

CAPITULO VIII

PROLONGACION ANALITICA.
SINGULARIDADES DE CARACTER
MULTIFORME.
SUPERFICIES DE RIEMANN

§ 1. PROLONGACIÓN ANALÍTICA

1078. La función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ se ha desarrollado en la serie de Taylor en una vecindad del punto $z = a$ ($|a| < 1$). ¿Para qué valores de a este desarrollo permite prolongar analíticamente la función $f(z)$?

1079. La suma de la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ha sido desarrollada en la serie de Taylor en una vecindad del punto $z = -1/2$. ¿Cuál es el recinto en el que resulta prolongada de esta forma la función $f(z)$?

1080. Demuestre que la función $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ puede ser prolongada a un recinto mayor mediante la serie

$$\ln 2 - \frac{1-z}{2} - \frac{(1-z)^2}{2 \cdot 2^2} - \frac{(1-z)^3}{3 \cdot 2^3} - \dots$$

1081. Las series de potencias

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{y} \quad f_2(z) = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$$

no poseen ningún recinto común de convergencia. Demuestre, sin embargo, que las funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son prolongación analítica una de la otra.

1082. Demuestre que las funciones definidas mediante las series

$$1 + az + a^2 z^2 + \dots \quad \text{y} \quad \frac{1}{1-z} - \frac{(1-a)z}{(1-z)^2} + \frac{(1-a)^2 z^2}{(1-z)^3} - \dots,$$

son prolongación analítica una de la otra.

1083. Sea

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

una serie de potencias de radio de convergencia $R = 1$. Realizando el cambio de variable $z = \frac{Z}{1+Z}$, la reduciremos a la forma

$$f(z) = f\left(\frac{Z}{1+Z}\right) = F(Z) = c_0 + c_1 Z + \dots + c_n Z^n + \dots$$

Designando mediante ρ el radio de convergencia de la serie obtenida, demuestre las proposiciones siguientes:

1) $\rho \geq 1/2$ y $\rho = 1/2$, si el punto $z = -1$ es una singularidad de la función $f(z)$.

2) Si $\frac{1}{2} < \rho < 1$, la igualdad $f(z) = F(Z) = F\left(\frac{z}{1-z}\right)$ permite prolongar analíticamente la función $f(z)$ en el recinto que es exterior respecto al círculo $|z| < 1$ e interior respecto a la circunferencia de Apolonio $\left|\frac{z}{1-z}\right| = \rho$.

3) Si $\rho = 1$, la igualdad indicada en el punto 2) prolonga analíticamente la función $f(z)$ al semiplano $\operatorname{Re} z < 1/2$.

4) Si $\rho > 1$, la función $f(z)$ puede ser prolongada analíticamente al recinto exterior respecto a la circunferencia de Apolonio $\left|\frac{z}{z-1}\right| = \rho$.

1084. Demuestre que la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ representa una función analítica en el círculo $|z| < 1$ para la cual la circunferencia $|z| = 1$ es su frontera natural (es decir, $f(z)$ es una función que no puede ser prolongada más allá del círculo unidad).

Sugerencia. Empleando la identidad $f(z) = z^2 + z^4 + \dots + z^{2^k} + f(z^{2^k})$, demuestre que $f(t\xi) \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow 1$ ($0 < t < 1$) y para cualquier punto de tipo $\xi = \sqrt[k]{-1}$ (k es un número natural).

En los problemas 1085 y 1086 demuestre que las funciones representadas por las series de potencias indicadas no pueden ser prolongadas más allá del círculo unidad.

$$1085. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$$

Sugerencia. Si p y q son números primos entre sí y $n \geq q$, se tiene

$$\left(\frac{2p\pi i}{q}\right)^{n!} = r^{n!}.$$

$$1086. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}.$$

Observación. En los problemas 1084–1086 se han considerado casos particulares del teorema general de Hadamard sobre las lagunas.

Si los índices de los coeficientes diferentes de cero de la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ forman una sucesión n_1, n_2, \dots en la que $n_{k+1} > (1+\alpha)n_k$, donde $\alpha > 0$, la frontera del círculo de convergencia de la serie es la frontera natural de la función $f(z)$.

1087. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^{n+1}} - \frac{1}{1-z^n} \right)$$

representa en los recintos $|z| < 1$ y $|z| > 1$ dos funciones analíticas que no son prolongación analítica una de la otra (véanse también los problemas 845—848).

1088. Sean $f(z)$ y $\varphi(z)$ dos funciones enteras cualesquiera y sea $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-z^n}{1+z^n} - \frac{1-z^{n-1}}{1+z^{n-1}} \right)$. Demuestre que la expresión

$$\psi(z) = \frac{1}{2} [f(z) + \varphi(z)] + \frac{1}{2} S(z) [f(z) - \varphi(z)]$$

representa la función $f(z)$ en el recinto $|z| < 1$ y la función $\varphi(z)$ en el recinto $|z| > 1$.

1089. 1) Demuestre que siendo α un número real irracional la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (z - e^{2\pi i n \alpha})}$ representa en los recintos $|z| < 1$ y $|z| > 1$ unas funciones analíticas para cada una de las cuales la circunferencia $|z| = 1$ es la frontera natural.

Sugerencia. Demuestre que la suma de la serie crece sin límite cuando $z \rightarrow e^{2\pi i m \alpha}$ a lo largo de un radio vector.

Observación. Este problema es un caso particular del siguiente teorema general:

Sea L una curva, cerrada o no cerrada, con un radio de curvatura determinado en cada punto. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge absolutamente y los puntos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ pertenecen todos a la curva L de manera que cada arco finito de la curva L contiene siempre un conjunto infinito de estos puntos, la serie $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{a_n - z}$ representa una función analítica en cualquier recinto que no contiene puntos de la curva L y para el cual esta curva es una línea singular (véase *Goursat E.*, Cours d'analyse mathématique, Vol. II, cap. XVI, 7ª ed., Gauthier—Villars, Paris, 1949).

2) Demuestre que siendo α un número real racional, la serie del punto 1) representa una función racional.

1090. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z + n} \quad (n^z = e^{z \ln n})$$

converge para $\operatorname{Re} z > 1$ y que la recta $\operatorname{Re} z = 1$ es la frontera natural de su suma.

1091. Demuestre que la función $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m!z}$ es analítica para $\operatorname{Re} z > 0$ y que la recta $\operatorname{Re} z = 0$ es su frontera natural.

1092. Demuestre que la función $f(z)$ definida en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ mediante la serie de Dirichlet $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, donde $a_n = (-1)^{n+1}$, $\lambda_{2k-1} = 2k$ y $\lambda_{2k} = 2k + e^{-2k}$ ($k = 1, 2, \dots$), puede ser prolongada analíticamente al semiplano $\operatorname{Re} z > -1$.

Sugerencia. Represente $f(z)$ en la forma $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-ze^{-2k}}) e^{-2kz}$ y demuestre que en todo recinto finito $|1 - e^{-ze^{-2k}}| < M e^{-2k}$, donde M es una constante para el recinto considerado.

Observación. Este problema muestra que la suma de la serie de Dirichlet puede no tener puntos singulares sobre la recta que limita el semiplano de convergencia.

1093*. Prolongue analíticamente al semiplano $\operatorname{Re} s > -1$ la función $f(s)$ definida en el semiplano $\operatorname{Re} s > 0$ mediante la integral de Laplace

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^t \sin e^t dt.$$

1094. La función Gamma de Euler se define en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ mediante la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (t^{z-1} = e^{(z-1) \ln t}).$$

Integrando por partes el segundo miembro de esta igualdad, demuestre que la función $\Gamma(z)$ se prolonga analíticamente a todo el plano como una función meromorfa con polos simples $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$ y que el residuo respecto al polo $-n$ es igual a $(-1)^n/n!$.

1095. Pruebe que la función Gamma puede ser prolongada analíticamente mediante la fórmula

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Sugerencia. Sustituya la función e^{-t} en la integral $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ por su desarrollo en serie de potencias.

1096. En el problema 411 ha sido demostrado que para $0 < x < 1$

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} \cos t \, dt = \Gamma(x) \cos \frac{\pi x}{2},$$

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} \sin t \, dt = \Gamma(x) \sin \frac{\pi x}{2}.$$

¿En qué recintos del plano z serán válidas las fórmulas indicadas?

1097. Demuestre que $\Gamma(z)$ puede ser prolongada a todo el recinto de existencia mediante la fórmula

$$\Gamma(z) = \frac{i}{2 \sin \pi z} \int_C e^{-w} (-w)^{z-1} dw \quad ((-w)^{z-1} = e^{(z-1) \ln(-w)}),$$

donde el contorno C se compone del corte a lo largo de la parte positiva del eje real y el origen de coordenadas se recorre en la dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.

1098. Sea $\zeta(z)$ la función Zeta de Riemann (véase el problema 844)

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (\operatorname{Re} z > 1).$$

Demuestre que $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} dw$ para $\operatorname{Re} z > 1$ y obtenga de

aquí la prolongación analítica de la función $\zeta(z)$ a todo el plano, a excepción del punto $z=1$; analice el carácter de la singularidad de la función $\zeta(z)$ en el punto $z=1$.

Sugerencia. Para la prolongación analítica considere la integral $\int_C \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1} dw$,

donde C es el contorno del problema 1097.

1099*. Sea $f(z)$ una función desarrollable en una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de radio de convergencia $R=1$. Designemos

mediante $\varphi(z)$ la suma de la serie $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$ (la función $\varphi(z)$

es la función conjugada de $f(z)$ según Borel y es una función entera, véase el problema 535).

Demuestre que para $|z| < 1$ tiene lugar la igualdad

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \varphi(zt) dt = f(z).$$

Demuestre también que la función $\int_0^{\infty} e^{-t} \varphi(zt) dt$ ofrece la prolongación analítica de la función $f(z)$ al recinto G definido del modo siguiente: a través de cada punto singular de la función $f(z)$ se traza una recta perpendicular al segmento que une este punto con el origen de coordenadas; G es el recinto convexo que contiene el círculo $|z| < 1$ y cuya frontera se compone de los puntos de las rectas descritas; si el número de estas rectas es finito, G es un polígono (método de prolongación de Borel).

1100. Verifique el método de prolongación de Borel para las series siguientes:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} z^n; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}.$$

1101. Sea en la integral de tipo de Cauchy $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$

C un contorno cerrado simple y sea $\varphi(\zeta)$ una función continua a lo largo de C . Demuestre: para que una de las funciones $F^+(z)$ y $F^-(z)$ (véase la pág. 130) sea una prolongación analítica de la otra a través de un arco $\gamma \in C$, es necesario y suficiente que $f(z) \equiv 0$ sobre el arco γ .

1102. Demuestre que, si la función $\varphi(\zeta)$ no es analítica¹⁾ en ningún punto de un arco simple no cerrado C , todos los puntos del arco C son singulares para la integral de tipo de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Sugerencia. Parta de las fórmulas de Sojotski para los valores frontera de la integral de tipo de Cauchy.

1103. Sea γ un contorno simple cerrado recorrido en la dirección positiva y compuesto por los arcos γ_1 y γ_2 con puntos extremos comunes z_1 y z_2 (fig. 31), sea G^+ el recinto interior de γ y sea G^- el recinto exterior de γ .

Sea, además,

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

donde $\varphi(\zeta) = a$, si $\zeta \in \gamma_1$, $\varphi(\zeta) = b$, si $\zeta \in \gamma_2$ (a y b son constantes complejas).

¹⁾ Es decir, no existe una función analítica que coincida con $\varphi(\zeta)$ a lo largo de algún arco perteneciente a C .

Halle las funciones $F^+(z)$ y $F^-(z)$ y prolongue analíticamente la función $F^-(z)$ al recinto G^+ :

1) a través del arco γ_1 ; 2) a través del arco γ_2 .

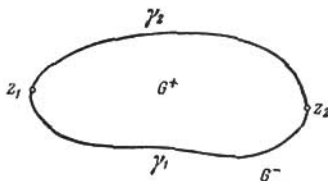


FIG. 31

1104. Sea G un recinto biconexo comprendido entre el contorno interior γ y el contorno exterior Γ y sea $\varphi(z)$ una función analítica en el recinto cerrado $G + \gamma + \Gamma$.

Demuestre que la función

$$\varphi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

puede ser prolongada analíticamente a todo el exterior del contorno γ y que la función

$$\varphi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

puede ser prolongada analíticamente a todo el interior del contorno Γ . Los contornos γ y Γ se recorren en la dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.

§ 2. PUNTOS SINGULARES DE CARÁCTER MULTIFORME. SUPERFICIES DE RIEMANN ¹⁾

Un punto de ramificación aislado $z = a$ de orden $k-1$ (k es un número natural, $k \geq 2$) de una función $w(z)$ se caracteriza por la existencia de una rama de $w(z)$ que en una vecindad del punto $z = a$ admite la representación

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{\frac{n}{k}} \quad (a \neq \infty)$$

o la representación

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\frac{n}{k}} \quad (a = \infty).$$

¹⁾ En relación con este párrafo véase [1, cap. VIII, § 6]; *B.V. Golubev*, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, 1951 (*Golubiev V. V.*, *Lecciones sobre la teoría analítica de ecuaciones diferenciales*). *Nevalinna R.*, *Uniformisierung*, Springer, Berlin, 1953.

Si sólo un número finito de coeficientes c_n de índices negativos es diferente de cero, el punto $z=a$ (o bien $z=\infty$) se llama *punto algebraico de ramificación* (p. a. r.). En el caso contrario, el punto correspondiente se llama *punto trascendente de ramificación* (punto singular esencial de carácter multiforme).

Sobre un mismo punto del z -plano la función $w(z)$ puede tener a lo sumo un conjunto numerable de diferentes puntos algebraicos y trascendentes de ramificación, de puntos regulares y de puntos singulares de carácter uniforme. En la superficie de Riemann de la función $w(z)$ sobre el z -plano estos puntos tienen vecindades que no se intersecan entre sí.

En cada vecindad de esta índole w es una función uniforme del parámetro local t :

$$w = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n t^n,$$

donde

$$t = \begin{cases} (z-a)^{\frac{1}{k}} & (a \neq \infty), \\ z^{-\frac{1}{k}} & (a = \infty). \end{cases}$$

Los puntos *logarítmicos de ramificación* (p. l. r.) son aquellos puntos $z=a$ o $z=\infty$ para los cuales existe una rama de $w(z)$ que admite una prolongación indefinida analítica al recinto $0 < |z-a| < r$ ($R < |z| < \infty$, respectivamente) y que es en él multiforme infinitamente. Esta rama de $w(z)$ en una vecindad del p. l. r. se convierte en una función analítica uniforme al pasar al parámetro $t = \text{Ln}(z-a)$, $\text{Re } t < \rho$ ($t = \text{Ln } z$, $\text{Re } t > \rho$, respectivamente). Debe tenerse en cuenta que en la superficie de Riemann sobre un mismo punto z , además de diferentes p. l. r., pueden encontrarse también otros puntos de carácter tanto uniforme como multiforme.

1105. Analice para qué valores de z los valores de $w(z)$ coinciden en todas las hojas de su superficie de Riemann sobre el z -plano, si:

1) $w = (z^2 - 9)\sqrt{z}$; 2) $w = \text{sen } z + (z^2 + 4)\text{Ln } z$;

3) $w = \text{sen } z + (z^2 + 4)^2 \text{Ln } z$.

¿Coinciden en estos mismos puntos los valores de $w'(z)$?

1106. Verifique que para cada una de las funciones:

1) $w = z\sqrt{z}$, 2) $w = z^2 \text{Ln } z$, $w(0) = 0$,

existe en el punto $z=0$ la primera derivada que, además, es igual para todas las ramas, mientras que la segunda derivada finita no existe.

En los problemas 1107—1115 desarrolle cada una de las funciones indicadas $w(z)$ en serie de potencias del parámetro local t en las vecindades de todos los puntos de su superficie de Riemann situados sobre los z -puntos dados; indique los recintos de convergencia de las series obtenidas.

1107. $w = \frac{1}{1 + \sqrt{2-z}}$, $z=1$, $z=2$.

1108. $w = \sqrt{\sqrt{z-1} - 2}$, $z=1$, $z=5$, $z=\infty$.

1109. $w = \sqrt{1 + \sqrt{z-1}}$, $z=1$, $z=2$, $z=\infty$.

1110. $w = \sqrt[3]{1 + \sqrt{z-1}}$, $z=1$, $z=2$, $z=\infty$.

$$1111. \omega = \sqrt{(V\bar{z} - a)(V\bar{z} - b)}, \quad z = \infty \quad (a \neq b).$$

$$1112. \omega = e^{\frac{1}{V\bar{z}}}, \quad z = 0. \quad 1113. \omega = \frac{\operatorname{sen} V\bar{z}}{z^2}, \quad z = 0.$$

$$1114. \omega = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{z}, \quad z = 0. \quad 1115. \omega = \sqrt{\operatorname{sen} z}, \quad z = 0.$$

En los problemas 1116—1122 se requiere hallar los puntos del z -plano sobre los cuales existe al menos un punto singular de la función multiforme dada, así como indicar el carácter de todos los puntos de la superficie de Riemann situados sobre cada uno de estos puntos del z -plano.

$$1116. \operatorname{sen} \frac{1}{V\bar{z}-1}. \quad 1117. \operatorname{sen} \frac{1}{1+V\bar{z}}. \quad 1118. \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{1+V\bar{z}}}.$$

$$1119. \frac{1}{\operatorname{sen} V\bar{z}}. \quad 1120. \sqrt[3]{V\bar{z} + V\bar{2} - z}.$$

$$1121. \operatorname{tg}(i \operatorname{Ln} z). \quad 1122. \operatorname{tg}\left(\frac{i}{4} \operatorname{Ln} z\right).$$

Si la función $w=f(z)$ es uniforme y su función inversa $z(w)$ es multiforme, para hallar los puntos algebraicos de ramificación de la función $z(w)$ es necesario hallar los ceros de $f'(z)$ y los polos múltiples de $f(z)$ y estudiar el comportamiento de $f(z)$ en el infinito. Resulta que al punto $z_0 \neq \infty$ corresponde un p.a.r. de orden $k-1$ de la función $z(w)$, si el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en una vecindad de z_0 es o bien de la forma

$$f(z) = w_0 + \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (c_k \neq 0)$$

o bien de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (c_{-k} \neq 0).$$

Si $z_0 = \infty$, estos desarrollos deben ser de la forma

$$f(z) = \sum_{n=k}^{-\infty} c_n z^n \quad (c_k \neq 0)$$

o

$$f(z) = w_0 + \sum_{n=-k}^{-\infty} c_n z^n \quad (c_{-k} \neq 0).$$

En los problemas 1123—1129 determine las singularidades de $z(w)$, si w es la función dada

$$1123. \omega = z(1-z). \quad 1124. \omega = z^3 - 3z. \quad 1125. \omega = \frac{z}{(1+z)^2}.$$

$$1126. \omega = \left(\frac{z}{1-z}\right)^2. \quad 1127. \omega = \frac{z-a}{z^2-1} \quad (0 < a < 1).$$

1128. $w = P_n(z)$ (polinomio de n -ésimo grado).

1129. $w = R(z)$ (función racional).

En los problemas 1130—1138 analice la transformación que realiza la función $w(z)$, construya la superficie de Riemann R sobre el w -plano y divida el z -plano en recintos correspondientes a las hojas o semihojas de R .

1130. $w = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Considere el caso límite $n \rightarrow \infty$.

1131. $w = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n$. 1132. $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$. 1133. $w = \frac{z}{(1-z)^2}$.

1134. $w = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$. Halle el grupo de transformaciones lineales respecto al cual la función w es invariante y explique qué transformaciones de la superficie de Riemann corresponden a las transformaciones del grupo.

1135. $w = \frac{z}{(1+z^n)^2}$. 1136. $w = z - \frac{z^n}{n}$. 1137. $w = \frac{1}{z} + \frac{z^n}{n}$.

1138. $w = T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z)$, $n \geq 1$ ($T_n(z)$ son los polinomios de Chébyshév).

En los problemas 1136—1142 halle las singularidades de las funciones inversas a las dadas.

1139. $w = e^{\frac{1}{z}}$. 1140. $w = e^t \left(z - \frac{1}{z}\right)$ (t es un número complejo).

1141. $w = \cos z + \operatorname{sen} z$. 1142. $w = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$.

En los problemas 1143—1151 construya las superficies de Riemann sobre el w -plano.

1143. $w = \cos z$. 1144. $w = \operatorname{sen} z$. 1145. $w = \operatorname{tg} z$.

1146. $w = \operatorname{ctg} z$. 1147. $w = \operatorname{ch} z$. 1148. $w = \operatorname{sh} z$.

1149. $w = \operatorname{th} z$. 1150. $w = \operatorname{cth} z$. 1151. $w = z + e^z$.

1152. Considerando dada la superficie de Riemann sobre el w -plano de una función racional $w = R(z)$, construya las superficies de Riemann de la función $z(w)$, si: 1) $w = R(e^z)$; 2) $w = R(\operatorname{sen} z)$;

En los problemas 1153—1158 construya las superficies de Riemann (sobre el z -plano) de las funciones dadas.

1153. 1) $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$; 2) $w = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$;

3) $w = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (z-a_k)}$ (considere por separado los casos de n par e impar)

1154. 1) $w = \sqrt[3]{z-a}$; 2) $w = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$;

3) $w = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)(z-c)}$; 4) $w = \sqrt[3]{\prod_{k=1}^n (z-a_k)}$, $n > 3$.

$$1155. \omega = \sqrt[n]{(z-a)(z-b)(z-c)}, \quad n > 3.$$

$$1156. \omega = \sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-b)^2}} + \sqrt{z-c}.$$

$$1157. \omega = \sqrt[3]{\sqrt{z}-1}. \quad 1158. \omega = \sqrt{\operatorname{sen} z}.$$

En los problemas 1159—1164 analice las transformaciones y construya las superficies de Riemann de las funciones algebraicas $\omega(z)$ y $z(\omega)$.

$$1159. \omega^2 + z^2 = 1. \quad 1160. \omega^2 = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Sugerencia. Haga uso de la solución del problema 1133.

$$1161. \omega^3 + z^3 - 3\omega z = 0.$$

Sugerencia. Haga uso de la representación paramétrica

$$z = \frac{3t}{1+t^3}, \quad \omega = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

$$1162. \omega^2 = \frac{z^3}{1-z}.$$

Sugerencia. Haga uso de la representación paramétrica

$$z = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \omega = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

$$1163. \omega^2 = z^2 \frac{1+z}{1-z}.$$

$$\textit{Sugerencia. Tome } z = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \omega = t \frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

$$1164. \omega^n = \frac{z^n}{(1+z^n)^2}.$$

Sugerencia. Considere por separado los casos de n par e impar.

Si $z=a$ es un punto singular para una de las ramas $f(z)$ de la función $\omega(z)$, se llama *recinto de indeterminación* de $f(z)$ en el punto $z=a$ al conjunto de los valores frontera de $f(z)$ que se obtienen de sus valores en una vecindad de $z=a$ sobre $|z-a| < r$ para $r \rightarrow 0$. Para los p. a. r. y los polos el recinto de indeterminación consta de un punto. Si la función es uniforme y el punto a es un punto singular esencial aislado, entonces, según el teorema de Sojotski—Cassorati—Weierstrass, el recinto de indeterminación cubre todo el plano (véase también el problema 618). Para puntos trascendentes y logarítmicos de ramificación, así como para puntos singulares no aislados, el recinto de indeterminación puede tener una estructura más compleja (véase el libro: *V. V. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1951 (Gólubiev V. V., Lecciones sobre la teoría analítica de ecuaciones diferenciales), cap. I, § 7.*

En los problemas 1156—1176 determine las singularidades de las funciones y halle los recintos de indeterminación en los puntos trascendentes y logarítmicos de ramificación.

1165. $w = (\sqrt[6]{z})^4$. 1166. $w = (\sqrt[n]{z})^m$ (n y m son números naturales).

1167. $w = e^{\frac{1}{\sqrt{z}-1}}$. 1168. $w = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$. 1169. $w = \operatorname{tg} \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$.

1170. $w = e^{(\operatorname{Ln} z)^n}$ (n es un número entero). 1171. $w = z^z = e^{z \operatorname{Ln} z}$.

1172. $w = \operatorname{sen} \operatorname{Ln} z$. 1173. $w = \frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z}$. 1174. $w = z + \operatorname{Ln} z$.

1175. $w = \frac{1}{z} \operatorname{Arc} \operatorname{sen} z$. 1176. $w = \frac{1}{z^2} + \operatorname{Arctg} z$.

En los problemas 1177—1180 construya las superficies de Riemann de las funciones dadas.

1177. $w = z^a$ (a es un número complejo).

1178. $w = \operatorname{Ln} [(z-a)(z-b)]$.

1179. $w = \operatorname{Ln} [(z-a)(z-b)(z-c)]$. 1180. $w = \operatorname{Ln} \operatorname{sen} z$.

1181. Sea $\zeta = \varphi(z)$ una función analítica uniforme o multiforme, sea $R_{z, \varphi}$ su superficie de Riemann sobre el z -plano y sea $w = f(\zeta)$ una función analítica uniforme definida en el recinto G_ζ . ¿En qué recintos de $R_{z, \varphi}$ cada una de las expresiones indicadas:

1) $w(z) = f[\varphi(z)]$, 2) $w(z) = f(z) + \varphi(z)$, 3) $w(z) = f(z)\varphi(z)$

define una función analítica única?

Considere, en particular, el caso en que φ es una función algebraica o inversa a una meromorfa y f es una función racional o trascendente meromorfa.

En los problemas 1182—1219 explique cuáles de las funciones dadas $w(z)$ se descomponen en diferentes funciones analíticas y cuáles no se descomponen; determine también sus singularidades y construya, donde se indica, las superficies de Riemann (n y m son números naturales).

1182. $w = \sqrt{z^2}$ (compare con $(\sqrt{z})^2$).

1183. $w = \sqrt[6]{z^4}$ (compare con $(\sqrt[6]{z})^4$).

1184. $w = \sqrt[n]{z^m}$ (compare con $(\sqrt[n]{z})^m$).

1185. $w = \sqrt[n]{e^z}$. 1186. $w = \sqrt[n]{\operatorname{sen} z}$. 1187. $w = \operatorname{Ln} z^i$.

1188. $w = \operatorname{Ln} e^z$. 1189. $w = \operatorname{Ln} \left(z - \frac{1}{z} \right)$.

1190. $w = \operatorname{Ln} (e^z - 1)$. Construya la superficie de Riemann.

1191. $w = \operatorname{Ln} \operatorname{sen} z$. Construya la superficie de Riemann.

1192. $w = \operatorname{Ln} \operatorname{tg} z$. Construya la superficie de Riemann.

1193. $w = \operatorname{Arccos}(\cos z)$ (compare con $\cos(\operatorname{Arccos} z)$).

1194. $w = \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} z)$ (compare con $\operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} z)$).

1195. 1) $w = (z^{r_1})^{r_2}$ (r_1 y r_2 son números racionales). Compare con $(z^{r_2})^{r_1}$. Considere, en particular, $r_1 = \frac{2}{3}$ y $r_2 = \frac{3}{2}$; 2) $w = z^{r_1} z^{r_2}$; 3) $w = z^{r_1} + z^{r_2}$.

1196. $w = \sqrt[n]{z} \sqrt[m]{1-z}$. 1197. $w = \sqrt[n]{\sqrt[m]{z}-1}$.

1198. $w = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{z+1}}$. 1199. $w = \sqrt[n]{\text{Ln } z}$. Construya la superficie

de Riemann.

1200. $w = \text{Ln Ln } z$. Construya la superficie de Riemann.

1201. $w = [\text{Ln}(z-1)]^i$.

1202. $w = \sqrt[n]{\text{Arcsen } z}$. Construya la superficie de Riemann.

1203. $w = \text{Arcsen Ln } z$. Construya la superficie de Riemann.

1204. $w = \text{Ln}(\sqrt[n]{z-1})$. Construya la superficie de Riemann.

1205. $w = \text{Ln} \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$. 1206. $w = \text{Arcsen} \frac{\sqrt{z}}{1+z}$.

1207. $w = \text{Ln } z^\alpha$ (α es un número real).

1208. $w = \sqrt{z} + \text{Ln } z$. Construya la superficie de Riemann.

1209. $w = \text{Ln } z + \text{Ln } z$. 1210. $w = \text{Arcsen } z + \text{Arccos } z$.

1211. $w = \text{Arctg } z + \text{Arctg } z$. 1212. $w = \text{Arth } z - \text{Arcth } z$.

1213. Construya la superficie de Riemann de la función $w = (\text{Ln } z)^i$ y analice los conjuntos de los valores frontera de w para un p. l. r. sobre el punto $z=0$ que se obtienen cuando:

- 1) $r \rightarrow 0$, $\varphi = \text{const}$; 2) $r \rightarrow 0$, $\alpha < \varphi < \beta$; 3) $r = \text{const}$, $\varphi \rightarrow \pm \infty$; 4) $r \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \pm \infty$.

1214. Sea $\chi(z)$ una función analítica uniforme en el círculo $|z| < 1$ que no puede ser prolongada más allá de la circunferencia $|z|=1$.

Analice para qué valores de a las funciones indicadas se descomponen en diferentes funciones analíticas y para qué valores no se descomponen.

1) $w = \chi(z) + \sqrt[n]{z-a}$; 2) $w = \chi(z) \text{Ln}(z-a)$;

3) $w = \chi(a+z^n)$; 4) $w = \chi(a+e^z)$.

1215. Analice el problema de descomposición de las funciones:

1) $w = \sqrt[n]{\xi-a}$, 2) $w = \text{Ln}(\xi-a)$ donde $\xi = \chi^{-1}(z)$ y χ es la función del problema 1214.

1216. Analice el comportamiento de diferentes funciones analíticas definidas mediante las igualdades:

1) $w = \chi(z) (\text{Ln } z)^i$; 2) $w = \chi(z) [\text{Ln}(z-1)]^i$, donde $\chi(z)$ es la función del problema 1214.

Halle, en particular, los recintos de indeterminación en una vecindad de los p. l. r.

Sugerencia. Haga uso de la solución del problema 1213.

1217. Sea $f(z)$ una función entera.

Construya las superficies de Riemann de las funciones:

1) $w = \sqrt{f(z)}$; 2) $w = \operatorname{Ln} f(z)$;

3) $w [f(z)]^\alpha$ (α es un número irracional).

1219. Construya la superficie de Riemann de la función

$$w = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}}.$$

1219. Sea $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n} + 2}{(2^n + 1)(2^n + 2)}$. Construya las superficies

de Riemann de las funciones

1) $w = \sqrt{f(z)}$; 2) $w = \operatorname{Ln} f(z)$; 3) $w = \operatorname{Ln} f\left(\frac{z}{2}\right) + \operatorname{Ln} f\left(\frac{1}{2z}\right)$.

Sugerencia. Demuestre previamente que la función $f(z)$ es de una hoja en el círculo $|z| < 1$ y que tiene la circunferencia $|z| = 1$ como su frontera natural.

CAPITULO IX

TRANSFORMACIONES CONFORMES (CONTINUACION)

§ 1. FORMULA DE CHRISTOFFL — SCHWARZ¹⁾

Sea P un polígono acotado del w -plano, sean A_k ($k=1, 2, \dots, n$) sus vértices, dispuestos en el orden del recorrido positivo de P respecto a su interior, y sean $\alpha_k\pi$ sus ángulos interiores $\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k = n-2\right)$. La función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el interior del polígono P , se determina mediante la fórmula de Christoffel—Schwarz:

$$w = f(z) = C \int_0^z \prod_{k=1}^n (z-a_k)^{\alpha_k-1} dz + C_1, \quad (1)$$

donde $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$ son los puntos del eje x correspondientes a los vértices A_1, A_2, \dots, A_n del polígono P ; C y C_1 son constantes complejas.

En la fórmula (1) figuran los puntos a_k , que son las imágenes de los vértices dados A_k del polígono y que deben ser determinados, y las constantes C y C_1 . De los n puntos a_k tres se pueden escoger arbitrariamente, ya que mediante una transformación homográfica del semiplano superior en sí mismo pueden ser transformados en los tres puntos dados. La determinación de los restantes $n-3$ puntos y de las constantes complejas C y C_1 (es decir, de un total de $n+1$ parámetros reales) constituye la dificultad principal al aplicar en la práctica la fórmula (1). En un principio, los parámetros incógnitos pueden ser hallados de las consideraciones siguientes. La longitud l_i del lado $A_i A_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) es igual a

$$l_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f'(x)| dx = |C| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \prod_{k=1}^n |x-a_k|^{\alpha_k-1} dx.$$

La longitud l_n del lado $A_n A_1$ es igual a

$$l_n = |C| \left[\int_{a_n}^{\infty} \prod_{k=1}^n |x-a_k|^{\alpha_k-1} dx + \int_{-\infty}^{a_1} \prod_{k=1}^n |x-a_k|^{\alpha_k-1} dx \right].$$

¹⁾ En relación con este parágrafo véase [1, capítulo VIII, § 7], [2, capítulo II, § 3] y *W. Koppenfels* und *F. Stallmann*, *Praxis der Konformen Abbildung*, Springer—Verlag, Berlin, Göttingen Heidelberg, 1959 (este libro contiene también un catálogo de transformaciones de diferentes tipos de polígonos).

Formando las razones de las longitudes de $n-3$ lados con una de los tres restantes, obtenemos $n-3$ ecuaciones independientes para la determinación de

$n-3$ puntos a_k . Entonces, la función $t = \int_0^z \prod_{k=1}^n (z-a_k)^{\alpha_k-1} dz$ determinará

la transformación del semiplano superior en un polígono P' del t -plano semejante al dado. Después construimos la transformación lineal $w = Ct + C_1$ que transforma P' en P .

La transformación del semiplano superior en el exterior del mismo polígono se realiza mediante la función

$$F(z=C) \int_0^z \prod_{k=1}^n (z-a'_k)^{\beta_k-1} \frac{dz}{(z-b)^2(z-\bar{b})^2} + C_1, \quad (2)$$

donde b es el punto del semiplano superior que corresponde al punto infinito del w -plano; a'_k son los puntos correspondientes a los vértices A_k del polígono (ahora $\infty > a'_1 > a'_2 > \dots > a'_n > -\infty$) y $\beta_k\pi$ son los ángulos exteriores del polígono

$$\left(\beta_k = 2 - \alpha_k, \quad \sum_{k=1}^n \beta_k = n + 2 \right).$$

1220. Demuestre que, si uno de los vértices del polígono es la imagen del punto infinito, por ejemplo, $a_n = \infty$, la función

transformadora es de la forma $f(z) = C \int_0^z \prod_{k=1}^{n-1} (z-a_k)^{\alpha_k-1} dz + C_1$.

Sugerencia. Realice la transformación $\zeta = -\frac{1}{z}$, si todos los $a_k \neq 0$, y $\zeta = -\frac{1}{z-a}$, donde $a \neq a_k$, si uno de los puntos $a_k = 0$ ($k=1, 2, \dots, n-1$).

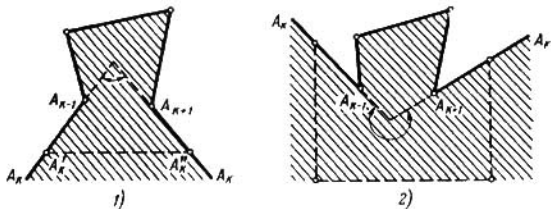


FIG. 32

1221. Demuestre que, si uno o varios vértices A_k se encuentran en el ∞ , la fórmula (1) sigue siendo válida, siempre que por $\alpha_k\pi$ se comprenda el ángulo entre los rayos correspondientes en el punto finito de intersección de los mismos, tomado con el signo *menos*.

Sugerencia. Sea $A_k = \infty$. Si $\alpha_k < 1$, considere el polígono P' cortado de P por el segmento $A'_k A''_k$, donde A'_k y A''_k se hallan lo suficientemente lejos en los lados $A_{k-1}A_k$ y $A_{k+1}A_k$ (fig. 32,1) y en la fórmula (1) para P' pase al límite

$A_k' \rightarrow \infty, A_k'' \rightarrow \infty$. Si $\alpha_k \geq 1$, una $A_k'A_k''$ mediante una quebrada perteneciente a P (véase la fig. 32,2) y aléjela al infinito, ampliándola semejantemente.

1222. Determine las magnitudes α_k , que figuran en la fórmula (1) para los vértices infinitamente alejados de los "polígonos" formados por rayos paralelos y representados en la fig. 33.

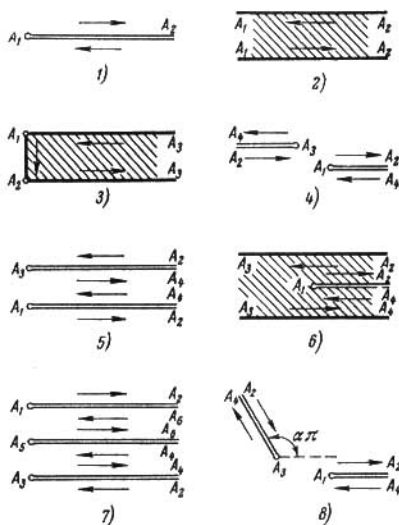


FIG. 33

Sugerencia. Pase al límite análogamente a lo recomendado en el problema 1221.

1223. 1) Demuestre que la función que transforma el círculo unidad $|z| < 1$ en un polígono P , situado en una parte finita del plano, es de la forma.

$$f(z) = C \int_0^z \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz + C_1,$$

donde $a_k = e^{i\varphi_k}$ ($\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n$) son los puntos de la circunferencia $|z| = 1$ correspondientes a los vértices A_k recorridos en la dirección positiva y $\alpha_k \pi$ son los ángulos interiores del polígono P .

2) Demuestre que la función que transforma el círculo unidad $|z| < 1$ en el exterior del mismo polígono P de manera que el

punto $z=0$ se transforma en el punto $w=\infty$ es de la forma

$$f(z) = C \int \prod_{k=1}^n (z - a'_k)^{\beta_k - 1} \frac{dz}{z^2},$$

donde $a'_k = e^{i\varphi'_k}$ ($\varphi'_1 > \varphi'_2 > \dots > \varphi'_n$) y $\beta_k \pi$ son los ángulos exteriores de P .

1224. Halle todos los casos de inversión uniforme de la fórmula de Christoffel—Schwarz (1), es decir, explique para qué polígonos P la función inversa $z=z(w)$ resulta definida y es uniforme en todo el w -plano.

Sugerencia. Los polígonos, que se obtienen de P mediante un número par de reflexiones especulares en sus lados, deben enlazar todo el w -plano sin vacíos ni superposiciones.

En los problemas 1225—1227 transforme el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en los recintos indicados P del w -plano observando la correspondencia dada entre los vértices de P y los puntos del eje real. Determine también el período o los períodos de la función inversa $z(w)$, el grupo G de sus transformaciones lineales invariantes del w -plano y el recinto fundamental B de este grupo (véase la pág. 38).

1225. 1) P es la franja $0 < v < h$; $w(-\infty, \infty) \rightarrow z(0, \infty)$ ¹¹.

2) P es la franja $0 < v < h$; $w(-\infty, \infty) \rightarrow z(-1, 1)$.

1226. P es la semifranja $0 < u < \pi$, $v < 0$; $w(0, \pi, -i\infty) \rightarrow z(1, -1, \infty)$.

1227. 1) P es un triángulo rectángulo de ángulos agudos $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$; $w(0, \omega, \omega + \frac{i\omega}{\sqrt{3}}) \rightarrow z(0, 1, \infty)$.

2) P es un triángulo isósceles;

$$w(0, \omega, \omega + i\omega) \rightarrow z(0, 1, \infty).$$

3) P es un triángulo equilátero:

$$w\left(0, \omega, \omega \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow z(0, 1, \infty).$$

1228. Halle los recintos del plano w en los que la función

$$w(z) = \int_0^z t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

$$(\arg w'(x) = 0, \text{ para } 0 < x < 1)$$

transforma el semiplano superior $\text{Im } z > 0$, si:

¹¹ Aquí y en lo sucesivo el símbolo $w(A, B, \dots) \rightarrow z(a, b, \dots)$ representa la correspondencia de puntos del w -y del z -planos: $A \leftrightarrow a, B \leftrightarrow b, \dots$

- 1) $0 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 2$; considere los casos: a) $\alpha + \beta < 1$, b) $\alpha + \beta = 1$, c) $\alpha + \beta > 1$, en particular, $\alpha + \beta = 2$ y $\alpha = \beta = \frac{3}{2}$.
- 2) $1 \leq \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 0$, $\alpha + \beta \geq 1$; considere los casos: a) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, b) $\alpha + \beta = 1$, c) $\alpha = 2$, d) $\alpha = 2$, $\beta = -\frac{1}{2}$, e) $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

1229. 1) Halle los recintos del plano w en los que la función

$$w(z) = \int_0^z \frac{t-\lambda}{\sqrt{t(t-1)}} dt = \sqrt{z(z-1)} + (1-2\lambda) \left[\ln \sqrt{z} + \sqrt{z-1} \right] - \frac{i\pi}{2}$$

transforma el semiplano superior. Considere los casos: $\lambda < 0$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ y $\lambda > 1$.

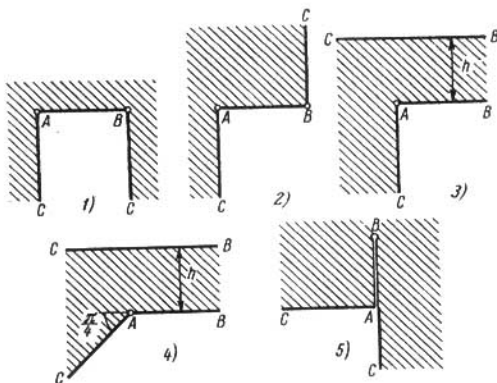


FIG. 34

2) Halle los recintos del plano w en los que la función

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_1^z \frac{t-\lambda}{\sqrt{t(t-1)}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi i} \left[\ln(\sqrt{z} + \sqrt{z-1}) - \lambda \sqrt{\frac{z-1}{z}} \right]$$

transforma el semiplano superior. Considere los casos: $\lambda < 0$, $0 < \lambda < 1$ y $\lambda > 1$.

1230. Transforme el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en los recintos del w -plano indicados en la fig. 34, con la correspondencia de puntos dada.

- 1) $w(A=0, B=1, C=\infty) \rightarrow z(0, 1, \infty)$;
- 2) $w(A=0, B=1, C=\infty) \rightarrow z(0, 1, \infty)$;
- 3) $w(A=0, B=\infty, C=\infty) \rightarrow z(0, 1, \infty)$;
- 4) $w(A=0, B=\infty, C=\infty) \rightarrow z(0, 1, \infty)$;
- 5) $w(A=0, B=ia, C=\infty) \rightarrow z(0, 1, \infty)$.

1231. Transforme el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en los recintos del w -plano indicados en la fig. 35 ($0 < \theta < 1$).

- 1) $w(A, B=0, C=\infty) \rightarrow z(0, 1, \infty)$;
- 2) $w(A, B=0, C=\infty) \rightarrow z(0, 1, \infty)$.

En el caso en que θ sea un número racional ($\theta = p/q$), exprese las integrales obtenidas mediante funciones elementales.

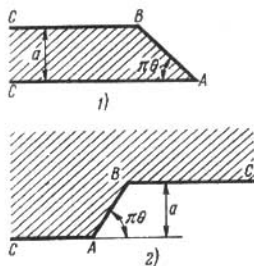


FIG. 35

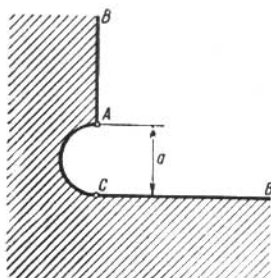


FIG. 36

1232. Transforme el semiplano superior en el recinto indicado en la fig. 36 (el arco AC es una semicircunferencia)

$$w(A=ai, B=\infty, C=0) \rightarrow z(0, 1, \infty).$$

Sugerencia. Mediante la transformación $\zeta = \frac{a}{w}$ se reduce a un caso particular del problema 1231, 2).

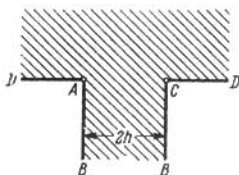


FIG. 37

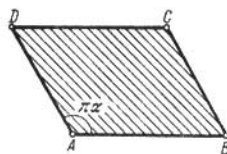


FIG. 38

1233. Transforme el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el recinto del w -plano indicado en la fig. 37, con la condición

$$w(A=-h, B=\infty, C=h, D=\infty) \rightarrow z(-1, 0, 1, \infty).$$

(La posibilidad de esta transformación se desprende del principio de simetría.)

1234. Transforme el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el rombo del w -plano de ángulo $\pi\alpha$ en el vértice A y de lado d (fig. 38). La correspondencia de puntos se da mediante el esquema

$$\omega(A=0, B=d, C=d(1+e^{i\pi\alpha}), D=de^{i\pi\alpha}) \rightarrow z(0, 1, \infty, -1).$$

Justifique la posibilidad de esta transformación.

1235. Transforme el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en los recintos del w -plano indicados en la fig. 39. Los parámetros a y b ($a > 0$,

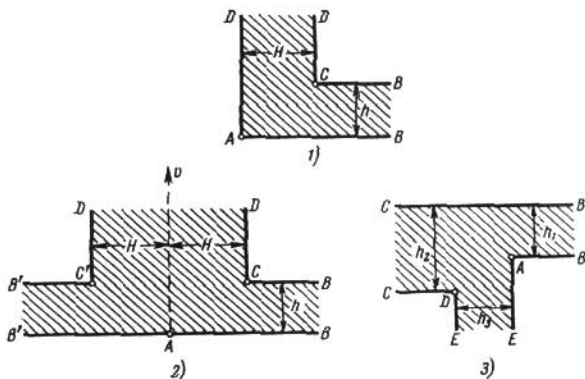


FIG. 39

$b > 0$)—las preimágenes de los vértices correspondientes—no se pueden escoger arbitrariamente y deben ser hallados.

1) $\omega(A=0, B=\infty, C=H+ih, D=\infty) \rightarrow z(0, 1, a, \infty)$.

2) $\omega(B=\infty, C=H+ih, D=\infty, C'=-H+ih, B'=\infty) \rightarrow z(1, a, \infty, -a, -1)$.

Sugerencia. Haga un corte complementario a lo largo del eje imaginario y recurra al principio de simetría.

3) $\omega(A=0, B=\infty, C=\infty, D=-h_3-i(h_2-h_1), E=\infty) \rightarrow z(0, 1, a, \infty, -b)$.

1236. Halle la función $w(z)$ que transforma el círculo $|z| < 1$ en el interior de un polígono regular de n lados, que tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de los vértices en el punto $w=1$, con la condición $w(0)=0$ y $w'(0) > 0$.

2) Transforme el círculo $|z| < 1$ en el exterior del mismo polígono de n lados de manera que $w(0) = \infty$ y $w(x) > 0$ ($0 < x < 1$). Determine c_{-1} en el desarrollo $w(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \dots$.

1237. 1) Halle la función $w(z)$ que transforma el círculo $|z| < 1$ en el interior de una estrella regular de cinco puntas, que tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de los vértices en el punto $w = 1$; las condiciones de normalización: $w(0) = 0$ y $w'(0) < 0$.

2) Transforme el círculo $|z| < 1$ en el exterior de la misma estrella; $w(0) = \infty$ y $w(x) > 0$ ($0 < x < 1$); determine c_{-1} en el desarrollo $w(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \dots$.

1238. Halle el recinto en el que la función

$$w(z) = \int_0^z \frac{(1+t^n)^\lambda dt}{(1-t^n)^{\frac{2}{n} + \lambda}}, \quad w'(0) > 0, \quad -1 < \lambda < 1 - \frac{2}{n},$$

transforma el círculo unidad $|z| < 1$.

1239. Transforme el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el polígono regular de n lados del w -plano, que tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de los vértices en el punto $w = 1$; la normalización: $w(i) = 0$ y $w(0) = 1$.

1240. Sea el recinto P del w -plano el exterior de la "estrella" compuesta por n segmentos que salen del punto $w = 0$ (fig. 40).

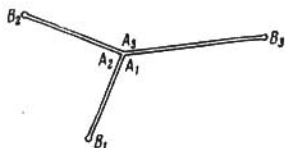


FIG. 40

Sean A_k los vértices de P en el origen de coordenadas, $\alpha_k \pi$ los ángulos correspondientes $\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2 \right)$, B_k los vértices de P en los extremos de los segmentos de la estrella ($A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ están dispuestos en el orden del recorrido positivo de P) y $l_k = \overline{A_k B_k}$ las longitudes de los segmentos de la estrella. Demuestre que la función $w = f(z)$, $f(0) = \infty$, que transforma el círculo unidad $|z| < 1$ en P ,

es de la forma

$$f(z) = \frac{C}{z} \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k},$$

donde C es una constante compleja y $a_k = e^{i\psi_k}$ son los puntos de la circunferencia $|z| = 1$ correspondientes a A_k . Los puntos $b_k = e^{i\psi_k}$, correspondientes a los vértices B_k , son raíces de la ecuación

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z - a_k} - \frac{1}{z} = 0. \quad (3)$$

¿Cómo determinar los parámetros C , a_k , b_k ?

Sugerencia. Si se emplea la prolongación según el principio de simetría la función $f(z)$ se multiplica por factores constantes y por esto la función

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

es uniforme en el z -plano.

Observación. La fórmula obtenida ofrece inmediatamente la solución de una serie de problemas del capítulo II, por ejemplo, de los problemas 320, 2); 321, 1); 323, y 329.

Se recomienda resolver de nuevo los problemas señalados y determinar las constantes que figuran en la fórmula general.

1241. Transforme el exterior de la quebrada de dos eslabones (fig. 41) en el exterior del círculo $|z| > 1$ con la condición: $w(\infty) = \infty$ y $w'(\infty) > 0$.

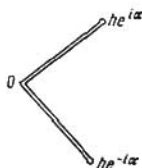


FIG. 41

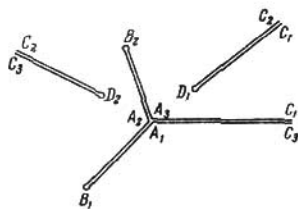


FIG. 42

1242. Demuestre que la función $w = f(z)$, que transforma el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el exterior de la estrella del problema 1240, es de la forma

$$f(z) = C \frac{\prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}}{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)},$$

donde z_0 es el punto del semiplano superior que pasa al ∞ .

1243. Sea P el recinto del w -plano limitado por el rayo $[0, \infty)$, por $n-1$ segmentos que van del punto $w = 0$ a los puntos B_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) y por $m-1$ rayos que van de los puntos D_s ($s = 1,$

2, ..., m-1) al ∞ y que al ser prolongados en la dirección contraria pasan por el origen de coordenadas (fig. 42). Sean A_k ($k=1, 2, \dots, n$) los vértices de P en el origen, $\alpha_k\pi$ los ángulos correspondientes, C_j ($j=1, 2, \dots, m$) los vértices de P en el ∞ , $\gamma_j\pi$ los ángulos correspondientes y $A_1B_1A_2 \dots A_nC_1D_1 \dots C_m$ el recorrido positivo de la frontera de P . Demuestre que la función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en P , es de la forma

$$f(z) = C \frac{\prod_{k=1}^n (z-a_k)^{\alpha_k}}{\prod_{j=1}^m (z-c_j)^{\gamma_j}}, \quad (4)$$

donde a_k, c_j son los puntos del eje x correspondientes a los vértices A_k, C_j . Los puntos b_i, d_s del eje x correspondientes a los vértices B_i, D_s son raíces de la ecuación

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z-a_k} - \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{z-c_j} = 0. \quad (5)$$

¿Cómo determinar los parámetros C, a_k, b_i, c_j, d_s ? ¿Qué cambiará si uno de los parámetros a_k, b_i, c_j, d_s resulta igual al ∞ ?

Sugerencia. Demuestre que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z-a_k} - \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{z-c_j} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (z-b_i) \prod_{s=1}^{m-1} (z-d_s)}{\prod_{k=1}^n (z-a_k) \prod_{j=1}^m (z-c_j)}.$$

1244. Demuestre que la fórmula (4) del problema 1243 es válida también para recintos P cuya frontera contiene dos rayos $[0, \infty)$ (fig. 43). En este caso el vértice del origen de coordenadas se toma en consideración también en el caso en que de él salen solamente dos rayos que forman una recta.

En los problemas 1245—1249 transforme en el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ los recintos del w -plano indicados en las figuras correspondientes con las condiciones dadas y determine los parámetros a y b ($a > 0, b > 0$).

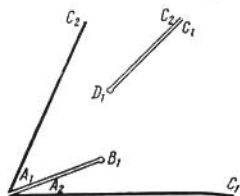


FIG. 43

1245. El recinto indicado en la fig. 44,

$$w(A_1=0, B=he^{i\pi\alpha}, A_2, C=\infty) \rightarrow z(-1, b, 1, \infty).$$

1246. El recinto indicado en la fig. 45,

$$w(A_1=0, B=ih, A_2, C=\infty, D=iH, C_2=\infty) \rightarrow$$

$$\rightarrow z\left(-a, 0, a, \frac{1}{a}, \infty, -\frac{1}{a}\right).$$

1247. El recinto indicado en la fig. 46,

$$\omega(A_1=0, B_1=-he^{i\pi\alpha}, A_2, B_2=he^{i\pi\alpha}, A_3, C=\infty) \rightarrow z(-1, -b, 0, b, 1, \infty).$$



FIG. 44

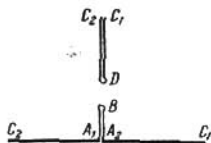


FIG. 45

1248. El recinto indicado en la fig. 47,

$$\omega(A_1=0, B=he^{i\pi\alpha_1}, A_2, C_1=\infty, D=He^{i\pi\alpha_2}, C_2=\infty) \rightarrow z\left(-a, 0, b, \frac{1}{b}, \infty, -\frac{1}{a}\right).$$



FIG. 46

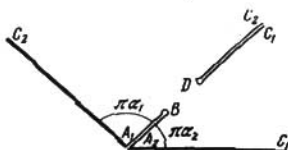


FIG. 47

1249. 1) El recinto indicado en la fig. 48, 1,

$$\omega(\infty) = \infty, \omega(\pm 1) = \pm 1.$$

2) El recinto indicado en la fig. 48, 2 (los ángulos entre los cortes son de $\frac{\pi}{n}$; los segmentos extremos forman con los rayos correspondientes del eje real ángulos de $\frac{\pi}{2n}$),

$$\omega(\infty) = \infty, \omega(A_1, A_n) \rightarrow z(-1, 1).$$

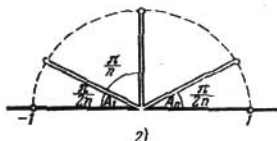
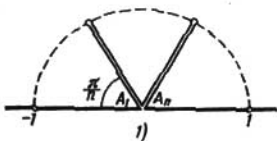


FIG. 48

1250. Sea el recinto P del w -plano una franja horizontal de anchura H con cortes que van al ∞ hacia la izquierda de los puntos B_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) y hacia la derecha de los puntos D_i ,

($s = 1, 2, \dots, m-1$) (fig. 49). Demuestre que la función $w = f(z)$, que transforma el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el recinto P , es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{\pi} \ln(z - a_k) - \sum_{j=1}^m \frac{l_j}{\pi} \ln(z - c_j) + C, \quad (6)$$

donde a_k, c_j son los puntos del eje x correspondientes a los vértices A_k y C_j del recinto P ; h_k son las distancias entre los cortes

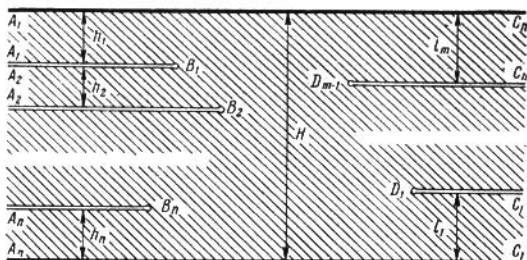


FIG. 49

que van hacia la izquierda y l_j de los que van hacia la derecha. Los puntos b_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) y d_s ($s = 1, 2, \dots, m-1$) del eje x correspondientes a los vértices B_i y D_s son raíces de la ecuación

$$\sum_{k=1}^n \frac{h_k}{z - a_k} - \sum_{j=1}^m \frac{l_j}{z - c_j} = 0. \quad (7)$$

¿Cómo determinar los parámetros C, a_k, b_i, c_j, d_s ? ¿Qué cambiará si uno de los parámetros a_k, b_i, c_j, d_s es igual al ∞ ?

Sugerencia. El problema se reduce al problema 1244. Se puede también buscar la función $f'(z)$ que es uniforme o partir directamente de la fórmula de Christoffel—Schwarz.

1251. Sea el recinto P el semiplano superior $\text{Im } w > 0$ con cortes horizontales que van hacia la izquierda al ∞ de los puntos B_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y hacia la derecha al ∞ de los puntos D_s ($s = 1, 2, \dots, m$) (fig. 50). Demuestre que la función $w = f(z)$, que transforma el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el recinto P , es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{\pi} \ln(z - a_k) - \sum_{j=1}^m \frac{l_j}{\pi} \ln(z - c_j) + Az + B, \quad (8)$$

donde a_k, c_j son los puntos del eje x correspondientes a los vértices A_k y C_j del recinto P y h_k, l_j son las distancias entre los cortes que van en una misma dirección. Además, el punto A_0 pasa al ∞ , $A > 0$ e $\text{Im } B = \sum_{j=1}^m l_j$. Los puntos $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ y

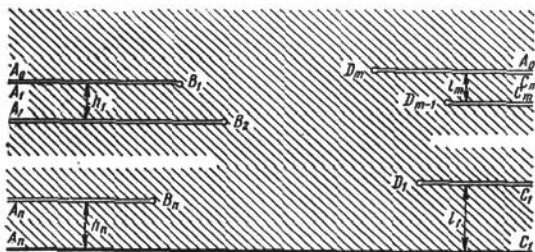


FIG. 50

$d_s (s=1, 2, \dots, m)$ del eje x correspondientes a los vértices B y D_s son raíces de la ecuación

$$\sum_{k=1}^n \frac{h_k}{z-a_k} - \sum_{j=1}^m \frac{l_j}{z-c_j} + A\pi = 0. \quad (9)$$

¿Cómo determinar los parámetros A, B, a_k, b_i, c_j, d_s ? Demuestre que si A_0 pasa al punto $a_0 \neq \infty$, entonces

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{\pi} \ln(z-a_k) - \sum_{j=1}^m \frac{l_j}{\pi} \ln(z-c_j) + \frac{L-H}{\pi} \ln(z-a_0) + \frac{A}{z-a_0} + B, \quad (10)$$

donde

$$H = \sum_{k=1}^n h_k, \quad L = \sum_{j=1}^m l_j, \\ A < 0 \text{ e } \text{Im } B = L.$$

Si el parámetro a_k o c_j es igual al ∞ , en la fórmula (10) desaparece el sumando correspondiente.

Sugerencia. Haga uso de la fórmula de Christoffel—Schwarz. Para determinar los coeficientes de los términos logarítmicos compare el incremento de w correspondiente al recorrido (a lo largo de las semicircunferencias) de los puntos a_0, a_k, c_j , calculado geoméricamente y mediante la fórmula para $f(z)$.

1252. Sea el recinto P el w -plano con cortes horizontales que van hacia la izquierda al ∞ de los puntos $B_i (i=1, 2, \dots, n)$

(fig. 51). Demuestre que la función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el recinto P , es de la forma

$$f(z) = -Az^2 + Bz + C + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{\pi} \ln(z - a_k),$$

donde a_k son los puntos del eje x correspondientes a los vértices A_k del recinto P y h_k son las distancias entre los cortes. Además,

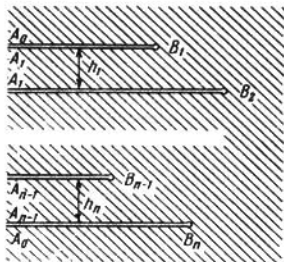


FIG. 51

el punto A_0 pasa al ∞ , $A > 0$ y B es un número real. Los puntos b_i ($i=1, 2, \dots, n$) correspondientes a los vértices B_i son los ceros de la derivada $f'(z)$. ¿Cómo determinar los parámetros A, B, C, a_k, b_i ?

Sugerencia. Véase la sugerencia al problema 1251.

1253. Sea el recinto P el w -plano con cortes horizontales que van al ∞ hacia la izquierda y hacia la derecha (fig. 52). Demuestre que la función $w=f(z)$, que transforma el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el recinto P es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k}{\pi} \ln(z - a_k) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{l_j}{\pi} \ln(z - c_j) + \frac{A}{z - a_0} + \frac{C}{z - c_0} + B, \quad (11)$$

donde $A > 0, C > 0, h_0 = \text{Im}(D_m - B_1), l_0 = \text{Re}(D_1 - B_n)$, mientras que los demás parámetros (incluyendo b_i y d_s para los vértices B_i y D_s) toman los mismos valores que en el problema 1251. ¿Cómo determinar los parámetros $A, B, C, a_k, b_i, c_j, d_s$? Pruebe que, siendo $a_0 = \infty$, se tiene

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{\pi} \ln(z - a_k) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{l_j}{\pi} \ln(z - c_j) - \frac{C}{z - c_0} + Az + B, \quad (12)$$

donde $A > 0$ y $C > 0$. Si el parámetro a_k ($k \neq 0$) o el parámetro c_j ($j \neq 0$) es igual al ∞ , el sumando correspondiente de la fórmula (12) desaparece.

Sugerencia. Véase la sugerencia al problema 1251.

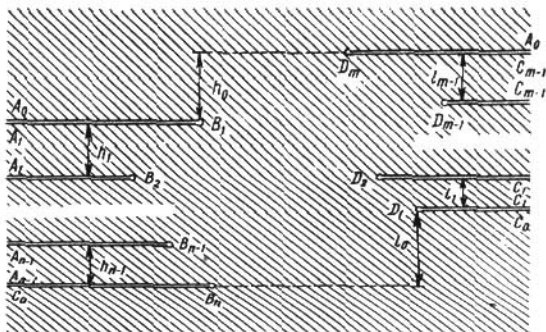


FIG. 52

1254. Transforme el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en los recintos del w -plano indicados en la fig. 53 (todas las dimensiones se señalan).

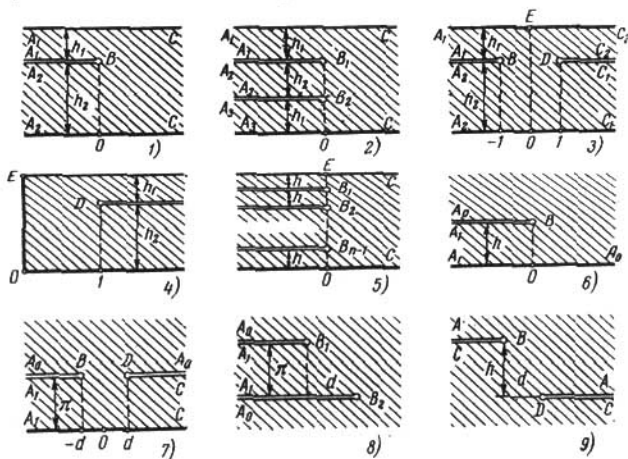


FIG. 53

lan en las figuras correspondientes) con las condiciones dadas; halle a y b ($a > 0$, $b > 0$).

- 1) $(A_1, B, A_2, C) \rightarrow (-1, b, 1, \infty)$;
 - 2) $(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, C) \rightarrow (-1, -b, 0, b, 1, \infty)$;
 - 3) $(E, O, D) \rightarrow (-1, 1, \infty)$; 4) $(E, O, D) \rightarrow (-1, 1, \infty)$;
 - 5) $(E, O, C) \rightarrow (-1, 1, \infty)$; 6) $(A_0, B, A_1) \rightarrow (\infty, 0, 1)$;
 - 7) $(A_1, O, C) \rightarrow (-1, 0, 1)$;
 - 8) $(A_0, B_1, A_1, B_2) \rightarrow (\infty, -(1+a), -1, 0)$; $d = \operatorname{Re}(B_2 - B_1)$;
 - 9) $(A, B, C, D) \rightarrow (\infty, -1, a, 1)$; $d = \operatorname{Re}(D - B)$;
- $h = \operatorname{Im}(B - D)$.

§ 2. TRANSFORMACIONES CONFORMES RELACIONADAS CON FUNCIONES ELÍPTICAS.¹⁾

La integral

$$u(z, k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (1)$$

donde el integrando es igual a 1 para $t=0$, se llama integral *elíptica normal de primera especie en la forma de Legendre*. El parámetro k se denomina *módulo*; en lo sucesivo se supone que $0 < k < 1$.

El cambio de la variable independiente $z = \operatorname{sen} \varphi$ y la sustitución $t = \operatorname{sen} \psi$ llevan esta integral a la forma

$$u(\operatorname{sen} \varphi, k) = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}}. \quad (2)$$

La función inversa

$$z = \operatorname{sn}(u, k) \quad (3)$$

(o en otras denotaciones $\varphi = \operatorname{am} u$) es una de las fundamentales *funciones elípticas de Jacobi* y se denomina *sn-función de Jacobi*. De su definición se desprende que $\operatorname{sn}(0, k) = 0$. Con la función $\operatorname{sn}(u, k)$ están relacionadas dos funciones más

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u, k) &= \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u, k)}, \\ \operatorname{dn}(u, k) &= \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)}, \end{aligned} \quad (4)$$

que se denominan *cn-* y *dn-funciones de Jacobi* respectivamente. Las ramas de las raíces se determinan mediante las condiciones $\operatorname{cn}(0, k) = \operatorname{dn}(0, k) = 1$. Si

¹⁾ Las propiedades y las transformaciones de las funciones y de las integrales elípticas que se emplean en los problemas de este parágrafo se pueden encontrar, por ejemplo, en los libros: Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, «Наука» 1970 (*N. I. Ajiezer, Elements of the theory of the elliptic functions*) E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, volume 2, Cambridge at the University press, 1927 y H. Bateman and A. Erdélyi, *Higher transcendental functions*, volume 3, New York—Toronto—London, McGraw-Hill book company, Inc., 1955.

Un breve resumen de las transformaciones correspondientes se da en los libros: G. Korn and T. Korn, *Mathematical Handbook for Scientist and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1961 y Janke—Emde—Lösch, *Tafeln Höherer Funktionen*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960.

no hay necesidad de indicar el módulo k , se escribe simplemente $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ y $\operatorname{dn} u$.

De (1), (2), (3) y (4) se deduce que

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \operatorname{sn} u}{du} &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, & \frac{d \operatorname{cn} u}{du} &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d \operatorname{dn} u}{du} &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned} \right\} \quad (')$$

El valor de la función $u(z, k)$ para $z = 1 \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right)$, es decir, la integral

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \mathbf{K}(k)$$

se llama *integral elíptica completa de primera especie*. La magnitud $k' = \sqrt{1-k^2}$ se denomina *módulo complementario*.

