\int\limits_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx.$$

## § 3. FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY

En todos los problemas de este parágrafo $C$ es un contorno cerrado simple rectificable.

**412.** Calcule la integral $\int\limits_C\frac{dz}{z^2+9}$, si:

1) el punto $3i$ se encuentra dentro del contorno $C$ y el punto $-3i$ fuera de él;

2) el punto $-3i$ se encuentra dentro del contorno $C$ y el punto $3i$ fuera de él;

3) los puntos $\pm 3i$ se encuentran dentro del contorno $C$.

**413.** Calcule todos los valores posibles de la integral $\int\limits_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ para diferentes posiciones del contorno $C$. Se supone que el contorno $C$ no pasa por ninguno de los puntos 0, 1, y $-1$.

**414.** ¿Qué cantidad de diferentes valores puede tener la integral $\int\limits_C \frac{dz}{\omega_n(z)}$, donde $\omega_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$ $(z_i \neq z_j)$ y el contorno $C$ no pasa por ninguno de los puntos $z_i$?

**415.** Calcule la integral $\int\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^4-1}$, $a>1$.

**416.** Calcule la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z\,dz}{z^2+a^2}$, donde el contorno $C$ contiene en su interior el círculo $|z| \leqslant a$.

**417.** Calcule la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z\,dz}{(z-a)^3}$, si el punto $a$ se encuentra dentro del contorno $C$.

*Sugerencia.* Recurra a las fórmulas para las derivadas de la integral de Cauchy.

**418.** Calcule la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, si:

1) el punto 0 se encuentra dentro y el punto 1 fuera del contorno $C$;

2) el punto 1 se encuentra dentro y el punto 0 fuera del contorno $C$;

3) los puntos 0 y 1 se encuentran ambos dentro del contorno $C$.

**419.** La función $f(z)$ es analítica en un recinto que contiene en su interior el origen de coordenadas y está acotado por un contorno simple cerrado $C$. Demuestre que como quiera que se escoja la rama de $\operatorname{Ln} z$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f'(z)\operatorname{Ln} z\,dz=f(z_0)-f(0),$$

donde $z_0$ es el punto de integración.

*Sugerencia.* Integre por partes.

**420.** Calcule la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^2 \operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}dz$, si $\operatorname{Ln} a=\ln a$ para $a>0$ y el contorno $C$ es:

1) la circunferencia $|z|=2$;

2) la circunferencia $|z-1|=1$ y el punto inicial de integración es $z=1+i$.

**421.** De acuerdo con el teorema de Liouville, la función $f(z)$ analítica y acotada en todo el plano es una constante. Demuestre este teorema calculando la integral $\int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)} (|a|<R, |b|<R)$ y estimándola para $R \to \infty$.

**422.** Sea $f(z)$ analítica en un recinto cerrado acotado por un contorno $C$; sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ diferentes puntos arbitrarios del interior de $C$ y sea $\omega_n(z)=(z-z_1)(z-z_2) \ldots (z-z_n)$. Demuestre que la integral

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} \frac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

es un polinomio de grado $(n-1)$ que coincide con $f(z)$ en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (el polinomio $P(z)$ se denomina polinomio interpolador de Lagrange).

**423.** Demuestre el siguiente teorema (fórmula de Cauchy para un recinto infinito).

Sea $C$ un contorno cerrado simple que acota un recinto finito $D$. Sea $f(z)$ una función analítica en el exterior del recinto $D$ y sea $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)=A$. En estas condiciones

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases} -f(z)+A, & \text{si el punto } z \text{ pertenece al exterior del recinto } D, \\ A, & \text{si el punto } z \text{ pertenece al recinto } D. \end{cases}$$

El contorno $C$ se recorre en el sentido positivo respecto al recinto $D$.

*Sugerencia.* Considere primero el caso $A=0$.

**424.** Supongamos que la función $f(z)$ y el contorno $C$ verifican las condiciones del problema anterior.

Demuestre que, si el origen de coordenadas pertenece al recinto $D$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta z-\zeta^2}\,d\xi=\begin{cases} 0, & \text{si } z \in D, \\ f(z)/z, & \text{si } z \overline{\in} D. \end{cases}$$

## § 4. SERIES DE POTENCIAS

### DETERMINACIÓN DEL RADIO DE CONVERGENCIA

En los problemas **425—436** determine los radios de convergencia de las series.

**425.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. **426.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. **427.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. **428.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$.

**429.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. **430.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. **431.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$. **432.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

**433.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$. **434.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n$. **435.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$.

**436.** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n$.

**437.** El radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es igual a $R\,(0<R<\infty)$. Determine los radios de convergencia de las series:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^n-1) c_n z^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} z^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n$; 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+z_0^n) c_n z^n$.

**438.** Los radios de convergencia de las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ son iguales a $r_1$ y $r_2$ respectivamente. ¿Qué se puede decir respecto a los radios de convergencia de las series:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n$?

**439.** Sume para $|z|<1$ las siguientes series:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$.

### COMPORTAMIENTO EN LA FRONTERA DEL CIRCULO DE CONVERGENCIA.

Investigue en los problemas **440—446** el comportamiento de la serie de potencias en la frontera del círculo de convergencia.

**440.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. **441.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. **442.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

**443.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$. **444.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{n}$ ($p$ es un número natural).

**445.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}$. **446.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$.

De acuerdo con el segundo teorema de Abel, si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ converge, se tiene

$$\lim_{r \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \subset \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad (0 < r < 1).$$

**447.** Demuestre que el teorema inverso al segundo teorema de Abel no es justo, es decir, dé un ejemplo de una serie divergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ para la cual existe el límite $\lim\limits_{r \to 1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n r^n$.

**448.** Empleando el segundo teorema de Abel y los resultados del problema **439**, demuestre las igualdades siguientes:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left|2 \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right| \quad (0 < |\varphi| \leqslant \pi);$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n} = \frac{\pi-\varphi}{2} \quad (0 < \varphi < 2\pi);$

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{cgt}\frac{\varphi}{2}\right| \quad (0 < |\varphi| < \pi);$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (0 < \varphi < \pi);$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\cos n\varphi}{n} = \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) \quad (-\pi < \varphi < \pi);$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n} = \frac{\varphi}{2} \quad (-\pi < \varphi < \pi).$

**449*.** Demuestre que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} z^n$ converge no absolutamente en todos los puntos de la frontera del círculo de convergencia.

*Sugerencia.* Si $z=1$, divida la serie en grupos de sumandos del mismo signo y demuestre que estos grupos satisfacen las condiciones del criterio de Leibniz para series alternadas. Si $|z|=1$ y $|z| \neq 1$, recurra al teorema del problema **90** tomando $a_n = (-1)^{[\sqrt{n}]} z^n$, $b_n = 1/n$.

**450.** Demuestre que, si la sucesión $\{a_n\}$ de números reales positivos tiende monótonamente hacia cero y el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es igual a 1, entonces esta serie converge en todo punto de la circunferencia $|z|=1$, salvo, posiblemente, el punto $z=1$.

*Sugerencia.* Recurra al criterio de convergencia de Dirichlet (véase el problema 88).

**451.** Demuestre que, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge en el punto $\xi = Re^{i\theta}$ de la circunferencia del círculo de convergencia, converge *uniformemente en todo recinto cerrado* $G$, *que pertenece al círculo* de convergencia, se encuentra en un ángulo entre dos cualesquiera cuerdas de la circunferencia $|z| = R$ que parten del punto $\zeta$ y no contiene ningún punto de la circunferencia $|z| = R$, salvo el punto $\zeta$.

*Observación.* Esta afirmación es una forma más general del segundo teorema de Abel (véase, por ejemplo, [*I*, cap. *III*, § 7, n° 3]).

## § 5. SERIE DE TAYLOR

### DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE TAYLOR

En los problemas **452—466** desarrolle las funciones dadas en una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ y halle el radio de convergencia.

**452.** $\operatorname{ch} z$. **453.** $\operatorname{sh} z$. **454.** $\operatorname{sen}^2 z$. **455.** $\operatorname{ch}^2 z$.

**456.** $(a+z)^\alpha$ $(a^\alpha = e^{\alpha \ln a})$. **457.** $\sqrt{z+i}$ $\left(\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$.

**458.** $\frac{1}{az+b}$ $(b \neq 0)$. **459.** $\frac{z}{z^2-4z+13}$. **460.** $\frac{z^2}{(z+1)^2}$.

**461.** $\ln \frac{1+z}{1-z}$. **462.** $\operatorname{Arctg} z$ $(\operatorname{Arctg} 0 = 0)$.

**463.** $\operatorname{Arsh} z$ $(\operatorname{Arsh} 0 = 0)$. **464.** $\ln(z^2-3z+2)$.

**465.** $\int_0^z e^{z^2}\,dz$. **466.** $\int_0^z \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz$.

En los problemas **467—472** desarrolle las funciones dadas en una serie de potencias de $(z-1)$ y halle el radio de convergencia.

**467.** $\frac{z}{z+2}$. **468.** $\frac{z}{z^2-2z+5}$. **469.** $\frac{z^2}{(z+1)^2}$.

**470.** $\sqrt[3]{z}$ $\left(\sqrt[3]{1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$. **471.** $\ln z$. **472.** $\operatorname{sen}(2z-z^2)$.

*En los problemas* **473—477** *halle los cinco primeros términos* del desarrollo de las funciones dadas en serie de potencias de $z$.

**473.** $e^{z \operatorname{sen} z}$. **474.** $\sqrt{\cos z}$ $(\sqrt{\cos z} = 1$ para $z = 0)$.

**475.** $(1+z)^z = e^{z \ln(1+z)}$. **476.** $e^{e^z}$. **477.** $e^z \ln(1+z)$.

**478.** 1) Desarrolle en una serie de potencias de $z$ la función $\ln(1+e^z)$ (halle la relación recurrente entre los coeficientes de la serie).

*Sugerencia.* Halle previamente el desarrollo para la derivada de la función dada.

2) Demuestre que el único término del desarrollo que contiene una potencia impar de $z$ será $z/2$.

*Sugerencia.* Recuerra a la identidad $\ln(1+e^z) - \ln(1+e^{-z}) = z$.

En los problemas **479—483** desarrolle en serie de potencias de $z$ las funciones dadas, empleando para ello la multiplicación de series y la sustitución de una serie en una serie.

**479.** $[\ln(1-z)]^2$. **480.** $[\mathrm{Ln}(1-z)]^2$ $(\mathrm{Ln}\,1=2\pi i)$.

**481.** $(\mathrm{Arctg})^2$ $(\mathrm{Arctg}\,0=0)$.

**482.** $\mathrm{Arctg}\,z\ln(1+z^2)$ $(\mathrm{Arctg}\,0=0)$. **483.** $e^{\frac{z}{1-z}}$.

**484.** Demuestre que, si el desarrollo de la función $1/\cos z$ es representado en la forma $\frac{1}{\cos z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$, los números $E_{2n}$ (números de Euler) satisfacen las relaciones

$$E_0=1,\quad E_0+\binom{2n}{2}E_2+\ldots+\binom{2n}{2n}E_{2n}=0.$$

**485.** Demuestre que, si el desarrollo de la función $z/(e^z-1)$ en serie de potencias de $z$ es representado en la forma $\frac{z}{e^z-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$, los números $B_n$ (números de Bernoulli) verifican las relaciones

$$B_0=1,\quad \binom{n+1}{0}B_0+\binom{n+1}{1}B_1+\ldots+\binom{n+1}{n}B_n=0.$$

**486.** Demuestre que todos los números de Bernoulli de índice impar, salvo $B_1$, son iguales a cero.

*Sugerencia.* Recurra a la identidad $\frac{z}{e^z-1}-\frac{(-z)}{e^{-z}-1}=-z$.

**487.** Desarrolle en serie de potencias de $z$ la función $z\,\mathrm{ctg}\,z$ y halle el radio de convergencia de la serie obtenida.

*Sugerencia.* Recurra a la igualdad $z\,\mathrm{ctg}\,z=iz+2iz/(e^{2iz}-1)$ que se deduce de las fórmulas de Euler.

**488.** Desarrolle las funciones dadas en serie de potencias de $z$ y halle los radios de convergencia de las series obtenidas:

1) $\ln\frac{\operatorname{sen} z}{z}$; 2) $\mathrm{tg}\,z$; 3) $\ln\cos z$; 4) $\frac{z}{\operatorname{sen} z}$.

**489.** Demuestre que los coeficientes $c_n$ del desarrollo

$$\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

verifican la relación $c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$ $(n\geqslant 2)$. Halle $c_n$ y el radio de convergencia de la serie.

*Observación.* Los números $c_n$ se llaman *números de Fibonacci*.

**490.** En el desarrollo $\frac{A+Bz+Cz^2}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n\ (\alpha \neq 0)$ halle $c_0$, $c_1$ y $c_2$, así como la relación recurrente entre $c_n$, $c_{n-1}$, $c_{n-2}$ y $c_{n-3}$ $(n \geqslant 3)$.

### FUNCIONES GENERADORAS DE SISTEMAS DE POLINOMIOS

Si en un círculo $|t| < R$ tiene lugar el desarrollo

$$F(t, z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\, t^n,$$

la función $F(t, z)$ se llama *función generadora* para la sucesión $\{f_n(z)\}$. Con frecuencia, algunas propiedades de la sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ se pueden demostrar basándose en las propiedades de su función generadora.

**491.** *Los polinomios de Bernoulli $\varphi_n(z)$ se definen mediante el* desarrollo

$$t\,\frac{e^{tz}-1}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(z)}{n!}\,t^n.$$

Demuestre que poseen las siguientes propiedades:

1) $\varphi_n(z+1)-\varphi_n(z)=nz^{n-1}$;

2) *si $m$ es un número natural, se tiene*

$$\frac{\varphi_{n+1}(m)}{n+1}=1+2+3^n+\ldots+(m-1)^n;$$

3) $\varphi_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} B_k z^{n-k}$, donde $B_k$ son los números de Bernoulli (véase el problema **485**).

**492.** La función $\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}$ es generadora para los polinomios de Legendre $P_n(z)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, t^n.$$

Demuestre las relaciones:

1) $(n+1)P_{n+1}(z)-(2n+1)zP_n(z)+nP_{n-1}(z)=0$;

2) $P_n(z)=P'_{n+1}(z)-2zP'_n(z)+P'_{n-1}(z)$;

3) $(2n+1)P_n(z)=P'_{n+1}(z)-P'_{n-1}(z)$.

*Sugerencia.* Derive la función generadora respecto a $t$ y a $z$ respectivamente.

**493.** Empleando la fórmula integral para los coeficientes de la serie de Taylor, desmuestre que, siendo $-1 < s < 1$, se tiene

$$P_n(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta^n\, d\zeta}{\sqrt{1-2s\zeta+\zeta^2}},$$

donde $C$ es la circunferencia de radio $R > 1$ y de centro en el punto $\zeta = 0$.

**494.** Demuestre que la función $\frac{4-t^2}{4-4tz+t^2}$ es generadora para los polinomios de Chébyshev

$$T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z).$$

Empleando las fórmulas integrales para los coeficientes de la serie de Taylor, pruebe que $4T_{n+1}(z) - 4zT_n(z) + T_{n-1}(z) = 0$ para $n \geqslant 2$.

**495.** Los polinomios de Hermite—Chébyshev $H_n(z)$ se definen mediante el desarrollo

$$e^{2tz-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n.$$

Demuestre las siguientes relaciones:

1) $H_{n+1}(z) - 2zH_n(z) + 2nH_{n-1}(z) = 0 \quad (n \geqslant 1)$;

2) $H'_n(z) = 2nH_{n-1}(z) \quad (n \geqslant 1)$;

3) $H''_n(z) - 2zH'_n(z) + 2nH_n(z) = 0 \quad (n \geqslant 0)$;

4) $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n (e^{-z^2})}{dz^n}$.

**496.** Los polinomios de Chébyshev — Laguerre se pueden definir mediante la igualdad

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n (z^n e^{-z})}{dz^n}.$$

Halle la función generadora para la sucesión $\{L_n(z)\}$ y obtenga mediante ella la fórmula recurrente que realaciona

$$L_{n-1}(z), \; L_n(z) \text{ y } L_{n+1}(z).$$

*Observación.* En los problemas **492—496** se han considerado sólo algunas propiedades particulares de los sistemas de polinomios indicados. Acerca de otras propiedades importantes de los mismos, que desempeñan un papel considerable en la solución de diferentes problemas de la física matemática, véase, por ejemplo, [2, cap. VII, § 2] o R. Courant und D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, vol. I, cap. II y VII, Springer, Berlin, 1937.

### SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En los problemas **497—499** halle las resoluciones de las ecuaciones diferenciales dadas que verifican las condiciones $w(0) = 0$ y $w'(0) = 1$.

**497.** $w'' - z^2 w = 3z^2 - z^4$.

**498.** $(1 - z^2) w'' - 2zw'' + n(n+1) w = 0$.

**499.** $(1 - z^2) w'' - 4zw' - 2w = 0$.

**500.** Desarrolle en serie de tipo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ la función $\cos(m \arcsin z)$ ($\arcsin 0 = 0$), buscando la ecuación diferencial para la cual esta función es una de las soluciones.

**501.** La ecuación diferencial

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz}-abw=0$$

se llama *hipergeométrica*.

Halle la solución $w(z)$ de la ecuación hipergeométrica que es analítica en el punto $z=0$ y verifique la condición $w(0)=1$, suponiendo que $c$ no es igual ni a cero ni a un número entero negativo.

**502.** Demuestre que la solución general de la ecuación hipergeométrica es de la forma ($c$ no es igual a un número entero)

$$w=C_1F(a,\ b,\ c,\ z)+C_2z^{1-c}F(a+1-c,\ b+1-c,\ 2-c,\ z),$$

donde $F(a, b, c, z)$ es la función definida en el problema anterior (la serie hipergeométrica).

**503*.** Demuestre que, si $c$ no es igual ni a cero ni a un número entero negativo, se tiene

$$\frac{dF(a,\ b,\ c,\ z)}{dz}=\frac{ab}{c}F(a+1,\ b+1,\ c+1,\ z).$$

## § 6. ALGUNAS APLICACIONES DE LA FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY Y DE SERIES DE POTENCIAS

### CEROS DE FUNCIONES ANALITICAS

**504.** Demuestre que el punto $z_0$ es un cero de orden $k$ para la función analítica $f(z)$ si, y sólo si, en una vecindad del punto $z_0$ tiene lugar la igualdad $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$, donde la función $\varphi(z)$ es analítica en el punto $z_0$ y $\varphi(z_0)\neq 0$.

**505.** Halle el orden del cero $z=0$ para las funciones:
1) $z^2(e^{z^2}-1)$; 2) $6\operatorname{sen} z^3+z^3(z^6-6)$; 3) $e^{\operatorname{sen} z}-e^{\operatorname{tg} z}$.

**506.** El punto $z_0$ es un cero de orden $k$ para la función $f(z)$ y un cero de orden $l$ para la función $\varphi(z)$. ¿Qué es el punto $z_0$ para las funciones siguientes:

1) $f(z)\varphi(z)$; 2) $f(z)+\varphi(z)$; 3) $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$?

En los problemas **507—521** halle el orden de todos los ceros de las funciones dadas.

**507.** $z^2+9$. **508.** $\dfrac{z^2+9}{z^4}$. **509.** $z\operatorname{sen} z$.

**510.** $(1-e^z)(z^2-4)^3$. **511.** $1-\cos z$.

**512.** $\frac{(z^2-\pi^2)^2 \operatorname{sen} z}{z^7}$. **513.** $\frac{1-\operatorname{ctg} z}{z}$. **514.** $e^{\operatorname{tg} z}$.

**515.** $\operatorname{sen}^3 z^z$. **516.** $\frac{\operatorname{sen}^3 z}{z}$. **517.** $\operatorname{sen} z^3$. **518.** $\cos^3 z$.

**519.** $\cos z^3$. **520.** $(\sqrt{z}-2)^3$. **521.** $(1-\sqrt{2-2\cos z})^2$.

### TEOREMA DE UNICIDAD

**522.** ¿Puede existir un punto de acumulación para una sucesión de ceros (o, en general, de $A$-puntos) de una función que es diferente de una constante idéntica y que es analítica en toda la parte finita del plano?

**523.** ¿Existe una función analítica en el punto $z=0$ que en los puntos $z=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ toma los valores:

1) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$;

2) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \ldots, 0, \frac{1}{2k}, \ldots$;

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}, \ldots$;

4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$?

**524.** ¿Existe una función analítica en el punto $z=0$ que verifica las condiciones ($n$ es un número natural):

1) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$;

2) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$?

**525.** La función $\operatorname{sen}\frac{1}{1-z}$ posee una sucesión de ceros convergente hacia el punto $z=1$ y, sin embargo, esta función es distinta de una constante. ¿No está esto en contradicción en el teorema de unicidad?

### EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA EN TERMINOS DE SU PARTE REAL O IMAGINARIA

**526*.** La función $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ es analítica en el punto $z_0=x_0+iy_0$ y $f(z_0)=c_0$. Demuestre que

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)-\bar{c}_0.$$

**527.** Demuestre que en las condiciones del problema anterior

$$f(z)=2iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)+\bar{c}_0.$$

En los problemas **528—531** halle la función analítica $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ a partir de su parte real o su parte imaginaria dadas.

