J. IKRAMOV

PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL

PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL

Х. Д. Икрамов

ЗАДАЧНИК ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Издательство «Наука» Москва

J. Ikrámov

Problemas de álgebra lineal

Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por S. Bulánov

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-001288-5

INDICE

PREFACIO

El curso conjunto de álgebra lineal y de geometría analítica se enseña a los estudiantes de la Facultad de Matemáticas de Cálculo y Cibernética de la Universidad Lomonósov de Moscú durante los dos primeros semestres. El profesor que imparte esta disciplina confronta grandes dificultades. Para aclararlos hagamos algunas comparaciones con programas de cursos análogos de la Facultad de Matemáticas y Mecánica de la Universidad.

El programa de la Facultad de Matemáticas de Cálculo está constituido por una parte considerable del curso de geometría analítica que se estudia en la Facultad de Matemáticas y Mecánica de la Universidad (excluyendo solamente la clasificación afín de las líneas y superficies de segundo orden, así como de los elementos de la geometría proyectiva) y por un curso completo de álgebra lineal. Este último trata las cuestiones que en la Facultad de Matemáticas y Mecánica generalmente se omiten, tales como, por ejemplo, los números singulares del operador, las pseudosoluciones de sistemas de ecuaciones lineales, etc. La especificidad de la facultad de CNC obliga al profesor a llamar la atención de los estudiantes sobre la inestabilidad de la mayoría de las nociones del álgebra lineal clásica (dependencia lineal, degeneración, estructura de Jordan. etc.) y de sus métodos, así como indicar las vías que conducen a la solución estable de los problemas de álgebra. La realización de este programa exige introducir en el curso elementos de la teoría de espacios lineales normalizados para obtener en adelante resultados métricos concretos: estimación de las perturbaciones de la solución de un sistema de ecuaciones, valores propios de una matriz, etc. Y todo esto debe ser realizado en un tiempo considerablemente más corto que en caso de los cursos del álgebra y la geometría que se dictan en las facultades de Matemáticas y, además, no ha de perderse el nivel de rigurosidad matemática.

Es evidente que sin una modificación sustancial del curso tradicional no resulta posible conseguirlo. El *Álgebra lineal* de V. Voevodin (Editorial Mir, 1986) emprendió un intento precisamente en este sentido. Esta obra refleja la experiencia del autor que impartió conferencias en la facultad de Matemáticas de Cálculo y Cibernética durante muchos años.

Indiquemos algunas particularidades del curso de Voevodin que permiten reducir el tiempo del conferenciante.

La noción del espacio lineal suficientemente preparada por el álgebra vectorial se ofrece al comienzo del curso. Esto elimina el paralelismo tradicional, en cuyo caso la teoría del espacio lineal se enseña prácticamente tres veces: primero, en la geometría analítica aplicada a conjuntos de vectores geométricos, luego en la descripción de la estructura del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en un espacio aritmético y por fin en el caso general.

En los capítulos posteriores la exposición de la geometría y del álgebra también está dada simultáneamente; además, cada nueva noción geométrica argumenta una generalización n-dimensional. Así, por ejemplo, el producto escalar de vectores geométricos sirve de base para la introducción de los espacios euclídeos y unitarios; la fórmula que permite calcular el volumen del paralelepípedo tridimensional impulsa la construcción de la teoría de volúmenes n-dimensionales, de donde se deduce igualmente la teoría del determinante considerado como el volumen de un paralelepípedo orientado en el espacio aritmético; las rectas y los planos de un espacio tridimensional son el motivo que permite introducir la noción de plano en un espacio lineal arbitrario; el problema geométrico de la intersección de hiperplanos facilita revelar la construcción del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. También existen ejemplos de género distinto cuando los resultados geométricos se deducen como simples corolarios de los teoremas algebraicos generales; así ocurre, por ejemplo, en el caso de la clasificación cartesiana de líneas y superficies de 2° orden.

La modificación del curso de conferencias motivó también una reconstrucción considerable de los seminarios. Resulta que uno de los manuales de problemas de álgebra lineal que se utilizan en la URSS —D. Faddéiev, I. Sominski *Problemas de álgebra superior* (Editorial Mir, Moscú, 1980)—, puede aplicarse en forma muy limitada, pues supone que al resolver los problemas de espacios lineales y euclídeos los estudiantes disponen de las nociones del álgebra matricial y de sistemas de ecuaciones lineales. Esta condición, según hemos señalado más arriba, no se cumple en el presente libro. Además, hacían falta problemas para los temas no tradicionales del curso. A todo esto se debe la colección de problemas de álgebra lineal que proponemos y que se adjunta al curso de V. Voevodin.

La estructura de este manual se atiene estrictamente a la de la obra de V. Voevodin. Algunos cambios insignificantes vienen determinados por las particularidades del proceso docente. Así, el párrafo dedicado a los espacios métricos fue incluido en el capítulo 8, por cuanto el tema correspondiente del curso de conferencias se enseña al final del primer semestre y no queda tiempo para «consolidar» en las clases los conocimientos adquiridos.

La sucesión de temas seleccionados en el curso de V. Voevodin creó ciertos problemas para el autor de este libro. Por ejemplo, para resolver los problemas de cálculo de los dos primeros capítulos es imposible recurrir al aparato matricial y utilizar la mayor parte de los resultados referentes a sistemas de ecuaciones lineales. Pero ¿qué método se puede utilizar en este caso? Resulta que para resolver los problemas de cálculo típicos para los espacios euclídeo y lineal es suficiente combinar las transformaciones elementales de sistemas de vectores con el método de Gauss como una comprobación de la compatibilidad, la definición y la búsqueda de la solución *cualquiera* de un sistema de ecuaciones lineales (para obtener más detalles sobre esto véanse los §§ 1.0 y 2.0). De acuerdo con ello, en la obra de V. Voevodin el método de Gauss está descrito en el capítulo 2, precisamente cuando éste se hace necesario en las clases prácticas. Los problemas que utilizan *todas* las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales están dados en el libro solamente a partir del capítulo 4. Notemos que el principio aplicado aquí es el mismo que en la obra de A. Kúrosh «Curso del álgebra superior» (Editorial Mir, Moscú, 1987) que comienza describiendo el método de eliminación sucesiva de incógnitas.

El lector verá que los primeros seis capítulos de este manual y algunos párrafos del capítulo 7 están dedicados a temas bien tradicionales. Pero también aquí, ateniéndose al carácter específico de la Facultad de Matemáticas de Cálculo, el autor trata de subrayar los aspectos de cálculo de las cuestiones examinadas. Por eso, en el § 3.4 se presta gran atención a las numerosas cuestiones que surgen como consecuencia de la realización numérica del método de Gauss. Por esta razón, en una serie de casos los algoritmos de cálculo, utilizados eficazmente en la práctica, son presentados en forma de sucesión de problemas.

Una condición exigida de todo libro de problemas consiste en que éste contenga un número suficiente de problemas útiles y substanciosos para los trabajos en las lecciones prácticas, deberes de casa, trabajos de control y pruebas. El autor tiene la esperanza de que esta condición haya sido cumplida. Al mismo tiempo, él concebía su tarea de una manera más amplia, pretendiendo ofrecer a los estudiantes mejor preparados material para el trabajo autodidacta y en algunos casos aproximarlos a los problemas actuales del álgebra de cálculo. Así, en el libro fue incluida la hipótesis de Wilkinson sobre la rapidez de crecimiento de los elementos en el método de Gauss (§ 3.4), la descripción del algoritmo de Strassen para la multiplicación rápida de matrices (§ 5.4), los resultados de Wilkinson sobre los valores propios mal condicionados (§ 8.4), etc.

Unas notas más sobre la utilización de este manual. El número de cada problema contiene tres cifras: la primera indica el capítulo, la segunda, el párrafo, y la tercera, el problema. De manera análoga se numeran las fórmulas, a las que en adelante pueden hacerse referencias. En este caso, la numeración de las fórmulas es independiente de la de los problemas.

Para mayor comodidad cada capítulo tiene párrafo «cero» que define las nociones y, en algunos casos, los métodos utilizados en el capítulo. Algunos términos se definen en los problemas. Para facilitar al lector la búsqueda de «la fuente» de tal o cual término, al final del libro hay un índice de materias.

Ciertos problemas están marcados con asteriscos para llamar la atención. En los problemas de demostración el asterisco significa que se formula algo importante (cualquiera que sea la complejidad de la demostración) o bien que son necesarios ciertos razonamientos no ordinarios. Un problema de cálculo marcado con asterisco admite una solución no ordinaria que exige, en el caso típico, que se aplique una afirmación teórica. Para numerosos problemas marcados con asteriscos se dan indicaciones o la solución completa; en todo caso la clave para su resolución se halla en este manual o en la obra de V. Voevodin.

Al mismo tiempo se dan indicaciones o la resolución de numerosos problemas sin asteriscos, con el fin de mostrar el procedimiento más racional (desde el punto de vista del autor) para la solución de estos problemas. Hay que añadir que por regla general los problemas se agrupan de manera natural; en cada uno de estos grupos el problema principal lleva un asterisco, mientras que los demás son sus corolarios. Por eso, la ubicación misma del problema también contiene información acerca de éste.

J. Ikrámov

Capítulo 1

ESPACIOS LINEALES

§ 1.0. Terminología y generalidades

Llámase *espacio lineal sobre el cuerpo numérico P* a un conjunto V, si:

A. Para los elementos de este conjunto viene definida la *adición*, respecto a la cual V es un grupo conmutativo (abeliano). Esto significa que se cumplen las propiedades siguientes:

1. La adición es conmutativa: $x + y = y + x$.
2. La adición es asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. En V existe un *elemento nulo* 0 (y uno solo) que verifica la condición: $x + 0 = x$ para todo x de V.
4. Para todo elemento x de V existe un *elemento opuesto* $-x$ (y uno solo) tal que $x + (-x) = 0$.

B. Para todos los elementos de V está definida la *multiplicación por un número* del campo P. Para cualesquiera elementos x, y de V y números α, β de P deben ser cumplidas las propiedades siguientes:

1. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$.
2. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$.
3. $(\alpha\beta) x = \alpha (\beta x)$.
4. $1 \cdot x = x$.

Los elementos de un espacio lineal generalmente se llaman *vectores* y el espacio mismo se llama también *espacio vectorial*.

Si P es un campo de números reales o complejos, el espacio lineal (vectorial) sobre P se llama *real* o *complejo*, respectivamente.

En este libro, excluyendo algunos problemas del capítulo 1 *se estudian solamente los espacios reales y complejos*.

En un caso particular el espacio V puede constar de un solo elemento (véase el problema 1.1.1). Un tal espacio lineal se llama *nulo* (o *trivial*) y en adelante lo notaremos O. El número de elementos de todos los demás espacios reales o complejos es infinito.

Dicen que el vector y

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$$

es una *combinación lineal* de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ o que éste *se expresa linealmente* por estos vectores. El conjunto de todas las combinaciones lineales de un sistema fijo de vectores $x_1, \ldots, x_k$ se llama *cápsula lineal* de este sistema y se nota $L(x_1, \ldots, x_k)$.

Un sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ se llama sistema *linealmente dependiente* si por lo menos uno de los vectores x_i se expresa linealmente por otros vectores del sistema, y *linealmente independiente* en el caso contrario. A esta definición es equivalente la definición siguiente: un sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ es linealmente dependiente si existen números $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, entre los cuales por lo menos uno difiere de cero, tales que

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = 0,$$

y linealmente independiente si esta igualdad es posible cuando todos los números α_i son nulos.

En particular, la dependencia lineal de un sistema de dos vectores x, y significa que bien $y = \alpha x$, bien $x = \beta y$. Semejantes vectores x e y se llaman *colineales*.

Tiene lugar el siguiente *teorema fundamental de la dependencia lineal*: si cada uno de los vectores de un sistema linealmente independiente $y_1, \ldots, y_l$ se expresa linealmente por el sistema $x_1, \ldots$ $\ldots, x_k$, entonces $l \leqslant k$.

El sistema linealmente independiente de vectores $e_1, \ldots, e_n$, por el cual se expresa linealmente cualquier vector del espacio V, se llama *base* de este espacio. Un espacio lineal se llama *espacio de dimensión finita* si éste posee una base, y de *dimensión infinita* en el caso contrario.

A partir del § 1.4 examinamos solamente *los espacios lineales de dimensiones finitas.*

Todas las bases de un espacio de dimensión finita V están compuestas de un mismo número n de vectores; el número n se llama *dimensión* del espacio V y se nota dim V. El espacio V mismo se llama en este caso espacio *de dimensión n*. Por definición dim $O = 0$.

Los coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de la descomposición del vector x según la base $e_1, \ldots, e_n$:

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$$

se llaman *coordenadas* del vector x.

Dos espacios lineales dados sobre un mismo cuerpo se llaman espacios *isomorfos* si entre sus vectores está establecida una correspondencia biunívoca; además, la imagen de la suma de dos vectores es la suma de sus imágenes y la imagen del producto de un vector por un número es el producto de la imagen de este vector por el mismo número. La condición necesaria y suficiente de una correspondencia isomorfa entre dos espacios lineales es la coincidencia de sus dimensiones.

Un subconjunto L de un espacio lineal V se llama *subespacio lineal* de este espacio si respecto a las operaciones introducidas en V éste mismo constituye un espacio lineal.

Si L_1 y L_2 son subespacios lineales de V, el conjunto de vectores pertenecientes tanto a L_1 como a L_2 se llama *intersección* de estos subespacios y se nota $L_1 \cap L_2$. Llámase *suma* de los subespacios L_1

y L_2 al conjunto de todas las sumas $x_1 + x_2$, donde $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. La suma de subespacios se nota $L_1 + L_2$. Si para cada vector x de $L = L_1 + L_2$ la representación

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2$$

es única, L se llama *suma directa* de los subespacios L_1 y L_2 y se nota $L_1 \dot{+} L_2$.

La mayoría de los problemas de cálculo aducidos en este libro está asociada a dos espacios lineales concretos. He aquí una descripción más detallada de estos últimos.

1. **Espacio aritmético n-dimensional.** Son elementos de semejante espacio las colecciones ordenadas de n números reales o complejos cada una, llamadas *vectores n-dimensionales*. Conforme a esto se trata del espacio aritmético real o complejo, notándolos R_n y C_n. Si los vectores n-dimensionales se escriben en la forma

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \; y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

las operaciones sobre estos vectores se definen por las igualdades

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$
$$\lambda x = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n).$$

Entre las bases de un espacio aritmético hay una privilegiada por la naturaleza misma de este espacio. Esta base, compuesta de *vectores unitarios*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1), \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

se llama *base natural* de un espacio aritmético. Su carácter «privilegiado» consiste en el hecho de que en esta base no hace falta calcular las coordenadas del vector $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, puesto que los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son estas mismas.

2. **Espacio de polinomios de grado $\leqslant n$.** El polinomio de grado k

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k, \quad a_k \neq 0 \tag{1.0.2}$$

se entiende como un objetivo perfectamente definido por una colección ordenada de coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_k$ y la igualdad de dos polinomios, como la coincidencia de sus coeficientes de un mismo índice. En este caso los coeficientes de un polinomio pueden ser números reales o complejos; en los problemas se considera, generalmente, el primer caso y en esta obra el espacio de polinomios de grado $\leqslant n$ que tienen coeficientes reales se nota M_n. Los números mismos, sean reales o complejos, se consideran como polinomios de grado nulo, a excepción del número cero, cuyo grado no se define.

En el espacio de polinomios este número desempeña el papel de elemento nulo. Las operaciones sobre polinomios se reducen a operaciones análogas sobre sus coeficientes.

El polinomio (1.0.2) puede ser considerado también como una función de variable t, real o compleja. Sin embargo, la definición de la igualdad de dos funciones difiere de la definición «algebraica» de la igualdad de polinomios, adoptada anteriormente, a saber: las funciones se consideran iguales, si sus valores son iguales, cualesquiera que sean los valores de la variable. Es evidente que dos polinomios iguales en el sentido de la definición «algebraica» lo serán también como funciones de t. Sin embargo, la reciprocidad se establece al final del capítulo 4. Por eso en los primeros cuatro capítulos la expresión $f(c)$ debe ser interpretada como una notación abreviada del número $a_0 + a_1c + a_2c^2 + \ldots + a_kc^k$; la igualdad $f(c) = d$, como una notación abreviada de la condición impuesta sobre los coeficientes de polinomios examinados; $f(-t)$, como una notación abreviada del polinomio $a_0 - a_1t + a_2t^2 + \ldots + (-1)^ka_kt^k$; la igualdad $f(t) = f(-t)$ como una notación abreviada de las condiciones $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, . . ., etc.

Los problemas de cálculo planteados para el espacio aritmético son típicos para el presente capítulo:

1. Determinar, si el sistema de vectores dado es linealmente dependiente o linealmente independiente.
2. Hallar el número máximo de vectores linealmente independientes del sistema dado, que se llama rango del sistema.
3. Establecer, si el vector x se expresa por el sistema de vectores $y_1, \ldots, y_k$ y, en el caso afirmativo, calcular los coeficientes de la descomposición

$$x = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k.$$

Para resolver los problemas 1 y 2 se aplica el *«método de transformaciones elementales»* (véase 1.2.17, 1.2.18). Este método consiste en reducir el sistema dado, sin cambiar el rango, a un sistema de vectores cuya independencia lineal o cuyo rango son evidentes.

El problema 3 supone únicamente la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con ayuda del *método de Gauss* o el *método de eliminación sucesiva de incógnitas*. A este efecto, sin cambiar el conjunto de soluciones del sistema, este último se reduce a la forma más simple. Teniendo en cuenta las múltiples aplicaciones del método de Gauss, en los capítulos que siguen vamos a describirlo más detalladamente.

Sea dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(0)}x_n &= b_1^{(0)},\\
a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(0)}x_n &= b_2^{(0)},\\
a_{31}^{(0)}x_1 + a_{32}^{(0)}x_2 + a_{33}^{(0)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(0)}x_n &= b_3^{(0)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{m1}^{(0)}x_1 + a_{m2}^{(0)}x_2 + a_{m3}^{(0)}x_3 + \ldots + a_{mn}^{(0)}x_n &= b_m^{(0)}.
\end{aligned} \tag{1.0.3}$$

Supongamos que $a_{11}^{(0)} \neq 0$. Siempre se puede obtenerlo, si entre los coeficientes $a_{ij}^{(0)}$ hay diferentes de cero, permutando, en caso de necesidad, las ecuaciones del sistema y/o cambiando la numeración de incógnitas. Restemos ahora de los dos miembros de la segunda ecuación los respectivos miembros de la primera, multiplicados previamente por $a_{21}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$, luego de los dos miembros de la tercera ecuación, los respectivos miembros de la primera, multiplicados por $a_{31}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$, etc. Como resultado llegaremos a un sistema de la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}, \\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\
a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Aquí $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}$, $j = 1, \dots, n$; $b_1^{(1)} = b_1^{(0)}$; los otros elementos varían según las fórmulas:

$$
a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)}, \quad b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} b_1^{(0)}. \qquad (1.0.4)
$$

$i, j \geqslant 2$. El primer paso del método de Gauss está acabado. El coeficiente $a_{11}^{(0)}$ se llama *elemento rector del primer paso*.

Supongamos ahora que entre los coeficientes $a_{ij}^{(1)}$, $i, j \geqslant 2$ hay diferentes de cero y, en particular, $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Restemos de los dos miembros de la tercera ecuación y de las que le siguen los dos miembros de la segunda, multiplicados, respectivamente, por los números

$$
\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad \dots, \quad \frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.
$$

En este caso obtenemos el sistema

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + a_{13}^{(2)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(2)}x_n &= b_1^{(2)}, \\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}, \\
a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{mn}^{(2)}x_n &= b_m^{(2)}.
\end{aligned}
$$

El coeficiente $a_{22}^{(1)}$ se llama *coeficiente rector del segundo paso*.

Continuando así, finalmente, el sistema se reducirá a la forma

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(r-1)}x_1 + a_{12}^{(r-1)}x_2 + \ldots + a_{1,\,r-1}^{(r-1)}x_{r-1} + a_{1r}^{(r-1)}x_r + \ldots + a_{1n}^{(r-1)}x_n &= \\
= b_1^{(r-1)}, \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
a_{22}^{(r-1)}x_2 + \ldots + a_{2,\,r-1}^{(r-1)}x_{r-1} + a_{2r}^{(r-1)}x_r + \ldots + a_{2n}^{(r-1)}x_n &= b_2^{(r-1)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots \\
a_{r-1,\,r-1}^{(r-1)}x_{r-1} + a_{r-1,\,r}^{(r-1)}x_r + \ldots + a_{r-1,\,n}^{(r-1)}x_n &= b_{r-1}^{(r-1)}, \\
a_{rr}^{(r-1)}x_r + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n &= b_r^{(r-1)}, \\
0\cdot x_r + \ldots + 0\cdot x_n &= b_{r+1}^{(r-1)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots \\
0\cdot x_r + \ldots + 0\cdot x_n &= b_m^{(r-1)}.
\end{aligned}
\tag{1.0.5}
$$

Aquí $a_{11}^{(r-1)} \neq 0,\ a_{22}^{(r-1)} \neq 0,\ \ldots,\ a_{r-1,\,r-1}^{(r-1)} \neq 0,\ a_{rr}^{(r-1)} \neq 0$.