$\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}$ y $\mathbf{K}(k') = \mathbf{K}'$ se denominan *integrales elípticas relacionadas*.

En los problemas se emplean con frecuencia las siguientes relaciones (transformaciones de integrales elípticas completas de primera especie) que son fáciles de comprobar:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\left(\frac{1}{k}\right) &= k(\mathbf{K} + i\mathbf{K}'), \\ \mathbf{K}\left(\frac{1}{k'}\right) &= k'(\mathbf{K}' + i\mathbf{K}), \quad \mathbf{K}\left(\frac{ik}{k'}\right) = k'\mathbf{K}, \\ \mathbf{K}\left(\frac{ik'}{k}\right) &= k\mathbf{K}'. \end{aligned} \quad (6)$$

Observemos también que

$$\int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \mathbf{K}'$$

(sustitución $k^2t^2 + k'^2\tau^2 = 1$),

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}} = \mathbf{K}' \quad (\text{sustitución } t = \operatorname{tg} \psi).$$

1255. Demuestre que la imagen del semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en la transformación mediante la integral elíptica normal de primera especie

$$u = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

es un rectángulo de vértices $\pm \mathbf{K}$ y $\pm \mathbf{K} + i\mathbf{K}'$ correspondientes a los puntos ± 1 y $\pm \frac{1}{k}$.

Prolongando esta transformación según el principio de simetría, demuestre que la función inversa $z = \operatorname{sn} u$ es doblemente periódica de períodos $4\mathbf{K}$ y $2i\mathbf{K}'$.

Considere la correspondencia entre los planos u y φ , donde $u = F(\varphi, k)$.

Sugerencia. Aplique el principio de correspondencia de fronteras. Dedique especial atención a la variación del argumento de $\frac{du}{dz}$ cuando z recorre el eje real.

1256. Transforme el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el rectángulo del w -plano de vértices $\pm a$ y $\pm a + ib$ ($a > 0, b > 0$).

1257. Halle la imagen del cuarto cuadrante del z -plano en la transformación mediante la integral elíptica

$$u = \int_z^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}}.$$

Prolongando esta transformación según el principio de simetría, halle la imagen de todo el z -plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$, $(-i\infty, -\frac{ik'}{k}]$ y $[\frac{ik'}{k}, i, \infty)$. Compruebe que la función inversa será $z = \text{cn}(u, k)$ y demuestre que es doblemente periódica de períodos $4\mathbf{K}$ y $2\mathbf{K} + 2i\mathbf{K}'$.

1258. Halle la imagen del cuarto cuadrante del z -plano en la transformación mediante la integral elíptica

$$u = \int_z^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2 - k'^2)}}.$$

Prolongando esta transformación según el principio de simetría, halle la imagen de todo el z -plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -k']$, y $[k', \infty)$. Compruebe que la función inversa es $z = \text{dn}(u, k)$ y demuestre que es doblemente periódica de períodos $2\mathbf{K}$ y $4i\mathbf{K}'$.

1259. Halle la imagen del primer cuadrante del z -plano en la transformación mediante la integral elíptica de primera especie

$$u(z, k_1) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2 t^2)}},$$

donde k_1 toma los valores $k, \frac{1}{k}, k', \frac{1}{k'}, \frac{ik}{k'}$ e $\frac{ik'}{k}$.

Sugerencia. Haga uso de las fórmulas (6).

La integral

$$v(z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \text{sen}^2 \psi} d\psi = E(\varphi, k) \quad (7)$$

($z = \operatorname{sen} \varphi$) se denomina *integral elíptica normal de segunda especie en la forma de Legendre*.

Tomando $z = 1$ ($\varphi = \pi/2$) se obtiene la *integral elíptica completa de segunda especie*

$$E(k) = E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt. \quad (8)$$

Introduciendo la notación $E(k') = E'$, es fácil obtener las relaciones

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{k} [(E - k'^2 K) - i(E' - k^2 K')], \\ E\left(\frac{1}{k'}\right) &= \frac{1}{k'} [(E' - k^2 K') - i(E - k'^2 K)], \\ E\left(\frac{ik'}{k'}\right) &= \frac{1}{k'} E, \quad E\left(\frac{ik'}{k}\right) = \frac{1}{k} E'. \end{aligned} \quad (9)$$

Las integrales elípticas completas de primera y segunda especies, correspondientes a los módulos complementarios k y k' , están ligadas mediante la *relación de Legendre*

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

La sustitución de la variable independiente $z = \operatorname{sn} u$ en la integral que define $v(z, k)$ conlleva a la *función de Jacobi*

$$E(u, k) = E(u) = v(\operatorname{sn} u, k) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 \tau d\tau, \quad (11)$$

que expresa la integral elíptica de segunda especie en función de la integral elíptica de primera especie. Con la función $E(u)$ está relacionada la función $Z(u)$ que se define mediante la fórmula

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K} u. \quad (12)$$

1260. Halle la imagen del primer cuadrante del z -plano en la transformación mediante la integral elíptica normal de segunda especie

$$v(z, k_1) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k_1^2 t^2}{1-t^2}} dt,$$

donde k_1 toma los valores k , $\frac{1}{k}$, k' , $\frac{1}{k'}$, $\frac{ik}{k'}$ e $\frac{ik'}{k}$.

Sugerencia. Haga uso de las fórmulas (9) y de que

$$\int_1^{1/k} \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt = i(K' - E')$$

(esta fórmula se obtiene empleando la sustitución $k^2 t^2 + k'^2 \tau^2 = 1$).

1261*. Transforme el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en el semiplano superior $\operatorname{Im} w < 0$ con dos cortes verticales a lo largo de los

segmentos $\operatorname{Re} w = \pm a$, $0 \leq \operatorname{Im} w \leq h$ con la condición de normalización $w(0) = 0$, $w(\infty) = 0$ y $w'(\infty) > 0$.

Sugerencia. Haga uso de la fórmula de Christoffel-Schwarz representándola en la forma

$$w(z) = C \int_0^z \frac{b^2 - z^2}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} dz = C_1 [(k^2 b^2 - 1) u(z, k) + v(z, k)],$$

donde $C_1 = \frac{C}{k^2}$, $w(\pm 1) = \pm a$, $w(\pm b) = \pm a + ih$, y obtenga la ecuación para la determinación de los parámetros C_1 , k y b .

1262. Demuestre que la función

$$w = Z(u) + \frac{dn u \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$

transforma el rectángulo $0 < \xi < K$, $0 < \eta < K'$ del plano $u = \xi + i\eta$ en el cuarto cuadrante del plano w con un corte a lo largo de $\left[-\frac{\pi i}{2K}, h - \frac{\pi i}{2K}\right]$, donde $h - \frac{\pi i}{2K}$ es la imagen de aquel punto $u = \xi + iK'$ para el cual $\frac{dw}{du} = 0$. Prolongando esta transformación según el principio de simetría, demuestre que la imagen del rectángulo $|\xi| < K$, $|\eta| < K'$ es todo el plano con cortes representados en la fig. 54.

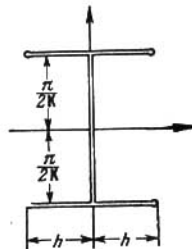


FIG. 54

Observación. Acerca de la transformación del rectángulo en el exterior de una cruz o en el exterior de un rectángulo con cuatro apéndices, que representan la continuación de sus lados, véase Darwin, Some conformal transformations involving elliptic functions, The Philosophica Magazine ser. 7 41, N° 312 (1950).

La integral

$$\begin{aligned} w(z, v, k) &= \int_0^z \frac{dt}{(1+vt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \\ &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+v \operatorname{sn}^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi}} = \Pi(\varphi, v, k) \end{aligned} \quad (13)$$

se llama *integral elíptica normal de tercera especie en la forma de Legendre*. La sustitución de la variable independiente $z = \operatorname{sn} u$ conduce a la fórmula

$$w(\operatorname{sn} u, v, k) = \int_0^u \frac{d\tau}{1+v \operatorname{sn}^2 \tau} \quad (14)$$

La magnitud $\Pi_1(v, k) = \omega(l, v, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, v, k\right)$ se denomina *integral elíptica completa de tercera especie*.

1263. Halle la imagen del primer cuadrante del z -plano en la transformación mediante la integral elíptica normal de tercera especie (13) para $0 < k < 1$. Considere por separado los casos en que v pertenece a los intervalos:

1) $(-\infty, -1)$; 2) $(-1, -k^2)$; 3) $(-k^2, 0)$; 4) $(0, \infty)$.

Considere también los casos en que $v = -1$ y $v = -k^2$.

Indique los recintos del w -plano que se obtienen mediante la prolongación según el principio de simetría a través de diferentes intervalos del eje real del plano z . En cada caso indique los recintos correspondientes en el u -plano, donde $z = \operatorname{sn} u$.

La integral

$$w = \int_z^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} = \int_z^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \quad (15)$$

de discriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ (en tal caso e_1, e_2, e_3 son distintos dos a dos) se llama *integral elíptica normal de primera especie en la forma de Weierstrass* y la función

$$z = \wp w \quad (16)$$

se denomina *p-función de Weierstrass*. Es una de las funciones elípticas fundamentales de períodos 2ω y $2\omega'$ ($\operatorname{Im} \frac{\omega'}{\omega} \neq 0$). Verifica la ecuación diferencial

$$\wp'^3 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3). \quad (17)$$

La función $\wp(w)$ es par, bivalente en el paralelogramo de períodos (fig. 55) y tiene en él un polo de segundo orden en el cero y puntos dobles ($\wp' = 0$), $\omega + \omega'$, ω' :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \wp(\omega), \quad e_2 = \wp(\omega + \omega') \\ e_3 &= \wp(\omega'). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

De (17) se desprende que

$$\left. \begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 &= -\frac{1}{4}g_2, \\ e_1e_2e_3 &= \frac{1}{4}g_3. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

1264*. Analice la transformación del z -plano que realiza la integral elíptica normal de primera especie en la forma de Weierstrass (15) para valores reales de g_2 y g_3 y para $\Delta > 0$. Considere los casos $g_2 > 0$, $g_3 < 0$ y $g_3 = 0$. Halle los períodos de $\wp(w)$.

Sugerencia. Considere la transformación del semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ empleando el principio de correspondencia de fronteras.

1265*. Analice la transformación del z -plano mediante la integral elíptica normal de primera especie (15) para valores reales de g_2 y g_3

y para $\Delta < 0$. Considere, en particular, el caso $g_2 = 0$. Halle los períodos de $\wp(w)$.

Sugerencia. Como $\Delta < 0$, dos de las magnitudes e_1, e_2, e_3 son conjugadas complejas y una es real. Sea e_2 una magnitud real y sea $e_1 = \alpha + i\beta, e_3 = \alpha - i\beta$ ($\beta > 0$). Considere la transformación del semicírculo $|z - e_2| = |e_1 - e_2|, \text{Im } z > 0$ empleando el principio de correspondencia de fronteras y prolongue esta transformación según el principio de simetría.

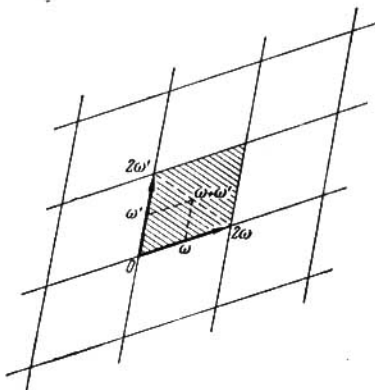


FIG. 55

1266. Halle las transformaciones en el semiplano superior $\text{Im } w > 0$ de los triángulos ABC bajo las condiciones indicadas:

1) $(A=0, B=\omega > 0, C=\omega(1+i)) \rightarrow (\infty, -1, 0)$;

2) $(A=0, B=a > 0, C = \frac{a\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}) \rightarrow (\infty, -1, 1)$;

3) $(A=0, B=a > 0, C = \frac{a\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}) \rightarrow (\infty, -1, 0)$

Sugerencia. Haga uso de las soluciones de los problemas 1264 (en el caso $g_3 = 0$) y 1265 (en el caso $g_2 = 0$).

1267. Transforme los recintos biconexos 1—15, situados en el z -plano e indicados en la fig. 56, en un anillo circular $\rho_1 < |w| < \rho_2$ y determine el módulo $\mu = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ (véase la pág. 37—38).

En los problemas 1268—1270 transforme los recintos indicados en el círculo unidad $|t| < 1$.

1268. El rectángulo $|\text{Re } u| < K, |\text{Im } u| < K' (0 < k < 1)$. Halle la posición de los vértices en la transformación.

1269. El interior de la elipse $|z-1| + |z+1| = 2a (a > 1)$ con cortes $[-a, -1]$ y $[1, a]$.

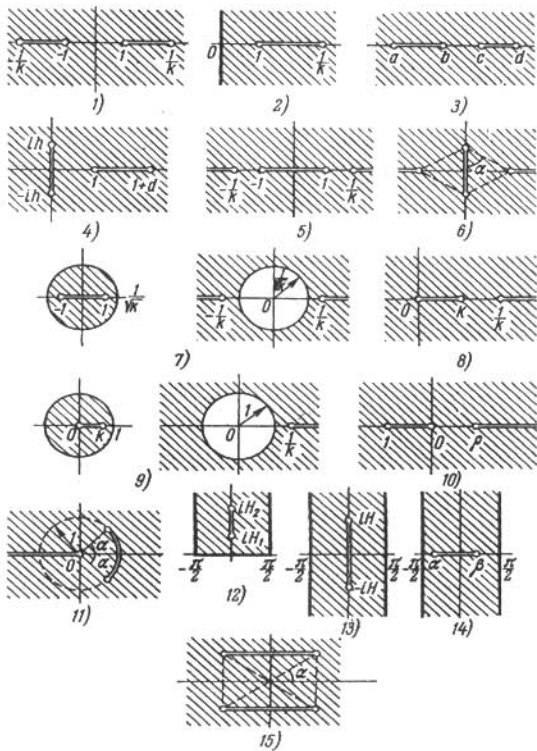


FIG. 56

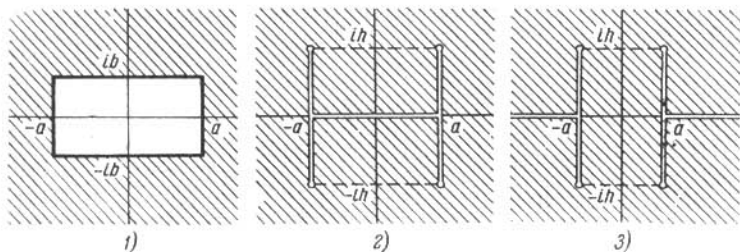


FIG. 57

1270. El interior de la elipse $|z-1|+|z+1|=2a$ ($a > 1$). Halle la posición de los focos en la transformación.

1271. Transforme el exterior del círculo unidad $|t| > 1$ en los recintos 1, 2 y 3 del z -plano indicados en la fig. 57.

Acerca de la aplicación de las funciones elípticas a los problemas de la transformación del semiplano superior en el exterior de arcos de elipses, hipérbolas y parábolas, así como a la transformación en un anillo circular del exterior de dos segmentos rectilíneos arbitrariamente situados o de dos arcos concéntricos, véase, por ejemplo, el libro de Л. И. Седов, *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*, „Наука“, 1966 (Sedov L. I., *Problemas planos de hidrodinámica y aerodinámica*).

CAPITULO X

APLICACIONES A LA MECANICA Y A LA FISICA

§ 1. APLICACIONES A LA HIDROMECAÁNICA

El movimiento plano estacionario sin torbellinos de un fluido incompresible se caracteriza por la función analítica

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1)$$

que se llama *potencial complejo* o *función característica* de la corriente; φ se llama *función potencial* y ψ , *función de corriente*. Las curvas $\varphi = \text{const}$ se denominan *líneas equipotenciales* y las curvas $\psi = \text{const}$, *líneas de corriente*. La velocidad de la corriente V está ligada a $w(z)$ por las relaciones

$$\left. \begin{aligned} V &= Ve^{i\alpha} = V_x + iV_y = \overline{w'(z)}, \\ V &= |w'(z)|, \alpha = -\arg w'(z), \\ V &= \text{grad } \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Sea C un contorno cerrado que se recorre en la dirección positiva (el contorno C puede estar formado por dos lados de un mismo arco recorridos en direcciones contrarias). La magnitud

$$\Gamma = \int_C V_n ds = \int_C V_x dx + V_y dy = \int_C d\varphi \quad (3)$$

se denomina *circulación* del vector V a lo largo del contorno C .

La magnitud

$$Q = \int_C V_n ds = \int_C (-V_y dx + V_x dy) = \int_C d\psi \quad (4)$$

(n es la normal exterior del contorno cerrado C recorrido en la dirección positiva) se denomina *flujo* del vector V a través del contorno C . Análogamente, el flujo del vector V a través del arco AB se define mediante la integral $\int_{AB} V_n ds$ (la dirección de la normal n debe ser indicada).

¹⁾ En relación con este capítulo véase [2, capítulo III] y la bibliografía allí indicada.

Uniendo las fórmulas (3) y (4), obtenemos

$$\Gamma + iQ = \int_C w'(z) dz. \quad (5)$$

Si $w'(z)$ está definida en el interior de C y tiene allí un número finito de puntos singulares, se tiene

$$\Gamma + iQ = 2\pi i \sum \text{res } w'(z).$$

Si a es un polo de la función $w'(z)$, para $w(z)$ existe en una vecindad de a el desarrollo de tipo

$$w(z) = \frac{c-n}{(z-a)^n} + \dots + \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a} + \frac{\Gamma+iQ}{2\pi i} \ln(z-a) + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

Si dice que el término $\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i} \ln(z-a)$ (Γ y Q son números reales) determina en el punto a un *manantial-torbellino* de potencia Q y de intensidad Γ que se designa $(a; Q, \Gamma)$ ¹⁾; que el término $\frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a}$ determina un *doblete* de momento p , designado $(a; p)$ (p es un número complejo; el radio vector \bar{p} determina la dirección del eje del doblote que pasa por el punto a en la dirección de la línea de corriente) y que los restantes términos $\frac{c-k}{(z-a)^k}$ determinan en el punto a *multipletes* de orden $2k$.

Respectivamente, si en el ∞ se tiene

$$w(z) = c_n z^n + \dots + \frac{p}{2\pi} z + \frac{\Gamma+iQ}{2\pi i} \ln z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \dots,$$

el término $\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i} \ln z$ determina en el ∞ un *manantial-torbellino* de potencia $-Q$ e intensidad $-\Gamma$, el término $\frac{p}{2\pi} z$ determina un *doblete* de momento p (la dirección de las líneas de corriente en el ∞ coincide con la dirección del radio vector \bar{p}) y los restantes términos $c_k z^k$ determinan *multipletes* de orden $2k$.

Los puntos en los que $V=0$ y, por consiguiente, $w'(z)=0$, se llaman *puntos críticos* de la corriente; de estos puntos las líneas de corriente y equipotenciales salen alternadamente. Si el punto crítico es un cero de orden $(n-1)$ de la derivada, estas líneas forman entre sí ángulos de $\pi/2n$. Una ramificación semejante de las líneas es posible también en el ∞ .

En los problemas 1272—1285 se requiere construir, a partir del potencial complejo de la corriente dado, las líneas equipotenciales y las líneas de corriente, determinar V , los puntos singulares y críticos, la potencia y la intensidad de los manantiales—torbellinos y los momentos de los dobletes, así como estudiar el comportamiento de la corriente en el ∞ .

1272. $w = cz$ ($c = \alpha + i\beta$).

1273. $w = z^n$ (en particular, $n = 2, 3$).

¹⁾ Si $Q=0$, se tiene un *torbellino* $(a; \Gamma)$. Si $\Gamma=0$, se tiene un *manantial* $(a; Q)$. Si la potencia del manantial es $Q < 0$, suele decirse generalmente que se tiene un *sumidero*.

1274. $w = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln z$. Considere, en particular, los casos $\Gamma = 0$ y $Q = 0$.

$$1275. w = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z-b}.$$

1276. $w = \frac{1}{z}$. Determine también la velocidad en los puntos $2 \pm i$.

$$1277. 1) w = z + \frac{R^2}{z}; \quad 2) w = z - \frac{R^2}{z}; \quad 1278. w = \frac{1}{z^2}.$$

1279. $w = \ln(z^2 - a^2)$ ($a > 0$). Determine también la velocidad en los puntos $\pm ia$.

$$1280. w = \ln \frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2} \quad (a > 0).$$

$$1281. w = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(z - \frac{1}{z} \right). \quad 1282. w = \ln \left(1 + \frac{1}{z^2} \right).$$

$$1283. w = \ln \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right).$$

$$1284. w = az + \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (a > 0, Q > 0).$$

$$1285. w = az + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (a > 0, \Gamma > 0).$$

1286. Investigue el carácter de la corriente en el recinto $|z| \geq R$, si

$$w = a \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (a > 0, \Gamma > 0).$$

Considere los casos: $\Gamma < 4\pi aR$, $\Gamma = 4\pi aR$ y $\Gamma > 4\pi aR$.

1287. Halle en todo el plano el potencial complejo $w(z)$ de la corriente, formada por los manantiales—torbellinos $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k)\}$ ($k=1, 2, \dots, n$), que tiene en el infinito la velocidad dada $V_\infty = Ve^{i\alpha}$.

1288. ¿Puede partir una línea de corriente de un punto que es: 1) un torbellino, 2) un doblete, 3) un torbellino y un doblete a la vez.

1289. Halle la ley de variación de un manantial—torbellino, de un doblete y de un múltipleto, situados en el punto a o en el ∞ , para las siguientes transformaciones conformes univalentes de unas vecindades de estos puntos ($c_1 \neq 0$, $c_{-1} \neq 0$):

$$1) \zeta = \alpha + c_1(z-a) + \dots; \quad 2) \zeta = \alpha + \frac{c_{-1}}{z} + \dots;$$

$$3) \zeta = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \dots; \quad 4) \zeta = c_1 z + c_0 + \dots$$

1290. Halle la ley de variación de un manantial—torbellino para las transformaciones n —valentes:

$$\zeta = \alpha + c_n (z-a)^n + \dots, \quad c_n \neq 0;$$

$$\zeta = \alpha + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots, \quad c_{-n} \neq 0.$$

1291. Demuestre que la corriente puede ser prolongada según el principio de simetría a través de una parte rectilínea o circular de una línea de corriente o de una línea equipotencial, con la particularidad de que un manantial—torbellino se transforma en un manantial—torbellino, un doblete en un doblete y un múltiplete, en general, en un conjunto de múltipletes hasta el mismo orden inclusive. Halle la ley de variación de la potencia y de la intensidad de un manantial—torbellino y del momento de un doblete.

Observación. En el problema **1291** se establece el principio de simetría que, junto a las transformaciones conformes, se emplea ampliamente en la construcción de corrientes (véase los problemas **1293—1301**).

Del principio de simetría se deduce que, siempre que exista una parte rectilínea o circular en una línea de corriente o en una línea equipotencial, la corriente debe ser simétrica respecto a esta línea. Esto impone ciertas limitaciones no sólo a las singularidades de la corriente fuera de estas líneas, sino también en estas líneas o en sus extremos (si es que existen).

1292. Una corriente en el z —plano está formada por un número finito de manantiales, torbellinos y dobletes.

1) Halle la condición necesaria y suficiente para que la circunferencia $|z|=R$ sea una línea de corriente, si los manantiales, los torbellinos y los dobletes: a) no se hallan sobre esta circunferencia; b) se encuentran todos en ella; c) algunos se hallan sobre ella y otros no.

2) En estas mismas suposiciones halle las condiciones para que la circunferencia $|z|=R$ sea una línea equipotencial.

1293. Halle los potenciales complejos de las corrientes en el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ a partir de las singularidades dadas y del valor de la velocidad V_∞ :

1) La velocidad $V_\infty = V$. 2) El torbellino ($a; \Gamma$) y la velocidad $V_\infty = 0$. 3) El manantial ($a; Q$) y la velocidad $V_\infty = 0$. 4) El doblete ($a; p$) y la velocidad $V_\infty = 0$. 5) Los manantiales—torbellinos $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k)\}$ ($k=1, 2, \dots, n$), el doblete ($a; p$) y la velocidad $V_\infty = V$. ¿Qué se puede decir acerca del comportamiento de la corriente en el ∞ ? 6) El manantial—torbellino ($0; Q; \Gamma$) y el doblete ($0; p$); $V_\infty = 0$. ¿Qué valores puede tomar el momento del doblete p ? ¿Es siempre posible la corriente, si $\Gamma \neq 0$?

1294. Construya en el círculo $|z| < R$ las corrientes que tienen respectivamente:

1) el torbellino ($a; \Gamma$); 2) el doblete ($a; p$).

1295. Halle las condiciones para la posibilidad de la construcción de corrientes en el círculo $|z| < R$, si:

1) sólo hay manantiales $\{(a_k; Q_k)\}$ ($k=1, 2, \dots, n$), situados en el interior del círculo;

2) además de los manantiales del punto 1) hay manantiales $\{(a'_k; Q'_k)\}$ ($k=1, 2, \dots, m$), situados en la circunferencia $|z|=R$.

Halle en ambos casos los potenciales complejos de las corrientes.

1296. Construya en el recinto $|z| > R$ las corrientes que se caracterizan, respectivamente, por:

1) el torbellino ($a; \Gamma$), la velocidad $V_\infty = 0$ y la circulación en el infinito $\Gamma_\infty = 0$;

2) el doblete ($a; p$), la velocidad $V_\infty = 0$ y la circulación $\Gamma_\infty = 0$;

3) la velocidad $V_\infty = Ve^{i\alpha}$ y la circulación $\Gamma_\infty = 0$;

4) la velocidad $V_\infty = Ve^{i\alpha}$ y la circulación Γ a lo largo de la circunferencia $|z|=R$.

Observación. Los dos ejemplos últimos del problema 1296 ofrecen la circundación de un círculo con una velocidad dada en el infinito con circulación y sin circulación (véase, por ejemplo, [2, capítulo III, n° 49]).

En los problemas 1297—1300 construya, aplicando el principio de simetría, las corrientes a partir de las singularidades dadas (en el infinito y en los puntos angulares la velocidad es igual a cero).

1297. En el recinto $|z| > 1$, $\text{Im } z > 0$ y con el torbellino ($ia; \Gamma$), $a > 0$.

1298. En el ángulo $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ con el manantial $(ae^{i\frac{\pi}{6}}; Q)$, $a > 0$.

1299. En el primer cuadrante $\text{Re } z > 0$, $\text{Im } z > 0$ con el manantial ($1; Q$).

1300. 1) En el primer cuadrante $\text{Re } z > 0$, $\text{Im } z > 0$ con el manantial ($1; Q$) y con el sumidero ($i; -Q$).

2) En el primer cuadrante $\text{Re } z > 0$, $\text{Im } z > 0$ con el manantial ($1+i; Q$) y con el sumidero ($0; -Q$).

1301. Construya la corriente en todo el z -plano, si se sabe que en el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ tiene un doblete ($a; p$) y manantiales-torbellinos $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k)\}$ ($k=1, 2, \dots, n$), que el eje x es una línea equipotencial y que la velocidad $V_\infty = Ve^{i\alpha}$. ¿Es siempre posible una corriente de este tipo?

1302. Construya la corriente en todo el z -plano, si se sabe que tiene manantiales-torbellinos $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k)\}$ ($k=1, 2, \dots, n$) y un doblete ($a; p$) en el círculo $|z| < R$, que la circunferencial $|z|=R$ es una línea equipotencial y que la velocidad $V_\infty = Ve^{i\alpha}$. ¿Es siempre posible una corriente de este tipo?

1303. Construya en un recinto simplemente conexo D limitado por el contorno C una corriente que tiene manantiales-torbellinos

$\{(a_k; Q_k, \Gamma_k)\}$ ($k=1, 2, \dots, n$) y para la cual C es una línea de corriente. ¿Es siempre posible una corriente de este tipo?

1304. Construya en un recinto D que contiene el punto infinito y está limitado por un contorno C la corriente con manantiales-torbellinos $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k)\}$ ($k=1, 2, \dots, n$) y la velocidad dada $V_\infty = Ve^{i\alpha}$, para la cual C es una línea de corriente. ¿Es siempre posible una corriente de este tipo?

En los problemas **1305—1312** se considera la circundación de contornos acotados y no acotados (que deben ser líneas de corriente). Los problemas se resuelven mediante la transformación conforme en el exterior del círculo, en el semiplano superior o en una franja rectilínea.

1305. Construya la circundación de un contorno acotado C con la circulación Γ dada y la velocidad $V_\infty = Ve^{i\alpha}$. ¿Qué transformación realiza el potencial complejo $w(z)$ en el caso en que $\Gamma=0$?

1306. Construya la circundación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

1) con la velocidad dada V_∞ y sin circulación;

2) con la velocidad dada V_∞ y con la circulación Γ .

1307. Construya la circundación de la placa $|x| \leq C, y=0$:

1) con la velocidad dada V_∞ y sin circulación;

2) con la velocidad dada V_∞ y con la circulación Γ definida por la condición de que uno de los extremos de la placa es el punto de partida de la corriente (postulado de Zhukovski—Chaplyguin).

1308. Construya la circundación del perfil de Zhukovski¹⁾ con la velocidad dada V_∞ y con la circulación Γ definida por el postulado de Zhukovski—Chaplyguin (el extremo agudo del perfil debe ser el punto de partida).

En los problemas **1309—1312** construya la circundación de los contornos dados.

1309. De la parábola $y^2 = 2px$ (por el exterior y por el interior).

1310. De la rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (por el exterior y por el interior, con la velocidad $V_\infty = 0$).

1311. De las semirrectas $-\infty < x < -1, y = \pm \pi$.

1312. De las semirrectas $1 < |x| < \infty, y = 0$.

En los problemas **1313—1317** se consideran corrientes periódicas ($V(z+\omega) = V(z)$) y corrientes en franjas curvilíneas (canales). Para construir estas corrientes es preciso transformar conformemente las

¹⁾ Véase el problema **313** y la respuesta al mismo.

franjas curvilíneas en franjas rectilíneas, prolongar las corrientes mediante el principio de simetría y emplear el desarrollo de funciones meromorfas en series de fracciones simples.

En los problemas 1313 y 1314, para las corrientes periódicas con el potencial complejo dado y en la franja del período, analice las singularidades, construya esquemáticamente las líneas de corriente y las líneas equipotenciales y determine la velocidad en el ∞ .

$$1313. \omega = \frac{Q}{2\pi} \ln \operatorname{sen} z; \quad 2) \omega = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \operatorname{sen} z.$$

$$1314. \omega = \frac{p}{2\pi} \operatorname{ctg} z \left(0 \leq \arg p \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

1315. En la franja rectilínea $S: 0 < x < \omega$ del z -plano construya la corriente, formada por el manantial—torbellino $(a; Q, \Gamma)$, $a \in S$, que tiene las velocidades dadas $V(x+i\infty) = iV$ y $V(x-i\infty) = iV_1$. ¿Es siempre posible una corriente de este tipo?

Construya esquemáticamente las líneas de corriente y las líneas equipotenciales cuando $\Gamma = 0$ ó $Q = 0$.

Sugerencia. Prolongue la corriente aplicando el principio de simetría y haga uso del resultado del problema 1313.

1316. En la franja rectilínea $S: 0 < x < \omega$ del z -plano construya la corriente, formada por el doblete $(a; p)$, $a \in S$, que tiene la velocidad dada $V(x \pm i\infty) = iV$. Construya esquemáticamente las líneas de corriente y las líneas equipotenciales.

1317. Construya en la franja curvilínea S del z -plano, limitada por los contornos C_1 y C_2 , la corriente que circunda C_1 y C_2 , tiene manantiales—torbellinos dados y dobletes en S y tiene las velocidades dadas V_1 y V_2 en los puntos infinitos Ω_1 y Ω_2 de la franja S . Indique las condiciones suficientes para la existencia de una corriente de este tipo.

Una corriente se denomina *doblemente periódica* si su velocidad $\overline{w'(z)}$ es una función elíptica.

Se llama *función elíptica* una función meromorfa *doblemente periódica*, de períodos 2ω y $2\omega'$, siendo $\operatorname{Im} \frac{\omega'}{\omega} \neq 0$ (en lo sucesivo se acepta que $\operatorname{Im} \frac{\omega'}{\omega} > 0$).

De esta definición se desprende que $f(z + 2m\omega + 2n\omega') = f(z)$, donde m y n son números enteros cualesquiera o ceros.

El paralelogramo de vértices z_0 , $z_0 + 2\omega$, $z_0 + 2\omega'$ y $z_0 + 2\omega + 2\omega'$ (z_0 es un punto arbitrario), se denomina *paralelogramo de períodos*.

Si $f(z)$ es una función elíptica distinta de una constante, posee las siguientes propiedades (teoremas de Liouville):

1) $f(z)$ tiene al menos un polo en el *paralelogramo de períodos*.

2) la suma de los residuos de $f(z)$ respecto a todos los polos, situados en el paralelogramo de períodos, es igual a cero;

3) la ecuación $f(z) = a$ tiene en el paralelogramo de períodos la misma cantidad de raíces cualquiera que sea el número complejo a , finito o infinito (este número de raíces se llama *orden* de la función elíptica);

4) la diferencia entre la suma de todos los ceros y la suma de todos los polos de la función $f(z)$, situados en el paralelogramo de períodos, coincide con uno de sus períodos, es decir

$$\sum \alpha_k - \sum \beta_k = 2\mu\omega + 2\nu\omega' \quad (\mu \text{ y } \nu \text{ son números enteros}).$$

Se llama *Sigma función de Weierstrass* a la función entera

$$\sigma(z) = z \prod' \left(1 - \frac{z}{\Omega}\right) e^{\frac{z}{\Omega} + \frac{z^2}{2\Omega^2}}, \quad (6)$$

donde $\Omega = 2n\omega + 2m\omega'$ y el producto se toma respecto a todos los Ω diferentes de cero. La función $\sigma(z)$ es impar.

Se llama *Zeta función de Weierstrass* a la función meromorfa

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum' \left(\frac{1}{z-\Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2}\right), \quad (7)$$

donde la suma se toma respecto a todos los Ω diferentes de cero. La función $\zeta(z)$ es impar.

La función de Weierstrass $\wp(z)$ de períodos 2ω y $2\omega'$ (véase la pág. 178) está ligada a $\zeta(z)$ mediante la relación $\wp(z) = -\zeta'(z)$.

Como

$$[\zeta(z+2\omega) - \zeta(z)]' = \wp(z) - \wp(z+2\omega) = 0,$$

se tiene

$$\zeta(z+2\omega) - \zeta(z) = 2\eta$$

y análogamente

$$\zeta(z+2\omega') - \zeta(z) = 2\eta',$$

donde η y η' son constantes. Valiéndose de que la función $\zeta(z)$ es impar, es fácil probar que $\eta = \zeta(\omega)$ y $\eta' = \zeta(\omega')$.

Las magnitudes η , η' , ω y ω' están ligadas por la relación de Legendre

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}.$$

Tomemos

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1, & \eta' &= \eta_3 & \text{y} & \eta + \eta' &= \eta_2, \\ \omega &= \omega_1, & \omega' &= \omega_3 & \text{y} & \omega + \omega' &= \omega_2. \end{aligned}$$

Las funciones $\sigma_k(z)$ se definen mediante las relaciones

$$\sigma_k(z) = -e^{\eta_k z} \frac{\sigma(z - \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} \quad (k=1, 2, 3). \quad (8)$$

Respectivamente,

$$\zeta_k(z) = \frac{\sigma'_k(z)}{\sigma_k(z)}. \quad (9)$$

Las funciones $\sigma_k(z)$ están ligadas a la función de Weierstrass $\wp(z)$ y a las funciones de Jacobi $\text{sn } z$, $\text{cn } z$ y $\text{dn } z$ mediante las siguientes fórmulas

$$\sqrt{\wp(z) - e_k} = \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}, \quad (10)$$

$$\text{sn } u = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \text{cn } u = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \text{dn } u = \frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)}, \quad (11)$$

donde $u = z \sqrt{e_1 - e_3}$ y $e_k = \wp(\omega_k)$ (véase la pág. 179).

Mediante $\sigma(z)$ y $\zeta(z)$ se puede expresar cualquier función elíptica.

Si $f(z)$ tiene en el paralelogramo de períodos solamente polos simples b_k de residuos A_k ($k=1, 2, \dots, n$), se tiene

$$f(z) = \sum_{k=1}^n A_k \zeta(z - b_k) + C. \quad (12)$$

Si $f(z)$ tiene en el paralelogramo de períodos ceros a_k y polos b_k ($k=1, 2, \dots, n$) cada uno de los cuales se escribe tantas veces cuanto multiplicidad tiene, es

$$f(z) = C \frac{\sigma(z - a_1) \sigma(z - a_2) \dots \sigma(z - a_n)}{\sigma(z - b_1^*) \sigma(z - b_2) \dots \sigma(z - b_n)}, \quad (13)$$

donde $b_1^* = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=2}^n b_k$.

Se llama *Theta funciones de Jacobi* a las funciones

$$\begin{aligned} \vartheta_1(v) &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n - \frac{i}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi i v} = \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n + \frac{i}{2}\right)^2} \operatorname{sen}(2n+1)\pi v, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2(v) &= \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right), \quad \vartheta_3(v) = q^{\frac{i}{4}} e^{\pi i v} \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right), \\ \vartheta_4(v) &= -i q^{\frac{1}{4}} e^{\pi i v} \vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

donde $q = e^{\pi i \tau}$ y $\tau = \omega'/\omega$.

Las Theta funciones están ligadas a las Sigma funciones por relaciones de tipo

$$\sigma(z) = 2\omega_1 e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1(0)} \quad (16)$$

$$\sigma_i(z) = e^{\frac{\eta_i z^2}{2\omega_i}} \frac{\vartheta_{i+1}(v)}{\vartheta_{i+1}(0)} \quad (i=1, 2, 3), \quad (17)$$

donde $z = 2\omega_1 v$.

La ventaja de las Theta funciones consiste en la rápida convergencia de las series que las determinan. Empleando la fórmula (16), la representación (13) se puede escribir en la forma

$$f(z) = C \frac{\vartheta_1\left(\frac{z-a_1}{2\omega}\right) \vartheta_1\left(\frac{z-a_2}{2\omega}\right) \dots \vartheta_1\left(\frac{z-a_n}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z-b_1^*}{2\omega}\right) \vartheta_1\left(\frac{z-b_2}{2\omega}\right) \dots \vartheta_1\left(\frac{z-b_n}{2\omega}\right)}. \quad (18)$$

Empleando las fórmulas (11), (16) y (17), se puede obtener la expresión de las funciones de Jacobi $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ y $\operatorname{dn} z$ a través de las Theta funciones.

En lo sucesivo se supone que ω es un número real y que ω' es un número imaginario puro, es decir, que los paralelogramos de períodos son rectángulos.

1318. Demuestre que la función

$$f(u) = \frac{M}{2\pi} \zeta(u - \alpha) + Cu$$

es el potencial complejo de una corriente doblemente periódica con un doblete $(\alpha; M)$ (M es el momento del doblete) en el paralelogramo de períodos.

Considere, en particular, los casos en que:

1) $\alpha = 0$ y las curvas $\text{Im } u = \pm \text{Im } \omega'$ son líneas de corriente; construya esquemáticamente las líneas de corriente y las líneas equipotenciales; investigue la transformación conforme que realiza la función $t = f(u)$.

2) $f(u + 2\omega) = f(u)$; construya esquemáticamente las líneas de corriente y las líneas equipotenciales e investigue la transformación conforme $t = f(u)$.

1319. Demuestre que las corrientes definidas por los potenciales complejos $\zeta_k(u)$ ($k = 1, 2, 3$) se reducen mediante traslaciones en los planos u y ζ a las corrientes del problema 1318 (con $C = 0$).

Sugerencia. Haga uso de las fórmulas (8) y (9).

1320. Demuestre que las corrientes definidas por los potenciales complejos

$$\frac{\vartheta'_k\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_k\left(\frac{u}{2\omega}\right)} \quad (k = 1, 2, 3, 4) \text{ y } Z(u)$$

(véase la pág. 176) se reducen mediante transformaciones lineales a las corrientes del problema 1318, 2).

1321. Demuestre que la corriente definida por el potencial complejo $E(u)$ (véase la pág. 176) se reduce mediante transformaciones lineales a la corriente del problema 1318, 1).

Sugerencia. Demuestre previamente las relaciones }

$$\kappa^2 = (e_1 - e_3) \omega^2 \text{ y } \frac{E}{K} = \frac{e_1}{e_2 - e_3} + \frac{\omega}{K^2} \eta.$$

1322. Halle el potencial complejo $f(u)$ de una corriente doblemente periódica con dos dobletes $(\alpha; M)$ y $(\beta; N)$ en el paralelogramo de períodos.

Analice en qué caso la función $f(u)$ será elíptica y las curvas $\text{Im } u = \pm \text{Im } \omega'$, $\text{Re } u = \pm \omega$ serán líneas de corriente y líneas equipotenciales (o viceversa); construya esquemáticamente las líneas de corriente y las líneas equipotenciales.

En los problemas 1323—1325 investigue las corrientes doblemente periódicas definidas por los potenciales complejos $f(u)$ dados.

1323. $\text{sn } u$. 1324. $\text{cn } u$. 1325. $\text{dn } u$.

1326. Halle el potencial complejo $f(u)$ de una corriente doblemente periódica con dos manantiales-torbellinos $(\alpha; Q, \Gamma)$ y $(\beta; -Q, -\Gamma)$ en el paralelogramo de períodos. Considere, en particular, los casos en que $\alpha = 0$, $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega + \omega'$ y $\beta = \omega'$.

Halle la forma de la función $f(u)$ que satisface la condición $f(u + 2\omega) = f(u)$.

En los problemas 1327—1329 investigue las corrientes definidas por los potenciales complejos $f(u)$ indicados.

1327. 1) $\ln \operatorname{sn} u$; 2) $\ln \operatorname{cn} u$; 3) $\ln \operatorname{dn} u$. 1328. $\wp(u)$.

1329. $\ln \vartheta_k(v) \left(v = \frac{u}{2\omega}, k = 1, 2, 3, 4 \right)$.

Para construir un potencial complejo $f(z)$ en un recinto doblemente conexo D , éste suele primero transformarse conformemente en un anillo circular $R: \rho < |z| < 1$ ($\mu = 1/\rho$ es el módulo de D); a su vez, el anillo R con el corte radial $[\rho, 1]$ se transforma mediante la función $t = e^{\pi u i / \omega}$ en un rectángulo de vértices $0, 2\omega, 2\omega + \omega'$ y ω' del u -plano de manera que los bordes del corte se transforman en los lados laterales y $\tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{i}{\pi} \ln \frac{1}{\rho}$. Las características de la corriente en el rectángulo se determinan siguiendo el método de solución del problema 1289. Como las bases del rectángulo son líneas de corriente, la corriente se prolonga a través de ellas por el principio de simetría (véase el problema 1291). Después se determina el potencial complejo $\Phi(u)$ de la corriente doblemente periódica de periodos 2ω y $2\omega'$ obtenida; entonces $f(z) = \Phi[u(z)]$ (véase el libro de L. I. Sedov señalado en la pág. 181).

1330. Halle el potencial complejo de la corriente:

1) en el anillo circular $R: r_1 < |z| < r_2$ con las circulaciones Γ a lo largo de las circunferencias frontera;

2) en un recinto cualquiera D^{11} acotado y doblemente conexo con las circulaciones Γ a lo largo de los contornos frontera;

3) en el exterior de los círculos sin puntos comunes con las circulaciones $\pm \Gamma$ en las circunferencias frontera y con la condición $V_\infty = 0$;

4) en un recinto doblemente conexo D , que contiene el punto infinito, con las circulaciones $\pm \Gamma$ a lo largo de los contornos frontera y con la condición $V_\infty = 0$.

1331. Construya en el anillo circular $R: \rho < |z| < 1$ la corriente, formada por el doblete $(a; \rho)$ ($\rho < a < 1$), que circunda sin circulación los contornos frontera. Investigue la transformación $t = f(z)$ y construya el esquema de la posición de las líneas de corriente.

Sugerencia. Haga uso de las soluciones de los problemas 1289, 1) y 1322.

1332. Construya en un recinto doblemente conexo D que contiene el punto infinito la corriente que circunda sin circulación los contornos frontera y que tiene en el ∞ la velocidad $V_\infty = V e^{i\alpha}$.

1333. Construya en el anillo circular $R: \rho < |z| < 1$ la corriente, formada por un doblete y un cuádruplete situados en el punto $z = 1$, que circunda sin circulación las circunferencias frontera. Construya las líneas de corriente e investigue la transformación $t = f(z)$. Considere, en particular, el caso en que sólo hay un doblete.

¹¹ Aquí y en lo sucesivo se supone conocida la función que transforma el recinto D en un anillo.

Sugerencia. Represente el potencial complejo $f(z)$ en la forma

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-1)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-1)} + c_0 + c_1(z-1) + \dots$$

y examine qué valores de c_{-2} y c_{-1} son posibles.

1334. 1) Construya en el anillo circular $R: \rho < |z| < 1$ la corriente, formada por el torbellino ($a; \Gamma$) ($\rho < a < 1$), que circunda las circunferencias frontera con las circulaciones Γ_1 (a lo largo de la circunferencia $|z|=1$) y Γ_2 (a lo largo de la circunferencia $|z|=\rho$). ¿Pueden escogerse arbitrariamente Γ , Γ_1 y Γ_2 ? Considere, en particular, los casos en que $\Gamma_2=0$ y $\Gamma_2=-\Gamma_1$.

Investigue las transformaciones que realizan las funciones $t=f(z)$, $\mathfrak{z}=e^{2\pi i t/\Gamma}$ en el primer caso y las funciones $t=f(z)$, $\mathfrak{z}=e^{-4\pi i t/\Gamma}$ y $s=\sqrt{\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0}$ ($\mathfrak{z}_0=-e^{4\pi i \psi_0/\Gamma}$, donde ψ_0 es el valor de la función de corriente en el punto crítico) en el segundo caso. Construya en el plano u las líneas de corriente y las líneas equipotenciales.

2) Construya en un recinto doblemente conexo D que contiene el punto infinito la corriente que circunda los contornos frontera con las circulaciones Γ_1 y Γ_2 y que tiene la velocidad $V_\infty=Ve^{i\alpha}$.

§ 2. APLICACIONES A LA ELECTROSTATICA

Un campo electrostático plano de intensidad $E=E_x+iE_y=Ee^i$ se caracteriza por una función analítica $w(z)=u+iv$ llamada *potencial complejo*; v se llama *función potencial* (jes siempre uniforme!) y u , *función de fuerza*. Las curvas $v=\text{const}$ se llaman *líneas equipotenciales* y las curvas $u=\text{const}$, *líneas de fuerza del campo*. Se tiene

$$E = -\text{grad } v = -\overline{iw'(z)}, \quad E = |w'(z)|, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} - \arg w'(z),$$

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

En todos los problemas de este párrafo, en los que se trata de campos electrostáticos en recintos limitados por uno o varios contornos frontera, se supone que a lo largo de cada contorno simple la función potencial es constante (es decir, cada contorno de este tipo es un conductor).

Si a es un polo de $w'(z)$ y para w existe en una vecindad de a el desarrollo

$$w(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{\rho i}{z-a} + 2qi \ln \frac{1}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots,$$

el término $2qi \ln \frac{1}{z-a}$ define en el punto a una carga puntual plana de magnitud $\rho=2q$, designada ($a; 2q$) (en este caso a una unidad de longitud de un conductor rectilíneo perpendicular en el punto a al z -plano corresponde en el espacio la carga q); el término $\rho i/(z-a)$ define en el punto a un *dipolo* de momento ρ , designado ($a; \rho$) (ρ es un número complejo; el argumento de $\bar{\rho}$ determina la dirección del eje del dipolo); los restantes términos $c_{-k}/(z-a)^k$ ($k=2, \dots, n$) definen en el punto a *multipolos* de orden $2k$.

Respectivamente, si en el ∞ se tiene

$$w(z) = c_n z^n + \dots + \rho iz + 2qi \ln z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \dots,$$

el término $2qi \ln z$ define en el ∞ una carga puntual plana de magnitud $\rho = 2q$ y el término ρiz , un dipolo de momento ρ .

Si la función $w = u + iv$ se considera a la vez como el potencial complejo del campo electrostático $E = -\overline{w'(z)}$ y como el potencial complejo de la corriente de un líquido con la velocidad $V = \overline{w'(z)}$, esto conduce a la siguiente analogía electrohidrodinámica:

	Corriente de un líquido	Campo electrostático
u	Función potencial	Función de fuerza
$u = \text{const}$	Líneas equipotenciales	Líneas de fuerza
v	Función de corriente (puede ser multiforme)	Función potencial (siempre uniforme)
$v = \text{const}$	Líneas de corriente	Líneas equipotenciales
$v_2 - v_1$	Consumo del líquido	Diferencia de potencial
$\oint du$	Circulación $\Gamma = \oint V_s ds$	Flujo $N = \oint E_n ds$
—	Torbellino ($a; \Gamma$)	Carga puntual ($a; 2q$) $q = \Gamma/4\pi$
—	Manantial	—
—	Dipolo de momento ρ	Dipolo de momento $\rho/2\pi i$
—	Circundación con torbellinos y dipolos dados	Campo con cargas, dipolos y líneas equipotenciales frontera dados

En los problemas 1335—1342 hay que determinar a partir de los potenciales complejos dados $w(z)$ las funciones potencial y de fuerza, la intensidad del campo, el carácter de las singularidades (entre ellas, también en el ∞), así como construir esquemáticamente las familias de las líneas equipotenciales y de fuerza (q es un número real). Compare con las soluciones de los problemas 1272—1285.

1335. $w = cz$ ($c = \alpha + i\beta$). 1336. $w = 2qi \ln \frac{1}{z}$. 1337. $w = 2qi \ln \times \frac{z-a}{z-b}$. 1338. $w = 2qi \ln(z^2 - a^2)$ ($a > 0$).

1339. $w = \frac{\rho i}{z}$ ($\rho = |\rho| e^{i\alpha}$). 1340. $w = z \pm \frac{R^2}{z}$.

1341. $w = \rho iz + 2qi \ln \frac{1}{z}$ ($\rho > 0, q > 0$).

1342. $w = \rho iz + 2i \sum_{k=1}^n q_k \ln \frac{1}{z - a_k}$ ($\rho > 0, q_k > 0, a_1 < a_2 \dots < a_n$).

1343. Halle la ley de variación de una carga puntual ($a; 2q$) y de un dipolo ($a; \rho$):

1) en una transformación conforme univalente;

2) en la prolongación según el principio de simetría a través de una parte rectilínea o circular de una línea equipotencial.

1344. Pruebe que el potencial complejo de un campo electrostático, formado en un recinto simplemente conexo D cualquiera por la carga puntual $(a; 2q)$, se define mediante la fórmula

$$w = 2qi \ln \frac{1}{f(z, a)} + c,$$

donde $f(z, a)$ es la función que transforma conformemente el recinto D en el círculo unidad de manera que $f(a, a) = 0$ y c es una constante real.

Establezca la relación entre la función potencial $v(z)$ y la función de Green del recinto D (véase el problema 1043).

En los problemas 1345—1351 halle, empleando los resultados del problema 1344 o el principio de simetría, los potenciales complejos de los campos electrostáticos, formados por las cargas puntuales dadas en los recintos indicados.

1345. En el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ por la carga $(z_0; 2q)$.

1346. 1) En el círculo $|z| < R$ por la carga $(z_0; 2q)$; 2) en el exterior del círculo $|z| > R$ por la carga $(z_0; 2q)$.

1347. En el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ por la carga $(\infty, 2q)$.

1348. En el exterior del segmento $|x| < R, y = 0$ por la carga $(\infty, 2q)$.

1349. En el exterior del cuadrado $|x| < d, |y| < d$ por la carga $(\infty; 2q)$.

1350. En el rectángulo $|x| < a, |y| < b$ por la carga $(0, 2q)$.

1351. En el rectángulo $0 < x < 2a, 0 < y < 2b$ por la carga $(z_0; 2q)$.

En los problemas 1352—1356 construya los campos electrostáticos formados por los dipolos dados.

1352. En el círculo $|z| < R$ por el dipolo $(a; p)$.

1353. En el exterior del círculo $|z| > R$ por el dipolo $(a; p)$.

1354. En el exterior del segmento $|x| < R, y = 0$ por el dipolo $(\infty; p)$.

1355. En el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ por el dipolo $(\infty; p)$.

1356. En el rectángulo $|x| < a, |y| < b$ por el dipolo $(0; p)$ ($pi = \rho e^{i\alpha}$).

1357. Demuestre que el campo electrostático, formado en un recinto simplemente conexo cualquiera D por un dipolo $(a; p)$, se define por el potencial complejo $w = f(z)$, donde la función $f(z)$ transforma el recinto D en el exterior de un segmento horizontal de manera que $f(a) = \infty$ y que la parte principal de $f(z)$ en el punto a es igual a $\frac{pi}{z-a}$, si $a \neq \infty$, y a $pi z$, si $a = \infty$.

Halle $f(z)$, si se conoce la función $t(z)$ que transforma el recinto D :

1) en el interior del círculo unidad, si $a \neq \infty$, con la particularidad de que $t(a) = 0$ y $t'(a) > 0$;

2) en el exterior del círculo $|t| > R$, si $a = \infty$, con la particularidad de que $t(\infty) = \infty$ y $t'(\infty) = 1$.

1358. Construya en el recinto simplemente conexo D el campo electrostático, formado por cargas puntuales $\{(a_k; 2q_k)\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) y por el dipolo $(a; p)$.

Sea $g(\zeta, z)$ la función de Green del recinto D (véase la pág. 137), cuya frontera Γ se compone de contornos simples y lizos a trozos $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$; sea, además, n la normal interior de Γ y supongamos que Γ se recorre en la dirección positiva respecto a D . Si $u(z)$ es una función armónica en el recinto D y continua en Γ , de la fórmula de Green se deduce que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds$$

6

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[u(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} - \ln \frac{1}{|\zeta - z|} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial n} \right] ds.$$

Si el recinto D contiene el punto infinito y la función $u(z)$ es en él armónica debe agregarse a los segundos miembros de las fórmulas mencionadas $u(\infty)$. En este caso, la función de Green $g(z, \infty)$ puede ser representada en una vecindad del punto infinito en la forma

$$g(z, \infty) = \ln |z| + \gamma + o\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

La magnitud

$$\gamma = \lim_{z \rightarrow \infty} [g(z, \infty) - \ln |z|]$$

se llama *constante de Robin* del conjunto cerrado que representa el complemento de D en el z -plano; la magnitud $e^{-\gamma}$ se llama *capacidad* de este conjunto.

1359. Demuestre las siguientes proposiciones (n es la normal interior):

$$1) g(z, a) = \ln \frac{1}{|z-a|} - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta, a)}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta-z|} ds,$$

si $a \neq \infty$;

2) $g(z, \infty) = \gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta-z|} ds$ si $z \in D$ y el recinto D contiene el punto infinito;

3) $\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta-z|} ds = \gamma$ si $z \in \bar{D}$ y el recinto D contiene el punto infinito;

$$4) \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial g(\zeta, a)}{\partial n} ds = 1 \text{ si } a \neq \infty \text{ o si } a = \infty \in D.$$

Sugerencia. En el punto 1) haga uso de la propiedad de simetría de la función de Green $g(\zeta, z) = g(z, \zeta)$ y de la representación integral de una función armónica a través de sus valores frontera. En el punto 2) haga uso de la representación integral de la función $\ln|\zeta - z| + g(\zeta, z) - g(\zeta, \infty)$ armónica en D , del paso al límite y de la propiedad de simetría $g(\infty, z) = g(z, \infty)$. En el punto 3) proceda de la misma forma, pero partiendo de la función $\ln|\zeta - z| - g(\zeta, \infty)$.

La función

$$v_0(z) = 2q \ln \frac{1}{|z-a|}$$

se llama *potencial logarítmico* de la carga puntual ($a; 2q$). En el z -plano ampliado $v_0(z)$ representa el potencial logarítmico de dos cargas puntuales: ($a; 2q$) y ($\infty; -2q$).

Sea Γ un contorno que verifica las condiciones indicadas en la pág. 196 y sean $\rho(\zeta)$ y $\nu(\zeta)$ reales y continuas a lo largo de Γ .

La integral

$$v(z) = \int_{\Gamma} \rho(\zeta) \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds$$

se llama *potencial logarítmico de una capa simple de densidad de distribución* $\rho(\zeta)$ (en el espacio le corresponde el potencial de una superficie cilíndrica cargada de base Γ y de densidad superficial de carga $\frac{\rho}{2}$, es decir, a un elemento cuadrado de la superficie sobre el arco ds corresponde la carga $\frac{\rho}{2} ds^2$).

La función $v(z)$ es continua en el z -plano finito y armónica en todo punto no perteneciente a Γ , a excepción del punto $z = \infty$, donde tiene una singularidad logarítmica

$$v(z) = -2q \ln|z| + o\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad 2q = \int_{\Gamma} \rho(\zeta) ds$$

(esto significa que al potencial $v(z)$ corresponde la carga ($\infty; -2q$)).

La integral

$$v_1(z) = \int_{\Gamma} \nu(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds$$

se llama *potencial logarítmico de una capa doble de densidad de distribución* $\nu(\zeta)$; a lo largo de Γ se hallan distribuidos dipolos de ejes orientados según la dirección dada de la normal n a Γ , y según la dirección de la normal interior, si Γ es la frontera de un recinto; $\nu(\zeta)$ es la densidad de distribución de los dipolos). Si $\theta(\zeta, z)$ es el ángulo entre n y el vector que va de ζ a z y $d\varphi(\zeta, z)$ es el ángulo bajo el cual se ve desde z el elemento de arco ds , se tiene

$$v_1(z) = \int_{\Gamma} \nu(\zeta) \frac{\cos \theta(\zeta, z)}{|\zeta - z|} ds = \int_{\Gamma} \nu(\zeta) d\varphi(\zeta, z).$$

En particular, para un contorno cerrado Γ y para $\nu(\zeta) = 1$ se tiene

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } z \text{ se halla dentro de } \Gamma, \\ \pi, & \text{si } z \text{ se halla sobre } \Gamma, \\ 0, & \text{si } z \text{ se halla fuera de } \Gamma \end{cases}$$

(véase también el problema 1041).

La función de Green $g(z, a)$ de un recinto D puede ser considerada también como un potencial de un campo electrostático formado por la carga puntual

¹¹ Véase *Nevanlinna R.*, *Eindeutige analytische funktionen*, Springer, Berlín, 1953, cap. V, § 2.

($a; 1$), si la frontera Γ del recinto D está conectada con tierra. El problema 1359, 1) demuestra que en el caso en que $a \neq \infty$ la conexión de Γ con tierra equivale a la distribución a lo largo de Γ de una carga de densidad de distribución $\rho(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial g(\zeta, a)}{\partial n}$. Además, según el punto 4) del problema 1359, la magnitud total de la carga es igual a -1 . En el caso en que $a = \infty$, la carga ($\infty, 1$) y la conexión de Γ con tierra equivalen conjuntamente a la distribución a lo largo de Γ de una carga de densidad de distribución $\rho(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n}$ y de magnitud total -1 y a la adición de un campo de potencial constante γ (véase 1359, 2)). En estos casos las distribuciones a lo largo de Γ se llaman inducidas por la carga ($a; 1$).

En los problemas 1360—1363 halle la densidad de distribución $\rho(\zeta, a)$ a lo largo del contorno Γ inducida por la carga ($a; 1$) y el potencial correspondiente de la capa simple $v(z, a)$ para los recintos limitados por el contorno Γ .

1360. Γ es el eje real, $\text{Im } a > 0$.

1361. 1) Γ es la circunferencia $|z| = R$ y $|a| < R$; 2) Γ es la circunferencia $|z| = R$ y $|a| > R$ (considere, en particular, el caso en que $a = \infty$).

1362. Γ es el segmento $|x| \leq R, y = 0$ del eje real y $a = \infty$.

1363. Γ es la elipse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ y $a = \infty$.

1364. Considerando conocida la función de Green para un recinto D que contiene el punto $z = \infty$, resuelva el problema de Roben: halle la densidad de distribución $\rho(\zeta)$ a lo largo de la frontera Γ del recinto D de una carga unidad que crea fuera de D y a lo largo de Γ un potencial constante¹⁾.

Sugerencia. Véase el problema 1359, 3) y 4).

En los problemas 1365—1367 resuelva el problema de Roben para los recintos dados D .

1365. D es el exterior del círculo $|z| > R$,

1366. D es el exterior del segmento $|x| \leq R, y = 0$.

1367. D es el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

En los problemas 1368—1371 halle las capacidades (véase la pág. 196) de los conjuntos cerrados.

1368. $|z| \leq R$. 1369. $|x| \leq R, y = 0$.

1370. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. 1371. $|z^2 - a^2| \leq a^2 (a > 0)$.

1372. Sea $\varphi(\zeta)$ una función continua real definida y diferenciable a lo largo de un contorno cerrado simple Γ .

¹⁾ En el libro de R. Nevanlinna mencionado en la pág. 197 se trata de la solución del problema general de Roben que exige determinar una distribución no negativa de una carga unidad sobre un conjunto dado E tal que el potencial logarítmico correspondiente tome en cada punto del conjunto E un mismo valor constante.

Demuestre que la parte real de la integral de tipo de Cauchy $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$ es un potencial logarítmico de una capa doble de densidad $\varphi(\zeta)$ y que su parte imaginaria es un potencial logarítmico de una capa simple de densidad $-\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{ds}$.

1373. Demuestre que toda función $v(z)$ acotada y armónica en el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ puede ser representada en forma de un potencial logarítmico de una capa doble:

$$v(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|t-z|} dt.$$

En cambio, si $v(z)$ es regular en el ∞ , puede ser representada también en forma de un potencial logarítmico de una capa simple:

$$v(z) = v(\infty) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v(t)}{\partial n} \ln \frac{1}{|t-z|} dt.$$

1374. Halle en el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ el potencia complejo del campo electrostático, si su potencial $v(z)$ toma a lo largo del eje real valores dados constantes a pedazos. Represente la función potencial en términos de las medidas armónicas de los segmentos correspondientes del eje real (véase la pág. 141):

- 1) φ en el intervalo $(-\infty, a)$ y 0 en el intervalo (a, ∞) ;
- 2) φ en el intervalo (a, b) y 0 en los intervalos $(-\infty, a)$ y (b, ∞) ;
- 3) $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ en los intervalos $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ respectivamente y 0 en el intervalo (a_n, ∞) (aquí $a_1 < a_2 < \dots < a_n$);
- 4) φ_0 en el intervalo (a_n, ∞) y $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ en los intervalos $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots$, respectivamente.

Sugerencia. En el punto 1) haga uso de la transformación conforme en una franja; en los demás puntos haga uso del método de superposición (se puede también recurrir a la fórmula integral de Schwarz para el semiplano, véase la pág. 141).

1375. Halle los potenciales complejos $\omega(z)$ y los potenciales $v(z)$ en los recintos doblemente conexos con la diferencia dada $d = v_2 - v_1$ de los potenciales v_1 y v_2 de los contornos frontera:

- 1) en el anillo circular $r_1 < |z| < r_2$;
- 2) en un recinto cualquiera D doblemente conexo.

1376. Demuestre que, si D es un recinto cualquiera doblemente conexo y si la función potencial toma valores constantes (v_1 y v_2)

en cada uno de los contornos que lo limitan, se tiene

$$w(z) = \frac{i(v_2 - v_1)}{\ln \mu} \ln t(z) + c + iv_1,$$

$$v(z) = \frac{v_2 - v_1}{\ln \mu} \ln |t(z)| + v_1,$$

donde $t(z)$ transforma conformemente D en el anillo $1 < |t| < \mu$ (μ es el módulo de D) y el contorno frontera de potencial v_1 se convierte en la circunferencia $|t| = 1$; c es un número real.

1377. Halle los potenciales complejos en los recintos doblemente conexos indicados (los potenciales v_1 y v_2 de los contornos frontera son constantes).

1) En el exterior de las circunferencias $|z \pm a| = R$ ($a > R$) (v_1 es el potencial de la circunferencia de la izquierda).

2) En el exterior de las circunferencias $|z| = r_1$ (con el potencial v_1) y $|z - a| = r_2$ ($a > r_1 + r_2$).

3) En el anillo circular no concéntrico comprendido entre las circunferencias $|z| = R$ (con el potencial v_1) y $|z - a| = r$ ($0 < a < R - r$).

4) En la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ con un corte a lo largo del segmento que une sus focos (el potencial sobre la elipse es v_1).

5) En el exterior de los segmentos $1 < |x| < \frac{1}{k}$, $y = 0$ ($0 < k < 1$).

El segmento de la izquierda tiene el potencial v_1 .

6) En el exterior de los segmentos $|x| < 1$, $y = \pm \pi$. El potencial del segmento superior es v_1 .

1378. Sea D un recinto múltiplemente conexo con la frontera Γ compuesta por n contornos Γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) suaves a pedazos y sea $\omega_k(z)$ la medida armónica del contorno Γ_k (véase la pág. 141). Si el recinto D es acotado, aceptaremos que Γ_n es su contorno exterior. Demuestre las proposiciones siguientes:

1) Si el recinto D es acotado, se tiene

$$\omega_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\omega_n(z) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega_n(\zeta)}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds.$$

Si el recinto D contiene el punto infinito, se tiene

$$\omega_k(z) = \omega_k(\infty) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

2) Para los puntos z no pertenecientes al recinto D los segundos miembros de las igualdades indicadas en el punto 1) toman el valor 1 en el recinto acotado por Γ_k (respectivamente, por Γ_n) y comple-

mentario de D y el valor 0 en el recinto limitado por Γ_i , $i \neq k$ y complementario de D .

Observación. Según el punto 1) las funciones $\omega_k(z)$ representan en el recinto D los potenciales creados por las cargas de distribución inducidas a lo largo de Γ con las densidades de distribución $\rho_k(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n}$.

En el caso en que el recinto D sea acotado, las magnitudes $\omega_1(z), \dots, \omega_{n-1}(z)$ coinciden exactamente con los potenciales logarítmicos de las distribuciones señaladas inducidas a lo largo de Γ .

Los valores de las cargas de distribución p_{ik} , inducidas a lo largo del contorno Γ_i ($i, k=1, 2, \dots, n$) por el potencial $\omega_k(z)$, es decir,

$$p_{ik} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n} ds = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \omega_i \frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n} ds,$$

se llaman *constantes de capacidades mutuas* de los contornos frontera (algunas propiedades de los números p_{ik} se consideran en los problemas 1075—1077).