**528.** $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

**529.** $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y) - \frac{y}{x^2+y^2}$.

**530.** $v(x, y) = x + y - 3$. **531.** $v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sen} y$.

### DESIGUALDADES DE CAUCHY

**532.** Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

el desarrollo de la función $f(z)$ en el círculo $|z| < R$.

1) Demuestre que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}$ $(r < R)$.

2) Demuestre que, siendo $\max_{|z|=r} f(z) = M(r)$, los coeficientes $c_n$ verifican las desigualdades (desigualdades de Cauchy)

$$|c_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \quad (r < R).$$

3) Demuestre que, si al menos una de las desigualdades de Cauchy se convierte en una igualdad, es decir, $|c_k| = M(r)/r^k$, entonces la función $f(z)$ es de la forma $f(z) = c_k z^k$.

*Sugerencia.* Emplee la desigualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leqslant [M(r)]^2$$

que se deduce del punto 1).

**533.** Empleando las desigualdades de Cauchy demuestre el teorema de Liouville: si la función $f(z)$ es analítica en todo el plano y acotada, esta función es una constante.

*Observación.* Otro método de demostración del teorema de Liouville se da en el problema **421**.

**534.** Demuestre que la distancia del cero de la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ más próximo al punto $z = 0$ es no menor de $\frac{\rho |c_0|}{M + |c_0|}$, donde $\rho$ es un número cualquiera que no sobrepasa el radio de convergencia de la serie y $M = M(\rho) = \max_{|z|=\rho} f(z)$.

*Sugerencia.* Pruebe que la función $f(z)$ no tiene ceros en el recinto en el que $|f(z) - c_0| < |c_0|$ y estime $|f(z) - c_0|$ empleando las desigualdades de Cauchy.

**535.** La función $f(z)\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es analítica para $|z| \leqslant r$. Demuestre que la serie $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{n!}$ converge en todo el plano y que para su suma son válidas las estimaciones $|\varphi(z)| < Me^{\frac{|z|}{r}}$ y $|\varphi^{(k)}(z)| < \frac{M}{r^k} e^{\frac{|z|}{r}}$ ($M$ es una constante).

## TEOREMA DE AREAS PARA FUNCIONES UNIVALENTES

**536.** Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una función analítica en el círculo $|z| \leqslant 1$ que transforma este círculo univalentemente en un recinto $G$ de área $S$. Demuestre que $S = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2$.

*Sugerencia*. Escriba la fórmula para el cálculo del área $S$ en coordenadas polares.

*Observación*. Si se omite la condición de univalencia, cada parte aislada del recinto $G$ debe contarse tantas veces cuantas veces la función $f(z)$ toma en el círculo $|z| \leqslant 1$ los valores correspondientes.

**537.** Demuestre que, si en las condiciones del problema anterior la función $f(z)$ es analítica *sólo* en el círculo abierto $|z| < 1$ y si existe además el límite finito $\lim_{r \to 1} S_r = S$, donde $S_r$ es el área de la imagen del círculo $|z| \leqslant r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2$ converge y su suma es igual a $S/\pi$. Demuestre también que, si $\lim_{r \to 1} S_r = \infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2$ diverge.

**538.** 1) Empleando la solución del problema **536**, demuestre que, si $f'(0) = 1$ y la función $f(z)$ transforma conforme y biunívocamente el círculo $|z| \leqslant 1$ en un recinto $G$, entonces el área del recinto $G$ es no menor que el área del círculo que se transforma (propiedad extremal de una transformación en un círculo).

2) Demuestre que entre todas las funciones $f(z)$ analíticas en el círculo $|z| \leqslant R$ que verifican la condición $\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi = M$, es la función lineal la que realiza la transformación del círculo en el recinto de menor área. Halle este área, si $f(0) = 0$.

En los problemas **539—542** recurra al principio de módulo máximo.

**539.** Demuestre que, si la función $f(z)$, diferente de una constante, es analítica en un recinto $G$ y no se anula, el mínimo de la función $|f(z)|$ no puede alcanzarse en el interior del recinto $G$.

**540.** 1) Demuestre que en el interior de un recinto, acotado por una línea cerrada simple equipotencial del módulo de la función $f(z)$ (es decir, por una línea en todos los puntos de la cual $|f(z)| = \text{const}$) y contenido de su frontera en el recinto de analiticidad de la función $f(z)$, existe por lo menos un cero de esta función $f(z) \not\equiv C$).

2) Demuestre que, si $P(z)$ es un polinomio de grado $n$, las líneas equipotenciales de su módulo $|P(z)| = C$ (lemniscatas) pueden descomponerse en no más de $n$ componentes conexas.

**541.** Demuestre el lema de Schwarz: si la función $f(z)$ es analítica en el círculo $|z| < 1$ y, ademas, $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leqslant 1$, se tiene $|f(z)| \leqslant |z|$ en todo el círculo.

Demuestre también que, si al menos en un punto interior del círculo $|f(z)| = |z|$, se tiene $f(z) = e^{i\alpha} z$ ($\alpha$ es un número real).

*Sugerencia.* Considere la función $f(z)/z$ y aplique a ella el principio de módulo máximo.

**542.** Demuestre que, si en el problema anterior la condición $f(0) = 0$ es sustituida por la condición $f(\alpha) = 0$ ($|\alpha| < 1$), es válida la desigualdad $f(z) \leqslant \left| \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z} \right|$ para $|z| \leqslant 1$.

*Sugerencia.* Considere la función $\frac{1-\alpha\bar{z}}{z-\alpha} f(z)$.

CAPITULO IV

# SERIE DE LAURENT. PUNTOS SINGULARES DE FUNCIONES ANALITICAS UNIFORMES. RESIDUOS Y SUS APLICACIONES

## § 1. SERIE DE LAURENT

En los problemas **543—560** desarrolle la función dada en serie de Laurent o bien en el anillo indicado o bien en una vecindad del punto señalado. En el último caso determine el recinto para el cual es válido el desarrollo.

**543.** $\frac{1}{z-2}$ en vecindades de los puntos $z=0$ y $z=\infty$.

**544.** $\frac{1}{(z-a)^k}$ ($a \neq 0$, $k$ es un número natural) en vecindades de los puntos $z=0$ y $z=\infty$.

**545.** $\frac{1}{z(1-z)}$ en vecindades de los puntos $z=0$, $z=1$ y $z=\infty$.

**546.** $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0<|a|<|b|)$ en vecindades de los puntos $z=0$, $z=a$ y $z=\infty$ y en el anillo $|a|<|z|<|b|$.

**547.** $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ en una vecindad del punto $z=2$ y en anillo $1<|z|<2$.

**548.** $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ en vecindades de los puntos $z=i$ y $z=\infty$.

**549.** $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ $(|b| \geqslant |a|)$ en una vecindad del punto $z=\infty$ (considere ambas ramas de la función).

**550.** $f(z)=\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}\left(\operatorname{Im} f\left(\frac{3}{2}\right)>0\right)$ en el anillo $1<|z|<2$.

**551.** $z^2e^{1/z}$ en vecindades de los puntos $z=0$ y $z=\infty$.

**552.** $e^{\frac{1}{1-z}}$ en vecindades de los puntos $z=1$ y $z=\infty$.

**553.** $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ en una vencidad del punto $z=2$.

**554.** $z^2 \operatorname{sen}\frac{1}{z-1}$ en una vecindad del punto $z=1$.

**555.** $e^{z+\frac{1}{z}}$ en el recinto $0<|z|<\infty$.

**556.** $\operatorname{sen} z \operatorname{sen}\frac{1}{z}$ en el recinto $0<|z|<\infty$.

**557.** $\operatorname{sen}\frac{z}{1-z}$ en vecindades de los puntos $z=1$ y $z=\infty$ (en el último caso limítese a buscar los cuatro primeros términos de la serie).

**558.** $\operatorname{ctg} z$ en una vecindad del punto $z=0$ y en el anillo $\pi<|z|<2\pi$.

**559.** $\ln\frac{z-a}{z-b}$ en una vecindad del punto $z=\infty$.

**560.** $\frac{1}{z-2}\ln\frac{z-i}{z+i}$ en una vecindad del punto $z=\infty$ y en el anillo $1<|z|<2$.

**561.** Analice si las funciones dadas admiten el desarrollo en serie de Laurent en una vecindad del punto indicado:

1) $\cos\frac{1}{z}$, $z=0$; 2) $\cos\frac{1}{z}$, $z=\infty$; 3) $\sec\frac{1}{z-1}$, $z=1$;

4) $\operatorname{ctg} z$, $z=\infty$; 5) $\operatorname{th}\frac{1}{z}$, $z=0$; 6) $\dfrac{z^2}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}}$, $z=0$;

7) $\frac{z}{\operatorname{sen} z-3}$, $z=\infty$; 8) $\ln z$, $z=0$; 9) $\ln\frac{1}{z-1}$, $z=\infty$;

10) $\ln\frac{z-1}{z+i}$, $z=\infty$; 11) $z^{\alpha}\,(=e^{\alpha\ln z})$, $z=0$.

**562.** Analice si las funciones multiformes dadas poseen ramas uniformes que puedan ser desarrolladas en serie de Laurent (en serie de Taylor, en particular) en una vecindad del punto indicado:

1) $\sqrt{z}$, $z=0$; 2) $\sqrt{z(z-1)}$, $z=\infty$;

3) $\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $z=\infty$; 4) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z=\infty$;

5) $\sqrt[4]{z(z-1)^2}$, $z=\infty$; 6) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=1$;

7) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=0$; 8) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z=\infty$;

9) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z=1$; 10) $\sqrt{1+\sqrt[3]{\dfrac{z}{z+1}}}$, $z=\infty$;

11) $\operatorname{Ln}[(z-1)(z-2)]$, $z=\infty$; 12) $\operatorname{Ln}\dfrac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\gamma)(z-\delta)}$, $z=\infty$;

13) $\operatorname{Arcsen} z$, $z=0$; 14) $\operatorname{Arctg}(1+z)$, $z=0$;

15) $\operatorname{Arsh}(i+z)$, $z=0$; 16) $\sqrt{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsen} z}$, $z=1$;

17) $\sqrt{\frac{\pi}{4}-\operatorname{Arcsen} z}$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**563.** La función $f(z) \sum_{n=-\infty} c_n z^n$ es analítica en el anillo $r \leqslant |z| \leqslant R$ y lo transforma univalentemente en un recinto $D$.

1) Demuestre que el área $S$ de este recinto es igual a

$$S = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,|c_n|^2 (R^{2n} - r^{2n}).$$

2) Demuestre que la fórmula para el área $S$ sigue siendo válida aún cuando $f(z)$ es analítica en el recinto $r < |z| < R$; en este caso ambos miembros de la igualdad pueden convertirse simultáneamente en el $\infty$.

*Sugerencia.* Véanse los problemas **536** y **537**.

**564.** La función $f(z)$ es univalente en el recinto $|z| > 1$ y se desarrolla en este recinto en una serie de Laurent de tipo $f(z) = z + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots$

Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_{-n}|^2 \leqslant 1,$$

y explique el significado geométrico de la desigualdad obtenida (teorema exterior de áreas).

*Sugerencia.* Recurra a que para el área $S_r$, limitada por la imagen de la circunferencia $|z| = r > 1$, se tiene $(f(z) = u + iv)$

$$0 \leqslant S_r = \int_{|z|=r} u\,dv \int_0^{2\pi} \frac{f+\bar{f}}{2} \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} \right) d\varphi.$$

## § 2. PUNTOS SINGULARES DE FUNCIONES ANALITICAS UNIFORMES

En los problemas **565—600** halle los puntos singulares de las funciones, analice la naturaleza de los mismos e investigue el comportamiento de las funciones en el infinito.[1]

**565.** $\frac{1}{z-z^3}$. **566.** $\frac{z^4}{1+z^4}$. **567.** $\frac{z^5}{(1-z)^2}$. **568.** $\frac{1}{z(z^2+4)^2}$.

**569.** $\frac{e^z}{1+z^2}$. **570.** $\frac{z^2+1}{e^z}$. **571.** $ze^{-z}$. **572.** $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$.

**573.** $\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$. **574.** $\frac{1-e^z}{2+e^{-z}}$. **575.** $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$. **576.** $\operatorname{th} z$.

**577.** $e^{-\frac{1}{z^2}}$. **578.** $ze^{\frac{1}{z}}$. **579.** $e^{\frac{z}{1-z}}$. **580.** $e^{z-\frac{1}{z}}$. **581.** $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$.

[1] En las respuestas no se distinguen los puntos singulares evitables de los puntos regulares.

582. $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$. 583. $\frac{\cos z}{z^2}$. 584. $\operatorname{tg} z$. 585. $\operatorname{tg}^2 z$. 586. $\frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$.

587. $\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$. 588. $\operatorname{ctg} z-\frac{2}{z}$. 589. $\frac{1}{\operatorname{sen} z-\operatorname{sen} a}$.

590. $\frac{1}{\cos z+\cos a}$. 591. $\operatorname{sen}\frac{1}{1-z}$. 592. $\frac{z^7}{(z^2-4)^2\frac{1}{z-2}}$.

593. $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$. 594. $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}-\frac{1}{z}$. 595. $\operatorname{sen}\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$. 596. $e^{-z}\cos\frac{1}{z}$.

597. $e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{z}}$. 598. $e^{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$. 599. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}}\right)$. 600. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$.

En los problemas **601—610** analice el comportamiento en los puntos indicados de cada una de las ramas uniformes de la función multiforme dada (determine si el punto es regular o singular para la rama correspondiente; en el último caso indique el carácter de la singularidad).

**601.** $\frac{z}{1+\sqrt{z-3}}$, $z=4$. **602.** $\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}}$, $z=1$.

**603.** $\frac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}$, $z=1$. **604.** $\cos\frac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z=1$.

**605.** $\frac{1}{(2+\sqrt{z})\cos(2\sqrt{z})}$, $z=4$.

**606.** $\operatorname{ctg}\frac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z=\left(1+\frac{1}{k\pi}\right)^2$, donde $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ y $z=1$.

**607.** $\frac{1}{\operatorname{sen}\left(1+\sqrt{\frac{z}{z-2}}\right)}$, $z=\frac{2(1+k\pi)}{(1+k\pi)^2-1}$, donde $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ y $z=\infty$.

**608.** $\operatorname{sen}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{z}{z-2}}}$, $z=\infty$.

**609.** 1) $\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\operatorname{Ln} z}{2i}}$, $z=1$; 2) $\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\operatorname{Ln} z}{4i}}$, $z=1$.

**610.** $\operatorname{sen}\left(\operatorname{ctg}\frac{\operatorname{Ln} z}{4i}\right)$, $z=1$.

**611.** Sean $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ polinomios de grado $n$ y $m$ respectivamente. Describa el comportamiento en el infinito de las funciones siguientes:

1) $P_n(z)+Q_m(z)$; 2) $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$; 3) $P_n(z)\,Q_m(z)$.

**612.** Demuestre la equivalencia de las dos definiciones siguientes: 1) El punto $z_0$ se llama polo de orden $n$ de la función $f(z)$, si para el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en una vecindad de $z_0$ se tiene

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_{-n}\neq 0, \quad c_{-(n+1)}=c_{-(n+2)}=\ldots=0.$$

2) El punto $z_0$ se llama polo de orden $n$ de la función $f(z)$, si en una vecindad de este punto se tiene $f(z)=\varphi(z)/(z-z_0)^n$, donde $\varphi(z)$ es analítica y $\varphi(z_0)\neq 0$.

**613.** Construya ejemplos de funciones que en el plano ampliado tienen solamente las siguientes singularidades:

1) polo de segundo orden en el infinito;

2) polo de segundo orden en el punto $z=0$ con $c_{-2}/z^2$ como parte principal del desarrollo y polo simple en el infinito;

3) polos simples en los puntos $z_k=\omega^k$, donde

$$\omega=e^{2\pi i/n} \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

**614.** Halle la forma general de la función que en el plano ampliado tiene solamente las siguientes singularidades:

1) un polo simple;

2) un polo de orden $n$;

3) un polo de segundo orden en el punto $z=0$ con $1/z^2$ como parte principal del desarrollo;

4) un polo de orden $n$ en el punto $z=0$ y un polo de orden $m$ en el infinito;

5) $n$ polos de primer orden.

**615.** Sea $f(z)$ una función uniforme que no tiene en el recinto $G$ otras singularidades, a excepción de polos. Demuestre que la función $\frac{f'(z)}{f(z)-A}$ (derivada logarítmica de la función $f(z)-A$) tiene polos simples en todos los polos de la función $f(z)$ y en todos los $A$-puntos de esta función y no tiene otros puntos singulares.

**616.** ¿Qué tipo de singularidad tiene la función $F(z)=f[\varphi(z)]$ en el punto $z=z_0$ (el caso $z_0=\infty$ se admite), si la función $\varphi(z)$ o bien es analítica en este punto o bien tiene en él un polo, mientras que el punto $\zeta_0=\varphi(z_0)$ es para la función $f(\zeta)$ una singularidad del tipo siguiente:

1) punto singular evitable; 2) polo de orden $n$; 3) punto singular esencial?

**617.** El punto $z_0$ (el caso $z_0=\infty$ se admite) es un punto singular aislado de la función $f(z)$ que transforma el arco circular (o el segmento rectilíneo) $\gamma$ en un arco circular (o en un segmento rectilíneo) $\gamma'$. ¿Qué tipo de singularidad tiene la función $f(z)$ en el punto $z_0^*$ simétrico a $z_0$ respecto a $\gamma$ (la función $f(z)$ se prolonga a través de $\gamma$ según el principio de simetría), si el punto $z_0$ es para $f(z)$:

1) un polo de orden $n$; 2) un punto singular esencial?

**618.** El teorema de Sojotski — Cassorati — Weierstrass afirma que, siendo $z_0$ un punto singular esencial de la función $f(z)$, cualquiera que sea el número complejo $A$ (incluyendo el caso $A=\infty$) existe una sucesión de puntos $\{z_n\}$ convergente hacia el punto $z_0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$. Demuestre que el teorema sigue siendo válido en el caso de un punto singular no aislado que es límite de polos[1]. (A veces, puntos de este tipo se consideran simplemente como puntos singulares esenciales).

**619.** Halle los límites:

1) $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \operatorname{ctg}^2 z$; 2) $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \frac{1}{\operatorname{sen} z}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} z}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}}$.

Contradice la existencia de estos límites al teorema de Sojotski — Cassorati — Weierstrass?

El teorema de Picard afirma que en una vecindad de un punto singular esencial la función analítica correspondiente asume infinitas veces cualquier valor finito, salvo, posiblemente, un valor que se denomina *valor excepcional de Picard*. Si se consideran las funciones meromorfas, el número posible de valores excepcionales (incluyendo el $\infty$) no pasa de dos (véase, por ejemplo, [I, cap. VIII, § 8, n°4]).

**620.** Compruebe el teorema de Picard para las funciones:

1) $e^z$; 2) $e^{1/z}$; 3) $\cos\frac{1}{z}$; 4) $\operatorname{tg} z$; 5) $\operatorname{tg}^2 z$.

Halle los valores excepcionales para cada una de estas funciones y demuestre que estos valores (si es que existen) son asintóticos, es decir, que se puede indicar al menos una curva que termina en el punto singular esencial a lo largo de la cual la función tiende hacia el valor excepcional.

## § 3. CALCULO DE RESIDUOS

En los problemas **621—624** hay que calcular los residuos de las funciones indicadas respecto a todos sus puntos singulares aislados y respecto al punto infinito (si éste no es límite de puntos singulares).

**621.** $\frac{1}{z^3-z^5}$. **622.** $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$. **623.** $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ ($n$ es un número natural). **624.** $\frac{1}{z(1-z^2)}$. **625.** $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$. **626.** $\frac{\operatorname{sen} 2z}{(z+1)^3}$.

**627.** $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. **628.** $\operatorname{tg} z$. **629.** $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$. **630.** $\operatorname{ctg}^2 z$.

**631.** $\operatorname{ctg}^3 z$. **632.** 1) $\cos\frac{1}{z-2}$; 2) $z^3\cos\frac{1}{z-2}$. **633.** $e^{z+\frac{1}{z}}$.

**634.** $\operatorname{sen} z \operatorname{sen}\frac{1}{z}$. **635.** $\operatorname{sen}\frac{z}{z+1}$. **636.** $\cos\frac{z^2+4z-1}{z+3}$.

**637.** $\frac{1}{z(1-e^{-hz})}$ $(h\neq 0)$. **638.** $z^n \operatorname{sen}\frac{1}{z}$ ($n$ es un número entero).

---

[1] Se supone que en una vecindad del punto considerado los polos son las únicas singularidades.

639. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}}$. 640. $\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{sen}\sqrt{z}}$. 641. $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}$ ($n$ es un número natural).

En los problemas 642—649 hay que calcular los residuos de cada una de las ramas uniformes de las correspondientes funciones multiformes respecto a los puntos indicados.

642. $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$ respecto al punto $z=1$.

643. $\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$ respecto al punto $z=1$.

644. $\dfrac{z^a}{1-\sqrt{z}}$ ($z^a=e^{a \operatorname{Ln} z}$) respecto al punto $z=1$.

645. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ respecto al punto $z=\infty$.

646. 1) $\operatorname{Ln}\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ respecto al punto $z=\infty$.

2) $e^z \operatorname{Ln}\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ respecto al punto $z=\infty$.