Si entre los números $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ hay números no iguales a cero, es evidente que el sistema (1.0.5) no tiene soluciones o, como dicen, es *incompatible*. Por consiguiente, el sistema equivalente (1.0.3) es también incompatible. La incompatibilidad del sistema podrá ser descubierta antes, si después de la eliminación sucesiva se obtiene la ecuación

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b,\ b \neq 0$$

o si la contiene el sistema inicial. Claro está que al obtener una tal ecuación dejamos de seguir el proceso.

Si $b_{r+1}^{(r-1)} = \ldots = b_m^{(r-1)} = 0$, el sistema (1.0.5) es *compatible* y para hallar sus soluciones es suficiente analizar las primeras r ecuaciones. En el caso cuando $r = n$ estas n ecuaciones forman *un sistema triangular*

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{1,\,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(n-1)}x_n &= b_1^{(n-1)}, \\
a_{22}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{2,\,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{2n}^{(n-1)}x_n &= b_2^{(n-1)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots \\
a_{n-1,\,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,\,n}^{(n-1)}x_n &= b_{n-1}^{(n-1)}, \\
a_{nn}^{n-1}x_n &= b_n^{(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Un tal sistema posee una única solución: la última ecuación da el valor unívoco de x_n y colocándolo en la penúltima ecuación se obtiene unívocamente x_{n-1}, etc. Un sistema de ecuaciones lineales que posee una única solución se llama *determinado*. De este modo, si el sistema (1.0.3) puede ser reducido a la forma triangular, éste es determinado. Este caso siempre tiene lugar, si se busca la descomposición del vector según la base del espacio.

Para $r < n$ las primeras r ecuaciones de (1.0.5) constituyen un sistema *de forma trapezoidal* que tiene una infinidad de soluciones.

Dando a las *incógnitas no principales* $x_{r+1}, \ldots, x_n$ valores numéricos arbitrarios hallamos por el método de Gauss valores bien determinados de las incógnitas $x_1, \ldots, x_r$. Este método permite hallar todas las soluciones del sistema (1.0.5) y, por consiguiente, del sistema (1.0.3). Un sistema de ecuaciones lineales que posee un número infinito de soluciones se llama *indeterminado*. Entonces, la forma trapezoidal de un sistema final del método de Gauss testimonia el carácter indeterminado del sistema inicial (1.0.3). Así será, por ejemplo, si se busca la descomposición del vector x respecto al sistema linealmente dependiente $y_1, \ldots, y_k$ bajo la condición de que x pertenece a $L(y_1, \ldots, y_k)$.

Notemos para concluir que todas las transformaciones del método de Gauss pueden ser realizadas sobre los elementos de una *matriz ampliada* compuesta de coeficientes del sistema (1.0.3):

$$\overline{A}_0 = \left\| \begin{matrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \ldots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \ldots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \ldots & a_{mn}^{(0)} & b_m^{(0)} \end{matrix} \right\| .$$

Para pasar a las matrices sucesivas $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_{r-1}$ se aplican las fórmulas de tipo (1.0.4). El método de transformaciones elementales que recomendamos utilizar para resolver los problemas 1 y 2 no es sino una aplicación del método de Gauss a una matriz compuesta de vectores del sistema dado.

§ 1.1. Definición del espacio lineal

Presentación de los problemas del párrafo. En este párrafo damos una serie de ejemplos de espacios lineales, así como de conjuntos que no son espacios lineales. Tratamos igualmente (problemas 1.1.17, 1.1.18) la axiomática del espacio lineal.

1.1.1. El conjunto V_0 está compuesto de un solo elemento 0. Las operaciones en V_0 están definidas del modo siguiente:

a) $0 + 0 = 0$;

b) $\lambda 0 = \theta$ para todo número λ del cuerpo P. Verificar que V_0 es un espacio lineal sobre P.

Para cada uno de los conjuntos siguientes de vectores de un plano se pide determinar, si este conjunto es un espacio lineal respecto a las operaciones usuales de adición de vectores y de multiplicación de un vector por un número. Si la respuesta es negativa, mostrar cuáles propiedades del espacio lineal no están cumplidas. Se supone que el origen de cada vector está en un punto fijo O del plano; este punto es el origen de un sistema de coordenadas rectangulares.

1.1.2. Todos los vectores cuyos extremos pertenecen a la recta dada.

1.1.3. Todos los vectores cuyos extremos están situados: a) en el primer cuadrante del sistema de coordenadas; b) en el primero o el tercer cuadrante; c) en el primero o el segundo cuadrante.

1.1.4. Todos los vectores que forman con el vector no nulo dado a un ángulo φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

1.1.5. Mostrar que: a) el conjunto de números reales puede ser considerado como un espacio lineal racional; b) el conjunto de números complejos puede ser considerado como un espacio lineal real; c) en general, todo cuerpo P puede ser considerado como un espacio lineal sobre el cuerpo P_1, que es un subcuerpo de P.

1.1.6. En el conjunto R^+ de números reales positivos están definidas las operaciones siguientes:

a) «adición» $x \oplus y = xy$ (es decir, la multiplicación usual de los números x e y);

b) «multiplicación por un número real» $\alpha \circ x = x^\alpha$ (es decir, la elevación del número x a la potencia α).

Verificar si el conjunto R^+ con las operaciones indicadas es un espacio lineal.

1.1.7. Sea $\widetilde{R}_2$ el conjunto de todos los pares ordenados de números reales $x = (\alpha_1, \alpha_2)$ con operaciones:

a) si $x = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $y = (\beta_1, \beta_2)$, entonces $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$;

b) para todo número real λ, $\lambda x = (\lambda\alpha_1, \alpha_2)$. ¿Será $\widetilde{R}_2$ un espacio lineal real?

1.1.8. Cambiar en el problema precedente la definición de la multiplicación por un número: si $x = (\alpha_1, \alpha_2)$, entonces $\lambda x = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2)$. La pregunta es la misma.

1.1.9. Sea P_k el conjunto de todas las colecciones ordenadas de k elementos del cuerpo P: $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Las operaciones en P_k están definidas por las reglas:

a) si $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ e $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, entonces $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_k + \beta_k)$;

b) para todo λ del cuerpo P

$$\lambda x = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_k).$$

Comprobar que P_k es un espacio lineal sobre el cuerpo P.

1.1.10. Sea $Z^{(2)}$ el campo de dos elementos 0 y 1, donde las operaciones están dadas por las tablas siguientes:

a) adición

	0	1
0	0	1
1	1	0

b) multiplicación

	0	1
0	0	0
1	0	1

Construir el espacio lineal $Z_k^{(2)}$ (véase el problema 1.1.9). Mostrar que para cualquier vector x de $Z_k^{(2)}$ $x + x = 0$. Hallar el número de vectores en $Z_k^{(2)}$.

1.1.11. Sea s el conjunto de sucesiones infinitas de números reales $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$. En s están introducidas las operaciones:

a) si $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$ entonces $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n, \ldots)$;

b) para todo λ real

$$\lambda x = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n, \ldots).$$

¿Será s un espacio lineal real?

1.1.12. Sea F el conjunto de todas las sucesiones infinitas de números reales cuyos elementos satisfacen la relación $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$, $k = 3, 4, \ldots$. Las operaciones sobre las sucesiones están definidas del mismo modo que en el problema 1.1.11. ¿Es F un espacio lineal?

Para cada uno de los conjuntos sucesivos de polinomios de una variable con coeficientes reales se pide verificar, si este conjunto es un espacio lineal respecto a las operaciones ordinarias de adición de polinomios y de multiplicación de un polinomio por un número.

1.1.13. El conjunto de polinomios de todos los grados completado por cero.

1.1.14. El conjunto de todos los polinomios de grado $\leqslant n$ completado por cero.

1.1.15. El conjunto de todos los polinomios de grado n dado.

1.1.16. El conjunto de todos los polinomios $f(t)$ que satisfacen a las condiciones:

a) $f(0) = 1$;

b) $f(0) = 0$;

c) $2f(0) - 3f(1) = 0$;

d) $f(1) + f(2) + \ldots + f(k) = 0$.

1.1.17*. Dar un ejemplo de un conjunto M tal que éste verifique todos los axiomas del espacio lineal excepto el axioma $1 \cdot x = x$ para cualquier x de M. ¿Cuál es la importancia de este axioma en la definición del espacio lineal?

1.1.18*. Demostrar que la conmutatividad de la adición de vectores se deduce de los demás axiomas del espacio lineal.

§ 1.2. Dependencia lineal

Presentación de los problemas del párrafo. Además de los problemas relacionados con la noción de dependencia lineal damos en este párrafo el cálculo que permite decidir, si un sistema concreto de vectores de un espacio aritmético es linealmente dependiente o independiente. Este procedimiento consiste en realizar transformaciones elementales del sistema.

1.2.1. Demostrar que un sistema de vectores que contiene un vector nulo es linealmente dependiente.

1.2.2. Demostrar que un sistema de vectores cuyos dos vectores se diferencian por un factor escalar es linealmente dependiente.

1.2.3. Demostrar que si un sistema de vectores posee un subsistema linealmente dependiente, todo el sistema también es linealmente dependiente.

1.2.4. Demostrar que en un sistema de vectores linealmente independiente todo subsistema también es linealmente independiente.

1.2.5. Sean el sistema de vectores $x_1, \ldots, x_m$ linealmente independiente y el sistema $x_1, \ldots, x_m, y$ linealmente dependiente. Demostrar que el vector y se expresa linealmente por los vectores $x_1, \ldots, x_m$.

1.2.6. Mostrar que en el problema precedente la descomposición del vector y según el sistema $x_1, \ldots, x_m$ es única.

1.2.7. Supongamos ahora que la descomposición del vector y según cierto sistema $x_1, \ldots, x_m$ es única. Demostrar que el sistema $x_1, \ldots, x_m$ es linealmente independiente.

1.2.8. Sea el vector y expresado linealmente por el sistema $x_1, \ldots, x_m$ linealmente dependiente. Mostrar que en este sistema y posee un número infinito de descomposiciones distintas.

1.2.9. Sea x, y, z un sistema de vectores linealmente independiente. ¿Serán los sistemas de vectores

a) $x, x + y, x + y + z$;

b) $x + y, y + z, z + x$;

c) $x - y, y - z, z - x$

linealmente independientes?

1.2.10. Mostrar que cualesquiera que sean los vectores x, y, z y los números α, β, γ el sistema de vectores $\alpha x - \beta y, \gamma y - \alpha z, \beta z - \gamma x$ es linealmente dependiente.

1.2.11. Sean r, s, v distintos números reales. ¿Será el sistema de polinomios

$$(t - r)(t - s), \quad (t - r)(t - v), \quad (t - s)(t - v)$$

linealmente dependiente?

1.2.12. Hallar la combinación lineal $3x_1 - 2x_2 + 7x_3$ de vectores del espacio aritmético R_4

$$x_1 = (3, 1, -7, 4),$$
$$x_2 = (1, 5, 0, 6),$$
$$x_3 = (-1, 1, 3, 0).$$

Discutir el resultado obtenido. ¿Qué se puede decir sobre el sistema de vectores x_1, x_2, x_3?

1.2.13. Está dado el sistema de polinomios $f_1(t) = 1 - t^2$, $f_2(t) = 1 + t^3$, $f_3(t) = t - t^3$, $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Hallar las combinaciones lineales de polinomios de este sistema:

a) $5f_1 + f_2 - 4f_3$;

b) $f_1 + 9f_2 - 4f_4$.

Discutir los resultados obtenidos. ¿Qué se puede decir sobre el sistema de polinomios dado?

1.2.14. Hallar otras descomposiciones del polinomio obtenido en el problema 1.2.13, respecto al sistema $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$.

1.2.15. Demostrar la dependencia lineal del sistema de vectores de forma «trapezoidal» del espacio P_k (véase el problema 1.1.9):

$$\begin{array}{llll}
y_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1p}, & \alpha_{1,p+1}, \ldots, \alpha_{1q}, & \alpha_{1,q+1}, \ldots, \alpha_{1t}, & \alpha_{1,t+1}, \ldots, \alpha_{1k}), \\
y_2 = (0, \ldots, 0, & \alpha_{2,p+1}, \ldots, \alpha_{2q}, & \alpha_{2,q+1}, \ldots, \alpha_{2t}, & \alpha_{2,t+1}, \ldots, \alpha_{2k}), \\
y_3 = (0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0, & \alpha_{3,q+1}, \ldots, \alpha_{3t}, & \alpha_{3,t+1}, \ldots, \alpha_{3k}), \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_r = (0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0, & \alpha_{r,t+1}, \ldots, \alpha_{rk}).
\end{array}$$

Aquí $\alpha_{2,p+1}, \alpha_{3,q+1}, \ldots, \alpha_{r,t+1}$ son elementos del cuerpo P, diferentes de cero. Por lo menos uno de los elementos $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1p}$ tampoco es nulo.

1.2.16. Demostrar que en un espacio de polinomios todo sistema final compuesto de polinomios de diferentes grados que no contiene cero, es linealmente independiente.

1.2.17. Demostrar que la dependencia lineal o la independencia lineal de un sistema de vectores no se viola por las transformaciones siguientes del sistema, llamadas *transformaciones elementales*: a) permutación de dos vectores del sistema; b) multiplicación de un vector del sistema por un número no nulo; c) adición a un vector del sistema de un otro vector multiplicado por un número arbitrario.

1.2.18. Demostrar que un sistema de vectores arbitrario de un espacio aritmético puede ser reducido por transformaciones elementales a un sistema de vectores del tipo dado en el problema 1.2.15, completado, quizás, por varios vectores iguales a cero. ¿De qué modo se puede proceder para determinar que el sistema inicial es linealmente dependiente o no?

Establecer, si los siguientes sistemas de vectores de espacios aritméticos son linealmente dependientes o no:

1.2.19. $x_1 = (-3, 1, 5)$, $x_2 = (6, -2, 15)$.

1.2.20. $x_1 = (4, -12, 28)$, $x_2 = (-7, 21, -49)$.

1.2.21. $x_1 = (1, 2, 3, 0)$, $x_2 = (2, 4, 6, 1)$.

1.2.22. $x_1 = (1, i, 2 - i, 3 + i)$, $x_2 = (1 - i, 1 + i, 1 - 3i, 4 - 2i)$.

1.2.23. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 5, 7)$, $x_3 = (3, 7, 10)$.

1.2.24. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 5, 7)$, $x_3 = (3, 7, 11)$.

1.2.25. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 5, 7)$, $x_3 = (3, 7, 10 + \varepsilon)$.

Aquí ε es un número cuan se quiera pequeño y diferente de cero.

1.2.26. $x_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$x_2 = (1, -1, -1, 1)$,
$x_3 = (1, -1, 1, -1)$,
$x_4 = (1, 1, -1, -1)$.

1.2.27. $x_1 = (5, -3, 2, 1, 10)$,
$x_2 = (-1, 8, 1, -4, 7)$,
$x_3 = (2, 1, 9, -3, 6)$,
$x_4 = (1, 3, -5, 9, 11)$.

1.2.28*. Sea dado un sistema de vectores de un espacio aritmético

$$x_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}),$$
$$x_2 = (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_s = (\alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}),$$

donde $s \leqslant n$. Demostrar que si $|\alpha_{jj}| > \sum_{i=1,\ i\neq j} |\alpha_{ij}|$, $j = 1, \ldots, s$, el sistema de vectores dado es linealmente independiente.

§ 1.3. Cápsula lineal. Rango de un sistema de vectores

Presentación de los problemas del párrafo. En este párrafo damos problemas referentes a la determinación de la cápsula lineal, de la equivalencia de sistemas, de la base y del rango del sistema de vectores dado, así como unos cuantos problemas para calcular el rango y construir la base de un sistema de vectores de un espacio aritmético. Estos últimos problemas se resuelven con ayuda del método de transformaciones elementales descrito en el párrafo precedente.

Describir las cápsulas lineales de los siguientes sistemas de vectores del espacio R_5:

1.3.1. $x_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$,
$x_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$,
$x_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

1.3.2. $x_1 = (1, 0, 0, 0, 1)$,
$x_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$,
$x_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$.

1.3.3. $x_1 = (1, 0, 0, 0, -1)$,
$x_2 = (0, 1, 0, 0, -1)$,
$x_3 = (0, 0, 1, 0, -1)$,
$x_4 = (0, 0, 0, 1, -1)$.

Hallar las cápsulas lineales de los sistemas de polinomios siguientes:

1.3.4. $1, t, t^2$.

1.3.5. $1 + t^2, t + t^2, 1 + t + t^2$.

1.3.6. $1 - t^2, t - t^2, 2 - t - t^2$.

1.3.7. $1 - t^2, t - t^2$.

1.3.8*. Examinar la cápsula lineal de numeros 1, $\sqrt{3}$ en el conjunto de números reales considerado como un espacio lineal racional. ¿Pertenece a esta cápsula el número $\sqrt[3]{3}$?

1.3.9. Si cada vector del sistema $y_1, \ldots, y_n$ es una combinación lineal de vectores $x_1, \ldots, x_m$, dicen que el *sistema* $y_1, \ldots, y_n$ *se expresa linealmente por el sistema* $x_1, \ldots, x_m$. Demostrar la transitividad de esta noción: si el sistema $y_1, \ldots, y_n$ se expresa linealmente por el sistema $x_1, \ldots, x_m$ y el sistema $z_1, \ldots, z_p$ se expresa linealmente por $y_1, \ldots, y_n$, entonces el sistema $z_1, \ldots, z_p$ se expresa linealmente por $x_1, \ldots, x_m$.

1.3.10. Mostrar que si el sistema $y_1, \ldots, y_n$ se expresa linealmente por el sistema $x_1, \ldots, x_m$, la cápsula lineal del primer sistema se contiene en la cápsula lineal del segundo sistema.

1.3.11. El sistema de vectores z_1, z_2 se expresa linealmente por el sistema y_1, y_2, y_3, y_4:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2y_1 + y_2 \qquad + 3y_4, \\ z_2 &= y_1 - 5y_2 + 4y_3 - 2y_4. \end{aligned}$$

A su vez el sistema y_1, y_2, y_3, y_4 se expresa linealmente por el sistema x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 &= x_1 + x_2 - x_3, \\ y_3 &= x_1 - x_2 + x_3, \\ y_4 &= -x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Hallar la expresión de los vectores z_1, z_2 por los vectores x_1, x_2, x_3.

1.3.12. Dos sistemas de vectores $x_1, \ldots, x_m$ e $y_1, \ldots, y_n$ se llaman *equivalentes* si cada uno de estos sistemas se expresa linealmente por el otro. Demostrar que la relación de equivalencia de los sistemas de vectores es reflexiva, simétrica y transitiva.

1.3.13. Mostrar que dos sistemas de vectores son equivalentes si, y solamente si, sus cápsulas lineales coinciden.

¿Serán equivalentes los siguientes sistemas de vectores?

1.3.14. $x_1 = (1, 0, 0), \quad y_1 = (0, 0, 1),$
$x_2 = (0, 1, 0), \quad y_2 = (0, 1, 1),$
$x_3 = (0, 0, 1); \quad y_3 = (1, 1, 1).$

1.3.15. $x_1 = (1, 0, 0), \quad y_1 = (1, 0, 0),$
$x_2 = (0, 1, 0), \quad y_2 = (0, 1, 1),$
$x_3 = (0, 0, 1); \quad y_3 = (1, 1, 1).$

1.3.16*. Demostrar que dos sistemas linealmente independientes equivalentes contienen el mismo número de vectores.

1.3.17. En el sistema de vectores $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ los vectores $y_1, \ldots, y_n$ se expresan linealmente por los vectores $x_1, \ldots, x_m$. Mostrar que el sistema $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ es equivalente al sistema $x_1, \ldots, x_m$.

1.3.18*. Demostrar que en cada sistema de vectores $x_1, \ldots, x_m$ que contiene por lo menos un vector no nulo se puede elegir un subsistema linealmente independiente que le será equivalente. (Todo sistema de este tipo se llama *base* del sistema de vectores dado.)

1.3.19. Demostrar que todas las bases del sistema dado $x_1, \ldots, x_m$ están compuestas de un mismo número de vectores. (Este número se llama *rango* del sistema dado. Si todos los vectores del sistema son nulos, su rango es nulo por definición).