1379. Halle las medidas armónicas $\omega_k(z)$, así como las magnitudes $\rho_k(\zeta)$ y p_{ik} definidas en la observación al problema anterior, para:

- 1) el anillo circular $1 < |z| < \mu$;
- 2) un recinto cualquiera D doblemente conexo, considerando conocida la función que transforma este recinto en un anillo.

1380. Sea D el recinto del problema 1378 y sea $v(z)$ el potencial acotado del campo electrostático que toma valores constantes α_k ($k=1, 2, \dots, n$) en los contornos frontera (conductores) Γ_k . Demuestre las siguientes proposiciones:

$$1) v(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \omega_k(z).$$

2) Si el recinto D es acotado y Γ_n es su contorno exterior, se tiene

$$v(z) = \alpha_n - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial v(\zeta)}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds;$$

en cambio, si D contiene el punto ∞ , se tiene

$$v(z) = v(\infty) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial v(\zeta)}{\partial n} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds.$$

Demuestre que los segundos miembros de estas fórmulas son iguales a α_k ($k=1, 2, \dots, n$) en los recintos limitados por Γ_k y complementarios a D .

3) Los valores de las cargas de distribución inducidas a lo largo de Γ_i son iguales a

$$2q_i = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial v(\zeta)}{\partial n} ds = \sum_{k=1}^n p_{ik} \alpha_k,$$

siendo $\sum_{i=1}^n q_i = 0$.

Sugerencia. Véase el problema 1075, 1).

$$4) \frac{1}{2\pi} \iint_D (\text{grad } v)^2 dx dy = \sum_{i,k=1}^n p_{ik} \alpha_i \alpha_k.$$

Sugerencia. Véase el problema 1076.

5) Si $w(z)$ es el potencial complejo del campo, para la intensidad de distribución inducida se tiene

$$\rho(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial v(\zeta)}{\partial n} = \pm \frac{1}{2\pi} |\omega'(\zeta)|.$$

Sea D un recinto cualquiera múltiplemente conexo cuya frontera Γ está compuesta por los contornos de Jordan $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Existen transformaciones conformes del recinto D en cada uno de los recintos canónicos siguientes que en las condiciones indicadas se determinan unívocamente (a, b son puntos arbitrarios del recinto D , A es un número complejo arbitrario):

1) En el plano con cortes paralelos. La función transformadora $f(z)$ se determina unívocamente, si se especifica su polo b y el coeficiente A del desarrollo

$$f(z) = \begin{cases} \frac{A}{z-b} + c_1(z-b) + \dots & (b \neq \infty), \\ Az + \frac{c_{-1}}{z} + \dots & (b = \infty). \end{cases}$$

2) En el plano con cortes radiales (así llamaremos el plano con cortes a lo largo de segmentos situados a lo largo de rayos que nacen en el origen de coordenadas) o con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos de centro en el origen de coordenadas. La función $f(z)$ se define por su cero a , su polo b y el coeficiente A del desarrollo

$$f(z) = \begin{cases} \frac{A}{z-b} + c_1(z-b) + \dots & (b \neq \infty), \\ Az + \frac{c_{-1}}{z} + \dots & (b = \infty). \end{cases}$$

3) En un círculo con cortes radiales o con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos (de centro en el origen de coordenadas). La función $f(z)$ se define por las condiciones $f(a)=0$, $f'(a)=1$ y por la especificación del contorno Γ_k que se transforma en la circunferencia.

4) En un anillo con cortes radiales o con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos (de centro en el origen de coordenadas). La transformación se define unívocamente, salvo transformaciones de semejanza y rotación, al especificar los contornos que se transforman en las circunferencias frontera interior y exterior.

Véase, por ejemplo, Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, „Наука“, 1966, гл. V (Goluzin G. M., Teoría geométrica de las funciones de variable compleja).

1381. Considerando conocidas la función que transforma conformemente el recinto D en el plano con cortes paralelos y las medidas armónicas $\omega_k(z)$ de los contornos frontera Γ_k ($k=1, 2, \dots, n$)¹⁾, halle el potencial del campo electrostático creado en el recinto D por el dipolo ($a; p$) cuando la frontera Γ del recinto está conectada con tierra.

1382. Considerando conocida la función de Green del recinto D , halle el potencial del campo electrostático en este recinto, formado por una carga puntual ($a; 2q$) ($a \in D$) y con potenciales dados α_k en los contornos frontera Γ_k ($k=1, 2, \dots, n$). Obtenga la fórmula del problema **1344** para el caso en que el recinto D sea simplemente conexo.

1383. Determine el carácter del campo electrostático definido en un recinto múltiplemente conexo D por el potencial complejo $w=f(z)$, donde $f(z)$ es la función que transforma este recinto en el plano con cortes paralelos al eje real.

1384. Determine el carácter del campo electrostático definido en un recinto D por el potencial complejo $w=2qi \ln \frac{1}{f(z)}$, donde la función $f(z)$ transforma el recinto D en:

- 1) el plano con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos de centro en el origen de coordenadas;
- 2) el círculo con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos de centro en el origen de coordenadas;
- 3) el anillo circular con cortes a lo largo de arcos circulares concéntricos de centro en el origen de coordenadas.

Halle en todos los casos los flujos del vector de intensidad del campo a través de los contornos frontera.

1385. Construya el esquema de disposición de las líneas equipotenciales y de fuerza de un campo electrostático:

- 1) formado por un dipolo en el ∞ en un recinto infinito doblemente conexo;
- 2) formado por una carga puntual en un recinto acotado D doblemente conexo.

En ambos casos los potenciales en los contornos frontera son constantes.

1386. 1) Expresé el potencial $v(z)$ del campo electrostático formado en un recinto múltiplemente conexo D por cargas de

¹⁾ Tanto una como otras se definen mediante la función de Green; véase, por ejemplo, el § 1 del complemento de M. Schiffer al libro: R. Courant, Dirichlet's Principle, Conformal Mappings and Minimal Surfaces, Interscience Publ., New York, 1950.

distribución $2q_k$ sobre $\Gamma_k \left(\sum_{k=1}^n q_k = 0 \right)$ en términos de las medidas armónicas $\omega_k(z)$ de sus contornos frontera. (A lo largo de cada contorno Γ_k el potencial es constante).

Sugerencia. Haga uso de los resultados del problema 1380.

2) Exprese el potencial $v(z)$, si $\sum_{k=1}^n q_k = q \neq 0$ y hay una carga puntual $(a; -2q)$.

Sugerencia. La determinación del potencial $v(z) + 2qg(z, a)$ se reduce al punto 1).

1387. Halle el potencial $v(z)$ en el anillo circular $r_1 < |z| < r_2$ si los contornos del mismo llevan cargas de distribución $2q_1$ y $2q_2$ dadas y, además, en el caso en que $q_1 + q_2 = q \neq 0$, hay una carga puntual $(a; -2q)$.

Sugerencia. La función de Green del anillo circular se puede encontrar escogiendo convenientemente las circulaciones en la solución del problema 1334. Por medio de las mismas también se determinan las cargas de distribución inducidas en los contornos frontera, relacionadas con la función de Green.

§ 3. APLICACIONES AL PROBLEMA PLANO DE CONDUCCIÓN DE CALOR

El problema plano sobre la distribución estacionaria de la temperatura en un cuerpo se caracteriza por una función analítica $w(z) = u + iv$ (u es la temperatura) llamada *potencial complejo del campo térmico*. El vector $\mathbf{Q} = -k \text{ grad } u = -k w'(z)$ (k es el coeficiente de conducción térmica que en lo sucesivo se considera constante) se llama *vector de flujo del calor*. El flujo de calor a través del contorno C es igual a

$$\int_C Q_n ds = -k \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = -k \int_C dv$$

(n es la normal exterior al contorno C recorrido en la dirección positiva). Como la función u es uniforme, el flujo de calor para un contorno cerrado C es también igual a $ik \int_C w'(z) d'z$. Si en una vecindad del punto a se tiene

$$w(z) = \left[\dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots \right] + \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{1}{z-a},$$

el término $\frac{q}{2\pi k} \ln \frac{1}{z-a}$ define en el punto a un manantial $(a; q)$ de potencia q y el término $\frac{c_{-1}}{z-a}$ define en el punto a un doblete.

Tiene lugar la siguiente analogía con la corriente de un fluido y con el campo electrostático:

	Campo térmico	Corriente de un fluido	Campo electrostático
Potencial complejo	$w(z) = u + iv$	$w(z) = u + iv$	$iw(z) = -v + iu$
Vector del campo u	$Q = -k \text{ grad } u = -k w'(z)$	$V = \text{grad } u = w'(z)$	$E = -\text{grad } u = -w'(z)$
$u = \text{const}$	Temperatura	Función potencial	Función potencial
v	Línea isoterma	Líneas equipotenciales	Líneas equipotenciales
$v = \text{const}$	Función de corriente	Función de corriente	$-v$, función de fuerza
	Líneas de corriente	Líneas de corriente	Líneas de fuerza
	Manantial ($a; q$)	Manantial ($a; -q/k$)	Carga puntual ($a; q/2\pi k$)
	Doblete	Doblete	Dipolo
	El campo térmico con manantiales, dobletes y contornos frontera isotérmicos dados	La corriente, definida por el potencial complejo $iw(z)$ con torbellinos y dobletes dados que circunda los contornos frontera	El campo con cargas, dipolos y contornos frontera equipotenciales dados

1388. Formule el principio de simetría para la prolongación de un manantial de calor a través de una parte rectilínea o circular de la frontera del recinto. Halle la distribución de la temperatura en un recinto cualquiera D simplemente conexo, si se sabe que en el interior de este recinto hay un manantial ($a; q$) y que la temperatura en la frontera tiene un valor constante C .

En los problemas **1389—1392** halle la distribución de la temperatura en los recintos indicados a partir de los manantiales dados, suponiendo que la temperatura es constante a lo largo de la frontera.

1389. En el semiplano superior $\text{Im } z > 0$; el manantial es ($a; q$).

1390. En el círculo $|z| < R$; el manantial es ($a; q$).

1391. En la semifranja $|x| < a, y > 0$ con el manantial ($ih; q$) ($h > 0$).

1392. En el rectángulo $|x| < a, |y| < b$ con el manantial ($0; q$).

1393. 1) Interprete la función de Green $g(z, a)$ de un recinto plano D en términos de la teoría de conducción de calor.

2) Suponiendo conocida la función de Green del recinto D halle la distribución de la temperatura en este recinto, si se sabe que D tiene un manantial ($a; q$) y que en los contornos frontera

Γ_k ($k=1, 2, \dots, n$) la temperatura tiene valores constantes u_k . Exprese la respuesta en términos de las medidas armónicas $\omega_k(z)$ de los contornos frontera.

1394. Halle la distribución de la temperatura en el interior de un anillo circular $r_1 < |z| < r_2$, si se sabe que en el interior del anillo hay un manantial $(a; q)$ y que en las circunferencias frontera la temperatura tiene valores constantes: u_1 en la circunferencia $|z|=r_1$ y u_2 en la circunferencia $|z|=r_2$.

Sugerencia. Véase los problemas análogos 1334 y 1387.

CAPITULO XI

GENERALIZACION DE FUNCIONES ANALITICAS

En este capítulo se emplean las notaciones introducidas en el § 5 del capítulo I para las derivadas formales según Cauchy. También para las diferenciales se emplean las notaciones correspondientes: $d\bar{z} = dx - i dy = \bar{d}z$, $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$

§ 1. TRANSFORMACIONES CASICONFORMES

Se llaman *características* de una elipse la razón p de sus semiejes ($p \geq 1$) y, si $p \neq 1$, el ángulo θ ($0 \leq \theta < \pi$) que el eje mayor de la elipse forma con el eje Ox .

1395. Demuestre que la ecuación de la elipse de centro en el origen de coordenadas, cuyo eje menor es h y cuyas características son p y θ , puede ser representada en la forma

$$\gamma x^2 - 2\beta xy + \alpha y^2 = ph^2,$$

donde $\alpha = p \cos^2 \theta + \frac{1}{p} \sin^2 \theta$, $\beta = \left(p - \frac{1}{p}\right) \cos \theta \sin \theta$, $\gamma = p \sin^2 \theta + \frac{1}{p} \cos^2 \theta$, o en la forma

$$|z + \mu \bar{z}| = \lambda$$

donde

$$\mu = -\frac{p-1}{p+1} e^{2i\theta}, \quad \lambda = \frac{2ph}{p+1}.$$

Las magnitudes α , β y γ del problema 1395 también se llaman características de la elipse. Están ligadas por la relación $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$. La magnitud μ se llama característica compleja de la elipse. Notemos que $|\mu| < 1$. En el caso del círculo $\mu = 0$, $p = 1$, $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$.

1396. Demuestre las siguientes relaciones entre las diferentes características de la elipse:

$$1) \quad p = \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|} = \frac{\alpha+\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2 + \beta^2}, \quad p + \frac{1}{p} = \alpha + \beta;$$

$$2) \quad 2\theta = \arg \mu + \pi \quad (-\pi \leq \arg \mu < \pi);$$

$$3) \begin{cases} \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\beta}{\alpha - \gamma}, \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{\gamma - \alpha + \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + 4\beta^2}}{2\beta}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (1 - |\mu|^2) \alpha = 1 + 2|\mu| \cos 2\theta + |\mu|^2, \\ (1 - |\mu|^2) \beta = 2|\mu| \operatorname{sen} 2\theta, \\ (1 - |\mu|^2) \gamma = 1 - 2|\mu| \cos 2\theta + |\mu|^2; \end{cases}$$

$$5) \frac{1}{\rho} \leq \alpha, \gamma \leq \rho; |\beta| \leq \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right).$$

Demuestre las siguientes relaciones entre las características de dos elipses:

$$6) |\rho_2 - \rho_1| \leq |\alpha_2 - \alpha_1| + |\beta_2 - \beta_1| + |\gamma_2 - \gamma_1|;$$

$$7) \begin{cases} |\alpha_2 - \alpha_1| \leq |\rho_2 - \rho_1| + \sqrt{\left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2}\right) \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1}\right)} \operatorname{sen} |\theta_2 - \theta_1|, \\ |\beta_2 - \beta_1| \leq |\rho_2 - \rho_1| \left(1 + \frac{1}{\rho_2 \rho_1}\right) + \\ \quad + 2 \sqrt{\left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2}\right) \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1}\right)} \operatorname{sen} |\theta_2 - \theta_1|, \\ |\gamma_2 - \gamma_1| \leq |\rho_2 - \rho_1| + \sqrt{\left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2}\right) \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1}\right)} \operatorname{sen} |\theta_2 - \theta_1|; \end{cases}$$

$$8) |\mu_2 - \mu_1| \leq ||\mu_2| - |\mu_1|| + 2 \sqrt{|\mu_2 \mu_1|} \operatorname{sen} |\theta_2 - \theta_1|;$$

$$\left| \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 - \bar{\mu}_1 \mu_2} \right| \leq \frac{|\rho_2 - \rho_1|}{\rho_2 + \rho_1} + \sqrt{(\rho_2 - 1)(\rho_1 - 1)} \operatorname{sen} |\theta_2 - \theta_1|.$$

Sugerencia. Para la demostración de las desigualdades 6), 7) y 8) resultan útiles las desigualdades de tipo

$$|r_2 \cos \lambda_2 - r_1 \cos \lambda_1| \leq |r_2 e^{i\lambda_2} - r_1 e^{i\lambda_1}| \leq |r_2 - r_1| + 2 \sqrt{r_2 r_1} \operatorname{sen} |\lambda_2 - \lambda_1|,$$

$$||a_2 + ib_2| - |a_1 + ib_1|| \leq |a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|.$$

La transformación $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ se llama *afín*, si

$$u = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad v = a_2 x + b_2 y + c_2. \quad (1)$$

El jacobiano de esta transformación es $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Si $\Delta = 0$, la transformación es *degenerada*.

1397. Demuestre las siguientes propiedades de las transformaciones afines:

1) Una transformación afín puede ser representada en la forma

$$w = Az + B\bar{z} + C.$$

Expresé los coeficientes A , B y C por medio de los coeficientes de la transformación (1) y pruebe que $\Delta = |A|^2 - |B|^2$. 2) Si $\Delta \neq 0$, existe la transformación inversa

$$z = A_1 w + B_1 \bar{w} + C_1.$$

Expresa sus coeficientes por medio de los coeficientes de la transformación (1) y pruebe que $\Delta_1 = |A_1|^2 - |B_1|^2 = 1/\Delta$.

3) Si $\Delta \neq 0$, la transformación conserva la paralelidad de las rectas y transforma elipses en elipses. Las elipses con la característica compleja $\mu = B/A$, para $\Delta > 0$, y $\mu = \overline{A}/\overline{B}$, para $\Delta < 0$, se transforman en circunferencias.

Las circunferencias se transforman en circunferencias sólo para las transformaciones ortogonales $w = Az + C$ ó $w = B\bar{z} + C$.

4) Si $\Delta > 0$, la transformación conserva la dirección del recorrido; si $\Delta < 0$, la transformación cambia la dirección del recorrido por la contraria.

5) Si $\Delta = 0$ pero no todos los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 son iguales a cero, la transformación se puede representar en la forma

$$w = 2|A|e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}|z|\cos\left(\varphi + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + C,$$

donde $\varphi = \arg z$, $\alpha = \arg A$, $\beta = \arg B$. Indique el significado geométrico de esta transformación.

Se llaman características de una transformación afín las características (ρ, θ) , (α, β, γ) y la característica compleja μ de las elipses que se transforman en círculos (véase el problema 1397, 3)).

Se llaman características de una transformación continuamente diferenciable

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

de jacobiano $J > 0$ las características $\rho(z)$, $\theta(z)$; $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ y la característica compleja $\mu(z)$ de la transformación afín

$$du = u_x dx + u_y dy, \quad dv = v_x dx + v_y dy$$

ó

$$dw = w_x dz + w_y d\bar{z}.$$

En esta transformación, a un círculo infinitamente pequeño

$$du^2 + dv^2 = d\rho^2$$

le corresponde una elipse infinitamente pequeña

$$\gamma dx^2 - 2\beta dx dy + \alpha dy^2 = \rho dh^2$$

(dh es el eje menor) ó, en otra forma,

$$|dz + \mu d\bar{z}| = \frac{2\rho}{\rho+1} dh.$$

1398. Demuestre que para una transformación afín no degenerada tienen lugar las relaciones

$$\frac{\gamma}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{-\beta}{a_1 b_1 + a_2 b_2} = \frac{\alpha}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{1}{|\Delta|}.$$

1399. Demuestre que para las características de una transformación continuamente diferenciable de jacobiano positivo son válidas las relaciones

$$1) \frac{\gamma}{u_x^2 + v_x^2} = \frac{-\beta}{u_x u_y + v_x v_y} = \frac{\alpha}{u_y^2 + v_y^2} = \frac{pdh^2}{d\rho^2} = \frac{1}{J};$$

$$2) u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 = J \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right);$$

$$3) \rho = \max \left| \frac{dw}{dz} \right| / \min \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{|\omega_z| + |\omega_{\bar{z}}|}{\left| |\omega_z| - |\omega_{\bar{z}}| \right|};$$

$$4) \mu = \omega_{\bar{z}}/\omega_z = -\frac{\rho-1}{\rho+1} e^{2i\theta};$$

$$5) \sqrt{\frac{J}{\rho}} \leq \left| \frac{dw}{dz} \right| \leq \sqrt{\rho J}.$$

Una transformación univalente continuamente diferenciable $w = u + iv$ de jacobiano positivo se llama *transformación casiconforme con las características* $\rho(z)$, $\theta(z)$ o $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ o $\mu(z)$, si transforma elipses infinitamente pequeñas de estas características en círculos infinitamente pequeños.

1400. Demuestre que una transformación casiconforme satisface el sistema de ecuaciones

$$\alpha u_x + \beta u_y = v_y, \quad \beta u_x + \gamma u_y = -v_x$$

o, empleando la forma compleja, la ecuación

$$\omega_{\bar{z}} = \mu \omega_z.$$

Sugerencia. A la ecuación $|dz + \mu d\bar{z}| = \text{const}$ le corresponde la ecuación $dw = \text{const}$.

Observación. Las ecuaciones indicadas en el problema se llaman ecuaciones de Beltrami. La característica μ se llama coeficiente de Beltrami.

1401. Demuestre que una transformación univalente continuamente diferenciable $w = u + iv$ de jacobiano positivo, que transforma círculos infinitamente pequeños en elipses infinitamente pequeñas de características $\rho(z)$, $\theta(z)$ o $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ o $\mu(z)$, satisface el sistema de ecuaciones

$$u_x + \beta u_y = \alpha v_y, \quad -\beta u_x + u_y = -\alpha v_x$$

o, empleando la forma compleja, la ecuación

$$\omega_{\bar{z}} = \nu \bar{\omega}_z, \quad \nu = -\mu = \frac{\rho-1}{\rho+1} e^{2i\theta}.$$

1402. Demuestre que la ecuación de Beltrami $\omega_{\bar{z}} = \mu(z) \omega_z$ es invariante respecto a las transformaciones analíticas de la función w y que la ecuación $\omega_{\bar{z}} = \nu(z) \bar{\omega}_z$ es invariante respecto a las transformaciones conformas de la variable z .

1403. Sea $w = u + iv$ una transformación univalente continuamente diferenciable de jacobiano positivo que transforma elipses infinitamente pequeñas de características ρ , θ en elipses infinita-

mente pequeñas de características ρ_1, θ_1 (una transformación tal se llama transformación casiconforme con dos pares de características $\rho, \theta; \rho_1, \theta_1$ o con dos ternas de características $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$). Demuestre que la transformación $w = u + iv$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha u_x + (\beta + \beta_1) u_y &= \alpha v_y, \\ (\beta - \beta_1) u_x + \gamma u_y &= -\alpha_1 v_x, \end{aligned}$$

que puede ser representado en la forma

$$w_{\bar{z}} = q_1 w_z + q_2 \bar{w}_{\bar{z}},$$

donde

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\rho_1 (\rho^2 - 1)}{(\rho \rho_1 + 1) (\rho + \rho_1)} e^{2i\theta}, \\ q_2 &= \frac{\rho (\rho_1^2 - 1)}{(\rho \rho_1 + 1) (\rho + \rho_1)} e^{2i\theta}. \end{aligned}$$

Sugerencia. La ecuación $|dz + \mu \bar{d}z| = \text{const}$ corresponde a la ecuación $|dw + \mu_1 \bar{d}w| = \text{const}$ con μ y μ_1 conocidos.

1404. Sea $\zeta = f(z)$ una transformación casiconforme de característica μ_f :

$$\bar{f}_z = \mu_f \bar{f}_z$$

y sea $w = g(\zeta)$ una transformación casiconforme de característica μ_g :

$$\bar{g}_\zeta = \mu_g \bar{g}_\zeta.$$

Demuestre que la superposición $F(z) = g[f(z)] = g \circ f$ es una transformación casiconforme de característica

$$\mu_F = \frac{\mu_f + \mu_g \bar{f}_z / f_z}{1 + \mu_g \mu_f \bar{f}_z / f_z}.$$

Demuestre también las relaciones

$$\begin{aligned} \mu_g &= \frac{f_z}{\bar{f}_z} \frac{\mu_f - \mu_f}{1 - \mu_f \mu_f}, \\ \mu_{f^{-1}(z)} &= -\mu_f(z) \frac{f_z}{\bar{f}_z}, \\ \mu_F &= \frac{\bar{f}_z}{f_z} \frac{\mu_g - \mu_{f^{-1}}}{1 - \mu_{f^{-1}} \mu_g}. \end{aligned}$$

Observación. Si μ_F se considera conocido, la magnitud

$$\sup \ln \frac{1 + |\mu_g|}{1 - |\mu_g|}$$

puede tomarse por la distancia entre μ_f y μ_F . Análogamente, a través de μ_F se determina la distancia entre μ_g y $\mu_{f^{-1}}$.

1405. Sean $\rho_{w/z}$, $\theta_{w/z}$ las características ρ , θ de una transformación casiconforme $w = f(z)$. Demuestre que

$$\rho_{z/w} = \rho_{w/z}$$

$$\theta_{z/w} = \theta_{w/z} \pm \frac{\pi}{2} + \arg f'_z$$

y que para la transformación conforme compuesta $w[z(t)]$ se tiene

$$\rho_{w/t} \leq \rho_{w/z} \rho_{z/t}.$$

1406. Pruebe que para las transformaciones casiconformes

$u = f(x)$, $v = y$ (dilatación-compresión longitudinal),

$u = x$, $v = f(y)$ (dilatación-compresión transversal),

$\rho = r$, $\theta = f(\varphi)$ (dilatación-compresión angular) la característica es

$$\rho = \max\left(f', \frac{1}{f'}\right),$$

y que para la transformación $\rho = f(r)$ $\theta = \varphi$ (dilatación-compresión radial) la característica es

$$\rho = \max\left(\frac{rf'}{f}, \frac{f}{rf'}\right).$$

1407. Construya la transformación casiconforme del círculo $|z| < R$ en sí mismo que transforma el punto $z = a$ ($|a| < R$) en el origen de coordenadas y que deja inmóviles los puntos de la circunferencia $|z| = R$. Estime la característica ρ .

1408. Construya la transformación casiconforme de la semirranja oblicua $x > 0$, $x \operatorname{tg} \alpha < y < x \operatorname{tg} \alpha + h$ en la semirranja rectangular $u > 0$, $0 < v < h$ sin distensión de la base y con una distensión constante en el lado lateral. Estime la característica ρ .

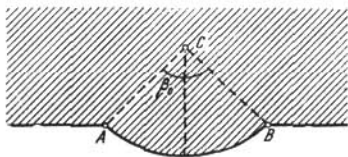


FIG. 58

1409*. Construya la transformación casiconforme del biángulo, compuesto por el semiplano y el segmento circular de ángulo central $2\beta_0$ (fig. 58), en el semiplano conservando las longitudes en la frontera. Estime la característica ρ .

1410. La ecuación casilineal

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

de tipo elíptico ($AC - B^2 > 0$) debe ser reducida a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_1 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

mediante una transformación univalente $\zeta = \zeta(z) = \xi + i\eta$.

Demuestre que la transformación $\zeta(z)$ satisface el sistema de ecuaciones de Beltrami

$$\frac{A \frac{\partial \xi}{\partial x} + B \frac{\partial \xi}{\partial y}}{\sqrt{AC - B^2}} = \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{B \frac{\partial \xi}{\partial x} + C \frac{\partial \xi}{\partial y}}{\sqrt{AC - B^2}} = - \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

y es una transformación casiconforme de características α , β y γ que se determinan de las relaciones

$$\frac{\gamma}{C} = \frac{\beta}{B} = \frac{\alpha}{A} = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}}$$

(se supone que $A > 0$).

§ 2. FUNCIONES ANALÍTICAS GENERALIZADAS

Una función $w = u + iv$, que satisface la ecuación

$$w_{\bar{z}} + Aw + B\bar{w} = F, \quad (1)$$

donde A , B y F son funciones de z , se llama *función analítica generalizada*.

En los problemas de este párrafo se consideran ecuaciones y sistemas de ecuaciones que se reducen a la forma (1) y algunas propiedades de sus soluciones¹⁾.

1411. Pruebe que el sistema de ecuaciones de Karleman

$$\left. \begin{aligned} u_x - v_y + au + bv &= f, \\ u_y + v_x + cu + dv &= g, \end{aligned} \right\}$$

donde a , b , c , d , f y g son funciones de las variables x e y , puede ser escrito en la forma (1) $w_{\bar{z}} + Aw + B\bar{w} = F$.

Expresé A , B y F por medio de los coeficientes del sistema dado.

1412. Pruebe que la ecuación $w_{\bar{z}} - q_2(z)\bar{w}_{\bar{z}} + Aw + B\bar{w} = F$ puede ser reducida a la forma (1) mediante una transformación „afín“

$$w = a(z)\omega + b(z)\bar{\omega} \quad (2)$$

Halle la forma general de la transformación (2) y analice en qué caso será no degenerada.

¹⁾ En relación con este ciclo de problemas véase la monografía: *H. H. Веква, Обобщенные аналитические функции*, Физматгиз, М., 1959 (*Vekua I. N., Generalized analytic functions*), cap. III.

1413. Pruebe que la ecuación

$$\omega_{\bar{z}} - q_1(z)\omega_z - q_2(z)\bar{\omega}_{\bar{z}} + A\omega + B\bar{\omega} = F$$

puede ser reducida a la forma $\omega_{\bar{z}} - q_1^*\omega_z + A'\omega + B'\bar{\omega} = F'$ mediante la transformación del problema anterior. Halle la forma general de la transformación y analice en qué caso será no degenerada.

Sugerencia. Aplique la transformación considerada a la ecuación dada y a la ecuación $\bar{\omega}_z - \bar{q}_1(\bar{z})\bar{\omega}_{\bar{z}} - \bar{q}_2(z)\omega_z + \bar{A}\bar{\omega} + \bar{B}\omega = \bar{F}$, elimine $\bar{\omega}_z$ y escoja después los coeficientes $a(z)$ y $b(z)$.

1414. Pruebe que la ecuación

$$\omega_{\bar{z}} - q_1(z)\omega_z - q_2(z)\bar{\omega}_{\bar{z}} + A\omega + B\bar{\omega} = F$$

($|q_1(z)| + |q_2(z)| < 1$) se puede reducir a la forma

$$\omega_{\zeta} - q_2^*\bar{\omega}_{\zeta} + A\omega + B\bar{\omega} = F,$$

si la variable independiente z se sustituye por la variable ligada a z mediante la relación $\zeta_z = q_1^*\bar{\zeta}_z$.

Halle q_1^* y q_2^* y explique el significado geométrico de la transformación $\zeta(z)$.

1415. Demuestre que un sistema elíptico de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 v_y &= \alpha u_x + (\beta + \beta_1) u_y + au + bv + f, \\ -\alpha_1 v_x &= (\beta - \beta_1) u_x + \gamma u_y + cu + dv + g \end{aligned} \right\}$$

(la condición de elipticidad de aquí $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$; además, $\alpha > 0$) puede ser reducido a la forma $\omega_{\bar{z}} - q_1(z)\omega_z - q_2(z)\bar{\omega}_{\bar{z}} + A\omega + B\bar{\omega} = F$ siendo $|q_1(z)| + |q_2(z)| < 1$, para $\alpha_1 > 0$, y $\|q_1(z) - |q_2(z)|\| > 1$, para $\alpha_1 < 0$.

Sugerencia. Véase el problema 1403. El caso $\alpha_1 < 0$ se reduce al caso $\alpha_1 > 0$ mediante la sustitución de $w = u + iv$ por $\bar{w} = u - iv$.

1416. Demuestre que, siendo $\omega(z)$ una solución continuamente diferenciable de la ecuación $\omega_{\bar{z}} - q_2(z)\bar{\omega}_{\bar{z}} = 0$, donde $q_2(z)$ es una función analítica de z y $q_2(z) \neq 1$, se tiene

$$\omega(z) = \frac{\varphi(z) + q_2(z)\bar{\varphi}(\bar{z})}{1 - |q_2(z)|^2},$$

donde $\varphi(z)$ es una función analítica arbitraria.

1417. Demuestre que, siendo $\omega(z)$ una solución dos veces continuamente diferenciable de la ecuación $\omega_{\bar{z}} - q_2(\bar{z})\bar{\omega}_{\bar{z}} = 0$, donde $q_2(\bar{z})$ es una función analítica de \bar{z} y $q_2(\bar{z}) \neq 1$, se tiene

$$\omega(z) = \varphi(z) + \int q_2(\bar{z})\bar{\varphi}_{\bar{z}} d\bar{z},$$

donde $\varphi(z)$ es una función analítica arbitraria de z .

Sugerencia. Primero hay que demostrar que $\omega(z)$ es la suma de una función analítica de z y de una función analítica de \bar{z} .

§ 3. ALGUNAS RELACIONES INTEGRALES E INTEGRALES DOBLES

En los problemas de este párrafo G es un recinto limitado por el contorno C .

1418¹⁾. Empleando la fórmula de Green, demuestre que las siguientes relaciones ($f(x, y)$ y $g(x, y)$ son funciones continuamente diferenciables en \bar{G}):

$$1) \iint_G \frac{\partial f}{\partial z} dx dy = \frac{1}{2i} \int_C f d\zeta;$$

$$2) \int_C f d\bar{\zeta} + g d\zeta = 2i \iint_G \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) dx dy;$$

$$3) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} d\eta}{\zeta - z} \quad (\zeta = \xi + i\eta).$$

Sugerencia. Haga uso de que $\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right)$ y aplique la fórmula del punto 1) al recinto G sin el círculo $|\zeta - z| < \rho$ ($\rho \rightarrow 0$).

1419. Suponiendo que las funciones f y g son continuamente diferenciables en un recinto cerrado \bar{G} , demuestre que la expresión $f dz + g d\bar{z}$ es una diferencial total de una función si, y sólo si, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}$.

1420. Demuestre que, siendo f y g funciones analíticas en el recinto G y continuamente diferenciables a lo largo de C , se tiene

$$\iint_G f' \bar{g} dx dy = \frac{i}{2} \int_C f \bar{g} d\bar{\zeta},$$

y, en particular,

$$\iint_G f' \bar{g}' dx dy = \frac{i}{2} \int_C f dg\bar{.}$$

1421. Demuestre que, si la función $f(z)$ transforma conformemente el recinto G en el recinto G' limitado por el contorno $C' = f(C)$, la integral

$$I = \frac{i}{2} \int_C f d\bar{f}$$

es igual al área S del recinto G' ; en cambio, si $f(z)$ transforma conformemente el recinto G en el exterior del contorno C' , se tiene $I = -S$.

¹⁾ En relación con los problemas 1418—1421 véase el complemento de M. Schiffer al libro: R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces*, Interscience, New York, 1950.

1422¹⁾. Sea G el círculo $|z| < R < 1$ y sea

$$\varphi(\zeta) = \frac{e^{2i\theta}}{\ln \frac{1}{\rho}} \quad (\zeta = \rho e^{i\theta} = \xi + i\eta, z = re^{i\varphi}).$$

Halle la función

$$F(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\varphi(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z} \quad (z \in G)$$

y sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ para $z \neq 0$. Pruebe que entre las derivadas indicadas solamente $\frac{\partial F}{\partial z}$ existe y es continua en el origen de coordenadas.

1423. Demuestre que, siendo la función $f(z)$ continuamente diferenciable, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \lim \frac{\frac{1}{2i} \int_G f d\zeta}{\iint_G d\xi d\eta}$$

cuando el recinto G se contrae en el punto z .

Sugerencia. Haga uso de la relación del punto 1) del problema 1418.

1424. Sea $\varphi(\zeta)$ una función continua en el recinto cerrado \bar{G} . Demuestre que la función

$$F(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\varphi(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

satisface en el recinto G a la ecuación $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \varphi(z)$, si la derivada $\frac{\partial F}{\partial z}$ se define según la fórmula del problema 1423.

1425. Demuestre que, en las condiciones del problema 1424, la solución general de la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \varphi(z)$$

puede ser representada en el recinto G en la forma

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\varphi(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

(fórmula de Pompeius).

Sugerencia. Haga uso de la relación del punto 3) del problema 1418.

¹⁾ En relación con los problemas 1422—1425 véase *H. H. Векуа, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959 (Векуа I. N., Funciones analíticas generalizadas).*

RESPUESTAS Y SOLUCIONES

Capítulo I

1. 1) $-i$; 2) $-i$; 3) $\frac{1}{5}(1+3i)$; 4) -8 . 2. 1) $3, \frac{\pi}{2}$ (aquí y en lo sucesivo se indican sólo los valores de $\arg z$); 2) $2, \pi$; 3) $\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$; 4) $\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}$; 5) $\sqrt{29}, \arctg \frac{5}{2}$; 6) $\sqrt{29}, -\arctg \frac{5}{2}$; 7) $\sqrt{29}, \pi - \arctg \frac{5}{2}$; 8) $\sqrt{29}, \arctg \frac{5}{2} - \pi$; 9) $|b|, \frac{\pi}{2} \frac{|b|}{b} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} b^{1)}$; 10) $\sqrt{a^2+b^2}, \arctg \frac{b}{a}$ para $a > 0$, $\arctg \frac{b}{a} + \pi$ para $a < 0$ y $b \geq 0$, $\arctg \frac{b}{a} - \pi$ para $a < 0$ y $b < 0$. 3. $z = \cos \varphi_k + i \operatorname{sen} \varphi_k$, donde $\varphi_k = \frac{2k\pi}{n}$, $k=0, 1, \dots, n-1$; $z=0$. 4. 1) $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -i$; 3) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; 4) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i), \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i), \pm \sqrt{2}i$; 5) $\pm 1 \pm i, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; 6) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(V\sqrt{2+1} - iV\sqrt{2-1})$; 7) $\pm(2+i)$; 8) $\sqrt{2} \left[\cos \frac{(2k+\frac{3}{4})\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{(2k+\frac{3}{4})\pi}{3} \right]$ ($k=0, 1, 2$); 9) $\sqrt[5]{5} \left[\cos \frac{(2k+1)\pi - \arctg \frac{3}{4}}{5} + i \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi - \arctg \frac{3}{4}}{5} \right]$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$). 15. $z_k = z_1 \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$).

¹⁾ $\operatorname{sgn} b$ es el símbolo de Kronecker:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} b &= 1 \text{ para } b > 0, \\ \operatorname{sgn} b &= -1 \text{ para } b < 0. \end{aligned}$$

$$16. z_3 = z_2 + (z_2 - z_1) \left(\cos \frac{2\pi}{n} \pm i \sin \frac{2\pi}{n} \right). \quad 17. z_4 = z_1 + z_3 - z_2.$$

18. La razón $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ debe ser un número real (la condición es necesaria y suficiente). 19. La razón anarmónica $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ debe ser un número real (la condición es necesaria y suficiente).

20. Solución. Durante la demostración se puede aceptar (sin perder generalidad) que la recta, de la que se trata, es el eje imaginario y que todos los puntos considerados se encuentran a la derecha de la misma (en el caso contrario hay que multiplicar todos los z_k por un número de tipo $\cos \alpha + i \sin \alpha$). Entonces es evidente que $\operatorname{Re} z_k > 0$ y $\operatorname{Re} \frac{1}{z_k} > 0$ para cualquier k .

23. El interior del círculo de radio R y de centro en el punto $z = z_0$; el exterior de este mismo círculo; la circunferencia de este mismo círculo. 24. La elipse de semieje mayor $\frac{5}{2}$ y de focos en los puntos $z = \pm 2$.

25. El interior de la rama de la izquierda de la hipérbola de semieje real $\frac{3}{2}$ y de focos en los puntos $z = \pm 2$.

26. La recta perpendicular al segmento, que une los puntos z_1 y z_2 , que pasa por el centro de este segmento. 27. 1) La recta $x=C$ y el semiplano situado a la derecha de la misma; 2) el semiplano situado más abajo de la recta $y=C$.

28. La franja $-1 < y < 0$. 29. El interior del ángulo (que contiene la parte positiva del eje real) de vértice en el origen de coordenadas y de lados que forman con el eje real ángulos iguales a α y β , respectivamente; el interior de un ángulo igual de vértice en el punto z_0 .

30. La parábola $y^2 = 2x + 1$. 31. El semiplano que contiene el origen de coordenadas y que está limitado por la recta $x + y = 1$. 32. La recta que pasa por los puntos z_1 y z_2 (y de la cual se ha excluido el punto z_2); la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une los puntos z_1 y z_2 (y de la cual se ha excluido el punto z_2).

33. El interior de las circunferencias $|z - i| = \sqrt{2}$ y $|z + i| = \sqrt{2}$, a excepción de la parte común de las mismas.

34. 1) El interior del recinto limitado por el segmento $0 \leq x \leq 2\pi$ del eje real y por una espira de la espiral de Arquímedes $r = \varphi$; 2) el conjunto de puntos determinado en el punto 1) y complementado por el intervalo $(0, 2\pi)$ del eje real.

35. 1) La familia de circunferencias tangentes en el origen de coordenadas al eje imaginario y el propio eje imaginario (la ecuación de la familia es: $C(x^2 + y^2) = x$); 2) la familia de circunferencias tangentes en el origen de coordenadas al eje real y el propio eje real.

36. 1) La familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = C$; 2) la familia de hipérbolas $xy = \frac{C}{2}$.

37. Cada línea es una circunferencia que representa el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la razón de sus distancias hasta los puntos z_1 y z_2 (circunferencia de Apolonio respecto a los puntos z_1 y z_2).

38. La familia de arcos de circunferencias con extremos en los puntos z_1 y z_2 (a esta familia pertenecen también dos segmentos rectilíneos con extremos en los puntos z_1 y z_2 ; uno de estos segmentos contiene el punto infinito).

39. 1) Cada línea es el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante el producto de sus distancias hasta los puntos $z = -1$ y $z = 1$ (lemniscata de focos en $z = \pm 1$). Para $\lambda > 1$ las líneas de la familia son curvas cerradas simples, para $\lambda < 1$ se descomponen en dos curvas cerradas simples que se contraen a los puntos ± 1 cuando $\lambda \rightarrow 0$.

Para $\lambda = 1$ tenemos la lemniscata de Bernoulli; su ecuación en las coordenadas polares es $r^2 = 2 \cos 2\varphi$. 2) Lemniscatas de focos en los puntos z_1 y z_2 , donde z_1 y z_2 son las raíces de la ecuación $z^2 + az + b = 0$. Las lemniscatas se componen de una línea, si $\lambda > \sqrt{\frac{|z_2 - z_1|}{2}}$, y de dos, si $\lambda < \sqrt{\frac{|z_2 - z_1|}{2}}$. Para

$\lambda = \sqrt{\frac{|z_2 - z_1|}{2}}$ tenemos la lemniscata de Bernoulli con el punto doble $\frac{z_1 + z_2}{2}$.

40. 1) $|z|_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4} + a)$, $|z|_{\text{mín}} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4} - a)$; 2) $|z|_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4|b|} + a)$, $|z|_{\text{mín}} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4|b|} - a)$. 41. La espiral de

Arquímedes $r = \varphi$. 42. La espiral logarítmica $r = e^\varphi$. 43. 1) π ; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 2π ;

4) π ; 5) 0. 44. $\xi = \frac{x}{x^2+y^2+1}$, $\eta = \frac{y}{x^2+y^2+1}$, $\zeta = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$; $z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$. 45. $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2})$.

Los cuatro puntos se encuentran sobre el ecuador y sus longitudes son iguales respectivamente a 0, π , $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$ (la longitud se mide a partir del meridiano

inicial, perteneciente al plano ξ, ζ). 46. La circunferencia de radio $\text{tg} \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}$

y de centro en el punto $z=0$. Al polo "sur" le corresponde el origen de coordenadas y al polo "norte", el punto infinito. 47. 1) Los semimeridianos de

longitud α ; 2) los paralelos de latitud $\beta = 2 \text{acr} \text{tg} r - \frac{\pi}{2}$. 48. 1) Puntos dia-

metralmente opuestos de un mismo paralelo; 2) puntos recíprocamente simétricos respecto al meridiano inicial (es decir, que se diferencian en el signo de sus longitudes); 3) puntos recíprocamente simétricos respecto al plano del ecuador (es decir, de una misma longitud y de latitudes que se diferencian en el signo).

49. $z_1 \cdot \bar{z}_2 = -1$. 50. Al girar la esfera en 180° alrededor del diámetro paralelo al eje real del z -plano. 51. 1) El hemisferio del este; 2) el hemisferio del

oeste; 3) el hemisferio $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (α es la longitud); 4) el hemisferio

$\frac{\pi}{2} < |\alpha| < \pi$; 5) el hemisferio austral; 6) el hemisferio boreal. 52. La

familia de circunferencias tangentes entre sí en el polo "norte" (en el polo de proyecciones); a la recta que pasa por el origen de coordenadas le corresponde una circunferencia mayor, y a la recta paralela a la primera y situada a una distancia del origen de coordenadas, le corresponde la circunferencia del plano que forma con el plano meridional un ángulo de $\text{arctg} d$. 53. A las rectas les corresponden circunferencias que pasan por el polo "norte".

56. $k(z, a) = \frac{|z-a|}{\sqrt{1+|z|^2} \sqrt{1+|a|^2}}$; $k(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$. 57. La circunfe-

rencia de Apolonio $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = \frac{\sqrt{1+|z_1|^2}}{\sqrt{1+|z_2|^2}}$ y, en particular, la recta $|z-z_1| = |z-z_2|$, si $|z_1| = |z_2|$, y la circunferencia $|z-z_1| = \sqrt{1+|z_1|^2}$, si $z_2 = \infty$.

59. 1. $e^{\pi i}$, $e^{\frac{\pi}{2} i}$, $e^{-\frac{\pi}{2} i}$, $\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i}$, $\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4} i}$, $\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4} i}$, $\sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4} i}$.

60. $\pm i$; $(-1)^k$. 61. e^2 , 1; e^2 , -3 ; e^3 , $4-2\pi$; e^{-3} , $2\pi-4$; a , $\varphi-\pi$, si $\varphi > 0$, y $\varphi+\pi$, si $\varphi \leq 0$; 1, $-\varphi$, si $|\varphi| < \pi$, y π , si $|\varphi| = \pi$; 2 $\text{sen} \frac{\alpha-\beta}{2}$; $\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}$.

si $\alpha+\beta \leq \pi$, y $\frac{\alpha+\beta-3\pi}{2}$, si $\alpha+\beta > \pi$.

$$62. \quad 1) \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}; \quad 2) \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2} \operatorname{sen} \frac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}; \quad 3) \frac{\operatorname{sen} 2nx}{2 \operatorname{sen} x};$$

$$4) \frac{\operatorname{sen}^2 nx}{\operatorname{sen} x}; \quad 5) \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\cos \frac{x}{2}}, \quad \text{donde } n \text{ es un número impar;}$$

$$-\frac{\cos \frac{(n+1)x}{2} \operatorname{sen} \frac{nx}{2}}{\cos \frac{x}{2}}, \quad \text{donde } n \text{ es un número par.}$$

$$63. \quad 1) \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2} \beta}{\operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} \cos \left(\alpha + \frac{n\beta}{2} \right); \quad 2) \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2} \beta}{\operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{n\beta}{2} \right).$$

$$67. \quad 1) \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad |\operatorname{sen} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x};$$

$$2) \operatorname{cos} z = \operatorname{cos} x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y, \quad |\operatorname{cos} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{cos}^2 x};$$

$$3) \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{cos} 2x + \operatorname{ch} 2y}, \quad |\operatorname{tg} z| = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sh}^2 2y}}{\operatorname{cos} 2x + \operatorname{ch} 2y}; \quad 4) \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \operatorname{cos} y +$$

$$+ i \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y, \quad |\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}; \quad 5) \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \operatorname{cos} y + i \operatorname{sh} x \operatorname{sen} y,$$

$$|\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{cos}^2 y}; \quad 6) \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} 2x + i \operatorname{sen} 2y}{\operatorname{ch} 2x + \operatorname{cos} 2y}, \quad |\operatorname{th} z| = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2x + \operatorname{sen}^2 2y}}{\operatorname{ch} 2x + \operatorname{cos} 2y}.$$

$$68. \quad 1) \operatorname{cos} 2 \operatorname{ch} 1 - i \operatorname{sen} 2 \operatorname{sh} 1; \quad 2) i \operatorname{sh} 2; \quad 3) 2 \frac{\operatorname{sen} 4 - i \operatorname{sh} 2}{(\operatorname{cos}^2 2 + \operatorname{sh}^2 1)}; \quad 4) \frac{8 + 15i}{17};$$

$$5) \frac{\operatorname{sh} 4 - i \operatorname{sen} 2}{\operatorname{ch} 4 - \operatorname{cos} 2}, \quad 6) \frac{40 + 9i}{41}. \quad 69. \operatorname{Im} e^z = 0, \text{ si } \operatorname{Im} z = k\pi; \operatorname{Re} e^z = 0, \text{ si } \operatorname{Im} z =$$

$$= (2k+1) \frac{\pi}{2}; \operatorname{Im} \operatorname{cos} z = 0, \text{ si } \operatorname{Re} z = k\pi \text{ ó } \operatorname{Im} z = 0; \operatorname{Re} \operatorname{cos} z = 0, \text{ si } \operatorname{Re} z =$$

$$= (2k+1) \frac{\pi}{2}; \operatorname{Im} \operatorname{sen} z = 0, \text{ si } \operatorname{Re} z = (2k+1) \frac{\pi}{2} \text{ ó } \operatorname{Im} z = 0; \operatorname{Re} \operatorname{sen} z = 0, \text{ si}$$

$$\operatorname{Re} z = k\pi; \operatorname{Im} \operatorname{tg} z = 0, \text{ si } \operatorname{Im} z = 0; \operatorname{Re} \operatorname{tg} z = 0, \text{ si } \operatorname{Re} z = \frac{k\pi}{2}; \operatorname{Im} \operatorname{ch} z = 0, \text{ si}$$

$$\operatorname{Im} z = k\pi \text{ ó } \operatorname{Re} z = 0; \operatorname{Re} \operatorname{ch} z = 0, \text{ si } \operatorname{Im} z = (2k+1) \frac{\pi}{2}; \operatorname{Im} \operatorname{cth} z = 0, \text{ si } \operatorname{Im} z =$$

$$= \frac{k\pi}{2}; \operatorname{Re} \operatorname{cth} z = 0, \text{ si } \operatorname{Re} z = 0. \text{ En todas las fórmulas } k \text{ es un número entero}$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad 70. \quad 1) \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \quad 2) \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

$$71. \quad 1) \ln 4 + 2k\pi i, \quad (2k+1)\pi i, \quad \pi i; \quad 2) \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad \frac{\pi i}{2}; \quad 3) \left(2k \pm \frac{1}{4}\right)\pi i;$$

$$4) \frac{1}{2} \ln 13 + \left(2k\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2}\right) i, \quad \frac{1}{2} \ln 13 + \left[(2k+1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2}\right] i.$$

$$72. \text{ El conjunto de valores de } 2 \operatorname{Ln} z \text{ constituye sólo una parte del conjunto de valores de } \operatorname{Ln}(z^2) \text{ (véase [1, cap. II, § 5, n.º 4]).} \quad 73. \quad 1) 4\pi;$$

$$2) -2\pi; \quad 3) 0; \quad 4) 4\pi. \quad 74. \quad 1) \operatorname{cos}(2k\sqrt{2}\pi) + i \operatorname{sen}(2k\sqrt{2}\pi); \quad 2) 2^{\sqrt{2}} [\operatorname{cos}(2k+1)\pi\sqrt{2} + i \operatorname{sen}(2k+1)\pi\sqrt{2}]; \quad 3) e^{2k\pi} (\operatorname{cos} \ln 2 + i \operatorname{sen} \ln 2); \quad 4) e^{2k\pi};$$

$$5) e^{\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi}; \quad 6) \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{\left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi}; \quad 7) 5e^{\arctg \frac{4}{3} + 2k\pi} \left[\cos \left(\ln 5 - \arctg \frac{4}{3} \right) + \right. \\ \left. + i \sin \left(\ln 5 - \arctg \frac{4}{3} \right) \right]; \quad 8) -5e^{\arctg \frac{4}{3} + (2k+1)\pi} \left[\cos \left(\ln 5 - \arctg \frac{4}{3} \right) + \right. \\ \left. + i \sin \left(\ln 5 - \arctg \frac{4}{3} \right) \right]. \text{ En todas las fórmulas } k \text{ es un número entero } (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

76. Los conjuntos de valores de a^{2z} y de $(a^z)^2$ coinciden entre sí, pero no coinciden, en general, con el conjunto de valores de $(a^z)^2$; el caso general, en que el exponente 2 es sustituido por un exponente complejo β cualquiera, se analiza en [1, cap. 11, § 5, n° 5]. 80. 1) $\text{Im Arccos } z = \text{Im Arcsen } z = 0$, si z es un número real y $|z| \leq 1$; $\text{Im Arctg } z = 0$, si z es un número real;

2) $\text{Re Arsh } z = 0$, si z es un número imaginario puro y $|z| \leq 1$. 81. 1) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$,

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \quad 2) 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}; \quad 3) 2k\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}); \quad 4) 2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1), \\ (2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1); \quad 5) \frac{1}{2} \left[\arctg \frac{1}{2} + (2k+1)\pi \right] + \frac{i}{4} \ln 5;$$

$$6) \ln(\sqrt{5} \pm 2) + \left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi i; \quad 7) \frac{1}{4} \ln 5 + \left[\frac{1}{2} \arctg 2 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \right] i. \text{ En todas las fórmulas } k \text{ es un número entero } (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$82. 1) z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \ln(\sqrt{2} \pm 1); \quad 2) z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}};$$

$$3) z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}; \quad 4) z = 2k\pi i;$$

$$5) z = -\ln 2 + (2k+1)\pi i; \quad 6) z = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad \text{y} \quad z = -\ln 3 + \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i. \text{ En todas las fórmulas } k \text{ es un número entero.}$$

83. 1) $z = k\pi(1 \pm i)$; 2) $z = k\pi(1 + i)$ y $z = \frac{(2k+1)\pi}{1+i}$; 3) $z = \frac{(4k+1)\pi}{2(1+2i)}$ y $z = \frac{(4k-1)\pi}{2(1-2i)}$. En todas las fórmulas k es un número entero. 95. Converge absolutamente. 96. Converge absolutamente.

97. Diverge. 98. Converge no absolutamente. 99. Converge no absolutamente para $\varphi \neq 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) y diverge para $\varphi = 2k\pi$. 100. Converge absolutamente. 101. Diverge. 102. Converge absolutamente. 103. Diverge.

104. Converge absolutamente. 105. 1) $z = 0$ y $z = 2$; 2) $z = 0$, $z = \frac{1}{m}$, $z = \frac{i}{n}$

(m y n son números enteros cualesquiera); 3) todos los puntos del plano; 4) todos los puntos del círculo $|z| \leq 1$. 107. 2) Cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ es igual a 0 ó al

∞ . 109. El segmento rectilíneo $x=1$, $-2 \leq y \leq 0$. 110. La parábola $y=x^2$.

111. La rama de la derecha de la parábola $y=x^2$ recorrida dos veces. 112. La semicircunferencia de la izquierda de radio a y de centro en el punto $z=0$.

113. La rama de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ perteneciente al tercer cuadrante. 114. 1) La

semicircunferencia superior de radio 1 y de centro en el punto $z=0$; 2) la cuarta parte de la circunferencia de radio 1 y de centro en el punto $z=0$, perteneciente al primer cuadrante. 115. 1) La cicloide $x=a(t - \text{sen } t)$, $y=a(1 - \text{cos } t)$: 2) el

primer (contando desde el origen de coordenadas) arco de la cicloide $x=at - b \text{sen } t$, $y=a - b \text{cos } t$ alargada ($a < b$), acortada ($a > b$) o corriente ($a=b$).

116. 1) Las imágenes de las rectas $x=C$ son para $C \neq 0$ las parábolas $u=C^2 -$

$\frac{v^2}{4C^2}$ y para $C=0$ el semieje $v=0$, $u \leq 0$; las imágenes de las rectas $y=C$

son para $C \neq 0$ las parábolas $u = \frac{v^2}{4C^2} - C^2$ y para $C=0$ el semieje $v=0$, $u \geq 0$; la imagen de la recta $y=x$ es el semieje $u=0$, $v \geq 0$; las imágenes de las circunferencias $|z|=R$ son las circunferencias $|w|=R^2$; las imágenes de los rayos $\arg z = \alpha$ son los rayos $\arg w = 2\alpha$; biunívocamente se transforman las rectas $x=C$, $y=C$ con $C \neq 0$ y los rayos $\arg z = \alpha$; 2) las preimágenes de las rectas $u=C$ son las hipérbolas $x^2 - y^2 = C$ (un par de rectas para $C=0$), las preimágenes de las rectas $v=C$ son las hipérbolas $xy = \frac{C}{2}$ (un par de rectas para $C=0$).

117. 1) Las imágenes de las rectas $x=C$ son las circunferencias $u^2 + v^2 - \frac{u}{C} = 0$ y el eje $u=0$ para $C=0$; las imágenes de las rectas $y=C$ son las circunferencias $u^2 + v^2 + \frac{v}{C} = 0$ y el eje $v=0$ para $C=0$; las imágenes de las circunferencias $|z|=R$ son las circunferencias $|w| = \frac{1}{R}$; las imágenes de los rayos $\arg z = \alpha$ son los rayos $\arg w = -\alpha$; la imagen de la circunferencia $|z-1|=1$ es la recta $u = \frac{1}{2}$; 2) las preimágenes de las rectas $u=C$ son las circunferencias

$x^2 + y^2 - \frac{x}{C} = 0$ y el eje $x=0$ para $C=0$; las preimágenes de las rectas $v=C$ son las circunferencias $x^2 + y^2 + \frac{y}{C} = 0$ y el eje $y=0$ para $C=0$.

118. La función $w = z + \frac{1}{z}$ transforma las circunferencias $|z|=R \neq 1$ en las elipses $\frac{u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$ y la circunferencia $|z|=1$ en el segmento $v=0$,

$-2 \leq u \leq 2$; la función $w = z - \frac{1}{z}$ transforma las circunferencias $|z|=R \neq 1$ en las elipses $\frac{u^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} = 1$ y la circunferencia $|z|=1$ en el

segmento $u=0$, $-2 \leq v \leq 2$. 119. La preimagen de la familia $u=C$ es la familia $x(x^2 + y^2 + 1) = C(x^2 + y^2)$; la preimagen de la familia $v=C$ es la familia $y(x^2 + y^2 - 1) = C(x^2 + y^2)$ (fig. 59). 120. En el rayo que va a lo largo de la parte negativa del eje real desde el punto $w = -\frac{1}{4}$ hacia el punto $w = \infty$.

121. 1) Las circunferencias $\rho = e^C$, los rayos $\theta = C$, la espiral $\rho = e^\theta$; 2) las curvas $y = e^x + 2k\pi$. 122. 1) La familia de las rectas $x=C$ se transforma en la familia $v^2 = -4a^2 \left(u - a^2 + \frac{1}{4}\right)$ (de parábolas de foco en el punto $w = -\frac{1}{4}$, $a = C + \frac{1}{2}$), que contiene también el rayo que va a lo largo de la parte negativa del eje real ($a=0$) desde el punto $w = -\frac{1}{4}$; la familia $y=C$ se transforma en la familia

de parábolas confocales $v^2 = 4C^2 \left(u + C^2 + \frac{1}{4}\right)$ que contiene también el rayo que va del punto $w = -\frac{1}{4}$ a lo largo del eje real en la dirección positiva; 2) la

familia $x=C$ se transforma en la familia de circunferencias de Apolonio respecto a los puntos $w = -1$ y $w = 1$ (incluyendo el eje imaginario); la ecuación de la familia de circunferencias de Apolonio es $(u-a)^2 + v^2 = a^2 - 1$; $|a| > 1$ ($a = \operatorname{cth} 2C$); la familia $y=C$ se transforma en un haz de arcos circulares con extremos en los puntos $w = -1$ y $w = 1$, que incluye también las partes correspondientes del eje

real; la ecuación del haz de las circunferencias es $u^2+(v+b)^2=1+b^2$ ($b=\text{ctg } 2C$);

3) la familia $x=C$ se transforma en la familia de espirales $\rho=e^{C^2-\frac{\theta^2}{4c^2}}$ y al eje $x=0$ le corresponde el segmento $\theta=0, 0 < \rho < 1$; la familia $y=C$ se transforma

en la familia de espirales $\rho=e^{\frac{\theta^2}{4c^2}-C^2}$ y al eje $y=0$ le corresponde el rayo $\theta=0, 1 \leq \rho < \infty$. 123. A las rectas $y=C$ les corresponden las curvas $u=x+e^x \cos C, v=C+e^x \sin C$ y a los segmentos de las rectas $x=C$ les corresponden los arcos de las curvas $u=C+e^C \cos y, v=y+e^C \sin y$. 124. 1) A la familia $|w|=R$

le corresponden las circunferencias $r=\frac{\cos \varphi}{\ln R} (R \neq 1)$ y el eje imaginario ($R=1$);

a cada rayo $\arg w=\alpha$ le corresponde la familia de circunferencias $r=\frac{\sin \varphi}{2k\pi-\alpha}$;

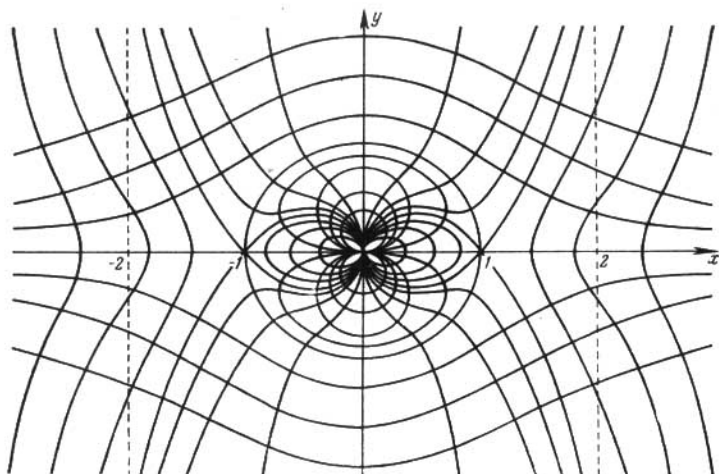


FIG. 59

para $\alpha=0$ esta familia contiene el eje real (si $k=0$); 2) las hipérbolas $x^2-y^2=$
 $=\ln R$ y $2xy=\alpha+2k\pi$. 126. Solamente $f(z)=\frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} (f(0)=0)$. 127. 1) y

2) Son continuas pero no uniformemente. 128. 2) No; 3) Sí. 132. 1) $c=1, b=-a; f(z)=(1-ai)z$; 2) $a=b=-1; f(z)=e^{iz}$. 133. La función es analítica para $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \pi < \arg z < \frac{5\pi}{4} (f(z)=z^2)$ y para $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4},$

$\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4} (f(z)=-z^2)$. 135. $r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$. 138. 0.

155. 1) No, si $u \neq \text{const}$; 2) $f(u)=au+b$. 156. $|f(z)|$ no es una función armónica, $\arg f(z)$ y $\ln |f(z)|$ son armónicas. 157. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} +$

$+\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}; u=C_1 \ln r + C_2$. 158. $p_1=x, q_1=y; p_2=x^2-y^2, q_2=2xy;$

- $p_3 = x^3 - 3xy^2$, $q_3 = 3x^2y - y^3$; $p_4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $q_4 = 4xy^3 - 4xy^3$;
 $p_n = r^n \cos n\varphi$, $q_n = r^n \sin n\varphi$. 159. $v = (x, y) = 2xy + y + C$. 160. $v(x, y) =$
 $= -\frac{y}{x^2 + y^2} + C$. 161. a) $v(x, y) = \arg z + C$; b) $v(x, y) = \arg z + 2m\pi + C$.
 162. a) $v(x, y) = \arg z - \arg(z-1) + 2m\pi + C$; b) $v(x, y) = \arg z - \arg(z-1) + C$;
 c) $v(x, y) = \arg z - \arg(z-1) + 2m\pi + C$. 163. a) $v(x, y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \arg(z-z_k) +$
 $+ 2\pi \sum_{k=1}^n m_k \alpha_k + C$; b) $v(x, y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \arg(z-z_k) + 2\pi m \sum_{k=1}^n \alpha_k + C$
 (si $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$, la función $v(x, y)$ es uniforme en el recinto considerado).
 164. 1) Existe; 2) existe; 3) no existe. 165. $f(z) = z^3 + (5-i)z - \frac{i}{z} + Ci$.
 166. $f(z) = ze^z + 2i \cos z + z^3 - iz + Ci$. 167. $f(z) = \frac{1}{2z} + iz^2 + 3i + C$. 168. $f(z) =$
 $= 2i \ln z - (2-i)z + C$. En todas las fórmulas C es una constante real arbitraria.
 169. $u = C_1x + C_2$. 170. $u = C_1(ax + by) + C_2$. 171. $u = C_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_2$.
 172. $u = C_1xy + C_2$. 173. $u = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2$. 174. $u = \frac{C_1x}{x^2 + y^2} + C_2$.
 175. $u = C_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C_2$. 176. No existe. 177. $f(z) = e^{i^2 z^2} e^z$.
 178. $f(z) = e^{i^2 z^2}$. 179. $f(z) = Ae^{\frac{z^2}{2}}$. 180. $f(z) = Aze^z$ (α es una constante
 real arbitraria, A es una constante positiva arbitraria). 182. $az + \lambda$, $iaz + \lambda$,
 λe^{az} , λe^{iaz} . 183. $iaz + \lambda$, $az + \lambda$, λe^{iaz} , λe^{az} . 184. $ai \ln z + \lambda$, $a \ln z + \lambda$,
 $\lambda e^{ai \ln z}$, $\lambda e^{a \ln z}$. 185. $a \ln z + \lambda$, $ai \ln z + \lambda$, $\lambda e^{a \ln z}$, $\lambda e^{ai \ln z}$. 186. $\frac{a}{z} + \lambda$,
 $\frac{ai}{z} + \lambda$, $\lambda e^{\frac{a}{z}}$, $\lambda e^{\frac{ai}{z}}$ (a es una constante real arbitraria y λ es una constante compleja
 arbitraria). 187. Para $w = z^2$; 1) $\vartheta = 0$, $k = 2$; 2) $\vartheta = \pi$, $k = \frac{1}{2}$;
 3) $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $k = 2\sqrt{2}$; 4) $\vartheta = \pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, $k = 10$. Para $w = z^3$, 1) $\vartheta = 0$,
 $k = 3$; 2) $\vartheta = 0$, $k = \frac{3}{16}$; 3) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $k = 6$; 4) $\vartheta = -2 \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, $k = 75$.
 188. 1) Compresión para $|z| < \frac{1}{2}$ y dilatación para $|z| > \frac{1}{2}$; 2) compresión
 para $|z+1| < \frac{1}{2}$ y dilatación para $|z+1| > \frac{1}{2}$, 3) compresión para $|z| > 1$
 y dilatación para $|z| < 1$; 4) compresión para $\operatorname{Re} z < 0$ y dilatación para $\operatorname{Re} z > 0$;
 5) compresión para $|z-1| > 1$ y dilatación para $|z-1| < 1$. 189. $S =$
 $= \int_G \int |f'(z)|^2 dx dy$, $L = \int_l |f'(z)| ds$. 190. $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$. 191. $2e^2(e^2 - 1)$.
 192. El recinto D es el anillo $e \leq |w| \leq e^2$. La fórmula del problema 189 no
 se puede aplicar porque la transformación no es biunívoca.