647. 1) $\operatorname{Ln} z \operatorname{sen}\dfrac{1}{z-1}$ respecto al punto $z=1$.

2) $\operatorname{Ln} z \cos\dfrac{1}{z-1}$ respecto al punto $z=1$.

648. $\dfrac{\operatorname{Arctg} z}{z}$ respecto a los puntos $z=0$ y $z=\infty$.

649. $z^n \operatorname{Ln}\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ ($n$ es un número entero) respecto a los puntos $z=0$ y $z=\infty$ (al calcular el residuo en el punto $z=0$ se supone que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$).

650. El desarrollo de una función en una vecindad del punto infinito es de la forma $f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots$ Halle $\operatorname{res}[\{f(z)\}^2]_{z=\infty}$.

651. Halle $\operatorname{res}[\varphi(z) f(z)]_{z=a}$, si $\varphi(z)$ es analítica en el punto $a$ y $f(z)$ tiene en este punto:

1) un polo simple de residuo $A$;

2) un polo de orden $k$ con la parte principal $\frac{c_{-1}}{z-a}+\ldots+\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$.

652. Halle $\operatorname{res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a}$, si:

1) $a$ es un cero de orden $n$ de la función $f(z)$;

2) $a$ es un polo de orden $n$ de la función $f(z)$;

653. Halle $\operatorname{res}\left[\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=a}$, si $\varphi(z)$ es analítica en el punto $a$ y:

1) $a$ es un cero de orden $n$ de la función $f(z)$;

2) $a$ es un polo de orden $n$ de la función $f(z)$.

654. Halle $\operatorname{res}\{f[\varphi(z)]\}_{z=a}$, si la función $\varphi(z)$ es analítica en el punto $a$ y $\varphi'(a) \neq 0$, mientras que $f(\zeta)$ tiene un polo de primer orden en el punto $\zeta=\varphi(a)$ de residuo $A$.

**655.** La función $\varphi(z)$ tiene en el punto $a$ un polo de primer orden de residuo $A$, mientras que $f(\zeta)$ tiene en el infinito un polo de primer orden con la parte principal $B\zeta$. Halle res $\{f[\varphi(z)]\}_{z=a}$

**656.** La función $f(z)$, que toma valores reales en un arco $l$ de la circunferencia $|z-a|=R$, ha sido prolongada analíticamente a través de este arco según el principio de simetría. Sea el punto $z=\beta$ $(\beta\neq a)$ un polo de orden $k$ para la función $f(z)$ con la parte principal

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{c_{-n}}{(z-\beta)^n}.$$

Halle res $[f(z)]_{z=\beta^*}$, donde $\beta^*$ es el punto simétrico a $z=\beta$ respecto a $l$.

## § 4. CALCULO DE INTEGRALES

### APLICACIÓN DIRECTA DEL TEOREMA DE LOS RESIDUOS

En los problemas **657—666** calcule las integrales aceptando que *el recorrido de los contornos cerrados se realiza en la dirección positiva.*

**657.** $\int\limits_C\frac{dz}{z^4+1}$, donde $C$ es la circunferencia $x^2+y^2=2x$.

**658.** $\int\limits_C\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, donde $C$ es la circunferencia $|z-2|=\frac{1}{2}$.

**659.** $\int\limits_C\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, donde $C$ es la circunferencia $|z|=2$.

*Sugerencia.* Recurra a que la suma de los residuos respecto a todos los puntos singulares (incluyendo el infinito) es igual a cero.

**660.** $\int\limits_C\frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, donde $C$ es la circunferencia $|z|=1$.

**661.** $\int\limits_C\frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z|=1$.

**662.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \operatorname{sen}\frac{1}{z}\,dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z|=r$.

**663.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \operatorname{sen}^2\frac{1}{z}\,dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z|=r$.

**664.** $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^n e^{\frac{2}{z}}\,dz$, donde $n$ es un número entero y $C$ es la circunferencia $|z|=r$.

**665.** $\int\limits_{|z|=3}(1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz.$

**666.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{z\,dz}{\operatorname{sen} z\,(1-\cos z)}$.

**667.** Calcule la integral $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(z)}{zg(z)}\,dz$, donde $C$ es un contorno cerrado simple que limita un recinto $G$ que contiene el punto $z=0$. Las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en el recinto cerrado $\bar{G}$, con la particularidad de que la función $g(z)$ no se anula en el contorno $C$ y tiene en el recinto $G$ solamente ceros simples $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ninguno de los cuales coincide con el origen de coordenadas.

**668.** Sea $f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R} z^{n-1}|f(z)|^2\,dz = a_0\bar{a}_nR^{2n}.$$

En los problemas **669—672** calcule las integrales dadas.

**669.** $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$, donde $C$ es la circunferencia $|z|=r\neq 1$.

**670.** $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$ $(\sqrt{1}=1)$, donde $C$ es la parábola $y^2=x$ recorrida en la dirección de crecimiento de $y$.

**671.** $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{dz}{a^z\operatorname{sen}\pi z}$ $(a^z=e^{z\ln a})$, donde $a>0$, mientras que $C$ es la recta $x=\alpha$, $0<\alpha<1$ recorrida desde abajo hacia arriba.

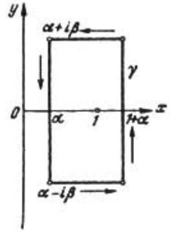


FIG. 12

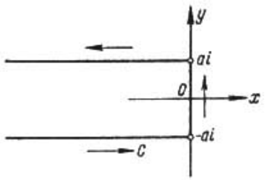


FIG. 13

*Sugerencia*. Considere $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{a^z\operatorname{sen}\pi z}$, donde el contorno $\gamma$ se indica en la fig. 12, y pase al límite para $\beta\to\infty$

**672.** $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{e^z dz}{\cos z}$, donde el contorno de integración $C$ se indica en la fig. 13.

Si la función $f(x)$ se hace infinita para $x=c$ $(a<c<b)$, el valor principal según Cauchy de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se define mediante

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

De modo natural esta definición se generaliza al caso de una integral curvilínea.

Si la función $f(x)$ es continua en todo el eje real, el valor principal de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se define mediante $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)\,dx$.

En los problemas **673—680** halle las integrales definidas. En el caso en que *la integral sea impropia y diverja, halle su valor* principal (si éste existe).

**673.** $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}\ (a>1)$.

*Sugerencia.* Tome $e^{i\varphi}=z$.

**674.** $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}\ (a>b>0)$.

**675.** $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}\ (a>0,\ b>0)$.

**676.** $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ ($a$ es un número complejo y $a\neq\pm1$).

**677.** $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\varphi\,d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ ($a$ es un número complejo y $a\neq\pm1$).

**678.** $\int_0^{2\pi} e^{\cos a}\cos(n\varphi-\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi$ ($n$ es un número entero).

**679.** $\int_0^{\pi}\operatorname{tg}(x+ia)\,dx$ ($a$ es un número real).

**680.** $\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}(x+a)\,dx$ ($a$ es un número complejo e $\operatorname{Im} a\neq 0$).

**681.** Demuestre que para $b > a > -1$ se tiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a \varphi \cos b\varphi d\varphi = \frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}.$$

*Sugerencia*. Considere $\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^a z^{b-1}\,dz$, donde $C$ es el contorno representado en la fig. 14, y haga tender hacia cero los radios de los arcos de las circunferencias pequeñas. Al calcular la integral a lo largo del segmento vertical, divídala en dos, reduciendo éstas, mediante sustituciones correspondientes, a integrales eulerianas de primera especie; emplee asimismo la conocida relación entre las integrales eulerianas

$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ y la fórmula $\Gamma(p)\Gamma(1-p)\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi p}$.

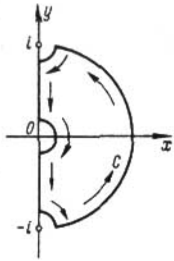

FIG. 14

---

En los problemas **682—688** calcule las integrales de límites infinitos.

**682.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

**683.** $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}\ (a > 0)$.

**684.** $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ ($n$ es un número natural).

**685.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\ (a > 0,\ b > 0)$.

**686.** $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$. **687.** $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ ($n \geqslant 2$ es un número natural).

*Sugerencia*. Considere la integral $\int_C \frac{dz}{1+z^n}$, donde $C$ es el contorno compuesto por los rayos $\arg z = 0$ y $\arg z = 2\pi/n$ y por el arco de la circunferencia que los une.

**688.** $\int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx\ (n \geqslant 2)$.

*Observación*. El método de cálculo de integrales empleado en los problemas **687** y **688** se extiende a integrales de funciones racionales de tipo $R(x^n)$.

**689.** Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{d\tau}{\tau^n\bar{\tau}^k}=\frac{i^{k-n-1}(n+k-2)!}{(2h)^{n+k-1}(k-1)!\,(n-1)!}\ (n \text{ y } k \text{ son números naturales}),$$

donde $C$ es la recta paralela al eje real que corta en el eje imaginario un segmento igual a $h\,(h>0)$.

**690.** Calcule la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{d\tau}{\bar{\tau}^k(\tau-z)}\ (k \text{ es un número natural}).$$

donde $C$ es el contorno del problema anterior.

En los problemas **691**—**694** calcule las integrales dadas, empleando el lema de Jordan (véase el problema **402**).

**691.** 1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x dx}{x^2-2x+10}$; 2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x dx}{x^2-2x+10}$.

**692.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x\,dx}{x^2+4x+20}$.

**693.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx$ ($a$ y $b$ son números positivos).

**694.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\,\mathrm{sen}\,ax}{x^2+b^2}\,dx$ ($a$ y $b$ son números positivos).

**695.** Sea $f(z)=e^{imz}F(z)$, donde $m>0$ y la función $F(z)$ posee las propiedades siguientes:

1) *en el semiplano siperior tiene un número finito de puntos singulares* $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2) es analítica en todos los puntos del eje real, a excepción de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ que son polos simples;

3) $F(z)\to 0$, para $z\to\infty$ e $\operatorname{Im} z\geqslant 0$.

Demuestre que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}[f(z)]_{z=a_k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res} f(z)_{z=x_k}\right\}$$

donde la integral se entiende en el sentido del valor principal (respecto a todos los puntos $x_k$ y al $\infty$).

En los problemas **696**—**700** halle los valores principales de las integrales dadas ($t$ es un número real).

**696.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x}\,dx$. **697.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-5x+6}$.

**698.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x^2+4)(x-1)}$. **699.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1-x^3}\,dx$. **700.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1-x^4}\,dx$.

En los problemas **701—706** calcule las integrales dadas ($a$ y $b$ son números positivos).

**701.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx$. **702.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{x(x^2+b^2)}$.

**703.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{x(x^2+b^2)^2}$. **704.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,dx$.

**705.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\,dx$.

*Sugerencia.* Emplee la integral $\int\limits_{C} \frac{e^{2iz}-1}{z^2}\,dz$, donde el contorno $C$ es el indicado en la fig. 15.

**706.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\,dx$.

*Sugerencia.* Emplee la integral $\int\limits_{C} \frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}\,dz$, donde el contorno $C$ es el indicado en la fig. 15.

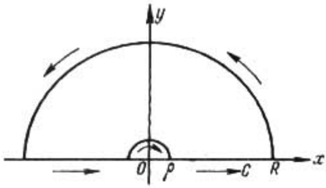


FIG. 15

En los problemas **707—710** calcule las integrales considerando que $x^p > 0$ para $x > 0$ (esta condición se mantiene en todos los problemas sucesivos).

**707.** 1) $\int\limits_{0}^{\infty} x^{p-1} \cos ax\,dx$ $(a > 0,\ 0 < p < 1)$;

2) $\int\limits_{0}^{\infty} x^{p-1} \operatorname{sen} ax\,dx$ $(a > 0,\ -1 < p < 1)$.

*Sugerencia*. Emplee la integral $\int\limits_C z^{p-1}e^{-az}\,dz$, donde el contorno $C$ es el indicado en la fig. 16.

**708.** $\int\limits_0^\infty \cos x^p\,dx \quad (p > 1)$. **709.** $\int\limits_0^\infty \operatorname{sen} x^p\,dx \quad (|p| > 1)$.

**710.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x^p}{x^p}\,dx \left(p > \frac{1}{2}\right)$.

---

**711.** Sea $f(z)$ una función racional que tiene polos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ninguno de los cuales pertenece a la parte positiva del eje real ni

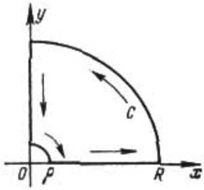


FIG. 16

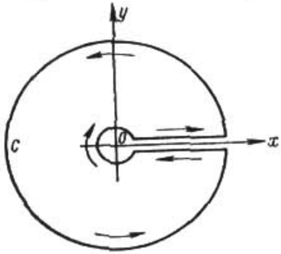


FIG. 17

es igual a cero, y sea $p$ un número real tal que

$$\lim_{z\to 0}[z^{p+1}f(z)] = \lim_{z\to\infty} z^{p+1}f(z) = 0.$$

Demuestre que:

1) Si $p$ no es un número entero, se tiene

$$\int\limits_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi p} e^{-\pi p i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[z^p f(z)]_{z=\alpha_k}$$

2) Si $p$ es un número entero, se tiene

$$\int\limits_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[z^p \operatorname{Ln} z\cdot f(z)]_{z=\alpha_k},$$

donde

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z \quad \text{y} \quad 0 \leqslant \arg z < 2\pi.$$

*Sugerencia.* Considere las integrales $\int\limits_C z^p f(z)\,dz$ y $\int\limits_C z^p \operatorname{Ln} z\cdot f(z)\,dz$, donde $C$ es el contorno representado en la fig. 17.

**712.** Calcule $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+1)}$ $(0 < p < 1)$.

**713.** Demuestre que

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi a} \quad (0 < a < 1).$$

*Sugerencia.* Use la conocida relación entre las integrales eulerianas $\Gamma(a)\,\Gamma(b)=\Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a,\,b)$ y realice en la integral, que define la función Beta $\mathrm{B}(a,\,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ el cambio de variable tomando $x=y/(1+y)$.

*Observación.* La relación, demostrada en el problema solamente para valores reales de $a$ comprendidos en el intervalo $(0,\,1)$, es válida para todos los números complejos. Para $z=-n$, donde $n$ es un número natural, ambos miembros de la igualdad se hacen igual al $\infty$.

En los problemas **714—716** calcule las integrales dadas.

**714.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1+x^2}$ $(-1 < p < 1)$.

**715.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{(1+x^2)^2}$ $(-1 < p < 3)$.

**716.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\,dx}{x^2+2x\cos\lambda+1}$ $(-1 < p < 1,\ \ -\pi < \lambda < \pi)$.

**717.** Sea $f(z)$ una función racional que en la parte positiva del eje real tiene solamente polos de primer orden $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$, y entre los demás polos suyos (si existen) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ ninguno es igual a cero. Sea, además, $p$ un número real que

$$\lim_{z\to 0}\,[z^{p+1}f(z)]=\lim_{z\to\infty}\,[z^{p+1}f(z)]=0.$$

Comprendiendo por la integral su valor principal, demuestre que
1) Si $p$ no es un número entero, se tiene

$$\int\limits_0^\infty x^pf(x)\,dx=-\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi p}\,e^{-\pi pi}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\,[z^pf(z)]_{z=\alpha_k}-$$

$$-\pi\operatorname{ctg}\pi p\sum_{k=1}^{m}\beta_k^0\operatorname{res}\,[f(z)]_{z=\beta_k},$$

donde $x^p>0$ para $x>0$.

2) Si $p$ es un número entero, se tiene

$$\int_0^\infty x^p f(x)\,dx = -\sum_{k=1}^{n} \text{res}\,[z^p \operatorname{Ln} z \cdot f(z)]_{z=a_k} -$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \beta_k^p (\ln \beta_k + \pi i)\,\text{res}\,[f(z)]_{z=\beta_k};$$

la rama de $\operatorname{Ln} z$ se escoge igual que en el problema **711**.

En los problemas **718—721** calcule los valores principales de las integrales.

**718.** $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^4-1}$. **719.** $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4-1}$.

**720.** $\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1-x}$ $(-1 < p < 0)$.

**721.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}\,dx}{1-e^x}$ $(0 < p < 1)$.

En los problemas **722—728** calcule las integrales dadas.

**722.** $\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\,dx$ $(-1 < p < 2)$.

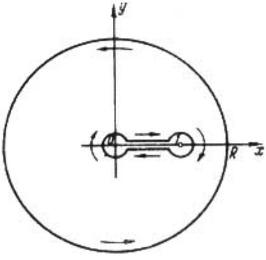


FIG. 18

*Sugerencia*. Considere $\int_C \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{(1+z)^3}\,dz$, donde $C$ es el contorno representado en la fig. 18, que limita un recinto biconexo, y pase al límite para $R \to \infty$.

**723.** $\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx$ $(-1 < p < 2)$.

*Sugerencia*. Demuestre que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}\,dz = 2\pi i e^{-p\pi i}$, donde $C_R$ es la circunferencia $|z| = R$ recorrida en la dirección positiva.

**724.** $\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p\,dx}{(1+x)^2}$ $(-1 < p < 2)$.

**725.** $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{x+a}$ $(-1 < p < 1,\ a > 0)$.

**726.** $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{(x+a)^2}$ $(-1 < p < 1,\ a > 0)$.

**727.** $\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx$ $(-1 < p < 2)$.

**728.** $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

**729.** Calcule la integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$, donde $\sqrt{1-x^2} > 0$ para $-1 < x < 1$, $a$ es un número complejo y $a \neq \pm 1$. Halle, en particular, los valores de la integral para $a = \pm e^{i\alpha}$ $(0 < \alpha < \pi)$, $a = iy$ y para $-1 < a < 1$ (el valor principal).

**730.** Calcule la integral $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{-p}}{b-x}\,dx$, donde $0 < p < 1$, $b$ es un número complejo y $b \neq 0$ y $b \neq 1$.

**731.** Calcule la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

*Sugerencia*. Considere la integral $\int_C \frac{dz}{\sqrt[n]{1-z^n}}$, donde $C$ es el contorno formado por los cortes a lo largo de los radios vectores de los puntos $i$, $\omega$, $\omega^2$, ..., $\omega^{n-1}$, donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, y por la circunferencia $|z| = R > 1$. (Esta integral puede ser también calculada empleando la función Beta de Euler).

En los problemas **732—737** calcule las integrales $(a > 0)$.

**732.** $\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+a^2}$.

*Sugerencia.* Considere la integral $\int\limits_C \frac{\ln z\,dz}{z^2+a^2}$, donde $C$ es el contorno indicado en la fig. 19.

**733.** $\int\limits_0^\infty \frac{\ln^2 x\,dx}{x^2+a^2}$. **734.** $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}\,(x^2+a^2)^2}$.

**735.** $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}\,(x+1)^2}$. **736.** $\int\limits_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}-x\right)\frac{dx}{1+x^2}$.

*Sugerencia.* Calcule la parte real de la integral

$$\int\limits_C \ln\left(\frac{1}{z}-z\right)\frac{dz}{1+z^2},$$

donde $C$ es el contorno indicado en la fig. 20.

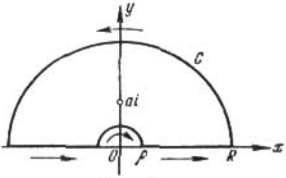


FIG. 19

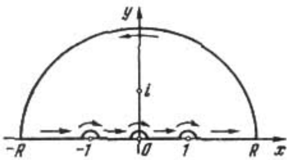


FIG. 20

**737.** $\int\limits_0^1 \ln\frac{1-x}{x}\,\frac{dx}{x+a}$.

**738.** Sea $f(z)$ una función racional sin polos en parte positiva del eje real ni en el punto $z=0$ y tal que $f(z)=O\left(\frac{1}{z}\right)$ para $z\to\infty$. Demuestre que

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{\ln^2 x+\pi^2}=\sum_{k=1}^n \operatorname{res}\left[\frac{f(z)}{\operatorname{Ln} z-\pi i}\right]_{z=a_k},$$

donde $a_1=-1$, mientras que $a_2, a_3, \ldots, a_n$ son los polos de la función $f(z)$, diferentes de $-1$, y $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\arg z$, $0\leqslant\arg z<2\pi$.

*Sugerencia.* Considere la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{\operatorname{Ln} z-\pi i}\,dz$, donde $C$ es el contorno indicado en la fig. 21.

En los problemas **739—741** calcule las integrales considerando que $a>0$ y que $n$ es un número natural.

**739.** 1) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x+\pi^2)}$;

2) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+\pi^2)}$.

**740.** $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)[\ln^2 x+(2n+1)^2\pi^2]}$.

*Sugerencia.* Considere la integral

$$\int\limits_C \frac{1}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n+1)\pi i}+\frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n-1)\pi i}+\ldots+\frac{1}{\operatorname{Ln} z+(2n-1)\pi i}\right]dz$$

donde el contorno $C$ se indica en la fig. 21 y la rama de $\operatorname{Ln} z$ se escoge igua que en el problema **738**.