1.3.20. Sea r el rango del sistema $x_1, \ldots, x_m$. Demostrar que: a) todo subsistema suyo que contiene más de r vectores es linealmente dependiente; b) todo subsistema linealmente independiente que contiene r vectores es una base del sistema dado. Notar que del problema a) se deduce que el rango de un sistema de vectores es igual al número máximo de sus vectores linealmente independientes.

1.3.21. Demostrar que: a) cualquier vector no nulo del sistema dado puede ser incluido en una base de este sistema; b) cualquier subsistema linealmente independiente del sistema de vectores dado puede ser completado hasta la base de este sistema.

1.3.22. Demostrar que si el sistema $y_1, \ldots, y_n$ se expresa linealmente por el sistema $x_1, \ldots, x_m$, el rango del primer sistema no es superior al rango del segundo sistema.

1.3.23. Demostrar que si el sistema $y_1, \ldots, y_n$ se expresa linealmente por el sistema $x_1, \ldots, x_m$, el rango del sistema $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ es igual al rango del sistema $x_1, \ldots, x_m$.

1.3.24. Demostrar que los sistemas equivalentes de vectores son de un mismo rango. ¿Es correcta la afirmación recíproca: dos sistemas cualesquiera del mismo rango son equivalentes?

1.3.25*. Demostrar que si uno de dos sistemas de vectores del mismo rango se expresa linealmente por el otro, estos sistemas son equivalentes.

1.3.26. Demostrar que las transformaciones elementales de un sistema de vectores no cambian su rango.

1.3.27. Aplicar el método de «reducción a la forma trapezoidal» del problema 1.2.18 al resolver el problema siguiente: determinar el rango del sistema de vectores dado de un espacio aritmético

Hallar el rango de los sistemas de vectores siguientes:

1.3.28. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (4, 5, 6)$, $x_3 = (7, 8, 9)$, $x_4 = (10, 11, 12)$.

1.3.29. $x_1 = (1, 4, 7, 10)$, $x_2 = (2, 5, 8, 11)$, $x_3 = (3, 6, 9, 12)$.

1.3.30. $x_1 = (1, -1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, -1, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1, -1)$, $x_4 = (0, 0, 0, 1)$, $x_5 = (7, -3, -4, 5)$.

1.3.31. $x_1 = (1, -1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, -1, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1, -1)$, $x_4 = (-1, 0, 0, 1)$.

1.3.32. $x_1 = (1,\ 10,\ 0,\ 0)$,
$x_2 = (0,\ 1,\ 10,\ 0)$,
$x_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 10)$,
$x_4 = (10^{-3},\ 0,\ 0,\ 1)$.

1.3.33. $x_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$x_2 = (1,\ i,\ -1,\ -i,\ 1)$,
$x_3 = (1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1)$,
$x_4 = (1,\ -i,\ -1,\ i,\ 1)$.

1.3.34*. Aplicar el método del problema 1.3.27 para hallar una base cualquiera de un sistema de vectores dado de un espacio aritmético.

Hallar una base cualquiera de cada uno de los sistemas de vectores siguientes:

1.3.35. $x_1 = (-1,\ 4,\ -3,\ -2)$,
$x_2 = (3,\ -7,\ 5,\ 3)$,
$x_3 = (3,\ -2,\ 1,\ 0)$,
$x_4 = (-4,\ 1,\ 0,\ 1)$.

1.3.36. $x_1 = (0,\ 2,\ -1)$,
$x_2 = (3,\ 7,\ 1)$,
$x_3 = (2,\ 0,\ 3)$,
$x_4 = (5,\ 1,\ 8)$.

1.3.37*. $x_1 = (14,\ -27,\ -49,\ 113)$,
$x_2 = (43,\ -82,\ -145,\ 340)$,
$x_3 = (-29,\ 55,\ 96,\ -227)$,
$x_4 = (85,\ -163,\ -293,\ 677)$.

1.3.38. $x_1 = (3 - i,\ 1 - 2i,\ -7 + 5i,\ 4 + 3i)$,
$x_2 = (1 + 3i,\ 1 + i,\ -6 - 7i,\ 4i)$,
$x_3 = (0,\quad 1,\quad 1,\quad -3)$.

1.3.39*. En el sistema $x_1, \ldots, x_m$ los vectores $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ engendran una base donde no entra el vector no nulo x_j. Demostrar que entre los vectores de la base existe un vector x_{i_l} tal que reemplazándolo en el subsistema $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ por el vector x_j se obtiene una base nueva del sistema dado $x_1, \ldots, x_m$. ¿Será único un tal vector x_{i_l}?

1.3.40*. ¿Qué se puede decir de un sistema de vectores de rango r si éste posee: a) una base única; b) dos bases exactamente; c) tres bases exactamente? Dos bases se consideran iguales si difieren solamente en orden de vectores.

Hallar todas las bases de los vectores siguientes:

1.3.41. $x_1 = (4,\ -2,\ 12,\ 8)$,
$x_2 = (-6,\ 12,\ 9,\ -3)$,
$x_3 = (-10,\ 5,\ -30,\ -20)$,
$x_4 = (-14,\ 28,\ 21,\ -7)$.

1.3.42. $x_1 = (1, 2, 3, 0, -1)$,
$x_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$,
$x_3 = (1, 3, 4, 1, -1)$.

1.3.43. $x_1 = (1 + i,\ 1 - i,\ 2 + 3i)$,
$x_2 = (i,\quad 1,\quad 2)$,
$x_3 = (1 - i,\ -1 - i,\ 3 - 2i)$,
$x_4 = (4,\quad -4i,\quad 10 + 2i)$.

1.3.44*. Aplicar el método del problema 1.3.27 para resolver el problema siguiente: para los sistemas de vectores dados $y_1, \ldots$

$\ldots, y_n$ y $x_1, \ldots, x_m$ de un espacio aritmético establecer si el primer sistema se expresa por el segundo.

1.3.45. Vienen dados dos sistemas de vectores:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1,\ 1,\ 1), & y_1 &= (1,\ 2,\ 3), \\ x_2 &= (1,\ 0,\ -1), & y_2 &= (0,\ 1,\ 2), \\ x_3 &= (1,\ 3,\ 5); & y_3 &= (3,\ 4,\ 5), \\ & & y_4 &= (4,\ 6,\ 8). \end{aligned}$$

¿Se expresará linealmente el sistema y_1, y_2, y_3, y_4 por el sistema x_1, x_2, x_3?

1.3.46. ¿Son equivalentes los sistemas de vectores del problema precedente?

§ 1.4. Base y dimensiones del espacio

Presentación de los problemas del párrafo. Comenzamos el párrafo dando ejemplos de espacios lineales de dimensiones finitas e infinitas para examinar en adelante hasta el final del libro solamente espacios de dimensiones finitas. Luego discutimos sobre la noción de base. Si en un espacio lineal se fija una base, los problemas relacionados con los elementos de este espacio se reducen con ayuda de las coordenadas a problemas análogos para los vectores de un espacio aritmético. Algunos de estos problemas (búsqueda del rango de un sistema de vectores, de la dimensión y de la base de una cápsula lineal, etc.) se resuelven por el método de transformaciones elementales; otros problemas (por ejemplo, la descomposición según la base) se reducen a la resolución—como es sabido de antemano— de determinados sistemas de ecuaciones lineales y es más razonable resolverlos mediante el método de Gauss. El párrafo termina con problemas dedicados a los subespacios lineales.

Para cada uno de los espacios lineales que se aducen más abajo se pide determinar si éste es un espacio de dimensión finita. Si la respuesta es afirmativa hallar la dimensión y construir una base cualquiera del espacio.

1.4.1. Espacio R^+ (véase el problema 1.1.5).

1.4.2. Espacio P_k cuyos vectores son colecciones ordenadas de k elementos del campo P (véase el problema 1.1.9).

1.4.3. Espacio s de todas las sucesiones reales infinitas (véase el problema 1.1.11).

1.4.4. Espacio F de sucesiones reales infinitas cuyos elementos satisfacen la relación $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$, $k = 3, 4, \ldots$ (véase el problema 1.1.12).

1.4.5. Espacio M de polinomios de todos los grados (véase el problema 1.1.13).

1.4.6. Espacio M_n de polinomios cuyos grados no superan el número no negativo dado n (véase el problema 1.1.14).

1.4.7. Determinar la dimensión del cuerpo de números complejos considerado como a) un espacio lineal complejo; b) un espacio lineal real.

1.4.8. Sea C_n el conjunto de todas las colecciones ordenadas de n números complejos con la definición usual de operaciones sobre estas colecciones (véase el problema 1.1.9). Hallar la dimensión de C_n: a) como de un espacio complejo; b) como de un espacio real.

Mostrar que los sistemas de vectores siguientes son bases del espacio R_n:

1.4.9. $x_1 = (1, 2, 3, \ldots, n)$,
$x_2 = (0, 2, 3, \ldots, n)$,
$x_3 = (0, 0, 3, \ldots, n)$,
. . . .
$x_n = (0, 0, 0, \ldots, n)$.

1.4.10. $x_1 = (1, 1, \ldots, 1, 1, 1)$,
$x_2 = (1, 1, \ldots, 1, 1, 0)$,
$x_3 = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0)$,
. . . .
$x_n = (1, 0, \ldots, 0, 0, 0)$.

1.4.11. $x_1 = (1, 1, 1, 1, \ldots, 1)$,
$x_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$,
$x_3 = (0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$,
$x_4 = (0, 1, 1, 1, \ldots, 0)$,
. . . .
$x_n = (0, 1, 1, 1, \ldots, 1)$.

1.4.12. Demostrar que en el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ es base todo sistema de polinomios no nulos que contiene un polinomio de cada grado k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

1.4.13. Establecer cuál de los dos sistemas de vectores siguientes es una base del espacio R_4:

a) $x_1 = (1, 2, -1, -2)$,
$x_2 = (2, 3, 0, -1)$,
$x_3 = (1, 2, 1, 3)$,
$x_4 = (1, 3, -1, 0)$;

b) $x_1 = (1, 2, -1, -2)$,
$x_2 = (2, 3, 0, -1)$,
$x_3 = (1, 2, 1, 4)$,
$x_4 = (1, 3, -1, 0)$.

En adelante se trata solamente de espacios de dimensiones finitas.

1.4.14. Demostrar que: a) todo vector no nulo de un espacio puede ser incluido en cierta base de este espacio; b) cualquier sistema de vectores linealmente independiente puede ser completado hasta una base del espacio.

1.4.15. Hallar en el espacio R_4 dos bases distintas que tienen los vectores comunes $e_1 = (1, 1, 0, 0)$ y $e_2 = (0, 0, 1, 1)$.

1.4.16. Completar el sistema de polinomios $t^5 + t^4$, $t^5 - 3t^3$, $t^5 + 2t^2$, $t^5 - t$ hasta la base del espacio M_5.

1.4.17. Demostrar que la descomposición de un vector por cualquier base del espacio es única.

1.4.18. Supongamos que todo vector de un espacio V se expresa linealmente por el sistema $e_1, \ldots, e_n$; además, para cierto vector x la descomposición según este sistema es única. Demostrar que los vectores $e_1, \ldots, e_n$ engendran una base del espacio V.

1.4.19. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base arbitraria de un espacio V. Demostrar que:

a) las coordenadas del vector $x + y$ en la base $e_1, \ldots, e_n$ son iguales a las sumas de las coordenadas de un mismo índice de los vectores x e y en esta misma base;

b) las coordenadas del vector λx en la base $e_1, \ldots, e_n$ son iguales a las coordenadas de un mismo índice del vector x multiplicadas por el número λ.

1.4.20. Una cierta base $e_1, \ldots, e_n$ está fijada en un espacio V. A cada vector x le está asignada la línea de sus coordenadas en esta base:

$$x \to x_e = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Demostrar que:

a) la dependencia lineal (la independencia lineal) de un sistema de vectores $x, y, \ldots, z$ supone la dependencia lineal (la independencia lineal) de un sistema de líneas $x_e, y_e, \ldots, z_e$ considerados como elementos del espacio aritmético correspondiente.

b) el rango de un sistema de vectores $x, y, \ldots, z$ es igual a rango del sistema de líneas $x_e, y_e, \ldots, z_e$;

c) si un vector u se expresa linealmente por un sistema $x, y, \ldots, z$, es decir, si $u = \lambda x + \mu y + \ldots + \nu z$, esto es igualmente cierto para las líneas $u_e, x_e, y_e, \ldots, z_e$; además, $u_e = \lambda x_e + \mu y_e + \ldots + \nu z_e$.

Hallar el rango y una base cualquiera de cada una de los sistemas de polinomios:

1.4.21. $3t^2 + 2t + 1$, $4t^2 + 3t + 2$, $3t^2 + 2t + 3$, $t^2 + t + 1$, $4t^2 + 3t + 4$.

1.4.22. $t^3 + 2t^2 + 3t + 4$, $2t^3 + 3t^2 + 4t + 5$, $3t^3 + 4t^2 + 5t + 6$, $4t^3 + 5t^2 + 6t + 7$.

Verificar, si los vectores $e_1, \ldots, e_n$ engendran o no una base del espacio R_n y hallar las coordenadas del vector x en esta base:

1.4.23. $e_1 = (2, 2, -1)$, $e_2 = (2, -1, 2)$, $e_3 = (-1, 2, 2)$; $x = (1, 1, 1)$.

1.4.24. $e_1 = (1, 5, 3)$, $e_2 = (2, 7, 3)$, $e_3 = (3, 9, 4)$; $x = (2, 1, 1)$.

1.4.25. $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0)$; $x = (7, 14, -1, 2)$.

1.4.26. $e_1 = (1, 2, 1, 1)$, $e_2 = (2, 3, 1, 0)$, $e_3 = (3, 1, 1, -2)$, $e_4 = (4, 2, -1, -6)$; $x = (0, 0, 2, 7)$.

1.4.27. Calcular las coordenadas del polinomio $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ en cada una de las bases siguientes del espacio M_5:

a) $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$;

b) $1, t + 1, t^2 + 1, t^3 + 1, t^4 + 1, t^5 + 1$;

c) $1 + t^3, t + t^3, t^2 + t^3, t^3, t^4 + t^3, t^5 + t^3$.

1.4.28. Verificar que las sucesiones

$$e_1 = (2, 3, 5, 8, 13, \ldots),$$
$$e_2 = (1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$$

engendran una base del espacio F (véase el problema 1.1.12) y descomponer según esta base la sucesión

$$e = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots).$$

1.4.29. Demostrar que la cápsula lineal tendida sobre un sistema de vectores finito arbitrario de un espacio V es un subespacio lineal de este espacio.

1.4.30. Sea V un espacio lineal de dimensión n. Demostrar que todo subespacio lineal de V es de dimensión finita, además, que su dimensión no supera n.

1.4.31. Demostrar que si L es un subespacio lineal de un espacio V y la dimensión de L es igual a la dimensión de V, entonces L coincide con V.

1.4.32. Demostrar que cualquier subespacio de un espacio V de dimensión n puede ser considerado como una cápsula lineal de cierto sistema de vectores; además, se puede elegir un sistema compuesto de no más de n vectores.

1.4.33. Demostrar que en un espacio V de dimensión n se puede hallar un subespacio lineal de cualquier dimensión k, $0 \leqslant k \leqslant n$.

1.4.34. El subespacio lineal L está tendido sobre el sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$. Demostrar que la dimensión de L es igual al rango del sistema $x_1, \ldots, x_k$ y que puede ser su base cualquier base de este sistema.

Determinar la dimensión y hallar una base cualquiera de los subespacios lineales tendidos sobre los sistemas siguientes de vectores de un espacio aritmético:

1.4.35. $x_1 = (1, 2, 2, -1)$, $x_2 = (2, 3, 2, 5)$, $x_3 = (-1, 4, 3, -1)$, $x_4 = (2, 9, 3, 5)$.

1.4.36. $x_1 = (-3, 1, 5, 3, 2)$, $x_2 = (2, 3, 0, 1, 0)$, $x_3 = (1, 2, 3, 2, 1)$, $x_4 = (3, -5, -1, -3, -1)$, $x_5 = (3, 0, 1, 0, 0)$.

1.4.37. Hallar una base cualquiera y la dimensión del subespacio lineal L del espacio R_n, si L viene dado por la ecuación

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0.$$

1.4.38. En el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales se examinan los subconjuntos de polinomios que satisfacen las condiciones: a) $f(0) = 0$; b) $f(1) = 0$; c) $f(a) = 0$, donde a es un número real cualquiera; d) $f(0) = f(1) = 0$. Verificar, si cada uno de los subconjuntos indicados es un subespacio lineal del espacio M_n y determinar las dimensiones de estos subespacios.

1.4.39. Hallar la dimensión y una base cualquiera de la cápsula lineal tendida sobre el sistema de polinomios siguiente: $t^6 + t^4$, $t^6 + 3t^4 - t$, $t^6 - 2t^4 + t$, $t^6 - 4t^4 + 2t$.

1.4.40. Sea L un subespacio de dimensión m de un espacio V de dimensión n. Demostrar que se puede hallar una base $e_1, \ldots, e_n$ del espacio V tal que sus primeros m vectores $e_1, \ldots, e_m$ pertenecen al subespacio L.

1.4.41*. Demostrar que cualquiera que sea el subespacio L de dimensión m, del espacio V de dimensión n, donde $m < n$, existe una base de V en la cual: a) no hay ningún vector de L; b) hay exactamente k vectores de L, $k < m$.

1.4.42. Componer una base del espacio M_5 a partir de polinomios de quinto grado.

1.4.43. Inversamente: ¿se puede hallar una base del espacio M_5 que no contenga ningún polinomio de quinto grado?

§ 1.5. Suma e intersección de subespacios

Presentación de los problemas del párrafo. En el presente párrafo planteamos los fines siguientes:

Dar procedimientos de cálculo de una base de la suma y de la intersección de dos subespacios lineales.

Indicar los diferentes criterios de la «rectitud» de una suma de subespacios.

Atraer la atención sobre el hecho de que en el caso general la descomposición de un vector según los subespacios no es única. Ella será única solamente en el caso de una suma directa. Los subespacios que dan en la suma directa todos los espacios lineales desempeñan en él el papel de una base generalizada.

Ilustrar la circunstancia de que para todo subespacio existe un subespacio complementario (y no único).

1.5.1. Demostrar que la suma y la intersección de dos subespacios lineales de un espacio V son ellas mismas subespacios lineales de este espacio.

1.5.2. Examinar el conjunto de todos los subespacios lineales del espacio dado V con la adición de subespacios. Verificar si

a) la adición es asociativa;

b) el conjunto posee un elemento nulo.

¿Será un grupo este conjunto?

1.5.3. Examinar el conjunto de todos los subespacios lineales del espacio dado V con la operación de intersección de los subespacios. Mostrar que

a) la intersección es asociativa;

b) el conjunto posee un elemento único.

¿Será un grupo este conjunto?

1.5.4. Demostrar que cualesquiera que sean los subespacios L_1 y L_2 es justa la fórmula

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2) + \dim (L_1 \cap L_2).$$

Aquí y en adelante con $\dim L$ se designa la dimensión del espacio lineal L.

1.5.5. Demostrar que para cualquier p

$$\dim (L_1 + \ldots + L_p) \leqslant \dim L_1 + \ldots + \dim L_p.$$

1.5.6. Sean L_1 la cápsula lineal de los vectores $x_1, \ldots, x_k$, L_2, la cápsula lineal de los vectores $y_1, \ldots, y_l$. Demostrar que es base de la suma $L_1 + L_2$ cualquier base del sistema $x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_l$. En particular, la base de $L_1 + L_2$ se puede obtener completando la base de L_1 (L_2).

Hallar una base cualquiera y la dimensión de la suma de dos subespacios: L_1, tendido sobre los vectores $x_1, \ldots, x_h$ y L_2, tendido sobre los vectores $y_1, \ldots, y_l$. Determinar también la dimensión de la intersección de estos subespacios.

1.5.7. $x_1 = (0, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, 1, 2)$, $x_3 = (-2, 0, 1, 1)$; $y_1 = (-1, 3, 2, -1)$, $y_2 = (1, 1, 0, -1)$.

1.5.8. $x_1 = (2, -5, 3, 4)$, $x_2 = (1, 2, 0, -7)$, $x_3 = (3, -6, 2, 5)$; $y_1 = (2, 0, -4, 6)$, $y_2 = (1, 1, 1, 1)$, $y_3 = (3, 3, 1, 5)$.