Capítulo II

193. $w = (1+i)(1-z)$. 194. $w = (2+i)z + 1 - 3i$. 195. 1) $z_0 = -1 + 3i$, $\theta = 0$, $k = 2$, $w + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i)$; 2) $z_0 = 2 + 2i$; $\theta = \frac{\pi}{2}$, $k = 1$, $w - 2 - 2i = i(z - 2 - 2i)$; 3) no existe punto inmóvil finito; 4) si $a = 1$, no existe punto inmóvil finito; si $a \neq 1$, se tiene $z_0 = \frac{w_1 - az_1}{1-a}$, $\theta = \arg a$, $k = |a|$, $w - \frac{w_1 - az_1}{1-a} = a \left(z - \frac{w_1 - az_1}{1-a} \right)$; 5) si $a = 1$, no existe punto inmóvil finito; si $a \neq 1$, se tiene $z_0 = \frac{b}{1-a}$, $\theta = \arg a$, $k = |a|$, $w - \frac{b}{1-a} = a \left(z - \frac{b}{1-a} \right)$. 196. 1) $w = az + b$; 2) $w = -az + b$; 3) $w = -i(az + b)$; 4) $w = az + bi$. En todas las fórmulas a y b son números reales y $a > 0$. 197. 1) $w = z + bi$ o $w = -z + 1 + bi$; 2) $w = z + b$ o $w = -z - i + b$; 3) $w = z + b(1+i)$ o $w = -z + 1 + b(1+i)$. En todas las fórmulas b es un número real. Pueden corresponder uno a otro los puntos que pertenecen o bien a una recta paralela a las fronteras de la franja o bien a rectas paralelas simétricas, respecto a la línea media de la franja. La transformación no queda determinada unívocamente, si los puntos correspondientes pertenecen a la línea media. 198. 1) $w = \frac{z-a}{h}$; 2) $w = \frac{-z+a+h}{h} + i$; 3) $w = \frac{\sqrt{1+k^2}}{b} \times e^{-i \left(\frac{\pi}{2} + \arctg k \right)}$; 4) $w = \frac{\sqrt{1+k^2}}{b_2 - b_1} e^{-i \left(\frac{\pi}{2} + \arctg k \right)} (z - ib_1)$. 199. $w = e^{i\alpha} R z + w_0$. 200. 1) La familia de las rectas $u = \frac{1}{a}$ paralelas al eje imaginario (que no comprende el propio eje imaginario); 2) la familia de las rectas $v = -\frac{1}{b}$ paralelas al eje real (que no comprende el propio eje real); 3) la familia de circunferencias $b(u^2 + v^2) + u + v = 0$ tangentes en el origen de coordenadas a la recta $v = -u$ (que comprende esta recta); 4) el haz de rectas $v = -ku$; 5) el haz de las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y por el punto $w_0 = \frac{1}{z_0}$ (a este haz pertenece también la recta que pasa por los puntos $w = 0$ y $w = w_0$); 6) la cisoide $u^2 = -\frac{v^2}{v+1}$. 201. 1) En la familia de circunferencias tangentes en el punto $w = h$ a las rectas paralelas respectivamente al eje real y al eje imaginario (incluyendo estas rectas); las ecuaciones de estas familias son
- $$(C - x_0) [(u - h_1)^2 + (v - h_2)^2] - (u - h_1) = 0;$$
- $$(C - y_0) [(u - h_1)^2 + (v - h_2)^2] + (v - h_2) = 0,$$
- donde $z_0 = x_0 + iy_0$, $h = h_1 + ih_2$; 2) en la familia de circunferencias de centro en el punto $w = h$ ($|w - h| = \frac{1}{R}$) y en la familia de rayos que parten del punto $w = h$ ($\arg(w - h) = -\alpha$). 202. 1) La ecuación de la familia de circunferencias de Apolonio respecto a los puntos z_1 y z_2 es $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \lambda$. Los extremos A y B del diámetro perteneciente a la recta pasan por los puntos z_1 y z_2 (fig. 60) y dividen el segmento $z_1 z_2$ en la razón λ de manera interna y externa. Empleando las denotaciones indicadas en la figura (C es el centro de la circunferencia de diámetro AB) y tomando $|z_1 - z_2| = d$, se obtienen para $\lambda < 1$ las reacciones siguientes: $\lambda = \cos \alpha = \frac{r_1}{R} = \frac{R}{r_2}$, $R = \frac{\lambda d}{1 - \lambda^2}$, $r_1 = \frac{\lambda^2 d}{1 - \lambda^2}$, $r_2 = \frac{d}{1 - \lambda^2}$; 2) los ar-

cos de las circunferencias que pasan por los puntos z_1 y z_2 : $\arg \frac{z-z_1}{z-z_2} = \theta$. Los arcos correspondientes a los valores $\theta = \alpha$ y $\theta = \pi - \alpha$ complementan el uno al otro formando una circunferencia completa; 3) a la red polar le corresponde (fig. 61) la red compuesta por las circunferencias de Apolonio $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = R$ y por los arcos $\arg \frac{z-z_1}{z-z_2} = \theta$ ortogonales a las mismas (si $\theta > 0$, el arco se sitúa a la derecha de la birección $z_1 z_2$; si $\theta < 0$, a la izquierda); 4) al semicírculo superior le corresponde el ángulo recto indicado en la figura. 203. En el semicírculo $|w| < 1$, $\text{Im } w < 0$. 204. En el recinto que contiene el punto $w=0$ y está limitado por los arcos de las circunferencias $|w|=1$ y $\left| w + \frac{5i}{4} \right| = \frac{3}{4}$. 205. En el recinto

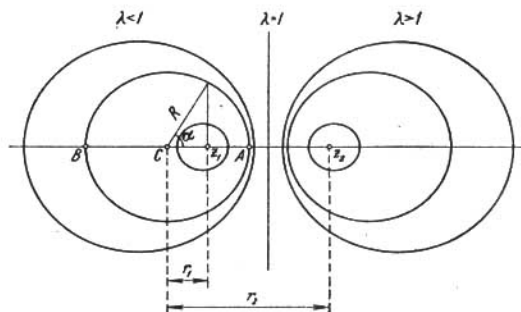


FIG. 60

que se obtiene al excluir del semiplano inferior ($\text{Im } w < 0$) la parte del círculo $\left| w - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ perteneciente a este semiplano. 206. 1) En el recinto limitado por la recta $\text{Re } w = 1$ y por la circunferencia $\left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ tangente a ella; 2) en el recinto limitado por las circunferencias $\left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ y $\left| w - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4}$ tangentes entre sí. 207. En el recinto doblemente conexo cuya frontera consta de la recta $\text{Re } w = \frac{1}{2}$ y de la circunferencia $\left| w - \frac{4}{3} \right| = \frac{2}{3}$. 208. 1) $w = -\frac{d}{z} + 1 + hi$ o $w = \frac{d}{z} + hi$; 2) $w = \frac{d_1}{d_2 - d_1} \left(\frac{d_2}{z} - 1 \right) + hi$ o $w = \frac{d_2}{d_1 - d_2} \left(\frac{d_2}{z} - 1 \right) + 1 + hi$; 3) $w = \frac{d_1(z - d_2)}{z(d_1 + d_2)}$. 209. 1) $w = -\frac{2i(z+1)}{4z-1-5i}$; 2) $w = \frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$. 210. 1) $w = \frac{(1+i)z+1+3i}{(1+i)z+3+i}$; 2) $w = \frac{iz+2+i}{z+1}$; 3) $w = \frac{1-i}{2}(z+1)$. 211. 1) $w = \frac{(-1+3i)z+1-i}{(1+i)z-1+i}$; 2) $w = \frac{z(1-4i)-2(1-i)}{2z(1-i)-(4-i)}$; 3) $w = \frac{z(3-i)-(1+i)}{(1+i)(1-z)}$.

212. $w = \frac{z-i}{iz-1}$; el semiplano superior se transforma en el círculo unidad.
 213. 1) $w = \frac{az+b}{cz+d}$, donde a, b, c, d son números reales y $ad-bc > 0$; 2) $w = \frac{az+b}{cz+d}$, donde a, b, c, d son números reales y $ad-bc < 0$; 3) $w = i \frac{az+b}{cz+d}$ donde a, b, c, d son números reales y $ad-bc < 0$. 214. 1) $w = \frac{2}{z-2}$; 2) $w = -2 \left(\frac{2z+1}{z-2} \right)$. 215. $w = \frac{R-z}{R+z}$; la imagen del semicírculo superior es el ángulo $u > 0, v < 0$. 216. 1) $\frac{2+i}{5}$; 2) $\frac{9}{2} + i$. 217. 1) $|z|=2$; 2) la recta

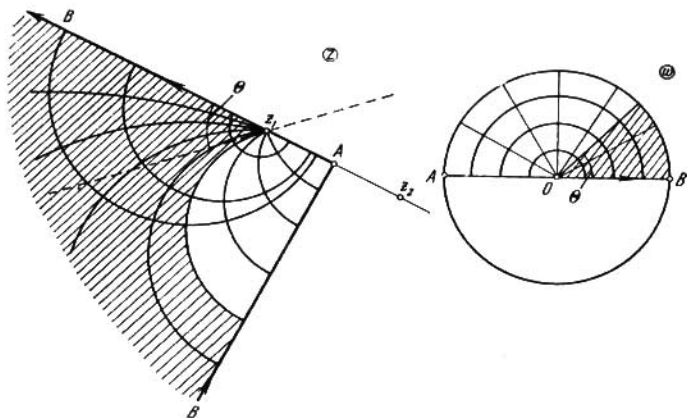


FIG. 61

- $x = \frac{1}{2}$; 3) $\left| z - \frac{i}{4} \right| = \frac{1}{4}$; 4) $xx_0 + yy_0 = \frac{1}{2}$; 5) $|z - z_0| = \sqrt{|z_0|^2 - 1}$ (es decir, esta circunferencia es simétrica a sí misma respecto a la circunferencia unidad); 6) $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$ (lemniscata); 7) un triángulo curvilíneo de vértices en los puntos $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$, cuyos lados están formados por arcos de las circunferencias que pasan por un par de vértices y por el punto $z=0$ (uno de los arcos puede resultar un segmento rectilíneo). 219. 1) $\theta(x) = \alpha + 2 \arg(x - \beta)$; 2) $w' \beta = e^{\frac{(\alpha - \frac{\pi}{2})i}{2b}}$; 3) si $b \geq 2$, todo el semiplano se contrae; si $b < 2$, se dilata el recinto que se halle dentro del círculo $|z - \bar{\beta}| < \sqrt{2b}$. (La circunferencia $|z - \bar{\beta}| = \sqrt{2b}$ se llama isométrica.) 220. 1) $w = \frac{z-i}{z+i}$; 2) $w = i \frac{z-2i}{z+2i}$; 3) $w = e^{i \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)} \frac{z - (a + bi)}{z - (a - bi)}$. 221. $w = Ri \frac{z-i}{z+i} + w_0$. 222. $w = -\frac{z-2i}{z+2i}$.

$$223. w = -4 \frac{z+2}{z-2-4i}. \quad 224. w = k e^{\frac{1}{2} \left(\pi + \arg \frac{z_1}{z_2} \right) i} \frac{z-z_1}{z-z_2}, \text{ donde } k > 0.$$

A los rayos del semiplano $\operatorname{Re} w > 0$ que salen del punto $w=0$ les corresponden en el z -plano los arcos de las circunferencias que se hallan dentro del círculo $|z| < 1$ y que pasan por los puntos z_1 y z_2 ; a las circunferencias de centro en el punto $w=0$, pertenecientes al semiplano $\operatorname{Re} w > 0$ les corresponden los arcos de las circunferencias de Apolonio (respecto a los puntos z_1 y z_2) que se hallan dentro del círculo $|z| < 1$.

$$225. w_0 = \frac{\bar{z}_1 - z_1}{\bar{z}_2 - z_2}, R = \frac{|z_2 - z_1|}{2|\operatorname{Im} z_2|}.$$

$$226. \frac{w-b}{w-a} = e^{i\alpha} \frac{z-a}{z-\bar{a}}. \quad 227. \frac{w-\bar{a}}{w-a} = i \frac{z-a}{z-\bar{a}}. \quad 228. 1) \theta\varphi = \alpha - \varphi +$$

$$+ 2 \arg(e^{i\varphi} - a) = \alpha - \varphi + 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} \varphi - \lambda \operatorname{sen} \theta}{\cos \varphi - \lambda \cos \theta}, \text{ donde } a = \lambda e^{i\theta}. 2) w'(0) =$$

$$= (1 - |a|^2) e^{i\alpha}, w'(a) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - |a|^2}.$$

3) Si $a \neq 0$, se dilata el recinto perteneciente al interior del círculo $\left| z - \frac{1}{a} \right| < \sqrt{\frac{1}{|a|^2} - 1}$ y se contrae el recinto que se

encuentra fuera de este círculo. (La circunferencia $\left| z - \frac{1}{a} \right| = \sqrt{\frac{1}{|a|^2} - 1}$ es isométrica.) Si $a=0$, se tiene $|w'(z)| = 1$. 4) $\max \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1+|a|}{1-|a|}$, $\min \left| \frac{dw}{dz} \right| =$

$$= \frac{1-|a|}{1+|a|}. \quad 229. 1) w = \frac{2z-1}{2-z}; 2) w = \frac{2iz+1}{2+iz}; 3) w = -iz; 4) \frac{w-a}{1-\bar{a}w} =$$

$$= e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}. \quad 230. R_2 \frac{w-b}{R_2^2 - bw} = e^{i\alpha} R_1 \frac{z-a}{R_1^2 - az}. \quad 231. w = \frac{1-z}{z+2}. \quad 232. w =$$

$$= 2 \frac{z-2+i}{iz+2-2i}. \quad 233. 1) w = R^2 e^{i\alpha} \frac{z-a}{R^2 - \bar{a}z}; 2) \frac{w-b}{R^2 - bw} = e^{i\alpha} \frac{z-a}{R^2 - \bar{a}z}; 3) w =$$

$$= R^2 \frac{z-a}{R^2 - az}, \text{ donde } a \text{ es un número real y } |a| < R. \quad 234. \frac{w-a}{1-\bar{a}w} = e^{i\varphi} \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z},$$

$$\text{donde } \varphi = \pi - \arg \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}, \quad a = \frac{|z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| + \sqrt{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}}.$$

$$235. w = \pm \frac{az-1 + \sqrt{1-a^2}}{(1 - \sqrt{1-a^2})z-a}, \quad \rho = 2 \frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{a}. \quad 238. 1) w = z; 2) w =$$

$$= \frac{z+2 - \sqrt{3}}{1 + (2 - \sqrt{3})z}; 3) w = i \frac{z-2 + \sqrt{3}}{1 - (2 - \sqrt{3})z}.$$

241. Las circunferencias que pasan por el punto z_0 y que tienen en él una tangente determinada por el vector \bar{h} .

$$242. w = \frac{(R-ki)z - R^2}{z - (R+ki)}, \text{ donde } k \text{ es un número real, } k \neq 0 \text{ (para } k = \infty$$

hay que tomar $w = z$). 247. Si $|a| < \operatorname{sen} \frac{\lambda}{2}$, la transformación es elíptica. Si

$$\text{se toma } |a| = \operatorname{sen} \frac{\lambda}{2} \operatorname{sen} \beta, z_1 = e^{i \left(\alpha + \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, z_2 = e^{i \left(\alpha + \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{2} \right)} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda_0}{2} = \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \cos \beta, \text{ la transformación puede ser escrita en la forma } \frac{w-z_1}{w-z_2} =$$

$$= e^{i\lambda_0} \frac{z-z_1}{z-z_2}. \text{ Si } |a| = \operatorname{sen} \frac{\lambda}{2}, \text{ la transformación es parabólica y de la forma}$$

$\frac{1}{w-z_0} = \frac{1}{z-z_0} + i h \bar{z}_0$, donde $z_0 = e^{i\left(\alpha + \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$, $h = \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}$. Si $|a| > \operatorname{sen} \frac{\lambda}{2}$, la transformación es hiperbólica. Si se toma $\operatorname{sen} \frac{\lambda}{2} = |a| \operatorname{sen} \beta$, $z_1 = e^{i\left(\alpha + \frac{\lambda}{2} - \beta\right)}$,

$$z_2 = e^{i\left(\alpha + \frac{\lambda}{2} - \pi + \beta\right)}, \quad K = \frac{\cos \frac{\lambda}{2} + \sqrt{|a|^2 - \operatorname{sen}^2 \frac{\lambda}{2}}}{\cos \frac{\lambda}{2} - \sqrt{|a|^2 - \operatorname{sen}^2 \frac{\lambda}{2}}}, \text{ la transformación se}$$

presenta en la forma $\frac{w-z_1}{w-z_2} = K \frac{z-z_1}{z-z_2}$. 248. $\Gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{h}$; $\Gamma = \frac{2a}{h} + O\left[\left(\frac{a}{h}\right)^3\right]$ para $\frac{a}{h}$ pequeño; $\Gamma = \pi - \frac{2h}{a} + O\left[\left(\frac{h}{a}\right)^3\right]$ para $\frac{h}{a}$ pequeño.

249. $\Gamma = \gamma + 2 \operatorname{arctg} \frac{x_0 \operatorname{sen} \gamma}{1 - x_0 \cos \gamma} = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1+x_0}{1-x_0} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)$; $\Gamma < \gamma$, si $x_0 < 0$, y $\Gamma > \gamma$, si $x_0 > 0$. 253. 1) $w = -\frac{20}{z}$; 2) $w = -(2iz + 1 + 2i)$. 254. $w =$

$$\frac{z - \sqrt{h^2 - R^2}}{z + \sqrt{h^2 - R^2}} e^{i\alpha}, \quad \rho = \frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1}. \quad 255. h = \frac{5}{4}; w = 2e^{i\alpha} \frac{4z-3}{4z+3}$$

$$\text{ó } w = e^{i\alpha} \frac{4z+3}{4z-3}. \quad 256. w = \frac{2z}{z+24} e^{i\alpha} \text{ ó } w = \frac{z+24}{3z} e^{i\alpha}, \quad \rho = \frac{2}{3}. \quad 257. w =$$

$$\lambda \frac{z-z'_1}{z-z'_2} \text{ ó } w = \lambda \frac{z-z'_2}{z-z'_1}, \text{ donde } \lambda \text{ es un número complejo cualquiera, } z'_1 = z_1 + \frac{u_1(z_2-z_1)}{d}, \quad z'_2 = z_1 + \frac{u_2(z_2-z_1)}{d}, \quad d = |z_2 - z_1|, \quad u_1 = \frac{1}{2d} (r_1^2 + d^2 - r_2^2 - \sqrt{[d^2 - (r_1+r_2)^2][d^2 - (r_1-r_2)^2]}), \quad u_2 = \frac{1}{2d} (r_1^2 + d^2 - r_2^2 + \sqrt{[d^2 - (r_1+r_2)^2][d^2 - (r_1-r_2)^2]}); \quad \mu \left(\delta \frac{1}{\mu} \right) = \left| \frac{(d+r_2-u_1)(r_1-u_2)}{(d+r_2-u_2)(r_1-u_1)} \right|.$$

258. 1) $\mu = 2$; 2) $\mu = 5 + 2\sqrt{6}$. 261. El grupo será finito si α es conmensurable con π . 263. Los recintos fundamentales (una de las formas posibles) están sombreados en la fig. 62. Los lados frontera equivalentes están unidos con flechas. Los puntos con números son los puntos inmóviles de las rotaciones que figuran en los grupos (el número indica la cantidad de rotaciones). Para los cinco ejemplos últimos se indica el paralelogramo del subgrupo doblemente periódico; en el ejemplo 7) es un cuadrado, y en los ejemplos 8) y 9) un rombo de ángulos de 120° y de 60° . Observación. Se puede demostrar que, salvo transformaciones lineales, los grupos 3)—9) agotan los grupos de transformaciones lineales con un punto de acumulación (así se denomina el punto de acumulación del conjunto formado por los puntos equivalentes entre sí). 264. 1) $w = e^{i\alpha} z$;

$$2) \frac{w-1}{w+1} = e^{i\alpha} \frac{z-1}{z+1}; \quad 3) \frac{w-i}{w+i} = e^{i\alpha} \frac{z-i}{z+i}; \quad 4) \frac{w-a}{1+aw} = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1+az}.$$

270. 1) y 2) La construcción es evidente; 3) las equidistantes de la "recta" $\alpha\beta$ (α y β son los puntos "infinitos" de esta recta) representan arcos de circunferencias con extremos en α y β (éstas se denominan *hiperciclos*); 4) las líneas límite para un haz de "rectas paralelas" con el "punto infinito" α común son las circunferencias tangentes (por dentro) en el punto α a la circunferencia unidad (éstas se denominan *oriciclos*). 271. 2) Para construir el triángulo "rectilíneo" de ángulos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, construimos el sector circular OAB de ángulo central $\Delta = \pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$, trazamos la "recta" AB y las "rectas" que pasan por los puntos A y B , forman ángulos φ_2 y φ_3 con AB y se intersecan en el punto C . El ΔABC es el que se

busca. 272. 1) $w = i(z^2 - a^2)$; 2) $w = \sqrt{z - \frac{p}{2}} - i \sqrt{\frac{p}{2}}$. 273. 1) $w = \frac{z^2}{a^2}$; 2) $w = \sqrt{\frac{z}{a}}$; 3) $w = \frac{A}{2} \left(\frac{z+1}{z-2} \right)^2$. 274. El recinto limitado por el caracol de Pascal $u = R(\cos \varphi + m \cos 2\varphi)$, $v = R(\sin \varphi + m \sin 2\varphi)$. Si el origen de coordenadas del w -plano se toma en el punto $w = -Rm$, obtenemos la ecuación del caracol en la forma corriente: $\rho = R(1 + 2m \sin \theta)$ (en coordenadas polares). Para $m=0$ el caracol de Pascal se convierte en una circunferencia, para $m = \frac{1}{2}$ en una cardioide con el punto de retroceso $w = -\frac{R}{2}$. Las imágenes de las circun-

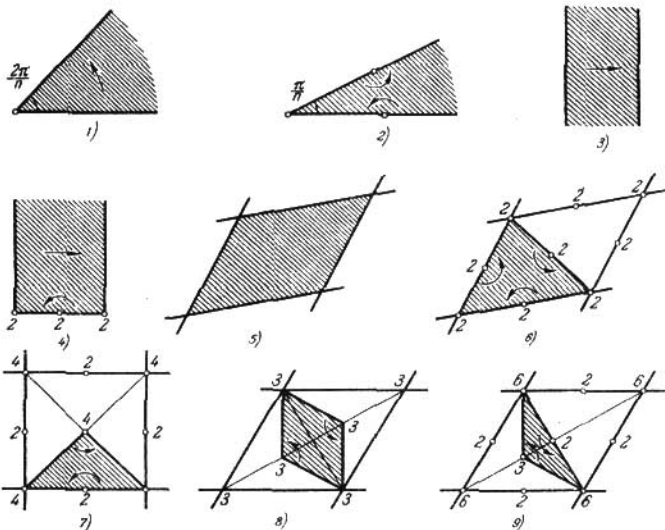


FIG. 62

ferencias $|z| = r < 1$ también son caracoles de Pascal, las ecuaciones polares de los cuales se obtienen fácilmente trasladando el origen de coordenadas al punto $w = -Rmr^2$; $\rho = Rr(1 + 2mr \cos \theta)$. Las imágenes de los radios $\arg z = \alpha$ de una circunferencia son parábolas que pasan por el origen de coordenadas: $m(u \sin 2\alpha - v \cos 2\alpha)^2 + R \sin \alpha (u \sin \alpha - v \cos \alpha) = 0$. A los radios $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$ les corresponden los segmentos $0 \leq u \leq R(1+m)$ y $R(m-1) \leq u \leq 0$ del eje real.

275. El recinto está limitado por la parábola $u = -v^2$ y por la curva $\rho = 2 \cos \frac{\theta}{3}$,

$|\theta| < \frac{3\pi}{4}$ (fig. 63).

276. 1) El recinto está limitado por la epicicloide $u = R \left(\cos \varphi + \frac{\cos n\varphi}{n} \right)$, $v = R \left(\sin \varphi + \frac{\sin n\varphi}{n} \right)$ que tiene $(n-1)$ puntos de retroceso que son imágenes de los puntos $z = \sqrt[n-1]{-1}$; 2) el exterior de la hipo-

cicloide $u = R \left(\cos \varphi + \frac{\cos n\varphi}{n} \right)$, $v = R \left(\sin \varphi - \frac{\sin n\varphi}{n} \right)$ que tiene $(n+1)$ puntos de retroceso (imágenes de los puntos $z = n+1\sqrt[4]{1}$). 277. 1) $|m| \leq \frac{1}{n}$. El recinto está limitado por una epicloide alargada (epitrocoide), es decir, por la trayectoria del punto que se encuentra a una distancia de mR del centro del círculo de radio $\frac{R}{n}$ que rueda exteriormente sobre un círculo de radio $\frac{R(n-1)}{n}$.

2) $|m| \leq \frac{1}{n}$. El exterior del círculo unidad, en el primer caso, y su interior, en el segundo caso, se transforman en el exterior de una hipocicloide "acortada"

(hipotrocoide). 278. 1) $w = z^{\frac{1}{\alpha}}$; 2) $w = \frac{2(\sqrt[3]{4}+1)e^{\frac{\pi i}{3}}z^{\frac{4}{3}}}{(\sqrt[3]{4}-2)e^{\frac{\pi i}{3}}z^{\frac{4}{3}}+3\sqrt[3]{4}}$.

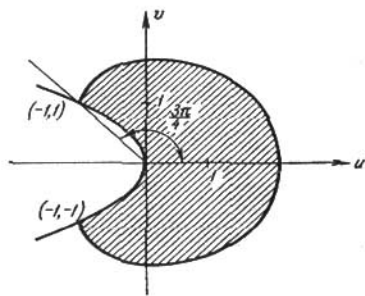


FIG. 63

279. 1) $w = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2$; 2) $w = -\frac{z^2+1}{2z}$; 3) $w = \frac{-2z^2+3z-2}{2z^2+3z+2}$.

280. 1) $w = \frac{z^2+2iz+1}{iz^2+2z+i}$; 2) $w = \frac{2z^2+3iz+2}{2z^2-3iz+2}$. 281. $w = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2$.

282. 1) $w = \left(\frac{\frac{1}{z} + R\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{z} - R\frac{1}{\alpha}} \right)^2$; 2) $w = \left(\frac{\frac{1}{z} - R\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{z} + R\frac{1}{\alpha}} \right)^2$. 283. 1) $w =$

$-\left(\frac{2z + \sqrt{3-i}}{2z - \sqrt{3-i}} \right)^{\frac{3}{2}}$; 2) $w = -\left(\frac{2z + \sqrt{3-i}}{2z - \sqrt{3-i}} \right)^3$; 3) $w = \left(\frac{2z + \sqrt{3-i}}{2z - \sqrt{3-i}} \right)^3$;

4) $w = i \left(\frac{2z + \sqrt{3-i}}{2z - \sqrt{3-i}} \right)^{\frac{3}{2}}$; 5) $w = \left[\frac{z - \sqrt{2}(1-i)}{z - \sqrt{2}(1+i)} \right]^4$. 284. $w = e^{\frac{\pi i}{3}} \times$

$\times \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{2}{3}}$. 285. $w = \sqrt{\frac{z+1}{1-z}}$. 286. $w = \sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$. 287. $w = \sqrt{\frac{z-z_1}{z_2-z}}$.

288. $w = \sqrt{\frac{z+R}{z-R}}$. 289. $w = e^{-\frac{\pi i}{8}} \sqrt{z-i}$. 290. $w = e^{\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2h}{1-h^2}} \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$.

$$291. w = \sqrt{z^2 + h^2}. \quad 292. w = \frac{\sqrt{z^2 + h^2}}{z}. \quad 293. w = \sqrt{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$294. w = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{z\beta} - 1}{\frac{1}{z\beta} + 1}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2\beta}}. \quad 295. w = \sqrt{\frac{(1-z)^{\frac{2}{3}} - (1+z)^{\frac{2}{3}}}{(1-z)^{\frac{2}{3}} + (1+z)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{3}}.$$

296. $w = \left(\frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1}}\right)^2$. La solución de los problemas 1) ó 2) se obtiene escogiendo una u otra rama de \sqrt{z} .

297. $w = \frac{z}{(1-z)^2}$. 298. A las circunferencias

$$|z| = R \text{ (fig. 64) les corresponden elipses confocales } \frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$$

(a la circunferencia $|z|=1$ le corresponde el segmento $v=0, -1 \leq u \leq 1$); a los

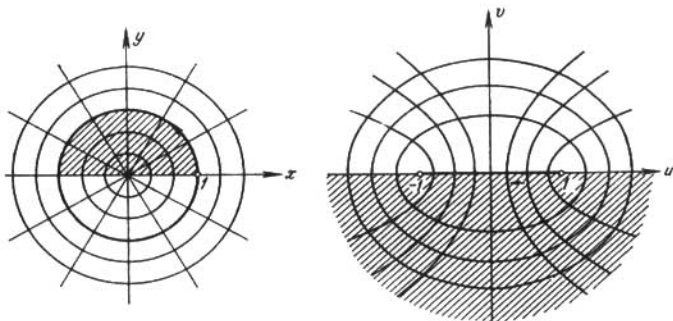


FIG. 64

rayos $\arg z = \alpha$ les corresponden las ramas de las hipérbolas confocales

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1 \text{ (al rayo } \arg z = 0 \text{ le corresponde el rayo } v=0, u \geq 1, \text{ al rayo}$$

$\arg z = \pi$ le corresponde al rayo $v=0, u \leq -1$; a los rayos $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$ les

corresponde el eje $u=0$). 299. 1) y 2) El exterior de la elipse $\frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} +$

$$+ \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1 \text{ (fig. 65, 1, 2); 3) y 4) todo el plano con un corte a lo largo}$$

del segmento $[-1, 1]$ (fig. 65, 3, 4); 5) y 6) todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ del eje real; 7) el semiplano inferior; 8) el semiplano superior; 9) el semiplano superior; 10) la mitad superior del interior

de la elipse $\frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$; 11) la mitad inferior del interior de

la elipse $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2} = 1$; 12) la mitad de la derecha del interior de la elipse $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2} = 1$ con un corte a lo largo del segmento $\left[1, \frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\right]$; 13) el recinto comprendido entre las ramas de la hipérbola $\frac{u^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{v^2}{\cos^2 \alpha} = 1$. 300. 1) A las circunferencias $|z|=R$ les corresponden las elipses $\frac{4u^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2} = 1$ (a la circunferencia $|z|=1$ le corresponde

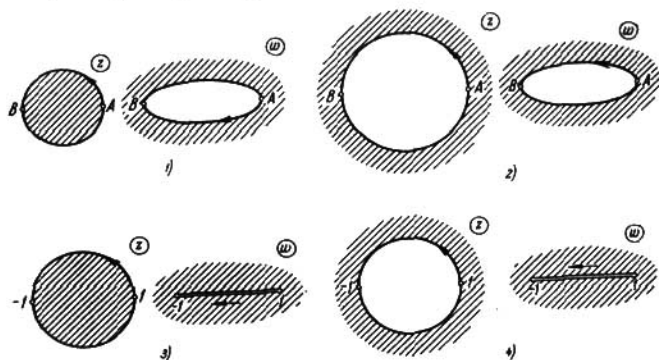


FIG. 65

el segmento $u=0, -1 \leq v \leq 1$), a los rayos $\arg z = \alpha$ les corresponden las ramas de las hipérbolas $\frac{v^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{u^2}{\cos^2 \alpha} = 1$ (a los rayos $\varphi=0$ y $\varphi=\pi$ les corresponde el e.e $v=0$, al rayo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ le corresponde el rayo $u=0, v \geq 1$ y al rayo $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ le corresponde el rayo $u=0, v \leq -1$); 2) a las circunferencias $|z|=R$ les corresponden las elipses $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{a^2}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R-\frac{a^2}{R}\right)^2} = 1$ (a la circunferencia $|z|=a$ le corresponde el segmento $v=0, -a \leq u \leq a$) y a los rayos $\arg z = \alpha$ les corresponden las ramas de la hipérbola $\frac{u^2}{a^2 \cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{a^2 \sin^2 \alpha} = 1$ (al rayo $\arg z = 0$ le corresponde el rayo $v=0, u \geq a$, al rayo $\arg z = \pi$ le corresponde el rayo $v=0, u \leq -a$ y a los rayos $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$ les corresponde el eje $u=0$); 3) las familias de elipses e hipérbolas confocales que se obtienen de las correspondientes familias formadas por la función de Zhukovski (véase el problema 298) mediante una rotación de ángulo γ y mediante una transformación de semejanza con el coeficiente de

semejanza igual a $|c|$ (el centro de semejanza se encuentra en el origen de coordenadas). 301. 1) $w = \frac{e^{i\alpha}}{c} (z + \sqrt{z^2 - c^2})$; 2) $w = \frac{1}{a+b} (z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)})$; en ambos casos para una selección de la rama de la raíz obtenemos la transformación en el exterior del círculo unidad y para la otra selección, en su interior.

302. $w = \frac{az - b \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}$. 303. $w = A (z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)})$, donde A es un número complejo cualquiera; $\mu = \frac{a-b}{\sqrt{a^2+k^2} - \sqrt{b^2+k^2}}$.

304. Para $a > 0$, todo el plano con un corte a lo largo del segmento $[-1, \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})]$; para $a < 0$, todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $[-\infty, \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})]$

y $[-1, +\infty]$. 305. $w = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}}$. 306. $w =$

$= \sqrt{\frac{1}{2}[(a + \frac{1}{a}) - (z + \frac{1}{z})]}$. 307. $w = \sqrt{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z} + a + \frac{1}{a})}$.

308. $w = \frac{\sqrt{(z^2 + \frac{1}{z^2}) + (\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2})}}{z + \frac{1}{z}}$. 309. $w = \sqrt{\frac{1}{2}[(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}) + (z^2 + \frac{1}{z^2})]}$.

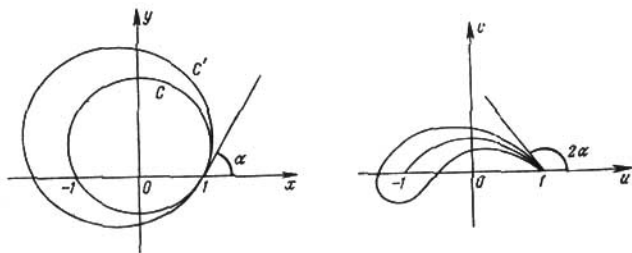


FIG. 66

310. $[1 + \frac{h^2}{4(1-h)}](w + \frac{1}{w}) = (\frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z}) - \frac{h^2}{2(1-h)}$. 311. $w + \frac{1}{w} =$

$= \frac{4a}{(1+a)^2} (z + \frac{1}{z}) - 2 \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2}$; $w'(0) = \frac{(1+a)^2}{4a}$; la longitud del arco correspondiente al corte es igual a $2 \arccos \frac{6a-1-a^2}{(1+a)^2}$ y es igual a π para $a = 3 - \sqrt{8}$.

312. $w + \frac{1}{w} = 2 \frac{2(z + \frac{1}{z}) - (a + \frac{1}{a}) + (b + \frac{1}{b})}{(a + \frac{1}{a}) + (b + \frac{1}{b})}$; $w'(0) = \frac{a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}}{4}$;

las longitudes de los arcos correspondientes a los cortes son iguales a

$$2 \arccos \frac{4 - \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right)}{\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right)} \text{ y a } 2\pi - 2 \arccos \frac{-4 - \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right)}{\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right)}.$$

313. 1) La imagen de la circunferencia C es el arco circular que tiene los extremos en los puntos ± 1 , y que forma el ángulo 2α con el eje real en el punto 1; el exterior de esta circunferencia se transforma en todo el plano con un corte a lo largo del arco indicado; 2) la imagen de la circunferencia C es (fig. 66) una curva cerrada (*perfil de Zhukovki*) con un punto de retroceso en $w=1$ y con la particularidad de que la tangente en este punto forma con el eje real el ángulo 2α ; el arco circular con extremos en los puntos ± 1 , del cual se trata en el punto 1), está contenido en el recinto limitado por el perfil de Zhukovski; el exterior de la circunferencia C se transforma en el exterior del perfil de Zhukovski.

314. 1) La imagen de la circunferencia C es una curva cerrada, compuesta por dos arcos circulares con extremos comunes en los puntos ± 1 y con la particularidad de que las tangentes en el punto 1 a estos arcos forman con el eje real ángulos iguales respectivamente a $2\alpha - \alpha\delta$ y $2\alpha + (\pi - \alpha)\delta$; el exterior de la circunferencia se transforma en el exterior del recinto limitado por los arcos indicados; la imagen de la circunferencia C' es (fig. 67) una curva cerrada con un punto anguloso en $w=1$ y con la particularidad de que las tangentes en este punto forman con el eje real ángulos iguales, respectivamente, a $2\alpha - \alpha\delta$ y $2\alpha + (\pi - \alpha)\delta$; la imagen de la circunferencia C está contenida en el recinto limitado por la imagen de la circunferencia C' ; el exterior de la circunferencia C' se transforma en el exterior de la imagen de esta circunferencia.

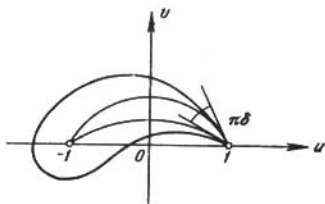


FIG. 67

2) El interior de la circunferencia C se transforma en el exterior del recinto limitado por los arcos circulares que pasan por los puntos -1 y 1 con la particularidad de que sus tangentes en el punto 1 forman con el eje real ángulos iguales, respectivamente, a: a) $2\alpha + (\pi - \alpha)\delta$ y $2\alpha + (2\pi - \alpha)\delta$, si la función $w(z)$ está definida en el z -plano con un corte a lo largo del arco de la circunferencia C que pertenece al semiplano inferior y b) $2\alpha - \alpha\delta$ y $2\alpha - (\pi + \alpha)\delta$, si el corte que define a la función $w(z)$ se hace a lo largo del arco de la circunferencia C perteneciente al semiplano superior.

$$315. \frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{ze^{it} + ie^{i\frac{\beta}{2}}}{ze^{it} + ie^{-i\frac{\beta}{2}}} \right)^2,$$

donde $\gamma = \alpha$ para $\beta > 0$ y $\gamma = \alpha + \pi$ para $\beta < 0$. 316. Todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $y=0$, $x \leq -\frac{1}{2}$ e $y=0$, $x \geq \frac{1}{2}$.

317. El semiplano $x > \frac{1}{2}$ con un corte a lo largo del segmento $y=0$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. 318. Todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $y=0$, $1 \leq x < \infty$ e $y=0$, $-\infty < x \leq -1$.

319. El ángulo $-\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{\pi}{n}$ con un corte a lo largo del rayo $y=0$, $\sqrt[n]{\frac{1}{4}} \leq x < \infty$. 320. 1) Todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $|w| \geq \frac{1}{\sqrt[n]{4}}$, $\arg w = \frac{2k\pi}{n}$ ($k=0, 1, \dots, n-1$);

$$2) w = \frac{(1+z^n)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{4} z}. \quad 321. 1) w = \sqrt{z^2 + \sqrt{z^4 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$2) w = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - z^4}}}{z} = \frac{1}{z \sqrt{2}} (\sqrt{1 + z^2} + \sqrt{1 - z^2}).$$

$$322. 1) w = (\alpha^n + \alpha^{-n})^{-\frac{1}{n}} \sqrt[n]{z^n + z^{-n} + \sqrt{(z^n + z^{-n})^2 - (\alpha^n + \alpha^{-n})^2}}.$$

Solución. La función $\zeta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$ transforma el sector en el semiplano inferior de manera que los puntos α y $\alpha e^{\frac{\pi i}{n}}$ pasan a los puntos $\pm \frac{1}{2} \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \right)$. Después es preciso comprimir el semiplano $\left(\rho = \frac{\zeta}{\frac{1}{2} (\alpha^n + \alpha^{-n})} \right)$ y transformarlo en el semicírculo unidad ($\tau = \rho + \sqrt{\rho^2 - 1}$). La función $w = \sqrt[n]{\tau}$ es la deseada.

$$2) w = \left(\alpha^{\frac{n}{2}} + \alpha^{-\frac{n}{2}} \right)^{-\frac{2}{n}} \left(z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}} + \sqrt{\left(z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}} \right)^2 - \left(\alpha^{\frac{n}{2}} + \alpha^{-\frac{n}{2}} \right)^2} \right)^{\frac{2}{n}}.$$

$$323. w = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{z^2 + c^2}}} \text{ y } w = \frac{1}{\beta} (\sqrt{z^2 + c^2} + \alpha + \sqrt{(\sqrt{z^2 + c^2} + \alpha)^2 \beta^2}),$$

$$\text{donde } \alpha = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + c^2}), \quad \beta = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}).$$

$$324. w = \sqrt{\sqrt{z^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2}}.$$

$$325. w = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 - 1} \right).$$

$$326. w = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 - 1} + z - i}{\frac{\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha + 1} (z - i) - \sqrt{z^2 - 1}}}.$$

$$327. w = \sqrt{\frac{\sqrt{z_1^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{b_1^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \sqrt{z_1^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}} \quad \text{para } b < 1;$$

$$w = \sqrt{\sqrt{z_1^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \quad \text{para } b = 1;$$

$$w = \sqrt{\frac{\sqrt{z_1^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{z_1^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{b_1^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}} \quad \text{para } b > 1; \quad z_1 = \frac{1+z}{1-z},$$

$$b_1 = \frac{1+b}{1-b}.$$

$$328. w = \frac{\sqrt{\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)} + \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)}}{\sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}}$$

$$329. w = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{5}}} \left(\sqrt{\sqrt{z^4 + 4} + 2} + \sqrt{\sqrt{z^4 + 4} - \sqrt{5}} \right)$$

Solución. La función $\zeta = z^2$ transforma el semiplano superior con cortes a lo largo de los segmentos $[0, 1+i]$ y $[0, -1+i]$ en el recinto del problema 324 que lo transformamos después en el semiplano superior. La función hallada, según el principio de simetría, transforma el recinto dado en el plano con un corte a lo largo del segmento. Resta transformar el exterior de este segmento en el exterior del círculo unidad.

$$330. w = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[(z + \sqrt{z^2 - 1})^{\frac{\pi}{\alpha}} + (z + \sqrt{z^2 - 1})^{-\frac{\pi}{\alpha}} + 2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[(z + \sqrt{z^2 - 1})^{\frac{\pi}{2\alpha}} + (z + \sqrt{z^2 - 1})^{-\frac{\pi}{2\alpha}} \right]$$

Solución. Mediante la función $\tau = \zeta^{\frac{\pi}{\alpha}}$, donde $\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1}$ es la inversa de la función de Zhukovski, la mitad superior del recinto dado se transforma en el recinto $|\tau| > 1$, $\text{Im } \tau > 0$ que, a su vez, se transforma mediante la función de Zhukovski en el semiplano superior. Aplicando el principio de simetría, obtenemos la transformación del interior de la rama de la derecha de la hipérbola en todo el plano con un corte a lo largo del rayo $(-\infty, -1]$; es fácil transformar este último recinto en el semiplano superior. *Observación.* El factor

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ no tiene importancia ya que la transformación $w' = kw$ ($k > 0$) trans-

forma el semiplano en sí misma. 331. $w = [e^{-i\alpha} (z + \sqrt{z^2 - 1})]^{\frac{\pi}{2\beta}} -$

$- [e^{-i\alpha} (z + \sqrt{z^2 - 1})]^{-\frac{\pi}{2\beta}}$, donde $\beta = \pi - \alpha$. 332. $w = \left[e^{-i\alpha} \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{c} \right]^p$,

donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\alpha = \text{arctg } \frac{b}{a}$, $p = \frac{\pi}{2 \text{arctg } \frac{a}{b}}$. 333. 1) El recinto se

construye del siguiente modo: el anillo $r_1^2 < |w| < r_2^2$ se corta a lo largo del segmento $r_1^2 \leq u \leq r_2^2$ del eje real y al borde inferior del corte se pega la parte $r_1^2 < |w| < r_2^2$, $0 < \arg w < 2\alpha$ de otro anillo semejante; si $\alpha = \pi$, el segundo anillo es completo y su extremo libre debe ser pegado con el extremo libre del primer anillo (en este caso obtenemos un anillo $r_1^2 < |w| < r_2^2$ de dos hojas); 2) si $a \leq 1$, la desigualdad $|z^2 - 1| < a$ determina dos recintos (véase el problema 39), cada uno de los cuales se transforma en un círculo $|w - 1| < a$ de una hoja; en cambio si $a > 1$, la desigualdad $|z^2 - 1| < a$ determina un recinto que se transforma en el círculo $|w - 1| < a$ de dos hojas (para construir este círculo de dos hojas es suficiente cortar dos ejemplares idénticos del círculo $|w - 1| < a$ a lo largo de cualquier radio y pegar el borde inferior del corte del primer ejemplar con el borde superior del corte del segundo ejemplar y el borde superior del corte del primer ejemplar, con el borde inferior del corte del segundo ejemplar).

334. 1) El recinto se construye del siguiente modo: al plano w cortado a lo largo del segmento $[-1, 1]$ se pega el interior de la elipse

$$\frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1, \text{ también cortada a lo largo del segmento } [-1, 1],$$

de manera que al borde inferior del corte del plano se pega el borde superior del corte de la elipse y al borde superior del corte del plano se pega el borde inferior del corte de la elipse; 2) el recinto de dos hojas $\left| \frac{w-1}{w+1} \right| < R^2$ (la desigualdad $\left| \frac{w-1}{w+1} \right| < R^2$ determina el interior de este círculo para $R < 1$, el semiplano para $R=1$ y el exterior del círculo para $R > 1$). El corte y las pegaduras correspondientes se realizan a lo largo de una línea que une el punto $w=1$ con un punto frontera del recinto $\left| \frac{w-1}{w+1} \right| < R^2$.

335. 1) y 2) La superficie se compone de dos hojas del plano z cortadas a lo largo del segmento $[-1, 1]$ y pegadas de manera que el borde inferior del corte de la primera hoja se pega al borde superior del corte de la segunda y el borde superior del corte de la primera hoja se pega al borde inferior del corte de la segunda.
336. 1) y 2) La superficie se compone de dos hojas cortadas a lo largo de los rayos que van desde los puntos $-i, 0, i$, respectivamente, al infinito, por ejemplo, paralelamente al eje real y en su dirección positiva. Los bordes inferiores de los cortes de la primera hoja se pegan a los bordes superiores de los cortes correspondientes de la segunda hoja y viceversa.
337. La superficie se compone de tres hojas del plano z cortadas a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$. A lo largo del rayo $(-\infty, 1]$ las hojas se pegan del modo siguiente: el borde superior del corte de la primera hoja se pega al borde inferior del corte de la segunda hoja, el borde superior del corte de la segunda hoja se pega al borde inferior del corte de la tercera hoja y el borde superior del corte de la tercera hoja se pega al borde inferior del corte de la primera hoja. A lo largo del rayo $[1, \infty)$ es preciso pegar: el borde inferior del corte de la primera hoja al borde superior del corte de la segunda hoja, el borde inferior del corte de la segunda hoja al borde superior del corte de la tercera hoja y el borde inferior del corte de la tercera hoja al borde superior del corte de la primera hoja.

338. 1) En la red polar $\rho = \text{const}$, $\theta = \text{const}$; 2) en las espirales $\rho = e^{k\theta}$ (en los rayos $\theta = b$ para $k=0$); 3) en el ángulo $\alpha < \theta < \beta$ (para $\alpha=0$ y $\beta=2\pi$, en el plano cortado a lo largo de la parte positiva del eje real); 4) en todo el plano cortado a lo largo de la espiral $\rho = e^\theta$; 5) en el sector $\rho < 1$, $0 < \theta < \alpha$ (para $\alpha=2\pi$, en el círculo unidad cortado a lo largo del rayo $v=0$, $0 \leq u \leq 1$); 6) en el recinto $\rho > 1$, $0 < \theta < \alpha$ (para $\alpha=2\pi$ en el exterior del círculo unidad con un corte a lo largo del rayo $v=0$, $1 \leq u < \infty$); 7) en el recinto $e^\alpha < \rho < e^\beta$, $\gamma < \theta < \delta$ (para $\delta - \gamma = 2\pi$ este recinto resulta un anillo concéntrico con un corte a lo largo del segmento $\theta = \gamma$, $e^\alpha \leq \rho \leq e^\beta$).
339. El ángulo $0 < \arg(z+n) < \frac{\pi}{n}$; la franja $0 < y < \pi$.

340. 1) En la red cartesiana rectangular $u=C$, $v=C$; 2) en rectas; 3) en la franja $0 < v < \alpha$; 4) en la semifranja $u < 0$, $0 < v < \alpha$; 5) en el rectángulo $\ln r_1 < u < \ln r_2$, $0 < v < 2\pi$.

341. 5) $b = a \left| \text{th} \frac{\xi_0}{2} \right|$, $l = a \left| \text{tg} \frac{\eta_0}{2} \right|$.
342. 1) La familia $x=C$ se transforma en la familia de hipérbolas confocales de focos en los puntos $\pm 1 \left(\frac{u^2}{\cos^2 C} - \frac{v^2}{\sin^2 C} = 1 \right)$; la familia $y=C$ se transforma en la familia

de elipses confocales de los mismos focos $\left(\frac{u^2}{\text{ch}^2 C} + \frac{v^2}{\text{sh}^2 C} = 1 \right)$; 2) en el semiplano

superior; 3) en el cuarto cuadrante; 4) en el semiplano de la derecha con un corte a lo largo del segmento $[0, 1]$; 5) en todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$, y $[1, \infty)$ del eje real; 6) en el interior de la elipse

$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 h} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 h} = 1$ con cortes a lo largo de los segmentos $[-ch, -1]$ y $[1, ch]$.

343. 1) En la semifranja $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $v > 0$; 2) en la franja $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$;

3) en la semifranja $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $v > 0$; 4) en la franja $-\frac{\pi}{2} < u < 0$.

344. 1) La familia $x=C$ se transforma en la familia de elipses confocales de

focos en los puntos $\pm 1 \left(\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C} = 1 \right)$; la familia $y=C$ se transforma

en la familia de hipérbolas confocales de focos en los mismos puntos

$\left(\frac{u^2}{\cos^2 C} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2 C} = 1 \right)$; 2) en todo el plano con cortes a lo largo de los rayos

$(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ del eje real; 3) en el semiplano superior. 345. 1) En la

franja $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$; 2) en la semifranja $0 < v < \frac{\pi}{2}$, $u > 0$. 346. 1) La familia

$x=C$ se transforma en el haz de arcos circulares con los extremos en los

puntos $w = \pm i$ que incluye también las partes correspondientes del eje imaginario; la ecuación del haz de circunferencias es: $(u-a)^2 + v^2 = 1 + a^2$ ($a = \operatorname{ctg} 2C$);

la familia $y=C$ se transforma en la familia de circunferencias de Apolonio respecto a los puntos $w = \pm i$ (que incluye también el eje real); la ecuación de

la familia de circunferencias de Apolonio es: $u^2 + (v-b)^2 = b^2 - 1$, $|b| > 1$ ($b = \operatorname{cth} 2C$); 2) en el semiplano superior con un corte a lo largo del segmento

$0 \leq v \leq 1$ del eje imaginario; 3) en todo plano con un corte a lo largo del segmento

$-1 \leq v \leq 1$ del eje imaginario; 4) en el semicírculo $|w| < 1$, $\operatorname{Re} w > 0$;

5) en el círculo unidad. 347. 1) En todo el plano con cortes a lo largo de los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$ del eje real; 2) en el semiplano de la derecha

con un corte a lo largo del rayo $[1, \infty)$ del eje real. 348. $w = e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}$

349. $w = -ch \frac{(z-1)\pi}{h}$. 350. $w = e^{\frac{2\pi iz}{z^2-2}}$. 351. $w = e^{\frac{\pi i(z+2)}{3(z-2)}}$.

352. $w = \cos \frac{\pi(z+2)}{2z}$. 353. $w = e^{\frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}}(\sqrt{z^2-1})}$. 354. 1) $w =$

$= -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \operatorname{th} \frac{\pi i(z+3i)}{4(z-1)}$; 2) $w = -\frac{e^{\frac{\pi i}{z-i} + 2-i}}{e^{\frac{\pi i}{z-i} + 2+i}}$; 3) $w = \frac{2e^{\frac{\pi i}{z-i}}}{1 + e^{\frac{\pi i}{z-i}}}$.

355. 1) $w = \sqrt{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi h}}$; 2) $w = \sqrt{\frac{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi h_1}}{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi h_2}}}$.

356. $w = \sqrt{\frac{\cos \pi z - \cos \pi h}{1 + \cos \pi z}}$. 357. $w = \sqrt{\frac{\cos \pi z - \cos \pi h_1}{\cos \pi z + \cos \pi h_2}}$.

358. $w = \sqrt{\cos 2z + \operatorname{ch} 2h}$. 359. $w = \sqrt{\frac{\cos 2z + \operatorname{ch} 2h}{\cos 2z + 1}}$.

360. $w = \sqrt{\frac{\cos 2z + \operatorname{ch} 2h_1}{\cos 2z + \operatorname{ch} 2h_2}}$. 361. $w = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{z}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{z}}}$. 362. $w =$

$= \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{4\pi}{z}}{\cos \frac{4\pi}{z} - \cos \frac{4\pi}{a}}}$. 363. $w = \sqrt{\frac{\cos \frac{4\pi}{z} - \cos \frac{4\pi}{b}}{\cos \frac{4\pi}{z} - \cos \frac{4\pi}{a}}}$. 364. $w =$

$$= \sqrt{\frac{\cos \frac{2\pi}{z} - \cos \frac{2\pi}{b}}{\cos \frac{2\pi}{z} - \cos \frac{2\pi}{a}}}, \quad 365. w = \sqrt{\frac{e^{-\frac{2\pi}{\beta}} - e^{-\frac{2\pi i}{z}}}{e^{-\alpha} - e^{-\frac{2\pi i}{z}}}}, \quad 366. w = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{h} - \cos \frac{\pi}{z}}{1 - \cos \frac{\pi}{z}}}$$

367. $w = i \operatorname{ch}^2 \frac{\pi \sqrt{z}}{2\alpha}$, $w = \operatorname{th}^2 \frac{\pi \sqrt{z}}{4\alpha}$ (véase la observación a la respuesta al problema

330). 368. $w = \operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} \alpha}$. *Solución.* La función $\operatorname{sen} z$ transforma la semifranja

$y > 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ en el semiplano superior; además, los puntos $\pm \frac{\pi}{2} + ai$

pasan a los puntos $\pm \operatorname{ch} \alpha$. De aquí es fácil deducir que la función $w = \pm \operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} \alpha}$

transformará la semifranja indicada en sí misma de manera que a los rayos $x = \pm \frac{\pi}{2}$, $a \leq y < \infty$ les corresponderán los rayos $u = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v < \infty$. Aplicando

un número indefinido de veces el principio de simetría, comprobamos que la

función hallada es la que se requería. 369. $w = \frac{\operatorname{barcsen} \frac{i \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} \alpha}}{\operatorname{arcsen} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}}$

$$370. w = \frac{\operatorname{arcsen} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} + \sqrt{\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}\right)^2 - \left(\operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} \alpha}\right)^2}}{\operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} \alpha}}, \quad 371. w =$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} \alpha} - \operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} p}{\operatorname{ch} \alpha}}{\operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} q}{\operatorname{ch} \alpha} - \operatorname{arcsen} \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{ch} \alpha}}}, \quad 372. w = \operatorname{arcsen} e^{2iz}. \text{ Solución. La función}$$

$\zeta = e^{2iz}$ transforma la semifranja $0 < x < \frac{\pi}{2}$ en el semiplano superior y la función

$w = \operatorname{arcsen} \zeta$ transforma el semiplano superior en la semifranja $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$,

$v > 0$. La función $w = \operatorname{arcsen} e^{2iz}$, que transforma una franja en una semifranja,

transforma los rayos $x=0$, $-\infty < y < 0$ y $x=\frac{\pi}{2}$, $-\infty < y < 0$ en los rayos

$x=\frac{\pi}{2}$, $0 < y < \infty$ y $x=-\frac{\pi}{2}$, $0 < y < \infty$, respectivamente. Aplicando un

número indefinido de veces el principio de simetría, comprobamos que la función

hallada realiza la transformación requerida. 373. 1) El rectángulo curvilíneo

$1 < \rho < e^a$, $0 < \theta < b$, si $b < 2\pi$; el anillo $1 < \rho < e^a$ con un corte a lo largo

del segmento $[1, e^a]$, si $b=2\pi$; para $b=2k\pi$ ($k=2, 3, \dots$) se obtiene un recinto

de varias hojas compuesto por k anillos $1 < \rho < e^a$ cortados a lo largo del

segmento $[1, e^a]$ y pegados de manera que el borde inferior del corte del primer anillo

se pega al borde superior del corte del segundo anillo, el borde inferior del corte del

segundo anillo se pega al borde superior del corte del tercer anillo, etc.; si $b=2k\pi + \beta$ ($k=2, 3, \dots$, $0 < \beta < 2\pi$), al borde inferior libre del

último anillo de la superficie construida debe pegarse a lo largo del

segmento $[1, e^a]$ el rectángulo curvilíneo $1 < \rho < e^a$, $0 < \theta < \beta$; 2) el

corte de cada anillo se pega al borde superior del corte del anillo cuyo número es mayor en una unidad. Este recinto es parte de la superficie de Riemann, sobre el anillo $1 < \rho < e^a$, de la función $\operatorname{Ln} w$. 374. 1) El recinto de dos hojas que se obtiene al pegar dos simiplanos de la derecha, cada uno de los cuales está cortado a lo largo del rayo $v=0$, $1 \leq u < \infty$; los bordes de los cortes se pegan en cruz, es decir, de manera que el borde inferior del corte de la primera hoja se pega al borde superior del corte de la segunda hoja y viceversa; 2) el recinto de dos hojas, compuesto por dos planos que tienen cortes a lo largo de los rayos $-\infty < u \leq -1$ y $1 \leq u < \infty$ del eje real que se pegan en cruz a lo largo de los cortes $-\infty < u \leq -1$. Los bordes de los cortes $1 \leq u < \infty$ permanecen libres. 375. El recinto de dos hojas, compuesto de dos planos cortados a lo largo del segmento $-1 \leq v \leq 1$ del eje imaginario y pegados de forma que el borde de la izquierda del corte de la primera hoja se pega al borde de la derecha del corte de la segunda hoja. Los demás bordes permanecen libres. 376. La superficie de Riemann tiene infinitas hojas y dos puntos logarítmicos sobre los puntos $w=0$ y $w=\infty$. Los recintos de univalencia del z -plano, correspondientes a las hojas del w -plano con cortes a lo largo de la parte positiva del eje real, están limitados por las circunferencias $2k\pi(x^2+y^2)+y=0$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 377. $r_1=\infty$, $r_2=r_3=1$. La imagen del círculo $|z| < r_1$ es todo el plano salvo el punto $w=-1$; la imagen del círculo $|z| < r_2$ (y del círculo $|z| < r_3$) es el semiplano $\operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$. 378. 1) $r_1=\frac{1}{2}$; 2) $r_1=\frac{1}{2|a|}$; 3) $r_1=1$. 383. 1) $r_2=\frac{1}{4}$; 2) $r_2=\frac{1}{4|a|}$; 3) $r_2=2-\sqrt{3}$. 384. $r_1=\pi$, $r_2=1$. 385. 1) $r_3=\frac{1}{2}$; 2) $r_3=\frac{1}{2|a|}$; 3) $r_3=1$.

Capítulo III

388. 1) $I_1=2+i$, $I_2=1+\frac{i}{2}$; 2) $I_1=\frac{i\pi}{2}$, $I_2=-\frac{\pi}{2}$; 3) $I_1=i\pi R^2$, $I_2=-\pi R^2$. 389. 1) $\sqrt{5}\left(1-\frac{i}{2}\right)$; 2) 2; 3) $2i$; 4) 0. 390. πi . 391. $\frac{4}{3}$. 392. 1) $\frac{R^{n+1}}{n+1} [(-1)^{n+1}-1]$, si $n \neq -1$; πi , si $n=-1$; 2) y 3) 0, si $n \neq -1$; $2\pi i$, si $n=-1$. 393. 1) $-2(1-i)$; 2) $2(1-i)$; 3) $-2(1+i)$; 4) -4 ; 5) $4i$. 394. 1) $2\pi i$; 2) -2π ; 3) $2\pi Ri$; 4) $2\pi Ri$. 395. 1) $\frac{2\pi i}{n+1}$, si $n \neq -1$; $-2\pi^2$, si $n=-1$; 2) $(-1)^{n+1} \frac{2\pi i}{n+1}$, si $n \neq -1$; $-2\pi^2$, si $n=-1$. 396. $\frac{e^{2\pi i}-1}{1+\alpha}$, si $\alpha \neq -1$; $2\pi i$, si $\alpha=-1$. 398. 1) $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{sen} p\alpha \geq 0$. 412. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) 0. 413. Si el contorno C contiene en su interior el punto 0 y no contiene ni 1 ni -1 , se tiene $I=-2\pi i$; si contiene sólo uno de los puntos -1 ó 1 y no contiene el punto 0, se tiene $I=\pi i$. De aquí se desprende que la integral puede tomar cinco valores diferentes ($-2\pi i$; $-\pi i$; 0; πi ; $2\pi i$). 414. 2^n-1 para $n > 1$ y 2 para $n=1$. 415. $\frac{\pi i}{2}$. 416. $\frac{\operatorname{sen} a}{a}$. 417. $e^a \left(1+\frac{a}{2}\right)$. 418. 1) 1; 2) $-\frac{e}{2}$; 3) $1-\frac{e}{2}$. 420. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $1-\frac{2i}{3}$. 425. $R=1$. 426. ∞ . 427. 0. 428. 2. 429. e . 430. 1. 431. 1. 432. 1. 433. $\frac{1}{4}$. 434. $\frac{1}{e}$. 435. 1

para $|a| \leq 1$ y $\frac{1}{|a|}$ para $|a| > 1$. 436. 1) R ; 2) $\frac{R}{2}$; 3) ∞ ; 4) 0; 5) R^k ; 6) R para $|z_0| \leq 1$ y $\frac{R}{|z_0|}$ para $|z_0| > 1$. 438. 1) $R \geq \min(r_1, r_2)$; 2) $R \geq r_1 r_2$; 3) $R \leq \frac{r_1}{r_2}$. 439. 1) $\frac{z}{(1-z)^2}$; 2) $-\ln(1-z)$; 3) $\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$; 4) $\ln(1+z)$. 440. Diverge en todos los puntos. 441. Converge (no absolutamente) en todos los puntos, a excepción de $z=1$. 442. Converge absolutamente. 443. Converge (no absolutamente) en todos los puntos, a excepción de $z=-1$. 444. Converge (no absolutamente) en todos los puntos, a excepción de los puntos

$z = e^{\frac{2k\pi i}{p}}$ ($k=0, 1, \dots, p-1$). 445. Converge (no absolutamente) en todos los puntos, a excepción de los puntos $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ y $z = -1$. 446. Converge absolutamente. 447. Por ejemplo, $c_n = (-1)^n$. 449. Solución. Investiguemos primero la convergencia en el punto $z=1$. Los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, cuyos denominadores son $k^2, k^2+1, \dots, (k+1)^2-1$ llevan el signo $(-1)^k$; denotemos mediante $(-1)^k \sigma_k$ la suma de estos términos y demostremos que $\sigma_k \rightarrow 0$ monótonamente. Tenemos $0 < \sigma_k < \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2} = \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$.

Además, la diferencia

$$\begin{aligned} \sigma_k - \sigma_{k+1} &= \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right] + \left[\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{(k+1)^2+1} \right] + \dots \\ &\dots + \left[\frac{1}{(k+1)^2-1} - \frac{1}{(k+2)^2-3} \right] - \frac{1}{(k+2)^2-2} - \frac{1}{(k+2)^2-1} > \\ &> (2k+1) \left[\frac{1}{(k+1)^2-1} - \frac{1}{(k+2)^2-3} \right] - \frac{1}{(k+2)^2-2} - \frac{1}{(k+2)^2-1} > 0. \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que la serie dada converge para $z=1$. Si $|z|=1$, pero $z \neq 1$, nos valemos, según la indicación, del criterio de convergencia del problema 90, tomando $a_n = (-1)^{[\sqrt{n}]} z^n$, $b_n = \frac{1}{n}$.