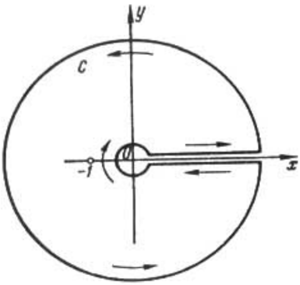


FIG. 21

**741.** $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+4n^2\pi^2)}$.

*Sugerencia.* Considere la integral

$$\int\limits_C \frac{1}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\operatorname{Ln} z-2n\pi i}+\frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n-2)\pi i}+\ldots+\frac{1}{\operatorname{Ln} z+(2n-2)\pi i}\right]dz,$$

donde el contorno $C$ se indica en la fig. 22 y la rama de $\operatorname{Ln} z$ escoge igual que en el problema **738**.

**742.** Sea $f(z)$ una función racional que no tiene polos en el contorno no cerrado $C$ que empieza en el punto $a$ y termina en el punto $b$.

Demuestre que

$$\int\limits_C f(z)\,dz=\sum \operatorname{res}\left[f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\right]+\operatorname{res}\left[f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\right]_{z=\infty},$$

donde la suma se efectúa respecto a todos los polos de **la función** $f(z)$ diferentes del $\infty$ (la rama uniforme del logaritmo **fuera de** $C$ se escoge arbitrariamente).

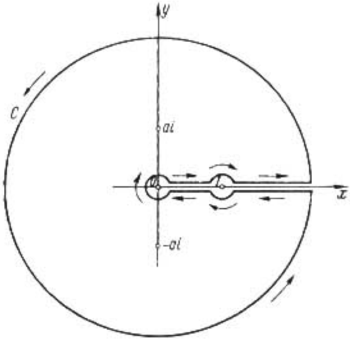


FIG. 22

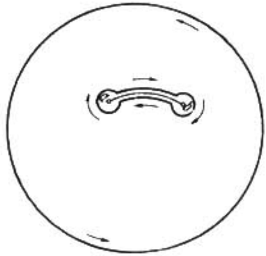

FIG. 23

*Sugerencia*. Considere $\int\limits_{\Gamma} f(z) \operatorname{Ln} \frac{z-b}{z-a} dz$, donde el contorno $\Gamma$, que limita un recinto biconexo, se indica en la fig. 23.

---

En los problemas **743—748** halle las integrales dadas considerando que $a$ es un número real.

**743.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\,dx}{(e^x+1)(e^x+2)}$ $(0 < a < 2)$.

*Sugerencia*. Considere la integral $\int\limits_{C} \frac{e^{az}}{(e^z+1)(e^z+2)} dz$ donde $C$ es el rectángulo con vértices en $-R$, $R$, $R+2\pi i$ y $-R+2\pi i$.

**744.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{\operatorname{sh} x}$.

*Sugerencia*. Considere la integral $\int\limits_{C} \frac{e^{aiz}\,dz}{\operatorname{sh} z}$, donde el contorno $C$ se indica en la fig. 24.

**745.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax\,dx}{\operatorname{ch} x}$.

**746.** $\int\limits_0^\infty \frac{x \cos ax\, dx}{\operatorname{sh} x}$. **747.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx \, (-\pi < a < \pi)$.

*Sugerencia.* Haga uso de la integral $\int\limits_C \frac{e^{az}\, dz}{\operatorname{ch} \pi z}$, donde $C$ es la frontera del rectángulo $-\alpha \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \alpha$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$.

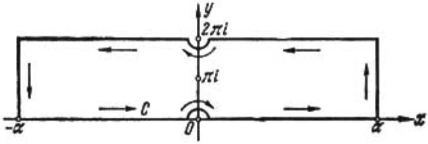


FIG. 24

**748.** $\int\limits_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1+a^2-2a \cos x} \, (a > 0)$.

*Sugerencia.* Haga uso de la integral $\int\limits_C \frac{z\, dz}{a - e^{-iz}}$, donde $C$ es la frontera del rectángulo $-\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant h$, y pase al límite para $h \to \infty$.

## INTEGRALES RELACIONADAS CON LA FÓRMULA DE INVERSIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

Desde este momento y hasta el final del parágrafo se supone que $t > 0$ y que $C_1$ es la recta $\operatorname{Re} z = \alpha > 0$, recorrida desde abajo hacia arriba, con la particularidad de que $\alpha$ se ha escogido de manera que todos los puntos singulares del integrando se encuentran a la izquierda de $C_1$.

**749.** Demuestre que, si $f(z) \to 0$ para $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, $\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \alpha_2$ y la función $f(z)$ es analítica en la franja $\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \alpha_2$, entonces la integral $\int\limits_C f(z)\, dz$, donde $C$ es la recta $\operatorname{Re} z = \alpha$, no depende de cómo se escoge $\alpha$ siempre que $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$.

En los problemas **750—755** halle las integrales ($n$ es un número natural).

**750.** 1) $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\, dz}{z^{n+1}}$; 2) $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{t^z\, dz}{z^{n+1}}$ $(t^z = e^{z \ln t})$.

**751.** $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\, dz}{(z-a)^{n+1}}$. **752.** $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{e^{zt}\, dz}{z^2+1}$.

**753.** 1) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{ze^{zt}\,dz}{z^2+1}$; 2) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}}{z^2(z^2+1)}\,dz$

**754.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}\,dz}{(z-a)(z-b)(z-c)}$. **755.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{t^z\,dz}{z(z+1)\,\ldots\,(z+n)}$.

---

**756.** Empleando la identidad $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$ (véase la observación al problema **713**) demuestre que para $\operatorname{Re}\nu<0$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^z\,dz}{z^{\nu+1}}=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)},$$

donde el contorno $\gamma$ se indica en la fig. 25.

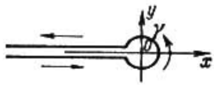


FIG. 25

*Observación*. Como la integral $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\dfrac{e^z\,dz}{z^{\nu+1}}$ converge también para $\operatorname{Re}\nu\geqslant 0$, prolonga analíticamente $\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}$ en todo el plano.

**757.** Demuestre que para $\operatorname{Re}\nu>-1$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{z^{\nu+1}}=\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}.$$

En los problemas **758—769** halle las integrales dadas.

**758.** 1) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}\,dz}{\sqrt{1+z}}$; 2) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}\,dz}{\sqrt{z+i}}$. **759.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}\,dz}{z\sqrt{1+z}}$.

**760.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}\,dz}{(z+1)\sqrt{z+2}}$. **761.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}(1+e^{-\pi z})}{z^2+1}\,dz$.

**762.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}(1-e^{-az})^2}{z}\,dz\ (a>0)$. **763.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}\,dz}{z(1-e^{-az})}\ (a>0)$.

*Sugerencia*. Haga uso del desarrollo

$$\frac{1}{1-e^{-az}}=1+e^{-az}+e^{-2az}+\ldots$$

**764.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\dfrac{e^{tz-x\sqrt{z}}}{z}\,dz\ (x>0)$.

*Sugerencia*. Sustituya $C_1$ por el contorno indicado en la fig. 26.

**765.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{zt}\operatorname{sh} r\sqrt{z}}{rz\operatorname{sh} a\sqrt{z}}\,dz\ (a>r>0)$. **766.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{\ln(1+z)\,e^{zt}}{z}\,dz$.

**767.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_2} e^{zt}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)dz$. **768.** $\displaystyle\int_0^\infty dt\int_{C_1}\frac{e^{z-\frac{at}{z}}}{z^2}\,dz\ (a>0)$.

*Sugerencia*. Cambie el orden de integración.

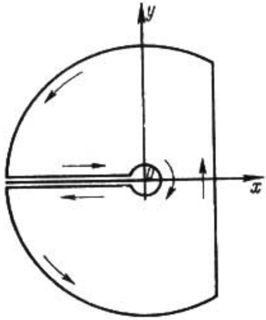


FIG. 26

**769.** $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{bz}}{z}\,dz\int_0^\infty e^{-az\operatorname{ch}x}\,dx$ ($a>0$ y $b$ es un número real).

*Sugerencia*. Haga uso del hecho de que $\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{-uz}}{z}\,dz=0$ para $u>0$.

**770.** A partir del desarrollo en serie de la función de Bessel

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}$$

demuestre las representaciones integrales ($\gamma$ es el contorno indicado en el problema **756**):

1) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\frac{e^{\zeta-\frac{z^2}{4\zeta}}}{\zeta^{\nu+1}}\,d\zeta=\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}J_\nu(z)$;

2) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{\zeta-\frac{z^2}{4\zeta}}}{\zeta^{\nu+1}}\,d\zeta=\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}J_\nu(z)$ (Re $\nu>-1$).

*Sugerencia*. Desarrolle en serie la función $e^{-\frac{z^2}{4\zeta}}$ y haga uso de las soluciones de los problemas **756** y **757**.

**771.** Demuestre que para $\operatorname{Re} z > 0$ se tiene

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{iz \operatorname{sen} - i\nu\zeta}\, d\zeta,$$

donde $\Gamma$ es el contorno indicado en la fig. 27, y deduzca de aquí que, siendo $n$ un número entero o cero, se tiene

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \operatorname{sen} \zeta - n\zeta)\, d\zeta.$$

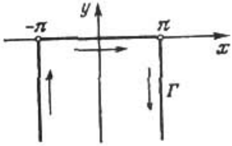


FIG. 27

En los problemas **772—774** halle las integrales que contienen las funciones de Bessel.

**772.** $\int_0^\infty e^{-zt} J_n(t)\, dt$ ($\operatorname{Re} z > 0$, $n$ es un número entero).

*Sugerencia.* Haga uso de la representación integral del problema anterior y cambie el orden de integración.

**773.** 1) $\int_0^\infty J_0(at) \cos bt\, dt$; 2) $\int_0^\infty J_0(at) \operatorname{sen} bt\, dt$ ($a$ y $b$ son números positivos).

**774.** $\int_0^\infty \cos bx \frac{\operatorname{sen} t\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx$ ($t > |b|$).

*Sugerencia.* Haga uso del hecho de que

$$\frac{\operatorname{sen} ut}{u} = \sqrt{\frac{\pi t}{2u}}\, J_{\frac{1}{2}}(ut) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{z - \frac{u^2 t^2}{4z}}}{z^{\frac{3}{2}}}\, dz$$

(véase el problema 770) y cambie el orden de integración.

### COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE INTEGRALES [1])

**775.** Sea $\varphi(z)$ una función analítica que a la izquierda de $C_1$ tiene solamente un número finito de puntos singulares, todos ellos

---

[1]) Acerca de este grupo de problemas, así como acerca de la aplicación de las estimaciones asintóticas y de otros métodos para obtenerlas, véase, por ejemplo,

polos, y tal que $\varphi(z) \to 0$ para $z \to \infty$ y $\operatorname{Re} z \leqslant \alpha$. Sea

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^{zt} \varphi(z)\, dz.$$

Halle $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$. Considere diferentes casos de la distribución de los polos respecto al eje imaginario.

*Sugerencia*. Haga uso del lema de Jordan (véase el problema **402**).

**776.** Sea $\varphi(z)$ una función analítica que a la izquierda de $C_1$ tiene un número finito de puntos singulares y tal que $\varphi(z) \to 0$ para $z \to \infty$ y $\operatorname{Re} z \leqslant \alpha$.

Demuestre que para grandes valores de $t$ tiene lugar la igualdad asintótica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^{zt} \varphi(z)\, dz \sim \sum \operatorname{res}\, [e^{zt} \varphi(z)],$$

donde la suma se extiende a todos los puntos singulares de $\varphi(z)$ de parte real no negativa.

*Observación*. Las funciones $f(t)$ y $F(t)$ son *asintóticamente iguales* para $t \to \infty\, [f(t) \sim F(t)]$, si $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(t)}{F(t)} = 1$.

**777.** Analice el comportamiento asintótico para $t \to \infty$ de la función

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{zt}\, dz}{z^2 (z+a)^3} \quad (\operatorname{Re} a > 0).$$

**778.** Halle la expresión asintótica para $t \to \infty$ de la función

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{ze^{zt - \sqrt{z^2+2az}}}{(z-\omega i)\sqrt{z^2+2az}}\, dz \quad (\omega > 0,\ a > 0),$$

donde $\sqrt{z^2 + 2az} > 0$ para $z > 0$.

*Sugerencia*. Sustituya el contorno $C_1$ por el contorno indicado en la fig. 26 y demuestre que las integrales a lo largo de los arcos de las circunferencias y a lo largo de la parte negativa del eje real tienden hacia cero cuando $t \to \infty$.

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{z^n}$ se llama desarrollo asintótico de la función $f(z)$ para $z \to \infty$, si $\lim\limits_{z \to \infty} z^k \left[ f(z) - \sum\limits_{n=0}^{k} \dfrac{c_n}{z^n} \right] = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. (¡Esto no implica la convergencia de la serie!)

[2, cap. V, § 3]; Б. А. Фукс и В. И. Левин, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, Гостехиздат, 1951 (*Fuks B. A.* y *Levin V. I.*, Funciones de variable compleja y algunas de sus aplicaciones), cap. IV; М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, Физматгиз, 1962 (*Evgráfov M. A.*, Acotaciones asintóticas y funciones enteras).

Con frecuencia se consideran también desarrollos asintóticos de tipo más general. Sea $\{q_n(z)\}$ una sucesión arbitraria de funciones tal que $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{q_{n+1}(z)}{q_n(z)}=0$ y sea $\{\mu_n(z)\}$ una sucesión que verifica las condiciones

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\mu_{n+1}(z)}{q_n(z)}=0, \quad \overline{\lim_{z\to\infty}} \left|\frac{\mu_n(z)}{q_n(z)}\right| > 0.$$

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\mu_n(z)$ se llama desarrollo de la función $f(z)$:

$$f(z)\sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\mu_n(z).$$

si $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{q_k(z)}\left[f(z)-\sum\limits_{n=0}^{k} c_n\mu_n(z)\right]=0$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Con frecuencia a título de la sucesión $\{\mu_n(z)\}$ se escoge la sucesión $\{1/z^{\alpha_n}\}$, donde $\alpha_n$ son números reales positivos que tienden monótonamente hacia el $\infty$.

**779.** Demuestre que para $x>0$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \sim \frac{1}{x}-\frac{2!}{x^3}+\frac{4!}{x^5}-\ldots+(-1)^n\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}+\ldots$$

*Sugerencia.* Haga uso de la igualdad

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\ldots+(-1)^n t^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$$

y estime el resto.

**780.** Demuestre que para $x>0$

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\,dt \sim \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\ldots+(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+\ldots$$

*Sugerencia.* Integre por partes y estime el resto.

**781*.** Demuestre que para $x>0$

$$\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-x-t}}{t}\,dt \sim -\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\ldots+\frac{(n-1)!}{x^n}+\ldots\right),$$

donde la integral se entiende en el sentido del valor principal.

**782.** Demuestre que para valores reales de $x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}\,dt}{1-x} \sim -\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\,\frac{1}{x^{2n+1}},$$

donde la integral se entiende en el sentido del valor principal.

**783.** Demuestre que para valores reales de $x$

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha e^{-t^\beta}}{t-x}\,dt \sim \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^\infty \Gamma\left(\frac{\alpha+n}{\beta}\right)\frac{1}{x^n}\ (\alpha>-1,\ \beta>0),$$

donde la integral para $x>0$ se entiende en el sentido del valor principal.

**784*.** Demuestre que

$$\int_0^z e^{z^2-t^2}\,dt \sim \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{z^2}-\left(\frac{1}{2z}-\frac{1}{2^2z^3}+\frac{1\cdot 3}{2^3z^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4z^7}+\ldots\right),$$

donde los signos + ó — se toman según sea $\operatorname{Re} z>0$ o $\operatorname{Re} z<0$ respectivamente. Si $\operatorname{Re} z=0$, el sumando que antecede al paréntesis puede ser omitido.

**785.** Halle el desarrollo asintótico de la función

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}\sqrt{z}\,dz}{z^2+\omega^2}\ (\omega>0).$$

Halle también el desarrollo de $f(t)$ para pequeños valores de $t$.

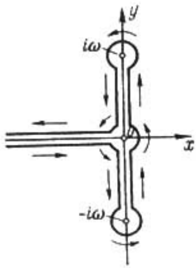


FIG. 28

*Sugerencia.* Sustituya $C_1$ por el contorno indicado en la fig. 28. Para obtener el desarrollo asintótico de la integral $\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sqrt{x}\,dx}{x^2+\omega^2}$ haga uso de la sugerencia al problema **779**. Para valores pequeños de $t$ es necesario escoger $C_1$ de manera que $\alpha$ sea mayor que $\omega$ y desarrollar $\frac{1}{z^2+\omega^2}$ en serie.

**786.** Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}}{\sqrt{z}\,(z^2+1)}\,dz-\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sim\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(4n)!}{(2n)!}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^{4n+1}.$$

**787.** Halle el desarrollo asintótico de la función

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{z\left(1+z^{\frac{3}{2}}\right)}\ (z^{3/2}>0 \text{ para } z>0).$$

Obtenga también la fórmula de aproximación de $f(t)$ para pequeños valores de $t$.

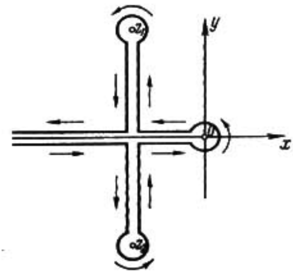


FIG. 29

*Sugerencia*. Para obtener el desarrollo asintótico, sustituya $C_1$ por el contorno indicado en la fig. 29, donde $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ y $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Para valores pequeños de $t$ es necesario escoger la abscisa de la recta $C_1$ mayor que la unidad.

## § 5. DISTRIBUCION DE CEROS. INVERSION DE SERIES

### TEOREMA DE ROUCHE

En los problemas **788—790** halle, empleando el teorema de Rouché, el número de raíces de las ecuaciones dadas pertenecientes al círculo $|z|<1$.

**788.** $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$.

**789.** $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$. **790.** $z^7-5z^4+z^2-2=0$.

**791.** Demuestre que, si en todos los puntos de un contorno $C$ es válida la desigualdad

$$|a_kz^k|>|a_0+a_1z+\ldots+a_{k-1}z^{k-1}+a_{k+1}z^{k-1}+\ldots+a_nz^n|,$$

el polinomio $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ tiene $k$ ceros en el interior del contorno $C$, si el punto $z=0$ se encuentra dentro de este contorno, y no tiene ceros, si este punto se halla fuera del contorno $C$.

**792.** ¿Cuántas raíces de la ecuación $z^4-5z+1=0$ se hallan en el círculo $|z|<1$? ¿en el anillo $1<|z|<2$?

**793.** ¿Cuántas raíces de la ecuación $z^4-8z+10=0$ se hallan en el círculo $|z|<1$? ¿en el anillo $1<|z|<3$?

**794.** ¿Cuántas raíces tiene en el círculo $|z|<1$ la ecuación

$$z^n+\alpha_0 z^2+\alpha_1 z+\alpha_2=0,$$

siendo $|\alpha_0|>|\alpha_1|+|\alpha_2|+1$ ($n$ es un número natural)?

**795.** ¿Cuántas raíces tiene en el círculo $|z|<1$ la ecuación $z=\varphi(z)$, si para $|z|\leqslant 1$ la función $\varphi(z)$ es analítica y verifica la desigualdad $|\varphi(z)|<1$?

**796.** ¿Cuántas raíces tiene en el círculo $|z|<1$ la ecuación

$$e^z-4z^n+1=0 \text{ (}n\text{ es un número natural)?}$$

**797.** ¿Cuántas raíces tiene en el círculo $|z|<R$ la ecuación $e^z=az^n$ ($n$ es un número natural), siendo $|a|>e^R/R^n$?

**798.** Demuestre que la ecuación $z=\lambda-e^{-z}$ ($\lambda>1$) tiene en el semiplano de la derecha una raíz única (y además real).

**799*.** Demuestre que para $\rho>0$ tan pequeño como se quiera todos los ceros de la función,

$$f_n(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}$$

pertenecerán para $n$ suficientemente grande al círculo $|z|<\rho$.

**800.** Demuestre que para $\rho<1$ el polinomio

$$P_n(z)=1+2z+3z^2+\ldots+nz^{n-1}$$

no tiene ceros en el círculo $|z|<\rho$ siendo $n$ suficientemente grande.

*Sugerencia.* Haga uso del método de la solución del problema **799.**

## PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

**801.** La función $\varphi(z)$ es meromorfa en el recinto $G$ y analítica en su frontera $C$. Demuestre las proposiciones siguientes:

1) Si $|\varphi(z)|<1$ sobre $C$, el número de raíces de la ecuación $\varphi(z)=1$, pertenecientes al recinto $G$, es igual al número de polos de la función $\varphi(z)$ en el recinto $G$.

2) Si $|\varphi|(z)>1$ sobre $C$, el número de raíces de la ecuación $\varphi(z)=1$, pertenecientes al recinto $G$, es igual al número de ceros de la función $\varphi(z)$ en el recinto $G$.

3) Las proposiciones 1) y 2) siguen siendo válidas, si la ecuación $\varphi(z)=1$ se sustituye por la ecuación $\varphi(z)=\alpha$, donde $|\alpha|\geqslant 1$ en el caso 1) y $|\alpha|\leqslant 1$ en el caso 2).

**802.** Sea

$$P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$$

un polinomio que no tiene ceros en el eje imaginario.

Demuestre que el punto $z$ recorre el eje imaginario desde arriba hacia abajo, el incremento del argumento de $P_n(z)$ es igual a $k\pi$, donde $k$ es un número entero de la misma paridad que $n$ y $|k| \leqslant n$.

Demuestre que en estas condiciones el polinomio $P_n(z)$ tiene en el semiplano de la derecha $(n+k)/2$ ceros.