1.5.9*. Supongamos que $x_1, \ldots, x_h$ es una base del subespacio L_1 e $y_1, \ldots, y_l$ una base del subespacio L_2. Luego supongamos que $x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_s$ es una base del sistema $x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_l$ y los vectores $y_{s+1}, \ldots, y_l$ que no entran en esta base, se descomponen según esta base del modo siguiente

$$y_i = \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{ih}x_h + \beta_{i1}y_1 + \ldots + \beta_{is}y_s,$$
$$i = s + 1, \ldots, l$$

Demostrar que el sistema de vectores $z_1, \ldots, z_{l-s}$, donde

$$z_{i-s} = -\beta_{i1}y_1 - \ldots - \beta_{is}y_s + y_i, \quad i = s + 1, \ldots, l,$$

o, lo que es lo mismo,

$$z_{i-s} = \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{ih}x_h, \quad i = s + 1, \ldots, l,$$

engendra la base de la intersección $L_1 \cap L_2$.

Hallar las bases de la suma y de la intersección de los subespacios lineales tendidos sobre los sistemas $x_1, \ldots, x_h$ e $y_1, \ldots, y_l$ respectivamente:

1.5.10. $x_1 = (2, 1, 0)$, $x_2 = (1, 2, 3)$, $x_3 = (-5, -2, 1)$; $y_1 = (1, 1, 2)$, $y_2 = (-1, 3, 0)$, $y_3 = (2, 0, 3)$.

1.5.11. $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, -1, -1)$, $x_3 = (1, -1, 1, -1)$; $y_1 = (1, -1, -1, 1)$, $y_2 = (2, -2, 0, 0)$, $y_3 = (3, -1, 1, 1)$.

1.5.12. $x_1 = (1, 2, 1, 1)$, $x_2 = (2, 3, 1, 0)$, $x_3 = (3, 1, 1, -2)$; $y_1 = (0, 4, 1, 3)$, $y_2 = (1, 0, -2, -6)$, $y_3 = (1, 0, 3, 5)$.

1.5.13. Hallar para el vector $x = (1, 0, 1)$ dos descomposiciones distintas a partir de los subespacios L_1 y L_2 del problema 1.5.10.

1.5.14. Demostrar que la suma L de los subespacios $L_1, \ldots, L_p$ es su suma directa si, y solo si la reunión de las bases de estos subespacios da la base L.

1.5.15. Demostrar que los datos del problema 1.5.14 equivalen a la condición siguiente:

$$\dim (L_1 + \ldots + L_p) = \dim L_1 + \ldots + \dim L_p.$$

1.5.16. Demostrar que el subespacio $L = L_1 + \ldots + L_p$ es la suma directa de los subespacios $L_1, \ldots, L_p$ si, y sólo si, la intersección de cada uno de los subespacios L_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, con la suma de los demás subespacios está compuesta solamente del vector nulo.

1.5.17. Sea ordenado el sistema de subespacios $L_1, \ldots, L_p$. Verificar, si la condición necesaria y suficiente dada en el problema 1.5.16 puede ser aflojada: más exactamente, la intersección de cada uno de los subespacios L_i, $2 \leqslant i \leqslant p$, con la suma de los subespacios precedentes debe constar solamente del vector nulo.

1.5.18. Demostrar que la suma de los subespacios $L_1, \ldots, L_p$ será su suma directa si, y sólo si, todo sistema de vectores no nulos $x_1, \ldots, x_p$ tomados uno de cada L_j, $j = 1, \ldots, p$ es linealmente independiente.

1.5.19. Demostrar que la suma directa de los subespacios es asociativa, si $L = L_1 \dot{+} \widetilde{L}$, con la particularidad de que $\widetilde{L} = L_2 \dot{+} L_3$, entonces $L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} L_3$.

1.5.20. Verificar que la suma directa de los subespacios lineales L_1 y L_2, tendidos sobre los sistemas de vectores $x_1 = (2, 3, 11, 5)$, $x_2 = (1, 1, 5, 2)$, $x_3 = (0, 1, 1, 1)$ e $y_1 = (2, 1, 3, 2)$, $y_2 = (1, 1, 3, 4)$, $y_3 = (5, 2, 6, 2)$, respectivamente, es todo el espacio R_4 y hallar la descomposición del vector $x = (2, 0, 0, 3)$ según estos subespacios.

1.5.21. Demostrar que en el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$: a) el conjunto L_1 de polinomios pares $f(t)$ (es decir, tales que $f(-t) = f(t)$) y el conjunto L_2 de polinomios impares (es decir, tales que $f(-t) = -f(t)$) son subespacios lineales; b) la desigualdad

$$M_n = L_1 \dot{+} L_2$$

es correcta.

1.5.22. Mostrar que para todo subespacio L_1 de un espacio lineal V existe un subespacio *complementario*, es decir, un subespacio L_2, tal que

$$V = L_1 \dot{+} L_2$$

¿Se determina de un modo único el subespacio complementario para este L_1?

1.5.23. Hallar dos subespacios suplementarios distintos del subespacio L tendido sobre los vectores $x_1 = (1, 3, 0, -1)$, $x_2 = (2, 5, 1, 2)$, $x_3 = (1, 2, 1, 3)$.

1.5.24. Hallar en el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ el subespacio suplementario del subespacio L de polinomios que satisfacen a la condición $f(1) = 0$.

1.5.25. Un espacio V está descompuesto en la suma directa de los subespacios $L_1, \ldots, L_p$. Demostrar que:

a) si la descomposición de un vector x es $x = x_1 + \ldots + x_p$, $x_i \in L_i$, la descomposición del vector λx según los subespacios $L_1, \ldots, L_p$ tiene la forma

$$\lambda x = \lambda x_1 + \ldots + \lambda x_p;$$

b) si y es un vector cuya descomposición es $y_1 + \ldots + y_p$, $y_i \in L_i$, entonces la descomposición del vector $x + y$ según los subespacios $L_1, \ldots, L_p$ es

$$x + y = (x_1 + y_1) + \ldots + (x_p + y_p).$$

Capítulo 2

ESPACIOS EUCLÍDEOS Y UNITARIOS

§ 2.0. Terminología y generalidades

Un espacio lineal real E se llama *euclídeo*, si a todo par de vectores x, y de E se le asigna un número real notado por el símbolo (x, y) y llamado *producto escalar* de los vectores x e y, y, además, se observan las condiciones siguientes:

1. $(x, y) = (y, x)$.
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.
3. $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$.
4. $(x, x) > 0$, si $x \neq 0$.

Aquí x, y, z son vectores arbitrarios de E, α es un número real arbitrario.

Llámase *longitud* del vector x al número (no negativo)

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

El vector de longitud igual a la unidad se llama *normalizado*.

Para dos vectores cualesquiera x e y se verifica la *desigualdad de Cauchy-Buniakovski*

$$|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|.$$

Los vectores x e y se llaman *ortogonales* si su producto escalar es igual a cero. Un sistema de vectores se llama *ortogonal* si todos los vectores de este sistema son ortogonales dos a dos.

Viene dado un sistema de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ linealmente independiente. Ahora describiremos el *proceso de ortogonalización* que permitirá pasar de este sistema al sistema ortogonal $y_1, y_2, \ldots, y_k$ compuesto de vectores no nulos.

Supongamos que $y_1 = x_1$. Los vectores consecutivos $y_2, \ldots, y_k$ se construyen según las fórmulas:

$$y_l = x_l - \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i^{(l)} y_i, \quad l = 2, \ldots, k,$$

$$\alpha_i^{(l)} = \frac{(x_l, y_i)}{(y_i, y_i)}, \qquad i = 1, \ldots, l-1$$

La base del espacio euclídeo que representa un sistema ortogonal se llama *base ortogonal*. Si en este caso los vectores de la base son normalizados, tal base se llama ortonormal. De este modo una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ se define por las relaciones

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Para los vectores no nulos del espacio euclídeo se define la noción de ángulo. En este caso el coseno del ángulo comprendido entre los vectores x e y se halla mediante la fórmula

$$\cos \widehat{(x, y)} = \frac{(x, y)}{|x|\,|y|}.$$

Un espacio lineal complejo U se llama *unitario* si a todo par de vectores x, y de U le está asignado un número complejo que se nota (x, y) y se llama *producto escalar* de los vectores x e y y, además, se observan las condiciones siguientes:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$.
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.
3. $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$.
4. $(x, x) > 0$, si $x \neq 0$.

En un espacio unitario el ángulo entre los vectores no se determina. Sin embargo, los demás resultados y definiciones del espacio euclídeo, establecidos más arriba, son igualmente justos para el espacio unitario.

Un ejemplo típico de espacio euclídeo es el espacio aritmético R_n en el cual el producto escalar de vectores $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ está dado por la regla:

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n. \tag{2.0.1}$$

C_n es igualmente un espacio unitario típico en el cual para los vectores x e y se adopta:

$$(x, y) = \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n}. \tag{2.0.2}$$

En ambos casos la base natural del espacio aritmético resulta ser ortonormal.

Unas observaciones más sobre los problemas de cálculo que se ofrecen en este capítulo.

Supongamos que hace falta completar el sistema ortogonal $a_1, \ldots, a_k$ de vectores no nulos de un espacio aritmético hasta una base ortogonal de este espacio. Buscaremos el vector a_{k+1} partiendo de las condiciones de ortogonalidad:

$$\begin{gathered}(a_{k+1}, a_1) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ (a_{k+1}, a_k) = 0.\end{gathered}$$

Estas condiciones escritas según la regla (2.0.1) o (2.0.2) forman un sistema de ecuaciones lineales respecto a los componentes del vector a_{k+1}. Se puede tomar como a_{k+1} una solución no nula arbitraria de este sistema. Ahora el vector a_{k+2} se halla partiendo de las condiciones:

$$(a_{k+2}, a_1) = 0,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$(a_{k+2}, a_k) = 0,$$
$$(a_{k+2}, a_{k+1}) = 0,$$

etc. En cada etapa de este proceso se puede utilizar los resultados de los cálculos precedentes resolviendo los sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

De un modo análogo se construye la base del complemento ortogonal (véase 2.3.2) de la cápsula lineal del sistema de vectores dado de un espacio aritmético. El método de Gauss también puede ser aplicado al calcular la proyección del vector sobre la cápsula lineal dada y al construir una base biortogonal a la base dada (véase 2.3.10 y 2.3.15).

§ 2.1. Determinación del espacio euclídeo

Presentación de los problemas del párrafo. En el presente párrafo planteamos los objetivos siguientes:

Deducir los corolarios más simples de los axiomas del producto escalar.

Mostrar que el producto escalar puede ser introducido en todo espacio lineal real y además por un número infinito de procedimientos. Hablando de los espacios aritméticos R_n damos procedimientos concretos de sus transformaciones en espacios euclídeos.

Atraer la atención del lector sobre el hecho de que no solamente todo subespacio de un espacio euclídeo es también un espacio euclídeo, sino que, inversamente, un producto escalar dado sobre un subespacio arbitrario de un espacio lineal también puede ser «prolongado» sobre todo este espacio.

Por fin, hemos querido ilustrar el papel que desempeña el axioma sobre la positividad del cuadrado escalar.

2.1.1. Demostrar que de los axiomas del producto escalar se deducen las propiedades siguientes:

a) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ para cualesquiera vectores del espacio euclídeo;

b) $(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$ para cualesquiera vectores x, y del espacio euclídeo y cualquier número real α;

c) $(x_1 - x_2, y) = (x_1, y) - (x_2, y)$;

d) $(0, x) = 0$;

e) $\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{l} \beta_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \alpha_i \beta_j (x_i, y_j)$.

2.1.2. Demostrar que en cualquier espacio lineal real se puede determinar un producto escalar.

2.1.3. Introducir un producto escalar en el espacio aritmético R_n de dimensión n.

2.1.4. Introducir un producto escalar en el espacio M_n de polinomios con coeficientes reales de grado $\leqslant n$.

2.1.5. Sea V un espacio euclídeo con un producto escalar (x, y). Mostrar que si se adopta

$$\langle x, y \rangle = \lambda (x, y).$$

donde λ es un número positivo fijado, entonces para $\langle x, y \rangle$ también están verificados todos los axiomas del producto escalar. ¿Qué sentido geométrico tiene el paso de (x, y) a $\langle x, y \rangle$ en el espacio tridimensional de vectores geométricos?

2.1.6. Demostrar que si $(x, y)_1$ y $(x, y)_2$ son dos productos escalares distintos del mismo espacio lineal V, el producto escalar en V también será

a) $(x, y) = (x, y)_1 + (x, y)_2$;

b) $(x, y) = \lambda (x, y)_1 + \mu (x, y)_2$

donde λ y μ son números no negativos arbitrarios y simultáneamente no iguales a cero.

2.1.7. Sean $x = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $y = (\beta_1, \beta_2)$ vectores arbitrarios del espacio aritmético R_2. Mostrar que en R_2 un producto escalar puede ser definido mediante los procedimientos siguientes:

a) $(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$;

b) $(x, y) = 2\alpha_1\beta_1 + 5\alpha_2\beta_2$;

c) $(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2$.

Calcular el producto escalar de los vectores $x = (1, 1)$ e $y = (-3, 2)$ con ayuda de cada uno de estos procedimientos.

2.1.8*. Demostrar que en R_2 un producto escalar puede ser dado por la fórmula

$$(x, y) = a\alpha_1\beta_1 + b\alpha_1\beta_2 + b\alpha_2\beta_1 + c\alpha_2\beta_2$$

si, y solamente si, $a > 0$ y $ac > b^2$ simultáneamente.

2.1.9*. Demostrar que en R_3 un producto escalar puede ser introducido del modo siguiente: si $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, entonces

$$\begin{aligned}(x, y) = 10\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 + \\ + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_3.\end{aligned}$$

2.1.10*. Mostrar que en R_n un producto escalar puede ser definido por la fórmula

$$\begin{aligned}(x, y) = a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{12}\alpha_1\beta_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_1\beta_n + \\ + a_{21}\alpha_2\beta_1 + a_{22}\alpha_2\beta_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_2\beta_n + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}\alpha_n\beta_1 + a_{n2}\alpha_n\beta_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n\beta_n,\end{aligned}$$

a condición de que

a) $a_{ij} = a_{ji}$ para $i \neq j$;

b) $a_{ii} > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$

2.1.11. Sean a el vector fijo de un espacio euclídeo V, α, un número real fijo. ¿Será un subespacio lineal del espacio V el conjunto de todos los vectores x para los cuales $(x, a) = \alpha$?

2.1.12. Demostrar que todo subespacio de un espacio euclídeo V, de por sí, es un espacio euclídeo en el sentido del producto escalar dado en V.

2.1.13. Un espacio lineal V se descompone en una suma directa de los subespacios $L_1, \ldots, L_p$. Sobre cada uno de los subespacios L_i está definido un producto escalar. Demostrar que se puede introducir un producto escalar en todo el espacio V adoptando: si x e y son vectores arbitrarios de V con descomposiciones según los subespacios $L_1, \ldots, L_p$, $x = x_1 + \ldots + x_p$ e $y = y_1 + \ldots + y_p$, respectivamente, entonces

$$(x, y) = (x_1, y_1)_1 + \ldots + (x_p, y_p)_p,$$

donde el producto escalar $(x_i, y_i)_i$ se calcula según la regla definida en L_i.

2.1.14. En el espacio aritmético R_4 para los vectores $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ de la forma

$$\tilde{x} = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0), \ \tilde{y} = (\beta_1, \beta_2, 0, 0)$$

está definido el producto escalar

$$(\tilde{x}, \tilde{y})_1 = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2,$$

y para los vectores $\tilde{\tilde{x}}$ e $\tilde{\tilde{y}}$ de la forma

$$\tilde{\tilde{x}} = (0, 0, \alpha_3, \alpha_4), \ \tilde{\tilde{y}} = (0, 0, \beta_3, \beta_4),$$

el producto escalar

$$(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}})_2 = \alpha_3\beta_3 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 + 2\alpha_4\beta_4.$$

Introducir (usando el procedimiento descrito en el problema 2.1.13) el producto escalar en todo el espacio R_4. Calcular mediante la regla obtenida el producto escalar de los vectores $x = (1, 2, 3, 4)$ e $y = (-3, 1, -3, 2)$.

2.1.15*. Un producto escalar (x, y) está introducido sobre un subespacio L de un espacio lineal V. Demostrar que el producto escalar puede ser definido en todo el espacio V de modo que para los vectores x e y de L este producto coincidirá con el producto escalar (x, y) inicial.

2.1.16*. Demostrar que para los vectores x e y de un espacio euclídeo la desigualdad de Cauchy-Buniakovski

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)\,(y, y)$$

obtiene el signo de la igualdad si, y sólo si, los vectores x e y son linealmente dependientes.

2.1.17. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Buniakovski demostrar las desigualdades siguientes:

$$\text{a)}\ \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right);$$

$$\text{b)}\ \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i^2\Big)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\beta_i^2\right).$$

Aquí $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son números reales arbitrarios, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son números positivos.

2.1.18*. En la definición del producto escalar reemplazar el cuarto axioma por una condición menos rigurosa: $(x, x) \geqslant 0$ para todo vector x. Demostrar que en un espacio V con semejante «producto escalar»:

a) se verifica la desigualdad de Cauchy-Buniakovski;

b) el conjunto M de vectores x para los cuales $(x, x) = 0$ engendra un subespacio;

c) para todo x de M y todo vector y del espacio V el producto escalar es igual a cero;

d) si N es un subespacio suplementario arbitrario de M y si

$$x = x_M + x_N, \quad y = y_M + y_N$$

es la descomposición de los vectores x e y según los subespacios M y N, entonces el signo de igualdad en la desigualdad de Cauchy-Buniakovski para los vectores x e y tiene lugar si, y sólo si, x_N e y_N son linealmente dependientes.

2.1.19. Rechazar en la definición del producto escalar el cuarto axioma. ¿Tendrá lugar en este caso la desigualdad de Cauchy Buniakovski?

§ 2.2. Ortogonalidad, base ortonormal, proceso de ortogonalización

Presentación de los problemas del párrafo. Los problemas de este párrafo se agrupan alrededor de dos temas principales.

El proceso de ortogonalización, su aplicación a la construcción de una base ortogonal del espacio y al establecimiento de la dependencia lineal del sistema de vectores dado.

Las bases ortonormales de un espacio euclídeo, el papel que éstas desempeñan en el cálculo del producto escalar. También hemos querido mostrar cómo la ortogonalidad de una base depende del procedimiento aplicado para definir el producto escalar en el espacio lineal dado.

2.2.1. Demostrar que en un espacio euclídeo E:

a) el vector nulo es el vector único que posee la propiedad de ser ortogonal a todos los vectores del espacio;

b) si la igualdad $(a, x) = (b, x)$ es justa para todo vector x de E, entonces $a = b$.

2.2.2. Demostrar que si $x, y, \ldots, z$ es un sistema ortogonal de vectores, entonces cualesquiera que sean los números $\lambda, \mu, \ldots, \nu$

el sistema de vectores λx, μy, . . ., νz es igualmente ortogonal.

2.2.3. Demostrar que si un vector x es ortogonal a cada uno de los vectores y_1, . . ., y_l, el mismo también es igualmente ortogonal a toda combinación lineal de estos vectores.

2.2.4. Demostrar que un sistema ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

En adelante consideramos que en el espacio aritmético R_n el producto escalar de vectores $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *e* $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ *viene dado por la fórmula*

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n. \qquad (2.2.1)$$

Ortogonalizar los sistemas siguientes de vectores del espacio R_n:

2.2.5. $x_1 = (1, -2, 2)$, $x_2 = (-1, 0, -1)$, $x_3 = (5, -3, -7)$.

2.2.6. $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (3, 3, -1, -1)$, $x_3 = (-2, 0, 6, 8)$.

2.2.7*. Demostrar que la ortogonalización de un sistema linealmente independiente de vectores x_1, . . ., x_k conduce a un sistema ortogonal de vectores no nulos y_1, . . ., y_k.

2.2.8. Demostrar que en todo espacio euclídeo existe a) una base ortogonal, b) una base ortonormal.

2.2.9. Demostrar que a) todo vector no nulo puede ser incluido en una cierta base ortogonal de un espacio euclídeo; b) todo sistema ortogonal de vectores no nulos puede ser completado hasta una base ortogonal del espacio.

Verificar que los siguientes sistemas de vectores son ortogonales y completarlos hasta bases ortogonales:

2.2.10. $x_1 = (1, -2, 1, 3)$, $x_2 = (2, 1, -3, 1)$.

2.2.11. $x_1 = (1, -1, 1, -3)$, $x_2 = (-4, 1, 5, 0)$.