Las dos primeras condiciones se verifican obviamente; para demostrar la tercera estimamos $S_n = S_n = -z - z^2 - z^3 + z^4 + \dots + (-1)^{[\sqrt{n}]} z^n = -z \frac{1-z^3}{1-z} + z^4 \frac{1-z^3}{1-z} - z^7 \frac{1-z^3}{1-z} + \dots \pm z^{p^2} \frac{1-z^{2p+1}}{1-z} \mp (z^{(p+1)^2} + \dots + z^n)$, donde $p = [\sqrt{n}] - 1$. De aquí $|S_n| < \frac{2p}{|1-z|} + 2p + 3$ y, por consiguiente, para todo z existe un k tal que $|S_n| < kp < k\sqrt{n}$, con lo cual concluye la demostración.

$$452. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, R = \infty. \quad 453. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = \infty. \quad 454. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!},$$

$$R = \infty. \quad 455. \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}, R = \infty. \quad 456. a^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \left(\frac{z}{a}\right)^n, \text{ donde}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n=1, 2, \dots); \quad R = |a|.$$

$$457. \quad \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{z}{i} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left(\frac{z}{i} \right)^n \right], \quad R=1.$$

$$458. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n z^n}{b^{n+1}}, \quad R = \left| \frac{b}{a} \right|. \quad 459. \quad \frac{i}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3i)^n (2+3i)^n}{13^n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

$$\text{donde } c_n = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} (-1)^m \binom{n}{2m+1} 2^{n-2m-1} 3^{2m}, \quad R = \sqrt{13}.$$

$$460. \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) z^n, \quad R=1. \quad 461. \quad 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1.$$

$$462. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1. \quad 463. \quad z + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n! (2n+1)} z^{2n+1}, \quad R=1.$$

$$464. \quad \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) \frac{z^n}{n}, \quad R=1. \quad 465. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n! (2n+1)}, \quad R=\infty.$$

$$466. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)! (2n+1)}, \quad R=\infty. \quad 467. \quad \frac{1}{3} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}},$$

$$R=3. \quad 468. \quad \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} [(z-1)^{2n} + (z-1)^{2n+1}], \quad R=2. \quad 469. \quad \frac{1}{4} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-3)(z-1)^n}{2^{n+2}}, \quad R=2. \quad 470. \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1}{n} \left(\frac{1}{3} \right) (z-1)^n, \quad R=1.$$

$$471. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad R=1. \quad 472. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(1 + \frac{n\pi}{2} \right)}{n!} (z-1)^{2n}, \quad R=\infty.$$

$$473. \quad 1 + z^2 + \frac{z^4}{3} + \dots \quad 474. \quad 1 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{96} + \dots \quad 475. \quad 1 + z^2 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{5}{6} z^4 -$$

$$- \frac{3}{4} z^5 + \dots \quad 476. \quad 1 + z + z^2 + \frac{5}{6} z^3 - \frac{5}{8} z^4 + \frac{13}{30} z^5 + \dots \quad 477. \quad z + \frac{z^2}{2!} + \frac{2z^3}{3!} +$$

$$+ \frac{9z^4}{5!} + \dots \quad 478. \quad \ln 2 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^4}{192} + \dots = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}; \quad c_0 = \frac{1}{2},$$

$$c_0 = n c_1 + n(n-1) c_2 + \dots + n! c_{n-1} + 2n! c_n = 1, \quad n \geq 1.$$

$$479. \quad 2 \left[\frac{z^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{z^3}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{z^4}{4} + \dots + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right. \right.$$

$$\left. \dots + \frac{1}{n-1} \right) \frac{z^n}{n} + \dots \left. \right]. \quad 480. \quad -4\pi^2 + 2 \left[-2\pi i z + (1-2\pi i) \frac{z^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{1}{2} - 2\pi i \right) \frac{z^3}{3} + \dots + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - 2\pi i \right) \frac{z^n}{n} + \dots \right].$$

$$481. \quad z^2 - \left(1 + \frac{1}{3} \right) \frac{z^4}{2} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \frac{z^6}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{z^{2n}}{n} + \dots \left. \right]. \quad 482. \quad 2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{z^3}{3} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \frac{z^6}{5} + \dots \right]$$

$$\dots + (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad 483. \quad 1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \binom{n-1}{k-1} \right] z^n. \quad 487. \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k} z^{2k}}{(2k)!}, \quad R = \pi.$$

$$488. \quad 1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{2k (2k)!} z^{2k}, \quad R = \pi; \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}, \quad R = \frac{\pi}{2};$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{2k (2k)!} z^{2k}, \quad R = \frac{\pi}{2}; \quad 4) \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2^{2k} - 2) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k},$$

$$R = \pi. \quad 489. \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \quad n \geq 0, \quad R = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

$$490. \quad c_0 = \frac{A}{\alpha}, \quad c_1 = \frac{\alpha B - \beta A}{\alpha^2}, \quad c_2 = \frac{\alpha^2 C - \alpha \beta B + (\beta^2 - \alpha \gamma) A}{\alpha^3}; \quad \alpha c_n + \beta c_{n-1} +$$

$$+ \gamma c_{n-2} + \delta c_{n-3} = 0 \quad (n = 3, 4, \dots). \quad 496. \quad \frac{e^{-z/t}}{1-t}; \quad L_{n+1}(z) - (2n+1-z)L_n(z) +$$

$$+ n^2 L_{n-1}(z) = 0 \quad (n \geq 1). \quad 497. \quad z + z^3 + \frac{z^5}{4 \cdot 5} + \frac{z^7}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{z^{4n+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \dots 4n(4n+1)} + \dots;$$

$$|z| < \infty. \quad 498. \quad z - \frac{n(n+1) - 1 \cdot 2}{3!} z^3 + \frac{[n(n+1) - 1 \cdot 2][n(n+1) - 3 \cdot 4]}{5!} z^5 + \dots$$

$$\dots + \frac{[n(n+1) - 1 \cdot 2][n(n+1) - 3 \cdot 4] \dots [n(n+1) - (2k-1)2k]}{(2k+1)!} z^{2k+1} + \dots;$$

$$|z| \ll 1. \quad 499. \quad \frac{z}{1-z^2}. \quad 500. \quad 1 - \frac{m^2}{2!} z^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!} z^4 - \dots$$

$$\dots + (-1)^m \frac{m^2(m^2-2^2) \dots [m^2 - (2n-2)^2]}{(2n)!} z^{2n} + \dots \quad 501. \quad w = F(a, b, c, z) = 1 +$$

$$+ \frac{ab}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2! c(c+1)} z^2 + \dots + \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)b(b+1) \dots (b+n-1)}{n! c(c+1) \dots (c+n-1)} z^n;$$

$|z| < 1.$ 503. Solución. Derivando la ecuación hipergeométrica, obtenemos la ecuación

$$z(1-z) \frac{d^2 \zeta}{dz^2} + [(c+1) - (a+b+3)z] \frac{d \zeta}{dz} - (a+1)(b+1)\zeta = 0, \quad (1)$$

a la cual satisface la función $\xi = \frac{d}{dz} F(a, b, c, z)$. Como la función

$\frac{d}{dz} F(a, b, c, z)$, por ser derivada de la función $F(a, b, c, z)$ analítica en el

punto $z=0$ también es una función analítica en el punto $z=0$ y como

toda solución de la ecuación (1) analítica en el punto $z=0$ debe

ser de la forma $kF(a+1, b+1, c+1, z)$ (véase el problema. 501), donde

k es una constante, obtenemos que $\frac{d}{dz} F(a, b, c, z) = kF(a+1, b+1,$

$c+1, z)$. Tomando $z=0$, encontramos $k = \frac{ab}{c}$. 505. 1) 4; 2) 15; 3) 3.

506. 1) Un cero de orden $k+l$; 2) un cero de orden no menor de $\min(k, l)$;

3) un cero de orden $k-l$, si $k > l$; un punto regular, que no es un cero, si $k=l$, y un punto singular, si $k < l$. 507. Los puntos $z = \pm 3i$ son ceros de

primer orden. 508. Los puntos $z = \pm 3i$ son ceros de primer orden; el punto infinito es un cero de segundo orden. 509. $z=0$ es un cero de segundo

orden; $z = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) son ceros de primer orden. 510. $z = \pm 2$

son ceros de tercer orden; $z = 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son ceros de primer orden. 511. $z = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son ceros de segundo orden. 512. $z = \pm \pi$ son ceros de tercer orden; todos los demás puntos de tipo $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 2, \pm 3, \dots$) son ceros de primer orden. 513. $z = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son ceros de primer orden. 514. No tienen ceros. 515. $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son ceros de tercer orden. 516. $z = 0$ es un cero de segundo orden; $z = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) son ceros de tercer orden. 517. $z = 0$ es un cero de tercer orden; $z = \sqrt[3]{k\pi}$ y $z = \frac{1}{2} \sqrt[3]{k\pi} (1 \pm i\sqrt{3})$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) son ceros de primer orden. 518. $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son ceros

de tercer orden. 519. $z = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ y $z = \sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}} (1 \pm i\sqrt{3})$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son ceros de primer orden. 520. $z = 4$ es un cero de tercer orden para una de las ramas. 521. Aquí hay dos funciones dadas; una tiene ceros de segundo orden en los puntos $z = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ y la otra tiene ceros de segundo orden en los puntos $z = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

522. El punto de acumulación puede ser sólo el punto infinito. 523. 1), 2) y 3) No existe; 4) existe ($f(z) = \frac{1}{z+1}$). 524. 1) Existe ($f(z) = z^2$); 2) no existe. 525. No contradice ya que el punto $z = 1$ no pertenece al recinto de analiticidad de la función. 526. Solución. Del desarrollo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ se desprende

$$\text{que } u(x, y) = \frac{c_0 + \bar{c}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n [(x-x_0) + i(y-y_0)]^n + \bar{c}_n [(x-x_0) - i(y-y_0)]^n\}.$$

Tomando aquí $x = x_0 + \frac{\xi - z_0}{2}$ e $y = y_0 + \frac{\xi - z_0}{2i}$, donde ξ es lo suficientemente próximo a z , obtenemos (¡establezca esto!)

$$u\left(x_0 + \frac{\xi - z_0}{2}, y_0 + \frac{\xi - z_0}{2i}\right) = \frac{1}{2} [c_0 + f(\xi)]$$

y tomando z en lugar de ξ , llegamos a la igualdad requerida. 528. $z^2 + 2 + Ci$. 529. $ze^z - \frac{i}{z} + Ci$. 530. $(1+i)z - 3i + C$. 531. $\text{sen } z - \text{ch } z + C$ (C es una constante real arbitraria). 538. 2) $2\pi^2 M$.

Capítulo IV

$$543. -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{para } |z| < 2; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \quad \text{para } |z| > 2.$$

$$544. \frac{(-1)^k}{a^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{z}{a}\right)^n \quad \text{para } |z| < |a|; \quad \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

$$\text{para } |z| > |a|. \quad 545. \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{para } |z| < 1; \quad -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

para $0 < |z-1| < 1$; $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ para $|z| > 1$. 546. $\frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{a^{n+1}b^{n+1}} z^n$

para $|z| < |a|$; $\frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}} \right]$ para $0 < |z-a| < |b-a|$;

$\frac{1}{b-a} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{z^n}$ para $|z| > |b|$; $\frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{b^{n+1}} + \frac{a^n}{z^{n+1}} \right)$ para $|a| <$

$< |z| < |b|$. 547. $\frac{1}{z-2} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}}{5^{n+1}} (z-2)^n$ para

$0 < |z-2| < \sqrt{5}$; $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ para $1 < |z| < 2$.

548. $-\frac{i}{4(z-i)} - \frac{1}{4(z-i)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)i^n (z-i)^n}{2^{n+4}}$ para $0 < |z-i| < 2$;

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{z^{2n+2}}$ para $|z| > 1$. 549. $\pm \left[z - \frac{1}{2}(a+b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \right]$ para

$|z| > |b|$, donde $c_{-(n-1)} = (-1)^n \left[\binom{1}{n} b^n + \binom{1}{n-1} \binom{1}{1} b^{n-1} a + \binom{1}{n-2} \times \right.$

$\times \left. \left(\frac{1}{2} \right) b^{n-2} a^2 + \dots + \left(\frac{1}{2} \right) a^n \right]$. 550. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_{-n} = \frac{(-1)^n i}{\sqrt{2}} \times$

$\times \left[\binom{-1/2}{n} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{n+m} \binom{-1/2}{m} 2^{-m} \right]$, $c_n = 2^{-n} c_{-n}$ ($n=1, 2, \dots$),

$c_0 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-1/2}{m} 2^{-m} \right]$. 551. $\frac{1}{2} + z + z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^n}$ para

$0 < |z| < \infty$. 552. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! (z-1)^n}$ para $0 < |z-1| < \infty$; $1 - \frac{1}{z} +$

$+ \sum_{n=2}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$ para $|z| > 1$, donde $c_{-n} = -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \binom{n-1}{k}$ ($n=2,$

$3, \dots$). 553. $\cos 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k-1} 4^{2k-1} \sin 1}{(2k-1)! (z-2)^{4k-2}} + \frac{(-1)^k 4^{2k} \cos 1}{(2k)! (z-2)^{4k}} \right]$ para $0 <$

$< |z-2| < \infty$. 554. $(z-1) + 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k-1} \left[\frac{1}{(2k-1)!} - \frac{1}{(2k+1)!} \right]}{(z-1)^{2k-1}} + \right.$

$\left. + \frac{2(-1)^k}{(2k+1)! (z-1)^{2k}} \right]$ para $0 < |z-1| < \infty$. 555. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$, don

$$\text{de } c_n = c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad 556. \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-2n} z^{-2n}$$

$$\text{donde } c_{2n} = c_{-2n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!(2n+2k+1)!} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$557. -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(1 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n} \text{ para } 0 < |z-1| < \infty; -\operatorname{sen} 1 - \frac{\cos 1}{z} + \frac{\operatorname{sen} 1 - 2 \cos 1}{2! z^2} +$$

$$+ \frac{6 \operatorname{sen} 1 - 5 \cos 1}{3! z^3} + \dots \text{ para } |z| > 1. \quad 558. \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}, \text{ donde}$$

$$B_{2n} \text{ son los números de Bernoulli (véase el problema 485) para } 0 < |z| < 2\pi;$$

$$\frac{3}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{z^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} + \frac{2}{\pi^{2n}} \right] z^{2n-1} \text{ para } \pi < |z| < 2\pi.$$

$$559. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n - a^n}{n z^n} \text{ para } |z| > \max(|a|, |b|). \quad 560. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \text{ donde } c_{-2k} = -i \times$$

$$\times \left(2^{2k-1} - \frac{2^{2k-3}}{3} + \frac{2^{2k-5}}{5} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{2}{2k-1} \right), \quad c_{-(2k+1)} = 2c_{-2k} \quad (k =$$

$$= 1, 2, \dots), \text{ para } |z| > 2; i \operatorname{arctg} \frac{1}{2}. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \text{ donde } c_{-1} =$$

$$= 2i \operatorname{arctg} \frac{1}{2}, \quad c_{-2k} = 2^{2k} i \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m}{(2m+1) 2^{2m+1}} \right), \quad c_{-(2k+1)} = 2c_{-2k}$$

($k=1, 2, \dots$), para $1 < |z| < 2$. 561. 1) Sí; 2) sí; 3) no (el punto $z=1$ no es un punto singular aislado); 4) no; 5) no; 6) no; 7) no; 8) no (la función no es continua en cualquier anillo que rodea al punto $z=0$); 9) no; 10) sí; 11) sí, cuando α es un número entero o cero, y no en todos los demás casos.

562. 1) No; 2) sí, ambas ramas admiten el desarrollo; 3) no; 4) sí, las tres ramas admiten el desarrollo; 5) no; 6) dos ramas admiten el desarrollo (de las cuatro),

determinadas por las condiciones $\sqrt{1+\sqrt{1}} = \pm \sqrt{2}$; 7) no; 8) no; 9) no; 10) sí, las seis ramas admiten el desarrollo; 11) no; 12), 13) y 14) sí, cualquier rama admite el desarrollo; 15) no; 16) no; 17) el desarrollo lo admiten todas las

ramas, a excepción de dos determinadas por el valor $\operatorname{Arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

565. $z=0$ y $z=\pm 1$ son polos de primer orden; $z=\infty$ es un punto regular (un cero de tercer orden). 566. $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ y $z = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ son polos de primer orden;

$z=\infty$ es un punto regular. 567. $z=1$ es un polo de segundo orden; $z=\infty$ es un polo de tercer orden. 568. $z=0$ es un polo de primer orden; $z=\pm 2i$ son polos de segundo orden; $z=\infty$ es un punto regular (un cero de quinto orden).

569. $z=\pm i$ son polos de primer orden; $z=\infty$ es un punto singular esencial.

570. $z=\infty$ es un punto singular esencial. 571. $z=\infty$ es un punto singular esencial. 572. $z=2k\pi i$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) son polos de primer orden; $z=\infty$ es un punto de acumulación de los polos. 573. $z=0$ es un polo de segundo orden; $z=2k\pi i$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) son polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. 574. $z=(2k+1)\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son polos de primer orden; $z=\infty$ es el punto de acumulación de los polos. 575. $z=0$ es un polo de tercer orden; $z=2k\pi \pm i \ln(2+\sqrt{3})$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

son polos de primer orden; $z = \infty$ es el punto de acumulación de los polos. 576. $z = kni$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son polos de primer orden; $z = \infty$ es el punto de acumulación de los polos. 577. $z=0$ es un punto singular esencial; $z = \infty$ es un punto regular. 578. $z=0$ es un punto singular esencial; $z = \infty$ es un polo de primer orden. 579. $z=1$ es un punto singular esencial; $z = \infty$ es un punto regular. 580. $z=0$ es un punto singular esencial; $z = \infty$ es un punto singular esencial. 581. $z=1$ es un punto singular esencial; $z = 2k\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son polos de primer orden; $z = \infty$ es el punto de acumulación de los polos. 582. $z = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son polos de primer orden; $z = \infty$ es un punto de acumulación de los polos. 583. $z=0$ es un polo de segundo orden; $z = \infty$ es un punto singular esencial. 584. $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son polos de primer orden; $z = \infty$ es el punto de acumulación de los polos. 585. $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son polos de segundo orden; $z = \infty$ es el punto de acumulación de los polos. 586. $z=0$ es un polo de tercer orden; $z = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), son polos de primer orden; $z = \infty$ es el punto de acumulación de los polos. 587. $z = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) son los polos de primer orden; $z = \infty$ es el punto de acumulación de los polos. 588. $z = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son los polos de primer orden; $z = \infty$ es el punto de acumulación de los polos. 589. Si $a \neq m\pi + \frac{\pi}{2}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), los puntos $z = 2k\pi + a$ y $z = (2k+1)\pi - a$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son polos simples; si $a = m\pi + \frac{\pi}{2}$, los puntos $z = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ para m par y los puntos $z = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}$ para m impar son polos de segundo orden; $z = \infty$ es en todos los casos el punto de acumulación de los polos. 590. Si $a \neq m\pi$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), los puntos $z = (2k+1)\pi \pm a$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son polos de primer orden; si $a = m\pi$, los puntos $z = 2k\pi$ para m impar y los puntos $z = (2k+1)\pi$ para m par son polos de segundo orden; $z = \infty$ en todos los casos es el punto de acumulación de los polos. 591. $z=1$ es un punto singular esencial; $z = \infty$ es un punto regular (un cero de primer orden). 592. $z=-2$ es un polo de segundo orden; $z=2$ es un punto singular esencial; $z = \infty$ es un polo de tercer orden. 593 y 594. $z = \frac{1}{k\pi}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) son polos de primer orden; $z=0$ es el punto de acumulación de los polos; $z = \infty$ es un polo de primer orden. 595. $z=0$ es un punto singular esencial; $z = \infty$ es un punto regular (un cero de primer orden). 596. $z=0$ es un punto singular esencial; $z = \infty$ es un punto singular esencial. 597. $z = \frac{1}{k\pi}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) son puntos singulares esenciales; $z=0$ es el punto de acumulación de los puntos singulares esenciales; $z = \infty$ es un punto singular esencial. 598. $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son puntos singulares esenciales; $z=0$ es el punto de acumulación de los puntos singulares esenciales; $z = \infty$ es un punto regular. 599. $z = \frac{1}{k\pi}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) son puntos singulares esenciales; $z=0$ es el punto de acumulación de los puntos singulares esenciales; $z = \infty$ es un punto singular esencial. 600. $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son puntos singulares esenciales; $z=0$ es el punto de acumulación de los puntos singulares esenciales; $z = \infty$ es un punto regular. 601. Para una de las ramas es un punto regular y para la otra es un polo de primer orden. 602. Para una de las ramas es un polo de primer orden y para las cinco ramas restantes, un punto regular. 603. Para una de las ramas es un punto regular y para la otra, un polo de segundo orden. 604. Para una de las ramas es un punto

regular y para la otra, un punto singular esencial. 605. Un polo de primer orden para ambas ramas. 606. $z = \left(1 + \frac{1}{k\pi}\right)^2$ es un punto regular para una de

las ramas y un polo de primer orden para la otra; $z=1$ es un punto regular para una de las ramas y un punto singular no aislado, que es el punto de acumulación de los polos, para la otra rama. 607. Cada uno de los puntos dados es un punto regular para una de las ramas y un polo de primer orden para la otra.

608. Un punto regular para una de las ramas y un punto singular esencial para la otra. 609. 1) Un polo de primer orden para todas las ramas;

2) un punto regular para un conjunto infinito de ramas y un polo de primer orden para el otro conjunto infinito de ramas. 610. Un punto regular para un conjunto infinito de ramas y un punto singular esencial para el otro conjunto infinito de ramas. 611. 1) El punto $z = \infty$ es un polo de orden $k = \max(n, m)$, si $n \neq m$; en cambio, si $n = m$, el punto $z = \infty$ o bien es un polo de orden $k \leq n$ o bien un punto regular; 2) un polo de orden $n - m$, si $n > m$, y un punto regular, si $n \leq m$; si $n < m$, el punto $z = \infty$ es un cero de orden $m - n$;

3) un polo de orden $n + m$. 613. Ejemplos: 1) z^2 ; 2) $\frac{1}{z^2} + z$; 3) $\frac{1}{z^n - 1}$.

614. 1) $\frac{a}{z - \alpha}$ ($a \neq 0$) o $az + b$ ($a \neq 0$); 2) $\frac{a}{(z - \alpha)^n}$ ($a \neq 0$) o $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$

($a_n \neq 0$); 3) $\frac{1}{z^2} + C$; 4) $\frac{a_0 + a_1z + \dots + a_{n+m}z^{n+m}}{z^n}$ ($a_0 \neq 0, a_{n+m} \neq 0$);

5) $\frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_n)}$ ($\alpha_k \neq \alpha_l$) para $k \neq l$ y al menos uno de los números a_m es diferente de cero) o

$\frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_{n-1})}$ ($a_n \neq 0, \alpha_k \neq \alpha_l$

para $k \neq l$). 616. 1) z_0 es un punto singular evitable; 2) z_0 es un polo de orden n , si $\varphi(z)$ es univalente en una vecindad del punto z_0 , y un polo de orden nm , si $\varphi(z)$ es m -valente en una vecindad de este punto; 3) z_0 es un punto singular esencial. 617. 1) El punto z_0^* es un polo de orden n , si γ' es un segmento rectilíneo, y un punto regular de multiplicidad n , si γ' es un arco circular, es decir, $f(z) - f(z_0^*) = (z - z_0^*)^n \varphi(z)$, donde $\varphi(z)$ es analítica en una vecindad del punto z_0^* y $\varphi(z_0^*) \neq 0$. Si $z_0^* = \infty$, esta condición se escribe en la forma

$f(z) - f(\infty) = z^{-n} \varphi(z)$, donde $\varphi(z)$ es analítica en el ∞ y $\varphi(\infty) \neq 0$; 2) z_0^* es un punto singular esencial. 619. 1) -1 ; 2) 0 ; 3) 0 ; 4) 0 . 620. 1) El punto singular esencial es $z = \infty$; el valor excepcional es 0 (y el ∞) $e^z \rightarrow 0$, si $x \rightarrow -\infty$ ($e^z \rightarrow \infty$, si $x \rightarrow +\infty$); 2) el punto esencial es $z = 0$; el valor excepcional es 0 (y el ∞); $e^{\frac{1}{z}} \rightarrow 0$, si $z \rightarrow 0$, por ejemplo, a lo largo del camino $y = 0$,

$x < 0$ ($e^{\frac{1}{z}} \rightarrow \infty$, si $z \rightarrow 0$ a lo largo del camino $y = 0, x > 0$); 3) el punto singular esencial es $z = 0$; no hay valores excepcionales (salvo el valor ∞); $\cos \frac{1}{z} \rightarrow \infty$ para $x = 0, y \rightarrow 0$; 4) el punto singular esencial es $z = \infty$; los valores excepcionales son i y $-i$. 621. $\operatorname{res}[f(z)]_{z=\pm 1} = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{res}[f(z)]_{z=0} = 1$;

$\operatorname{res}[f(z)]_{z=\infty} = 0$. 622. $\operatorname{res}[f(z)]_{z=i} = -\frac{i}{4}$; $\operatorname{res}[f(z)]_{z=-i} = \frac{i}{4}$;

$\operatorname{res}[f(z)]_{z=\infty} = 0$. 623. $\operatorname{res}[f(z)]_{z=-1} = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$;

$\operatorname{res}[f(z)]_{z=\infty} = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$. 624. $\operatorname{res}[f(z)]_{z=0} = 1$; $\operatorname{res}[f(z)]_{z=\pm 1} =$

- $= -\frac{1}{2}$; $\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = 0$. **625.** $\text{res } [f(z)]_{z=0} = 0$; $\text{res } [f(z)]_{z=1} = i$;
 $\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = -1$. **626.** $\text{res } [f(z)]_{z=-1} = 2 \text{ sen } 2$; $\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = -2 \text{ sen } 2$.
627. $\text{res } [f(z)]_{z=0} = \frac{1}{9}$; $\text{res } [f(z)]_{z=3i} = -\frac{1}{54} (\text{sen } 3 - i \cos 3)$; $\text{res } [f(z)]_{z=-3i} =$
 $= -\frac{1}{54} (\text{sen } 3 + i \cos 3)$; $\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = \frac{1}{27} (\text{sen } 3 - 3)$. **628.** $\text{res } [f(z)]_{z=\frac{2k+1}{2}\pi} =$
 $= -1$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). **629.** $\text{res } [f(z)]_{z=k\pi} = (-1)^k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
630. $\text{res } [f(z)]_{z=k\pi} = 0$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). **631.** $\text{res } [f(z)]_{z=k\pi} = -1$
($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). **632.** 1) $\text{res } [f(z)]_{z=2} = \text{res } [f(z)]_{z=\infty} = 0$;
2) $\text{res } [f(z)]_{z=2} = -\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = -\frac{143}{24}$. **633.** $\text{res } [f(z)]_{z=0} =$
 $= -\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$. **634.** $\text{res } [f(z)]_{z=0} = \text{res } [f(z)]_{z=\infty} = 0$.
635. $\text{res } [f(z)]_{z=-1} = -\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = -\cos 1$. **636.** $\text{res } [f(z)]_{z=-3} =$
 $= -\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = -\text{sen } 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!} \right]$.
637. $\text{res } [f(z)]_{z=0} = \frac{1}{2}$; $\text{res } [f(z)]_{z=\frac{2k\pi i}{n}} = \frac{1}{2k\pi i}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$).
638. $\text{res } [f(z)]_{z=0} = 0$ si $n < 0$, y también, si $n > 0$ y es impar; $\text{res } [f(z)]_{z=0} =$
 $= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$, si $n=0$ ó $n > 0$ pero es par; $\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = -\text{res } [f(z)]_{z=0}$.
639. $\text{res } [f(z)]_{z=\frac{1}{k\pi}} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2\pi^2}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$); $\text{res } [f(z)]_{z=\infty} =$
 $= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{6}$. **640.** $\text{res } [f(z)]_{z=k^2\pi^2} = (-1)^k 2k^2\pi^2$ ($k=1, 2, \dots$).
641. $\text{res } [f(z)]_{z=0} = 0$, si n es impar, $\text{res } [f(z)]_{z=0} = (-1)^{k+1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k}$, si
 $n=2k$ ($k=0, 1, 2, \dots$), donde B_{2k} son los números de Bernoulli (véase el
problema 485); $\text{res } [f(z)]_{z=(k+\frac{1}{2})\pi} = -\frac{1}{(k+\frac{1}{2})^n \pi^n}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
642. 1; -1, **643.** 0; 2. **644.** $-2e^{2k\pi a i}$, si $\sqrt{-1}=1$ y $\text{Ln } 1=2k\pi i$; 0 para las
ramas definidas por el valor $\sqrt{-1}=-1$. **645.** $\pm \frac{(a-b)^2}{8}$. **646.** 1) $\alpha - \beta$
(para todas las ramas); 2) $e^{\alpha} - e^{\beta}$ (para todas las ramas). **647.** 1) $2k\pi i +$
 $+\frac{1}{2.3!} - \frac{1}{4.5!} + \dots$, si $\text{Ln } i=2k\pi i$; 2) $-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3.4!} - \frac{1}{5.6!} + \dots$ (para todas
las ramas). **648.** $\text{res } [f(z)]_{z=0} = k\pi$, si $\text{Arctg } 0 = k\pi$; $\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = -$
 $-\frac{(2k+1)\pi}{2}$, si $\text{Arctg } \infty = \frac{(2k+1)\pi}{2}$. **649.** $\text{res } [f(z)]_{z=0} = 0$, si $n \geq 0$;
 $\text{res } [f(z)]_{z=0} = \text{Ln } \frac{\alpha}{\beta}$, si $n = -1$, y $\text{res } [f(z)]_{z=0} = \frac{1}{n+1} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$, si $n <$
 < -2 ; $\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = \frac{1}{n+1} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$, si $n \geq 0$; $\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = -2k\pi i$, si
 $n = -1$ y $\text{Ln } 1 = 2k\pi i$, y $\text{res } [f(z)]_{z=\infty} = 0$, si $n < -2$. **650.** $-2c_0c_1$.

651. 1) $A\varphi(a)$; 2) $c_{-1}\varphi(a) + \frac{c_{-2}\varphi'(a)}{1} + \dots + \frac{c_{-k}\varphi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$. 652. 1) n ; 2) $-n$.
653. 1) $n\varphi(a)$; 2) $-n\varphi(a)$. 654. $\frac{A}{\varphi'(a)}$. 655. AB .
656. $\sum_{n=1}^k (-1)^n \frac{n\bar{c}_n (\beta^* - a)^{n+1}}{R^{2n}}$. 657. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 658. $-2\pi i$. 659. $-\frac{\pi i}{12i}$.
660. πi . 661. $-\frac{2\pi i}{9}$. 662. 1. 663. 0. 664. $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, si $n \geq -1$, y 0, si $n < -1$. 665. $32\pi i$. 666. 0. 667. $\frac{f(0)}{g(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{f(a_k)}{a_k g'(a_k)}$. 669. 0, si $r < 1$; ± 1 , si $r > 1$ (el signo depende de cómo se escoja la rama del integrando). 670. $\frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}$. 671. $\frac{1}{\pi(1+a)}$. 672. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}}$. 673. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.
674. $\frac{2\pi a}{\frac{3}{(a^2-b^2)^2}}$. 675. $\frac{(2a+b)\pi}{\frac{3}{[a(a+b)]^2}}$. 676. $\frac{2\pi}{1-a^2}$, si $|a| < 1$; $\frac{2\pi}{a^2-1}$, si $|a| > 1$; 0 (valor principal), si $|a|=1$, $a \neq \pm 1$ (para $a = \pm 1$ el valor principal no existe). 677. $\frac{\pi(a^6+1)}{1-a^2}$, si $|a| < 1$; $\frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$, si $|a| > 1$; $\frac{\pi}{2} \frac{1-a^{12}}{a^6(a^2-1)}$ (valor principal), si $|a|=1$, $a \neq \pm 1$ (para $a = \pm 1$ el valor principal no existe). 678. $\frac{2\pi}{n!}$, si $n \geq 0$; 0, si $n < 0$. 679. $\pi i \operatorname{sign} a$ (para $a=0$ el valor principal de la integral es igual a 0). 680. $-2\pi i \operatorname{sign} \operatorname{Im} a$.
682. $-\frac{\pi}{27}$. 683. $\frac{\pi}{4a}$. 684. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)\pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)2}$, si $n > 1$; $\frac{\pi}{2}$, si $n=1$.
685. $\frac{\pi}{ab(a+b)}$. 686. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. 687. $\frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$. 688. $\frac{\pi}{n} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$.
690. $\frac{(-1)^{k-1}}{(2ih-z)^k}$. 691. 1) $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3 \operatorname{sen} 1)$; 2) $\frac{\pi}{3e^3}(3 \cos 1 + \operatorname{sen} 1)$.
692. $\frac{\pi}{2e^4}(2 \cos 2 + \operatorname{sen} 2)$. 693. $\frac{\pi e^{-ab}}{2b}$. 694. $\frac{\pi}{2} e^{-ab}$. 696. πi , si $t > 0$; 0, si $t=0$; $-\pi i$, si $t < 0$. 697. $\pi(2 \operatorname{sen} 2 - 3 \operatorname{sen} 3)$. 698. $\frac{\pi}{5} \left(\cos 1 - \frac{1}{e^3} \right)$.
699. $\frac{\pi}{3} \left[\operatorname{sen} |t| + e^{-\frac{|t|\sqrt{3}}{2}} \left(\operatorname{sen} \left| \frac{t}{2} \right| + \sqrt{3} \cos \frac{t}{2} \right) \right]$. 700. $\frac{\pi}{4} [e^{-|t|} - \operatorname{sen} |t|]$.
701. $\pi \left(e^{-ab} - \frac{1}{2} \right)$. 702. $\frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab})$. 703. $\frac{4}{4b^4} [2 - (2+ab)e^{-ab}]$.
704. $\pi(b-a)$. 705. $\frac{\pi}{2}$. 706. $\frac{3\pi}{8}$. 707. 1) $\frac{\Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}}{a^p}$; 2) $\frac{\Gamma(p) \operatorname{sen} \frac{\pi p}{2}}{a^p}$; para comprobar que la respuesta es válida para $-1 < p < 0$, es suficiente observar que para estos valores de p la integral converge y la función, que figura en la respuesta, es analítica. 708. $\frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cos \frac{\pi}{2p}$. 709. $\frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2p}$.

$$710. \frac{1}{p-1} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \cos \frac{\pi}{2p} \left(\text{para } p=1 \text{ la integral es igual a } \frac{\pi}{2}\right). \quad 712. \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

$$714. \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi p}{2}}. \quad 715. \frac{\pi(1-p)}{4 \cos \frac{\pi p}{2}} \left(\text{para } p=1 \text{ la integral es igual a } \frac{1}{2}\right).$$

$$716. \frac{\pi}{\sin p\pi} \frac{\sin p\lambda}{\sin \lambda}, \text{ si } \lambda \neq 0, \text{ y } \frac{p\pi}{\sin p\pi}, \text{ si } \lambda=0. \quad 718. 0. \quad 719. \frac{\pi}{4}.$$

$$720. \pi \operatorname{ctg} p\pi. \quad 721. \pi \operatorname{ctg} p\pi. \quad 722. \frac{p(1-p)}{2^{2p}-p} \frac{\pi}{\sin p\pi}. \quad 723. \frac{\pi}{\sin p\pi} \left(2^{\frac{p}{2}} \cos \frac{p\pi}{4} - 1\right).$$

$$724. \frac{\pi}{\sin p\pi} \left[2^p \left(1 - \frac{p}{2}\right) - 1\right]. \quad 725. \frac{\pi}{\sin p\pi} \left[1 - \left(\frac{a}{1+a}\right)^p\right]. \quad 726. \frac{p\pi}{\sin p\pi} \times \\ \times \frac{a^{p-1}}{(1+a)^{p+1}}. \quad 727. \frac{\pi}{\sin p\pi} \left(\sin \frac{p\pi}{2} + \cos \frac{p\pi}{2} - 1\right). \quad 728. \frac{\pi \sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}. \quad 729. \text{ Si}$$

a no pertenece al intervalo $(-1, 1)$, se tiene $I = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, donde $\sqrt{a^2-1} > 0$ para $a > 1$ (en el plano con un corte a lo largo del segmento $[-1, 1]$ la magnitud $\sqrt{a^2-1}$ es uniforme); para $a = \pm e^{i\alpha}$ se tiene $I = \pm \frac{\pi}{\sqrt{2} \sin \alpha} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$;

para $a = iy$ se tiene $I = \frac{\pi i}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{sign} y$; para $-1 < a < 1$ se tiene $I = 0$ (valor principal).

730. Si b no pertenece al intervalo $(0, 1)$, se tiene $I = \frac{\pi}{\sin p\pi} b^{p-1} (b-1)^{-p}$, donde $(b-1)^{-p} > 0$, $b^{p-1} > 0$ para $b > 1$; si $0 < b < 1$, se tiene

$I = -\pi b^{p-1} (1-b)^{-a} \operatorname{ctg} p\pi$ (valor principal).

$$731. \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}. \quad 732. \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

$$733. \frac{\pi}{8a} (\pi^2 + 4 \ln^2 a). \quad 734. \frac{\pi}{2a^2 \sqrt{2a}} \left(\frac{3}{2} \ln a - 1 - \frac{3\pi}{4}\right). \quad 735. -\pi.$$

$$736. \frac{\pi}{2} \ln 2. \quad 737. \frac{1}{2} \ln^2 \frac{a}{1+a}. \quad 739. 1) \frac{1}{1-a} + \frac{1}{\ln a} \left(\text{para } a=1 \text{ se tiene}$$

$$I = \frac{1}{2}\right); \quad 2) \frac{\pi}{2a \left(\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4}\right)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

$$740. \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{\pi}{2a} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \times \right.$$

$$\times \frac{2k+1}{\ln^2 a + \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} - \frac{1}{1+a^2} \left. \right\}.$$

$$741. \frac{1}{2n} \left\{ \frac{1}{1+a^2} + \frac{\pi}{2a} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k+1} \times \right.$$

$$\times \frac{2k+1}{\ln^2 a + \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \left. \right\}. \quad 743. \frac{\pi(1-2^{a-1})}{\sin a\pi} \left(\text{para } a=1 \text{ se tiene } I = \ln 2\right).$$

$$744. \frac{\pi}{2} : h \frac{\pi a}{2}. \quad 745. \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi a}{2}}. \quad 746. \frac{\pi^2 e^{a\alpha}}{(e^{\pi a} + 1)^2}. \quad 747. \frac{1}{2 \cos \frac{a}{2}}.$$

$$748. \frac{\pi}{a} \ln(1+a), \text{ si } 0 < a < 1; \quad \frac{\pi}{a} \ln \frac{1+a}{a}, \text{ si } a > 1. \quad 750. 1) \frac{t^n}{n!}; \quad 2) \frac{\ln^n t}{n!},$$

si $t > 1$; 0, si $t < 1$; si $t=1$, se tiene $I=0$ para $n > 1$ e $I = \frac{1}{2}$ (valor princi-

pal) para $n=1$. 751. $\frac{e^{at}t^n}{n!}$. 752. $\text{sen } t$. 753. 1) $\cos t$; 2) $t - \text{sen } t$.
 754. $\frac{e^{at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$. 755. $\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{t}{a}\right)^n$, si
 $t \geq a$; 0, si $t < a$. 758. 1) $\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$; 2) $\frac{e^{-it}}{\sqrt{\pi t}}$. 759. $\text{erf } \sqrt{t}$, donde

$$\text{erf } u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-x^2} dx. \quad 760. e^{-t} \text{erf } \sqrt{t}. \quad 761. \text{sen } t, \text{ si } t < \pi; 0, \text{ si } t \geq \pi.$$

762. 1, si $0 < t < a$; 0, si $t = a$; -1, si $a < t < 2a$; $-\frac{1}{2}$, si $t = 2a$; 0, si
 $t > 2a$. 763. $n+1$, si $na < t < (n+1)a$; $n + \frac{1}{2}$, si $t = na$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

764. $1 - \text{erf } \frac{x}{2\sqrt{t}}$ (véase la respuesta al problema 759). 765. $\frac{1}{a} +$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}} \frac{\text{sen } \frac{n \pi x}{a}}{n \pi x}. \quad 766. -Ei(-t), \text{ donde } Ei(t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^u}{u} du.$$

767. $\frac{2 \text{sh } t}{t}$. 768. $\frac{2 \pi i}{a}$. 769. 0, si $b < 0$; $\text{arch } \frac{b}{a}$, si $b > 0$.

772. $\frac{1}{\sqrt{z^2+1} (z + \sqrt{z^2+1})^n}$ ($\sqrt{z^2+1} > 0$ para $z > 0$). 773. 1) $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$,

si $a > b$; 0, si $a < b$; 2) 0, si $a > b$; $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}$, si $a < b$. 774. $\frac{\pi}{2} J_0(i|a|\sqrt{t^2-b^2})$.

775. Si la parte real de al menos uno de los polos es positiva, se tiene
 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$; si la parte real de todos los polos es negativa se tiene $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$;

si unos de los polos se encuentran sobre el eje imaginario y la parte real de los
 restantes es negativa, resulta que $f(t)$ oscila para $t \rightarrow \infty$, con la particularidad
 de que la amplitud de las oscilaciones crece infinitamente, si al menos uno de
 los polos del eje imaginario es de orden superior al primero, y permanece acota-
 da, si todos los polos del eje imaginario son simples. Si sobre el eje imaginario
 hay sólo un polo, situado en el origen de coordenadas, se tiene $f(t) \rightarrow \infty$, si el
 polo es múltiple, y $f(t) \rightarrow \text{res } [e^{zt} \varphi(z)]_{z=0}$, si el polo es simple. 777. $f(t) \sim \frac{at-3}{a^4}$.

778. $f(t) \sim \frac{i\omega}{\sqrt{2a i \omega - \omega^2}} e^{i\omega t - \sqrt{2a i \omega - \omega^2} t}$. 781. Solución. Representemos la integral

en la forma $\int_{-x}^x \frac{e^{-x-t}}{t} dt + \int_x^{\infty} \frac{e^{-x-t}}{t} dt$. Puesto que para el desarrollo asintótico

en potencias negativas de x se tiene $e^{-x} \sim 0$, de la solución del problema 780
 se desprende que la segunda integral es asintóticamente igual a cero. Según la
 definición de valor principal de la integral, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \frac{e^{-x-t}}{t} dt &= e^{-x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-x}^{-\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^x \frac{e^{-t}}{t} dt \right] = \\ &= e^{-x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x \frac{e^{-t} - e^t}{t} dt = e^{-x} \int_0^x \frac{e^{-t} - e^t}{t} dt \end{aligned}$$

(el integrando de la última integral es continuo). Por otra parte,

$$\int_0^x \frac{e^{-t} - e^t}{t} dt = \int_0^1 \frac{e^{-t} - e^t}{t} dt + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \sim O(1) + \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = C + e^x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{(n-1)!}{x^n} + n! \int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}} dt \right),$$

donde $C = C(n)$ es una magnitud constante. Resta demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}} dt = 0,$$

lo que se consigue fácilmente aplicando la regla de L'Hospital. **784. Solución.**

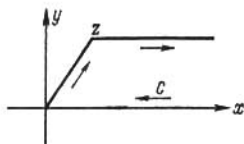


FIG. 68

Consideremos $\int_C e^{z^2 - t^2} dt$, donde C es el contorno representado en la fig. 68 (para $\text{Re } z > 0$). Esta integral es igual a cero y por ello ($z = x + iy$) es tiene

$$\int_0^z e^{z^2 - t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{z^2 - t^2} dt - \int_x^{\infty} e^{z^2 - (t+iy)^2} dt.$$

La primera integral del miembro de la derecha es igual a $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{z^2}$; representemos la segunda en la forma

$$-\frac{1}{2} \int_x^{\infty} \frac{1}{t+iy} de^{z^2 - (t+iy)^2} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \frac{e^{z^2 - (t+iy)^2}}{(t+iy)^2} dt.$$

Repetiendo la integración por partes, obtendremos el desarrollo requerido. Para el resto tenemos la estimación siguiente

$$\left| \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \int_x^{\infty} \frac{e^{z^2 - (t+iy)^2}}{(t+iy)^{2n}} dt \right| < \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \int_x^{\infty} \frac{e^{x^2 - t^2}}{|t+iy|^{2n}} dt.$$

Integrando de nuevo por partes, obtenemos $\int_x^{\infty} \frac{e^{x^2 - t^2}}{|t+iy|^{2n}} dt < \frac{1}{2|z|^{2n}}$, de donde

se desprende precisamente que el desarrollo es asintótico. El caso en que $\text{Re } z < 0$ se considera análogamente. Si $\text{Re } z = 0$, se tiene

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{z^2 - (t+iy)^2}}{(t+iy)^{2n}} dt \right| < \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{y^{2n}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2y^{2n}}.$$

$$786. f(t) \sim \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\omega^2 \pi} \left[\frac{\Gamma \left(\frac{3}{2} \right)}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Gamma \left(\frac{7}{2} \right)}{\omega^2 t^{\frac{7}{2}}} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{\Gamma \left(2n + \frac{3}{2} \right)}{\omega^{2n} t^{2n + \frac{3}{2}}} + \dots \right];$$

para pequeños valores de t se tiene

$$f(t) = 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[1 - \frac{(2\omega t)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{(2\omega t)^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots \right] \approx 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

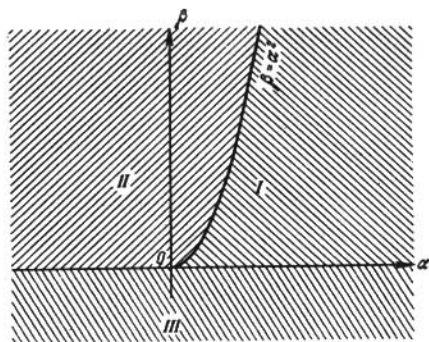


FIG. 69

$$787. f(t) \sim 1 + \frac{1}{\pi} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma \left(3n + \frac{3}{2} \right)}{t^{3n + \frac{3}{2}}}; \text{ para pequeños valores de } t \text{ se tiene}$$

$$f(t) = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma \left(\frac{5}{2} \right)} - \frac{t^{\frac{9}{2}}}{\Gamma(4)} + \frac{t^{\frac{15}{2}}}{\Gamma \left(\frac{11}{2} \right)} - \dots \approx \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}. \quad 788. 1. \quad 789. 0. \quad 790. 4.$$

792. 1; 3. 793. 0; 4. 795. 1. 796. n . 797. n . 799. *Solución.* La sucesión de funciones $f_n(z)$ converge hacia la función $\frac{1}{e^z}$ en todo punto, a excepción de $z=0$. Por consiguiente, para un $\epsilon > 0$ y cualquier círculo K , que tiene su centro en el punto $z \neq 0$ y que no contiene el origen de coordenadas ni en su interior ni en su frontera, se puede indicar un N tal que la desigualdad $\left| f_n(z) - e^{-\frac{1}{z}} \right| < \epsilon$ tendrá lugar para todos los puntos de K siempre que $n > N$. Resta escoger $\epsilon < \min_{z \in C} \left| e^{\frac{1}{z}} \right|$, donde C es la circunferencia del círculo K , y aplicar el teorema

de Rouché. *Observación.* La afirmación del problema se desprende directamente del teorema de Hurwitz (véase, por ejemplo, [1, cap. IV, § 3 n.º 5]). 803. 0. 804. 2; 1. 805. En cada cuadrante hay una raíz. 806. Dos raíces tanto en el segundo como en el tercero cuadrante. 808. En el recinto $\beta > 0$, $\alpha > +\sqrt{\beta}$ (el recinto I de la fig. 69) se tiene $m=0$; en el recinto $\beta > 0$, $\alpha < +\sqrt{\beta}$ (recinto II) se tiene $m=2$; en el recinto $\beta < 0$ (recinto III) se tiene $m=1$. 809. En el recinto $\alpha > 0$, $\beta > \frac{1}{\alpha}$ (el recinto I de la fig. 70) se tiene $m=0$; en el recinto, en el que o bien $\alpha \leq 0$ o bien $\alpha > 0$, $\beta < \frac{1}{\alpha}$ (el recinto II), se tiene $m=2$. 810. En el recinto $\alpha > \frac{1}{2} + \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}}$ (el recinto I de la fig. 71) se

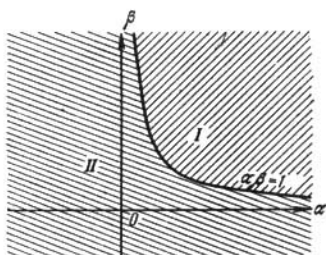


FIG. 70

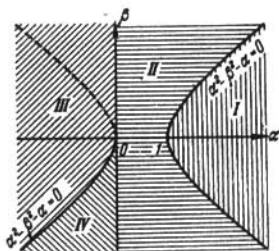


FIG. 71

tiene $m=0$; en el recinto $0 < \alpha < \frac{1}{2} + \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}}$ (el recinto II) se tiene $m=2$; en el recinto, en el que o bien $\alpha < \frac{1}{2} - \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}}$ o bien $\frac{1}{2} - \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}} < \alpha < 0$ y $\beta > 0$ (el recinto III), se tiene $m=1$; en el recinto $\frac{1}{2} - \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}} < \alpha < 0$, $\beta < 0$ (el recinto IV) se tiene $m=3$. 812. El recinto, que contiene el semieje positivo a y que está limitado por las líneas

$$a+b=0 \text{ y } \begin{cases} a = -\frac{t \cos \tau t}{\sin \tau t}, \\ b = \frac{t}{\sin \tau t}, \end{cases} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

813. El recinto del primer cuadrante limitado por las líneas $b=0$ y $\begin{cases} a = t \operatorname{tg} \tau t, \\ b = \frac{t^2}{\cos \tau t}, \end{cases} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2\tau}$. 814. El recinto finito limitado por el segmento

$b=0$, $0 < a < \frac{\pi}{2\tau}$ y por el arco $\begin{cases} a = t \operatorname{sen} \tau t, \\ b = t^2 \cos \tau t, \end{cases} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2\tau}$.

$$824. z = a + \frac{w}{1!} f(a) + \frac{w^2}{2!} \frac{d}{da} \{ [f(a)]^2 \} + \frac{w^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{ [f(a)]^n \} + \dots$$

$$825. z = \frac{1}{2} w + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{2^{2n-1} \cdot n!} w^n;$$

$$z = -2 - \frac{1}{2} w + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{2^{2n-1} \cdot n!} w^n.$$

$$826. z = a + \frac{w}{1!} \frac{1}{2} (a^2 - 1) + \frac{w^2}{2!} \frac{1}{2^2} \frac{d}{da} [(a^2 - 1)^2] + \dots + \frac{w^n}{n!} \frac{1}{2^n} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [(a^2 - 1)^n] + \dots$$

$$828. 1) z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} a^{n-1}}{n!} w^n; \quad 2) e^{bz} = b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(an+b)^{n-1}}{n!} w^n.$$

$$829. z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} (\operatorname{sen}^n a). \quad 830. \text{Solución. La función } w = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} z} \text{ es}$$

analítica en el círculo $|z - \frac{\pi}{2}| < r$, donde $r < \frac{\pi}{2}$, y no tiene en este círculo más ceros que $z = \frac{\pi}{2}$. En la circunferencia de este círculo se tiene $|w| \geq$

$\geq \frac{2r}{e^r + e^{-r}}$ y por ello el círculo $|w| < \rho$ de radio $\rho < \frac{2r}{e^r + e^{-r}}$ se transforma biunívocamente en la vecindad correspondiente del punto $z = \frac{\pi}{2}$ de manera que

en este círculo el desarrollo de $z(w)$ converge. La función $\frac{2r}{e^r + e^{-r}}$ tiene un máximo para $r = r^*$, donde $e^{2r^*} = \frac{r^* + 1}{r^* - 1}$ ($r^* = 1, 19 \dots < \frac{\pi}{2}$), y este máximo es igual a $\frac{2r^*}{e^{r^*} + e^{-r^*}} = \sqrt{r^{*2} - 1} = 0,6627$. Por consiguiente, el radio de convergencia no es menor de 0,6627...

Al mismo tiempo los puntos w , en los cuales $\frac{dw}{dz} = 0$, es decir, $\operatorname{tg} z = z - \frac{\pi}{2}$, no pueden estar en el interior del círculo de convergencia del desarrollo de $z(w)$. Poniendo $z - \frac{\pi}{2} = t$, transformemos la

ecuación $\frac{dw}{dz} = 0$ a la forma $\operatorname{ctg} t = -t$ o $e^{2it} = \frac{it+1}{it-1}$. Luego, $it = r^*$ es una

raíz de la ecuación $\frac{dw}{dz} = 0$. El valor que le corresponde es $w = \frac{t}{\cos t} = -\frac{2ir^*}{e^{r^*} + e^{-r^*}}$, de donde $|w| = \frac{2r^*}{e^{r^*} + e^{-r^*}} = \sqrt{r^{*2} - 1} = 0,6627$... Este punto

se encuentra, por lo tanto, sobre la circunferencia del círculo de convergencia y el radio de convergencia es, por consiguiente, igual a $\sqrt{r^{*2} - 1} = 0,6627$...

Capítulo V

832. El anillo $\frac{1}{2} < |z| < 1$. 833. El exterior del círculo unidad ($|z| > 1$).

834. $|z| < 1$. 835. El semiplano $\operatorname{Re} z < -1$. 836. El eje real. 837. Todo el plano, a excepción de los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 838. $|z| > 1$. 839. $|z| < 1$. 840. Todo el plano, a excepción de la circunferencia unidad

($|z| \neq 1$). **841.** Todo el plano, a excepción de los puntos $z = 4^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$

($k, n = 1, 2, \dots$). **842. Solución.** Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, es evidente que

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n}$ converge para $|z| < 1$ y entonces de la identidad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n} =$

$= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{z}\right)^n}$ se deduce que la serie también converge para

$|z| > 1$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ tiene el radio de conver-

gencia $R \leq 1$. Para $|z| > 1$ la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n}$ se deduce de

que, en el caso contrario, serían convergentes la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-z^n}$ y, por consi-

guiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{1-z^n} - \frac{a_n z^n}{1-z^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por otra parte, si $|z| < 1$, el

módulo de la razón q de los términos generales de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{1-z^n}$

está comprendido entre los límites $1 - |z| \leq q \leq 2$ y, por consiguiente, ambas series convergen y divergen a la vez. **843.** 1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, donde $b_n = \sum a_p$ y con

la particularidad de que la suma se toma respecto a aquellos índices p que son divisores del número n , incluyendo 1 y n . El radio de convergencia es $R = \min \{r, 1\}$,

donde r es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. **844.** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$,

donde $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^n}{k!} \left(a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$; $R = 1$. **845.** $\frac{1}{2}$, si $|z| < 1$,

y $-\frac{1}{2}$, si $|z| > 1$. **846.** $\frac{z}{(1-z)^2}$, si $|z| < 1$, y $\frac{1}{(1-z)^2}$, si $|z| > 1$. **847.** z ,

si $|z| < 1$, y 1, si $|z| > 1$. **848.** $\frac{z}{z-1}$, si $|z| < 1$, y $\frac{1}{z-1}$, si $|z| > 1$.

850. 1) y 2) convergen uniformemente en todo círculo $|z| \leq r < 1$ y en todo recinto $|z| \geq R > 1$; 3) converge uniformemente en todo el eje real; en los demás puntos diverge. **852.** Converge uniformemente sobre la circunferencia $|z| = 1$; en todos los demás puntos diverge. **853.** Converge uniformemente en todo semiplano $\operatorname{Re} z \geq \delta$, donde $\delta > 0$. **854.** Converge uniformemente en todo semiplano $\operatorname{Re} z \geq 1 + \delta$, donde $\delta > 0$. **855.** Converge uniformemente sobre el eje real; en todos los demás puntos diverge. **856.** Converge uniformemente en todo segmento $[2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon]$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) del eje real. **857.** No.

864. $x_c = x_a = -\infty$. **865.** $x_c = -\infty$, $x_a = 1$. **866.** $x_c = -\infty$, $x_a = +\infty$.

867. $x_c = 0, x_a = +\infty$. 868. $x_c = 0, x_a = 1$. 869. $x_c = x_a = -1$. 870. $x_c = x_a = +\infty$. 873. $x_c = 0$; diverge en todos los puntos de la frontera. 874. $x_c = x_a = -2$; diverge en todos los puntos de la frontera. 875. $x_c = x_a = 0$; converge (no absolutamente) en los puntos $z = (2k+1)\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) y diverge en los demás puntos de la frontera. 876. $x_c = x_a = 0$; converge absolutamente en todos los puntos de la frontera. 877. $x_c = x_a = 0$; converge no absolutamente en todos los puntos de la frontera. 885. La integral converge uniformemente en toda franja $0 < a \leq \operatorname{Re} z \leq A < \infty$. 886. La integral converge uniformemente en todo semiplano $\operatorname{Re} z \geq a > 0$. 887. La integral converge uniformemente en toda franja $a \leq \operatorname{Re} z \leq 2-a$, donde $a > 0$. 888. La integral converge uniformemente en toda franja $a \leq \operatorname{Re} z \leq 1-a$, donde $a > 0$. 889 y 890. La integral converge uniformemente en todo intervalo cerrado del eje real que no contiene el origen de coordenadas. 891. La integral converge uniformemente en el semiplano $\operatorname{Im} z \geq 0$ sin el semicírculo $|z| < r$, donde r es un número positivo tan pequeño como se quiera. 892. La integral converge uniformemente en los intervalos $0 < a \leq z \leq \beta < 1$ y $1 < \gamma \leq z < \infty$. 893. Ejemplo: $f(t) = e^{t^2}$ para $n < t < n + e^{-n^3}$ ($n=1, 2, \dots$) y $f(t) = 0$ para todos los demás valores de t . 894. $x_c = x_a = 0$. 895. $x_c = x_a = -\infty$. 896. $x_c = x_a = +\infty$. 897. $x_c = -\infty; x_a = 1$. 898. $x_c = -\infty; x_a = +\infty$. 899. $x_c = -1; x_a = +\infty$. 900. $x_c = 0; x_a = 1$. 901. Diverge en todos los puntos de la frontera. 902. Converge absolutamente. 903. En el punto $z=0$ diverge, en los demás puntos de la frontera converge no absolutamente. 904. Converge no absolutamente en todos los puntos de la frontera.

Capítulo VI

914. *Solución.* Calculando las integrales que figuran en las siguientes desigualdades evidentes

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx,$$

obtenemos

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n}.$$

Para demostrar la fórmula de Wallis resta probar que la diferencia entre los miembros extremos de este sistema de desigualdades tiende hacia cero para $n \rightarrow \infty$.

916. 1) No se conserva; 2) se conserva. 918. 1) Diverge; 2) diverge (hacia cero); 3) converge; 4) converge. 919. Converge no absolutamente. 920. Diverge.

921. Converge para $\rho > \frac{1}{2}$ y, además, absolutamente para $\rho > 1$; diverge para

$\rho \leq \frac{1}{2}$. 922. Converge absolutamente para $\rho > 1$; diverge para $\rho \leq 1$.

923. Converge absolutamente. 925. $|z| < 1$. 926. $|z| < 2$. 927. $|z| < \infty$.

928. $|z| > 1$. 929. $|z| < \frac{1}{e}$. 930. $|z| < \infty$. 931. $|z| < \infty$. 932. $|z| < \infty$.

933. $|z| < \infty$. 940. *Solución.* 1) Restando de la serie $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$

la serie correspondiente a $2^{-s}\zeta(s)$, obtenemos $(1-2^{-s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots$;

en el miembro de la derecha de esta igualdad no figuran aquellos términos $1/n^s$ para los cuales n es divisible por 2. Análogamente $(1-2^{-s})(1-3^{-s})\zeta(s) = 1 +$

$+\frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots$, donde en el miembro de la derecha se omiten aquellos términos $\frac{1}{n^s}$ para los cuales n es divisible por 2 ó 3. En general,

$$(1 - \rho_1^{-s})(1 - \rho_2^{-s}) \dots (1 - \rho_m^{-s}) \zeta(s) = 1 + \sum \frac{1}{n^s}, \quad (1)$$

donde en el miembro de la derecha de (1) la suma se toma respecto a todos aquellos índices n (mayores de la unidad) que no son divisibles por ninguno de los números $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. Es fácil demostrar que para $\text{Re } s \geq 1 + \delta$ ($\delta > 0$) la suma de la serie del miembro de la derecha de (1) tiende hacia cero, cuando

$m \rightarrow \infty$, y que, por consiguiente, $\zeta(s) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \rho_m^{-s}) = 1$. 2) Como del criterio de convergencia absoluta (véase el problema 917) se desprende que el producto

$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - \rho_m^{-s})$ converge para $\text{Re } s \geq 1 + \delta$, resulta que la función $\zeta(s)$ no tiene

ceros, si $\text{Re } s > 1$. 941. Solución. De lo demostrado en el problema anterior se desprende que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \rho_n^{-(1+\delta)}) = \frac{1}{\zeta(1+\delta)}$ cualquiera que sea $\delta > 0$. De aquí

es fácil concluir que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \rho_n^{-(1+\delta)}) = 0$. Como, por otra parte, $(1 - \rho_n^{-1}) <$

$< (1 - \rho_n^{-(1+\delta)})$, es claro que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \rho_n^{-1})$ diverge (hacia cero) y

que, por consiguiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{-1}$ también diverge.

961. $\frac{\pi^2}{\text{sen}^2 \pi a}$. 962. $\frac{\pi^2 \text{ctg } \pi a}{\text{sen } \pi a}$. 963. $\frac{\pi^2}{8}$. 964. $\frac{1}{2a^2} (1 + \pi a \text{cth } \pi a)$.

965. $\frac{1}{2a^2} \left(1 + \frac{\pi a}{\text{sh } \pi a}\right)$. 966. $\frac{\pi^3}{32}$. 967. $\frac{(-1)^k + 12^{2k} - 1 \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k}$, (B_{2k} es el

ero de Bernoulli; véase el problema 485). 968. $\frac{\pi \text{sen } ab}{2 \text{sen } \pi a}$. 971. $\rho = 0$.

972. $\rho = n$, $\sigma = a$. 973. $\rho = 1$, $\sigma = 3$. 974. $\rho = 1$, $\sigma = 3$. 975. $\rho = 3$, $\sigma = 2$.

976. $\rho = 2$, $\sigma = \sqrt{5}$. 977. $\rho = 1$, $\sigma = 1$. 978. $\rho = 1$, $\sigma = 1$. 979. $\rho = 1$,

$\sigma = \sqrt{2}$. 980. $\rho = \frac{1}{2}$, $\sigma = 1$. 981. $\rho = \frac{1}{2^m}$, $\sigma = 1$. Solución. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2^2 \cdot n)!} =$

$$(\cos \sqrt[4]{z} + \cos i \sqrt[4]{z}), \text{ de donde } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2^2 \cdot n)!} = \frac{1}{2} (\cos \sqrt[4]{z} + \cos i \sqrt[4]{z}).$$

Análogamente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2^3 \cdot n)!} = \frac{1}{4} (\cos \alpha \sqrt[4]{z} + \cos \alpha^2 \sqrt[4]{z} + \cos \alpha^3 \sqrt[4]{z} + \cos \alpha^4 \sqrt[4]{z})$,

donde $\alpha = \sqrt[4]{-1}$, y de aquí obtenemos $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2^3 \cdot n)!} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \cos \alpha^k \sqrt[4]{z}$, etc.

982. $\rho = \infty$. 983. *Solución.* Es fácil ver que basta con considerar los valores

$z > 0$. En este caso $\frac{\int_0^1 e^{zt^2} dt}{e^{z^2}} < 1$; por otra parte, si $0 < \alpha < 1$, se tiene

$$\frac{\int_0^1 e^{zt^2} dt}{e^{z^2}} = \int_0^1 e^{z(t^2-\alpha)} dt \geq \int_0^1 e^{z(t^2-\alpha)} dt \rightarrow \infty \text{ para } z \rightarrow \infty.$$

Por consiguiente, $\rho = 1$, $\sigma = 1$. 985. $\rho^* = \max(\rho_1, \rho_2)$. 986. 1) $\rho^* = \rho$, $\sigma^* \leq \sigma_1 + \sigma_2$; 2) $\rho^* = \rho$, $\sigma^* = \max(\sigma_1, \sigma_2)$. 987. $\rho^* \leq \rho$, $\sigma^* \leq 2\sigma$; 2) $\rho^* \leq \rho$, $\sigma^* \leq \sigma$. 988. *Solución.* Si $z = re^{i\varphi}$, la magnitud $\left| 1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right|$ alcanza su valor

máximo para $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ como quiera que se dé r ; este valor es igual a $1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}$.

Por otra parte, para cualquier $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \alpha$) y para $n > n_0(\varepsilon)$ se tiene $\frac{n}{\beta + \varepsilon} < \lambda_n < \frac{n}{\alpha - \varepsilon}$ y, por consiguiente,

$$1 + \frac{(\alpha - \varepsilon)^2 r^2}{n^2} < 1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2} < 1 + \frac{(\beta + \varepsilon)^2 r^2}{n^2} \quad (*)$$

Pero, puesto que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma^2 r^2}{n^2} \right) = \frac{\operatorname{sen} i\pi\gamma r}{i\pi\gamma r} = \frac{e^{\pi\gamma r} - e^{-\pi\gamma r}}{2\pi\gamma r}$$

(véase el problema 952 ó el problema 957), de las desigualdades (*) se deduce, en virtud de la arbitrariedad de ε y de la solución del problema 984, que el orden ρ de la función $f(z)$ es igual a 1 y que su tipo σ es no menor del tipo de la función $e^{\pi^2 z^2}$ y no mayor del tipo de la función $e^{\pi^2 \beta z^2}$, es decir, $\pi\alpha \leq \sigma \leq \pi\beta$. 990. *Solución.* Sean $M(r)$, ρ y σ el máximo de la función $|f(z)|$ sobre la circunferencia $|z| = r$, el orden y el tipo de la función $f(z)$ respectivamente y sean $M_1(r)$, ρ_1 y σ_1 las características correspondientes de la función $f'(z)$. De la

igualdad $f(z) = \int_0^z f'(t) dt + f(0)$ se deduce que $M(r) \leq rM_1(r) + |f(0)|$ y, por

consiguiente, se tiene $\rho \leq \rho_1$. Como $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}$, donde a título de Γ

se puede tomar la circunferencia de centro en el punto z y de radio δ ($\delta > 0$ es arbitrario), se tiene $M_1(r) \leq \frac{M(r+\sigma)}{\sigma}$, es decir, $\rho_1 \leq \rho$ y, por lo tanto, $\rho_1 = \rho$.

De aquí y de las desigualdades obtenidas más arriba deducimos que $\sigma_1 = \sigma$. Otro método posible de demostración se basa en el teorema señalado en la

pág. 127. 992. $\rho = 1$, $\sigma = \frac{1}{e}$. 993. $\rho = a$, $\sigma = \infty$. 994. $\rho = a$, $\sigma = 0$.

995. $\rho = 0$. 996. $\rho = 0$. 997. $\rho = 1$, $\sigma = 1$. 998. $\rho = 1$, $\sigma = 2$. 999. $\rho = 1$; $h(\varphi) = \cos \varphi$. 1000. $\rho = 1$; $h(\varphi) = \cos \varphi$, si $\cos \varphi \geq 0$; $h(\varphi) = 0$, si $\cos \varphi < 0$. 1001. $\rho = 1$; $h(\varphi) = |\operatorname{sen} \varphi|$. 1002. $\rho = 1$; $h(\varphi) = |\operatorname{sen} \varphi|$. 1003. $\rho = 1$;

$h(\varphi) = |\cos \varphi|$. 1004. $\rho = n$; $h(\varphi) = \cos n\varphi$. 1005. $\rho = \frac{1}{2}$. $h(\varphi) = \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|$.
 1006. 1) $h^*(\varphi) = h(\varphi)$, si $h(\varphi) > 0$; $h^*(\varphi) = 0$, si $h(\varphi) < 0$, y $h^*(\varphi) \leq 0$, si $h(\varphi) = 0$; 2) siempre $h^*(\varphi) = h(\varphi)$. 1007. Ejemplo: $f(z) = e^z - P(z)$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

Capítulo VII

1009. 1) $F^+(z) = (z-a)^n$, $F^-(z) = 0$;

2) $F^+(z) = 0$, $F^-(z) = -\frac{1}{(z-a)^n}$;

3) $F^+(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$, $F^-(z) = 0$.

En los tres casos la integral de tipo de Cauchy se convierte en la integral de Cauchy. 1010. 1) $F^+(z) = \varphi(z) - \sum g_k \left(\frac{1}{z-a_k} \right)$, $F^-(z) = -\sum g_k \left(\frac{1}{z-a_k} \right)$;

2) $F^+(z) = \sum g_k \left(\frac{1}{z-a_k} \right) + g(z)$, $F^- = -\varphi(z) + \sum g_k \left(\frac{1}{z-a_k} \right) + g(z)$.

$g_k \left(\frac{1}{z-a_k} \right)$ es la parte principal del desarrollo de la función $\varphi(z)$ en una vecindad del polo a_k ; $g(z)$ es la parte principal del desarrollo de $\varphi(z)$ en una vecindad del punto infinito, en la que se incluye el término constante.