*Sugerencia.* Represente $P_n(z)$ en la forma

$$P_n(z) = z^n \left(1 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right)$$

y aplique el principio del argumento al semicírculo $|z| < R$, $\operatorname{Re} z > 0$ para $R$ suficientemente grande.

**803.** Halle el *número de raíces del polinomio*

$$z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^3 + 4z + 1$$

en el semiplano de la derecha.

**804.** Halle el número de raíces de la ecuación

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$$

en el semiplano de la derecha y en el primer cuadrante.

**805.** ¿Cuántas raices tiene en cada cuadrante la ecuación

$$2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0?$$

**806.** ¿En qué cuadrantes se hallan las raíces de la ecuación

$$z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0?$$

**807.** Demuestre que el número de raíces de la ecuación

$$z^{2n} + \alpha z^{2n-1} + \beta^2 = 0$$

($\alpha$ y $\beta$ son números reales, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$; $n$ es un número natural) de parte real positiva es igual a $n$, si $n$ es par. En cambio, si $n$ es impar este número es igual a $n-1$ para $\alpha > 0$ y a $n+1$ para $\alpha < 0$.

*Sugerencia.* Considere el incremento de $\arg(z^{2n} + \alpha z^{2n-1} + \beta^2)$ cuando el punto $z$ describe la frontera del semicírculo de la derecha de un radio grande.

---

Cuando los coeficientes del polinomio

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$$

dependen continuamente de parámetros reales $\alpha$ y $\beta$, conviene, para determinar la relación entre los parámetros y el número de ceros de $P_n(z)$ pertenecientes al semiplano de la derecha, proceder del modo siguiente (partiendo del hecho de que todo cero depende continuamente de los coeficientes del polinomio):

Construir en el plano $\alpha$, $\beta$ las curvas $P_n(i\tau) = 0$ ($\tau$ es un parámetro real), es decir, las curvas para los puntos de las cuales entre las raices del polinomio hay raíces imaginarias puras (o cero). Estas curvas dividen el plano $\alpha$, $\beta$ en *recintos en cada uno de los cuales el número de ceros de* $P_n(z)$ *de parte real* positivo es constante. Este número se puede hallar tomando un punto arbitrario del recinto correspondiente y aplicando a él, por ejemplo, el método del problema *802*.

En los problemas **808—810** determine los recintos del plano $\alpha$, $\beta$, en los que es constante el número de raíces de parte real positiva del polinomio correspondiente $P(z)$; halle este número $m$ para cada uno de los recintos.

**808.** $P(z)=z^3+\alpha z^2+\alpha z+\beta$. **809.** $P(z)=z^3+\alpha z^2+\beta z+1$.

**810.** $P(z)=z^3+(\alpha+\beta)z^2+(\alpha-\beta)z+\alpha$.

**811.** Sea $f(z)=P_n(z)+Q_m(z)e^{-z\tau}$, donde $\tau>0$; $P_n(z)$ y $Q_m(z)$ son polinomios primos entre sí, con la particularidad de que $n>m$, y $f(z)$ no tiene ceros sobre el eje imaginario. Sea $N$ el número de ceros del polinomio $P_n(z)$ en el semiplano de la derecha. Demuestre que, para que la función $f(z)$ no tenga ceros en el semiplano de la derecha, es necesario y suficiente que el punto $w=-\frac{Q_m(z)}{P_n(z)}e^{-\tau z}$ envuelva en la dirección positiva $N$ veces el punto $w=1$ cuando el punto $z$ recorra todo el eje imaginario desde abajo hacia arriba (si $P_m(z)$ tiene ceros sobre el eje imaginario, es preciso al desplazar el punto $z$ por este eje, contornar los ceros de $P_n(z)$ por la derecha a lo largo de unas semicircunferencias de radios suficientemente pequeños).

En los problemas **812—814** halle, empleando el teorema del problema **811**, en el espacio de los coeficientes $a$, $b$ (es decir, en el plano $a$, $b$) los recintos para los cuales todos los ceros de las funciones correspondientes pertenecen al semiplano de la izquierda, suponiendo que $\tau>0$ y que $a$ y $b$ son números reales.

**812.** $z+a+be^{-\tau z}$. **813.** $z^2+az+be^{-\tau z}$.

**814.** $z^2+(az+b)e^{-\tau z}$.

---

**815.** Demuestre, empleando el teorema de Rouché, que si para la función $w=f(z)$ tiene lugar el desarrollo

$$f(z)=w_0+c_k(z-z_0)^k+\ldots \quad (c_k\neq 0,\ k\geqslant 1)$$

en una vecindad del punto $z_0$, entonces para $r>0$ suficientemente pequeño existe un $\rho>0$ tal que cualquier valor $w\neq w_0$ del círculo $|w-w_0|<\rho$ se alcanza exactamente $k$ veces en el círculo $|z-z_0|<r$ y, además, en puntos diferentes.

**816.** Demuestre, empleando el resultado del problema anterior, que una función analítica posee la propiedad de conservar los recintos.

**817.** Demuestre, empleando el resultado del problema anterior, el principio de módulo máximo para una función analítica. Demuestre que este principio es válido para cualesquiera transformaciones continuas $w=f(z)$ que conservan los recintos.

**818.** Demuestre que, si en las condiciones del problema **815** $k=1$, es decir, si $f'(z_0)\neq 0$, la función $f(z)$ establece una correspondencia conforme y biunívoca entre una vecindad simplemente conexa del punto $z_0$ y el círculo $|w-w_0|<\rho$.

*Sugerencia.* Considere la función $z=f^{-1}(w)$ en el círculo $|w-w_0|<\rho$.

**819.** *Demuestre que, si en las condiciones del problema* **815** $k>1$, la función $w=f(z)$ transforma biunívocamente una vecindad simplemente conexa del punto $z_0$ en un círculo $k$-valente de centro en el punto $w_0$.

**820.** Extienda los teoremas demostrados en los problemas **818** y **819** al caso en que el punto $z_0$ es un polo simple o múltiple de la función $f(z)$.

**821.** Demuestre que, si el desarrollo de la función $f(z)$ en una vecindad del punto infinito es de la forma

$$f(z)=A_0+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\ldots+\frac{A_k}{A^k}\ldots,$$

existe una vecindad del punto infinito que puede ser conforme y biunívocamente transformada en un círculo univalente, si $A_1\neq 0$, y $k$-valente, si $A_1=A_2=\ldots=A_{k-1}=0$ y $A_k\neq 0$.

### INVERSIÓN EN SERIES

**822.** Sea $F(z)=z-a-wf(z)$ y sea $f(z)$ analítica en el punto $z=a$. Demuestre, empleando el teorema de Rouché, que para $|w|$ suficientemente pequeño existe un círculo $K$ de centro en el punto $z=a$ en el cual la función $F(z)$ tiene sólo un cero (simple). Pruebe también que, siendo $f(a)\neq 0$, cualquier punto de una vecindad del punto $z=a$ puede ser un cero de la función $F(z)$, si se escoge convenientemente el valor de $w$.

**823.** *Sea $z=z(w)$ una función uniforme definida para valores* suficientemente pequeños de $|w|$ mediante la ecuación $z-a-wf(z)=0$, *donde $f(z)$ es analítica en el punto $z=a$ y $f(a)\neq 0$. Demuestre* que para $|w|$ suficientemente pequeño y para toda función $\Phi(z)$ *analítica en el punto $z=a$ tiene lugar el desarrollo*

$$\frac{\Phi(z)}{1-wf'(z)}=\Phi(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^n}{da^n}\{\Phi(a)[f(a)]^n\}.$$

*Sugerancia.* Si $C$ es la circunferencia del círculo $k$ en el que la ecuación $z-a-wf(z)=0$ tiene solamente una raíz (véase el problema **822**), tendremos

$$\frac{\Phi(z)}{1-wf'(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-a-wf(\zeta)}d\zeta.$$

Desarrolle ahora el integrando en serie respecto a las potencias de $w$ y estime el resto

**824.** Demuestre, empleando las denotaciones del problema anterior, la fórmula de Lagrange $\Phi(z)=\Phi(a)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\{\Phi'(a)[f(a)]^n\}$.

Deduzca de ella, en particular, el desarrollo en serie de Taylor para la propia función $z=z(w)$.

*Sugerencia.* Aplique la solución del problema anterior a la función $\Phi(z)[1-wf'(z)]$.

**825.** Desarrolle en serie respecto a las potencias de $w$ cada una de las ramas de la función $z(w)$ definida por la ecuación $w=2z+z^2$ (para una de las ramas $z(0)=0$ y para la otra $z(0)=-2$).

**826.** Desarrolle en serie de potencias de $w$ la rama de la función $z=z(w)$, definida por la ecuación $w=2\frac{z-a}{z^2-1}$, para la cual $z(0)=a$.

**827.** Partiendo de la definición de los polinomios de Legendre $P_n(z)$ a través de la función generadora $\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}$ (véase el problema **492**), demuestre que $P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]$.

*Sugerencia.* En las condiciones del problema **826**, aplique la fórmula de Lagrange a la función $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{1-2aw+w^2}}=\frac{1-z^2}{z^2-2az+1}$.

**828.** La función $z=z(w)$ se define en una vecindad del punto $w=0$ mediante la igualdad $w=ze^{-az}$. Desarrolle en serie de potencias de $w$:

1) $z(w)$; 2) $e^{bz(w)}$.

**829.** Desarrolle en potencias de $w$ la función $z=z(w)$ definida en una vecindad del punto $w=0$ mediante la ecuación de Kepler

$$z-a=w\operatorname{sen} z \quad (a\neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots).$$

**830*.** Determine el radio de convergencia del desarrollo de $z(w)$ obtenido en el problema anterior para el caso en que $a=\pi/2$.

**831.** Demuestre la siguiente generalización del teorema de Lagrange. Sean $f(z)$ y $\varphi(z)$ funciones analíticas en una vecindad del punto $a$ y sea $C$ una circunferencia de radio $r$ y de centro en el punto $a$ tal que en todos sus puntos

$$|\alpha f(z)+\beta\varphi(z)|<r.$$

Si $\Phi(\zeta)$ es una función analítica de la única raíz de la ecuacíon $z-a-\alpha f(z)-\beta\varphi(z)=0$, se tiene

$$\Phi(\zeta)=\Phi(a)+\sum\frac{\alpha^m\beta^n}{m!n!}\frac{d^{m+n-1}}{da^{m+n-1}}\{\Phi'(a)[f(a)]^m[\varphi(a)]^n\},$$

donde la suma se extiende a todos los valores de $m$ y de $n$, a excepción de $m=n=0$.

CAPITULO V

# DISTINTAS SERIES DE FUNCIONES INTEGRALES PARAMETRICAS

## § 1. SERIES DE FUNCIONES

En los problemas **832—841** halle los recintos de convergencia de las series indicadas.

**832.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^n z^n}\right)$. **833.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right)$. **834.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^n$.

**835.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{z \ln n}$. **836.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nz}{n}$. **837.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}$. **838.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{2^n}+1}$.

**839.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$. **840.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$. **841.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(4+z)(4+z^2)\ldots(4+z^n)}$.

---

**842*.** Demuestre que siendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z^n}{1-z^n}$ converge siempre que $|z|\neq 1$; en cambio, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z^n}{1-z^n}$ converge en el círculo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y diverge fuera de este círculo.

**843.** 1) Desarrolle en serie de potencias de $z$ la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z^n}{1-z^n}$; halle el radio de convergencia de la serie obtenida.

2) Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \frac{z^n}{1-z^n} = \frac{z}{(1-z)^2}$ para $|z| < 1$, donde $\varphi(n)$ el la cantidad de los números naturales menores que $n$ y coprimos de $n$.

*Sugerencia.* Haga uso de la conocida relación de la teoría de los números según la cual $\sum \varphi(n) = m$, donde $n$ recorre los valores de todos los divisores de $m$, incluyendo 1 y $m$.

**844.** Desarrolle la función $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \ln n}$ (Zeta es la función de Riemann) en serie de Taylor en una vecindad del punto $z = 2$ y halle su radio de convergencia.

---

En los problemas **845—848** halle la suma de las series dadas ($|z| \neq 1$).

**845.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1+z^n} - \frac{1}{1+z^{n-1}} \right)$.

**846.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$.

*Sugerencia.* Multiplique el numerador y el denominador por $(1-z)$.

**847.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n} (1+z^{2^k})}$. **848.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{z^{2^n}-1}$.

**849.** Demuestre las proposiciones:

1) Para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converja uniformemente en el conjunto $E$ es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ exista un número $N = N(\varepsilon)$ tal que para todo $n > N$, todo $z \in E$ y cualquier número natural $p$ se cumpla la desigualdad $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon$.

2) La convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ en el conjunto $E$ implica la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ en este mismo conjunto.

**850.** Halle los conjuntos en los que convergen uniformemente las sucesicnes dadas:

1) $\left\{ \frac{1}{1+z^n} \right\}$; 2) $\left\{ \frac{z^n}{1+z^{2n}} \right\}$; 3) $\left\{ \frac{\operatorname{sen} nz}{n} \right\}$.

**851.** Demuestre:

Para que una sucesión $\{f_n(z)\}$ de funciones continuas converja *uniformemente en un conjunto* cerrado y acotado $E$, es necesario y suficiente que esta sucesión converja en todos los puntos de este *conjunto y que converja continuamente en todos los puntos de acumulación* del conjunto $E$, esto es, que cualquiera que sea la *sucesión de puntos $z_n$ pertenecientes al conjunto $E$ y convergentes* hacia el punto $z_0$, se tenga

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z_n) = f(z_0).$$

En los problemas **852—856** halle los conjuntos en los que convergen uniformemente las series dadas.

**852.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$. **853.** $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$.

**854.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \ln n}$. **855.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}$. **856.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{n}$.

**857.** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente en el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$. ¿Convergerá uniformemente en el círculo $|z| < 1$ la serie obtenida mediante su derivación término por término?

**858.** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ converge uniformemente en toda parte finita del plano de la cual se han excluido círculos de centros en los puntos $z = 0, -1, -2, \ldots$ y de un radio $\rho$ tan pequeño como se quiera.

Demuestre también que esta serie no converge absolutamente en ningún punto.

**859.** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en el intervalo $(-1, 0)$, mientras que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right|$ converge en este mismo intervalo pero no uniformemente. (Por consiguiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ no puede ser mayorizada en el intervalo $(-1, 0)$ mediante una serie numérica convergente).

*Observación.* Este ejemplo prueba que el criterio *suficiente* de convergencia uniforme de Weierstrass no es *necesario.*

**860.** 1) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(1+z^2)^n}$ converge absolutamente para $|z| \geqslant 0$ y $|\arg z| \leqslant \pi/4$ (estos valores de $z$ no agotan todo el recinto de convergencia absoluta que, como puede verse fácilmente, se compone del punto $z=0$ y del exterior de la lemniscata $|1+z^2|=1$). Demuestre que en el recinto indicado la serie converge no uniformemente.

*Observación.* Esto prueba que incluso la convergencia absoluta de una serie en un recinto cerrado no implica la convergencia uniforme.

2) Demuestre que en este mismo recinto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z}{(1+z^2)^n}$ converge uniforme y absolutamente, pero no absolutamente uniforme (es decir, la serie compuesta por los módulos no converge uniformemente).

**861.** Demuestre que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge uniformemente en todo recinto cerrado, interior de un recinto $G$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n'(z)|$ posee la misma propiedad.

## § 2. SERIES DE DIRICHLET [1]

La serie de tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, donde $a_n$ son coeficientes complejos y $\lambda_n$ son números positivos tales que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \text{ y } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,$$

se denomina *serie de Dirichlet* de exponentes positivas.

**862.** Demuestre que, si la serie de Dirichlet converge en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, también converge en todo punto del semiplano $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, siendo además esta convergencia uniforme en todo ángulo $|\arg(z-z_0)| \leqslant \theta < \pi/2$.

*Sugerencia.* Aplique la transformación de Abel a la suma

$$\sum_{n=p}^{q} a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=p}^{q} a_n e^{-\lambda_n z_0}\, e^{-\lambda_n (z-z_0)}$$

y haga uso de la desigualdad ($a < b$, $z = x + iy$)

$$|e^{-az} - e^{-bz}| = \left| z \int_a^b e^{-zt}\, dt \right| \leqslant \frac{|z|}{x} (e^{-ax} - e^{-bx}).$$

[1] En relación con el ciclo de problemas que se ofrece véase, por ejemplo, [1, cap. IV, § 2, nº 2].

**863.** Demuestre que, si la serie de Dirichlet converge absolutamente en un punto $z=z_0$, también converge absoluta y uniformemente *en el semiplano* $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} z_0$.

De los teoremas enunciados en los problemas **862** y **863** se deduce que el recinto de convergencia de la serie de Dirichlet (si es que existe) es un semiplano $\operatorname{Re} z > x_c$ $(x_c \geqslant -\infty)$, mientras que el recinto de convergencia absoluta (si es que existe) es un semiplano $\operatorname{Re} z > x_a$ $(x_a \geqslant -\infty)$, con la particularidad de que la serie o bien converge absolutamente en toda la recta $\operatorname{Re} z = x_a$ o bien *no converge absolutamente en ningún punto de esta recta*. Los números $x_c$ y $x_a$ se llaman respectivamente *abscisa de convergencia y abscisa de convergencia absoluta* de la serie de Dirichlet.

En los problemas **864—870** halle la abscisa de convergencia $(x_c)$ y la abscisa de convergencia absoluta $(x_a)$ de las series dadas.

**864.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} e^{-zn^2}$. **865.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-z\ln\ln n}$.

**866.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-z\ln\ln n}$.

**867.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n e^{-z\ln\ln n}$. **868.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-z\ln n}$.

**869.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-z\ln n}$. **870.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{e^n} e^{-zn^2}$.

**871.** Demuestre que siendo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$, se tiene

$$x_c = x_a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}.$$

**872.** Demuestre que siendo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{\ln n}{\lambda_n} = l$, se tiene $x_a - x_c \leqslant l$.

En los problemas **873—877** analice la convergencia de la serie de Dirichlet en la frontera del semiplano de convergencia.

**873.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-z\ln n}$. **874.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-z\ln n}$.

**875.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-zn}$. **876.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-zn}$.

**877.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} e^{-zn}$.

*Sugerencia.* Véase el problema **449**.

En los problemas **878** y **879** se consideran series de Dirichlet *de exponentes complejos*.

**878.** Supongamos que los números $\lambda_n$ verifican las condiciones

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0 \quad \text{y} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{|\lambda_n|}=k<\infty.$$

Demuestre que para $\alpha\leqslant\arg\lambda_n\leqslant\beta$ la serie de Dirichlet converge absolutamente en todo punto $z=x+iy$, para el cual se cumple la desigualdad $x\cos\varphi-y\operatorname{sen}\varphi-k>0$ cualquiera que sea $\varphi$ de $[\alpha, \beta]$ y diverge en todo punto tal que para todo $\varphi$ de $[\alpha, \beta]$

$$x\cos\varphi-y\operatorname{sen}\varphi-k<0.$$

**879.** Sea dada una serie arbitraria de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_nz}$. Sea $k(\varphi, \alpha)=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\dfrac{\ln|a_{n_k}|}{|\lambda_{n_k}|}$ y $k(\varphi)=\lim\limits_{\alpha\to 0}k(\varphi, \alpha)$, donde $\{n_k\}$ es la sucesión de todos los índices para los cuales $\varphi-\alpha\leqslant\arg\lambda_{n_k}\leqslant\varphi+\alpha$ (si no existe una subsucesión $\{n_m\}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty}\arg\lambda_{n_m}=\varphi$, debe tomarse $k(\varphi)=-\infty$).

Demuestre que siendo $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\lambda_n}=0$, la serie converge absolutamente en el interior del recinto $G$ cuyos puntos $z=x+iy$ verifican para todo $\varphi$ la condición $x\cos\varphi-y\operatorname{sen}\varphi-k(\varphi)>0$ y diverge en todo punto que se encuentra fuera de $G$.

## § 3. INTEGRALES PARAMÉTRICAS

### CONVERGENCIA DE INTEGRALES

**880.** Demuestre el teorema:

Sea $C$ un contorno simple (cerrado o no cerrado) de longitud finita y sea $f(\tau, z)$ una función analítica respecto a la variable $z$ y continua respecto a $\tau$ para todo $z$ de un recinto $D$ y para todo punto $\tau$ perteneciente al contorno $C$. En estas condiciones, la función representada por la integral $F(z)=\int\limits_C f(\tau, z)\,d\tau$ es una función analítica de la variable $z$ y

$$F'(z)=\int\limits_C f'_z(\tau, z)\,d\tau.$$

Si la integral $\int\limits_C f(\tau, z)\,d\tau$ es impropia, es decir, si el integrando es discontinuo para algunos valores aislados $\tau\in C$ o el contorno de integración contiene el punto infinito, la definición de convergencia y de convergencia uniforme de tal integral es completamente análoga a las definiciones correspondientes que se dan en el curso de análisis matemático.