Completar los siguientes sistemas de vectores hasta bases ortonormales:

2.2.12. $x_1 = \left(-\frac{11}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{2}{3}\right)$,

$$x_2 = \left(-\frac{2}{15}, -\frac{14}{15}, -\frac{1}{3}\right).$$

2.2.13. $x_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

2.2.14. Demostrar que en las bases ortonormales de un espacio euclídeo y solamente en estas bases el producto escalar de dos vectores cualesquiera x e y se expresa por sus coordenadas con ayuda de la fórmula

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n.$$

2.2.15. Demostrar que en una base ortonormal e_1, . . ., e_n las coordenadas α_1, . . ., α_n de un vector x se calculan según las fórmulas

$$\alpha_i = (x, e_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

2.2.16. Hallar la dimensión del subespacio engendrado por todos los vectores x tales que $(a, x) = 0$. Aquí a es un vector no nulo fijado de un espacio euclídeo.

2.2.17*. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormal de un espacio euclídeo. Hallar la expresión del producto escalar de los vectores arbitrarios x e y haciendo uso de sus coordenadas:

a) en la base $\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \ldots, \lambda_n e_n$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números no nulos;

b) en la base $e_1 + e_2, e_2, e_3, \ldots, e_n$.

2.2.18. Supongamos que la ortogonalización está aplicada a un sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ arbitrario. Demostrar que

a) si el sistema $x_1, \ldots, x_k$ es linealmente dependiente, a un cierto paso de la ortogonalización se obtiene el vector nulo;

b) si los vectores $y_1, \ldots, y_{l-1}$ $(l \leqslant k)$ obtenidos por ortogonalización son no nulos y si $y_l = 0$, entonces el subsistema $x_1, \ldots, x_{l-1}$ del sistema inicial de vectores $x_1, \ldots, x_k$ es linealmente independiente y el vector x_l se expresa linealmente por este subsistema.

Aplicando la ortogonalización construir una base ortogonal del subespacio tendido sobre el sistema de vectores dado:

2.2.19. $x_1 = (2, 3, -4, -6)$, $x_2 = (1, 8, -2, -16)$, $x_3 = (12, 5, -14, 5)$, $x_4 = (3, 11, 4, -7)$.

2.2.20. $x_1 = (1, 1, -1, -2)$, $x_2 = (-2, 1, 5, 11)$, $x_3 = (0, 3, 3, 7)$, $x_4 = (3, -3, -3, -9)$.

2.2.21. Demostrar que si el sistema de vectores del espacio aritmético R_n

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_{11}, \ \alpha_{12}, \ \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}), \\ x_2 &= (0, \ \alpha_{22}, \ \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{2n}), \\ x_3 &= (0, \ 0, \ \alpha_{33}, \ldots, \alpha_{3n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (0, \ 0, \ 0, \ldots, \alpha_{nn}). \end{aligned}$$

engendra una base ortogonal de este espacio, entonces: a) $\alpha_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$; b) $\alpha_{ij} = 0$, si $i \neq j$.

2.2.22*. El espacio R_n $(n > 1)$ posee una base ortogonal $e_1, \ldots, e_n$ tal que los componentes de cada vector e_i adquieren el valor 1 ó -1. Mostrar que el espacio R_n es de dimensión 2 o de dimensión múltiple de 4.

2.2.23*. Sean dados el sistema linealmente independiente de vectores $x_1, \ldots, x_k$ y dos sistemas ortogonales de vectores no nulos $y_1, \ldots, y_k$ y $z_1, \ldots, z_k$ tales que los vectores y_i y z_i se expresan linealmente por $x_1, \ldots, x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Demostrar que $y_i = \alpha_i z_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, donde $\alpha_i \neq 0$.

2.2.24. Un producto escalar está introducido de modo arbitrario en el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales. Demostrar que en el espacio euclídeo obtenido:

a) existe una base ortogonal que contiene un polinomio de cada grado k, $0 \leqslant k \leqslant n$;

b) $f_0(t)$, $f_1(t)$, ..., $f_n(t)$ y $g_0(t)$, $g_1(t)$, ..., $g_n(t)$ son dos bases ortogonales que poseen la propiedad indicada, los polinomios que entran en estas bases (teniendo la numeración conveniente) se distinguen únicamente por los factores escalares: $g_i(t) = \alpha_i f_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

2.2.25. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base arbitraria de un espacio lineal real V. Demostrar que un producto escalar puede ser introducido en V de modo que el sistema de vectores $e_1, \ldots, e_n$ sea una base ortonormal del espacio euclídeo obtenido.

2.2.26. Determinar el producto escalar en el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ de modo que la base

$$1,\ t,\ \frac{t^2}{2!},\ \ldots,\ \frac{t^n}{n!}$$

devenga ortonormal.

§ 2.3. Complemento ortogonal, sumas ortogonales de subespacios

Presentación de los problemas del párrafo. Los objetivos principales de este párrafo son:

Mostrar las diferentes propiedades de la noción —muy importante en lo sucesivo— de complemento ortogonal de un subespacio.

Dar problemas de cálculo de complementos ortogonales y, en particular, atraer la atención sobre la relación que existe entre los problemas de complementos ortogonales y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. El problema de la perpendicular (véase 2.3.10—2.3.14) también se enmarca aquí.

Indicar el corolario útil de los teoremas de complementos ortogonales que consiste en la existencia de una base biortogonal para toda base de un espacio euclídeo.

Notar los rasgos comunes entre los teoremas de sumas directas de subespacios de un espacio lineal y los teoremas de sumas ortogonales de un espacio euclídeo. En particular, la descomposición de un espacio euclídeo en una suma ortogonal de subespacios es análoga a la descomposición respecto a una base ortonormalizada en el mismo sentido que los subespacios cuya suma directa engendra el espacio lineal dado, cumplen en este espacio la función de base generalizada.

2.3.1. Sea L un subespacio de dimensión k de un espacio euclídeo E, $k < n$. Demostrar que en E existe un vector no nulo ortogonal a todos los vectores de L (o, más brevemente, ortogonal al subespacio L).

2.3.2. Demostrar que el conjunto $L^{\perp}$ (de todos los vectores ortogonales al subespacio lineal L es también un subespacio lineal. $L^{\perp}$ se llama *complemento ortogonal del subespacio* L.

2.3.3. Sea L un subespacio arbitrario de un espacio euclídeo E. Demostrar que E es la suma directa de los subespacios L y $L^{\perp}$. Prestar atención a la relación que existe entre las dimensiones de los subespacios L y $L^{\perp}$ y se deduce de esta afirmación.

2.3.4. Demostrar que el complemento ortogonal de un subespacio lineal de un espacio euclídeo E posee propiedades siguientes:

a) $(L^{\perp})^{\perp} = L$;

b) si $L_1 \subset L_2$, entonces $L_2^{\perp} \subset L_1^{\perp}$;

c) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$;

d) $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$;

e) $E^{\perp} = O$, $O^{\perp} = E$.

Aquí O es el subespacio nulo que contiene solamente el vector nulo.

2.3.5. La suma directa de los subespacios L_1 y L_2 engendra el espacio euclídeo E. Demostrar que esto es también correcto para sus complementos ortogonales, es decir, $E = L_1^{\perp} \dotplus L_2^{\perp}$.

2.3.6. Hallar la base del complemento ortogonal $L^{\perp}$ de la cápsula lineal L del siguiente sistema de vectores del espacio R_4:

$x_1 = (1, 3, 0, 2)$, $x_2 = (3, 7, -1, 2)$, $x_3 = (2, 4, -1, 0)$.

2.3.7. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormalizada fijada en un espacio euclídeo E. Demostrar que

a) si

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

es un sistema de ecuaciones lineales arbitrario con n incógnitas, entonces el conjunto de vectores z cuyas coordenadas en la base $e_1, \ldots, e_n$ satisfacen a este sistema, es un subespacio lineal del espacio E. Este subespacio es de dimensión $n - r$, donde r es el rango del sistema de vectores siguiente de un espacio aritmético:

$$\begin{aligned} n_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ n_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}). \end{aligned}$$

b) todo subespacio L del espacio E puede ser descrito por un sistema de ecuaciones lineales. Esto último significa que un vector z pertenece al subespacio L si, y sólo si, sus coordenadas en la base $e_1, \ldots, e_n$ satisfacen al sistema dado. Si r es la dimensión del subespacio L, entonces todo sistema que describe este subespacio está compuesto por lo menos de $n-r$ ecuaciones; además, existe un sistema compuesto exactamente de $n-r$ ecuaciones;

c) los sistemas de ecuaciones lineales que describen en la base dada el subespacio L y su complemento ortogonal $L^{\perp}$ están ligados entre sí del modo siguiente: son coeficientes del sistema que describe uno de estos subespacios las coordenadas de los vectores sobre las cuales está tendido un otro subespacio.

2.3.8. En el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ con coeficientes reales el producto escalar de polinomios $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ y $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$ (los coeficientes superiores de los polinomios pueden ser nulos) se determina por la fórmula

$$(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n. \tag{2.3.1}$$

Hallar el complemento ortogonal:

a) del subespacio de todos los polinomios que satisfacen a la condición $f(1) = 0$;

b) del subespacio de todos los polinomios pares del espacio M_n.

2.3.9. Hallar los sistemas de ecuaciones lineales que describen el subespacio L del problema 2.3.6 y su complemento ortogonal $L^\perp$.

2.3.10. Sea L un subespacio lineal de un espacio euclídeo E. Demostrar que cualquier vector x de E puede ser representado de un modo único en la forma $x = y + z$, donde y pertenece a L y z es ortogonal a L. El vector y se llama *proyección ortogonal* de vector x sobre el subespacio L y z se llama *perpendicular* bajada desde x sobre L. Hallar para el subespacio L y el vector x dados el modo de cálculo de y y de z.

2.3.11*. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_k$ un sistema arbitrario de vectores de un espacio euclídeo E. Demostrar que para todo vector x de E el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_1)\alpha_1 + (x_2, x_1)\alpha_2 + \ldots + (x_k, x_1)\alpha_k = (x, x_1),\\
&(x_1, x_2)\alpha_1 + (x_2, x_2)\alpha_2 + \ldots + (x_k, x_2)\alpha_k = (x, x_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(x_1, x_k)\alpha_1 + (x_2, x_k)\alpha_2 + \ldots + (x_k, x_k)\alpha_k = (x, x_k)
\end{aligned}$$

posee por lo menos una solución. ¿En qué caso esta solución será única?

Hallar la proyección ortogonal y la perpendicular bajada desde el vector x sobre el subespacio L.

2.3.12. $x = (14, -3, -6, -7)$. L está tendido sobre los vectores $y_1 = (-3, 0, 7, 6)$, $y_2 = (1, 4, 3, 2)$, $y_3 = (2, 2, -2, -2)$.

2.3.13. $x = (2, -5, 3, 4)$. L está tendido sobre los vectores $y_1 = (1, 3, 3, 5)$, $y_2 = (1, 3, -5, -3)$, $y_3 = (1, -5, 3, -3)$.

2.3.14. $x = (-3, 0, -5, 9)$. L está dado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 &= 0,\\
5\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 0,\\
\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 10\alpha_4 &= 0.
\end{aligned}$$

2.3.15. Dos sistemas de vectores $x_1, \ldots, x_k$ e $y_1, \ldots, y_k$ de un espacio euclídeo se llaman *biortogonales*, si

$$(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Demostrar que cada uno de dos sistemas biortogonales de vectores es linealmente independiente.

2.3.16. Demostrar que para toda base de un espacio euclídeo existe una base biortogonal, y una sola.

2.3.17. Sea $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_n$ un par de bases biortogonales de un espacio euclídeo. Demostrar que para todo k, $1 \leqslant k < n$, el complemento ortogonal de un subespacio tendido sobre los vectores $e_1, \ldots, e_k$ coincide con la cápsula lineal de los vectores $f_{k+1}, \ldots, f_n$.

Hallar las bases biortogonales para las siguientes bases del espacio R_4:

2.3.18. $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 2, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 3, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 4)$.

2.3.19. $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 2, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 3, 1)$.

2.3.20. $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1, 1)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

2.3.21. $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, -1, -1)$, $e_3 = (1, -1, 1, -1)$, $e_4 = (1, -1, -1, 1)$.

2.3.22. En un espacio euclídeo E están fijadas las bases biortogonales $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_n$. Mostrar que:

a) si x es un vector arbitrario de E, los coeficientes α_i de su descomposición según la base $e_1, \ldots, e_n$: $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ se calculan mediante las fórmulas $\alpha_i = (x, f_i)$, $i = 1, \ldots, n$);

b) el producto escalar de vectores arbitrarios x e y está definido por la fórmula

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, f_i)(y, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

donde $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son los coeficientes de la descomposición del vector y según la base $f_1, \ldots, f_n$.

2.3.23. Los subespacios lineales $L_1, \ldots, L_p$ de un espacio euclídeo E son *ortogonales* de dos en dos (esto significa que todo vector de cada uno de los subespacios L_i es ortogonal a los demás subespacios). Demostrar que la suma de los subespacios $L_1, \ldots, L_p$ es su suma directa. (La suma de subespacios ortogonales de dos en dos se llama *suma ortogonal* y se nota $L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$.)

2.3.24. Demostrar que la suma L de los subespacios $L_1, \ldots, L_p$ es su suma ortogonal si, y sólo si, la reunión de las bases ortogonales de estos subespacios da la base ortogonal de L.

2.3.25. Demostrar que la suma ortogonal de subespacios es asociativa: si $L = L_1 \oplus \tilde{L}$, además, $\tilde{L} = L_2 \oplus L_3$ entonces

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3.$$

2.3.26. La suma directa de los subespacios $L_1, \ldots, L_p$ engendra un espacio euclídeo E. Demostrar que esta suma será ortogonal si, y sólo si, para el producto escalar de cualesquiera vectores x e y de E que tienen en los subespacios $L_1, \ldots, L_p$ las descomposiciones $x = x_1 + \ldots + x_p$ e $y = y_1 + \ldots + y_p$, respectivamente, es justa la igualdad

$$(x, y) = (x_1, y_1) + \ldots + (x_p, y_p).$$

2.3.27. Un espacio lineal V está descompuesto de un modo arbitrario en una suma directa de subespacios: $V = L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_p$. Demostrar que en V el producto escalar puede ser definido de tal modo que los subespacios L_i serán ortogonales de dos en dos.

§ 2.4. Longitudes, ángulos, distancias

Presentación de los problemas del párrafo. En el presente párrafo hemos querido:

Dar unos problemas simples referentes al cálculo de la longitud, el ángulo y de la distancia, demostrar que los teoremas de la geometría euclídea elemental siguen válidos en un espacio euclídeo arbitrario.

Interpretar el problema de la descomposición de un vector según los subespacios complementarios ortogonales como un problema de búsqueda de la distancia más corta entre un vector y un subespacio.

Definir el ángulo entre un vector y un subespacio y mostrar que esta definición generaliza la noción de ángulo entre un vector y un plano de un espacio euclídeo tridimensional.

2.4.1. Demostrar que las longitudes de los vectores x e $y = \alpha x$ verifican la igualdad

$$|y| = |\alpha| \, |x|.$$

2.4.2. ¿Cómo cambiará el ángulo entre los vectores no nulos x e y si:

a) se multiplica el vector x por un número positivo; b) se multiplica el vector x por un número negativo; c) se multiplican ambos vectores x e y por números negativos?

En los problemas que siguen, por analogía con un espacio euclídeo tridimensional, una terna ordenada de vectores x, y y $x - y$ de un espacio euclídeo arbitrario se considera como un *triángulo* del cual dicen que «*está tendido sobre los vectores* x e y». Se considera igualmente que las diagonales de un paralelogramo tendido sobre los vectores x e y son los vectores $x + y$ y $x - y$.

2.4.3. Demostrar que los triángulos tendidos sobre los vectores x, y y αx, αy, respectivamente, donde α es un número no nulo arbitrario, tienen los mismos ángulos.

2.4.4. Hallar las longitudes de los lados del triángulo tendido sobre los vectores del espacio R_4 : $x = (2, -1, 3, -2)$ e $y = (3, 1, 5, 1)$. Determinar los ángulos formados por los lados del triángulo, éstos son los vectores x, y y $x - y$. ¿Cuáles de estos ángulos pueden considerarse como interiores y exteriores?

2.4.5. Formular y demostrar el teorema de los cosenos del triángulo tendido sobre los vectores x e y de un espacio euclídeo arbitrario.

2.4.6. Determinar si el triángulo tendido sobre los polinomios $t^2 + 3t$ y $2t^2 + 2t - 1$ es un triángulo acutángulo o un triángulo obtusángulo y si el producto escalar de los polinomios $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ y $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ está definido por la fórmula: a) $(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$; b) $(f, g) = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2$.

2.4.7. Demostrar el teorema de Pitágoras y el teorema recíproco: dos vectores x e y de un espacio euclídeo son ortogonales si, y sólo si, $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

2.4.8. Demostrar que en un triángulo arbitrario de un espacio euclídeo:

a) la longitud de cada lado no supera la suma de las longitudes de los otros dos lados;

b) la longitud de cada lado no es menor que la magnitud absoluta de la diferencia entre las longitudes de los otros dos lados.

2.4.9. Demostrar que en el paralelogramo tendido sobre los vectores x e y la suma de los cuadrados de longitudes de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de longitudes de los lados.

2.4.10. Demostrar que $|x| = |y|$ si, y sólo si, los vectores $x + y$ y $x - y$ son ortogonales. Aclarar el sentido geométrico de esta afirmación.

2.4.11. Sean $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormalizada de un espacio euclídeo y x un vector normalizado arbitrario. Demostrar que las coordenadas del vector x en la base $e_1, \ldots, e_n$ son iguales a los cosenos de los ángulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ formados por x y los vectores de la base. Deducir la relación

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \ldots + \cos^2 \alpha_n = 1.$$

2.4.12. Llámase *distancia entre los vectores* x e y de un espacio euclídeo al número

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Mostrar que la distancia definida de este modo satisface a la desigualdad triangular:

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

para tres vectores cualesquiera x, y y z.

2.4.13. Demostrar que para los vectores x, y y z la desigualdad triangular se convierte en igualdad, si, y solamente si, $(x - y) = \alpha(y - z)$, $\alpha \geqslant 0$.

2.4.14. En el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ el producto escalar de los polinomios

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

y

$$g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$$

está definido por la fórmula (2.3.1). Para los polinomios dados

$$f_1(t) = 3t^2 + 2t + 1, \quad f_2(t) = -t^2 + 2t + 1,$$
$$f_3(t) = 3t^2 + 2t + 5, \quad f_4(t) = 3t^2 + 5t + 2:$$

a) hallar el polinomio $f_0(t)$ de grado $\leqslant 2$ equidistante de $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$;

b) determinar la distancia entre $f_0(t)$ y cada uno de los polinomios $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$;

c) determinar que todo polinomio de la forma

$$f_0(t) + m_3 t^3 + \ldots + m_n t^n$$

es también equidistante de $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ y determinar su distancia hasta estos polinomios.

2.4.15*. Un subespacio L y un vector arbitrario x vienen dados en un espacio euclídeo. Llámase *distancia entre un vector x y un subespacio L* al número

$$\rho(x, L) = \inf_{y \in L} \rho(x, y).$$

Demostrar que:

a) la distancia $\rho(x, L)$ es igual a la longitud de la perpendicular bajada desde x sobre L;

b) el vector del subespacio L, el más cercano a x, es la proyección ortogonal de x sobre L;

c) para todo y de L

$$\rho(x + y, L) = \rho(x, L).$$

2.4.16*. El subespacio L es la suma ortogonal de los subespacios L_1 y L_2. El vector x es ortogonal al subespacio L_1. Demostrar que

$$\rho(x, L) = \rho(x, L_2).$$

2.4.17*. Sean a el vector fijado de un espacio euclídeo y L el subespacio de todos los vectores ortogonales a a. Demostrar que la distancia entre un vector arbitrario x y el subespacio L puede ser calculada mediante la fórmula

$$\rho(x, L) = \frac{|(x, a)|}{|a|}.$$

2.4.18. En el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ el producto escalar se calcula por medio de la fórmula (2.3.1) usando los coeficientes de polinomios. Hallar la distancia entre el subespacio M_{n-1} engendrado por todos los polinomios de grado $\leqslant n-1$ y

a) el polinomio t^n;

b) el polinomio $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$;

c) el polinomio $\alpha t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$.

2.4.19. En el espacio M_n con el mismo producto escalar (2.3.1) se examina el subespacio L de todos los polinomios que satisfacen a la condición $f(1) = 0$. Demostrar que la distancia entre un polinomio arbitrario $g(t)$ y el subespacio L es igual a

$$\rho(g, L) = \frac{g(1)}{\sqrt{n+1}}.$$

2.4.20*. Un subespacio L y un vector x están dados en un espacio euclídeo. Llámase *ángulo formado por el vector x y el subespacio L* al ángulo mínimo que forma x con los vectores de L. Demostrar que el ángulo entre x y L es igual al ángulo entre x y su proyección ortogonal y sobre L. Mostrar que entre los vectores del subespacio L, los vectores de la forma αy, $\alpha > 0$ y solamente ellos forman el mismo ángulo con el vector x.