1011. $F^+(z) = \frac{z + \ln \frac{z-2}{z-3}}{z^2-4}$, $F^-(z) = -\frac{i}{z^2+1}$. 1012. $F^+ + z = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2-\pi^2}$, en particular, $F^+(0) = 0$, $F^+(\pi) = -\frac{3}{2\pi}$, $F^+(-\pi) = \frac{3}{2\pi}$.

$F^-(z) = -\frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2-\pi^2}$. 1013. $F^+(z) = \frac{z}{2(z+i)}$, $F^-(z) = -\frac{z}{2(z-i)}$.

1014. $F^+(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n) z^n}{R^n}$, $F^-(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n (a_n + ib_n)}{z^n}$; para los valores frontera se tiene:

$$F^+(Re^{i\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{in\theta} = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2} \varphi(Re^{i\theta}) + \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta);$$

$$F^-(Re^{i\theta}) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{in\theta} = \frac{a_0}{4} - \frac{1}{2} \varphi(Re^{i\theta}) +$$

$$+ \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta).$$

1015. 1) Si el punto z pertenece al círculo $Q_k: |z - k\pi| < \frac{\pi}{2}$, se tiene $I_1(z) = f(z - k\pi)$, $I_2(z) = (-1)^k f(z - k\pi)$. En particular, si $|z| < \frac{\pi}{2}$, se tiene $I_1(z) = I_2(z) = f(z)$. Si el punto z se encuentra en el exterior de todos los círculos cerrados \bar{Q}_k , se tiene $I_1(z) = I_2(z) = 0$. 2) Sea Q_k el círculo $|z - k\pi| < \pi$. Entonces, $I_1(z) = f(z - k\pi) + f[z - (k-1)\pi]$, $I_2(z) = (-1)^k [f(z - k\pi) - f(z - (k-1)\pi)]$, si $z \in Q_{k-1}Q_k$; $I_1(z) = f(z - k\pi) + f[z - (k+1)\pi]$, $I_2(z) = (-1)^k [f(z - k\pi) -$

$-f(z-(k+1)\pi)$, si $z \in Q_k Q_{k+1}$; $I_1 = f(z-k\pi)$, $I_2(z) = (-1)^k f(z-k\pi)$, si z pertenece al interior del recinto $Q_k - Q_{k-1} Q_k - Q_k Q_{k+1}$; $I_1(z) = 0$, $I_2(z) = 0$, si z pertenece al interior del complemento de todos los Q_k . **1016.** $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-1}{z+1}$; $F^\pm(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \pm \frac{1}{2}$, $F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$ ($-1 < \zeta < 1$); $F(\pm i) = \pm \frac{1}{4}$, $F^\pm(0) = \pm \frac{1}{2}$, $F(0) = 0$. **1017.** $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{z+R}{z-R}$ (la rama uniforme sobre el z -plano con un corte a lo largo de C , definida por el valor $\operatorname{Ln} 1 = 0$). $\operatorname{Ln} \frac{z+R}{z-R} = \ln \left| \frac{z+R}{z-R} \right| + i \Delta_C \arg(\zeta-z)$, donde $\Delta_C \arg(\zeta-z)$ es el incremento de $\arg(\zeta-z)$ a lo largo de C .

$$F^+(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{\zeta+R}{\zeta-R} \right| + \frac{3}{4}, \quad F^-(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{\zeta+R}{\zeta-R} \right| - \frac{1}{4},$$

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{\zeta+R}{\zeta-R} \right| + \frac{1}{4}; \quad F(0) = \frac{1}{2}, \quad F^+(iR) = \frac{3}{4}, \quad F^-(iR) = -\frac{1}{4},$$

$$F(iR) = \frac{1}{4}; \quad F'(0) = -\frac{i}{\pi R}.$$

1018. $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{z+R}{z-R}$ (la rama uniforme sobre el z -plano con un corte a lo largo de C , definida por el valor $\operatorname{Ln} 1 = 0$; para $|z| > R$ ella coincide con la rama análoga del problema 1017); $F^+(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{\zeta+R}{\zeta-R} \right| + \frac{1}{4}$, $F^-(\zeta) = \frac{i}{2\pi i} \times \times \ln \left| \frac{\zeta+R}{\zeta-R} \right| - \frac{3}{4}$; $F(0) = -\frac{1}{2}$, $F'(0) = -\frac{i}{\pi R}$. **1019.** 1) 0, si $|z| < r$ ó

$|z| > R$, y $\frac{1}{z^n}$, si $r < |z| < R$; 2) $\frac{1}{z^n}$, si $\operatorname{Im} z > \pi$, y 0, si $\operatorname{Im} z < \pi$; 3) 0, si $|\operatorname{Im} z| < \pi$, y $-\frac{1}{z^n}$, si $|\operatorname{Im} z| > \pi$; 4) $\frac{1}{2\pi i z^n} \left[\operatorname{Ln} \frac{R+z}{R-z} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)R^{2k-1}} \right]$,

si $m = \left[\frac{n}{2} \right]$, donde $\operatorname{Ln} \frac{R+z}{R-z} = \ln \left| \frac{R+z}{R-z} \right| + i \Delta_C \{ \arg(\zeta-z) - \arg \zeta \}$ es la rama uniforme sobre el z -plano con un corte a lo largo de C , definida por el valor $\operatorname{Ln} 1 = 0$. La parte imaginaria del valor frontera de esta rama sobre C por la izquierda es igual a $\frac{\pi}{2}$ y por la derecha, a $\left(-\frac{3\pi}{2} \right)$. Con esto quedan deter-

minados los valores frontera de $F^\pm(\zeta)$ sobre C ; $F(0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1+(-1)^{n-1}}{\pi R^n}$; 5) la función $F(z)$ es la misma que en el punto anterior, pero $\operatorname{Ln} \frac{R+z}{R-z}$ es la rama uniforme sobre el z -plano con un corte a lo largo de la otra semicircunferencia

¹⁾ A simple vista la solución es evidente:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{2\pi i} [\ln(1-z) - \ln(-1-z)] = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-1}{z+1}.$$

Sin embargo, es preciso comprobar que la última transformación conduce efectivamente a la rama señalada del logaritmo, ya que la igualdad $\ln z_2 - \ln z_1 = \ln \frac{z_2}{z_1}$, en general, no es válida. Esta observación debe también tenerse en cuenta en lo sucesivo.

C y con el mismo valor $\text{Ln } 1 = 0$. La parte imaginaria del valor frontera de esta rama sobre C por la izquierda es igual a $\frac{3\pi}{2}$ y por la derecha, a $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Con esto quedan determinados los valores frontera de $F^\pm(\zeta)$ sobre C; $F(0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{nR^n}$. Observación. En los puntos 4) y 5) las ramas de

$\text{Ln} \frac{R+z}{R-z}$ coinciden en el círculo $|z| < R$, pero son, en general, distintas; por ejemplo, en el ∞ el valor de la rama es $-\pi i$ en el primer caso y $+\pi i$ en el segundo. Sin embargo $F(\infty) = 0$. 1020. $\text{Ln} \frac{b-z}{a-z} = \ln \left| \frac{b-z}{a-z} \right| +$

$+i\Delta_C \arg(\zeta - z)$, la rama uniforme sobre el z-plano con un corte a lo largo de C, definida por el valor $\text{Ln } 1 = 0$ (de la misma forma se definen las ramas en los

problemas 1021—1024). 1021. $b - a + z \text{Ln} \frac{b-z}{a-z}$. 1022. 1) $\sum_{k=1}^n A_{nk} z^{k-1} +$

$+ z^n \text{Ln} \frac{b-z}{a-z}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n c_n A_{nk} z^{k-1} + \varphi(z) \text{Ln} \frac{b-z}{a-z}$, donde $A_{nk} =$

$= \frac{b^{n-k+1} - a^{n-k+1}}{n-k+1}$. 1023. $\frac{1}{z-z_0} \left(\text{Ln} \frac{b-z}{a-z} - \text{Ln} \frac{b-z_0}{a-z_0} \right)$.

1024. $\frac{1}{(z-z_0)^n} \left[\text{Ln} \frac{b-z}{a-z} - \text{Ln} \frac{b-z_0}{a-z_0} + \sum_{k=2}^n A_k (z-z_0)^{k-1} \right]$,

$$A_k = \frac{1}{k-1} \left[\frac{1}{(b-z_0)^{k-1}} - \frac{1}{(a-z_0)^{k-1}} \right], \quad F(z_0) = -A_{n+1}.$$

1025. 1) $F^+(z) = \ln(z+R)$, $F^-(z) = \ln\left(1 + \frac{R}{z}\right)$; $F^+(\zeta) = \ln 2R \cos \frac{\varphi}{2} +$
 $+ i \frac{\varphi}{2}$, $F^-(\zeta) = \ln 2 \cos \frac{\varphi}{2} - i \frac{\varphi}{2}$; 2) $F^+(z) = \ln(R-z) + \pi i^{1)}$, $F^-(z) =$

$= \ln\left(1 - \frac{R}{z}\right)$; $F^+(\zeta) = \ln 2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| + i \frac{\pi + \varphi}{2}$, $F^-(\zeta) = \ln 2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| + i \frac{\pi - \varphi}{2}$
 (el sentido del ángulo $\varphi = \arg \zeta$ corresponde a las condiciones del problema).

1026. 1) $F^+(z) = 0$, $F^-(z) = \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right)$; $F^+(\zeta) = 0$, $F^-(\zeta) = \ln\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)$;

2) $F^+(z) = \ln \frac{z}{z-1}$, $F^-(z) = 0$; $F^+(\zeta) = \ln \frac{\zeta}{\zeta-1}$; $F^-(\zeta) = 0$. 1027. $F(z) =$

$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n z^n} \left[\text{Ln} \frac{R+z}{R-z} - 2 \sum_{k=1}^m \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)R^{2k-1}} \right]$, donde $m = \left[\frac{n}{2} \right]$ y $\text{Ln} \frac{R+z}{R-z}$

tiene el mismo valor que en el problema 1019, 4). Con esto quedan determinados también los valores frontera de $F^\pm(\zeta)$ sobre C. Si $|z| < R$, se tiene

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, donde $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \ln \frac{\zeta}{\zeta-1} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}$. 1028. $F^+(z) = -\frac{1}{\pi i} \times$

$\times \left[2 + \sqrt{z} \ln \frac{1 - \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}} \right]$, $F^-(z) = -\frac{1}{\pi i} \left[2 + \sqrt{z} \ln \frac{1 - \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}} \right] - \sqrt{z}$.

¹⁾ Si $\text{Ln } z$ y $\ln z$ son las ramas señaladas en la condición del problema, se tiene $\text{Ln } z = \ln(-z) + \pi i$.

1029. $F^+(z) = 0$, $F^-(z) = \text{Ln} \frac{z-b}{z-a}$ (la rama del logaritmo se determina por la condición del problema).

1030. $F^+(z) = 1$, $F^-(z) = 1 - \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$.

1031. $F^+(z) = z - \lambda a - (1-\lambda)b$, $F^-(z) = z - \lambda a - (1-\lambda)b - (z-a)^\lambda (z-b)^{1-\lambda}$.

1032. $F^+(z) = \text{Ln} \frac{z-\zeta_0}{z-b}$, $F^-(z) = \text{Ln} \frac{z-\zeta_0}{z-a}$.

1034. $-x^2 + x - 3,5$.

1035. 1) $\frac{1}{2} \left(\ln \frac{z}{z-1} \right)^2$; 2) $\frac{1}{2} \left(\ln \frac{\tau}{1-\tau} \right)^2 - \frac{\pi^2}{2}$.

1037. Si $|z| > 1$ y $z \in C$, se tiene $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{z-1} \text{Ln} \frac{R+z}{R-z} + F_1(z)$, donde $F_1(z)$ es una función analítica para $|z| > 1$ y la rama de $\text{Ln} \frac{R+z}{R-z}$ se escoge igual que en el problema 1019,

4). De aquí se desprende el comportamiento de $F(z)$ en los puntos $\pm R$, que son los extremos del arco C . 1038. $D(f)$ es el área del recinto G' en el que la función $f(z)$ transforma el recinto G .

1044. 1) $\ln \left| \frac{R^2 - \zeta z}{R(z - \zeta)} \right|$; 2) $\ln \left| \frac{z - \bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|$;

3) $\ln \left| \frac{e^{nz} - e^{n\bar{\zeta}}}{e^{nz} - e^{n\zeta}} \right|$.

1050. $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta$,

$u(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) d\theta$.

1052. 1) $f(z) = \varphi(z) + \psi\left(\frac{R^2}{z}\right)$, $f_1(z) = -\varphi\left(\frac{R^2}{z}\right) - \psi(z)$, y, además, $v(0) = \text{Im} f(0) = \text{Im} [\varphi(0) + \psi(\infty)]$;

2) $f(z) = -i\varphi(z) + i\psi\left(\frac{R^2}{z}\right)$, $f_1(z) = i\varphi\left(\frac{R^2}{z}\right) + i\psi(z)$, $v(0) = \text{Im} f(0) = \text{Im} [-i\varphi(0) + i\psi(\infty)]$.

1053. 1) $f(z) = z^n$, $f_1(z) = -\frac{R^{2n}}{z^n}$ (aquí, así como en las respuestas a los problemas 1054—1057, el valor de $v(0)$ se toma igual a cero).

1054. $f(z) = \frac{z^n}{R^{2n}}$, $f_1(z) = -\frac{1}{z^n}$.

1055. $f(z) = -\ln\left(1 - \frac{z}{R^2}\right)$ ($\ln 1 = 0$), $f_1(z) = \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right)$.

1056. $f(z) = \frac{R}{\sqrt{R^2 - z}}$ ($f(0) = \frac{1}{R}$), $f_1(z) = -\sqrt{\frac{z}{z-1}}$.

1057. $f(z) = \ln R$,

$f_1(z) = -\ln R$.

1059. $u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{y dt}{(t-x)^2 + y^2}$, $f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t) dt}{t-z} + iC$

(para la existencia de la primera integral es suficiente que $u(t)$ sea acotada y continua a trozos en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y para la existencia de la segunda integral es suficiente exigir además que, por ejemplo, $u(t)$ sea de orden $\frac{1}{|t|^\alpha}$ ($\alpha > 0$))

en el infinito).

1060. $f(z) = u(z) + iv(z) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \text{cth} \frac{\pi(t-z)}{2} dt -$

$-\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \text{th} \frac{\pi(t-z)}{2} dt$, donde $u_1(t) = u(t+i)$ (para la existencia de las

integrales es suficiente, por ejemplo, que $u(t)$ decazca en el infinito como $\frac{1}{|t|^{1+\alpha}}$, $\alpha > 0$).

1062. Las circunferencias del círculo $|z| < 1$ tangentes a la

circunferencia $|z|=1$ en el punto $e^{i\theta}$. **1064.** Los arcos circulares que unen en el interior del círculo $|z|<1$ los puntos $e^{i\theta_1}$ y $e^{i\theta_2}$. **1065.** $\omega(z; a, b) = \frac{1}{\pi} \arg \frac{z-b}{z-a}$, $\omega(z; -\infty, b) = \frac{1}{\pi} \arg(z-b)$; $\omega(z; a, \infty) = 1 - \frac{1}{\pi} \arg(z-a)$. El significado geométrico de estas medidas armónicas es el ángulo, bajo el cual se ve el segmento o el rayo desde el punto z , dividido por π . **1066.** $1 - \frac{1}{\gamma} \arg z$

para el rayo $\arg z = 0$ y $\frac{1}{\gamma} \arg z$ para el rayo $\arg z = \gamma$. **1067.** $\omega(z, \Delta) = \frac{2}{\pi} \arg \frac{z-R}{z+R} - I = 1 - \frac{\gamma}{\pi} \arctg \frac{2Ry}{R^2 - |z|^2}$, $\omega(z, \Gamma) = I - \omega(z, \Delta)$. Las líneas equipotenciales son arcos circulares que unen los puntos $\pm R$, desde los puntos de estos arcos el diámetro Δ se ve bajo el ángulo $\frac{\pi}{2}(1+\omega)$ en el caso de

$\omega(z, \Delta)$ y $\pi \left(1 - \frac{\omega}{2}\right)$ en el caso de $\omega(z, \Gamma)$. **1068.** $\omega(z, \Gamma) = \frac{2}{\pi} \arg \frac{z-R}{z+R}$.

1069. $\omega(z, \Gamma) = \frac{2}{\pi} \arg \frac{\sqrt{z} - \sqrt{R}}{\sqrt{z} + \sqrt{R}}$. **1070.** $\frac{\ln|z| - \ln r}{\ln R - \ln r}$ para $|z|=R$ y

$\frac{\ln|z| - \ln R}{\ln r - \ln R}$ para $|z|=r$. **1073.** $u(z) = \sum_{v=1}^n C_v \omega_v(z)$.

Capítulo VIII

1078. $f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$; mediante este desarrollo $f(z)$ se prolonga analíticamente al interior del círculo $|z-a| < |1-a|$, que no pertenece integralmente al interior del círculo $|z| < 1$, siempre que a no pertenezca al intervalo

$[0, 1)$. **1079.** $f(z) = \ln \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\left(z + \frac{1}{2}\right)^n}{n}$; el círculo de convergencia de esta serie es $\left|z + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$. **1093. Solución.** La sustitución $e^t = x$ lleva la

integral a la forma $f(s) = \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{x^s} (x^s = e^{s \ln x})$. Integrando por partes, obtenemos

$f(s) = \cos 1 - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{s+1}} dx$. La última integral converge en el semiplano

$\operatorname{Re} s > -1$. **1096.** $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $-1 < \operatorname{Re} z < 1$. **1098.** El punto $z=1$ es un polo simple de residuo igual a la unidad. **1099. Solución.** Tomemos $f_1(z) =$

$= \int_0^{\infty} e^{-t\varphi} \varphi(z) dt$. La analiticidad de la función $f_1(z)$ en el círculo $|z| < 1$ se

desprende del resultado del problema 535 y de las propiedades generales de la integral de Laplace (véase la pág. 117). Integrando por partes $(n+1)$ veces y haciendo uso de las desigualdades del problema 535, obtenemos para $|z| < 1$

$$f_1(z) = - \sum_{k=0}^n z^k [e^{-t\varphi^{(k)}}(zt)]_0^{\infty} + z^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-t\varphi^{(n+1)}}(zt) dt = \sum_{k=0}^n a_n z^n +$$

+ $z^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-t\varphi^{(n+1)}(zt)} dt$. De la estimación para $|\varphi^{(n+1)}|$ se desprende que el segundo sumando del miembro de la derecha de la última igualdad tiende hacia cero para $n \rightarrow \infty$ ($|z| < r$). Para demostrar la segunda afirmación tomemos un punto cualquiera $z \in G$. Entonces, en el interior y en la frontera del círculo, para el cual Oz sirve de diámetro, no habrá, como es fácil de demostrar, ningún punto singular de la función $f(z)$. Por ello la función $f(z)$ también será analítica en el interior y en la frontera C del círculo de radio $\frac{|z|}{2} + \delta$, concéntrico con el ya construido, siempre que $\delta > 0$ sea lo suficientemente pequeño. Por lo tanto, para los coeficientes c_n del desarrollo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ son válidas las igualdades

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \text{ y, por consiguiente,}$$

$$\varphi(zt) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n t^n}{n!} \int_C \frac{f(\zeta) dz}{\zeta^{n+1}}.$$

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n t^n f(\zeta)}{n! \zeta^{n+1}}$ converge uniformemente sobre C , se tiene $\varphi(zt) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) e^{zt/\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}$. El máximo sobre C de la magnitud $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\zeta}\right)$ es igual a $\frac{|z|}{|z| + \delta} = q < 1$ (al demostrar esta afirmación es suficiente limitarse al caso en que z es real y positivo, ya que una rotación alrededor del origen de coordenadas no varía la magnitud de $\operatorname{Re}(z/\zeta)$ y, por consiguiente, $|\varphi(zt)| < A e^{qt}$ (A es una constante). De aquí se desprende precisamente que la integral $\int_0^{\infty} e^{-t\varphi(zt)} dt$

converge. 1103. Si $\operatorname{Ln}^{(1)} \frac{z-z_2}{z-z_1}$ es aquella rama de la función $\operatorname{Ln} \frac{z-z_2}{z-z_1}$ que es analítica en el z -plano con un corte a lo largo del arco γ_1 y que es igual a 0 para $z = \infty$, se tiene $F^-(z) = (a-b) \operatorname{Ln}^{(1)} \frac{z-z_2}{z-z_1}$, $F^+(z) = (a-b) \operatorname{Ln}^{(1)} \frac{z-z_2}{z-z_1} + 2\pi bi$; en el interior de G^+ se tiene $F^-(z) = (a-b) \operatorname{Ln}^{(1)} \frac{z-z_2}{z-z_1} - 2\pi i(a-b)$ para la prolongación analítica a través de γ_1 y $F^-(z) = (a-b) \operatorname{Ln}^{(1)} \frac{z-z_2}{z-z_1}$ para la prolongación analítica a través de γ_2 .

1105. 1) $z = \pm 3$; 2) $z = \pm 2i$; 3) $z = \pm 2i$. En los tres casos los valores de $w'(z)$ son diferentes. 1107. Sobre $z=1$ hay dos elementos: $z=1+t$,

$$w_1 = \frac{1 - (1-t)^{1/2}}{t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}t + \dots, \quad |t| < 1,$$

$$w_2 = \frac{1 + (1-t)^{1/2}}{t} = \frac{2}{t} - \frac{1}{2} + \dots, \quad 0 < |t| < 1;$$

sobre $z=2$ hay un elemento algebraico: $z=2+t^2$, $w = \frac{1}{1+it} = 1 - it - t^2 + \dots$, $|t| < 1$. 1108. Sobre $z=1$ hay dos elementos algebraicos: $z=1+t^2$, $w =$

$= i \pm \sqrt{2} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{1/2} = \pm i \sqrt{2} \left(1 - \frac{t}{4} + \dots\right)$, $|t| < 2$; sobre $z=5$ hay un elemento algebraico: $z=5+t^2$, $w = \frac{t}{2} \left(1 - \frac{t^2}{32} + \dots\right)$, $|t| < 2$ y dos elementos regulares: $z=5+t$, $w = \pm 2i \left(1 + \frac{t}{32} + \dots\right)$, $|t| < 4$; sobre $z=\infty$ hay un elemento algebraico: $z=t^{-4}$, $w = \frac{1}{t} - t + \dots$, $0 < |t| < \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$. **1109.** Sobre $z=1$ hay dos elementos algebraicos: $z=1+t^2$, $w = \pm (1+t)^{1/2} = \pm \left(1 + \frac{1}{2}t - \dots\right)$, $|t| < 1$. **1110.** Sobre $z=1$ hay tres elementos algebraicos: $z=1+t^2$; $w = \omega_k \left(1 + \frac{t}{3} + \dots\right)$, $|t| < 1$, donde $\omega_1=1$, $\omega_{2,3} = e^{\pm \frac{2\pi i}{3}}$. Sobre $z=2$ hay un elemento algebraico: $z=2+t^3$, $w = -\frac{t}{\sqrt[3]{2}} \left(1 - \frac{t^3}{12} + \dots\right)$, $|t| < 1$ y tres elementos regulares:

$$z=2+t, \quad w = \omega_k \sqrt[3]{2} \left(1 + \frac{t}{12} + \dots\right), \quad |t| < 1.$$

Sobre $z=\infty$ hay un elemento algebraico: $z=t^{-6}$, $w = \frac{1}{t} + \frac{t^2}{3} + \dots$, $0 < |t| < \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$. **1111.** Sobre $z=\infty$ hay dos elementos algebraicos: $z=t^{-2}$,

$$w = \pm \frac{1}{t} (1-at)^{\frac{1}{2}} (1-bt)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{t} \left(1 - \frac{a+b}{2}t + \dots\right), \quad 0 < |t| < \min\left(\frac{1}{|a|}, \frac{1}{|b|}\right).$$

1112. $z=0$ es un punto singular bivalente: $z=t^2$, $w = e^{\frac{1}{t}} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!t^2} + \dots$, $0 < |t| < \infty$. **1113.** Sobre $z=0$ hay un elemento algebraico: $z=t^2$, $w = \frac{\operatorname{sen} t}{t^4} = \frac{1}{t^3} - \frac{1}{3!t} + \frac{1}{5!}t - \dots$, $0 < |t| < \infty$. **1114.** Sobre

$z=0$ hay un elemento algebraico: $z=t^3$, $w = \operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} - \frac{t}{3} + \dots$, $0 < |t| < \pi$. **1115.** Sobre $z=0$ hay un elemento algebraico: $z=t^2$, $w = t \left(1 - \frac{t^4}{12} + \dots\right)$,

$|t| < \sqrt{\pi}$. **1116.** Sobre $z=1$ hay un punto trascendental de ramificación de primer orden; sobre $z=\infty$ hay un p. a. r. de primer orden. **1117.** Tanto sobre $z=0$ como sobre $z=\infty$ hay un p. a. r. de primer orden; sobre $z=1$ hay un punto regular y un punto singular esencial de carácter uniforme. **1118.** Tanto sobre $z=0$ como sobre $z=\infty$ hay un p. a. r. de primer orden; sobre cada uno de los puntos $z = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^2$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) hay un punto regular y un polo de primer orden; sobre $z=1$ hay un punto regular y un punto singular no aislado de carácter uniforme (que es el punto de acumulación de los polos). **1119.** Sobre $z=0$ hay un p. a. r. de primer orden; sobre cada uno de los puntos $z = k^2\pi^2$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) hay dos polos de primer orden; sobre $z=\infty$ hay un punto no aislado de ramificación (que es el punto de acumulación de los polos). **1120.** Sobre cada uno de los puntos $z=0$ y $z=2$ hay seis p. a. r. de primer orden; sobre $z=1$ hay dos p. a. r. de segundo orden y seis puntos regulares, sobre $z=\infty$ hay dos p. a. r. de quinto orden. **1121.** Sobre cada uno de los puntos $z=i$ y $z=-i$ hay un conjunto infinito de polos de primer orden; sobre $z=0$ y $z=\infty$ hay un p. l. r. **1122.** Sobre $z=1$ hay un conjunto infinito de puntos regulares

y un conjunto infinito de polos de primer orden; sobre $z=0$ y sobre $z=\infty$ hay un p. l. r. 1123. $w=\frac{1}{4}$, $w=\infty$ que son p. a. r. de primer orden. 1124. $w=\pm 2$ que es un p. a. r. de primer orden; $w=\infty$ que es un p. a. r. de segundo orden. 1125. $w=\frac{1}{4}$, $w=\infty$ que son p. a. r. de primer orden. 1126. $w=0$, $w=\infty$ que son p. a. r. de primer orden. 1127. $w=\frac{1}{2}e^{\pm i\alpha}$ ($\alpha=\cos \alpha$) que son p. a. r. de primer orden. 1128. $w=\infty$ que es un p. a. r. de orden $(n-1)$. A cada cero de la derivada $w'(z)$ de orden k corresponde un p. a. r. de la función $z(w)$ del mismo orden. 1129. A los ceros de la derivada $w'(z)$ corresponden p. a. r. del mismo tipo que en el caso anterior. A los polos de orden mayor de la unidad

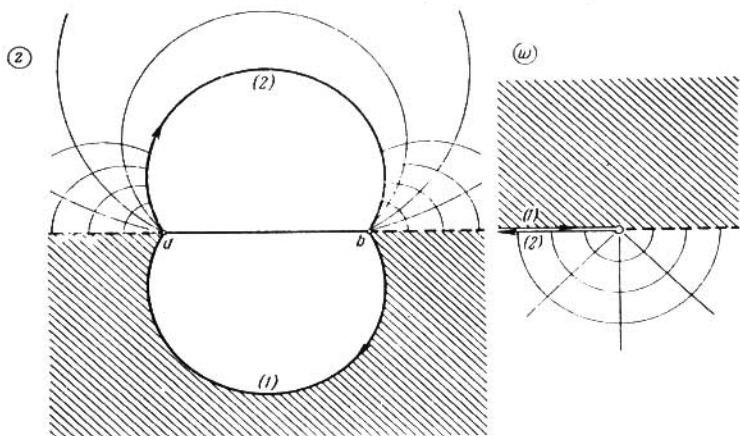


FIG. 72

de la función $w(z)$ les corresponden p. a. r. de orden menor en una unidad del orden del polo. Si en el ∞ se tiene $w(z)=w_0+\frac{c-k}{z^k}+\dots$ ($k > 1$), al punto $z=\infty$ le corresponde un p. a. r. de orden $(k-1)$ sobre $w=w_0$. 1130. La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\sqrt[n]{w}$; sus puntos de ramificación se encuentran sobre $w=0$ y $w=\infty$ y corresponden a $z=-n$ y $z=\infty$. A las hojas del w -plano con cortes $0 < u < \infty$, $v=0$ les corresponden ángulos $\frac{2\pi}{n}$ de vértice en el punto $z=-n$. Para $n \rightarrow \infty$ estos ángulos se convierten en franjas horizontales de anchura 2π , la función $w(z)$ se convierte en e^z y la superficie para $z(w)$, en la superficie para $\text{Ln } w$. 1131. La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\sqrt[n]{w}$. A las hojas del w -plano con cortes $-\infty < u < 0$, $v=0$ les corresponden biángulos circulares que forman ángulos de $2\pi/n$ en los puntos $z=a$ y $z=b$ (fig. 72, donde $n=3$)¹⁾. 1132. La superficie para $z(w)$ se obtiene pegando dos

¹⁾ En las figuras que acompañan los problemas de este capítulo, los puntos correspondientes se denotan con las mismas letras. Para los puntos del infinito se emplea, como regla general, la denotación Ω y Ω' .

hojas del w -plano con cortes $|u| < 1, v=0$, correspondientes a los recintos $|z| < 1$ y $|z| > 1$. Los puntos de ramificación se encuentran sobre $w = \pm 1$ y corresponden a $z = \pm 1$. A la red polar $|z|=r, \arg z = \varphi$ corresponden elipses e hipérbolas de focos ± 1 :

$$\left[\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \right]^2 = 1; \quad \frac{x^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{y^2}{\sin^2 \varphi} = 1.$$

1133. $w(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$; ésta es una función extremal conocida

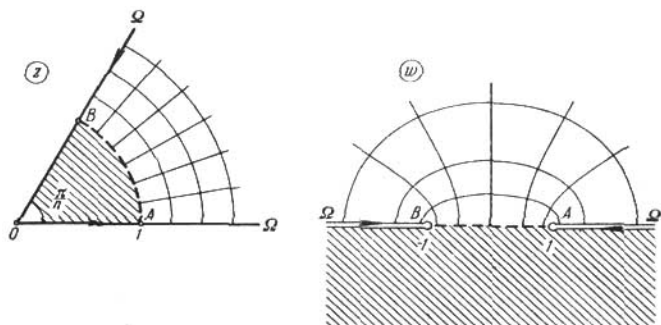


FIG. 73

de la teoría de transformaciones conformes univalentes. Ella transforma el círculo unidad $|z| < 1$ en el w -plano con el corte $-\infty < u < -\frac{1}{4}, v=0$. La superficie para $z(w)$ se obtiene pegando dos hojas de este tipo. 1134. La superficie para $z(w)$ se obtiene pegando sucesivamente $2n$ hojas del w -plano con cortes $1 < |u| < \infty, v=0$. Ella tiene $2n$ puntos de ramificación de primer orden sobre $w = \pm 1$ y dos

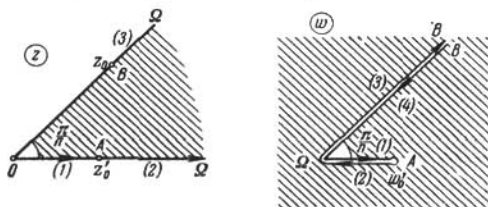


FIG. 74

puntos de ramificación de orden $(n-1)$ sobre $w = \infty$. La transformación principal se indica en la fig. 73. La función $w(z)$ es automorfa (invariante) respecto al grupo de transformaciones lineales generado por las transformaciones

$T = \omega z \left(\omega = e^{\frac{2\pi i t}{n}} \right), S = \frac{1}{z}$. A estas transformaciones corresponden las transformaciones de la superficie para $z(w)$ en sí misma, tales que las hojas se transfor-

man cíclicamente una en otra, conservándose las proyecciones de los puntos sobre el w -plano. 1135. La superficie para $z(w)$ es de $2n$ hojas con un punto de ramificación de orden $2n-1$ sobre $w=0$, correspondiente a $z=\infty$, y con $2n$ puntos de ramificación de primer orden, de los cuales n se encuentran sobre $w=\infty$ y corresponden a los puntos $z_k = e^{\frac{\pi i}{n}} \omega^k$ ($\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$) y los otros n se encuentran sobre los puntos $w'_k = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} z'_k$ y corresponden

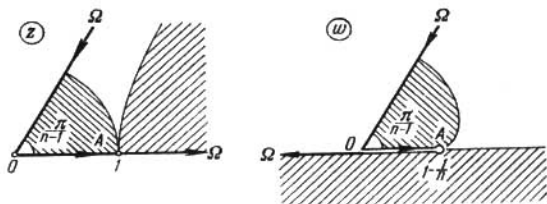


FIG. 75

a los puntos $z'_k = \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}} \omega^k$. La transformación principal se indica en la fig. 74. El resto se obtiene mediante la prolongación según el principio de simetría. 1136. La superficie para $z(w)$ es de n hojas con un punto de ramificación de orden $n-1$ sobre $w=\infty$, correspondiente a $z=\infty$, y con $n-1$

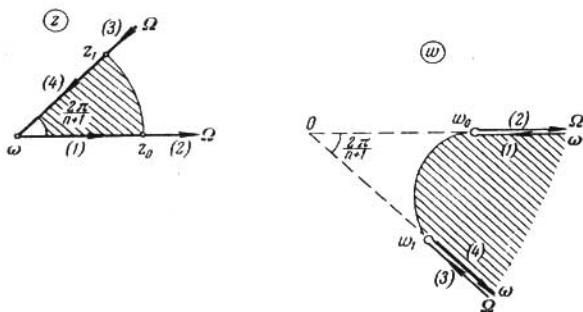


FIG. 76

puntos de ramificación de primer orden situados sobre $w_k = z_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ y correspondientes a $z_k = \omega^k$ ($\omega = e^{\frac{2\pi i}{n-1}}$, $k=0, 1, \dots, n-2$). Para construir la superficie es preciso a su hoja cero (el w -plano con $n-1$ cortes radiales que salen del punto w_k) pegar en cruz a lo largo de cada corte una hoja (el w -plano con un corte radial). La transformación principal se indica en la fig. 75. Al círculo $|z| < 1$ le corresponde el interior de una epicicloide (de una cardioide

para $n=2$). 1137. La superficie para $z(w)$ es de $n+1$ hojas con un punto de ramificación de orden $n-1$ sobre $w=\infty$, correspondiente a $z=\infty$, y con $n+1$ puntos de ramificación de primer orden situados sobre $w_k = \bar{z}_k \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ y correspondientes a $z_k = \omega^k \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{n+1}}, k=0, 1, \dots, n\right)$. La transformación principal se indica en la fig. 76. Al recinto $|z| < 1$ le corresponde el exterior de una hipocicloide (de un segmento para $n=1$). 1138. La superficie para $z(w)$ es de n hojas con un punto de ramificación de orden $n-1$ sobre $w=\infty$, correspondiente a $z=\infty$, y con $n-1$ puntos de ramificación de primer orden, situados sobre $w_k = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$ y correspondientes a $z_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$). Para construir la superficie es preciso pegar a su hoja cero (el w -plano con el corte

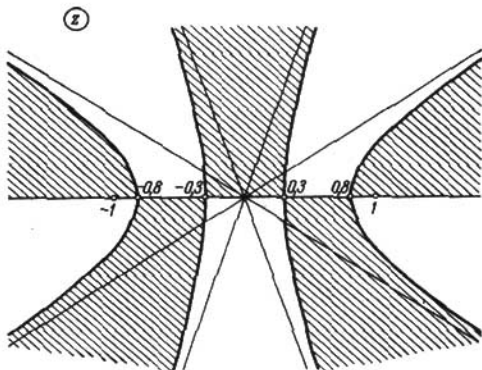


FIG. 77

$-\infty < u \leq -\frac{1}{2^{n-1}}, v=0$) sucesivamente $n-2$ hojas con dos cortes $\frac{1}{2^{n-1}} \leq |u| < \infty, v=0$ y después pegar a la última de ellas una hoja más con el corte $-\infty < u \leq -\frac{1}{2^{n-1}}, v=0$, si n es un número par, y con el corte $\frac{1}{2^{n-1}} \leq u < \infty, v=0$, si n es un número impar. La transformación $w(z)$ transforma las elipses e hipérbolas de focos ± 1 en elipses e hipérbolas de focos $\pm \frac{1}{2^{n-1}}$. El cambio de los semiejes se obtiene de las relaciones $z = \text{const}, w = \text{const}$. En la fig. 77 se indica la división del z -plano en recintos correspondientes a los semiplanos $v > 0$ y $v < 0$ (los primeros se han sombreado) para $n=5$. 1139. $w=0$ y $w=\infty$ son p. l. r. y $w=1$ es un polo de primer orden para una de las ramas de la función $z(w)$. 1140. La función $z(w)$ tiene un p. a. r. de primer orden sobre los puntos $w = e^{\pm 2\pi i}$ y dos p. l. r. sobre $w=0$ y $w=\infty$. Su superficie de Riemann se obtiene pegando dos ejemplares de la superficie de Riemann para la función $\text{Ln } w$ a lo largo del corte hecho en ellos sobre el arco que une los puntos $w = e^{\pm 2\pi i}$ del w -plano. 1141. La función $z(w)$ tiene un conjunto infinito de p. a. r. de primer orden sobre $w = \pm \sqrt{2}$ y dos p. l. r. sobre $w=\infty$. 1142. La función

$z(w)$ tiene un p. a. r. de primer orden sobre los puntos $w_k = \frac{\text{sen } z_k}{z_k}$ (z_k son las raíces de la ecuación $\text{tg } z = z$; todas ellas son reales), dos p. l. r. sobre $w = \infty$ y una singularidad crítica indirecta sobre $w = 0$, que es el punto de acumulación de los p. a. r. indicados (véase *Nevanlinna R.*, *Eindeutige analytische Funktionen*, Springer, Berlín, 1953, n° 238). 1143. $z = \text{Arccos } w = \frac{1}{i} \text{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1})$. La superficie para $z(w)$ es de infinitas hojas con dos p. l. r. sobre $w = \infty$ y p. a. r. de primer orden sobre $w = \pm 1$, que corresponden a $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); se obtiene pegando un número infinito de w -planos con cortes $1 \leq |u| < \infty$, $v = 0$, que corresponden a las franjas verticales $k\pi < x < (k+1)\pi$ (fig. 78). 1144. $z = \text{Arcsen } w = \frac{\pi}{2} - \text{Arccos } w$. La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\text{Arccos } w$. 1145. $z = \text{Arctg } w = \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{i-w}{i+w}$

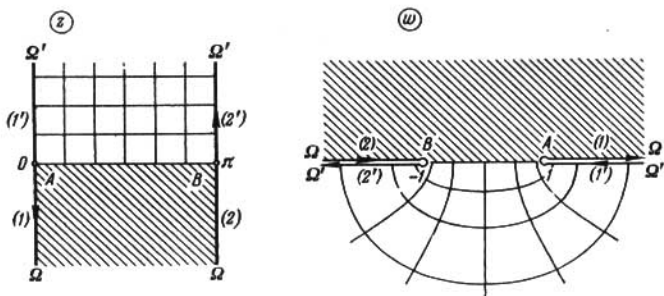


FIG. 78

La superficie para $z(w)$ es de infinitas hojas con dos p. l. r. sobre $w = \pm i$; se obtiene pegando un número infinito de w -planos con cortes $u = 0$, $|v| \leq 1$, que corresponden a las franjas verticales $k\pi < x < (k+1)\pi$ (fig. 79). 1146. $z = \text{Arctg } w = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg } w$. La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\text{Arctg } w$.

1147. $z = \text{Arch } w = \text{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1})$; $\text{ch } z = \cos iz$. La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\text{Arccos } w$. 1148. $z = \text{Arsh } w = \text{Ln}(w + \sqrt{w^2 + 1})$; $\text{sh } z = -i \text{sen } iz$. La superficie para $z(w)$ se obtiene girando la anterior en un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del origen de coordenadas. 1149. $z = \text{Arth } w = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+w}{1-w}$; $\text{th } z = -i \text{tg } iz$. La superficie para $z(w)$ se obtiene girando la superficie para $\text{Arctg } w$ en un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del origen de coordenadas. 1150. $z = \text{Arth } w = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{w+1}{w-1}$; $\text{cth } z = i \text{tg } iz$. La superficie para $z(w)$ es la misma que para $\text{Arth } w$. 1151. La superficie para $z(w)$ se construye como sigue: en el w -plano se hacen cortes horizontales $-\infty < u \leq 1$, $v = (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) y a lo largo de cada uno de ellos se pega un ejemplar del w -plano con un corte (sólo uno) idéntico. La construcción de la superficie para $z(w)$ se basa en que $w(z)$ transforma toda franja $2k\pi < y < (2k+1)\pi$ en la franja $2k\pi < v < (2k+2)\pi$, que lleva el w -plano pegado a lo largo del corte $-1 \leq u < \infty$, $v = (2k+1)\pi$ (véase la fig. 80; el signo "+" indica que los recintos deben ser

pegados). 1152. 1) Sea F la superficie de Riemann en la que la función $w = R(\zeta)$ transforma el ζ -plano. Para construir la superficie de Riemann de la función $z(w)$ es preciso pegar una cantidad infinita de ejemplares de la superficie F con un corte a lo largo de un arco que une, sobre F , los puntos $w(0)$ y $w(\infty)$ (aná-

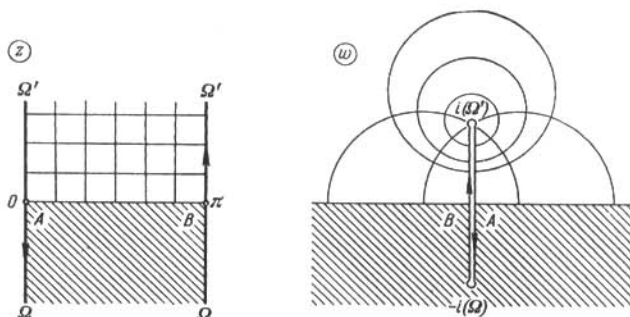


FIG. 79

logamente a la construcción de la superficie de Riemann de la función $\text{Ln } w$). La función de Riemann obtenida tiene dos p. l. r. en los extremos del arco de pegadura y una cantidad infinita de p. a. r. pertenecientes a las superficies F . 2) Para construir la superficie de Riemann de la función $z(w)$ pegamos una cantidad infinita de ejemplares de la superficie F alternadamente a lo largo de los

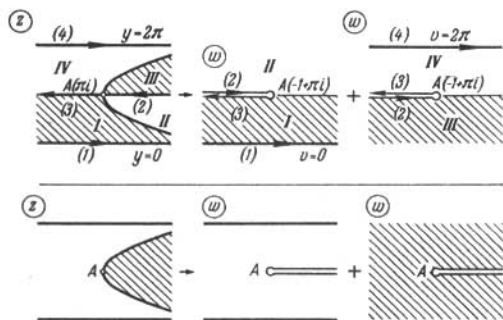


FIG. 80

cortes que van de los puntos $w(\pm 1)$ al punto $w(\infty)$ (análogamente a la construcción de la superficie de Riemann para la función $\text{Arcsen } w$). La superficie de Riemann obtenida tiene dos p. l. r. sobre $w(\infty)$ y además de los p. a. r. del punto 1) tiene una cantidad infinita de p. a. r. de primer orden en los puntos $w(\pm 1)$ (si $w(+1)$ o $w(-1)$ es un p. a. r. de orden k de la superficie F , este punto será para $z(w)$ un p. a. r. de orden $2k+1$). El estudio de la función $z(w)$ se puede reducir al caso anterior realizando la sustitución $z_1 = iz$. 1153. Todas

las superficies de Riemann para $w(z)$ son de dos hojas y tienen p. a. r. de primer orden sobre los puntos: 1) $z=a, z=b$; 2) $z=a, z=b, z=c, z=\infty$; 3) $z=a, z=b, z=c$ y $z=\infty$, si n es impar. Para construir las superficies tomamos dos hojas del

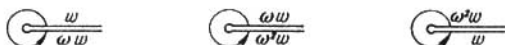


FIG. 81

z —plano con cortes, que van de los puntos indicados más arriba al ∞ , y los pegamos a lo largo de los cortes idénticos. 1154. Todas las superficies de Riemann para $w(z)$ son de tres hojas y tienen p. a. r. de segundo orden sobre los puntos: 1) $z=a, z=\infty$; 2) $z=a, z=b, z=\infty$; 3) $z=a, z=b, z=c$; 4) $z=a, z=b, z=c$ y $z=\infty$, si n es impar. Para construir las superficies tomamos tres hojas del

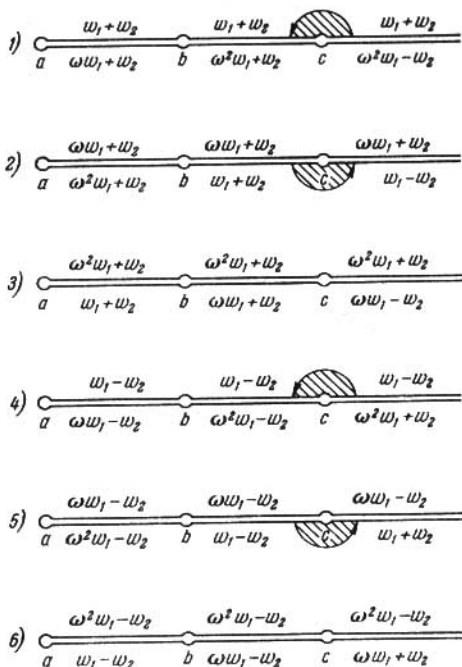


FIG. 82

y $z=\infty$, si n no es múltiple de 3. Para construir las superficies tomamos tres hojas del z —plano con cortes, que van de los puntos indicados al ∞ , y definimos sobre las mismas tres ramas uniformes $w, \omega w, \omega^2 w$ ($\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$). Al recorrer

los puntos de ramificación la función $w(z)$ adquiere el factor ω a cuenta de uno de los factores subradicales y por eso el orden de pegadura de las hojas a lo largo de todos los cortes es el mismo, el cíclico (véase el esquema de la figura 81). 1155. La superficie de Riemann para $w(z)$ es de n hojas con p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z=a$, $z=b$, $z=c$, $z=\infty$. La superficie se obtiene pegando n hojas del z -plano con cortes que van de los puntos $z=a$, $z=b$, $z=c$ al ∞ . La pegadura es cíclica y simultánea a lo largo de todos los cortes. Las hojas corresponden a las ramas uniformes de la función $\omega^k w$ ($\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $k=0, 1, \dots, n-1$). 1156. La superficie de Riemann para $w(z)$ es de seis hojas con un p. a. r. de

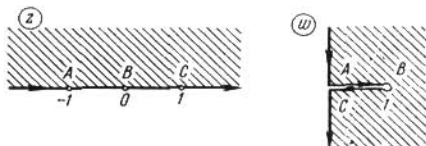


FIG. 83

quinto orden sobre $z=\infty$, con dos p. a. r. de segundo orden sobre cada uno de los puntos $z=a$ y $z=b$ y con tres p. a. r. de primer orden sobre $z=c$. La superficie se obtiene pegando seis hojas del z -plano con un corte a lo largo de la curva que une a y b , b y c , c y el ∞ . Estas hojas corresponden a las ramas uniformes $w_1 + w_2$, $\omega w_1 + w_2$, $\omega^2 w_1 + w_2$, $w_1 - w_2$, $\omega w_1 - w_2$, $\omega^2 w_1 - w_2$, donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y w_1 y w_2 son las ramas uniformes de $\sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-b)^2}}$ y de $\sqrt{z-c}$. Al recorrerse el punto a se unen cíclicamente las hojas 1, 2, 3 y 4, 5, 6, al recorrerse el punto b , las hojas 1, 3, 2 y 4, 6, 5 (la unión es doble a lo largo de las semihojas), al recorrerse el punto c , las semihojas 1, 2, 4, 5 (se indica en la

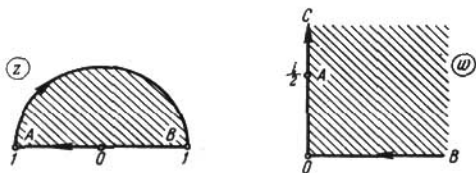


FIG. 84

fig. 82); 2, 3, 5, 6; 3, 1, 6, 4, y al recorrerse el punto ∞ , cíclicamente las hojas 1, 6, 2; 4, 3, 5 (véase el esquema de la fig. 82). 1157. La superficie de Riemann para $w(z)$ es de seis hojas con dos p. a. r. de segundo orden sobre $z=0$, con un p. a. r. de primer orden sobre $z=1$ y con un p. a. r. de quinto orden sobre $z=\infty$. Para construirla hay que pegar dos ejemplares de la superficie para la función $\sqrt[3]{z}$, cada uno de los cuales tiene en una de las hojas un corte a lo largo del rayo $y=0$, $1 < x < \infty$. 1158. La superficie de Riemann para $w(z)$ es de dos hojas con p. a. r. de primer orden sobre los puntos $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); sobre $z=\infty$ la superficie tiene una singularidad trascendente que es el límite de los p. a. r. Para construir la superficie tomamos dos hojas del z -plano con cortes que van de los p. a. r. al ∞ (a lo largo, por ejemplo, de los rayos paralelos al eje imaginario) y pegamos las hojas a lo

largo de los cortes idénticos. 1159¹⁾. F_z y F_w se obtienen cada una pegando dos planos con cortes $[-1, 1]$ (fig. 83). 1160. F_z se obtiene pegando dos z -planos con cortes $-\infty < x \leq 0, y=0$ y F_w se obtiene pegando dos w -planos con cortes $[-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}]$ (fig. 84). 1161. F_z y F_w se obtienen cada una pegando tres planos con cortes en orden cíclico a lo largo de dos de los segmentos

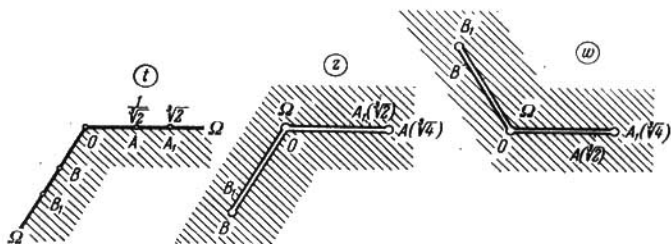


FIG. 85

$[0, \sqrt[3]{4}]$, $[0, \omega \sqrt[3]{4}]$, $[0, \omega^2 \sqrt[3]{4}]$, donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ (fig. 85). 1162. F_z se obtiene pegando dos z -planos con cortes $[0, \frac{3}{2}]$ y F_w se obtiene pegando al w -plano con cortes $\gamma_1: [i \frac{3\sqrt{3}}{2}, +i\infty]$, $\gamma_2: [-i \frac{3\sqrt{3}}{2}, -i\infty]$ otros dos w -planos con cortes γ_1 y γ_2 respectivamente (fig. 86). 1163. F_z se obtiene

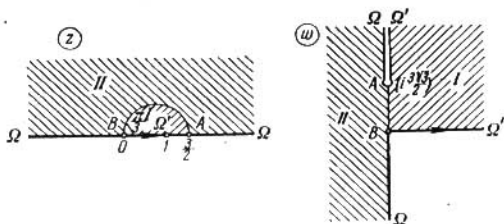


FIG. 86

pegando dos z -planos con cortes $[-1, 1]$ y F_w se obtiene pegando tres w -planos que tienen, respectivamente, un corte $[-ib, ib]$, dos cortes $[-a, a]$ y $[0, ib]$ y dos cortes $[-a, a]$ y $[0, -ib]$, donde $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sqrt{\sqrt{5}-2}$, $b = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sqrt{\sqrt{5}+2}$. La transformación y los tres w -planos con los cortes

¹⁾ En las respuestas a los problemas 1159—1164 mediante F_w se denota la superficie para $z(w)$, es decir, la superficie sobre el w -plano, y mediante F_z la superficie para la función $w(z)$ sobre el z -plano.

se indican en la figura 87. (la figura no corresponde a la escala). 1164. a) n es impar. F_z es de n hojas y tiene n p. a. r. de orden $n-1$ sobre los puntos $z = \omega^k$ ($\omega = e^{\frac{\pi i}{n}}$, $k = 1, 2, \dots, n$); F_w es de $2n$ hojas y tiene n^2 p. a. r. de primer orden: n sobre los puntos $w = \eta^v \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ ($\eta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $v = 0, 1, 2, \dots, n-1$),

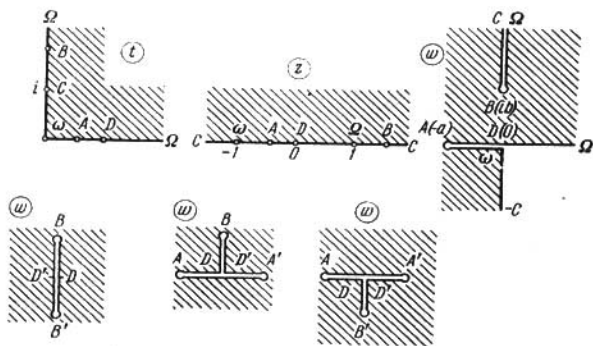


FIG. 87

correspondientes a los puntos de F_z sobre $z = \eta^v$, y n p. a. r. de primer orden sobre $w = \infty$, correspondientes a los p. a. r. de F_z sobre $z = \omega^k$. La transformación se indica en la fig. 88 (para el estudio se ha empleado la sustitución $\zeta = z^n$, $W = w^n$). La función $w(z)$ transforma el círculo $|z| < 1$ en el w -plano con n cortes radiales que salen de los puntos $\eta^v \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$. b) n es par. Si $n = 2m$,

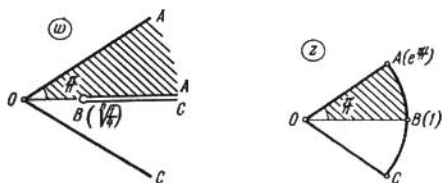


FIG. 88

$w(z)$ se descompone en dos funciones: $w_{1,2}^m = \pm \frac{z^m}{1+z^{2m}}$. Para construir F_z tomamos n "semihojas" $|z| < 1$ y n "semihojas" $|z| > 1$. Denotémoslas mediante H_k^0 y H_k^+ respectivamente y denotemos mediante γ_k los arcos frontera definidos por los puntos ω^k . A H_k^+ pegamos a lo largo de γ_k las semihojas H_{k+1}^0 , a lo largo de γ_{k+1} las semihojas H_{k+2}^0 , a lo largo de γ_{k+2} las semihojas H_{k+3}^0 , etc., cíclicamente. Con esto queda determinado también el orden de pegadura de F_w , com-

puesta de $2n$ hojas que representan w -planos con n cortes radiales indicados más

arriba. 1165. $w = z^{\frac{2}{3}}$, $z=0$ y $z=\infty$ son p. a. r. de segundo orden.

1166. $w = z^{\frac{n_1}{m_1}}$ ($\frac{n_1}{m_1}$ es la fracción irreducible igual a $\frac{n}{m}$), $z=0$ y $z=\infty$ son p. a. r. de orden $m_1 - 1$. 1167. $z=0$ y $z=\infty$ son p. a. r. de primer orden; $z=1$ es un punto singular esencial para una de las dos ramas de la función.

1168. $w = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots$ es una función entera; $z=\infty$ es un punto singular esencial. 1169. $z=0$ y $z=\infty$ son p. a. r. de primer orden; $z=1$ es un punto singular esencial para una de las dos ramas de la función y es el punto de acumulación de sus polos de primer orden en los puntos

$z_k = \left(\frac{1 - a_k}{1 + a_k}\right)^2$, $a_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k=0, \pm 1, \dots$). Según el problema 618, el recinto de indeterminación en el punto $z=1$ coincide con todo el plano. 1170. Si $n=0$, los puntos $z=0$ y $z=\infty$ son puntos singulares evitables y $w=1$; si $n < 0$, los puntos $z=0$ y $z=\infty$ son p. l. r., con la particularidad de que $\lim_{z \rightarrow 0} w = \lim_{z \rightarrow \infty} w = 1$, y $z=1$ es un punto singular esencial para una de las ramas

de la función; si $n=1$, se tiene $w=z$; si $n > 1$, los puntos $z=0$ y $z=\infty$ son p. l. r. y el recinto de indeterminación de $w(z)$ en estos puntos coincide con el w -plano ampliado. 1171 y 1172. $z=0$ y $z=\infty$ son p. l. r. y en ellos el recinto de indeterminación de $w(z)$ coincide con el w -plano ampliado. 1173. $z=1$ y $z=\infty$ son p. l. r., con la particularidad de que $\lim_{z \rightarrow 1} w = \lim_{z \rightarrow \infty} w = \infty$, y $z=0$ es

un polo de primer orden para todas las ramas de $w(z)$, a excepción de una. 1174. $z=0$ y $z=\infty$ son p. l. r. y $\lim_{z \rightarrow 0} w = \lim_{z \rightarrow \infty} w = \infty$. 1175. Los puntos de

ramificación son los mismos que tiene el $\text{Arcsen } z$ (es decir, un conjunto infinito de p. a. r. de primer orden sobre $z = \pm 1$ y dos p. l. r. sobre $z = \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} w = 0$;

$z=0$ es un polo de primer orden para todas las ramas, a excepción de una). 1176. $z = \pm i$ son p. l. r. y $\lim_{z \rightarrow \pm i} w = \infty$; $z=0$ es un polo de segundo orden para

todas las ramas de la función. 1177. Las superficies $w(z)$ y $z(w)$ son las mismas que tiene la función logarítmica (con p. l. r. sobre 0 y el ∞). La transformación se obtiene fácilmente empleando la representación paramétrica $z = e^t$, $w = e^{at}$.

1178. La superficie de Riemann para $w(z)$ es de infinitas hojas con un p. l. r. sobre cada uno de los puntos $z=a$, y $z=b$ y con dos p. l. r. sobre $z=\infty$. La superficie se obtiene pegando un número infinito de hojas del z -plano con cortes que van de los puntos $z=a$ y $z=b$ al ∞ . Estas hojas corresponden a las ramas uniformes de la función $w + 2\pi i n$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Al recorrer los puntos $z=a$ y $z=b$ estas ramas se transforman sucesivamente una en otra, con lo que queda determinado el carácter de pegadura de las hojas.

1179. La superficie de Riemann para $w(z)$ es de infinitas hojas con un p. l. r. sobre cada uno de los puntos $z=a$, $z=b$, $z=c$ y con tres p. l. r. sobre $z=\infty$. La construcción es análoga a la anterior.

1180. La superficie de Riemann para $w(z)$ es de infinitas hojas con un p. l. r. sobre cada uno de los puntos $z = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). A título de hojas se pueden tomar z -planos con cortes que van de los puntos $z = k\pi$ al ∞ (a lo largo, por ejemplo, de las semirectas verticales). Dos hojas se pegan simultáneamente a lo largo de todos los cortes, por un lado, igual que al construir la superficie de la función logarítmica. En el ∞ se tiene una singularidad trascendental que es el límite de los p. l. r.

1181. 1) $w(z)$ representa una función analítica única en cada parte conexa de la superficie de Riemann de la función $\zeta = \varphi(z)$ sobre el z -plano, a la que corresponde una parte conexa de la superficie de Riemann de la función inversa $z = \varphi^{-1}(\zeta)$ sobre G_ζ ; 2) $w(z)$ representa una función analítica única en cada parte conexa de la superficie de Riemann de la función $\zeta = \varphi(z)$ situada sobre

G_x (es decir, sobre el recinto G_c trasladado al z -plano); 3) lo mismo que en el punto 2). En el caso particular, indicado en la condición del problema, $w(z)$ representa siempre una función analítica única. 1182. $w(z)$ se compone de dos funciones analíticas $\pm z$. 1183. $w(z)$ se compone de dos funciones analíticas

$\pm z^{\frac{2}{3}}$. 1184. $w(z)$ se compone de p funciones analíticas $\omega^k z^{\frac{m_1}{p}}$ ($\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, $p = \text{m. c. d.}(m_1, n)$; $k=0, 1, \dots, p-1$; $m_1 = \frac{m}{p}$, $n_1 = \frac{n}{p}$). 1185. $w(z)$ se

compone de n funciones enteras $\omega^k e^{\frac{z}{n}}$ ($\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $k=0, 1, \dots, n-1$).

1186. $w(z)$ es una función n -valente con p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$). En el ∞ tiene un punto singular no aislado que es el límite de los p. a. r. 1187. $w = n \operatorname{Ln} z + 2\pi i k$ ($k=0, 1, \dots, n-1$); hay n diferentes funciones analíticas. 1188. $w(z)$ se compone de las funciones $z + 2\pi i k$ ($k=0, \pm 1, \dots$).

1189. Una función infinitamente valente con p. l. r. sobre $z=0, \pm 1, \infty$. 1190. $w(z)$ es una función analítica infinitamente valente con un p. l. r. sobre $z_k = 2\pi i k$ ($k=0, \pm 1, \dots$). En el ∞ tiene una singularidad no aislada, que es límite de los p. l. r. La superficie de Riemann de la función $w(z)$ es simplemente conexa y se obtiene pegando un número infinito de hojas del w -plano con cortes (sin puntos comunes dos a dos) que van de los puntos z_k al ∞ (dos hojas se pegan a la vez lo largo de todos los cortes, pero por un lado determinado de los mismos). 1191. La superficie de Riemann es la misma que en el problema 1190, sólo con p. l. r. sobre $z = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$).

1192. La superficie de Riemann es la misma que en el problema 1190, sólo con p. l. r. sobre $z = \frac{\pi k}{2}$ ($k=0, \pm 1, \dots$). 1193. $w(z)$ se compone de las funciones

$\pm z + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$). 1194. $w(z)$ se compone de las funciones $z + k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$). 1195. 1) Sean $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $r = r_1 r_2 = \frac{m}{n}$ fracciones irreducibles y sean $p = \text{m. c. d.}(m_1, n_2)$ y $q = \text{m. c. d.}(m_2, n_1)$. En estas condiciones, $(z^{r_1})^{r_2}$ se compone de p diferentes funciones analíticas n -valentes, iguales a $\omega^k z^r$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $k=0, 1, \dots, p-1$, mientras que $(z^{r_2})^{r_1}$ se compone de q

funciones $\omega_1^{k_1} z^r$, $\omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{q}}$, $k_1=0, 1, \dots, q-1$. Una de ellas, a saber z^r ,

siempre pertenece a ambos casos. En particular, $\left(z^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \pm z$, $\left(z^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{z}$.

2) Sean $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $r = r_1 + r_2 = \frac{m}{n}$ fracciones irreducibles y sea $p = \text{m. c. d.}(n_1, n_2)$. En estas condiciones, $z^{r_1} z^{r_2}$ se compone de p diferentes funciones ana-

líticas n -valentes, iguales a $\omega^k z^r$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, donde $p_1 = \text{m. c. d.}(m_1 n_2 + m_2 n_1, p)$,

$n_1' = \frac{n_1}{p}$, $n_2' = \frac{n_2}{p}$, $k=0, 1, \dots, p_1-1$. 3) Sea $p = \text{m. c. d.}(n_1, n_2)$ y sea

$N = \text{m. c. m.}(n_1, n_2) = \frac{n_1 n_2}{p}$. En estas condiciones, $w(z)$ se compone de p diferentes funciones analíticas N -valentes. 1196. Sean $N = \text{m. c. m.}(m, n)$, $p = \text{m. c. d.}(m, n)$, $q = \text{m. c. d.}\left(\frac{m+n}{p}, \frac{mn}{p}\right)$ y sea $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{\mu}{q}$. En estas condiciones,

$w(z)$ es una función analítica N -valente única que tiene $\frac{N}{n}$ p. a. r. de orden

$n-1$ sobre $z=0$, $\frac{N}{m}$ p. a. r. de orden $m-1$ sobre $z=1$ y $\frac{N}{q}$ p. a. r. de orden

$v-1$ sobre $z=\infty$. 1197. Una función analítica nm -valente que tiene un p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z=1$, n p. a. r. de orden $m-1$ sobre $z=0$ y un p. a. r. de orden $nm-1$ sobre $z=\infty$. 1198. Dos distintas funciones cuadrivalentes que se diferencian por su signo y que tienen la misma superficie de Riemann que la función $\sqrt[4]{z}$. Cada una de estas funciones tiene una rama para la cual el punto $z=1$ es un polo de primer orden. 1199. Una función infinitamente valente con un p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z=1$ y con n p. l. r. sobre cada uno de los puntos $z=0$ y $z=\infty$. Para construir la superficie es preciso pegar n superficies de $\text{Ln } z$ con el corte $[1, \infty)$ en una de las hojas de cada una de ellas.