**881.** Demuestre que para la convergencia uniforme de la integral $\int\limits_C f(\tau,\ z)\,d\tau$ *en un conjunto* $E$ *respecto a un punto* $\tau_0 \neq \infty$ del contorno $C$ es necesario y suficiente que cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ exista un número $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$\left|\int\limits_{C_\sigma} f(\tau,\ z)\,d\tau\right| < \varepsilon$$

para todo punto $z$ del conjunto $E$ y para todo arco $C_\sigma$ del contorno $C$ que pertenezca a una $\delta$—vecindad del punto $\tau_0$ y que no contenga *este punto ni en su interior ni en sus extremos.*

**882.** Enuncie y demuestre un criterio análogo de convergencia uniforme de la integral en el caso en que $\tau_0 = \infty$. Considere los *casos en los que el contorno* $C$ *no es acotado en una o en ambas* direcciones.

**883.** Demuestre que la integral $\int\limits_C f(\tau,\ z)\,d\tau$ converge uniformemente en un conjunto $E$ si $|f(\tau,\ z)| \leqslant |\psi(\tau)|$ para todo punto $z$ del conjunto $E$ y si $\int\limits_C |\psi(\tau)|\,d\tau$ converge.

**884.** Sea $f(\tau,\ z)$ una función analítica respecto a $z$ y continua respecto a $\tau$ para todo punto $z$ perteneciente a un recinto $D$ y para los puntos $\tau$ pertencienetes a un contorno $C$, salvo algunos puntos aislados del último, donde las condiciones requeridas de la función $f(\tau,\ z)$ se alteran o bien para todos los puntos $z$ o bien para algunos de ellos.

Demuestre que, si la integral impropia

$$F(z) = \int\limits_C f(\tau,\ z)\,d\tau$$

converge uniformemente en *el interior* del recinto $D$ (es decir, en todo subrecinto cerrado del recinto $D$), la función $F(z)$ es analítica y

$$F'(z) = \int\limits_C \frac{\partial f}{\partial z}\,d\tau,$$

siendo la última integral uniformemente convergente en el interior de $D$.

*En los problemas* **885—892** *halle los conjuntos en los que convergen uniformemente las integrales indicadas.*

**885.** $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \quad (t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t})$. **886.** $\int\limits_0^\infty e^{-zt^2}\,dt$.

**887.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t^z}\,dt$. **888.** $\int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{t^z}\,dt$. **889.** $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tz}{t}\,dt$.

**890.** $\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{t}\,dt\ (c \neq 0)$. **891.** $\int\limits_{c}^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{t}\,dt\ (c \neq 0)$.

**892.** $\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{z^t}{t}\,dt \quad (c \neq 0,\ z^t = e^{t \ln z})$.

## INTEGRAL DE LAPLACE

La integral de tipo

$$\int\limits_0^\infty e^{-tz} f(t)\,dt, \tag{1}$$

donde la función $f(t)$ es integrable en el segmento $[0, a]$ para cualquier positivo $a < \infty$, se llama *integral de Laplace*.

**893.** Demuestre las proposiciones siguientes:

1) Si la integral (1) converge en el punto $z = z_0$, converge en el semiplano $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, siendo la convergencia uniforme en el ángulo $|\arg(z - z_0)| \leqslant \theta < \pi/2$.

2) Si la integral (1) converge absolutamente para $z = z_0$, converge absoluta y uniformemente en el semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} z_0$.

3) Si $\varlimsup\limits_{t \to \infty} \frac{\ln |f(t)|}{t} = \beta$, la integral (1) converge absolutamente en el semiplano $\operatorname{Re} z > \beta$ y uniformemente en todo semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant \beta + \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ (construya un ejemplo de una integral de Laplace que sea absolutamente convergente en todo el plano y para la cual $\beta = \infty$).

4) Si $\varliminf\limits_{t \to \infty} \frac{\ln |f(t)|}{t} = \alpha$, la integral (1) no converge absolutamente en ningún punto del semiplano $\operatorname{Re} z < \alpha$.

De los teoremas, enunciados en el problema **893**, se deduce que los recintos de convergencia y de convergencia absoluta de la integral de Laplace (si es que estos recintos existen) son unos semiplanos $\operatorname{Re} z > x_c$ y $\operatorname{Re} z > x_a$; el número $x_c$ se llama *abscisa de convergencia* y $x_a$ se llama *abscisa de convergencia absoluta* de la integral de Laplace.

En los problemas **894—900** halle $x_c$ y $x_a$ para la integral $\int\limits_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt$, donde $f(t)$ es la función dada.

**894.** $f(t) = 1$. **895.** $f(t) = e^{-t^2}$. **896.** $f(t) = e^{t^2}$.

**897.** $f(t) = \begin{cases} e^{-t^2} \text{ para } 0 \leqslant t < \ln\ln 3 \text{ y} \\ \qquad \ln\ln 2k \leqslant t < \ln\ln(2k+1)\ (k = 2, 3, \ldots) \\ -e^{-t^2} \text{ para } \ln\ln(2k+1) \leqslant t < \ln\ln(2k+2) \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots). \end{cases}$

**898.** $f(t)=\begin{cases} e^{\frac{1}{2}e^t} \text{ para } 0\leqslant t<\ln\ln 3 \text{ y } \ln\ln 2k\leqslant t< \\ <\ln\ln(2k+1) \ (k=2,\ 3,\ \ldots) \\ -e^{\frac{1}{2}e^t} \text{ para } \ln\ln(2k+1)\leqslant t<\ln\ln(2k+2) \\ \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$

**899.** $f(t)=\begin{cases} e^{e^t} \text{ para } 0\leqslant t<\ln\ln 3 \text{ y } \ln\ln 2k\leqslant t< \\ \qquad <\ln\ln(2k+1) \ (k=2,\ 3,\ \ldots). \\ -e^{e^t} \text{ para } \ln\ln(2k+1)\leqslant t<\ln\ln(2k+2) \\ \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$

**900.** $f(t)=\begin{cases} e^t \text{ para } \ln(2k-1)\leqslant t<\ln 2k \ (k=1,\ 2,\ \ldots) \\ -e^t \text{ para } \ln 2k\leqslant t<\ln(2k+1) \ (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$

En los problemas **901—904** analice la convergencia de las integrales de Laplace $\int\limits_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$ en la frontera del semiplano de convergencia.

**901.** $f(t)=1$. **902.** $f(t)=0$ para $0\leqslant t\leqslant 1$, $f(t)=1/t^2$ para $t>1$.

**903.** $f(t)=0$ para $0\leqslant t\leqslant 1$, $f(t)=1/t$ para $t>1$.

**904.** $f(t)=0$ para $t=0$, $f(t)=1$ para $0<t\leqslant 1$ y para $t>1$ $f(t)$ se define del modo siguiente:

$$f(t+1)=\begin{cases} f(t)+1, \text{ si } (2k-1)^2<t+1\leqslant(2k)^2 \\ f(t)-1, \text{ si } (2k)^2<t+1\leqslant(2k+1)^2 \ (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{cases}$$

CAPITULO IV

# PRODUCTOS INFINITOS. FUNCIONES ENTERAS Y MEROMORFAS

## § 1. PRODUCTOS INFINITOS

En los problemas **905—911** demuestre las igualdades dadas.

**905.** $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$. **906.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=2$.

**907.** $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\frac{1}{4}$. **908.** $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$.

**909.** $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$. **910.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]=1$.

**911.** $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{1+\frac{1}{n}}=e^C$, donde $C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$ es la constante de Euler.

**912.** Demuestre que $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$.

*Sugerencia.* Demuestre primero la identidad

$$\operatorname{sen}\varphi=2^k\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2^k}\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{\varphi}{2^n}.$$

**913.** Usando la solución del problema **912** demuestre que

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{2}}}}\,\ldots=\frac{\pi}{2}.$$

**914*.** Demuestre la fórmula de Wallis $\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}\right)$.

**915.** Demuestre que, tomando como de costumbre $-\pi < \arg p_n \leqslant \pi$, el producto infinito $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ converge y diverge a la vez que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$.

**916.** Examine si sigue siendo válida la afirmación del problema anterior cuando se conviene en que
1) $0 \leqslant \arg p_n < 2\pi$;
2) $\alpha < \arg p_n \leqslant \alpha + 2\pi \, (-2\pi < \alpha < 0)$.

**917.** Demuestre que para la convergencia absoluta del producto infinito $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ (es decir, para la convergencia absoluta de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ es necesario y suficiente que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converja absolutamente.

**918.** Los productos $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ convergen. Analice la convergencia de los productos:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$; 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n)$; 3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n q_n$; 4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$.

En los problemas **919—923** investigue la convergencia y la convergencia absoluta de los productos dados.

**919.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$. **920.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$.

**921.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right] (p > 0)$. **922.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) (p > 0)$.

**923.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos z_n$, si se sabe que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ converge.

---

**924.** Demuestre que en el interior del círculo unidad

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z},$$

con la particularidad de que el producto converge absolutamente.

En los problemas **925—933** halle el recinto de convergencia de los productos.

**925.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)$. **926.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^n}{2^n}\right)$. **927.** $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$.

**928.** $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} z^{-n}\right]$. **929.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n\right]$.

**930.** $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{z}{n}$. **931.** $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}$. **932.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$.

**933.** $\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_n z)$, si se sabe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ converge.

---

**934.** Demuestre que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^z}\right] \quad (n^z=e^{z\ln n})$$

converge en el semiplano $\operatorname{Re} z>1/2$ y converge absolutamente en el semiplano $\operatorname{Re} z>1$.

**935.** Sea $\{f_n(z)\}$ una sucesión de funciones analíticas en un recinto $G$, con la particularidad de que todas estas funciones, a excepción de un número finito de ellas, no se anulan en el recinto $G$. Demuestre que la función $F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(z)]$ es analítica en el recinto $G$, si $|f_n(z)|\leqslant\alpha_n$ para todo $z\in G$, donde $\alpha_n$ no depende de $z$, y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ converge.

En los problemas **936—939** se establecen algunas de las propiedades de la función Gamma que se desprenden de su definicion como límite de un producto infinito (véase, por ejemplo, [1, cap. VII, § 4] o [2, cap. VII, § 1]).

**936.** Demuestre que el producto

$$\Gamma(z+1)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z+n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^z \quad \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^z=e^{z\ln\frac{n+1}{n}}\right)$$

converge absolutamente en todo el plano, a excepción de los valores de $z$ iguales a los números enteros negativos, y representa una función analítica en todo el plano, salvo los puntos $z=-1, -2, \ldots$

**937.** Demuestre la fórmula de Euler

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \quad (n^z=e^{z\ln n})$$

y pruebe que:

1) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$;

2) $\Gamma(m+1)=m!$, donde $m$ es un número natural.

**938.** Demuestre que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \quad (\alpha, \beta\neq-1, -2, \ldots).$$

**939.** Demuestre la fórmula de Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=e^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}},$$

donde $C$ es la constante de Euler.

*Sugerencia.* Haga uso de la solución del problema **911**.

**940*.** Sea $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ la sucesión de todos los números ($p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, ...) y sea $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ($n^{-s}=e^{-s \ln n}$) la función Zeta de Riemann analítica en el semiplano $\operatorname{Re} s>1$ (véase el problema **844**). Demuestre que:

1) $\zeta(s)=\dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-s})}$;

2) la función $\zeta(s)$ no tiene ceros en el semiplano $\operatorname{Re} s>1$.

*Observación.* Existe una amplia bibliografía dedicada al estudio de la función Zeta. *Véase, por ejemplo, la monografía: E. C. Titchmarsh,* The theory of the Riemann Zeta-function, Clarendon Press, Oxford, 1951.

**941*.** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$, donde $\{p_n\}$ es la sucesión de los números primos, diverge.

## § 2. DESARROLLO EN SERIES DE FRACCIONES SIMPLES Y EN PRODUCTOS INFINITOS. SUMACIÓN DE SERIES

**942.** Sea $f(z)$ una función meromorfa de polos simples en los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, donde $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\ldots$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$. Sea $A_n$ el residuo de la función $f(z)$ respecto al polo $a_n$ ($n=1, 2, \ldots$). Supongamos que existe una sucesión de contornos cerrados $C_m$ que verifica las condiciones siguientes:

1) $C_m$ no pasa por ninguno de los puntos $a_n$;

2) cada contorno $C_m$ está contenido en el interior del contorno $C_{m+1}$;

3) la distancia mínima entre el contorno $C_m$ y el origen de coordenadas (designémosla mediante $R_m$) crece sin límite cuando $m\to\infty$;

4) la razón entre la longitud $L_m$ del contorno $C_m$ y $R_m$ se mantiene acotada, es decir, $L_m=O(R_m)$;

5) $\max\limits_{z\in C_m}|f(z)|=o(R_m)$ (la condición 5 se cumple obviamente si la función $f(z)$ es acotada en todos los contornos $C_m$).

Demuestre que en estas condiciones tiene lugar el desarrollo de la función $f(z)$ en fracciones simples

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right),$$

y que la convergencia de la serie será uniforme en todo recinto cerrado que no contenga los puntos $a_n$, si bajo el signo de la suma se agrupan los sumandos correspondientes a los polos comprendidos entre $C_m$ y $C_{m+1}$ $(m=1, 2, \ldots)$.

*Sugerencia.* Aplique el teorema de los residuos a la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}$$

y pase al límite para $m\to\infty$.

*Observación.* En relación con diferentes generalizaciones del teorema enunciado véase, por ejemplo, [I, cap. IV, § 4, n° 1].

En los problemas **943—950** demuestre la validez de los desarrollos.

**943.** $\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$. **944.** $\frac{1}{\operatorname{sen} z}=\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2z}{z^2-n^2\pi^2}$.

**945.** $\operatorname{tg} z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2-z^2}$. **946.** $\frac{1}{\cos z}=\pi\sum\limits_{n=1}\frac{(-1)^n\,(2n-1)}{z^2-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2}$.

**947.** $\operatorname{th} z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2}$. **948.** $\frac{1}{\operatorname{sh} z}=\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2z}{z^2+n^2\pi^2}$.

**949.** $\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2+4n^2\pi^2}$. **950.** $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}$.

---

**951.** Sea $f(z)$ una función entera de ceros simples en los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, donde $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\ldots$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$. Supongamos que existe un sistema de contornos $\{C_n\}$ que verifica las condiciones 1), 2), 3) y 4) del problema **942** y tal que

$$\max_{z\in C_m}=\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|=o(R_m).$$

Demuestre que en todo el plano tiene lugar el desarrollo

$$f(z)=f(0)\,e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}.$$

En los problemas **952—958** demuestre la validez de los desarrollos.

**952.** $\operatorname{sen} z=z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$.

**953.** $\cos z = \prod_{n=0}^{\infty} \left\{1 - \left[\frac{2z}{(2n+1)\pi}\right]^2\right\}$.

**954.** $\operatorname{sh} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2 z^2}\right)$.

**955.** $\operatorname{ch} z = \prod_{n=0}^{\infty} \left\{1 + \left[\frac{2z}{(2n+1)\pi}\right]^2\right\}$.

**956.** $e^z - 1 = ze^{\frac{z}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right)$.

**957.** $e^{az} - e^{bz} = (a-b)\, ze^{\frac{1}{2}(a+b)z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2\pi^2}\right]$.

**958.** $\operatorname{ch} z - \cos z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4n^4\pi^4}\right)$.

---

**959.** Sea $f(z)$ una función meromorfa con un número finito de polos $a_1, a_2, \ldots, a_m$ que no coinciden con ninguno de los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Demuestre que, si existe una sucesión de contornos $\{C_n\}$ que tienden al punto infinito y tales que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} f(z) \operatorname{ctg} \pi z\, dz = 0, \tag{1}$$

entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} [f(z) \operatorname{ctg} \pi z]_{z=a_k}$.

**960.** Demuestre que, si en las condiciones del problema anterior la condición (1) es sustituida por la condición $\lim_{n \to \infty} \int_{C_n} \frac{f(z)\,dz}{\operatorname{sen} \pi z} = 0$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{\operatorname{sen} \pi z}\right]_{z=a_k}$$

En los problemas **961—968** halle la suma de las series suponiendo que el número $a$ es tal que ninguno de los denominadores se anula.

**961.** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$. **962.** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2}$. **963.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

**964.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$. **965.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$. **966.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

**967.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ ($k$ es un número natural).

*Sugerencia.* Demuestre primero que, si $z=0$ es un polo de la función $f(z)$, la fórmula para la suma de la serie establecida en el problema **959** sigue siendo válida, siempre que en su miembro de la izquierda la suma se extiende a todos los valores de $n$ desde $-\infty$ hasta $+\infty$, salvo el valor $n=0$. Para calcular res $\left[\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^{2k}}\right]_{z=0}$ conviene emplear el desarrollo del problema **487**.

**968.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n \operatorname{sen} bn}{a^2-n^2} \ (-\pi<b<\pi)$.

*Sugerencia.* Haga uso de la integral $\int_{C_n} \frac{z e^{ibz}\, dz}{(a^2-z^2)\operatorname{sen}\pi z}$ ($C_n$ es un contorno del problema **960**).

**969.** Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\sqrt{4n^2-3}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x \operatorname{ctg}\pi x}{(3-x^2)\sqrt{3-4x^2}}\, dx + \frac{1}{6}\operatorname{ctg}\left[\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right].$$

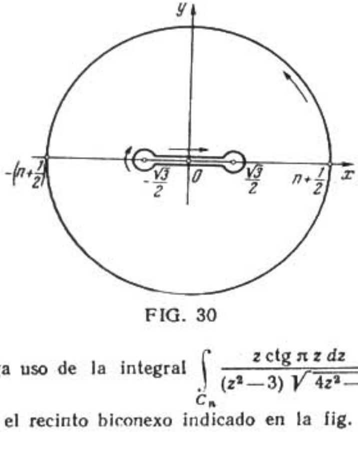


FIG. 30

*Sugerencia.* Haga uso de la integral $\int_{C_n} \frac{z \operatorname{ctg}\pi z\, dz}{(z^2-3)\sqrt{4z^2-3}}$, donde $C_n$ es el contorno que limita el recinto biconexo indicado en la fig. 30.

## § 3. CARACTERSTICAS DE CRECIMIENTO DE FUNCIONES ENTERAS [1]

Sea $f(z)$ una función entera y sea $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. El número $\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$ se llama *orden* de la función entera. Si $0<\rho<\infty$, el número

[1] En relación con los problemas de este parágrafo véase *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956 (*Levin B. Y.*, Distribución de raíces de funciones enteras), así como [1, cap. VII, § 1].

$\sigma = \overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \dfrac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$ se llama *tipo* de la función. Si $\sigma = 0$, se dice que la función $f(z)$ es una función de *tipo minimal*; si $\sigma = \infty$, se dice que la función $f(z)$ es una función de *tipo maximal*; si $0 < \sigma < \infty$, se dice que la función $f(z)$ es una función de *tipo normal*.

**970.** Demuestre las proposiciones siguientes:

1) Si $\rho \neq \infty$ y $\sigma \neq \infty$ son el orden y el tipo respectivamente de la función $f(z)$, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un número $R(\varepsilon)$ tal que para $r > R$ son válidas las desigualdades

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{y} \quad M(r) < e^{(\sigma+\varepsilon) r^{\rho}}.$$

Se puede indicar también unas sucesiones de números $\{r_n\}$ y $\{r_n'\}$ convergentes hacia el infinito para las cuales

$$M(r_n) > e^{r'^{\rho-\varepsilon}_n} \quad \text{y} \quad M(r_n') > e^{(\sigma-\Sigma) r'^{\rho}_n}.$$

2) Si para algún número natural $k$ se tiene

$$0 < \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{M(r)}{r^k} < \infty,$$

$f(z)$ es un polinomio de grado $k$ $\left(\text{y, por consiguiente, existe } \lim\limits_{r \to \infty} \ln \dfrac{M(r)}{r^k}\right)$.

*Sugerencia.* Haga uso de las desigualdades de Cauchy para los coeficientes de la serie de potencias $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

3) Si $f(z)$ es una función entera transcendente, se tiene

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \infty.$$

En los problemas **971—983** determine el orden y el tipo de las funciones indicadas ($n$ es un número natural).

**971.** $c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$.

**972.** $e^{az^n}$ $(a > 0)$. **973.** $z^n e^{3z}$. **974.** $z^2 e^{2z} - e^3$

**975.** $e^{5z} - 3e^{2z^3}$. **976.** $e^{(2-i) z^2}$. **977.** $\operatorname{sen} z$.

**978.** $\operatorname{ch} z$. **979.** $e^z \cos z$. **980.** $\cos \sqrt{z}$.

**981*.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(2^m \cdot n)!}$ ($m$ es un número natural). **982.** $e^{e^z}$.

**983*.** $\int\limits_0^1 e^{zt^2}\, dt$.

**984.** Una función entera $f(z)$ es de orden $\rho$ y de tipo $\sigma$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant \infty)$. Demuestre que la función $P(z) f(z) + Q(z)$, donde

$P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios cualesquiera, es también de orden $\rho$ y de tipo $\sigma$.

**985.** Las funciones enteras $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son de orden $\rho_1$ y $\rho_2$, $\rho_1 \neq \rho_2$, respectivamente. ¿Qué se puede decir acerca del orden $\rho^*$ de las funciones $f_1(z) f_2(z)$ y $f_1(z)+f_2(z)$?

**986.** Las funciones enteras $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son de un mismo orden $\rho$ y de tipo $\sigma_1$ y $\sigma_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, respectivamente. ¿Qúe se puede decir acerca del orden $\rho^*$ y del tipo $\sigma^*$ de las funciones:

1) $f_1(z) f_2(z)$, 2) $f_1(z)+f_2(z)$?