2.4.21. Demostrar que la suma de ángulos que un vector x forma con un subespacio arbitrario L y su complemento ortogonal $L^\perp$ es igual a $\pi/2$.

2.4.22. Un espacio euclídeo E está descompuesto en la suma ortogonal de los subespacios $L_1, \ldots, L_p$. Demostrar que para los ángulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ formados por un vector arbitrario x y los subespacios $L_1, \ldots, L_p$ es válida la relación

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \ldots + \cos^2 \alpha_p = 1.$$

Comparar esta fórmula con la obtenida en el problema 2.4.11.

2.4.23. El subespacio L es la suma ortogonal de los subespacios L_1 y L_2. El vector x es ortogonal al subespacio L_1. Demostrar que el ángulo formado por x y L es igual al ángulo comprendido entre x y L_2.

Hallar el ángulo entre el vector x y el subespacio lineal L tendido sobre los vectores y_1, y_2, y_3:

2.4.24. $x = (-3, 15, 1, -5)$;
$y_1 = (2, 3, -4, -6)$,
$y_2 = (1, 8, -2, -16)$,
$y_3 = (1, -5, -2, 10)$.

2.4.25. $x = (3, 1, \sqrt{2}, -2)$;
$y_1 = (2, -1, 2, 1)$,
$y_2 = (-1, 2, -2, 1)$,
$y_3 = (-1, 1, -1, 0)$.

§ 2.5. Espacio unitario

Presentación de los problemas del párrafo. Los problemas de este párrafo pretenden, en lo fundamental, repasar los problemas dados más arriba y relacionados con los espacios euclídeos. Mediante esta recapitulación hemos querido mostrar que los hechos esenciales demostrados en el espacio euclídeo siguen en vigor también en espacios unitarios arbitrarios. Al mismo tiempo hemos tratado de ilustrar también las diferencias entre la teoría referida a un caso real y a un caso complejo, en particular, partiendo de teoremas geométricos. Para concluir el párrafo describimos el procedimiento de paso de un espacio euclídeo a un espacio unitario («complexificación» del espacio unitario) y el paso inverso («descomplexificación»).

2.5.1. Demostrar que de los axiomas del producto escalar en un espacio unitario se deducen las propiedades siguientes:

a) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ para cualesquiera vectores del espacio unitario;

b) $(x, \alpha y) = \bar{\alpha} (x, y)$ para cualesquiera vectores x, y del espacio unitario y cualquier número complejo α;

c) $(0, x) = (x, 0) = 0$;

d) $\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{l} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \alpha_i \bar{\beta}_j (x_i, y_j)$.

2.5.2. Demostrar que en cualquier espacio lineal complejo se puede definir un producto escalar.

2.5.3. Introducir un producto escalar en el espacio aritmético complejo C_n de dimensión n.

2.5.4. Introducir un producto escalar en el espacio de polinomios de grado $\leqslant n$ con coeficientes complejos, considerado como un espacio lineal complejo con operaciones usuales de adición de polinomios y de multiplicación de un polinomio por un número complejo.

2.5.5. Demostrar que en el espacio C_n el producto escalar de los vectores $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ puede ser definido por la fórmula

$$\begin{aligned}(x, y) = {} & a_{11}\alpha_1\bar{\beta}_1 + a_{12}\alpha_1\bar{\beta}_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_1\bar{\beta}_n + \\ & + a_{21}\alpha_2\bar{\beta}_1 + a_{22}\alpha_2\bar{\beta}_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_2\bar{\beta}_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}\alpha_n\bar{\beta}_1 + a_{n2}\alpha_n\bar{\beta}_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n\bar{\beta}_n\end{aligned}$$

bajo la condición que

a) $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para todos i, j;

b) $a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $i = 1, \ldots, n$.

2.5.6. Demostrar que en las bases ortonormalizadas de un espacio unitario, y solamente en tales bases, el producto escalar de dos vectores x e y se expresa por sus coordenadas mediante la fórmula

$$(x, y) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{\beta}_n.$$

2.5.7. Demostrar la desigualdad de Cauchy-Buniakovski para un espacio unitario

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

Deducir la relación

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2\right),$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son números complejos arbitrarios.

2.5.8. Demostrar que en un espacio unitario arbitrario el teorema de Pitágoras es justo: si los vectores x e y son ortogonales, entonces

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Mostrar igualmente que la reciprocidad del teorema de Pitágoras no es justa.

2.5.9. Demostrar que los vectores x e y de un espacio unitario son ortogonales si, y solamente si,

$$|\alpha x + \beta y|^2 = |\alpha x|^2 + |\beta y|^2$$

para cualesquiera números α y β.

2.5.10. Demostrar que en caso de un espacio unitario la afirmación del problema 2.4.10 no tiene razón. ¿Cuál de las dos proposiciones que constituyen problema, es incorrecta?

2.5.11. Demostrar que, por el contrario, la proposición 2.4.9:

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$$

es igualmente justa para un espacio unitario.

2.5.12. Demostrar la igualdad

$$4(x, y) = |x + y|^2 - |x - y|^2 + i|x + iy|^2 - \\ - i|x - iy|^2. \qquad (2.5.1)$$

2.5.13*. Sean R un espacio real, C, el conjunto de todas las sumas formales $x + iy$, donde $x \in R$, $y \in R$. Demostrar que

a) si en el conjunto C las operaciones lineales se definen por las fórmulas

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$\lambda(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x);$$

donde $\lambda = \alpha + i\beta$ es un número complejo arbitrario, el conjunto C es un espacio lineal complejo;

b) el sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ del espacio R es linealmente dependiente o linealmente independiente, lo mismo que el sistema de vectores $x_1 + i0, \ldots, x_k + i0$ del espacio C;

c) la dimensión del espacio C es igual a la del espacio R.

El procedimiento descrito de construcción —partiendo de un espacio lineal real dado R— de un espacio complejo de la misma dimensión se llama *complexificación* del espacio R.

2.5.14. Sean R un espacio euclídeo con el producto escalar (x, y) y C el espacio complejo obtenido de R por complexificación. Demostrar que:

a) el espacio C puede ser transformado en un espacio unitario al introducir en él un producto escalar mediante la fórmula

$$\langle x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \rangle = [(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + \\ + i[(y_1, x_2) - (x_1, y_2)];$$

b) si $e_1, \ldots, e_k$ es un sistema ortogonal de vectores de R, en el espacio C con el producto escalar indicado el sistema de vectores $e_1 + i0, \ldots, e_k + i0$ es ortogonal a este sistema;

c) si $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormalizada de R, entonces $e_1 + i0, \ldots, e_n + i0$ es una base ortonormalizada de C.

2.5.15. Complexificar el espacio aritmético real R_n de dimensión n (con un producto escalar ordinario). ¿Cuál es el espacio complejo que se obtiene?

2.5.16. Sea C un espacio complejo arbitrario. Demostrar que el conjunto de vectores que engendran C puede ser considerado igualmente como espacio lineal real R donde a) la adición coincide con la adición en C; b) para todo número real α y todo vector z

$$\alpha z = (\alpha + i0) z,$$

donde el segundo miembro es el producto del vector z por el número $\alpha + i0$ definido en C. El paso del espacio complejo C al espacio real R se llama *descomplexificación* del espacio C.

2.5.17*. Sean C un espacio complejo de dimensión n y R el espacio real obtenido de C por descomplexificación. Demostrar que

a) si $z_1, \ldots, z_k$ es un sistema linealmente independiente (linealmente dependiente) de vectores de C, entonces $z_1, iz_1, \ldots, z_k, iz_k$ es un sistema linealmente independiente (linealmente dependiente) de vectores de R (el producto iz_j definido mediante las fórmulas dadas en C es precisamente un elemento de este espacio y, por consiguiente, un elemento de R);

b) la dimensión del espacio R es igual a $2n$; en este caso a toda base $e_1, \ldots, e_n$ del espacio C le corresponde la base $e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n$ del espacio R.

2.5.18*. Sean C un espacio unitario de dimensión n con el producto escalar (x, y) y R un espacio real obtenido de C por descomplexificación. Demostrar que

a) R puede ser transformado en un espacio euclídeo, al introducir en él un producto escalar mediante la fórmula
$\langle z_1, z_2 \rangle = \mathrm{Re}\,(z_1, z_2)$;

b) para todo vector z de C los vectores z e iz, considerados como elementos del espacio euclídeo obtenido, son ortogonales;

c) si $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortogonal de C, el sistema de vectores $e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n$ es una base ortogonal de R.

2.5.19. Demostrar que el espacio aritmético complejo C_n de dimensión n puede ser descomplexificado haciendo corresponder a cada vector $z = (\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n)$ de C_n el vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ del espacio aritmético real R_{2n}. ¿Qué vector de R_{2n} corresponde al vector iz? ¿Qué producto escalar es inducido en R_{2n}, si en C_n se da un producto escalar ordinario: para $z = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ y $w = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ adoptando $(z, w) = \lambda_1\overline{\mu_1} + \ldots + \lambda_n\overline{\mu_n}$?

Capítulo 3

DETERMINANTES

§ 3.0. Terminología y generalidades

Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un sistema arbitrario de vectores de un espacio euclídeo o unitario de dimensión n. Adoptemos

$L_0 = O,\ L_k = L(x_1, \ldots, x_k).$

Designemos por y_k la perpendicular bajada desde x_k sobre el subespacio L_{k-1}.

Llámase *volumen de un paralelepípedo* tendido sobre un sistema de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ al número

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} |y_k|. \tag{3.0.1}$$

Es evidente que el volumen de un tal paralelepípedo es nulo si, y sólo si, el sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es linealmente dependiente. Puesto que

$$|y_k| \leqslant |x_k|,\ k = 1, \ldots, n,$$

el volumen de un paralelepípedo verifica la *desigualdad de Hadamard*

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \prod_{k=1}^{n} |x_k|, \tag{3.0.2}$$

además, en este caso la igualdad tiene lugar si, y sólo si, entre los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existe por lo menos un vector nulo o si estos vectores son ortogonales de dos en dos.

Siguiendo a V. Voevodin damos una definición axiomática del *volumen orientado* $V \pm (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de un paralelepípedo* tendido sobre un sistema de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A saber, es necesario satisfacer las condiciones siguientes:

1. $V \pm (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función lineal de cada uno de sus argumentos vectoriales $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
2. $V \pm (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ si el sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es linealmente dependiente;
3. $V \pm (e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$ para una cierta base ortonormalizada $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Se puede mostrar (véase V. Voevodin *Álgebra lineal*, capítulo 4) que el volumen orientado de un paralelepípedo existe y su módulo es igual al volumen de este mismo paralelepípedo. En particular, resulta que la condición

$$V \pm (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

es necesaria y suficiente para asegurar la dependencia lineal del sistema de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Como el volumen orientado está definido no unívocamente, para obtener el volumen orientado concreto hace falta indicar la base ortonormalizada $e_1, e_2, \ldots, e_n$, en cuyo caso éste es igual a la unidad.

Llámase *matriz cuadrada de orden n* a una tabla numérica cuadrada compuesta de *n filas* y *n columnas*:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Los elementos a_{ij} de una matriz A pueden ser números reales o complejos; las matrices respectivas son llamadas en este caso *reales* o *complejas*.

Dicen que los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ constituyen la *diagonal principal* de la matriz A; los demás elementos a_{ij}, $i \neq j$, se llaman elementos *fuera de la diagonal*. La matriz, cuyos todos los elementos fuera de la diagonal son iguales a cero, se llama *matriz diagonal*. Una matriz diagonal se llama *matriz unidad* o *matriz identidad* si todos los elementos de su diagonal principal son iguales a la unidad. Se utiliza igualmente la expresión: *diagonal no principal de la matriz A*; la componen los elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$.

Llámase *determinante de una matriz A* la suma algebraica de $n!$ términos compuesta del modo siguiente: estos términos son todos los productos posibles de n elementos de la matriz tomados uno a uno de cada fila y de cada columna, siendo que el término $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ se toma con el signo más si el número de inversiones de la permutación $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ es par, y con el signo menos, en el caso contrario. En este caso se llama *inversión* de los números α_i y α_j a una situación cuando $\alpha_i > \alpha_j$, pero en la permutación $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, α_i viene antes que α_j. En adelante, el determinante de una matriz A se notará $|A|$ o $\det A$.

Si las filas de una matriz A se consideran como vectores de un espacio aritmético de dimensión n, el determinante $\det A$ no es sino el volumen orientado de un paralelepípedo en este espacio; la base ortonormalizada correspondiente es la base natural (1.0.1). De esto se deduce lo siguiente:

1) $\det A$ es una función lineal de filas de la matriz A;

2) $\det A = 0$ si, y solamente si, las filas de la matriz A son linealmente dependientes. Una matriz se llama *singular* si su determinante es igual a cero y *no singular* en el caso contrario;

3) el determinante de una matriz no se cambia si a una fila se la añade una combinación lineal de otras filas;

4) en una permutación de dos filas un determinante cambia su signo.

Llámase *transposición* de una matriz A a una transformación de ésta tal que sus filas pasan a ser columnas del mismo índice, es decir, al paso a la *matriz transpuesta*

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{3.0.3}$$

En una transposición el determinante de la matriz no se cambia: $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$. De aquí resulta que las propiedades del determinante formuladas más arriba para las filas de una matriz son igualmente justas para sus columnas.

Fijemos en la matriz A k filas cualesquiera de índices $i_1, i_2, \dots, i_k$ y k columnas de índices $j_1, j_2, \dots, j_k$. La intersección de estas filas y columnas forma una matriz de orden k cuyo determinante se llama *menor de orden k* de la matriz A (o de su determinante). En particular, los elementos a_{ij} son menores de orden 1. Si hace falta indicar la posición de un menor en la matriz A se utiliza la notación

$$M = A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}. \tag{3.0.4}$$

Si en este caso los índices de filas coinciden con los de columnas escribimos más brevemente $A\,(i_1 i_2 \dots i_k)$.

Suprimiendo en la matriz A las filas de índices $i_1, \dots, i_k$ y las columnas de índices $j_1, \dots, j_k$ se obtiene el menor de orden $n - k$ llamado *menor complementario* del menor (3.0.4). Llámase *complemento algebraico* del menor (3.0.4) a su menor complementario tomado con el signo $(-1)^{s_M}$, donde

$$s_M = i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k.$$

El complemento algebraico (cofactor) del elemento a_{ij} se nota A_{ij}.

Tiene lugar el teorema de Laplace.

Teorema de Laplace. Sea A una matriz de orden n, en la cual están elegidas arbitrariamente k filas (o k columnas), $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. En este caso el determinante $\det A$ es igual a la suma de productos de todos los menores de orden k contenidos en las filas elegidas, por sus complementos algebraicos.

Las fórmulas siguientes *de desarrollo de un determinante según una fila*

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} &= \det A, \\ a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} &= 0, \quad i \neq j \end{aligned} \tag{3.0.5}$$

son un caso particular del teorema de Laplace. Claro está que fórmulas análogas *de desarrollo de un determinante según una columna* son igualmente justas.

Hagamos unas notas más sobre los métodos de cálculo de determinantes utilizados en el presente capítulo.

Como muestra el método de Gauss descrito en el § 1.0 este método transforma una matriz cuadrada en una forma triangular. En virtud de las propiedades 3 y 4 del determinante indicadas más arriba, las transformaciones utilizadas con este fin pueden cambiar solamente su signo. En lo que se refiere al determinante de una matriz de forma triangular, éste (véase 3.1.8) es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Precisamente en esto consiste la aplicación del método de Gauss al cálculo de determinantes. Los diversos aspectos de este método se discutirán detalladamente en el § 3.4.

Describamos ahora *el método de relaciones recurrentes* que puede ser utilizado para calcular los determinantes *de tres diagonales* de la forma

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{vmatrix}. \tag{3.0.6}$$

Examinemos el conjunto s de sucesiones numéricas infinitas

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \tag{3.0.7}$$

complejas, para mayor certeza. Las operaciones lineales sobre estas sucesiones se determinan por las relaciones:

1) $\lambda x = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n, \dots)$;

2) si $y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$, entonces

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n, \dots).$$

Está claro que en este caso s se convierte en espacio lineal.

Un subespacio de s es un conjunto F de todas las sucesiones (3.0.7) cuyos elementos verifican *la relación recurrente o la ecuación en diferencias de segundo orden*:

$$\alpha_n = p\alpha_{n-1} + q\alpha_{n-2}, \; n = 3, 4, \dots; \tag{3.0.8}$$

p, q son números fijos, $q \neq 0$. Es fácil ver que la dimensión de subespacio F es igual a 2. Mostremos cómo se construye la base de este subespacio.

Compongamos según los coeficientes de la relación en diferencias (3.0.8) una ecuación algebraica (llamada *ecuación característica*)

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0.$$

Son posibles dos casos:

1. Las raíces de la ecuación característica λ_1 y λ_2 son distintas. En este caso la base del subespacio F está compuesta de dos sucesiones:

$$e_1=(\lambda_1,\ \lambda_1^2,\ \lambda_1^3,\ \ldots,\ \lambda_1^n,\ \ldots),$$
$$e_2=(\lambda_2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_2^3,\ \ldots,\ \lambda_2^n,\ \ldots).$$

2. La ecuación característica tiene una raíz doble λ. En este caso serán la base de F las sucesiones:

$$e_1=(\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ \ldots,\ \lambda^n,\ \ldots),$$
$$e_2=(1,\ 2\lambda,\ 3\lambda^2,\ \ldots,\ n\lambda^{n-1},\ \ldots).$$

Toda sucesión (3.0.7) perteneciente a F puede ser desarrollada según la base e_1, e_2:

$$x = c_1e_1 + c_2e_2.$$

En componentes esta relación se escribe así:

$$\alpha_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$$

para el caso 1 y

$$\alpha_n=c_1\lambda^n+c_2n\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(c_1\lambda+c_2n)$$

para el caso 2.

Las coordenadas c_1 y c_2 de la sucesión x pueden ser calculadas utilizando solamente sus dos primeros componentes. Éstos son la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\lambda_1c_1 + \lambda_2c_2 = \alpha_1,$$
$$\lambda_1^2c_1 + \lambda_2^2c_2 = \alpha_2$$

o bien

$$\lambda c_1 + c_2 = \alpha_1,$$
$$\lambda^2c_1 + 2\lambda c_2 = \alpha_2,$$

según sea el caso considerado.

Volvamos al determinante (3.0.6). Desarrollándolo según la última fila obtenemos

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2},\ n = 3,\ 4,\ \ldots,$$

es decir, una relación recurrente de segundo orden. En este caso

$$D_1=a,$$
$$D_2=a^2-bc$$

y se puede aplicar la construcción descrita más arriba.

§ 3.1. Definición y propiedades elementales de los determinantes

Presentación de los problemas del párrafo. Este párrafo contiene la colección clásica de los problemas referentes a la definición y las propiedades elementales de los determinantes. Tenemos en cuenta las propiedades lineales, la invariación en la transposición, el cambio de signo en la permutación de filas (columnas), la igualdad a cero del determinante cuyas filas (columnas) son linealmente dependientes.

¿Forman parte del determinante de orden 7 los productos de sus elementos citados más abajo? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál es su signo?

3.1.1. $a_{45}a_{71}a_{23}a_{67}a_{34}a_{12}a_{56}$.

3.1.2. $a_{23}a_{52}a_{77}a_{34}a_{61}a_{12}a_{46}$.

3.1.3. $a_{71}a_{17}a_{26}a_{62}a_{53}a_{35}a_{44}$.

3.1.4. $a_{26}a_{35}a_{44}a_{17}a_{53}a_{62}a_{31}$.

3.1.5. Completar el producto de los elementos $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}$ de un determinante de orden 7 para obtener uno de sus términos: con el signo más; b) con el signo menos.

3.1.6. Hallar la relación entre los índices de elementos de un determinante que se encuentran: a) sobre la diagonal principal; b) por arriba de la diagonal principal; c) por abajo de la diagonal principal.

3.1.7. ¿Cuál es el signo del producto de elementos de la diagonal principal en un determinante de orden n?

3.1.8. Aplicando solamente la definición calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3.1.9. ¿Cuál es la relación entre los índices de elementos de un determinante de orden n que se halla: a) sobre la diagonal no principal; b) por arriba de la diagonal no principal; c) por abajo de la diagonal no principal?

3.1.10. ¿Cuál es el signo del producto de elementos de la diagonal no principal en un determinante de orden n?