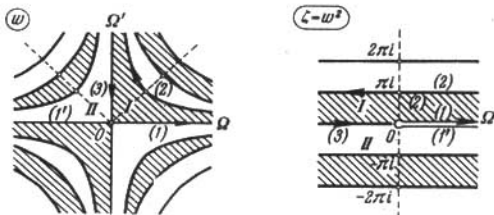


FIG. 89

Las curvas ρ^n sen $n\theta = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) dividen el w -plano en recintos correspondientes a los semiplanos $y \leq 0$ (en la fig. 89 se representa el caso $n=2$; $\zeta=w^2$ es un plano auxiliar). 1200. Una función infinitamente valente con un p. l. r. sobre $z=1$ y con un infinito número de solamente p. l. r. sobre $z=0$ y $z=\infty$. La superficie de Riemann se obtiene pegando un número infinito de superficies de $\text{Ln } z$ con el corte $[1, \infty)$ en una de las hojas. La superficie tiene sobre $z=0$ y $z=\infty$ sólo p. l. r., en cantidad infinita, y sobre $z=1$ tiene puntos singulares y un p. l. r. Las curvas e^{u^2} sen $v = (2k+1)\pi$ y $v = 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

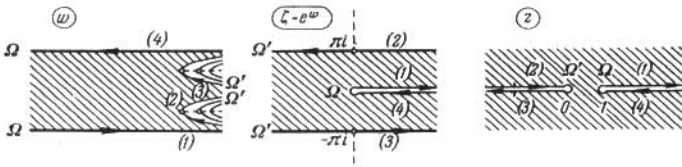


FIG. 90

dividen el w -plano en recintos, correspondientes cada uno al z -plano con el corte $-\infty < x \leq 0, y=0$ y con el corte adicional $1 \leq x < \infty, y=0$ para los recintos que comprenden en sus fronteras las rectas $v=2k\pi$ (fig. 90; $\zeta=e^w$ es un plano auxiliar). 1201. Una función infinitamente valente con la misma superficie de Riemann que $\text{Ln } \text{Ln } z$. 1202. La superficie de Riemann es de infinitas hojas, tiene un p. a. r. de orden $n-1$ sobre $z=0$, sólo p. a. r. de primer orden sobre $z=+1$ y $2n$ p. l. r. sobre $z=\infty$. Para construir la superficie hay que pegar n superficies para $\text{Arcsen } z$ con el corte $[0, 1]$ en una de las hojas de cada una de ellas. Las curvas $n\theta = \frac{k\pi}{n}$ y ρ^n cos $n\theta$ ($k=0, \pm 1, \dots$) dividen el w -plano en recintos correspondientes a los semiplanos $y \leq 0$ (fig. 91, donde $n=2$ y $\zeta=w^2$ es un plano auxiliar). 1203. La superficie de Riemann se obtiene pegando un número infi-

nito de superficies de $\text{Ln } z$ con los cortes $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ y $[e, \infty)$ en una de las hojas (las superficies de $\text{Ln } z$ se pegan dos a dos alternadamente a lo largo de uno y de otro de estos cortes). La superficie tiene sobre $z=0$ y $z=\infty$ un conjunto infinito de p. l. r. y sobre $z=\frac{1}{e}$ y $z=e$ tiene puntos singulares y una cantidad

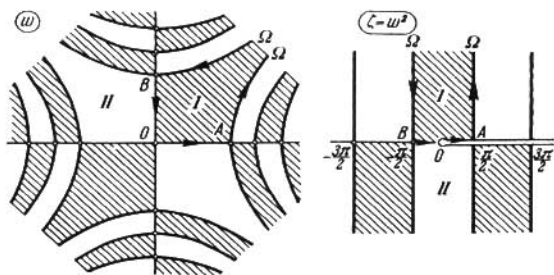


FIG. 91

infinita de p. a. r. de primer orden. Las curvas $\text{Im } \text{sen } w = \cos u \text{ sh } v = (2k+1)\pi$ y $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) dividen el w -plano en recintos, correspondientes cada uno al z -plano con el corte $-\infty < x < 0, y=0$ y con dos cortes adicionales $0 \leq x \leq \frac{1}{e}, y=0$ y $e \leq x < \infty, y=0$ en el caso de los recintos, entre cuyas fronteras están comprendidas las rectas $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (fig. 92; $\zeta = \text{sen } w$ es un plano auxiliar). 1204. Una función infinitamente valente. Su superficie

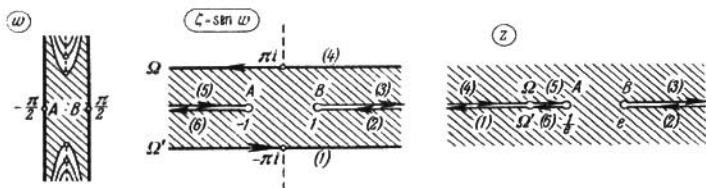


FIG. 92

de Riemann se obtiene pegando un número infinito de ejemplares de la superficie de Riemann para la función $\sqrt[n]{z-1}$, provistos del corte a lo largo del rayo $1 \leq x < \infty, y=0$ en una de las hojas. La pegadura se realiza igual que al construir la superficie de Riemann de la función logarítmica. 1205. Una función infinitamente valente que tiene sólo p. a. r. de primer orden sobre $z=0$ y $z=\infty$ y dos p. l. r. sobre $z=1$. 1206. Una función infinitamente valente con dos p. l. r. sobre $z=-1$ y con un número infinito de solamente p. a. r. de

primer orden sobre $z=0$ y $z=\infty$. 1207. Si $\alpha = \frac{m}{n}$, se tiene $w = \frac{m}{n} \text{Ln } z + \frac{2\pi i}{n} k$ ($k=0, 1, \dots, m-1$), es decir, m diferentes funciones analíticas; si α

es irracional, se tiene $w = \alpha \text{Ln } z + 2\pi i k$ ($k=0, \pm 1, \dots$), es decir, un número infinito de diferentes funciones. 1208. Dos distintas funciones analíticas infinitamente valentes con la misma superficie de Riemann que la de $\text{Ln } z$.

1209. Dos distintas funciones analíticas iguales, respectivamente, a $2 \text{Ln } z$ y a $2 \text{Ln}(-z)$. 1210. $w = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k=0, \pm 1, \dots$, $w = \frac{\pi}{2} + 2 \text{Arccos } z$; $w = -\frac{3\pi}{2} + 2 \text{Arccos } z$.

1211. $w = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k=0, \pm 1, \dots$). 1212. $w = i \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right)$

($k=0, \pm 1, \dots$). 1213. w es una función infinitamente valente con la misma superficie de Riemann que la de $\text{Ln } \text{Ln } z$ (véase al problema 1200). Si $\zeta = \rho e^{i\theta} = \text{Ln } z = \ln r + i\varphi$ ($\varphi = \text{Arg } z$), se tiene $w = e^{i \text{Ln } \zeta} = e^{i(\ln \rho + i\theta + 2\pi ik)}$. Para $f_0(z) = e^{-\theta + i \ln \rho}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) los conjuntos de valores frontera, indicados en el problema, representan, respectivamente: 1) y 2) la circunferencia $|w| = e^{-\pi}$; 3) las

circunferencias $|w| = e^{-\frac{\pi}{2}}$ para $\varphi \rightarrow +\infty$ y $|w| = e^{-\frac{3\pi}{2}}$ para $\varphi \rightarrow -\infty$; 4) el

anillo $e^{-\frac{3\pi}{2}} < |w| < e^{-\frac{\pi}{2}}$. Para los demás grupos de ramas se debe agregar el factor $e^{-2\pi k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). 1214. Si $|a| < 1$, $w(z)$ representa en todos los problemas una función analítica; si $|a| \geq 1$, la función se descompone en n de diferentes funciones analíticas en los puntos 1) y 3) y en un número infinito de ellas en los puntos 2) y 4).

1215. Si $|a| < 1$, $w(z)$ representa en ambos casos una función analítica; si $|a| \geq 1$, habría n de diferentes funciones analíticas en el punto 1) e infinita cantidad de ellas en el punto 2).

1216. 1) Sean $z = r e^{i\varphi}$ y $\zeta = \rho e^{i\theta} = \text{Ln } z$. En estas condiciones, $w(z)$ se compone de funciones analíticas multivalentes iguales, respectivamente, a $\chi(z) e^{i \ln \rho - \theta + 2\pi k}$ ($|z| < 1$; $\rho = \sqrt{\ln^2 r + \varphi^2}$, $\theta = \arg(\ln r + i\varphi)$, con la particularidad de que $-\infty < \varphi < \infty$ y $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$; ($k=0, \pm 1, \dots$). Todas ellas tienen un p. l. r. sobre $z=0$ y en

una vecindad de este punto el recinto de indeterminación es un anillo (en particular,

el anillo $\chi(0) e^{-\frac{3\pi}{2}} < |w| < \chi(0) e^{-\frac{\pi}{2}}$ para $k=0$). 2) Sean $z-1 = r e^{i\varphi}$ y $\zeta = \rho e^{i\theta} = \text{Ln}(z-1)$. En estas condiciones, $w(z)$ se compone de funciones analíticas uniformes iguales, respectivamente, a $\chi(z) e^{i \ln \rho - \theta + 2\pi k}$ ($|z| < 1$;

$\rho = \sqrt{\ln^2 r + (\varphi + 2\pi n)^2}$, $\theta = \arg[\ln r + i(\varphi + 2\pi n)]$, con la particularidad de que $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, $0 < \theta < 2\pi$; ($k, n=0, \pm 1, \dots$). Para diferentes k y n resultan distintas funciones analíticas. Si existe $\chi(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \chi(z)$, el recinto de indeterminación para $z \rightarrow 1$ es una circunferencia (en particular, la circunferencia

$|w| = \chi(1) e^{-\pi}$, si $k=n=0$). 1217. 1) Si $f(z)$ no tiene ceros de orden impar, $\sqrt{f(z)}$ se descompone en dos funciones enteras. Si a_1, a_2, \dots son los ceros de orden impar de la función $f(z)$, la superficie de Riemann para $\sqrt{f(z)}$ es de dos hojas con p. a. r. sobre a_1, a_2, \dots y sobre el ∞ , si $f(z)$ tiene allí un polo de orden impar. Si $f(z)$ es una función trascendente, sobre $z=\infty$ hay dos puntos singulares esenciales de carácter uniforme, cuando $f(z)$ tiene un número par de ceros de orden impar, y un punto singular esencial de carácter bivalente, cuando el número de estos ceros es impar o infinito. 2) Si la función $f(z)$ tiene ceros a_1, a_2, \dots , la superficie de Riemann para $\text{Ln } f(z)$ tiene sobre a_1, a_2 un p. l. r. y ningún otro punto. Si $f(z)$ no tiene ceros, $\text{Ln } f(z)$ se descompone en un número infinito de funciones enteras que difieren una de la otra en sumandos de

tipo $2\pi ki$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 3) Si $f(z)$ tiene ceros, la superficie de Riemann para $|f(z)|^n$ es la misma que para $\text{Ln } f(z)$ (véase el punto 2). Si $f(z)$ no tiene ceros, $|f(z)|^n$ se descompone en un número infinito de funciones enteras que difieren una de la otra en factores de tipo $e^{2\pi k a i}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1218. El círculo $|z| < 1$ de dos hojas con p. a. r. en los ceros de la función $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ y, en particular, en el punto $z=0$. 1219. 1) El círculo $|z| < 1$ de dos hojas con un único punto de ramificación para $z=0$ (parte de la superficie de Riemann para \sqrt{z} , situada sobre el círculo $|z| < 1$); 2) parte de la superficie de Riemann para la función $\text{Ln } z$, situada sobre el círculo $|z| < 1$; 3) parte de la superficie de Riemann para la función $\text{Ln } z$, situada sobre el anillo $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

Capítulo IX

1222. 1) En el vértice A_3 se tiene $\alpha_3=0$; 2) en los vértices A_1 y A_2 se tiene $\alpha_1=\alpha_2=0$; 3) en el vértice A_3 se tiene $\alpha_3=0$; 4) en los vértices A_3 y A_4 se tiene $\alpha_3=\alpha_4=-1$; 5) en el vértice A_2 se tiene $\alpha_2=-2$ y en el vértice A_4 , $\alpha_4=0$; 6) en los vértices A_2 , A_3 y A_4 se tiene $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$; 7) en el vértice A_2 , se tiene $\alpha_2=-2$ y en los vértices A_4 y A_6 , $\alpha_4=\alpha_6=0$; 8) en el vértice A_2 se tiene $\alpha_2=-2$ y en el vértice A_4 , $\alpha_4=\alpha_6-2$. 1224. Es necesario y

suficiente que $\alpha_k = \frac{1}{n_k}$ (n_k son números naturales o el ∞) y que $\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n_k}\right) = 2$

lo cual es posible sólo para $n=4$, siendo $n_1=n_2=n_3=n_4=2$ (es decir, para el rectángulo), y para $n=3$;

n_1	n_2	n_3	P
1	∞	∞	Una franja
2	2	-	Una semifranja
2	3	6	Un triángulo rectángulo
2	4	4	Un triángulo isósceles rectángulo
3	3	3	Un triángulo equilátero

1225. 1) $w = \frac{h}{\pi} \ln z + a$, $z = e^{\frac{\pi(w-a)}{h}}$ (a es un parámetro real); $z(w)$ es una función periódica de período $\omega = 2hi$; el grupo G es generado por la transformación $T(w) = w + \omega$; su recinto fundamental B se compone de la franja duplicada y de uno de sus lados frontera; 2) $w = \frac{h}{\pi} \ln \frac{1+z}{1-z} + a$, $z = \text{th} \frac{\pi(w-a)}{2h}$ (a es un parámetro real); $z(w)$ es una función periódica de período $\omega = 2hi$; el grupo G y su recinto fundamental B son los mismos que en el punto 1. 1226. $w = \arcsen z$, $z = \text{sen } w$; $z(w)$ es una función periódica de período $\omega = 2\pi$; el grupo G es generado por las transformaciones $T(w) = w + \omega$ y $S(w) = -w$; su recinto fundamental B consta de la franja $0 < u < \pi$ y de las semirectas frontera $u=0$, $u=\pi$,

$v \leq 0$. 1227¹⁾. 1) $w = C \int_0^z z^{-\frac{5}{6}} (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz$, donde $C = \frac{\omega}{B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)}$ ($B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ es la integral de Euler de primera especie); $z(w)$ es una

función doblemente periódica de períodos 2ω y $2\omega e^{\frac{2\pi i}{3}}$; el grupo G es generado

por las transformaciones $T(w) = w + 2\omega$ y $S(w) = \omega e^{\frac{2\pi i}{3}}$; su recinto fundamental B consta de un triángulo duplicado y de dos lados frontera distintos; 2) $w =$

$C \int_0^z z^{-\frac{3}{4}} (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz$, donde $C = \frac{\omega}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}$; $z(w)$ es una función doblemente

periódica de períodos 2ω y $2\omega i$; el grupo G es generado por las transformaciones $T(w) = w + 2\omega$ y $S(w) = iw$; su recinto fundamental B consta del cuadrado de lado ω y de dos lados frontera de uno de los triángulos que componen el cua-

drado; 3) $w = C \int_0^z z^{-\frac{2}{3}} (1-z)^{-\frac{2}{3}} dz$, donde $C = \frac{\omega}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$; $z(w)$ es una fun-

ción doblemente periódica de períodos $2hi$ y $2he^{\frac{\pi i}{6}}$, donde $h = \frac{\omega \sqrt{3}}{2}$; el grupo G

es generado por las transformaciones $T(w) = w + 2hi$ y $S(w) = \omega e^{\frac{\pi i}{6}}$; su recinto fundamental B consta del triángulo duplicado y de dos distintos lados frontera. 1228. El "triángulo" con dos vértices en los puntos $w=0$, $w=d=B(\alpha, \beta)$ y de ángulos $\pi\alpha$, $\pi\beta$ en estos vértices. Si $\alpha + \beta < 1$, el tercer vértice es finito; si $\alpha + \beta \geq 1$, el tercer vértice es encuentra en el infinito; si $\alpha + \beta = 1$, se tiene

$d = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \alpha \pi}$ y el "triángulo" toma la forma de una franja oblicua si $\alpha \neq \beta$; en el caso en que $\alpha + \beta = 2$, los lados del "triángulo" que parten de los vértices de la base son paralelos, están orientados en direcciones contrarias y $d = \frac{\pi(\alpha-1)}{\operatorname{sen} \pi(\alpha-1)}$;

si $\alpha = \beta = \frac{3}{2}$, el "triángulo" representa el exterior de una franja recta (fig. 93).

2) El "triángulo" con un vértice finito en el punto $w=0$, de ángulo $\pi\alpha$, y con dos vértices en el ∞ . Dos lados del "triángulo" representan rayos, que parten del origen, y el tercer lado es una recta, cuya distancia hasta el origen de coordenadas es igual a $h = \frac{\operatorname{sen} \pi\beta \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta+1)}{\beta \Gamma(\alpha+\beta)}$. (Acerca de cálculo de la magnitud h ,

véase el libro de W. Koppenfels y F. Stallmann, N.º 13.2, indicado en la pág. 158). En el caso, en que $\alpha = 1$, se obtiene una franja de anchura π ; en el caso, en que $\alpha + \beta = 1$, dos lados son paralelos y $h = \pi$; en el caso, en que $\alpha = 2$, se obtiene un semiplano con un corte a lo largo del semieje real positivo y $h = \frac{\operatorname{sen} \pi\beta}{\beta(\beta+1)}$, en particular, $h = 4$, si $\beta = -\frac{1}{2}$, y $h = \pi$, si $\beta = -1$ (véase la

fig. 93). 1229. 1) Véase la fig. 94, 1; $w_1 = w(1) = -i\pi\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)$; $w_\lambda = \omega(\lambda)$;

¹⁾ Los esquemas de los recintos fundamentales se indican en la fig. 62. de la pág. 230.

- 2) véase la fig. 94, 2; $w_\lambda = w(\lambda)$. 1230. 1) $w = \frac{2}{\pi} [\arcsen \sqrt{z} - (1-2z)\sqrt{z-z^2}]$;
 2) $w = \frac{2}{\pi} [\arcsen \sqrt{z} - \sqrt{z-z^2}]$; 3) $w = \frac{h}{\pi} \left(\ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} - 2\sqrt{z} \right) = \frac{2h}{\pi} (\operatorname{arth} \sqrt{z} - \sqrt{z})$;
 4) $w = \frac{2h}{\pi} (\operatorname{arctg} \sqrt[4]{z} + \operatorname{arth} \sqrt[4]{z} - 2\sqrt[4]{z})$; 5) $w = ia \left(-\sqrt{z} \frac{z-3}{2} - 1 \right)$.
 1231. 1) $w = -\frac{a}{\pi} \int_1^z \frac{dz}{z^{1-\theta} (z-1)^\theta}$. Si $\theta = \frac{p}{q}$, se tiene $w = \frac{a}{\pi} \sum_{v=0}^{q-1} \times$
 $\times \frac{1}{t_v^p} \ln \left(1 - \frac{t}{t_v} \right)$, donde $t = \left(\frac{z-1}{z} \right)^{\frac{1}{q}}$ y $t_v = e^{\frac{2\pi i v}{q}}$ ($v=0, 1, \dots, q-1$).

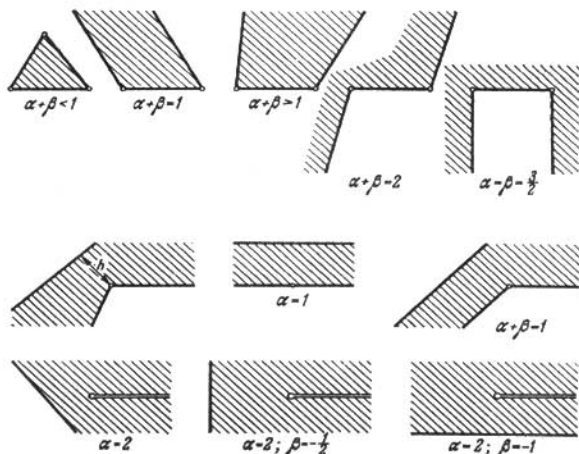


FIG. 93

- 2) $w = \frac{a}{\pi \theta} \int_1^z \left(\frac{z-1}{z} \right)^\theta dz$. Si $\theta = \frac{p}{q}$, se tiene $w = \frac{a}{\pi} \left[-\frac{t^p}{\theta(t^q-1)} + \sum_{v=0}^{q-1} t^p \times \right.$
 $\times \ln \left(1 - \frac{t}{t_v} \right) \left. \right]$, donde t y t_v tienen los mismos valores que en el punto 1).
 1232. $w = \frac{a}{\xi}$, donde $\xi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2t}{1-t^2} + \ln \frac{1-t}{1+t} \right)$, $t = \sqrt{\frac{z-1}{z}}$. 1233. $w = \frac{2h}{\pi} \times$
 $\times \left(\sqrt{z^2-1} + \arcsen \frac{1}{z} \right)$. 1234. $w = \frac{2d}{B\left(\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right)} \int_0^z t^{\alpha-1} (1-t^2)^{-\alpha} dt$.

1235. 1) $w = \frac{2}{\pi} \left(H \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{z}{a-z}} + h \operatorname{arth} \frac{h}{H} \sqrt{\frac{z}{a-z}} \right)$, donde $a = 1 + \frac{h^2}{H^2}$;
 2) $w = \frac{2}{\pi} \left(H \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}} + h \operatorname{arth} \frac{h}{H} \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}} \right)$, donde $a^2 = 1 + \frac{h^2}{H^2}$;
 3) $w = C \int_0^z \frac{\sqrt{t} dt}{(t-1)(t-a)(t+b)}$, donde C , a y b se determinan en las ecuacio-

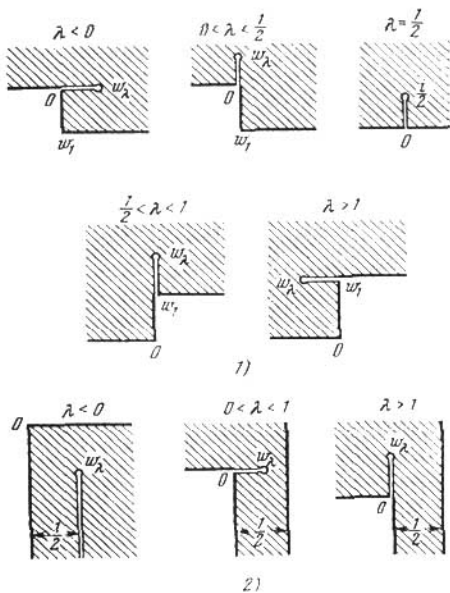


FIG. 94

nes: $\frac{C\pi}{(a-1)(a+b)} = h_1$, $\frac{C\pi\sqrt{a}}{(a-1)(a+b)} = h_2$, $\frac{C\pi\sqrt{b}}{(b+1)(a+b)} = h_3$. 1236. 1) $w =$
 $= \frac{n}{B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right)} \int_0^z (1-t^n)^{-\frac{2}{n}} dt$; 2) $w = C \int_2^1 \frac{(1-t^n)^{\frac{2}{n}}}{t^2} dt + 1$, $c_{-1} = C =$
 $= \frac{2^{-\frac{2}{n}} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{B\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$. 1237. 1) $w = \frac{5 \cdot 2^{\frac{2}{5}}}{B\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right)} \int_0^z (1-t^5)^{-\frac{4}{5}} (1+t^5)^{\frac{2}{5}} dt$; 2) $w =$

$$= C \int_2^1 \frac{(1-t^2)^{\frac{4}{5}} (1+t^2)^{-\frac{2}{5}}}{t^2} dt + 1, \quad c_{-1} = C = \frac{2^{-\frac{2}{5}} \Gamma\left(\frac{7}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right) \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}. \quad 1238. \text{ En una}$$

estrella poligonal de ángulos $\pi - \frac{2\pi}{n} - \lambda\pi$ y $\pi + \lambda\pi$ alternadamente, de centro en el origen de coordenadas y con un vértice del primer tipo de ángulos en

$$\text{el punto } w(1) = \frac{2^{-\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2} - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\pi(1+\lambda)}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}. \quad 1239. \quad w =$$

$$= CC_0 \int_1^z \left\{ z \prod_{k=1}^{m-1} \left(z^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi k}{n} \right) \right\}^{-\frac{2}{n}} dz, \quad \text{si } n=2m, \quad \text{y } w = CC_1 \int_1^z \left\{ z \prod_{k=1}^m \times \right. \\ \left. \times \left(z^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi k}{n} \right) \right\}^{-\frac{2}{n}} dz, \quad \text{si } n=2m+1, \quad \text{donde } C = \frac{n}{B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right)}, \quad C_0 =$$

$$= -2i(2n)^{-\frac{2}{n}} e^{-i\frac{\pi}{n}} \quad \text{y } C_1 = -2i \cdot 2^{-\frac{2}{n}}. \quad 1240. \text{ Los parámetros se determinan, mediante la ecuación (3) para } b_k, \text{ de las igualdades } |f(b_k)| = I_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \text{ y de la dirección de uno de los lados de la estrella. Uno de los valores } a_k \text{ se escoge arbitrariamente. } 1241. \quad w = \frac{C(z-1)^{2\alpha}(z-1)^{2\alpha-2}}{z}, \quad C = \frac{h}{4} \alpha^{-2\alpha}(1-\alpha)^{2\alpha-2}.$$

1243. Los parámetros se determinan de los valores de $\{f(b_i)\}$ y $\{f(d_s)\}$ que se conocen al indicar P y la dirección de uno de los lados de P . Tres parámetros (a_k, b_i, c_j, d_s) se escogen arbitrariamente. Si uno de los parámetros a_k o c_j es igual al ∞ , las relaciones (4) y (5) permanecen válidas si se omite el factor y el sumando correspondiente a este parámetro. Si es igual al ∞ uno de los parámetros b_i o d_s , las relaciones (4) y (5) permanecen sin alterarse.

$$1245. \quad w = C(z+1)^{\alpha_1}(z-1)^{\alpha_2}, \quad C = h(b+1)^{-\alpha_1}(1-b)^{-\alpha_2}, \quad b = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

$$1246. \quad w = C \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{1 - a^2 z^2}}, \quad C = \sqrt{hH}, \quad a = \sqrt{\frac{h}{H}}. \quad 1247. \quad w = Cz^{1-2\alpha}(z^2-1)^\alpha,$$

$$C = hb^{2\alpha-1}(1-b^2)^{-\alpha}, \quad b = \sqrt{1-2\alpha}. \quad 1248. \quad w = \sqrt{hH} \left(\frac{z+a}{1+az}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{z-b}{1-bz}\right)^{\alpha_2},$$

donde a y b se determinan del sistema de ecuaciones $a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} = \sqrt{\frac{h}{H}}$,

$$a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} = \sqrt{\frac{h}{H}}, \quad \alpha_1 \left(\frac{1}{a} - a\right) = \alpha_2 \left(\frac{1}{b} - b\right). \quad 1249. \quad 1) \quad w = [T_n(z)]^{\frac{1}{n}}, \quad \text{donde}$$

$$T_n(z) = \frac{1}{2} [(z + \sqrt{z^2-1})^n + (z - \sqrt{z^2-1})^n] \text{ son los polinomios de Chébysev;}$$

$$2) \quad w = \left[\frac{T'_n(z) \sqrt{z^2-1}}{n} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad 1250. \text{ Los parámetros se determinan de los valores de } \operatorname{Re} f(b_i) \text{ y } \operatorname{Re} f(d_s) \text{ que se conocen al indicar } P \text{ y la dirección de uno de los lados de } P. \text{ Tres parámetros } (a_k, b_i, c_j, d_s) \text{ se escogen arbitrariamente. Si uno de los parámetros } a_k \text{ o } c_j \text{ es igual al } \infty, \text{ las relaciones (6) y (7) permanecen válidas, si se omiten los sumandos correspondientes. Si es igual al } \infty \text{ uno de los parámetros } b_i \text{ o } d_s, \text{ las relaciones (6) y (7) permanecen sin modificaciones}$$

(véase la respuesta al problema 1243). 1251. Los parámetros se determinan de los valores de $\operatorname{Re} f(b_i)$ y $\operatorname{Re} f(d_s)$. Tres de los parámetros a_h, b_l, c_j, d_s se escogen arbitrariamente. En la fórmula (10) se escogen arbitrariamente dos de los parámetros a_h, b_l, c_j, d_s . 1252. Los parámetros se determinan por los valores de $\operatorname{Re} f(b_i)$ y por la posición de uno de los lados de P . Dos parámetros se escogen arbitrariamente. 1253. Los parámetros se determinan por los valores de $\operatorname{Re} f(b_i)$ y $\operatorname{Re} f(d_s)$ y por la posición de uno de los lados de P . Tres parámetros se escogen arbitrariamente. En la fórmula (11) se escogen arbitrariamente dos de los parámetros correspondientes a los vértices. 1254. 1) $w = \frac{h_1}{\pi} \ln(z+1) +$

$$+ \frac{h_2}{\pi} \ln(z-1) + C,$$

$$C = -\frac{h_1}{\pi} \ln(b+1) - \frac{h_2}{\pi} \ln(1-b), \quad b = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}; \quad 2) \quad w = \frac{h_1}{\pi} \ln(z^2 - 1) + \\ + \frac{h_2}{\pi} \ln z + C,$$

$$-C = -\frac{h_1}{\pi} \ln(1-b^2) - \frac{h_2}{\pi} \ln b, \quad b = \sqrt{\frac{h_2}{2h_1 + h_2}}; \quad 3) \quad w = \frac{h_1}{\pi} \ln \frac{z+a_1}{1+a_1z} + \\ + \frac{h_2}{\pi} \ln \frac{z-a_2}{1-a_2z}. \quad \text{Los parámetros } a_1 \text{ y } a_2 \text{ se determinan de las ecuaciones}$$

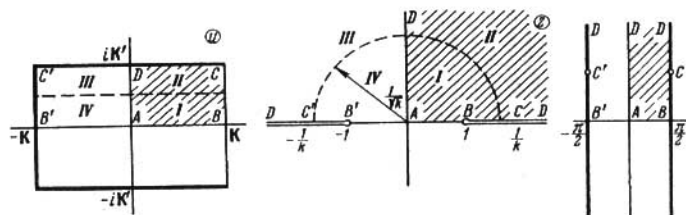


FIG. 95

$a_1^{h_1} a_2^{h_2} = e^{-\pi}$, $h_1 \left(\frac{1}{a_1} - a_1 \right) = h_2 \left(\frac{1}{a_2} - a_2 \right)$; 4) $w = f \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]$, donde $f(z)$ es la transformación del punto 3); 5) $w = \frac{h}{\pi} \ln T_n(z)$, donde $T_n(z)$ son los polinomios de Chebyshev (véase la respuesta al problema 1249); 6) $w = \frac{h}{\pi} [\ln(z-1) + z]$; 7) $w = \ln \frac{z+1}{1-z} + Az$, $A = \frac{2}{b^2-1}$, donde b se determina de la ecuación $\ln \frac{b+1}{b-1} + \frac{2b}{b^2-1} = d$; 8) $w = \ln(z+1) - Az^2 - z + \text{const}$, donde $A = \frac{1}{2a}$ y a se determina de la ecuación $\ln a + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) + d = 0$. En particular, si $d=0$, se tiene $a=1$; 9) $w = \frac{h}{\pi} \ln(z-a) + \frac{C}{z-a} + Az + \text{const}$, donde $A = \frac{h}{2\pi a}$, $C = \frac{h}{2\pi a} (1-a^2)$ y a se determina de la ecuación $\ln \frac{1-a}{1+a} + \frac{2}{a} = \frac{\pi d}{h}$. En particular, si $h=0$, se tiene $a=0$, $A=C = \frac{d}{4}$. 1255. La correspondencia entre los planos u, z , y φ se indica en la fig. 95. Los afijos de los puntos C

y C' en el plano φ son iguales a $\pm \frac{\pi}{2} + i \ln \frac{1+k'}{k}$. Al segmento punteado del plano u le corresponde en el plano z la circunferencia punteada de radio $1/\sqrt{k}$ (véase, por ejemplo, el libro de H. Bateman y A. Erdélyi, p^o. 13.25 mencionado en la pág. 173). 1256. $w = \lambda \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$, $z = \operatorname{sn}\left(\frac{w}{\lambda}, k\right)$, donde λ y k

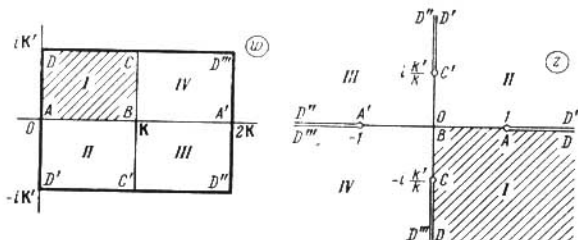


FIG. 96

se determinan de las relaciones $\frac{K'}{K} = \frac{b}{a}$, $a = \lambda K$. 1257. Véase la figura 96. 1258. Véase la figura 97. 1259. La transformación del z -plano en el plano u se indica en la fig. 98 (el v -plano que aparece en esta figura se refiere a la respuesta al problema 1260). 1260. La correspondencia entre los planos z y w se indica en la figura 98. Las expresiones para l y h se dan en la tabla I. (véase la pág. 292).

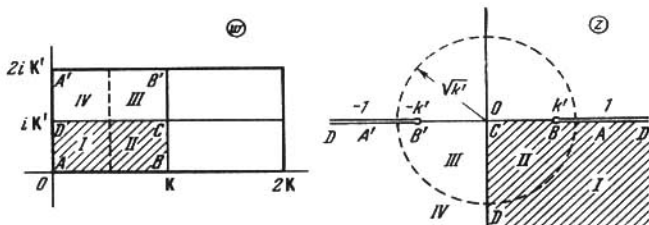


FIG. 97

1261. Solución. Para determinar los parámetros C_1 , k y b tenemos tres ecuaciones: 1) $w(1) = a$, es decir, $C_1 [(k^2b^2 - 1)K + E] = a$, 2) $w(1) = w\left(\frac{1}{k}\right)$, es decir, $(k^2b^2 - 1)K + E = (k^2b^2 - 1)(K + iK') + E + i(K' - E')$ (véase la sugerencia al problema 1260), 3) $w(b) = w(1) = ih$. De la ecuación 2) obtenemos $b = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{E'}{K'}}$. Introduciendo esta expresión en la ecuación 1), encontramos $C_1 \left[\frac{E'K - KK' + EK'}{K'} \right] = a$, es decir, $C_1 = \frac{2aK'}{\pi}$ (véase la fórmula (10) de la pág. 176).

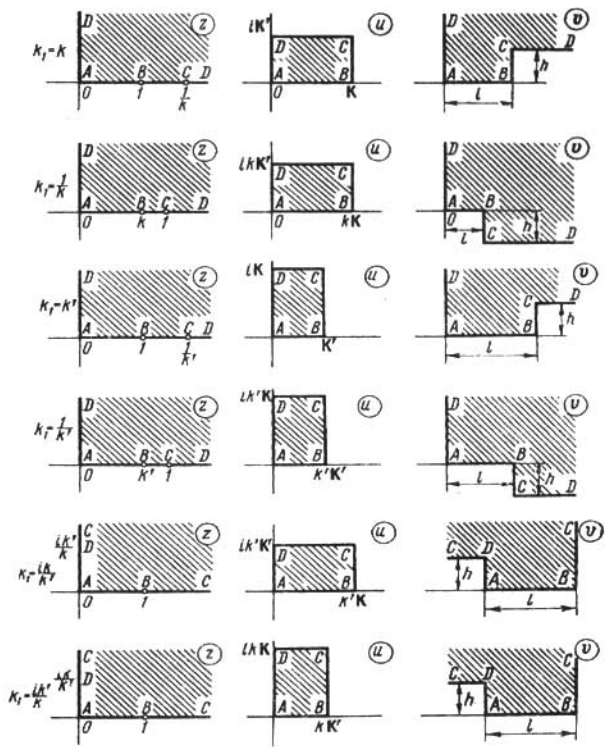


FIG. 98

Tabla I

k_1	i	h
k	E	$K' - E'$
$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k} (E - k'^2 K)$	$\frac{1}{k} (E' - k^2 K')$
k'	E'	$K - E$
$\frac{1}{k'}$	$\frac{1}{k'} (E' - k^2 K')$	$\frac{1}{k'} (E - k'^2 K)$
$\frac{ik}{k'}$	$\frac{1}{k'} E$	$\frac{1}{k'} (K' - E')$
$\frac{ik'}{k}$	$\frac{1}{k} E'$	$\frac{1}{k} (K - E)$

Entonces, para determinar k , obtenemos de 3) la ecuación trascendente $(E' - K')u \left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{E'}{K'}}; k \right) + K'v \left(\frac{1}{k} \sqrt{\frac{E'}{K'}}; k \right) = \frac{\pi}{2} (a + ih)$. Los detalles de la solución y los gráficos para la determinación de los parámetros véanse en el

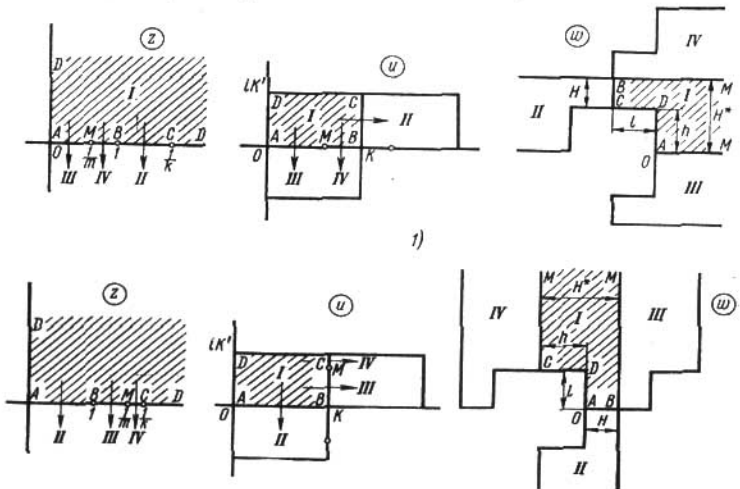


FIG. 99

libro: A. Betz, *Konforme Abbildung*, Berlin, 1948. 1263. Los casos 1), 2), 3) y 4) están representados, respectivamente, en figuras 99 y 100. En todos los casos para poder hacer comparaciones, se da la transformación en u -plano que realiza la integral elíptica normal de primera especie. La prolongación de la

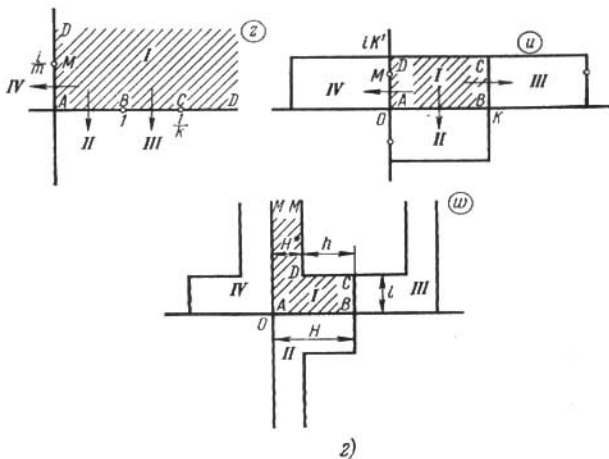
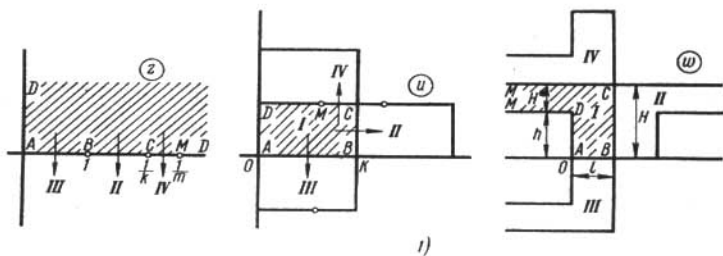


FIG. 100

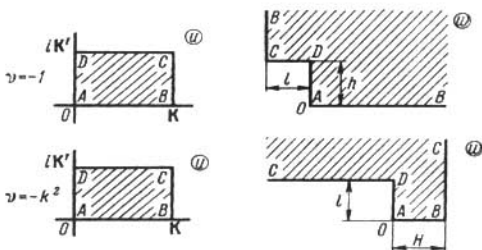


FIG. 101

transformación del primer cuadrante I del z -plano según el principio de simetría lleva en el w -plano a una franja con una cavidad rectangular (véanse los recintos $I+II$ de la figura 99, 1), 2), a una tranja con un saliente rectangular (véanse los recintos $I+II$ de la figura 100, 1), 2), así como a otros recintos (algunos de los cuales se indican en las figuras). Las dimensiones principales H , l , h que aparecen en estos casos véanse en la tabla II. Observemos que, sustituyendo z por $t: k^2 z^2 + k'^2 t^2 = 1$, se puede reducir el segundo caso al primero y el cuarto caso, al tercero; solamente en los casos 2) y 4) aparecen entonces en lugar de v , k las magnitudes $v' = -\frac{v}{k^2 + v} k'^2$, k' y las correspondientes w -figuras se obtendrán de las w -figuras de los casos 1) y 3) mediante transformaciones lineales enteras con coeficientes de dilatación

$$\frac{(\text{long})_2}{(\text{long})_1} = -\frac{k^2 + v}{k^2}, \quad \frac{(\text{long})_4}{(\text{long})_3} = \frac{k^2 + v}{k^2}$$

(los índices corresponden al caso). Para los casos $v = -1$ y $v = -k^2$ en la figura 101 se da la correspondencia entre el u -plano y el w -plano. Haciendo uso de la tabla II, encontramos para $v = -1$:

$$\omega = \frac{1}{k'^2} \left[k'^2 u - E(u) + \frac{\text{sn } u \text{ dn } u}{\text{cn } u} \right] = -\frac{i}{k'} E \left(ik' u, \frac{1}{k'} \right)$$

$$l = \frac{1}{k'^2} (E - k'^2 K), \quad n = \frac{1}{k'^2} (E' - k^2 K')$$

y para $v = -k^2$:

$$\omega = \frac{1}{k'^2} \left[E(u) - k^2 \frac{\text{sn } u \text{ cn } u}{\text{dn } u} \right],$$

$$l = \frac{1}{k'^2} (K' - E'), \quad H = \frac{1}{k'^2} E.$$

1264. *Solución.* De la condición $\Delta > 0$ se desprende que e_1, e_2, e_3 son reales y diferentes y que $g_2 > 0$. Aceptamos que $e_1 > e_2 > e_3$. El semiplano superior $\text{Im } z > 0$ se transforma en un rectángulo de vértices $0, \omega, \omega - \omega', -\omega'$ (se considera que $\text{Im } \frac{\omega'}{\omega} > 0$), correspondientes a los puntos ∞, e_1, e_2, e_3 . A las líneas medias del rectángulo corresponden dos semicircunferencias (fig. 102): a primera de centro en el punto e_2 y respecto a ella e_1 y e_3 son simétricos (de modo que su radio es $\sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}$) y la segunda de centro en el punto e_1 y respecto a ella son simétricos e_2 y e_3 (su radio es $\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$). Prolongando la transformación $\wp(w)$ según el principio de simetría, obtenemos los semiperíodos ω y ω' de esta función:

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}},$$

$$\omega' = i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{(e_1 - x)(e_2 - x)(e_3 - x)}}.$$

Considerando la figura 102, encontramos las relaciones

$$\wp(\omega) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\text{sn}^2 \left(\frac{K}{\omega} \omega, k \right)}, \quad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

v	H^*	H	I	h
$v < -1$	$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{ v }{ v+1 v+k^2 }}$	$-\frac{k^2}{k^2+v} \Pi_1(v', k')$	$-\Pi_1(v, k)$	$H^* - H$
$-1 < v < -k^2$	$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{ v }{ v+1 v+k^2 }}$	$\Pi_1(v, k)$	$\frac{k^2}{k^2+v} \Pi_1(v', k')$	$H^* - H$
$-k^2 < v < 0$	$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{ v }{ v+1 v+k^2 }}$	$\frac{k^2}{k^2+v} \Pi_1(v', k')$	$\Pi_1(v, k)$	$H - H^*$
$v > 0$	$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{ v }{ v+1 v+k^2 }}$	$\Pi_1(v, k)$	$\frac{k^2}{k^2+v} \Pi_1(v', k')$	$H - H^*$
$v = -1$	-	-	$\frac{1}{k'^2} (E - k'^2 K)$	$\frac{1}{k'^2} (E' - k'^2 K')$
$v = -k^2$	-	$\frac{1}{k'^2} F$	$\frac{1}{k'^2} (K' - E')$	-

Observación. En la columna \leftrightarrow las integrales se entienden en el sentido del valor principal. Además

$$v' = -\frac{v}{k^2 + v} k'^2.$$

Si $g_3 > 0$, se tiene $e_3 < e_2 < 0 < e_1$ y $\omega < |\omega'|$ (ya que $k < k'$ y, por consiguiente, $K < K'$); si $g_3 < 0$, se tiene $e_3 < 0 < e_2 < e_1$ y, por consiguiente, $\omega > |\omega'|$. Si $g_3 = 0$, se tiene $e_2 = 0$, $e_3 = -e_1$ y $\omega = |\omega'|$. En este caso la transformación es simétrica además respecto al eje vertical. A todo el z -plano con cortes $(-\infty, e_3]$, $[e_1, \infty)$, $[0, i\infty)$ le corresponde el triángulo $(0, 2\omega, 2\omega')$,

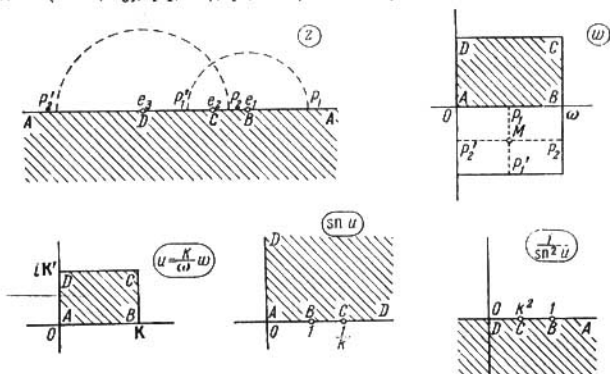


FIG. 102

que forma la mitad del paralelogramo de periodos (que se ha convertido ahora en un cuadrado) (fig. 103). Observemos también que, siendo e_1, e_2, e_3 ($e_1 + e_2 + e_3 = 0$) arbitrarios, a la mitad del paralelogramo de periodos le corresponde el z -plano con cortes, en general curvilíneos, que salen de e_1, e_2, e_3 y van

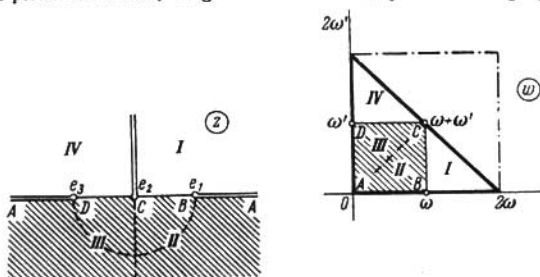


FIG. 103

al ∞ (véase esquema de la fig. 104). 1265. Solución. La transformación principal se indica en la fig. 105. Se obtiene de la transformación del semicírculo II aplicando el principio de simetría. Observando que $dw = \frac{dz}{-\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$

y tomando $\text{Arg}(-1) = \pm \pi$, obtenemos $\text{Arg} dw = \pm \pi + \text{Arg} dz - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \text{Arg}(z - e_k)$, de donde se desprende que $\text{Arg} dw$ toma en los lados del

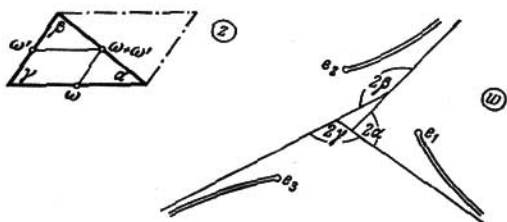


FIG. 104

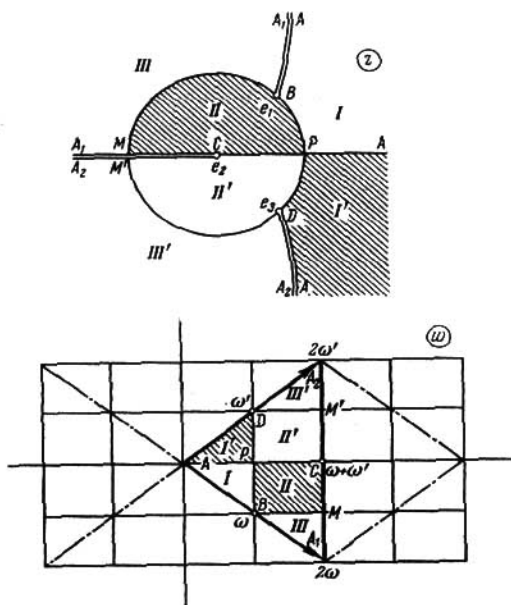


FIG. 105

“rectángulo” $PBMC$ los valores $-\frac{\pi}{2}$, 0 , $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, respectivamente y esto lleva a la transformación indicada en la figura 105. Así, por ejemplo, sobre el arco \widehat{PB} tenemos (fig. 106) $\arg dw = -\pi + \left(\alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3}{2} = -\frac{\pi}{2}$, etc. Para determinar los semiperíodos conjugados ω y ω' de la función $\wp(\omega)$ tenemos:

$$\omega + \omega' = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$\omega - \omega' = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)(e_2-x)(e_3-x)}}.$$

Si $g_3 = 0$, resulta que e_1, e_2, e_3 son vértices de un triángulo equilátero y que el paralelogramo de períodos tiene la forma de un rombo de ángulo 60° en el cero,

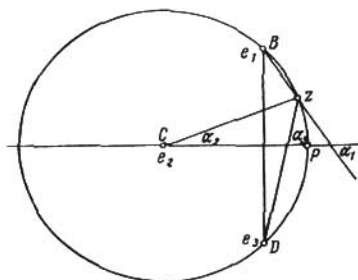


FIG. 106

si $g_3 < 0$ (en este caso $e_3 < 0$), y de ángulo 120° en el cero, si $g_3 > 0$ (en este caso $e_3 > 0$). En ambos casos la mitad del paralelogramo de períodos corresponde al z -plano con cortes simétricos radiales que salen de los puntos e_1, e_2, e_3 (véanse las figuras 107 y 108). 1266. 1) $w = -\left[\frac{\wp(z)}{e_1}\right]^2$, los semiperíodos

son $\omega, i\omega$; 2) $w = \frac{\wp'(z)}{2|e_2|^{\frac{3}{2}}}$, los semiperíodos son $\omega = he^{-i\frac{\pi}{6}}$ y $\omega' = he^{i\frac{\pi}{6}}$,

donde $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; 3) $w = \frac{\wp'^2(z)}{4e_3^2}$, los semiperíodos son los mismos que en el punto 2).

1267. 1) $z = \operatorname{sn}(u, k)$ $w = e^{\frac{\pi u}{K'}}$, $\ln \mu = 2\pi \frac{K}{K'}$; $|\operatorname{Re} u| < K$, $|\operatorname{Im} u| < K'$; 2) la transformación es la misma que en el punto 1), pero $0 < \operatorname{Re} u < K$, $|\operatorname{Im} u| < K'$, $\ln \mu = \pi \frac{K}{K'}$; 3) se reduce al punto 1) mediante una transforma-

ción lineal; en este caso, $k = \frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}}$, donde $\lambda = (a, b, c, d)$ es la razón anarmónica de los puntos indicados; 4) se reduce al punto 3) mediante la transformación $t = \sqrt{z^2 + h^2}$; 5) $z = \operatorname{sn}(u, k)$, $w = ie^{\frac{i\pi u}{2K}}$, $\ln \mu = \frac{\pi}{2} \frac{K'}{K}$; $-3K <$

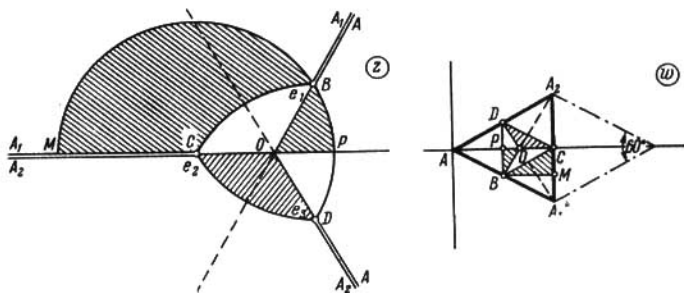


FIG. 107

$< \operatorname{Re} u < K$, $0 < \operatorname{Im} u < K'$; 6) se reduce al punto 5) mediante la transformación $t = \sqrt{1+z^2}$; en este caso, $k = \cos \alpha$; 7) la transformación es la misma que en el punto 5), solamente en un caso es $0 < \operatorname{Im} u < \frac{1}{2} K'$, y en el otro

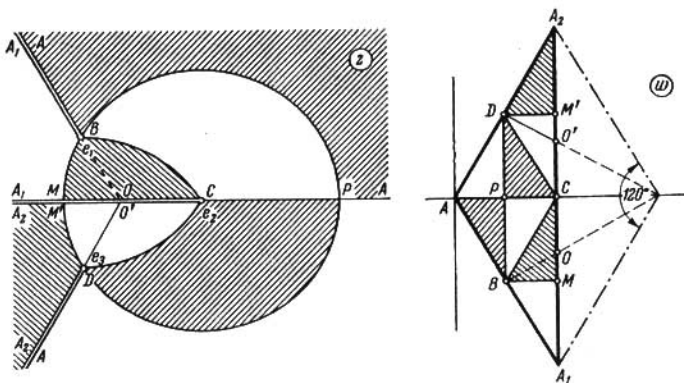


FIG. 108

se tiene $\frac{1}{2} K' < \operatorname{Im} u < K'$; $\ln \mu = \frac{\pi}{4} \frac{K'}{K}$; 8) $z = k \operatorname{sn}^2(u, k)$, $w = e^{-i \frac{\pi u}{K}}$, $\ln \mu = \pi \frac{K'}{K}$; $|\operatorname{Re} u| < K$, $0 < \operatorname{Im} u < K'$; 9) la transformación es la misma

que en el punto 8), solamente en un caso se tiene $0 < \operatorname{Im} u < \frac{1}{2} K'$, y en el otro caso se tiene $\frac{1}{2} K' < \operatorname{Im} u < K'$; $\ln \mu = \frac{\pi}{2} \frac{K'}{K}$; 10) se reduce al punto 8) mediante la transformación $t = \frac{z+1}{\sqrt{1+\rho}}$; en este caso, $k = \frac{1}{\sqrt{1+\rho}}$; 11) se reduce al punto 7) mediante la transformación $t = \frac{1-z}{1+z}$; en este caso, $k = \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$; 12) se reduce al punto 2) mediante la transformación $t = -i \operatorname{sen} z$; en este caso, $k = \frac{\operatorname{sh} H_1}{\operatorname{sh} H_2}$; 13) se reduce al punto 7) mediante la transformación $t = \operatorname{sen} z$; en este caso, $k = \cos \operatorname{th} H$; 14) se reduce al punto 5) mediante la transformación $t = \operatorname{sen} z$ y una transformación lineal sucesiva; en este caso, $k = \frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda-1}}$, donde $\lambda = \frac{(1 + \operatorname{sen} \beta)(1 - \operatorname{sen} \alpha)}{2(\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha)}$, 15) $z = C \left[Z(u) + \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} \right]$, $w = e^{-i \frac{u\pi}{K}}$, $\ln \mu = 2\pi \frac{K'}{K}$, donde k se determina de las ecuaciones $Z(\beta) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi}{2K}$, $\operatorname{dn}^2 \beta = \frac{E}{K}$. 1268. $t = \frac{1 - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$. Los vértices $K \pm iK'$, $-K \pm iK'$ se transforman en los puntos $e^{\pm i\alpha}$, $-e^{\pm i\alpha}$ donde $\cos \alpha = k$. 1269. Se reduce al problema 1268 mediante la transformación $u = \frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} z$. En este caso, k se determina de las ecuaciones $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} = \frac{1}{(a+b)^2}$, donde $b = \sqrt{a^2 - 1}$. 1270. $t = \frac{1 - \operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u}$, donde $u = \frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} z$, $|\operatorname{Re} u| < K_1$, $|\operatorname{Im} u| < K'$. El parámetro k tiene el mismo valor que en la respuesta al problema 1269. Los focos $z = \pm 1$ se transforman en los puntos $\pm \frac{k}{1+k'}$. 1271. 1) $z = C \left[Z(u) + \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} \right]$, $t = \frac{1 + \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$; 2) $z = C \left[Z(u) + \frac{\pi u}{2KK'} \right]$, $t = \frac{1 + \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$; 3) $z = \frac{a}{hk} \left[E(u) - i(E' - k^2 K') - k'^2 u + \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \right]$. Sobre la determinación de las constantes véase el libro mencionado en la respuesta al problema 1261.

Capítulo X

1272. Un movimiento de traslación de velocidad $V = \alpha - i\beta$. En el ∞ se tiene un doblete de momento $p = 2\pi c$. Las líneas de corriente son $\beta x + \alpha y = C$; las líneas equipotenciales son $\alpha x - \beta y = C$. 1273. En el punto $z = 0$ se tiene un punto crítico (punto de ramificación) y en el ∞ , un multiplete de orden $2n$ (que también es un punto de ramificación); las líneas equipotenciales son $r^n \cos n\varphi = C$ y las líneas de corriente, $r^n \operatorname{sen} n\varphi = C$ ($z = re^{i\varphi}$); $V = n\bar{z}^{n-1}$. 1274. En los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ se tienen manantiales-torbellinos: $(0; Q, \Gamma)$, $(\infty; -Q, -\Gamma)$; las líneas equipotenciales son $\ln r = -\frac{\Gamma}{Q} + C$ y las líneas de corriente, $\ln r = \frac{Q}{\Gamma} \varphi + C$. Ambas familias de líneas representan espirales logarítmicas;

en los casos en que $\Gamma=0$ o $Q=0$, una de estas familias son las circunferencias $r=C$ y la otra, los rayos $\varphi=C$. La velocidad es $V = \frac{|\Gamma+iQ|}{2\pi r} e^{i\left(\varphi - \arctg \frac{Q}{\Gamma} + \frac{\pi}{2}\right)} \times (z=re^{i\varphi})$. 1275. En los puntos a y b se tienen manantiales-torbellinos: (a ;

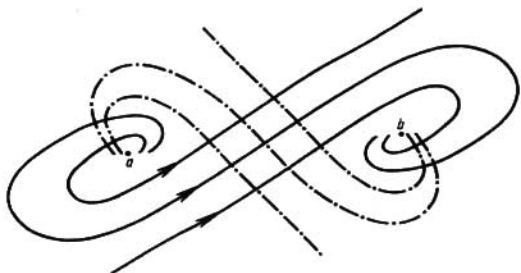


FIG. 109

Q, Γ), ($b; -Q, \Gamma$); las líneas del campo son espirales logarítmicas alrededor de los puntos a y b (fig. 109); $\ln \rho = -\frac{\Gamma}{Q} \theta + C$ son las líneas equipotenciales y $\ln \rho = \frac{Q}{\Gamma} \theta + C$, las líneas de corriente ($\frac{z-a}{z-b} = \rho e^{i\theta}$). La velocidad es $V = \frac{\Gamma-i\theta}{-2\pi i} \frac{\bar{a}-\bar{b}}{(z-a)(z-b)}$. 1276. En el punto $z=0$ se tiene un doblete de mo-

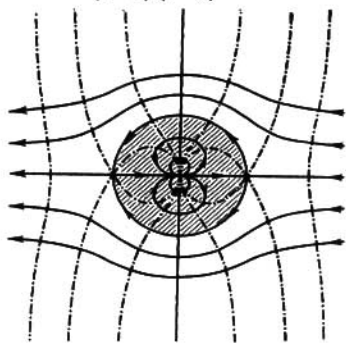


FIG. 110

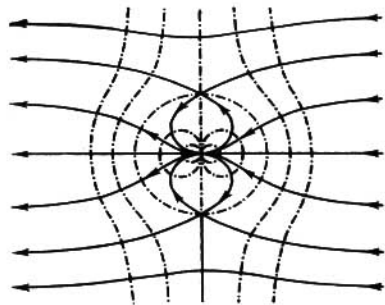


FIG. 111

mento $p=2\pi$; $r=C \cos \varphi$ son las líneas equipotenciales y $r=C \sin \varphi$, las líneas de corriente. $V = -\frac{e^{2i\varphi}}{r^2}$, $V_\infty=0$. En los puntos $2 \pm i$ la velocidad es igual a $-\frac{3 \pm 4i}{25}$. 1277. 1) y 2) En los puntos 0 e ∞ se tienen dobletes de momentos $\pm 2\pi R^2$ y 2π (el signo superior corresponde al punto 1) y el inferior, al punto 2)).

Las líneas del campo son curvas de tercer orden: $x \pm \frac{R^3 x}{x^2 + y^2} = C$ son las líneas equipotenciales e $y \mp \frac{Ry}{x^2 + y^2} = C$, las líneas de corriente. $V = 1 \mp \frac{R^2}{r^2} e^{2i\varphi}$, $V_\infty = 1$. Los puntos $z = \pm R$ para el punto 1) y los puntos $z = \pm Ri$ para el punto 2) son críticos (véanse las figuras 110 y 111).



FIG. 112

1278. En el punto $z=0$ se tiene un cuádruple; $r^2 = C \cos 2\varphi$ son las líneas equipotenciales y $r^2 = C \sin 2\varphi$, las líneas de corriente. $V = -\frac{2}{r^3} e^{3i\varphi}$, $V_\infty = 0$

(fig. 112)¹⁾. 1279. En los puntos $\pm a$ se tienen manantiales de potencia 2π y en el ∞ , un manantial de potencia -4π . Las líneas equipotenciales son las lemniscatas $|z^2 - a^2| = C$ y las líneas de corriente son las hipérbolas $x^2 - \frac{2}{C} xy - y^2 = a^2$ que tienen su centro en el origen de coordenadas y que pasan por los puntos $\pm a$.

$V = \frac{2z}{z^2 - a^2}$, $V_{\pm a} = \pm \frac{i}{a}$; el origen de coordenadas es un punto crítico (fig. 113).

1280. En los puntos $\pm a$, $\pm ai$ se tienen manantiales: $(\pm a; 2\pi)$, $(\pm ai; -2\pi)$; $r^4 + Ca^2 r^2 \cos 2\varphi + a^4 = 0$ ($|C| > 2$) son las

líneas equipotenciales (entre ellas figuran también las rectas $y = \pm x$); $r^4 + Ca^2 r^2 \times \sin 2\varphi - a^4 = 0$ son las líneas de corriente (entre ellas figuran también los ejes de coordenadas). $V = \frac{4az^2}{z^4 - a^4}$, $V_\infty = 0$, el punto $z=0$ es crítico (fig. 114). 1281. En los puntos

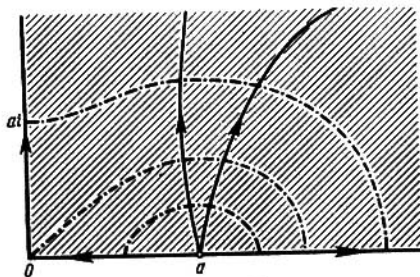


FIG. 113

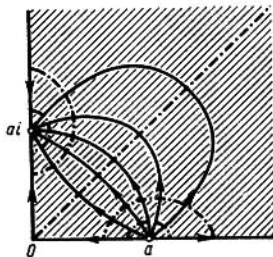


FIG. 114

$\pm 1, 0$ y en el ∞ se tienen manantiales: $(\pm 1; Q)$, $(0; -Q)$, $(\infty; -Q)$; las líneas equipotenciales son $r^2 + \frac{1}{r^2} = C + 2 \cos 2\varphi$ ($C > 0$) (para grandes valores de C ellas se aproximan a las circunferencias $r = \sqrt{C}$ y $r = \frac{1}{\sqrt{C}}$); las líneas de co-

¹⁾ Aquí y en lo sucesivo la corriente simétrica respecto a los ejes de coordenadas se indica sólo para el primer cuadrante.

riente son $r = \sqrt{\frac{C + \operatorname{tg} \varphi}{C - \operatorname{tg} \varphi}}$ (a ellas pertenecen también los ejes de coordenadas y la circunferencia $r=1$). $V = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{z^2+1}{z(z^2-1)} \right]$, $V_\infty = 0$. Los puntos $\pm i$ son críticos (fig. 115). 1282. En los puntos $\pm i, 0$ se tienen manantiales: $(\pm i; 2\pi)$,

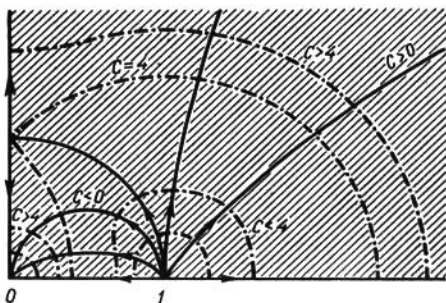


FIG. 115

$(0; -4\pi)$; las líneas equipotenciales son $Cr^4 - 2r^2 \cos 2\varphi - 1 = 0$ ($C > -1$) (para $C=0$ se tiene la hipérbola $y^2 - x^2 = \frac{1}{2}$); las líneas de corriente son $r = \sqrt{C \operatorname{sen} 2\varphi - \cos 2\varphi}$ (para $C=0$ se tiene la lemniscata de Bernoulli) y a ellas

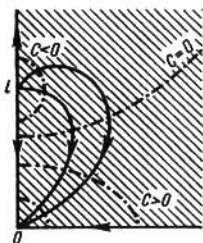


FIG. 116



FIG. 117

pertenecen también los ejes de coordenadas. $V = -\frac{2}{z(z^2+1)}$, $V_\infty = 0$ (fig. 116).