**987.** Las funciones enteras $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son de un mismo orden $\rho$ y de un mismo tipo $\sigma$. ¿Qué se puede decir acerca del orden $\rho^*$ y del tipo $\sigma^*$ de las funciones:

1) $f_1(z) f_2(z)$, 2) $f_1(z)+f_2(z)$?

**988*.** $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$, $\lambda_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=$ $=\alpha>0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{n}{\lambda_n}=\beta<\infty$.

Demuestre que $f(z)$ es una función entera de primer orden y que su tipo $\sigma$ es tal que $\pi\alpha \leqslant \sigma \leqslant \pi\beta$.

**989.** $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2k}}{\lambda_n^2}\right)$, $\lambda_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$, $2k$ es un número natural. Demuestre las proposiciones:

1) si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=0$, entonces $f(z)$ es una función entera que crece no más rápidamente que una función de orden $k$ y de tipo mínimo;

2) si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}<\infty$, entonces $f(z)$ es una función que crece no menos lentamente que una función de orden $k$ y de tipo máximo.

*Sugerencia.* Haga uso del método de solución del problema anterior.

**990*.** Demuestre que el orden y el tipo de una función entera no varían al derivar la función.

Resuelva los problemas **991—998** basándose en el teorema siguiente.

Si el desarrollo de una función entera en serie de potencias es de la forma $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, entonces el orden $\rho$ y el tipo $\sigma$ de esta función se determinan por las igualdades

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{\ln\left|\frac{1}{c_n}\right|}, \qquad (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|c_n|}\right).$$

**991.** Demuestre que la función entera

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Az)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\quad (A>0,\ \alpha>0)$$

es de orden $\rho=1/\alpha$ y de tipo $\sigma=A^{1/\alpha}$.

*Sugerencia.* Haga uso de la fórmula de Stirling

$$\Gamma(\alpha n+1)=\left(\frac{\alpha n}{e}\right)^{\alpha n}\sqrt{2\pi\alpha n}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En los problemas **992—998** halle el orden y el tipo de las funciones dadas.

**992.** $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n$. **993.** $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{a}}z^n\ (a>0)$.

**994.** $f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)^{\frac{n}{a}}z^n\ (a>0)$. **995.** $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2}z^n$.

**996.** $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{n^{1+a}}}\ (a>0)$. **997.** $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{n}}{n!}z^n$.

**998.** $z^{-\nu}J_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}$ ($\nu>-1$; $J_\nu(z)$ es la función de Bessel de $\nu$-ésimo orden).

---

Si $\rho$ es el orden de la función entera $f(z)$ $(0<\rho<\infty)$, la función $h(\varphi)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho}$ se llama *indicatriz* de crecimiento de la función $f(z)$.

En los problemas **999—1005** halle el orden $\rho$ y la indicatriz $h(\varphi)$ de la función correspondiente.

**999.** $e^z$. **1000.** $e^z+z^2$. **1001.** $\operatorname{sen} z$. **1002.** $\cos z$.

**1003.** $\operatorname{ch} z$. **1004.** $e^{z^n}$. **1005.** $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

**1006.** La función entera $f(z)$ tiene la indicatriz $h(\varphi)$ y $P(z)$ es un polinomio. ¿Cuál es la indicatriz $h^*(\varphi)$ de las funciones 1) $f(z)+P(z)$, 2) $f(z)P(z)$?

**1007.** Sea $P(z)$ un polinomio cualquiera. Dé un ejemplo de una función entera $f(z)$ (de orden finito diferente de cero), cuya indicatriz $h(\varphi)$ es igual a cero en cierto intervalo, mientras que la indicatriz de la función $f(z)+P(z)$ es negativa en ese mismo intervalo.

CAPITULO VII

# INTEGRALES DE TIPO DE CAUCHY. FORMULAS INTEGRALES DE POISSON Y DE SCHWARZ

## § 1. INTEGRALES DE TIPO DE CAUCHY

La integral de forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

donde $C$ es un contorno suave[1] (cerrado o no cerrado) y $\varphi(\zeta)$ es una función continua en el contorno $C$, a excepción, posiblemente, de un número finito de puntos, donde tiene discontinuidades integrables, se llama *integral de tipo de Cauchy*. La función $\varphi(\zeta)$ se llama *densidad* y $\dfrac{1}{\zeta - z}$ *núcleo* de la integral. La integral de tipo de Cauchy representa una función $F(z)$ analítica en todo recinto que no contiene puntos del contorno $C$. Además

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \tag{1}$$

Supongamos que $\varphi(\zeta)$ verifica en el contorno $C$ la condición de Lipschitz de orden $\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ (brevemente, $\varphi(\zeta) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$), es decir,

$$|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| < k\,|\zeta_1 - \zeta_2|^{\alpha},$$

donde los puntos $\zeta_1$ y $\zeta_2$ pertenecen al contorno $C$ y $k$ es una constante. En estas condiciones, si el punto $\zeta_0$ del contorno no es un extremo suyo, existe *la integral singular*

$$F(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - \zeta_0},$$

definida como el valor principal de la integral de tipo de Cauchy.

---

[1] Entendemos por contorno suave una curva simple (es decir, que no se interseca consigo mismo) con una tangente que varía continuamente y sin puntos de retroceso. Cabe señalar que las condiciones impuestas al contorno $C$ pueden ser considerablemente ampliadas. Véase *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950 (*Priválov I. I.*, Propiedades de frontera de funciones analíticas). Se pueden considerar también contornos compuestos por un número finito de contornos del tipo señalado.

Este valor principal se puede expresar a través de una integral impropia corriente mediante la fórmula

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0)+\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\operatorname{Ln}\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}, \tag{2}$$

donde los puntos $a$ y $b$ son los extremos del contorno $C$, si éste no es cerrado. La rama uniforme de Ln se escoge de manera que en el caso de un contorno cerrado ($a=b$) el término con el logaritmo desaparezca y la fórmula adquiera la forma

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0). \tag{2'}$$

Si designamos mediante $F^+(\zeta_0)$ y $F^-(\zeta_0)$ los valores frontera de la integral $F(z)$ de tipo de Cauchy cuando $z\to\zeta_0$ *por la izquierda* de $C$ y *por la derecha* de $C$ respectivamente, tendremos de acuerdo con las fórmulas de Sojotski

$$\left.\begin{aligned} F^+(\zeta_0)&=F(\zeta_0)+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0),\\ F^-(\zeta_0)&=F(\zeta_0)-\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

o bien

$$\begin{gathered} F(\zeta_0)=\frac{1}{2}[F^+(\zeta_0)+F^-(\zeta_0)],\\ F^+(\zeta_0)-F^-(\zeta_0)=\varphi(\zeta_0).\end{gathered} \tag{4}$$

Si $C$ es contorno cerrado que se recorre como siempre, $F^+(\zeta)$ son los valores frontera de la función $F^+(z)$ definida *en el interior* del contorno (recinto $D^+$), mientras que $F^-(\zeta)$ son los valores frontera de la función $F^-(z)$ definida *en el exterior* del contorno (recinto $D^-$)[1]. Véase, por ejemplo, [1, cap. III, § 3] o [2, cap. III, § 3].)

**1008.** Demuestre que, si $C$ es un contorno cerrado y la densidad de la integral de tipo de Cauchy $\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ puede ser representada en la forma $\varphi(\zeta)=\varphi^+(\zeta)+\varphi^-(\zeta)$, donde $\varphi^+(\zeta)$ y $\varphi^-(\zeta)$ son los valores frontera de las funciones analíticas en el interior y en el exterior del contorno $C$ respectivamente, entonces

$$\Phi^+(z)=\varphi^+(z),\quad \Phi^-(z)=-\varphi^-(z)+\varphi^-(\infty).$$

*Observación*. Si en las condiciones del problema una de las funciones $\varphi^-$ o $\varphi^+$ es idénticamente igual a cero, la integral de tipo de Cauchy se convierte en la integral de Cauchy para el recinto interior o el recinto exterior respectivamente.

**1009.** Sea $C$ un contorno cerrado. Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, si la densidad de la integral de tipo de Cauchy es la función dada ($n$ es un número natural):

1) $\varphi(\zeta)=(\zeta-a)^n$; 2) $\varphi(\zeta)=\frac{1}{(\zeta-a)^n}$ ($a$ en el interior de $C$);
3) $\varphi(\zeta)=\frac{1}{(\zeta-a)^n}$ ($a$ en el exterior de $C$).

---

[1] A este mismo caso se reduce aquel en el que el contorno es una curva infinita que divide el plano en dos recintos.

**1010.** Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, si:

1) la función $\varphi(\zeta)$ es el valor frontera de una función analítica en todo punto de $D^+$, a excepción de un número finito de puntos $a_k$, donde ella tiene polos;

2) la función $\varphi(\zeta)$ es el valor frontera de una función analítica en todo punto de $D^-$, a excepción de un número finito de puntos $a_k$, donde ella tiene polos (entre los puntos $a_k$ puede figurar el punto $z=\infty$).

**1011.** Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, si

$$\varphi(\zeta)=\frac{\zeta^3+i\zeta^2-\zeta+4i}{\zeta^4-3\zeta^2-4}+\frac{\ln\frac{\zeta-2}{\zeta-3}}{\zeta^2-4}$$

y $C$ es la circunferencia $|\zeta|=3/2$.

**1012.** Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, si $\varphi(\zeta)=\operatorname{ctg}\zeta$ y $C$ es el circunferencia $|\zeta|=5$.

**1013.** Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, si $\varphi(\zeta)=\frac{\zeta^3}{\zeta^2+1}$ y $C$ es el eje real recorrido de la izquierda a la derecha.

*Observación*. Por la integral de tipo de Cauchy tomada a lo largo del eje real $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau$ se comprende su valor principal, si esta integral diverge en el sentido corriente.

**1014.** Halle $F^+(z)$ y $F^-(z)$, así como los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ sobre el contorno de integración $C$, si $C$ es la circunferencia $|\zeta|=R$ y $\varphi(\zeta)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta)$ es la serie de Fourier uniformemente convergente de una función real $\psi(\theta)=\varphi(Re^{i\theta})$.

**1015.** 1) Sea $C$ la circunferencia $|\zeta|=\pi/2$ y sea $f(\zeta)$ una función analítica en el círculo $|\zeta|\leqslant\pi/2$. Halle las funciones definidas mediante las integrales

$$I_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\zeta)\operatorname{ctg}(\zeta-z)\,d\zeta,\quad I_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\operatorname{sen}(\zeta-z)},$$

en los recintos cuyos puntos $z$ poseen la propiedad de que ninguno de los puntos $z+k\pi$ ($k$ es un número entero) pertenece a $C$.

2) Resuelva los problemas planteados en el punto 1) suponiendo que $C$ es la circunferencia $|\zeta|=\pi$.

**1016.** Sea $C$ el segmento $[-1, 1]$, recorrido de la izquierda a la derecha, y sea $\varphi(\zeta)\equiv 1$. Halle $F(z)$ en el exterior de $C$, los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ y el valor principal $F(\zeta)$ sobre $C$. Calcule, en particular, $F(\pm i)$, $F^{\pm}(0)$ y $F(0)$.

**1017.** Sea $C$ la semicircunferencia $|\zeta|=R$, $0<\arg\zeta<\pi$ (con el origen en el punto $R$) y sea $\varphi(\zeta)\equiv 1$. Halle $F(z)$ en el exterior de $C$, los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ y el valor principal $F(\zeta)$ sobre $C$. Calcule, en particular, $F(0)$, $F^{\pm}(iR)$ y $F(iR)$. Halle también $F'(0)$.

**1018.** Sea $C$ la semicircunferencia $|\zeta|=R$, $-\pi<\arg\zeta<0$ (con el origen en el punto $R$) y sea $\varphi(\zeta)\equiv 1$. Halle $F(z)$ en el exterior de $C$, los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ sobre $C$, $F(0)$ y $F'(0)$.

**1019.** Sea $\varphi(\zeta)=\frac{1}{\zeta^n}$ la densidad de la integral de tipo de Cauchy. Halle $F(z)$ en el exterior de $C$, si el contorno $C$ es la curva indicada:

1) la frontera del anillo $r<|z|<R$;
2) la recta $\operatorname{Im}\zeta=\pi$ recorrida de la izquierda a la derecha;
3) la frontera de la franja $|\operatorname{Im} z|<\pi$;
4) la semicircunferencia $|\zeta|=R$, $0<\arg\zeta<\pi$ (con el origen *en el punto $R$)*;
5) la semicircunferencia $|\zeta|=R$, $-\pi<\arg\zeta<0$ (con el origen en el punto $R$).

En los puntos 4) y 5) halle los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ sobre $C$ y calcule $F(0)$.

En los problemas **1020—1025** halle $F(z)$ en el exterior de $C$, suponiendo que el contorno $C$ es un arco que une los puntos $a$ y $b$ y que $\varphi(\zeta)$ es la función dada.

**1020.** $\varphi(\zeta)\equiv 1$. **1021.** $\varphi(\zeta)=\zeta$. **1022.** 1) $\varphi(\zeta)=\zeta^n$; 2) $\varphi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\zeta^n$ es una función entera.

**1023.** $\varphi(\zeta)=\frac{1}{\zeta-z_0}\,(z_0\,\overline{\in}\,C)$.

**1024.** $\varphi(\zeta)=\frac{1}{(\zeta-z_0)^n}\,(z_0\,\overline{\in}\,C)$. Calcule, en particular, $F(z_0)$.

*Sugerencia.* Haga uso de la igualdad

$$\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}+\frac{\varphi(z)}{\zeta-z}.$$

**1025.** Halle $F^{+}(z)$, $F^{-}(z)$ y los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$, si $C$ es *la circunferencia $|\zeta|=R$ y $\varphi(\zeta)$ es la función logarítmica definida* por las condiciones:

1) $\varphi(\zeta)=\ln\zeta=\ln R+i\varphi$, $\quad -\pi<\varphi\leqslant\pi$;
2) $\varphi(\zeta)=\ln\zeta=\ln R+i\varphi$, $\quad 0\leqslant\varphi<2\pi$.

*Sugerencia.* Considere el contorno compuesto de la circunferencia $|z|=R$ *con un corte a lo largo del radio $[-R, 0]$ en el primer caso y a lo largo del* radio $[0, R]$ en el segundo caso.

*Observación.* Si no se fija de antemano la rama del logaritmo, pero se requiere su prolongación continua a lo largo del contorno de integración, la integral dependerá de la selección del punto inicial de integración. Véase también la sugerencia y los ejemplos de la pág. 59.

**1026.** Halle $F^{+}(z)$, $F^{-}(z)$ y los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ sobre $C$, si $(\varphi\,\zeta)=\ln\frac{\zeta}{\zeta-1}$ y el contorno $C$ es:

1) la circunferencia $|\zeta| = R\ (R > 1)$;
2) la recta $\operatorname{Im}\zeta = 1$ recorrida de la izquierda a la derecha.

**1027.** Halle $F(z)$ y los valores frontera $F^{\pm}(\zeta)$ sobre $C$, si $\varphi(\zeta) = \ln\frac{\zeta}{\zeta-1}$ y el contorno $C$ es la semicircunferencia $|\zeta| = R$ $(R > 1)$, $0 \leqslant \arg\zeta \leqslant \pi$ (con el origen en el punto $R$).

**1028.** Halle $F^{+}(z)$ y $F^{-}(z)$, si $\varphi(\zeta) = \sqrt{\zeta}\,(0 \leqslant \arg\sqrt{\zeta} < \pi)$ y $C$ es la circunferencia $|\zeta| = 1$.

En los problemas **1029—1031** halle $F^{\pm}(z)$, si $C$ es un contorno cerrado, los puntos $a$ y $b$ se encuentran en su interior y $\varphi(\zeta)$ es una rama uniforme de una función multiforme definida en el exterior del corte que une los puntos $a$ y $b$ y se encuentra en el interior del contorno $C$.

**1029.** $\varphi(\zeta) = \ln\frac{\zeta-a}{\zeta-b}$ $(\operatorname{Ln} 1 = 0)$.

**1030.** $\varphi(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta-a}{\zeta-b}}$ $(\varphi(\infty) = +1)$.

*Sugerencia.* Para calcular la integral a lo largo del contorno que rodea el corte, desarrolle $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}$ en una serie de potencias de $\frac{1}{\zeta}$.

**1031.** $\varphi(\zeta) = (\zeta-a)^{\lambda}(\zeta-b)^{1-\lambda}\left(\left.\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-b}\right|_{\zeta=\infty} = 1\right)$.

**1032.** Halle $F^{\pm}(z)$, si el contorno $C$ es cerrado, el punto $a$ pertenece al recinto $D^{+}$, el punto $b$ pertenece al recinto $D^{-}$ y $\varphi(\zeta) = \operatorname{Ln}\frac{\zeta-a}{\zeta-b}$ $(\operatorname{Ln} 1 = 0)$ es una rama uniforme definida en el exterior del corte que une los puntos $a$ y $b$ e interseca el contorno $C$ en un punto $\zeta_0$.

*Sugerencia.* Agregue a $C$ el corte a lo largo del arco $\zeta_0 a$, si $z$ pertenece al recinto $D^{+}$, y a lo largo del arco $\zeta_0 b$, si $z$ se encuentra en el recinto $D^{-}$.

**1033.** Demuestre la validez de las igualdades $(0 < \lambda < 1)$:

1) $$\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-z} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\left[1 - \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\lambda}\right] \quad (z \overline{\in} [0, 1]);$$

2) $$\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-\tau} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\left[1 - \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{\lambda}\cos\lambda\pi\right] \quad (\tau \in (0, 1)).$$

*Sugerencia.* Con el fin de obtener la primera fórmula considere la integral de Cauchy $\frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)^{\lambda}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$, donde $\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)^{\lambda}$ es la función uniforme en el plano con el corte rectilíneo a lo largo de $[0, 1]$ e igual a 1 en el $\infty$ y $C$ es la frontera del recinto biconexo formado por el círculo $|\zeta| < R\ (R > 1)$ con un corte a lo largo del segmento $[0, 1]$. La segunda fórmula se obtiene de la primera empleando las fórmulas de Sojotski.

**1034.** Calcule la integral singular

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{t^2+3}{t-x}\,dt \quad (-1<x<1).$$

**1035.** Halle las integrales

1) $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1-t}{t}\,\frac{dt}{t-z}$ $(z \overline{\in} [0,\ 1])$;

2) $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1-t}{t}\,\frac{dt}{t-\tau}$ $(\tau \in (0,\ 1))$.

**1036.** Consideremos la integral singular

$$F(z,\ t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\tau}{(\tau-t_0)^{\gamma}(\tau-z)} \quad (\gamma=\alpha+i\beta,\ 0\leqslant\alpha<1).$$

donde $C$ es un arco que une los puntos $a$ y $b$, $t_0$ es un punto de este arco y $(\tau-t_0)^{\gamma}$ es una rama uniforme en el plano con un corte que une los puntos $t_0$ y el $\infty$. Si el punto $t_0$ coincide con uno de los extremos del arco $C$, aceptaremos que el corte pasa por todo el contorno $C$; en cambio, si el punto $t_0$ es interior, el corte lo llevaremos a lo largo del arco $(t_0,\ b)$ del contorno $C$. Demuestre las proposiciones siguientes:

1) En una vecindad del punto $a$ se tiene

$$F(z,\ a)=\frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\operatorname{sen}\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}+F_1(z) \quad (z \overline{\in} C),$$

$$F(t,\ a)=\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}(t-a)^{-\gamma}+F_1(t) \quad (t\in C),$$

donde $F_1(z)$ es una función analítica en una vecindad del punto $a$.

*Sugerencia.* Considere la diferencia

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\tau}{(\tau-a)^{\gamma}(\tau-z)}-\frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\operatorname{sen}\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}$$

y, empleando las fórmulas de Sojotski, demuestre que $F_1(z)$ será una función analítica en una vecindad del punto $a$.

2) En una vecindad del punto $b$ se tiene

$$F(z,\ b)=-\frac{e^{-i\gamma\pi}}{2i\operatorname{sen}\gamma\pi}(z-b)^{-\gamma}+F_2(z) \quad (z \overline{\in} C),$$

$$F(t,\ b)=-\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}(t-b)^{-\gamma}+F_2(t) \quad (t\in C),$$

donde $F_2(z)$ es una función analítica en una vecindad del punto $b$.

3) En una vecindad de un punto interior $t_0$ del contorno $C$ se tiene

$F(z,\ t_0)=(z-t_0)^{-\gamma}+F_3(z)$ a la izquierda de $C$,

$F(z, t_0)=F_4(z)$ a la derecha de $C$,

$F(t, t_0)=\frac{1}{2}(t-t_0)^{-\gamma}+F_5(t)$ si $t\in C$,

donde $F_3(z)$, $F_4(z)$ y $F_5(z)$ son analíticas en una vecindad del punto $t_0$.

**1037.** Analice el comportamiento de la integral de tipo de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \ln\frac{\zeta}{\zeta-1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

cerca de los puntos $z=-R$ y $z=R$, si $C$ es la semicircunferencia $|\zeta|=R$ $(R>1)$ perteneciente al semiplano superior (con el origen en el punto $R$).

*Sugerencia.* Véase el problema **1027**.