3.1.11. Partiendo de la definición calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 0\dots 0 & 0 & a_{1n} \\ 0\dots 0 & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ 0\dots a_{3,\,n-2} & a_{3,\,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\;a_{n,\,n-2} & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Aplicando solamente la definición calcular los determinantes siguientes:

3.1.12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ 3.1.13. $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3.1.14*. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{1j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & m_{2j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & m_{3j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & m_{j-1,j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{j+1,j} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n-2,j} & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n-1,j} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{nj} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.1.15. $$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\varphi & \dots & -\operatorname{sen}\varphi & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \operatorname{sen}\varphi & \dots & \cos\varphi & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-ésima fila} \\ \\ j\text{-ésima fila} \\ \\ \\ \end{array} \\ i\text{-ésima columna} \quad j\text{-ésima columna} \end{array}$$

Los elementos no indicados aquí de la diagonal principal son iguales a uno, los demás elementos son nulos.

3.1.16. Mostrar que si en un determinante de orden n más de $n^2 - n$ elementos son nulos, el determinante mismo es igual a cero.

Calcular los determinantes aplicando solamente la definición:

3.1.17. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. **3.1.18.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3.1.19. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3.1.20. Demostrar que si en un determinante de orden n para $k + l > n$ en la intersección de ciertas k filas y l columnas se hallan los elementos nulos, el determinante es igual a cero.

Hallar el número máximo posible de términos no nulos del determinante de orden n de la forma siguiente:

3.1.21. $$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ c_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

3.1.22*. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & a_n \end{vmatrix}.$$

3.1.23*. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Presentar el determinante de orden n con los elementos que contienen la incógnita t con la forma de polinomio situado en orden de decrecimiento de los grados de t:

3.1.24. $$\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix}.$$

3.1.25*. $$\begin{vmatrix} t & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n+t \end{vmatrix}.$$

Determinar el grado que tienen los determinantes de orden n siguientes como polinomios de t:

3.1.26. $$\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+t \end{vmatrix}.$$

3.1.27. $\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \dots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \dots & a_{2n}+t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$.

3.1.28*. ¿Es siempre de grado n el determinante de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}t & a_{12}+b_{12}t & \dots & a_{1n}+b_{1n}t \\ a_{21}+b_{21}t & a_{22}+b_{22}t & \dots & a_{2n}+b_{2n}t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1}t & a_{n2}+b_{n2}t & \dots & a_{nn}+b_{nn}t \end{vmatrix}$$

como polinomio de la incógnita t?

3.1.29*. Hallar la condición necesaria y suficiente para que el determinante del problema precedente tenga como polinomio de t un grado inferior a n.

3.1.30. Hallar el término independiente del polinomio del problema 3.1.28.

3.1.31. ¿Cómo cambiará un determinante con los elementos complejos si cada de estos elementos se reemplaza por un número conjugado?

3.1.32. ¿Cómo cambiará un determinante de orden n si todos sus elementos cambian de signo?

3.1.33. Cada elemento de un determinante de orden n está multiplicado por el número α. ¿Cómo cambiará el determinante?

3.1.34*. ¿Cómo cambiará un determinante si cada uno de sus elementos a_{ik} se multiplica por α^{i-k} y el número α es diferente de cero?

3.1.35. El lugar del elemento a_{ik} de un determinante se llama *par* o *impar* según que la suma $i+k$ sea par o impar. Demostrar que el determinante no se cambiará si se cambian los signos de todos sus elementos situados en los lugares impares; pero si se cambian los signos de los elementos situados en los lugares pares, el determinante no cambiará de signo si es de orden par y cambiará de signo si es de orden impar.

3.1.36*. Un determinante se llama *antisimétrico* si sus elementos, simétricos respecto a la diagonal principal, son de signo diferente, es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos los índices i, j.

Demostrar que el determinante antisimétrico de orden impar es igual a cero.

3.1.37*. Demostrar que el determinante, cuyos elementos, simétricos respecto a la diagonal principal, son números complejos conjugados (es decir, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ para todos los índices i, j), es un número real.

3.1.38. ¿Cómo cambiará un determinante de orden n si sus filas están escritas en el orden inverso? ¿Cuál elemento del determinante inicial estará en el lugar de i, j del nuevo determinante?

3.1.39. Hallar el elemento de un determinante de orden n simétrico al elemento a_{ij} respecto al «centro» del determinante.

3.1.40. ¿Cómo cambiará un determinante si cada uno de sus elementos se reemplaza por un elemento simétrico al elemento dado respecto al «centro» del determinante?

3.1.41. Hallar el elemento de un determinante de orden n simétrico al elemento a_{ij} respecto a la diagonal no principal.

3.1.42. ¿Cómo cambiará un determinante si cada uno de sus elementos se reemplaza por un elemento simétrico al elemento dado respecto a la diagonal no principal?

3.1.43*. ¿Cómo cambiará un determinante de orden n si su matriz gira a 90° sobre su centro?

Resolver las ecuaciones cuyo primer miembro se escribe con la forma de un determinante:

3.1.44. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5-t^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5-t^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0.$

3.1.45. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ t+1 & 2 & t+3 & 4 \\ 1 & 3+t & 4+t & 5+t \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}=0.$

Calcular los determinantes siguientes:

3.1.46. $\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}.$

3.1.47. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n(n-1)+1 & n(n-1)+2 & \dots & n^2 \end{vmatrix}.$

3.1.48. Sean $f_1(t), \dots, f_n(t)$ polinomios de grado no mayor de $n-2$. Demostrar que para los números arbitrarios $a_1, a_2, \dots, a_n$ el determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

es nulo.

3.1.49. ¿De qué modo cambiará un determinante si a) de cada fila excepto la primera se resta la fila precedente; b) de cada fila empezando por la segunda se resta la fila precedente, restando al mismo tiempo de la primera fila la fila que inicialmente se consideraba última.

3.1.50. Demostrar que un determinante arbitrario es igual a la semisuma de dos determinantes, uno de los cuales ha sido obtenido a partir del determinante dado añadiendo a todos los elementos de la i-ésima fila el número b y el otro ha sido obtenido de un modo análogo añadiendo a los elementos de la i-ésima fila el número $-b$.

Calcular los determinantes siguientes representándolos por la forma de una suma de determinantes:

3.1.51. $$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

3.1.52. $$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.$$

3.1.53*. $$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

3.1.54. $$\begin{vmatrix} 1-2w_1^2 & -2w_1w_2 & \dots & -2w_1w_n \\ -2w_2w_1 & 1-2w_2^2 & \dots & -2w_2w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2w_nw_1 & -2w_nw_2 & \dots & 1-2w_n^2 \end{vmatrix},$$

donde $w_1^2+w_2^2+\ldots+w_n^2=1$.

3.1.55. Los números 20604, 53227, 25755, 20927 y 78421 se dividen por 17. Demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

también se divide por 17.

3.1.56. Todos los elementos del determinante Δ son funciones derivables de una variable t. Demostrar que para la derivada de este determinante considerado como función de t es válida la fórmula

$$\Delta'(t) = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

3.1.57. En la definición del determinante excluir la elección de signos delante de sus términos, es decir, examinar la función siguiente de elementos de la matriz A:

$$p(A) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

donde los índices $j_1, j_2, \dots, j_n$ recorren todo el conjunto de permutaciones de números $1, 2, \dots, n$. Esta función se llama *permanente*. Demostrar que lo mismo que un determinante, una permanente verifica las propiedades siguientes:

a) si todos los elementos de una fila arbitraria de una matriz A se multiplican por un número α, la permanente también se multiplica por este número;

b) si todos los elementos de la i-ésima fila de una matriz A son sumas

$$a_{ij} = b_j + c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

la permanente de la matriz A es igual a la suma de permanentes de dos matrices que difieren de A en la i-ésima fila; en una de ella los elementos de esta fila son iguales a los números b_j, en la otra son iguales a los números c_j;

c) al transponer la matriz el permanente no varía;

d) el permanente no cambia al permutar las filas (o las columnas) de la matriz.

Construir ejemplos que muestren que un permanente puede ser diferente de cero, si las filas de la matriz son linealmente dependientes, y ser nula para una matriz con las filas linealmente independientes.

§ 3.2. Menores, complementos algebraicos y teorema de Laplace

Presentación de los problemas del párrafo. El contenido de este párrafo es el siguiente:

Problemas referentes a la determinación del menor, menor complementario y del complemento algebraico (cofactor). Aquí mismo se determinan los determinantes adjunto y asociado y se examinan algunas de sus propiedades.

Ejemplos de aplicación del teorema de Laplace incluyendo los problemas de cálculo.

Ejercicios de aplicación del método de relaciones recurrentes descrito en la introducción del capítulo, para calcular determinantes diagonales.

3.2.1. En un determinante de orden n hallar: a) el número de menores de orden k contenidos en k filas fijadas; b) el número de todos los menores de orden k.

3.2.2. Sean M un menor arbitrario de un determinante de orden n, M', el menor complementario, $(-1)^{s_M} M'$, el cofactor del menor M (aquí s_M es la suma de índices de las filas y las columnas del determinante, en las cuales se encuentra el menor M). Mostrar que el cofactor del menor M' es igual a $(-1)^{s_M} M$.

3.2.3. El menor que está en la intersección de k filas y k columnas de los mismos índices de un determinante se llama *menor principal* de orden k. Calcular el número de menores principales de orden k de un determinante de orden n.

3.2.4*. Hallar las expresiones para los coeficientes del polinomio $f(t)$ dado por el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+t \end{vmatrix},$$

por medio de los menores del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3.2.5. Calcular el número máximo posible de menores no nulos de orden k en las primeras k columnas del determinante *casi triangular* de orden n.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ & \dots & & \ddots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.2.6. Sea D un determinante de orden n ($n > 1$). El determinante D' obtenido a partir de D reemplazando cada elemento a_{ij} por su complemento algebraico (cofactor) A_{ij} se llama adjunto a D. El determinante D'' obtenido a partir de D sustituyendo cada elemento a_{ij} por su menor complementario M_{ij} se llama *asociado* a D. Mostrar que $D' = D''$.

3.2.7. Demostrar que si un determinante D es *simétrico* (es decir, si sus elementos simétricos respecto a la diagonal principal son iguales), el determinante adjunto D' es igualmente simétrico. Una afirmación análoga es válida para el determinante asociado D''.

3.2.8. ¿Es correcta la afirmación: si un determinante D es antisimétrico su determinante adjunto D' también lo es?

3.2.9*. Mostrar que un determinante adjunto al determinante triangular del problema 3.1.8 tiene la forma

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

3.2.10*. Hallar la relación entre la magnitud de un determinante triangular de orden n y la magnitud de su determinante adjunto.

3.2.11*. Determinar cómo cambiará el determinante adjunto D' si en el determinante D dado de orden n:

a) se multiplican todos los elementos de la i-ésima fila por un número α;

b) se permutan la i-ésima y la j-ésima filas;

c) se adjunta a la j-ésima fila la i-ésima fila multiplicada por un número arbitrario α;

d) se transpone el determinante D.

3.2.12. Mostrar que el desarrollo de Laplace de un determinante de orden n según k filas (columnas) cualesquiera coincide con su desarrollo según las demás $n-k$ filas (columnas).

3.2.13. Demostrar que si en un determinante de orden n todos los menores de orden k ($k < n$) son nulos, los menores de orden superior a k son también nulos.

3.2.14. Demostrar que en las primeras k columnas del determinante *casi triangular*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

entre los menores de orden k solamente el menor principal puede ser diferente de cero. Hallar el desarrollo de Laplace de este determinante según las primeras k columnas.

3.2.15*. Se sabe que en las primeras k columnas de un determinante d de orden n el menor principal de orden k es no nulo y que los demás menores de orden k son nulos. Demostrar que d tiene la forma de 3.2.14.

Aplicando el teorema de Laplace calcular los determinantes:

3.2.16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. **3.2.17.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3.2.18. $\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

3.2.19. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. **3.2.20.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3.2.21. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. **3.2.22.** $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 9 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{vmatrix}$.

3.2.23. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **3.2.24.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

3.2.25. $\begin{vmatrix} 1 & 30 & 94 & 46 & 14 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 47 & 23 & 15 & 1 \end{vmatrix}$. **3.2.26.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3.2.27. Demostrar que

a)
$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} & \dots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 & 0 & a_{2,n+2} & \dots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\
\hdotsfor{10} \\
a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,2n} \\
a_{n+1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n+1,2n} \\
\hdotsfor{10} \\
a_{2n-1,1} & a_{2n-1,2} & \dots & a_{2n-1,n-1} & 0 & 0 & a_{2n-1,n+2} & \dots & a_{2n-1,2n-1} & a_{2n-1,2n} \\
a_{2n,1} & a_{2n,2} & \dots & a_{2n,n-1} & a_{2n,n} & a_{2n,n+1} & a_{2n,n+2} & \dots & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n}
\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{2n,n} & a_{2n,n+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,n-1} & a_{2,n+2} \\ a_{2n-1,n-1} & a_{2n-1,n+2} \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n,2n} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2n} \end{vmatrix};$$

b)
$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} & \dots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\
0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} & 0 & a_{2,n+2} & \dots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\
\hdotsfor{10} \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,2n} \\
a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n-1} & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+2} & \dots & a_{n+1,2n-1} & a_{n+1,2n} \\
0 & a_{n+2,2} & \dots & a_{n+2,n-1} & a_{n+2,n} & 0 & a_{n+2,n+2} & \dots & a_{n+2,2n-1} & a_{n+2,2n} \\
\hdotsfor{10} \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n,n} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n,2n}
\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{2,n+2} \\ a_{n+2,2} & a_{n+2,n+2} \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n,2n} \\ a_{2n,n} & a_{2n,2n} \end{vmatrix};$$

c) $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \dots & 0 & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aplicando el teorema de Laplace calcular los determinantes transformándolos de antemano:

3.2.28. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$. **3.2.29.** $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

3.2.30. $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$. **3.2.31.** $\begin{vmatrix} 213 & 186 & 162 & 137 \\ 344 & 157 & 295 & 106 \\ 419 & 418 & 419 & 418 \\ 417 & 416 & 417 & 416 \end{vmatrix}$.

3.2.32. $\begin{vmatrix} 8 & 10 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$. **3.2.33*.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3.2.34. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. **3.2.35.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

3.2.36. Demostrar que para los permanentes (véase el problema 3.1.57) tiene lugar un teorema análogo al de Laplace: si en una matriz cuadrada A de orden n se fijan k filas (columnas) ($1 \leqslant k \leqslant n-1$), el permanente de la matriz A es igual a la suma de productos de los permanentes de todas las submatrices de orden k situadas en estas filas (columnas) por los permanentes de las submatrices complementarias (de orden $n-k$).

Aplicando el método de relaciones recurrentes calcular los determinantes de orden n aducidos a continuación:

3.2.37. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}$.

3.2.38. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 6 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$.

3.2.39. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & & & & \dots \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & & & & \dots \\ 0 & 2 & 3 & 2 & \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & & & & \dots \\ & & & & \cdot & & & & \\ \dots & & & & \dots & & & & \dots \\ \dots & & & & \dots & 3 & 2 & . & \dots \\ \dots & & & & \dots & 1 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & & & & \dots & . & 2 & 3 & \dots \\ \dots & & & & \dots & & & & \dots \end{vmatrix}$.

3.2.40. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -10 & -1 & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

3.2.41. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

3.2.42. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \dots & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

3.2.43. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.   3.2.44. $\begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 12 & 9 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 12 \end{vmatrix}$.

3.2.45. Demostrar la igualdad

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

3.2.46. Hallar la relación recurrente entre los polinomios de la sucesión $f_0(\lambda), f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$, donde $f_0(\lambda) \equiv 1$ y el polinomio $f_i(\lambda)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ es el menor principal de orden i formado por las n primeras filas y n primeras columnas del determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & \lambda-a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & \lambda-a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & \lambda-a_n \end{vmatrix}.$$

§ 3.3. Determinantes y volumen de un paralelepípedo en un espacio euclídeo

Presentación de los problemas del párrafo. Aquí establecemos ciertas propiedades de los determinantes y los volúmenes de paralelepípedos en un espacio euclídeo o unitario de dimensión n utilizando las relaciones naturales que existen entre ellos. Así, el determinante de una matriz cuadrada de orden n es un volumen orientado de un paralelepípedo tendido sobre un sistema ordenado de filas (o columnas) de esta matriz consideradas como vectores del espacio aritmético correspondiente, y el módulo de este determinante con el volumen de este mismo paralelepípedo (véase *V. Voevodin* «Álgebra lineal», capítulo 4). Esta relación permite, en particular, aplicar a los determinantes la desigualdad de Hadamard y ofrecer la estimación de las magnitudes de los determinantes relacionada con ella, es decir, evaluar los volúmenes. Estudiamos también los determinantes de Gram y establecemos la correspondencia entre éstos y los volúmenes. Al final damos unos cuantos problemas que ilustran la estabilidad de un determinante ortogonal y la inestabilidad de un determinante en el caso general.

3.3.1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un sistema ordenado de filas de un determinante d de orden n (estas filas se consideran como vectores de un espacio aritmético de dimensión n); $b_1, b_2, \ldots, b_n$ un sistema obtenido a partir de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ por ortogonalización. Demostrar que el determinante d', cuyas filas están constituidas por los vectores $b_1, b_2, \ldots, b_n$, es igual al determinante d.

3.3.2*. Demostrar que el determinante es igual a cero cuando, y solamente cuando, sus filas (columnas) son linealmente dependientes.

3.3.3. Sea d un determinante de orden n:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aprovechando la relación existente entre el módulo de un determinante y el volumen de un paralelepípedo en un espacio aritmético demostrar que se verifica la desigualdad de Hadamard:

$$|d| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|^2 \right)^{1/2} \ldots \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{nj}|^2 \right)^{1/2}.$$

3.3.4. Demostrar que la desigualdad de Hadamard deviene igualdad si, y solamente si, sea las filas del determinante son ortogonales de dos en dos, sea todos los elementos por lo menos de una fila son iguales a cero. Una afirmación análoga es válida para las columnas del determinante.

3.3.5*. Demostrar que si todos los elementos a_{ij} de un determinante d de orden n están acotados en módulo por el número M:

$$|a_{ij}| \leqslant M,$$

a) el módulo del determinante d no excede $M^n n^{n/2}$;

b) esta estimación se obtiene para los determinantes con elementos complejos para cualquier n;

c) para los determinantes con elementos reales esta estimación se obtiene si n es un número de la forma $n = 2^m$.

3.3.6*. Demostrar que el máximo f_n de módulos de los determinantes de orden n, todos los elementos de los cuales son números reales pertenecientes al segmento $[-1, 1]$, coincide con el máximo g_n de módulos de los determinantes cuyos elementos toman solamente los valores 1 y -1.

3.3.7*. Sea h_n el máximo de módulos de los operadores de orden n compuestos de ceros y unidades; g_n tiene el mismo sentido que en el problema 3.3.6. Demostrar que para los números g_n y h_n las relaciones

$$h_{n-1} \leqslant h_n \leqslant g_{n-1} \leqslant g_n \leqslant 2^{n-1} h_{n-1}$$

son válidas. Notar, en particular, que el número g_n se divide en 2^{n-1}.

3.3.8. Demostrar aplicando la desigualdad de Hadamard y las desigualdades obtenidas en el problema 3.3.7 que para los determinantes de orden 3:

a) $h_3 = 2$;

b) $g_3 = 4$.

Notar que del resultado de b) se deduce que la estimación de la magnitud de un determinante dada en el problema 3.3.5 a), no se obtiene para los determinantes de orden 3 con elementos reales.

3.3.9*. Reforzar la estimación dada en el problema 3.3.7 y demostrar que

$$g_n \geqslant 2g_{n-1}.$$

3.3.10*. Hallar el número g_5 y el determinante con los elementos 1 y -1, igual a g_5. Notar que la estimación del problema 3.3.5 a) no se obtiene para los determinantes de orden 5 con elementos reales.

3.3.11*. Demostrar que si en los datos del problema 3.3.5 todos los elementos a_{ij} de un determinante d son reales y no negativos, el módulo de d verifica la estimación:

$$|d| \leqslant M^n 2^{-n} (n+1)^{(n+1)/2}.$$

3.3.12. Formular los resultados de los problemas 3.3.5—3.3.11 atribuyéndolos a los volúmenes de paralelepípedos.

3.3.13. Llámase *determinante de Gram de un sistema de vectores* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de un espacio euclídeo (o unitario) al determinante

$$G(x_1, \ldots, x_k) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_k) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_k, x_1) & (x_k, x_2) & \ldots & (x_k, x_k) \end{vmatrix}.$$

La matriz de éste se llama *matriz de Gram del sistema de vectores* $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

¿Qué forma y valor tiene el determinante de Gram si:

a) el sistema $x_1, \ldots, x_k$ es ortogonal;

b) la cápsula lineal de los vectores $x_1, \ldots, x_l$ $(1 \leqslant l < k)$ es ortogonal a la cápsula lineal de los vectores $x_{l+1}, \ldots, x_k$?