1283. En los puntos $\pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ se tienen manantiales de potencia 2π , en el punto $z=0$, un manantial de potencia -4π y en el ∞ , un manantial de potencia -4π ; $r^4 + \frac{1}{r^4} = C - 2 \cos 4\varphi$ ($C > 0$) son las líneas equipotenciales (que para $C < 4$

constan de cuatro y para $C > 4$ de dos componentes; para grandes valores de C son "casi" las circunferencias $r = \sqrt[4]{C}$ y $r = \frac{1}{\sqrt[4]{C}}$; $\operatorname{tg} 2\varphi = C \frac{r^4 - 1}{r^4 + 1}$ son las líneas de corriente (a ellas pertenecen también los ejes de coordenadas, las bisectrices de los ángulos coordenados y la circunferencia $r=1$). $V = 2 \left[\frac{z^4 - 1}{z(z^4 + 1)} \right]$, $V=0$. Los puntos $\pm 1, \pm i$ son críticos (fig. 117). 1284. En el punto $z=0$ se tiene un manantial ($0; Q$) y en el punto $z=\infty$ un doblete y un manantial ($\infty; -Q$); $y^2 = e^{\frac{4\pi}{Q}(C-ax)} - x^2$ son las líneas equipotenciales (en coordenadas polares:

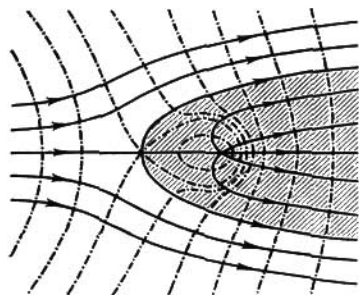


FIG. 118

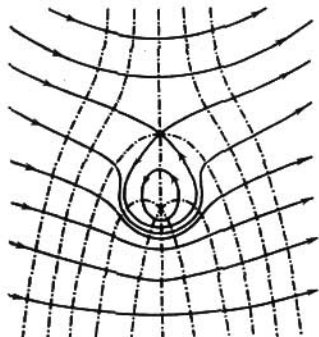


FIG. 119

$ar \cos \varphi + \frac{Q}{2\pi} \ln r = C$); $r = \frac{C - \frac{Q}{2\pi} \varphi}{a \sin \varphi}$ son las líneas de corriente; las líneas de

corriente tienen asíntotas horizontales: $y_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow \frac{C}{a}$, $y_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow \frac{C - \frac{Q}{2\pi}}{a}$; $V =$

$= a + \frac{Qe^{i\varphi}}{2\pi r}$, $V_{\infty} = a$; $z = -\frac{Q}{2\pi a}$ es un punto crítico (fig. 118). 1285. En el

punto $z=0$ se tiene un torbellino ($0; \Gamma$) y en el ∞ un doblete y un torbellino

($\infty; -\Gamma$); las líneas equipotenciales son $r = \frac{C - \frac{\Gamma\varphi}{2\pi}}{a \cos \varphi}$; las líneas de corriente

son $x^2 = e^{\frac{4\pi}{\Gamma}(ay-C)} - y^2 \left(ar \sin \varphi - \frac{\Gamma \ln r}{2\pi} = C \right)$; $V = a + \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{i \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)}$, $V_{\infty} = a$;

$z = \frac{\Gamma i}{2\pi a}$ es un punto crítico (fig. 119). 1286. El fluido circunda una circunferencia de radio R ; $V_{\infty} = a$, la circulación es Γ ; los puntos críticos se determinan de

la igualdad $z_{cr} = \frac{1}{4\pi a} (\Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 a^3 R^2 - \Gamma^2})$. Si $\Gamma < 4\pi a R$, se tiene $|z_{cr}| = R$, es decir, ambos puntos críticos se encuentran sobre la circunferencia $|z| = R$; si $\Gamma = 4\pi a R$, los puntos críticos se confunden; si $\Gamma > 4\pi a R$, se tiene $|z_{cr}| > R$ (el

segundo punto crítico se encuentra en este caso en el interior de la circunferencia $|z|=R$. Véase, por ejemplo, [2, cap. III, n°, 49]. 1287. $w(z) = Ve^{-\lambda z} +$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \ln(z - a_k). \text{ En el } \infty \text{ se tiene un doblete de momento } 2\pi V e^{-\lambda z}$$

y un manantial-torbellino de potencia $Q_\infty = \sum_{k=1}^n Q_k$ y de intensidad $\Gamma_\infty =$

$$= - \sum_{k=1}^n \Gamma_k. \text{ 1288. 1) No; 2) sí; 3) sí (por ejemplo, la corriente } w = \frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

tiene líneas de corriente que salen del origen de coordenadas). 1289. Una transformación conforme univalente transforma un manantial-torbellino en un manantial-torbellino de las mismas potencia e intensidad. Un multiplete se transforma en un conjunto de multipletes de hasta el mismo orden inclusive. Un doblete se transforma en un doblete con la siguiente ley de variación del momento: 1) $(a;$

$$p) \rightarrow (a; p c_1), 2) (\infty; p) \rightarrow (a; p c_{-1}), 3) (a; p) \rightarrow (\infty; \frac{p}{c-1}), 4) (\infty; p) \rightarrow (\infty; \frac{p}{c}).$$

1290. Una transformación conforme n -valente transforma un manantial-torbellino en un manantial-torbellino de potencia e intensidad n veces menores. 1291. La ley de variación de un manantial-torbellino $(a^*$ es el punto simétrico de a) es:

$(a; Q; \Gamma) \rightarrow (a^*; Q, -\Gamma)$ para el caso de una línea de corriente y $(a; Q, \Gamma) \rightarrow (a^*; -Q, \Gamma)$ para el caso de una línea equipotencial. La ley de variación de un doblete es más compleja. En el caso de una línea de corriente recta se tiene: $(a; p) \rightarrow (a^*; p')$, donde los vectores p, p' , trazados por a y a^* respectivamente, son simétricos respecto a la línea de corriente. En el caso de una

línea de corriente circular $|z|=R$, se tiene $(a; p) \rightarrow (a^*; -\frac{R^2}{a^2} \bar{p})$, si $a \neq 0$

y $(a; p) \rightarrow (\infty; \frac{\bar{p}}{R^2})$, si $a=0$. En el caso de una línea equipotencial recta o circu-

lar se tiene: $(a; p) \rightarrow (a^*; -p')$; $(a; p) \rightarrow (a^*; \frac{R^2}{a^2} \bar{p})$, $(0; p) \rightarrow (\infty; \frac{\bar{p}}{R^2})$

respectivamente y con la misma denotación. 1292. 1) En todos los casos las singularidades de la corriente deben ser simétricas respecto a la circunferencia $|z|=R$ (véase el problema 1291). En particular, los ejes de los dobletes, pertenecientes a esta circunferencia, deben ser tangentes a la misma. La suma de las potencias debe

ser igual a cero, para lo cual debe ser $\sum Q_k + \frac{1}{2} \sum Q'_i = 0$, donde Q_k es la

potencia de los manantiales del interior de $|z|=R$ y Q'_i es la potencia de los manantiales pertenecientes a $|z|=R$. Sobre $|z|=R$ no debe haber torbellinos;

2) Las singularidades de la corriente deben ser simétricas respecto a la circunferencia $|z|=R$. En particular, los ejes de los dobletes, pertenecientes a $|z|=R$, deben ser ortogonales a esta circunferencia. La suma de intensidades debe ser

igual a cero, para lo cual tiene que ser $\sum \Gamma_k + \frac{1}{2} \sum \Gamma'_i = 0$, donde Γ_k son las

intensidades de los torbellinos del interior de $|z|=R$ y Γ'_i son las intensidades de los torbellinos sobre $|z|=R$; no debe haber manantiales sobre $|z|=R$.

1293. 1) $w = Vz + c$ (c es una constante); 2) $w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z-\bar{a}} + c$; 3) $w = \frac{Q}{2\pi} \ln \times$

$\times [(z-a)(z-\bar{a})] + c$ (en el ∞ hay un manantial de potencia $-2Q$); 4) $w =$

$$= \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a} + \frac{\bar{p}}{2\pi} \frac{1}{z-\bar{a}} + c; \quad 5) \quad w = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \ln(z - a_k) + \frac{-\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \times$$

$\times \ln(z - \bar{a}_k)] + \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a} + \frac{\bar{p}}{2\pi} \frac{1}{z-\bar{a}} + Vz + c$ (en el ∞ hay un manantial de potencia $-\sum_{k=1}^n Q_k$); 6) la corriente es posible solamente para $\Gamma=0, \text{Imp}=0$;

en este caso $w = \frac{p}{2\pi z} + \frac{Q}{2\pi} \ln z + c$. 1294. 1) $w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{R^2 - az} + c$; 2) $w = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a} + \frac{p^*}{2\pi} \frac{1}{z-a^*} + c$, si $a \neq 0$ ($a^* = \frac{R^2}{a}$, $p^* = -\frac{R^2}{a^2} p$), y $w =$

$= \frac{p}{2\pi z} + \frac{p^*}{2\pi} z + c$, $a=0$ ($p^* = \frac{p}{R^2}$). 1295. 1) $w = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{2\pi} \ln [(z-a_k) \times$

$\times (R^2 - \bar{a}_k z)] + c$, si $\sum_{k=1}^n Q_k = 0$; 2) $w = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{2\pi} \ln [(z-a_k)(R^2 - \bar{a}_k z)] +$

$+ \sum_{i=1}^m \frac{Q'_i}{2\pi} \ln(z - a'_i) + c$, si $\sum_{k=1}^n Q_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m Q'_i = 0$. 1296. 1) $w =$

$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{R^2 - az} + c$; 2) $w = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a} + \frac{p^*}{2\pi} \frac{1}{z-a^*} + c$ ($a^* = \frac{R^2}{a}$, $p^* = -\frac{R^2}{a^2} p$);

3) $w = Ve^{-i\alpha z} + \frac{R^2 Ve^{i\alpha}}{z} + c$; 4) $w = Ve^{-i\alpha z} + \frac{R^2 Ve^{i\alpha}}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + c$. 1297. $w =$

$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{(z-ia)(az+i)}{(z+ia)(az-i)} + c$. 1298. $w = \frac{Q}{2\pi} \ln(z^2 + a^2) + c$. 1299. $w =$

$= \frac{Q}{2\pi} \ln(z^2 - 1) + c$. 1300. 1) $w = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z^2-1}{z^2+1} + c$; 2) $w = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{4}{z^2}\right) + c$.

1301. $w = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \ln(z - a_k) + \frac{\Gamma_k - iQ_k}{2\pi i} \ln(z - \bar{a}_k) \right] + \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z-a} - \frac{\bar{p}}{2\pi} \times$

$\times \frac{1}{z-\bar{a}} + Ve^{-i\alpha z} + c$. La corriente es posible, si $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ (si $\sum_{k=1}^n \Gamma_k \neq 0$, en

el ∞ se tiene un torbellino de intensidad $-2 \sum_{k=1}^n \Gamma_k$). 1302. $w =$

$= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \ln(z - a_k) + \frac{\Gamma_k - iQ_k}{2\pi i} \ln(R^2 - \bar{a}_k z) \right] + Ve^{-i\alpha z} - \frac{R^2 Ve^{i\alpha}}{z} + c$. La

corriente es posible, si $\sum_{k=1}^n \Gamma_k = 0$, $a=0$ y $p = -2\pi R^2 Ve^{i\alpha}$. 1303. Supongamos

que $t = f(z)$ transforma conformemente D en el círculo $|t| < 1$. En este caso, $w = \Phi[f(z)]$, donde

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \ln(t - t_k) + \frac{\Gamma_k - iQ_k}{2\pi i} \ln(1 - \bar{t}_k t) \right] + c,$$

$t_k = f(a_k)$, con la condición indispensable de que $\sum_{k=1}^n Q_k = 0$. 1304. Supon-

gamos que $t=f(z)$ transforma conformemente D en el recinto $|t| > 1$ con la normalización $f(\infty)=\infty$, $f'(\infty) > 0$. En este caso y bajo la condición de que

$$\sum_{k=1}^n Q_k = 0, \quad \text{se tiene } w = \Phi[f(z)], \quad \text{donde } \Phi(t) = \frac{Ve^{-i\alpha}}{f'(\infty)} t + \frac{Ve^{i\alpha}}{f'(\infty) \cdot t} + \\ + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \ln(t - t_k) + \frac{-\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i} \ln(1 - \bar{t}_k t) \right] + c, \quad t_k = f(a_k).$$

1305. Conservando las denotaciones del problema **1304**, se tiene $w = \Phi[f(z)]$, donde

$$\Phi(t) = \frac{Ve^{-i\alpha}}{f'(\infty)} t + \frac{Ve^{i\alpha}}{f'(\infty) \cdot t} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln t + c.$$

Si $\Gamma=0$, $w(z)$ transforma el exterior de C en el exterior del segmento $\left[-\frac{2V}{f'(\infty)}, \frac{2V}{f'(\infty)} \right]$ del eje real del w -plano con la normalización $w(\infty)=\infty$,

$$w'(\infty) = Ve^{-i\alpha}. \quad \mathbf{1306.} \quad 1) \quad w(z) = \frac{V}{a-b} [(az-b\sqrt{z^2-c^2}) \cos \alpha + i(bz-a \times \\ \times \sqrt{z^2-c^2}) \sin \alpha] + \text{const} \quad (V_\infty = Ve^{i\alpha}, \quad c = \sqrt{a^2-b^2}); \quad 2) \quad w(z) = \frac{V}{a-b} \times$$

$$\times [(az-b\sqrt{z^2-c^2}) \cos \alpha + i(bz-a\sqrt{z^2-c^2}) \sin \alpha] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2-c^2}) + \text{const}.$$

$$\mathbf{1307.} \quad 1) \quad w(z) = V(z \cos \alpha - i\sqrt{z^2-c^2} \sin \alpha) + \text{const} \quad (V_\infty = Ve^{i\alpha}); \quad 2) \quad w(z) = \\ = V(z \cos \alpha - i\sqrt{z^2-c^2} \sin \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2-c^2}) + \text{const}, \quad \text{donde } \Gamma = \\ = -2\pi cV \sin \alpha \quad (c \text{ es el punto de partida}). \quad \mathbf{1308.}$$

Supongamos que el perfil de Zhukovski se obtiene mediante la transformación $z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$ de la circunferencia $|\zeta - \zeta_0| = |1 - \zeta_0| = R > 1$, $\zeta_0 = 1 - ke^{-i\beta}$ ($0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$). En este caso,

$$\text{para la circulación } \Gamma \text{ y } V_\infty = Ve^{i\alpha} \text{ se tiene } w(z) = \frac{VR}{2} \left(\frac{z - \zeta_0 + \sqrt{z^2-1}}{R} e^{-i\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{Re^{i\alpha}}{z - \zeta_0 + \sqrt{z^2-1}} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - \zeta_0 + \sqrt{z^2-1}) + c, \text{ siendo } \Gamma = -2\pi RV \sin(\alpha + \beta)$$

(Γ se determina de la condición $w'(1)=0$ de acuerdo con el postulado de Zhukovski—Chaplyguin). **1309.** $w(z) = \sqrt{z - \frac{p}{2}} + c$, si la parábola es circundada por el exterior, y $w(z) = i c h \frac{\sqrt{2z-p}}{2\sqrt{p}}$, si la parábola es circundada por

el interior. **1310.** $w(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(z + \sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\beta}} e^{-\frac{i\pi\alpha}{2\beta}} - (z - \sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\beta}} \times \right.$

$$\left. \times e^{\frac{i\pi\alpha}{2\beta}} \right] + \text{const}, \text{ si la rama de la derecha de la hipérbola es circundada por el exterior}$$

$$\left(\text{tg } \alpha = \frac{b}{a}, \beta = \pi - \alpha, c = \sqrt{a^2+b^2}, \text{ y } w(z) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[(z + \sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\alpha}} + \right. \right. \\ \left. \left. + (z - \sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\alpha}} \right] + \text{const}, \text{ si la rama de la derecha de la hipérbola es circun-}$$

dada por el interior. **1311.** $w(z)$ se determina de la ecuación $z = e^{\frac{\pi w}{v}} + \frac{\pi w}{v}$

(los valores de la función de corriente sobre las semirectas circundadas se toman iguales a $\pm v$). 1312. $w = \text{Arch } z = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ (los valores de la función de corriente sobre las semirectas circundadas se toman iguales a 0 y a π).

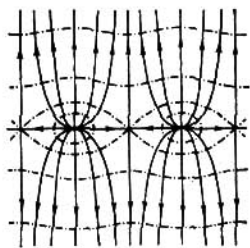


FIG. 120

1313. 1) Una corriente de período π ; en los puntos $k\pi$ (k es un número entero) se tienen manantiales de potencia Q ; los puntos $\frac{\pi}{2} + k\pi$ son críticos. La velocidad en el ∞ en la franja de períodos es $V_\infty = V(x \mp i\infty) = \pm \frac{Q}{2\pi} i$. Las líneas de corriente y las líneas equipotenciales véanse en la fig. 120. 2) Lo mismo, sólo en los puntos $k\pi$ en lugar de manantiales se tienen torbellinos de intensidad Γ y además $V(x \pm i\infty) = \mp \frac{\Gamma}{2\pi}$.

Para construir el campo hay que intercambiar las líneas de corriente y las líneas equipotenciales de la fig. 120. 1314. Una corriente de período π ; en los puntos $k\pi$ se tienen dobletes de momento p ; la velocidad $V(x \pm i\infty) = 0$. Las líneas de corriente véanse en la fig. 121. 1315. La solución es posible para $V_1 = V - \frac{Q}{\omega}$;

$$w = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi(z-a)}{2\omega} + \frac{-\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln \sin \frac{\pi(z+\bar{a})}{2\omega} + i \left(V - \frac{Q}{2\omega} \right) z + c.$$

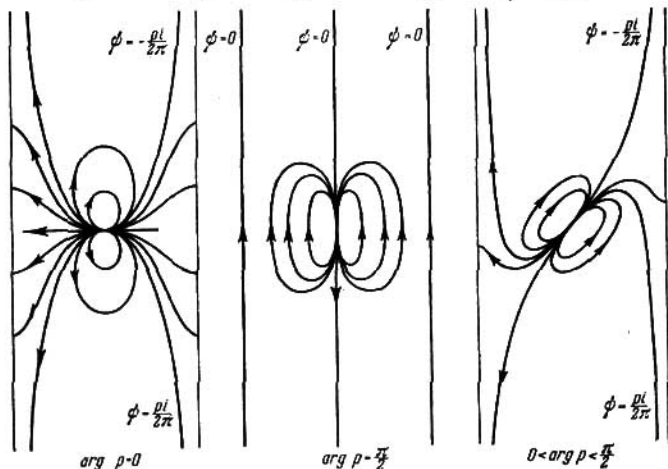


FIG. 121

1316. $w = \frac{p}{2\pi} \text{ctg} \frac{\pi(z-a)}{2\omega} - \frac{i\bar{p}}{2\pi} \text{ctg} \frac{\pi(z+\bar{a})}{2\omega} + iVz + c$. 1317. Supongamos que $t = f(z)$ transforma conformemente S en una franja rectilínea S_t y que Ω_1, Ω_2 se transforman en los puntos infinitos de S_t . Para S_t el problema se reduce a los problemas 1315 y 1316, siempre que existan y sean diferentes de cero las

derivadas $f'(\Omega_1)$, $f'(\Omega_2)$, las velocidades V_1 , V_2 sean tangentes a la frontera de S en el ∞ y una de ellas sea arbitraria; la solución existe y es única. 1318. 1) Es necesario y suficiente que los números M y C sean reales. En este caso, las curvas $\text{Re } u = \pm \omega$ son las líneas equipotenciales. En la fig. 122 se da la transformación $t = f(u) = \zeta(u) + Cu$ para diferentes valores reales de C . La

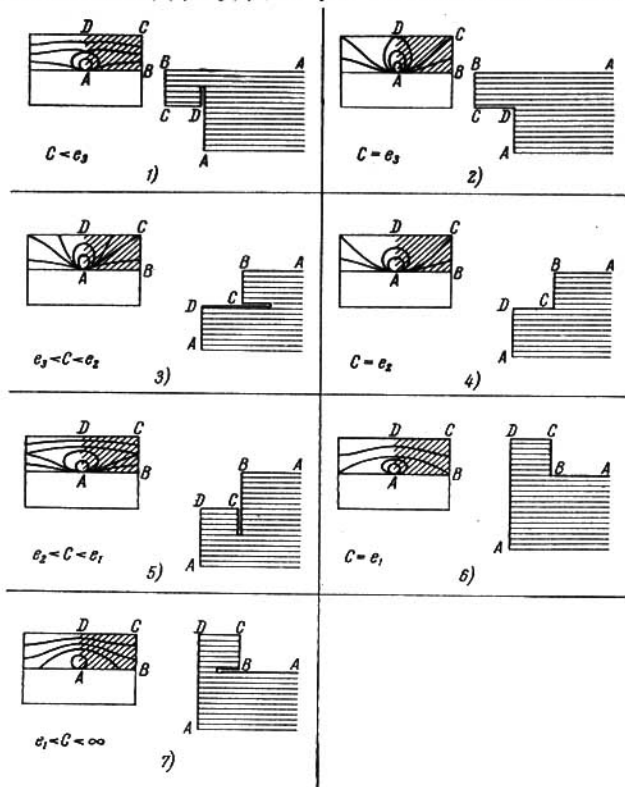


FIG. 122

fig. 122 corresponde al caso en que $\omega > |\omega'|$. De acuerdo con la solución del problema 1264, en este caso se tiene $e_3 < 0 < e_2 < e_1$, y $k^2 > \frac{1}{2}$. 2) $f(u) =$

$$= \frac{M}{4\pi\omega} \frac{\vartheta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)} + c. \text{ Para } \alpha=0 \text{ y } M=2\pi \text{ la transformación } t=f(u) =$$

$= \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega} u = \frac{1}{2\omega} \frac{\wp'_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\wp_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}$ está representada en la fig. 123 (notemos que

$e_3 < -\frac{\eta}{\omega} < e_2$). 1322. $f(u) = \frac{M}{2\pi} \zeta(u - \alpha) + \frac{N}{2\pi} \zeta(u - \beta) + Cu + c$. Para que la función $f(u)$ sea elíptica, debe tener la forma $f(u) = \frac{M}{2\pi} [\zeta(u - \alpha) - \zeta(u - \beta)] + c$. Si $Im u = \pm Im u'$ son las líneas de corriente, M debe ser real y, si son las líneas equipotenciales, debe ser puramente imaginario. α y β pueden tomar sólo los valores $0, \omega_k$ ($k=1, 2, 3$). Para $\alpha=0, \beta=\omega_k, M=2\pi$ se tiene

$$f(u) = \zeta(u) - \zeta(u - \omega_k) = \eta_k - \frac{1}{2} \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - e_k} = \eta_k + \frac{\sigma_i(u) \sigma_j(u)}{\sigma(u) \sigma_k(u)}$$

(i, j, k es una permutación de 1, 2, 3). Los puntos $u = \frac{\omega_k}{2} \pmod{\omega, \omega'}$ son críticos, es decir, en ellos $f'(u) = 0$. Las transformaciones principales se dan en la

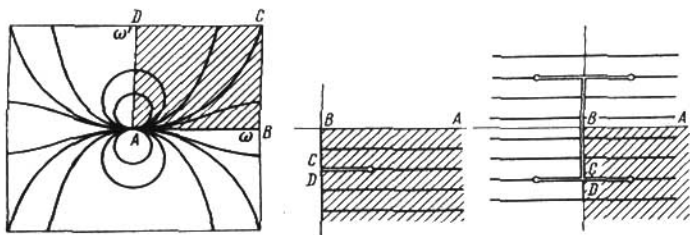


FIG. 123

fig. 124. Los rectángulos indicados en esta figura se transforman en el semiplano limitado por una recta horizontal ($k=1$), en el semiplano limitado por una recta vertical ($k=2$) y en un cuadrante de dos hojas pegado a lo largo de la semirecta horizontal correspondiente a la línea punteada del rectángulo ($k=3$). Estas transformaciones se prolongan según el principio de simetría.

1323. Los períodos de la corriente son $4K$ y $2iK'$, hay dobletes $2mK + (2n+1)iK'$ de momentos $2\pi \left(-\frac{1}{k}\right)^m$ y los puntos críticos son $(2m+1)K + niK'$ (m y n son números enteros). La transformación puede verse en la fig. 125. 1324. Los períodos de la corriente son $4K$ y $2K + 2iK'$, los dobletes son los mismos que en el problema 1323, pero de momentos $2\pi \frac{(-1)^{n+m}}{ik}$, los puntos críticos son $2mK + 2niK'$ y $(2m+1)K + (2n+1)iK'$ (fig. 126). 1325. Los períodos de la corriente son $2K$ y $4iK'$, los dobletes son los mismos que en el problema 1323, pero de momentos $2\pi (-1)^{n+m} i$, los puntos críticos son $mK + 2niK'$. Las transformaciones principales se dan en la fig. 127. 1326. $f(u) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \times$

$\times \ln \frac{\sigma(u - \alpha)}{\sigma(u - \beta)} + Cu + c$. En particular, para $\alpha=0, \omega, \omega + \omega'$ y $\beta=\omega'$, omitiendo

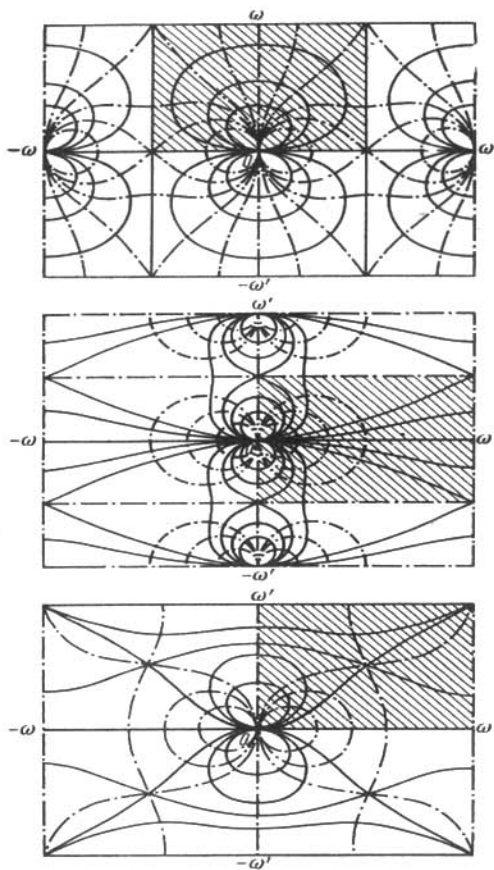


FIG. 124

la constante aditiva y el factor $\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}$, cambiando C y transformando la σ -función, se obtiene respectivamente $\ln \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} + Cu$, $\ln \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} + Cu$, $\ln \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} + Cu$.

Si $f(u+2\omega)=f(u)$, se tiene $f(u)=\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i} \ln \frac{\vartheta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\beta}{2\omega}\right)} + c$. 1327. 1), 2) y

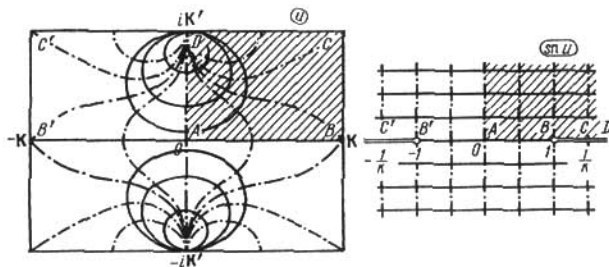


FIG. 125

3) Corrientes doblemente periódicas con manantiales de potencia 2π y -2π en los ceros y en los polos de las funciones $\text{sn } u$, $\text{cn } u$, $\text{dn } u$ (fig. 128). 1328. Una corriente doblemente periódica con cuadrupletes en los ceros de $\wp(u)$ (fig. 129). 1329. Corrientes periódicas de período 2ω (el período de la velocidad) con manantiales de potencia 2π en los ceros de $\vartheta_4(v)$ (fig. 130, 1 para ϑ_4 y ϑ_3 desplazados en $1/2$ hacia la derecha; fig. 130, 2 para ϑ_1 y ϑ_2 desplazados hacia

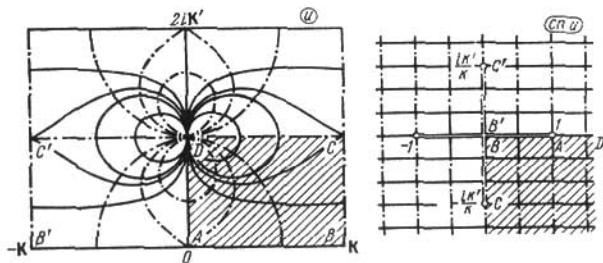


FIG. 126

la derecha en $1/2$). 1330. 1) $f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z+c$; 2) $f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln t(z)+c$, donde $t(z)$ transforma el recinto D en un anillo circular de manera que se conservan las direcciones de los recorridos de los contornos frontera; 3) $f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z-z_1}{z-z_2}+c$, donde z_1, z_2 son recíprocamente simétricos respecto a cada una de las circunferencias (es decir, son los puntos de intersección de la circunferencia ortogonal

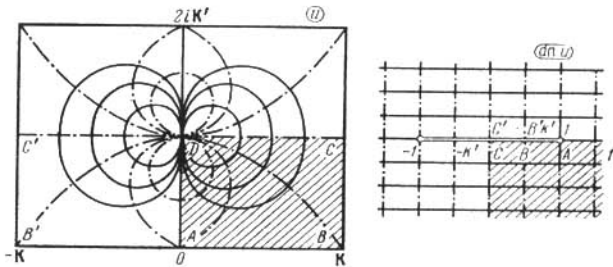


FIG. 127

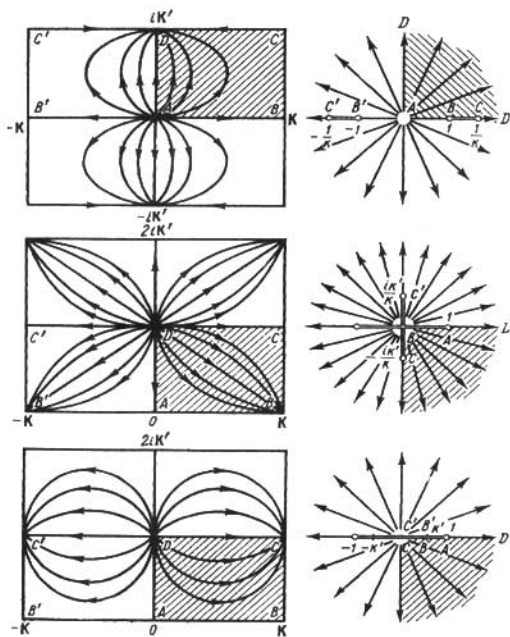


FIG. 128

a las dos dadas y de la recta que une los centros de las mismas) y el punto z_1 se encuentra en el interior de la circunferencia con la circulación Γ ; 4) $f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln t(z) + c$, donde la función $t(z)$ transforma el recinto D en un anillo con-

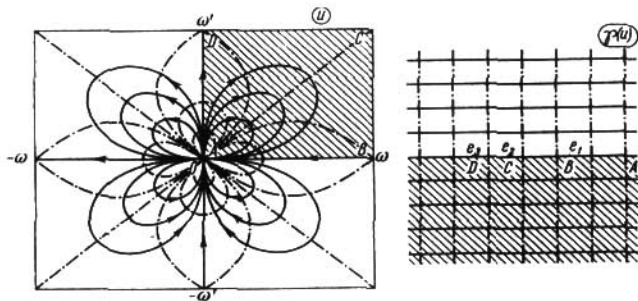


FIG. 129

servando la dirección del recorrido del contorno con la circulación Γ .

1331. $f(z) = \Phi \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln z \right)$, donde

$$\Phi(u) = -\frac{1}{4\pi^2 a} \left[\rho \frac{\vartheta_1' \left(\frac{u-\alpha}{2\omega} \right)}{\vartheta_1 \left(\frac{u-\alpha}{2\omega} \right)} - \bar{\rho} \frac{\vartheta_1' \left(\frac{u+\alpha}{2\omega} \right)}{\vartheta_1 \left(\frac{u+\alpha}{2\omega} \right)} \right] + c, \quad \alpha = \frac{\omega}{\pi i} \ln a$$

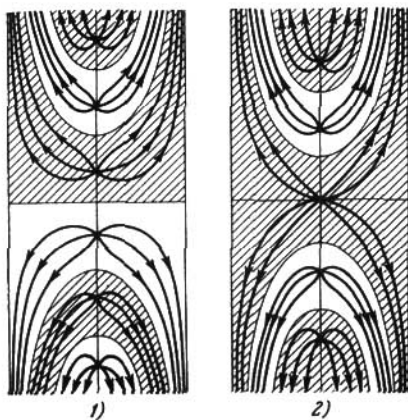


FIG. 130

La función $f(z)$ transforma R en el exterior de dos segmentos paralelos situados a la distancia $\frac{|\operatorname{Re} ip|}{2\pi a}$ uno del otro (fig. 131). Los extremos de los segmentos se determinan de la condición $\Phi'(u) = 0$. 1332. $f(z) = \Phi[u(z)]$, donde

$$\Phi(u) = \frac{V}{2\omega} \left[ke^{i\alpha} \frac{\vartheta_1' \left(\frac{u-a}{2\omega} \right)}{\vartheta_1 \left(\frac{u-a}{2\omega} \right)} + \bar{k} e^{-i\alpha} \frac{\vartheta_1' \left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega} \right)}{\vartheta_1 \left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega} \right)} \right] + c$$

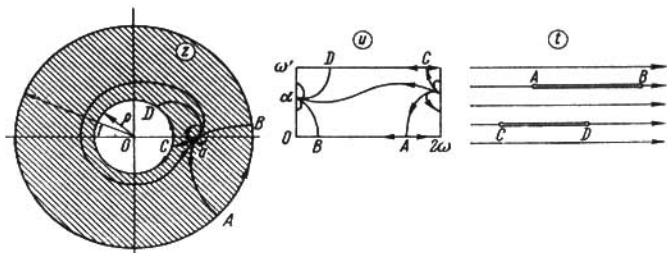


FIG. 131

y $u(z) = a + \frac{k}{z} + \dots$ es la función que transforma el recinto D en un rectángulo. 1333. $f(z) = \Phi \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln z \right)$, donde

$$\Phi(u) = A \wp(u) + \frac{B}{2\omega} \frac{\vartheta_1' \left(\frac{u}{2\omega} \right)}{\vartheta_1 \left(\frac{u}{2\omega} \right)} + c,$$

$$A = -\frac{c_{-2}\omega^2}{\pi^2}, \quad B = \frac{i\omega}{\pi} (c_{-2} - c_{-1}).$$

El problema es posible, si c_{-2} es un número real y la diferencia $c_{-2} - c_{-1}$ es un número imaginario puro. Si $A \neq 0$, la función $f(z)$ transforma R en el exterior del rayo horizontal y del segmento que es paralelo a este rayo y se encuentra a una distancia de $\frac{|c_{-2} - c_{-1}|}{2}$ de él. Los externos del segmento y el punto inicial del rayo se determinan de la condición $\Phi'(u) = 0$ (fig. 132, 1) (en la fig. 132, 2 se representa el caso en que $B=0$). En cambio, si $A=0$, es decir, si se tiene solamente un doblote, R se transforma en un semiplano, limitado por una recta horizontal, que tiene un corte a lo largo del segmento horizontal que se encuentra a una distancia de $\frac{|c_{-1}|}{2}$ de la recta (fig. 132, 3). 1334. 1) La

solución es posible, si $\Gamma_1 - \Gamma_2 = \Gamma$ en este caso, se tiene $f(z) = \Phi \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln z \right)$, donde

$$\Phi(u) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\vartheta_1 \left(\frac{u-\alpha}{2\omega} \right)}{\vartheta_1 \left(\frac{u+\alpha}{2\omega} \right)} + \frac{\Gamma_2}{2\omega} u + c, \quad \alpha = \frac{\omega}{\pi i} \ln a$$

es preciso tener en cuenta que el incremento de $\ln \frac{u-\alpha}{2\omega}$ es igual a $2\pi i$, cuando u varía entre 0 y 2ω , y es igual a 0 , cuando u varía entre $2\omega+i\omega'$ y

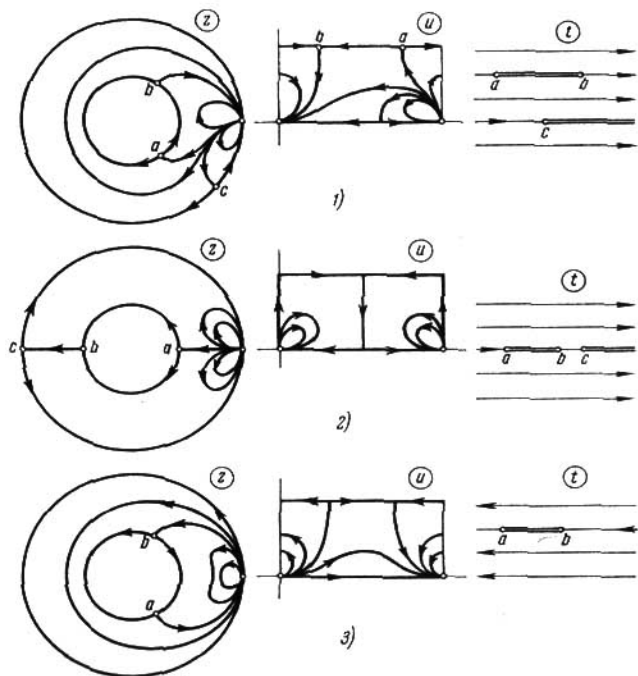


FIG. 132

$i\omega'$). Los puntos críticos de la corriente se determinan de la ecuación

$$\wp(u) = \wp(\alpha) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(\alpha)}{\left[\xi(\alpha) - \frac{\eta}{\omega} \alpha \right] + \lambda \left[\xi(\omega') - \frac{\eta}{\omega} \omega' \right]},$$

donde $\lambda = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$, y se encuentran en los lados del rectángulo de vértices $(0, \omega, \omega + \omega', \omega')$ y de los rectángulos simétricos a éste. En el caso en que $\Gamma_2 = 0$, la función $\wp(z)$ transforma R en un círculo con un corte a lo largo de un arco de la

circunferencia (fig. 133; $\Gamma > 0$). En el caso en que $\Gamma_2 = -\Gamma_1 = -\frac{\Gamma}{2}$ la función $\zeta(z)$ transforma R en un recinto de dos hojas que se obtiene al pegar las partes exteriores de los círculos $|\zeta| > 1$ y $|\zeta| > \frac{\rho}{a^2}$ a lo largo de los cortes que van

desde $-\infty$ hasta $\zeta_0 = -e^{\frac{4\pi\psi_0}{\Gamma}}$, donde ψ_0 es el valor de ψ en el punto crítico. La función $s(\zeta)$ transforma este recinto de dos hojas en el exterior de dos lenciscatas y $f(z) = -\frac{\Gamma}{4\pi i} \ln [(s(z) - s_0)(s(z) + s_0)]$ (fig. 134; $\Gamma > 0$, $a^2 < \rho$; las semifranjas del t -plano deben ser pegadas a lo largo del corte común). En el caso general, $\psi = 0$ en la base inferior del rectángulo del u -plano y φ varía

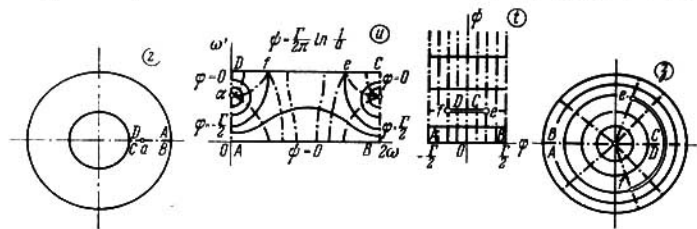


FIG. 133

entre $-\frac{\Gamma}{2}$ y $\frac{\Gamma}{2} + \Gamma_2$ y en la base superior $\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{1}{a} + \frac{\Gamma_2}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho}$ y φ varía entre 0 y Γ_2 ($\Gamma > 0$). 2) $f(z) = \Phi[u(z)]$, donde

$$\Phi(u) = \frac{V}{2\omega} \left[ke^{iz} \frac{\vartheta_1' \left(\frac{u-a}{2\omega} \right)}{\vartheta_1 \left(\frac{u-a}{2\omega} \right)} + ke^{-iz} \frac{\vartheta_1' \left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega} \right)}{\vartheta_1 \left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega} \right)} \right] + \\ + \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2\pi i} \ln \frac{\vartheta_1 \left(\frac{u-a}{2\omega} \right)}{\vartheta_2 \left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega} \right)} + \frac{\Gamma_2}{2\omega} u + C \quad \text{y} \quad u(z) = a + \frac{k}{z} + \dots$$

transforma el recinto D en un anillo circular. 1335. $u = \alpha x - \beta y$, $v = \beta x + \alpha y$, $E = -i\bar{c}$ un doblete (∞ ; $-i\bar{c}$). 1336. $u = 2q\varphi$, $v = 2q \ln \frac{1}{r}$; $E = \frac{2q}{r} e^{i\varphi}$; cargas puntuales (a ; $2q$) y (∞ ; $-2q$). 1337. $u = 2q \arg \frac{z-b}{z-a}$, $v = 2q \ln \left| \frac{z-a}{z-b} \right|$; $E = \frac{2q(\bar{b}-\bar{a})}{(z-a)(z-b)}$; cargas puntuales (b ; $2q$) y (a ; $-2q$). 1338. $u = -2q \arg \times (z^2 - a^2)$, $v = 2q \ln |z^2 - a^2|$; $E = -\frac{4q\bar{z}}{z^2 - a^2}$; cargas puntuales (a ; $-2q$), ($-a$; $-2q$) y (∞ ; $4q$) (véase la figura 113). 1339. $u = \frac{|p|}{r} \sin(\varphi - \alpha)$, $v = \frac{|p|}{r} \cos(\varphi - \alpha)$; $E = \frac{|p|}{r^2} e^{i(2\varphi - \alpha)}$; un doblete (0 ; p) (fig. 135). 1340. $u = \left(r \pm \frac{R^2}{r} \right) \cos \varphi$,

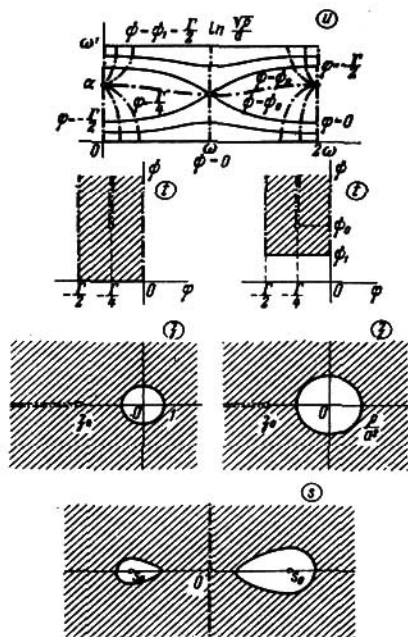


FIG. 134

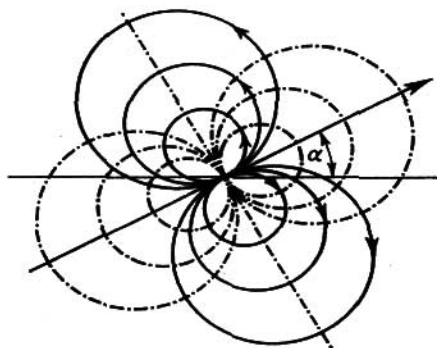


FIG. 135

$v = \left(r \pm \frac{R^2}{r} \right) \text{sen } \varphi$; $E = -i \left(1 \mp \frac{R^2}{r^2} e^{2i\varphi} \right)$; dobles (0; $\mp iR^2$) y (∞ ; $-i$) (véanse las figuras 110 y 111). 1341. $u = -py + 2q\varphi$, $v = px + 2q \ln \frac{1}{r}$; $E = -p + \frac{2q}{r} e^{i\varphi}$; cargas puntuales (0; $2q$) y (∞ ; $-2q$); doblete (∞ ; p) (compárese con la fig. 118). 1342. $u = -py + \sum_{k=1}^n 2q_k \varphi_k$, $v = px + \sum_{k=1}^n 2q_k \ln \frac{1}{r_k}$, $E = -p + \sum_{k=1}^n \frac{2q_k}{r_k} e^{i\varphi_k}$, donde $z - a_k = r_k e^{i\varphi_k}$; cargas puntuales (a_k ; $2q_k$); doblete (∞ ; p) (fig. 136). 1343. 1) La magnitud de la carga puntual se conserva;

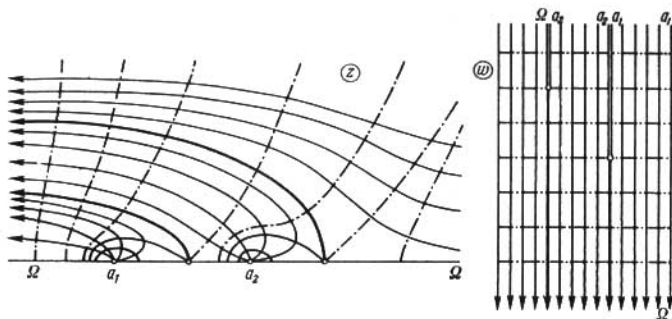


FIG. 136

la ley de variación del momento de un doblete es la misma que en el problema 1289; 2) el signo de la carga se altera; la ley de variación del momento de un doblete es la misma que en el problema 1291 para la prolongación a través de la línea de corriente. 1344. $v = 2qg(z, a)$. 1345. $w = 2qi \ln \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} + c$.

1346. 1) y 2) $w = 2qi \ln \frac{R^2 - \bar{z}_0 z}{R(z - z_0)} + c$. 1347. $w = 2qi \ln \frac{1}{f(z)} + \text{const}$, donde

$f(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - c^2}}{a - b}$, $c^2 = a^2 - b^2$. 1348. $w = 2qi \ln \frac{1}{f(z)} + c$, donde $f(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - R^2}}{R}$. 1349. $w = 2qi \ln \frac{1}{f(z)}$, donde $t = f(z)$ se determina de la

ecuación $z = \frac{2d}{B \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)} \int_t^1 \frac{\sqrt{1-t^4}}{t^2} dt + \frac{d}{2}$ (véanse el problema 1236

para $n=4$ y 1271). 1350. $w = 2qi \ln \frac{1}{f(z)} + c$, donde $f(z) = \frac{1 - cn \left(\frac{K}{a} z, k \right)}{\text{sn} \left(\frac{K}{a} z, k \right)}$

y k se determina de la ecuación $\frac{K'}{K} = \frac{b}{a}$ (véase el problema 1268).

$$1351. \quad w = 2qi \ln \frac{1}{f(z)} + c, \quad \text{donde } f(z) = \frac{\vartheta_1\left(\frac{z-z_0}{4a}\right) \vartheta_1\left(\frac{z-z_2}{4a}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{z-z_1}{4a}\right) \vartheta_1\left(\frac{z-z_3}{4a}\right)} \quad \text{y } \omega = 2a,$$

$$\omega' = 2ib, \quad z_1 = (4a - x_0) + iy_0, \quad z_2 = (4a - x_0) + i(4b - y_0), \quad z_3 = x_0 + i(4b - y_0).$$

$$1352. \quad w = \frac{\rho i}{z-a} + \frac{\rho^* i}{z-a^*} + c \left(a \neq 0, \quad a^* = \frac{R^2}{a}, \quad \rho^* = \frac{R^2 \bar{\rho}}{a^2} \right), \quad w =$$

$$= \frac{\rho i}{z} - \frac{\bar{\rho} i}{R^2} z + c \quad (a=0), \quad c \text{ es un número real. Compárese con el problema 1294,}$$

$$2). \quad 1353. \quad w = \frac{\rho i}{z-a} + \frac{\rho^* i}{z-a^*} + c \left(a \neq \infty, \quad a^* = \frac{R^2}{a}, \quad \rho^* = \frac{R^2 \bar{\rho}}{a^2} \right), \quad w = \frac{\rho i}{z} - \frac{\bar{\rho} i}{R^2} z +$$

$$+ c \quad (a = \infty). \quad \text{Véase el problema 1296, 2).} \quad 1354. \quad w = \rho (z \cos \alpha +$$

$$+ i \sin \alpha \sqrt{z^2 - R^2}) + \text{const.} \quad 1355. \quad w = \frac{\rho}{a-b} [(az - b \sqrt{z^2 - c^2}) \cos \alpha -$$

$$- i (bz - a \sqrt{z^2 - c^2}) \sin \alpha] + \text{const.}, \quad \text{donde } c^2 = a^2 - b^2. \quad 1356. \quad w =$$

$$= \frac{2K\rho}{a \sin u} (\cos \alpha + i \sin \alpha \operatorname{cn} u), \quad \text{donde } u = \frac{K}{a} z \quad \text{y } \frac{K'}{K} = \frac{b}{a} \quad (\text{véase el pro-}$$

$$\text{blema 1350).} \quad 1357. \quad 1) \text{ Si } \rho i = \rho e^{i\alpha}, \text{ se tiene}$$

$$f(z) = \rho t'(a) \left\{ \left[\frac{1}{t(z)} + t(z) \right] \cos \alpha + i \left[\frac{1}{t(z)} - t(z) \right] \sin \alpha \right\} + c;$$

$$2) \quad f(z) = \rho i t(z) - \frac{R^2 \bar{\rho} i}{t(z)} + c = \rho \left\{ \left[t(z) + \frac{R^2}{t(z)} \right] \cos \alpha + i \left[t(z) - \frac{R^2}{t(z)} \right] \sin \alpha \right\} + c,$$

donde $\rho i = \rho e^{i\alpha}$. Las funciones que figuran entre los corchetes realizan transformaciones conformes normadas de D en el exterior de un segmento horizontal y, respectivamente, vertical ¹⁾.

$$1358. \quad w = \sum_{k=1}^n 2q_k i \ln \frac{1}{f(z, a_k)} + i f'(a, a) \left[\frac{\rho}{f(z, a)} - \bar{\rho} f(z, a) \right] + c, \quad \text{donde}$$

$$f(z, a_k) \text{ y } f(z, a) \text{ transforman conformemente } D \text{ en el círculo unidad con la}$$

$$\text{normalización } f(a_k, a_k) = f(a, a) = 0, \quad f'(a, a) > 0 \text{ y } c \text{ es un número real.}$$

$$1360. \quad v(z, a) = \begin{cases} -\ln \left| \frac{1}{z-\bar{a}} \right|, & \text{si } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ -\ln \left| \frac{1}{z-a} \right|, & \text{si } \operatorname{Im} z \leq 0; \end{cases}$$

$$\rho(x, a) = -\frac{1}{\pi} \frac{\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \quad (a = \alpha + i\beta). \quad 1361. \quad 1) \text{ En el interior del círculo se}$$

$$\text{tiene}$$

$$v(z, a) = \ln \left| \frac{R^2 - \bar{a}z}{R} \right| = \begin{cases} - \left[\ln \left| \frac{1}{z - \frac{R^2}{\bar{a}}} \right| + \ln \left| \frac{a}{R} \right| \right], & \text{si } a \neq 0, \\ \ln R, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

¹⁾ Véase el complemento de M. Schiffer al libro: R. Courant, Dirichlet's Principle, Conformal Mappings and Minimal Surfaces, Interscience Publ., New York, 1950, § 1, n.º 2.

En el exterior del círculo se tiene $v(z, a) = -\ln \frac{1}{|z-a|}$. La intensidad

$$\rho(Re^{i\theta}, a) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |a|^2}{R^2 - 2R|a|\cos(\theta - \alpha) + |a|^2} \quad (a = |a|e^{i\alpha}).$$

En particular, para $a=0$ tiene un valor constante $-\frac{1}{2\pi R}$ y crea un potencial de distribución que tiene el valor constante $\ln R$ en el interior del círculo y es igual a $\ln |z|$ en el exterior del círculo.

$$2) \quad v(z, a) = \begin{cases} \ln \frac{|R^2 - \bar{a}z|}{R}, & a \neq \infty, |z| \geq R, \\ -\ln \frac{1}{|z-a|}, & a \neq \infty, |z| \leq R; \\ v(z, \infty) = \begin{cases} \ln |z|, & \text{si } |z| \geq R, \\ \ln R, & \text{si } |z| \leq R; \end{cases} \end{cases}$$

$$\rho(Re^{i\theta}, a) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{|a|^2 - R^2}{R^2 - 2R|a|\cos(\theta - \alpha) + |a|^2} \quad (a = |a|e^{i\alpha} \text{ y } a \neq \infty).$$

Si $a = \infty$, se induce el mismo potencial que en el caso anterior para $a=0$.

$$1362. \quad v(z, \infty) = \ln \frac{|z + \sqrt{z^2 - R^2}|}{2}, \quad \rho(x, \infty) = -\frac{1}{2\pi \sqrt{R^2 - x^2}} \quad (|x| < R).$$

$$1363. \quad v(z, \infty) = \ln \frac{|z + \sqrt{z^2 - c^2}|}{2} \text{ en el exterior de la elipse y } v(z, \infty) = -\ln 2(\alpha - \beta) \text{ en el interior de la elipse. La intensidad es } \rho(z, \infty) = -\frac{1}{2\pi \sqrt{|\xi^2 - c^2|}} \text{ (}\xi \text{ se encuentra sobre la elipse, } c^2 = \alpha^2 - \beta^2\text{). } 1364. \quad \rho(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n}. \quad 1365. \quad \rho(\zeta) = \frac{1}{2\pi R}. \quad 1366. \quad \rho(x) = \frac{1}{2\pi \sqrt{R^2 - x^2}} \quad (|x| < R).$$

$$1367. \quad \rho(\zeta) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|\xi^2 - c^2|}} \quad (c^2 = a^2 - b^2). \quad 1368. \quad R. \quad 1369. \quad \frac{1}{2R}. \quad 1370. \quad \frac{1}{2(a-b)}.$$

1371. a . 1374. Si $\omega(z; \Delta)$ es la medida armónica del intervalo Δ del eje real en el punto z respecto al semiplano superior, es decir, $\omega(z; \Delta) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial n} \ln \times$

$\times \frac{1}{|t-z|} dt$ (véanse los problemas 1065 y 1373), se tiene (omitiendo la constante real aditiva): 1) $w = \frac{\varphi}{\pi} \ln(z-a)$, $v = \varphi \omega(z; \Delta)$, $\Delta = (-\infty, a)$; 2) $w = \frac{\varphi}{\pi} \ln \frac{z-b}{z-a}$, $v = \varphi \omega(z; \Delta)$, $\Delta = (a, b)$; 3) $w = \frac{1}{\pi} \left[\varphi_1 \ln(z-a_1) + \varphi_2 \ln \frac{z-a_2}{z-a_1} + \dots + \varphi_n \ln \frac{z-a_n}{z-a_{n-1}} \right]$, $v = \sum_{k=1}^n \varphi_k \omega(z; \Delta_k)$, $\Delta_k = (a_{k-1}, a_k)$, $a_{-1} = -\infty$;

4) w y v se obtienen de las expresiones, indicadas en la respuesta al punto 3), sustituyendo φ_k por $\varphi_k - \varphi_0$ y agregando $i\varphi_0$ a w y φ_0 a v . El potencial se puede representar también en la forma $\sum_{k=0}^n \varphi_k \omega(z; \Delta_k)$, $\Delta_0 = (a_n, \infty)$. 1375. 1) $w(z) = \frac{id}{\ln \mu} \ln z + \text{const}$, $v(z) = \frac{d}{\ln \mu} \ln r + \text{const}$, donde $\mu = \frac{r_2}{r_1}$; 2) $w(z) =$

$= \frac{id}{\ln \mu} \ln t(z) + \text{const}$, $v(z) = \frac{d}{\ln \mu} \ln |t(z)| + \text{const}$, donde μ es el módulo del recinto D (véase la pág. 37) y $t(z)$ transforma conformemente D en un anillo circular. 1377. $\omega(z)$ se determina mediante la fórmula indicada en el texto del problema 1376, donde:

$$1) t(z) = \sqrt{\mu} \frac{z - \sqrt{a^2 - R^2}}{z + \sqrt{a^2 - R^2}}, \quad \mu = \frac{a}{R} + \sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 1};$$

$$2) \text{ y } 3) t(z) = \sqrt{\mu} \frac{z - x_1}{z - x_2}, \quad \mu = \left(\frac{R - x_1}{R - x_2}\right)^2,$$

donde x_1 y x_2 se determinan de la ecuación $x^2 + \frac{r^2 - R^2 - a^2}{a}x + R^2 = 0$ ($x_1 < x_2$);

$$4) t(z) = \frac{1}{c} (z + \sqrt{z^2 - c^2}), \quad \mu = \frac{a+b}{c}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2};$$

$$5) t = e^{\frac{\pi K + u}{K'}}, \quad z = \text{sn}(u, k), \quad \mu = e^{\frac{2\pi K}{K'}} \quad (|\text{Re } u| < K, |\text{Im } u| \leq K' \text{ (véase el problema 1267, 1)});$$

$$6) t = e^{\frac{\pi K + u}{K'}}, \quad z = \frac{2Kh}{\pi} \left[Z(u) + \frac{\text{dn } u \text{ cn } u}{\text{sn } u} \right], \quad \mu = e^{\frac{2\pi K}{K'}}, \text{ donde } k \text{ se determina de las ecuaciones } KZ(\mu) = \frac{\pi h}{2a}, \text{dn}^2 \beta = \frac{E}{K} \text{ (véase el problema 1267, 15)}.$$

$$1379. 1) \omega_1(z) = 1 - \frac{\ln |z|}{\ln \mu}, \quad \omega_2(z) = \frac{\ln |z|}{\ln \mu};$$

$$\rho_1(\zeta) = -\rho_2(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\mu \ln \mu} & \text{sobre } |z| = 1, \\ -\frac{1}{2\pi\mu \ln \mu} & \text{sobre } |z| = \mu; \end{cases} \quad \rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{12} = -\rho_{21} = \frac{1}{\ln \mu};$$

$$2) \omega_1(z) = 1 - \omega_2(z), \quad \omega_2(z) = -\frac{\ln |t(z)|}{\ln \mu};$$

$$\rho_1(\zeta) = -\rho_2(\zeta) = \begin{cases} \left| \frac{t'(\zeta)}{t(\zeta)} \right| \frac{1}{\ln \mu} & \text{sobre } \Gamma_1 \\ -\left| \frac{t'(\zeta)}{t(\zeta)} \right| \frac{1}{\ln \mu} & \text{sobre } \Gamma_2; \end{cases} \quad \rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{12} = -\rho_{21} = \frac{1}{\ln \mu},$$

donde $t(z)$ transforma conformemente D en el anillo $1 < |t| < \mu$, de modo que el contorno Γ_1 se transforma en la circunferencia $|t| = 1$. 1381. $v(z) =$

$= \text{Im } f(z) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \omega_k(z)$, donde $f(z)$ transforma conformemente D en el plano con cortes horizontales, con la particularidad de que

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\rho i}{z-a} + \dots, & \text{si } a \neq \infty, \\ \rho i z + \dots, & \text{si } a = \infty. \end{cases}$$

$$1382. v(z) = 2qg(z, a) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \omega_k(z), \quad \omega_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds.$$

1383. Si $f(a) = \infty$, el campo está formado por el doblete $(a; \rho)$, donde ρ se determina del desarrollo de $f(z)$ en una vecindad del punto a :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\rho i}{z-a} + \dots, & \text{si } a \neq \infty, \\ \rho i z + \dots, & \text{si } a = \infty. \end{cases}$$

1384. 1) Si $f(a)=0$ y $f(b)=\infty$, el campo está formado por cargas puntuales ($a; 2q$), ($b; -2q$) y el flujo del vector intensidad a través de cada contorno frontera es igual a cero; 2) si $f(a)=0$, el campo está formado por una carga puntual ($a; 2q$) y el flujo del vector intensidad a través del contorno frontera, correspondiente a la circunferencia, en dirección de la normal exterior para el recinto D es igual a $4\pi q$ y a través de cada uno de los contornos restantes es igual a cero; 3) el campo es regular en todo punto. El flujo del vector intensidad a través de los contornos frontera, que se transforman en circunferencias, en la dirección de la normal exterior para D es igual a $\pm 4\pi q$ (el signo «+» corresponde al contorno que se transforma en la circunferencia exterior) y a través de cada uno de los restantes contornos es igual a cero. 1385. Véanse los proble-

mas 1332 y 1334. 1386. 1) $v(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \omega_k(z) + c$, donde α_k se determinan unívocamente del sistema

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_{ik} \alpha_k = 2q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

(véase el problema 1077) y c es un número real arbitrario. El problema equivale a la construcción en D de una corriente que circunda los contornos frontera Γ_k con las circulaciones $4\pi q_k$ ($k=1, 2, \dots, n$), si $\infty \in D$, y con las circulaciones $4\pi q_k$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) y $-4\pi q_n$, si $\infty \notin D$ (Γ_n es el contorno exterior). 2) $v(z) = v_0(z) - 2qg(z, a)$, donde $v_0(z)$ se determina, igual que en el punto 1), a través de las cargas distribuidas $2q_k + 2q'_k$, donde $q'_k = -\frac{q}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial g(s, a)}{\partial n} ds$.

1387. $v(z) = 2q_1 \ln \frac{r_2}{|z|} + c$, si $q=0$ y $v(z) = 2(q_1 - \lambda q) \ln \frac{r_2}{|z|} - 2qg(z, a) + c$, donde

$$\lambda = \frac{\ln a}{\ln \rho}, \quad g(z, a) = |z|^{\lambda} \ln \left| \frac{\vartheta_1 \left(\frac{\ln z + \ln a}{2\pi i} \right)}{\vartheta_1 \left(\frac{\ln z - \ln a}{2\pi i} \right)} \right|$$

para $\tau = \frac{\ln \rho}{\pi i}$, siendo $\rho < a < 1$, si $q \neq 0$ (en las denotaciones del problema 1334 la función de Green es $g(z, a) = \text{Im} \Phi \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln z \right)$ para $\Gamma = 2\pi$ y $\Gamma_2 = -2\pi$; lo último se obtiene de la condición $\psi = 0$ en la frontera del anillo). 1388. El manantial ($a; q$) se transforma en el manantial ($a^*; -q$), donde a^* es el punto simétrico de a . Además,

$$u = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z, a)|} + c,$$

donde $f(z, a)$ transforma conformemente el recinto D en el círculo unidad (aquí y en lo sucesivo el coeficiente de conducción térmica k se toma igual a 1).

1389. $u = \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \bar{a}}{z - a} \right| + c$. 1390. $u = \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{R^2 - \bar{a}z}{R(z - a)} \right| + c$. 1391. $u = \frac{q}{2\pi} \ln \left| \frac{\text{sen} \frac{\pi z}{2a} + i \text{sh} \frac{\pi h}{2a}}{\text{sen} \frac{\pi z}{2a} - i \text{sh} \frac{\pi h}{2a}} \right| + c$. 1392. $u = \frac{q}{2k} \ln \left| \frac{t + \frac{i}{\sqrt{k}}}{t - \frac{i}{\sqrt{k}}} \right| + c$, $t = \text{sn} \left[\frac{K}{a} (z + ib), u \right]$, donde k se determina de la relación $\frac{K'}{K} = \frac{2b}{a}$. 1393. 1) La

función de Green $g(z, a)$ del recinto D puede considerarse como la temperatura creada en D por el manantial térmico $(a; 2\pi)$, cuando la temperatura en la frontera es igual a cero; 2) $u(z) = \frac{q}{2\pi} g(z, a) + \sum_{k=1}^n u_k \omega_k(z)$, donde $\omega_k(z)$ es la medida armónica de Γ_k .

$$1394. u = \frac{q}{2\pi} g(z, a) + \frac{u_2 - u_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{|z|}{r_1} + u_1, \text{ donde } g(z, a) \text{ es la función de Green (véase la respuesta al problema 1387).}$$

Capítulo XI

$$1397. 1) \text{ y } 2) A = \frac{1}{2} [(a_1 + b_2) + i(a_2 - b_1)], B = \frac{1}{2} [(a_1 - b_2) + i(a_2 + b_1)],$$

$$C = c_1 + ic_2; \quad A_1 = \frac{1}{2\Delta} [(a_1 + b_2) + i(b_1 - a_2)],$$

$$B_1 = \frac{1}{2\Delta} [(b_2 - a_1) - i(a_2 + b_1)],$$

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} [(c_2 b_1 - c_1 b_2) + i(c_1 a_2 - c_2 a_1)].$$

4) La transformación (2) se reduce a la proyección de los z -puntos sobre la recta $w = \mu e^{i\frac{\beta - \alpha}{2}}$ ($-\infty < \mu < \infty$), a un giro alrededor del origen en ángulo β

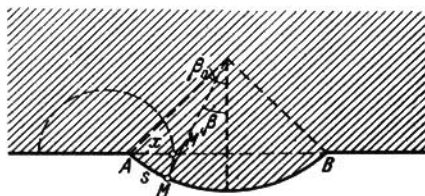


FIG. 137

y a una transformación de semejanza de coeficiente $|A|$. En este caso, todo el z -plano se transforma en la recta $w = \lambda e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}}$ ($-\infty < \lambda < \infty$). 1407. Se puede construir la transformación casiconforme necesaria de característica $\rho < \frac{R + |a|}{R - |a|}$.

$$1408. u = \frac{x}{\cos \alpha}, \quad v = y - x \operatorname{tg} \alpha, \quad \rho = \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}. \quad 1409. \text{ Solución. Mediante}$$

la función $\zeta = \ln \frac{z-a}{z-b}$ (los valores $z=a$ y $z=b$ corresponden a los puntos A y B) transformamos conformemente el biángulo dado en una franja de anchura $\pi + \beta_0$. Comprimos esta franja hasta obtener una franja de anchura π (una

transformación casiconforme de característica $\rho = 1 + \frac{\beta_0}{\pi}$) y, empleando la función inversa $z(\zeta)$, transformamos esta última franja en una franja de anchura π . Por otra parte, el arco AM (fig. 137) de longitud s ocupará la posición del segmento AM' de longitud x ; el punto M se desplace por una circunferencia de Apolonio respecto a los puntos A y B (se indica mediante una línea punteada) y además

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\cos^2 \frac{\beta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \geq \cos^2 \frac{\beta_0}{2}$$

(demuestre esto!). En el semiplano obtenido dilatamos la semifranja vertical que se apoya en el segmento AB hasta obtener la longitud del arco \overline{AB} y de manera que se conserven las longitudes a lo largo del arco \overline{AB} . La transformación casiconforme resultante es de característica

$$\rho \leq \left(1 + \frac{\beta_0}{\pi}\right) \sec^2 \frac{\beta_0}{2}.$$

$$1411. A = \frac{1}{4} [(a-d) + i(c+b)], \quad B = \frac{1}{4} [(a+d) + i(c-b)], \quad F = \frac{1}{2} (f + ig).$$

1412. $b = q_2(z) \bar{a}$ ó $b = \frac{1}{q_2(z)} \bar{a}$. En particular, se puede tomar $\omega = \omega + q_2(z) \bar{\omega}$. La transformación $w = a\omega + b\bar{\omega}$ es no degenerada, si $\{q_2(z)\} \neq 1$.

1413. $b = \lambda \bar{a}$, donde λ se determina de la ecuación del problema $\overline{q_2} \lambda^2 - \lambda (1 + |q_2|^2 - |q_1|^2) + q_2 = 0$ o bien $(\lambda - q_2) \left(\frac{1}{\lambda} - \overline{q_2}\right) = |q_1|^2$. La transformación es no degenerada, si $|q_1| + |q_2| < 1$ ó $\|q_1\| - \|q_2\| > 1$.

1414. Los términos superiores de la ecuación del problema determinan una transformación casiconforme de dos pares de características $(\rho, \theta), (\rho_1, \theta_1)$, que dependen de $q_1(z)$ y $q_2(z)$. La transformación $\zeta(z)$ es una transformación casiconforme de un par de características ρ, θ ; $q_1^* = -\frac{\rho-1}{\rho+1} e^{2i\theta}$, $q_2^* = \frac{\rho_1-1}{\rho_1+1} e^{2i\theta_1}$, (véanse los problemas 1401 y 1403).

$$1422. F(z) = -2z \ln \ln \frac{1}{r} + 2z \ln \ln \frac{1}{R};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -2 \ln \ln \frac{1}{r} - 2 \frac{e^{i\varphi} \cos \varphi}{\ln r} + 2 \ln \ln \frac{1}{R}; \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -2i \ln \ln \frac{1}{r} - 2 \frac{e^{i\varphi} \sin \varphi}{\ln r} + 2i \ln \ln \frac{1}{R}; \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= -2 \ln \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{r} + 2 \ln \ln \frac{1}{R}, \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} &= \varphi(z) = \frac{e^{2i\varphi}}{\ln \frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

LA EDITORIAL MIR PUBLICA

V. Mijailov

**ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS
PARCIALES**

Este libro representa en sí un curso universitario de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Recurriendo a los problemas de contorno para las ecuaciones elípticas de segundo orden y al problema de Cauchy, así como a los principales problemas mixtos para las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas de segundo orden, el autor expone en su libro los métodos modernos de exploración de los problemas correspondientes. Estos métodos, basados sobre el concepto de soluciones generalizadas, permiten tratar las ecuaciones con coeficientes variables de la misma manera que se emplea para el estudio de las ecuaciones más simples, esto es, la ecuación de Poisson, la de onda y la ecuación de conducción de calor. A la par con las cuestiones de existencia y unicidad y la exploración de las propiedades cualitativas de los problemas de contorno, en el libro se presta gran atención a los métodos aproximados de resolución de éstos.

La exposición se acompaña de un gran número de problemas destinados, principalmente, para profundizar y ampliar el contenido del libro. Con el mismo objetivo se dan las listas de la literatura adicional.