*Observación.* Sobre el comportamiento de las integrales de tipo de Cauchy cerca de una curva singular véase *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1962 (*Musjelishvili N. I.*, Ecuaciones integrales singulares), cap. I. o *Ф. Д. Гахов*, Краевые задачи, Физматгиз, 1963 (*Gájov F. D.*, Problemas de frontera), cap. I.

## § 2. INTEGRAL DE DIRICHLET, FUNCIONES ARMONICAS, POTENCIAL LOGARÍTMICO Y FUNCION DE GREEN

La integral

$$D(u)=\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$$

se llama *integral de Dirichlet* y la integral

$$D(u, v)=\iint_G (u_x v_x+u_y v_y)\,dx\,dy$$

es su *forma bilineal* correspondiente.

**1038.** Demuestre las siguientes propiedades de la integral de Dirichlet y de su forma bilineal correspondiente:

1) $D(u)=\iint_G \left(u_r^2+\frac{1}{r}u_\varphi^2\right)dx\,dy$ $(z=x+iy=re^{i\varphi})$;

2) $D(u)$ y $D(u, v)$ son invariantes respecto a las transformaciones conformes del recinto $C$;

3) $D^2(u, v)\leqslant D(u)D(v)$ (el signo de igualdad tiene lugar solamente en el caso en que $u/v=\text{const}$);

4) si $f(z)=u+iv$ es una función analítica en el recinto $C$, se tiene

$$D(u)=D(v)=D(f)=\iint_G |f'(z)|^2\,dx\,dy.$$

¿Cuál es en este caso el significado geométrico de $D(f)$?

**1039.** Empleando la fórmula de Green

$$\iint_G v\,\Delta u\,dx\,dy + D(u,\ v) = \int_C v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

($n$ es la normal exterior; $\Delta$ es el operador de Laplace) demuestre las siguientes propiedades de las funciones armónicas $u$, $u_1$ y $u_2$ ($v$ es la función conjugada de $u$):

1) $D(u) = \int\limits_C u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int\limits_C u\,dv$; 2) $\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int\limits_C dv = 0$;

3) si $u_1 = u_2$ sobre $C$, se tiene $u_1 \equiv u_2$ en $G$;

4) si $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}$ sobre $C$, se tiene $u_1 - u_2 = \text{const}$ en $G$.

**1040.** Demuestre que si $u$ es armónica en el círculo $|z| < R$ y continua en el círculo cerrado $|z| \leqslant R$, se tiene

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{|z|<R} u(re^{i\varphi})\,r\,dr\,d\varphi.$$

*Sugerencia.* De la igualdad $\int\limits_C \frac{\partial v}{\partial n}ds = 0$ se deduce que la integral $\int\limits_{|z|=r} u\,d\varphi$ *no depende de* $r$; *halle su valor pasando al límite para* $r \to 0$ *y pase después al límite para* $r \to R$.

**1041.** Las integrales de tipo

$$\iint_C \rho(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,d\xi\,d\eta,\quad \int_C \rho(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,|d\zeta|,$$

$$\int_C \nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,|d\zeta|$$

($\zeta = \xi + i\eta$, $n$ es la normal a $C$) se donominan respectivamente *potencial logarítmico, potencial logarítmico de una capa simple y potencial logarítmico de una capa doble.*

Compruebe las siguientes igualdades:

1) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,d\theta = \begin{cases}\ln\dfrac{1}{|z|}, & \text{si } |z| > R\\[2mm] \ln\dfrac{1}{R}, & \text{si } |z| \leqslant R;\end{cases}\qquad (\zeta = Re^{i\theta}),$$

2) $$\frac{1}{\pi R^2}\iint_{|\zeta|<R}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,d\xi\,d\eta = \begin{cases}\ln\dfrac{1}{|z|}, & \text{si } |z| > R,\\[2mm] \ln\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{2}\left[1 - \left(\dfrac{|z|}{R}\right)^2\right], & \text{si } |z| \leqslant R;\end{cases}$$

3) $$\int_C \nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta - z|}\,|d\zeta| = \int_C \nu(\zeta)\,d\arg(\zeta - z)$$

(la normal $n$ se toma hacia la izquierda respecto al recorrido de $C$);

$$4)\quad \int_{-a}^{a} \frac{\partial}{\partial\eta} \ln \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\xi = \begin{cases} \varphi & \text{si } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\varphi, & \text{si } \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

donde $\varphi\,(0 < \varphi < \pi)$ es el ángulo bajo el cual se ve el segmento $(-a,\ a)$ desde el punto $z\,(a > 0)$.

Se llama *función de Green* $g(x,\ y,\ \xi,\ \eta)$ (brevemente, $g(z,\ \zeta)$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$) del problema de Dirichlet para el recinto $G$ una función armónica respecto a ambos pares de las variables $x$, $y$ y $\xi$, $\eta$ que es igual a cero en la frontera del recinto $G$, tiene una singularidad en $z = \zeta$ y tal que

$$g(z,\ \zeta) = \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + \text{una función armónica.}$$

La función de Green es simétrica respecto a sus argumentos, es decir, $g(z,\ \zeta) = g(\zeta,\ z)$ (véase, por ejemplo, [1, cap. VI, § 1, n° 6]).

**1042.** Enuncie el problema de Dirichlet para una función armónica equivalente a la determinación de la función de Green $g(z,\ \zeta)$.

**1043.** Sea $w = f(z,\ \zeta)$ una función que transforma conformemente un recinto simplemente conexo de Jordan $G$ en el círculo $|w| < 1$ de manera que $f(\zeta,\ \zeta) = 0$ $(\zeta \in G)$. Demuestre las relaciones

$$g(z,\ \zeta) = -\ln |f(z,\ \zeta)|, \tag{1}$$
$$f(z,\ \zeta) = e^{-(g + ih)}, \tag{2}$$

donde $h(z,\ \zeta)$ es la función armónica conjugada de $g(z,\ \zeta)$.

**1044.** Empleando la relación (1) del problema **1043**, halle la función de Green $g(z,\ \zeta)$ para los recintos siguientes:

1) para el círculo $|z| < R$; 2) para el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$;
3) para la franja $0 < \operatorname{Im} z < 1$.

**1045.** Demuestre las siguientes proposiciones ($n$ es la normal interior, $\gamma_r$ es la circunferencia $|z - \zeta| = r$):

1) Si $u(z)$ es continua cerca de $z = \zeta$, se tiene

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} u(r) \frac{\partial g(z,\ \zeta)}{\partial n}\, ds = 2\pi\,(u,\ z).$$

2) Si $u(z)$ es continuamente diferenciable cerca de $z = \zeta$, se tiene

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} g(z,\ \zeta) \frac{\partial u(z)}{\partial n}\, ds = 0.$$

3) Si $u(z)$ es armónica en $G$ y continuamente diferenciable sobre $C$, se tiene

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(z) \frac{\partial g(z,\ \zeta)}{\partial n}\, ds\ (z \in G).$$

*Sugerencia.* Pase al límite para $r \to 0$ en la fórmula

$$\int_C \left( u \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_{\gamma_r} \left( u \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

## §. 3. INTEGRAL DE POISSON, FORMULA DE SCHWARZ, MEDIDA ARMONICA

Si la función real $u(\zeta)=u(R,\ \theta)$ está definida y es continua a trozos sobre la circunferencia $\zeta=Re^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$, *la integral de Poisson*

$$u(z)=u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}u(R,\ \theta)\ \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta \tag{1}$$

determina en el círculo $|z|<R$ $(z=re^{i\varphi})$ una función armónica que en los puntos de continuidad de $u(\zeta)$ toma valores frontera iguales a $u(\zeta)$:

$$\lim_{z\to\zeta}u(z)=u(\zeta)$$

($z\to\zeta$ a lo largo de cualesquiera caminos no tangentes). La función correspondiente $f(z)=u+iv$, analítica en el círculo $|z|<R$, se determina mediante *la fórmula de Schwarz:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}u(\zeta)\ \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\theta+iv(0)$$

($v(0)$ es un número real cualquiera).

**1046.** Demuestre las proposiciones siguientes:

1) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,dr=1;$

2) $u(r,\ \varphi)-u(R,\ \theta_0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi}[u(R,\ \theta)-u(R,\ \theta_0)]\times$

$$\times\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta;$$

3) si $|u(R,\ \theta)-u(R,\ \theta_0)|<\varepsilon$ para $|\theta-\theta_0|<\alpha$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|<\alpha}|u(R,\ \theta)-u(R,\ \theta_0)|\ \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta<\varepsilon;$$

4) si $|\theta-\theta_0|>\alpha$ y $|\varphi-\theta_0|<\dfrac{\alpha}{2}$, se tiene

$$R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2>4Rr\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{4};$$

5) si $|\varphi-\theta_0|<\dfrac{\alpha}{2}$ y se cumplen las condiciones del punto 3), se tiene

$$|u(r,\ \varphi)-u(R,\ \theta_0)|<\varepsilon+\frac{M(R^2-r^2)}{2\pi A},$$

donde $A=4\pi Rr\,\mathrm{sen}^2\dfrac{\alpha}{4}$ y $M=\displaystyle\int_{0}^{2\pi}|u(R,\ \theta)-u(R,\ \theta_0)|\,d\theta.$

**1047.** Demuestre que, siendo $\zeta=Re^{i\theta}$ y $z=re^{i\varphi}$, se tiene

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{(R^2-r^2)+i2Rr\,\mathrm{sen}(\varphi-\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

Empleando la igualdad demostrada, obtenga los desarrollos siguientes:

$$u(z)=u(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\operatorname{sen} n\varphi),$$

$$v(z)=v(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(-b_n\cos n\varphi+a_n\operatorname{sen} n\varphi),$$

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n,\ f(0)=u(0)+iv(0),$$

donde

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \theta)\cos n\theta\,d\theta,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \theta)\operatorname{sen} n\theta\,d\theta,$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{R^n}=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}u(R,\ \theta)e^{-in\theta}\,d\theta.$$

**1048.** Demuestre que para la integral de Dirichlet de una función armónica $u(z)$ se tiene

$$D(u)=\iint_{|z|<R}(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\,(a_n^2+b_n^2)$$

(los coeficientes $a_n$ y $b_n$ se han definido en el problema anterior).

Puede ocurrir que ambos miembros de la igualdad se conviertan simultáneamente en infinito.

*Sugerencia.* Pase a las coordenadas polares $(r,\ \varphi)$ y demuestre que para $r<R$ se tiene

$$D_r(u)=\iint_{|z|<r}(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}(a_n^2+b_n^2).$$

**1049.** Demuestre que para la función continua

$$u(R,\ \theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n!\,\theta}{n^2}$$

la integral de Dirichlet determina una función $u(z)$ armónica en el círculo $|z|<R$ con valores frontera $u(R,\theta)$ y una integral infinita de Dirichlet $D(u)=\infty$.

**1050.** Resuelva, empleando la integral de Poisson, el problema exterior de Dirichlet para el círculo $|z|<R$: halle una función $u(z)$, armónica en el recinto $|z|>R$ y regular en el infinito, que toma los valores frontera dados $a(\zeta)$ en la circunferencia $|\zeta|=R$. Determine el valor de $u(\infty)$.

*Sugerencia.* Realice la sustitución $z_1=R^2/\bar{z}$.

**1051.** Demuestre que para $|z|>R$ la fórmula de Schwarz (véase la introducción al § 3) define una función analítica $f_1(z)=u_1(z)+iv_1(z)$, regular en el infinito, y que tienen lugar los desarrollos

$$f_1(z)=-\overline{f\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}=-\overline{f(0)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n},\ c_{-n}=R^{2n}c_n,$$

$$u_1(z)=-\left\{u(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\operatorname{sen} n\varphi)\right\},$$

$$v_1(z)=-v(0)+\sum_{n=1}^{\alpha}\left(\frac{R}{r}\right)^n(-b_n\cos n\varphi+a_n\operatorname{sen} n\varphi),$$

donde $a_n$, $b_n$ y $c_n$ se definen igual que en el problema **1047.** Además, $\operatorname{Re} f_1(\zeta)=-\operatorname{Re} f(\zeta)=-u(\zeta)$ e $\operatorname{Im} f_1(\zeta)=\operatorname{Im} f(\zeta)$.

*Sugerencia.* Realice en la fórmula de Schwarz para $|z|>R$ la sustitución $z=R^2/\bar{z}_1$ y recurra a que $\zeta=R^2/\bar{\zeta}$ sobre la circunferencia $|\zeta|=R$.

En los problemas **1052—1057** halle la función $f(z)$ ($|z|<R$) y la función $f_1(z)$ ($|z|>R$), definidas por la fórmula de Schwarz, si $u(\zeta)$ es la función dada.

**1052.** 1) $u(\zeta)=\operatorname{Re}[\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)]$,

2) $u(\zeta)=\operatorname{Im}[\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)]$,

donde $\varphi(z)$ es una función analítica para $|z|\leqslant R$ y $\psi(z)$ una función analítica para $|z|\geqslant R$.

**1053.** $u(\zeta)=\operatorname{Re}\zeta^n$. **1054.** $u(\zeta)=\operatorname{Re}\frac{1}{\zeta^n}$.

**1055.** $u(\zeta)=\operatorname{Re}\ln\frac{\zeta}{\zeta-1}\ (R>1)$.

**1056.** $u(\zeta)=\operatorname{Re}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-1}}\left(\text{si } \zeta>1, \text{ se tiene } \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-1}}>0;\ R>1\right)$.

**1057.** $u(\zeta)=\operatorname{Re}\ln\zeta$.

**1058.** Demuestre que la fórmula de Schwarz puede ser representada en la forma

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\overline{f(0)}.$$

*Sugerencia.* Haga uso de la igualdad

$$\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}=\frac{2}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}.$$

**1059.** Obtenga las fórmulas para el semiplano superior $\operatorname{Im} z>0$ análogas a la integral de Poisson y a la fórmula de Schwarz, es decir, exprese una función armónica $u(z)$ y una función analítica $f(z) = u(z) + iv(z)$ mediante $u(t)$ $(-\infty < t < \infty)$.

*Sugerencia.* Haga uso de la transformación conforme del semiplano en el círculo.

**1060.** Deduzca la fórmula de Schwarz para la franja $0 < \operatorname{Im} z < 1$.

*Sugerencia.* Haga uso de la transformación conforme de una franja en el semiplano.

---

Se llama *medida armónica* $\omega(z, \alpha, G)$ de un arco frontera $\alpha$ en el punto $z$ respecto al recinto $G$ a una función acotada, armónica en $G$, igual a 1 en los puntos interiores del arco $\alpha$ e igual a 0 en los puntos interiores de la parte restante de la frontera. La medida armónica $\omega(z, \alpha, G)$ es invariante respecto a las transformaciones conformes.

En los problemas **1061—1064** el recinto $G$ es el círculo $|z| < 1$ y $\omega(z, \theta_1, \theta_2)$ es la medida armónica del arco $\alpha = (\theta_1, \theta_2)$; $w = e^{i\theta}$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$.

**1061.** Empleando la integral de Poisson demuestre que

$$\omega(z, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} \, d\theta,$$

y que, en particular, $\omega(0, \theta_1, \theta_2) = (\theta_2 - \theta_1)/2\pi$.

**1062.** Halle las líneas equipotenciales de la función $\dfrac{d\omega(z, \theta_1, \theta)}{d\theta}$ para un valor fijo de $\theta$ ($z = re^{i\varphi}$ es un punto variable).

*Sugerencia.* Demuestre que

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{|w' - z|}{|w - z|},$$

donde $w'$ es el extremo de la cuerda que parte de $w$ y pasa por $z$.

**1063.** Designemos mediante $w'$ el extremo de la cuerda que parte del punto $w$ y pasa por el punto $z$. Sea $\alpha$ el arco $(\theta_1, \theta_2)$ y sea $\alpha'(z)$ el arco que describe el punto $w'$ cuando el punto $w$ recorre el arco $\alpha$. Demuestre que la longitud del arco $\alpha'(z)$ es igual a $2\pi\omega(z, \theta_1, \theta_2)$.

**1064.** Halle las líneas equipotenciales de la medida armónica $\omega(z, \theta_1, \theta_2)$ del arco $(\theta_1, \theta_2)$. Empleando esto demuestre que la integral que define la medida armónica (véase el problema **1061**) efectivamente toma los valores frontera: 1 en $(\theta_1, \theta_2)$ y 0 en el complemento (se consideran los puntos interiores de los arcos).

**1065.** Para el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ determine la medida armónica $\omega(z, a, b)$ del segmento $(a, b)$, del rayo $(-\infty, b)$ y del rayo $(a, \infty)$. ¿Cuál es el significado geométrico de estas medidas armónicas?

**1066.** Halle la medida armónica de los lados del ángulo $0 < \arg z < \gamma$.

**1067.** Para el semicírculo $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$ halle las medidas armónicas del diametro $\Delta$ y de la semicircunferencia $\Gamma$, así como las líneas equipotenciales de estas medidas armónicas.

**1068.** Halle la medida armónica de la semicircunferencia frontera $\Gamma$ del recinto $|z| > R$, $\operatorname{Im} z > 0$.

**1069.** Halle la medida armónica de la circunferencia frontera $\Gamma$ del recinto $|z| > R$, $0 < \arg z < 2\pi$.

**1070.** Halle la medida armónica de las circunferencias frontera del anillo $r < |z| < R$.

---

En los problemas **1071—1077** el recinto $G$ está acotado por un contorno $\Gamma$ compuesto de $n$ contornos suaves $\Gamma_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Los contornos se recorren en la dirección positiva respecto al recinto $G$; la normal $n$ es interior respecto al recinto $G$. La integral

$$\int_{\Gamma_\nu} df(z)$$

se llama *período* respecto a $\Gamma_\nu$ de una función analítica en $G$.

**1071** [1]. Demuestre que si una función armónica $u(z)$ es uniforme en $G$, en período de la función analítica $f(z) = u(z) + iv(z)$ a lo largo de $\Gamma_\nu$ es igual a $-i \int_{\Gamma_\nu} \frac{\partial u}{\partial n} ds$.

**1072.** Demuestre que para una función compleja de Green $g + ih$ de un recinto $G$ ($g(z, \zeta)$ es la función de Green del recinto $G$ y $h(z, \zeta)$ es la función armónica conjugada de $g$) el período a lo largo de $\Gamma_\nu$ es igual a $-2\pi i \omega_\nu(z)$, donde $\omega_\nu(z)$ es la medida armónica de $\Gamma_\nu$ respecto al recinto $G$. Demuestre que $\sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu(\zeta) \equiv 1$.

*Sugerencia.* Una función $u(\zeta)$ armónica en $G$ puede ser representada en la forma

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(z) \frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n} ds \text{ (véase el problema 1045).}$$

**1073.** Exprese por medio de $\omega_\nu(z)$ la función acotada $u(z)$ armónica en $G$ que tiene valores constantes $c_\nu$ sobre $\Gamma_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

**1074.** Demuestre que para la función $v(z)$, conjugada de una función $u(z)$ uniforme y arinónica en $\overline{G}$, los períodos $p_\nu$ a lo largo

---

[1] En relación con los problemas **1071—1077** véase el complemento de *M. Schiffer* al libro de *R. Courant*, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience Publ., New York, 1950

de $\Gamma_\nu$ admiten la representación

$$p_\nu = -\int_\Gamma u(z)\frac{\partial\omega_\nu(z)}{\partial n}\,ds.$$

**1075.** Sea $\bar{\omega}_\nu(z)$ la función armónica conjugada de $\omega_\nu(z)$ y sea $p_{\mu\nu}$ el período de la función $w_\nu(z)=\omega_\nu(z)+i\bar{\omega}_\nu(z)$ a lo largo de $\Gamma_\mu$.
1) Demuestre que $p_{\mu\nu}=p_{\nu\mu}\,(\mu,\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

*Sugerencia.* Haga uso de la representación

$$p_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \omega_\mu \frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\,ds.$$

2) Demuestre que $\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu}=0$ $(\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

**1076.** Sean $c_\nu(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ números reales cualesquiera.
1) Demuestre que si $p_{\nu\mu}$ son los números definidos en el problema **1075**, la forma cuadrática $\sum\limits_{\nu,\ \mu=1}^{n} p_{\nu\mu}c_\nu c_\mu \geqslant 0$ y la igualdad tiene lugar solamente si todos los $c_\nu$ son iguales entre si.

*Sugerencia.* Aplique a la función armónica $\omega(z)=\sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu\omega_\nu(z)$ la fórmula $D(\omega)=-\int\limits_\Gamma \omega\,\frac{\partial\omega}{\partial n}\,ds$ (véase el problema **1039**; el signo ha sido cambiado ya que ahora $n$ es la normal interior).

2) Demuestre que la forma cuadrática $\sum\limits_{\nu,\ \mu=1}^{n-1} p_{\nu\mu}c_\nu c_\mu$ es positivamente definida, es decir, es positiva para cualquier sistema de valores $\{c_\nu\}$, a excepción de $c_1=c_2=\ldots c_{n-1}=0$.

**1077.** Demuestre que el sistema de ecuaciones

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} p_{\nu\mu}A_\mu = B_\mu\,(\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

($A_\mu$ son las incógnitas) tiene una solución única cualesquiera que sean $B_\mu$. Empleando esto, demuestre que para toda función $u(z)$ armónica en $\bar{G}$, en general no uniforme, se pueden escoger las constantes $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-1}$ de manera que la función armónica

$$u_1(z)=u(z)+\sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu\bar{\omega}_\nu(z)$$

sea uniforme en $G$.