3.3.14. ¿Cómo cambiará el determinante de Gram de un sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ si:

a) se permutan dos vectores x_i y x_j;

b) algún vector del sistema se multiplica por el número α;

c) al vector x_i se le suma el vector x_j multiplicado por el número β?

A continuación, deducir que las transformaciones elementales del sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ no perturban la igualdad o desigualdad a cero del determinante de Gram.

3.3.15*. Demostrar que un sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ de un espacio euclídeo (o unitario) es linealmente dependiente si, y solamente si, el determinante de Gram de este sistema es igual a cero.

3.3.16*. Un cierto menor principal M de orden m, $m < k$ de un determinante de Gram $G(x_1, \ldots, x_k)$ es igual a cero. Demostrar que en este caso todo otro menor principal que orla el menor M es igualmente nulo. (Dicen que el menor M_2 orla el menor M_1 si la matriz del menor M_2 contiene la matriz del menor M_1 como una submatriz.) En particular, el determinante mismo $G(x_1 \ldots x_k)$ es nulo.

3.3.17. Demostrar que el determinante de Gram de un sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ no cambia si algún vector de este sistema se sustituye por una perpendicular bajada de este vector sobre la cápsula lineal de cualquier otro vector de este sistema.

3.3.18*. Sean $x_1, \ldots, x_k$ un sistema arbitrario de vectores de un espacio euclídeo (o unitario); $y_1, \ldots, y_k$ un sistema ortogonal obtenido aplicando la ortogonalización a los vectores $x_1, \ldots, x_k$. Demostrar que

$$G(x_1, \ldots, x_k) = G(y_1, \ldots, y_k) = |y_1|^2 |y_2|^2 \ldots |y_k|^2.$$

Utilizando este resultado establecer la relación entre el determinante de Gram del sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ y el volumen del paralelepípedo tendido sobre este sistema.

3.3.19. Demostrar que el determinante de Gram $G(x_1, \ldots, x_k)$ es nulo si el sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ es linealmente dependiente, y es positivo si este sistema es linealmente independiente.

3.3.20. Sean A una matriz cuadrada arbitraria de orden n, real o compleja; $a_1, \ldots, a_n$, las filas de esta matriz consideradas como vectores del espacio aritmético correspondiente; $G(a_1, \ldots, a_n)$, el determinante de Gram de este sistema (se considera ordinariamente que para el espacio R_n el producto escalar de los vectores $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ viene dado por la fórmula (2.2.1) y para el espacio C_n, por la fórmula

$$(x, y) = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\beta}_n. \tag{3.3.1}$$

Demostrar que

$$|\det A|^2 = G(a_1, \ldots, a_n).$$

3.3.21*. Verificar que las propiedades del determinante de Gram establecidas en los problemas 3.3.13—3.3.19 pueden ser demostradas sin recurrir a la desigualdad de Cauchy-Buniakovski basándose solamente en los teoremas de la ortogonalidad de vectores y deducir esta desigualdad de la no negatividad del determinante de Gram.

3.3.22. Demostrar que el elemento máximo en módulo de un determinante de Gram pertenece a la diagonal principal de este determinante (si estos elementos son varios, por lo menos uno de ellos pertenece a la diagonal principal).

3.3.23. Demostrar que la distancia de un vector x de un espacio euclídeo (o unitario) respecto al subespacio lineal L tendido sobre un sistema de vectores linealmente independientes $x_1, \ldots, x_k$ puede ser calculada mediante la fórmula

$$\rho(x,\ L)=\left[\frac{G(x,\ x_1,\ \ldots,\ x_h)}{G(x_1,\ \ldots,\ x_h)}\right]^{1/2}.$$

3.3.24. Demostrar la desigualdad de Hadamard para los determinantes de Gram

$$G(x_1,\ \ldots,\ x_k)\leqslant |x_1|^2\ \ldots\ |x_k|^2.$$

Mostrar que la igualdad se obtiene aquí si, y solamente si, los vectores $x_1,\ \ldots,\ x_k$ son ortogonales de dos en dos o por lo menos uno de estos vectores es igual a cero.

3.3.25*. Demostrar la generalización siguiente de la desigualdad de Hadamard para los volúmenes de paralelepípedos

$$V(x_1,\ \ldots,\ x_l,\ x_{l+1},\ \ldots,\ x_k)\leqslant V(x_1,\ \ldots,\ x_l)\cdot V(x_{l+1},\ \ldots,\ x_k),$$

donde por $V(\ldots)$ se designa el volumen de un paralelepípedo tendido sobre el sistema de vectores correspondiente.

Mostrar que la igualdad se obtiene si, y sólo si,

$$(x_i,\ x_j)=0,\ i=1,\ \ldots,\ l,\ j=l+1,\ \ldots,\ k$$

o por lo menos uno de los subsistemas $x_1,\ \ldots,\ x_l$ y $x_{l+1},\ \ldots,\ x_k$ es linealmente dependiente. Enunciar la propiedad correspondiente de los determinantes de Gram.

3.3.26. Sea $x_1,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k$ un sistema de vectores linealmente independientes de un sistema euclídeo (o unitario). Demostrar que para todo vector z es válida la relación siguiente de los volúmenes de paralelepípedos:

$$\frac{V(x_1,\ \ldots,\ x_k,\ z)}{V(x_1,\ \ldots,\ x_k)}\leqslant\frac{V(x_1,\ \ldots,\ x_{k-1},\ z)}{V(x_1,\ \ldots,\ x_{k-1})}$$

y de aquí deducir la propiedad correspondiente de los menores principales del determinante de Gram.

3.3.27*. Sea $x_1,\ \ldots,\ x_k$ un sistema de vectores arbitrario. Demostrar la desigualdad

$$V^{k-1}(x_1,\ \ldots,\ x_k)\leqslant\prod_{j=1}^{n}V(x_1,\ \ldots,\ x_{j-1},\ x_{j+1},\ \ldots,\ x_k).$$

Aclarar el sentido geométrico de esta desigualdad. Enunciar la propiedad análoga de los menores principales del determinante de Gram.

3.3.28*. Sea $x_1,\ \ldots,\ x_k$ un sistema de vectores ortonormalizado. Demostrar que para todo vector ε de longitud inferior a 1 valen las desigualdades

$$1-|\varepsilon|\leqslant V(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ \tilde{x}_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_k)\leqslant 1+|\varepsilon|;\quad \tilde{x}_i=x_i+\varepsilon.$$

3.3.29. Un determinante se llama *ortogonal* si sus filas consideradas como vectores de un espacio aritmético forman un sistema ortonormalizado. Reformular la afirmación del problema 3.3.28 para los determinantes ortogonales.

3.3.30*. Interpretando el módulo de un determinante de orden n como un volumen en un espacio aritmético de dimensión n aclarar el sentido geométrico que tienen los módulos de los menores de orden k $(k < n)$.

3.3.31. Demostrar

a) aplicando la desigualdad de Hadamard para los determinantes (véase el problema 3.3.3);

b) partiendo de la interpretación geométrica de los módulos de los menores (véase el problema 3.3.30) que los menores de cualquier orden de un determinante ortogonal no sobrepasan en módulo la unidad.

¿Es correcta una afirmación análoga para el caso de determinantes arbitrarios iguales en módulo a la unidad y que no son ya determinantes ortogonales?

3.3.32. Mostrar que el determinante de orden n

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3.3.2)$$

puede ser anulado perturbando un cierto elemento igual a $2^{-(n-1)}$ en módulo. Calcular esta perturbación. Asociar este resultado a la pregunta del problema precedente y dar una explicación geométrica.

§ 3.4. Cálculo de determinantes por el método de eliminación

Presentación de los problemas del párrafo. En el presente párrafo examinamos diversos problemas relacionados con el método de Gauss aplicado al cálculo de determinantes. Aquí damos cuatro grupos de problemas sobre los temas siguientes:

Relación existente entre los elementos de determinantes obtenidos en diferentes etapas de la reducción a la forma triangular y los menores del determinante inicial.

Problemas para asimilar los hábitos prácticos en la aplicación del método de Gauss.

Aspectos de cálculo del método de Gauss—número de operaciones aritméticas, necesidad de controlar el crecimiento de elementos durante la reducción—; con este fin se utilizan diferentes procedimientos de permutaciones.

Aplicación del método de Gauss a la demostración del teorema útil sobre el producto de Kronecker de determinantes y algunos corolarios del resultado obtenido.

3.4.1. Para calcular el determinante de la matriz A mediante el método de Gauss no se permutaban las filas y columnas, es decir, los elementos principales de cada uno de los pasos eran los de casos

(1,1), (2,2), . . . , $(n-1,\ n-1)$, respectivamente. Demostrar que después de $p-1$ pasos de reducción todos los menores de orden p de las primeras p filas de la matriz no han cambiado. Mostrar también que estos menores tampoco cambiarán durante los pasos de reducción subsiguientes.

3.4.2. Sea A una matriz cuadrada de orden n. El menor principal de orden r situado en la intersección de filas y columnas con índices 1, 2, . . ., r se llama *menor principal director* de orden r de la matriz A. Demostrar que si los menores principales directores de la matriz A de órdenes 1, 2, . . ., $n-1$ son diferentes de cero, entonces todos los elementos directores $a_{p+1,\,p+1}^{(p)}$ utilizados al aplicar el método de eliminación a esta matriz son también diferentes de cero. Hallar las expresiones de elementos directores mediante los menores principales de la matriz A.

3.4.3*. Demostrar que la matriz A de orden n verifica la condición del problema precedente si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,\ \ldots,\ n.$$

En este caso el determinante de A es también igual a cero.

3.4.4*. Demostrar que para la matriz de Gram de un sistema linealmente independiente de vectores $x_1, \ldots, x_k$ de un espacio euclídeo (o unitario) se respeta la condición del problema 3.4.2. En este caso todos los elementos directores obtenidos por el método de Gauss aplicado a esta matriz son positivos y no superiores al elemento máximo de la matriz inicial.

3.4.5. Demostrar que si el determinante de una matriz A no es igual a cero, entonces permutando las filas y las columnas de esta matriz se puede lograr que todos los menores principales directores sean diferentes de cero.

3.4.6*. Al aplicarel método de Gauss a una matriz A no había permutaciones. Hallar la expresión de los elementos no nulos de la p-ésima fila de la matriz $A^{(p-1)}$ obtenida después del $(p-1)$-ésimo paso con ayuda de menores de la matriz inicial.

3.4.7. Utilizando el resultado del problema 3.4.6 mostrar que si en una matriz A de orden n todos los menores de orden $r+1$ que orlan el menor principal director no nulo de orden r, $1 \leqslant r \leqslant n-1$ (la definición de un tal menor que orla está dada en el problema 3.3.16), el determinante de A es igual a cero.

3.4.8*. Demostrar que si una matriz A de orden n posee un menor M no nulo de orden r, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, tal que todos los menores de orden $r+1$ que lo orlan son iguales a cero, el determinante de A es igual a cero. Para justificar esta afirmación es suficiente que sean nulos solamente todos los menores que orlan el menor dado y que se hallan en las $r+1$ filas fijadas de la matriz A (r de estas filas coinciden con las filas que contienen el menor M).

3.4.9*. Aplicando el método de Gauss mostrar que la relación entre un determinante d de orden n y su determinante recíproco d'

$$d' = d^{n-1},$$

establecida en el problema 3.2.10 para determinantes triangulares, es válida para todo determinante d.

Aplicando el método de Gauss calcular los determinantes siguientes:

3.4.10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. 3.4.11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$.

3.4.12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. 3.4.13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$.

3.4.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$. 3.4.15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$.

3.4.16*. $\begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 10 \\ 105 & 84 & 70 & 60 \\ 168 & 140 & 120 & 105 \end{vmatrix}$. 3.4.17*. $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \end{vmatrix}$.

3.4.18. $\begin{vmatrix} 2 & 1000 & 4 & 0{,}08 \\ 1 & 3000 & -6 & 0{,}02 \\ 3 & -2000 & 2 & -0{,}02 \\ 2 & -1000 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

3.4.19. $\begin{vmatrix} 128 & 256 & 384 & 512 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/64 & 1/64 & 1/64 & -1/64 \\ 2 & 0 & -4 & -12 \end{vmatrix}$.

3.4.20. $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$.

3.4.21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0{,}002 \\ 3 & 8 & 0 & -0{,}004 \\ 2 & 2 & -4 & -0{,}003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix}$.

3.4.22. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 3.4.23. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{vmatrix}$.

3.4.24. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. 3.4.25. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3.4.26. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

3.4.27. $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0{,}1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0{,}1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 6 \end{vmatrix}$.

3.4.28. Hallar el valor del polinomio $f(t)$ escrito con la forma de un determinante

$$\begin{vmatrix} 3-t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3-t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3-t \end{vmatrix}$$

para $t = 2$.

3.4.29. Hallar el número de multiplicaciones y de divisiones necesarias para calcular un determinante de orden n por el método de Gauss. Comparar este número con el número de multiplicaciones al calcular un determinante partiendo directamente de su definición.

3.4.30. En la suposición de que al aplicar el método de Gauss no hubo permutaciones hallar el número de multiplicaciones y de divisiones necesarias para calcular:

a) el determinante casi triangular de orden n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix};$$

b) el determinante tridiagonal de orden n

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & a_n \end{vmatrix}.$$

3.4.31. Supongamos que hace falta calcular el determinante d_n de orden n y se sabe que éste no es igual a cero, así como el determinante d_{n+1} de orden $n+1$ que lo orla:

$$d_{n+1} = \left|\begin{array}{cccc|c} & & & & a_1 \\ & & & & a_2 \\ & & & & \vdots \\ & & d_n & & a_n \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_n & c \end{array}\right|.$$

Organizar los cálculos mediante el método de Gauss de tal modo que para obtener los dos determinantes d_n y d_{n+1} haga falta el mismo número de multiplicaciones y divisiones que en el caso de un solo determinante de orden $n+1$.

3.4.32. Es necesario calcular k determinantes de orden n que difieren uno de otro solamente por la última columna. Se sabe que todos los determinantes son diferentes de cero. Organizar los cálculos mediante el método de Gauss de modo que la búsqueda de todos los k determinantes exija solamente $O(kn^2)$ operaciones de multiplicación suplementarias en comparación con el número de operaciones necesarias para calcular un solo determinante de orden n.

3.4.33*. Hallar el modo de calcular el determinante de orden n de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & 0 & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(aquí los elementos diagonales $a_{22}, \dots, a_{n-1,n-1}$ son diferentes de cero) tal que el número de operaciones sea función de n como polinomio de segundo grado (y no de tercer grado como en el método de Gauss aplicado a los determinantes de forma general).

3.4.34. Examinar el conjunto D_n de determinantes de orden n que satisfacen las condiciones siguientes:

a) todos los elementos del determinante están acotados en módulo por la unidad;

b) existe un elemento igual a la unidad en módulo;

c) todos los menores rectores principales son diferentes de cero. Durante el cálculo de un determinante del conjunto D_n esta última condición permite aplicar el método de Gauss sin permutaciones (véase el problema 3.4.2). Mostrar, sin embargo, que si k es un número entero cualquiera de la sucesión $1, 2, \dots, n-1$; N es cualquier número positivo, existe un determinante del conjunto D_n tal que en la matriz obtenida después de k pasos del método de Gauss sin permutaciones, habrá un elemento $a_{ij}^{(k)}$ superior en módulo al número N. Entonces, cualquiera que sea el rango de la palabra de máquina de un ordenador existe un determinante del conjunto D_n cuyo cálculo por el método de Gauss conduce a la sobresaturación.

3.4.35*. Examinar la variante siguiente del método de Gauss prevista para evitar la sobresaturación indicada en el problema 3.4.34. Después de realizar k pasos de reducción a la forma triangular, entre los elementos $a_{k+1,k+1}^{(k)}, a_{k+2,k+1}^{(k)}, \dots, a_{n,k+1}^{(k)}$ como elemento rector del $(k+1)$-ésimo paso sucesivo se elige el elemento máximo en módulo. Supongamos que éste es el elemento $a_{j,k+1}^{(k)}$, $j \geqslant k+1$; en este caso las filas de índices $k+1$ y j se permutan de modo que el elemento máximo en módulo pase a la posición $(k+1, k+1)$ y luego se realizan las transformaciones usuales del $(k+1)$-ésimo paso del método de Gauss. Esta variante se llama método de eliminación con elección del elemento rector por una columna. Demostrar que en este método:

a) si todos los elementos $a_{k+1,k+1}^{(k)}, a_{k+2,k+1}^{(k)}, \dots, a_{n,k+1}^{(k)}$ de la columna del elemento rector son nulos, el determinante inicial es nulo;

b) para toda posición (i, j)

$$|a_{ij}^{(k+1)}| \leqslant 2 \max_{r, s} |a_{rs}^{(k)}|;$$

c) para un determinante de orden n todos los elementos que se obtienen por reducción a una forma triangular son superiores en módulo no más de 2^{n-1} veces al elemento máximo del determinante inicial.

3.4.36*. Construir un ejemplo que confirme que en el método de Gauss con elección del elemento director por una columna la reducción a la forma triangular puede provocar un crecimiento del módulo máximo de elementos, hasta la estimación dada en el problema 3.4.35, c).

3.4.37. Demostrar que aplicando el método de Gauss con elección del elemento rector por una columna:

a) en caso de un determinante casi triangular de orden n durante la reducción el módulo máximo de elementos puede crecer no más de n veces;

b) para un determinante de tres diagonales de orden n, al reducir, el módulo máximo puede crecer no más de dos veces, es decir,

$$\max_{r, s} |a_{rs}^{(k)}| \leqslant 2 \max_{r, s} |a_{rs}|, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

3.4.38. Como muestra el problema 3.4.36, al aplicar el método de Gauss con la elección del elemento director por una columna es posible, no obstante, un crecimiento rápido del módulo máximo de elementos. Como consecuencia puede también tener lugar una sobresaturación al calcular un determinante de orden suficientemente alto en una computadora. Por eso se utiliza a veces otra modificación del método de Gauss: se toma como elemento director del $(k + 1)$-ésimo paso el elemento máximo en módulo de la submatriz de orden $n - k$ formada por la última fila y la última columna de la matriz $A^{(k)}$ obtenida después de k pasos precedentes. Se permutan las filas y columnas de índices superiores a k con el fin de hacer pasar el elemento máximo en módulo a la posición $(k + 1, k + 1)$ y luego se realiza de modo usual el $(k + 1)$-ésimo paso del método de Gauss. Esta versión se llama método de Gauss con la elección del elemento rector por toda la matriz. Demostrar que en este último método el módulo del elemento rector del $(k + 1)$-ésimo paso supera no más de dos veces el módulo del elemento rector del k-ésimo paso. ¿Es correcta una afirmación análoga para el método de Gauss con la elección por una columna?

3.4.39*. Según una hipótesis, en el método de Gauss con la elección del elemento rector por toda la matriz el crecimiento del módulo máximo de elementos de un determinante de orden n con elementos reales no pasa de n. Utilizando el resultado del problema 3.3.8 demostrar esta hipótesis para $n = 3$.

3.4.40. Deducir del resultado del problema precedente que si se aplica el método de Gauss con la elección del elemento rector por toda la matriz:

a) para las matrices reales de orden 4 el crecimiento del módulo máximo no pasa de 6;

b) para las matrices reales de orden 5 el crecimiento del módulo máximo no pasa de 9.

3.4.41*. Se llama *producto de Kronecker de los determinantes* de orden n

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y de orden m

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \hdotsfor{4} \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

al determinante de orden mn siguiente:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1m} & \dots & a_{1n}b_{1m} \\ \hdotsfor{10} \\ a_{n1}b_{11} & \dots & a_{nn}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \dots & a_{nn}b_{12} & \dots & a_{n1}b_{1m} & \dots & a_{nn}b_{1m} \\ a_{11}b_{21} & \dots & a_{1n}b_{21} & a_{11}b_{22} & \dots & a_{1n}b_{22} & \dots & a_{11}b_{2m} & \dots & a_{1n}b_{2m} \\ \hdotsfor{10} \\ a_{n1}b_{21} & \dots & a_{nn}b_{21} & a_{n1}b_{22} & \dots & a_{nn}b_{22} & \dots & a_{n1}b_{2m} & \dots & a_{nn}b_{2m} \\ \hdotsfor{10} \\ a_{11}b_{m1} & \dots & a_{1n}b_{m1} & a_{11}b_{m2} & \dots & a_{1n}b_{m2} & \dots & a_{11}b_{mm} & \dots & a_{1n}b_{mm} \\ \hdotsfor{10} \\ a_{n1}b_{m1} & \dots & a_{nn}b_{m1} & a_{n1}b_{m2} & \dots & a_{nn}b_{m2} & \dots & a_{n1}b_{mm} & \dots & a_{nn}b_{mm} \end{vmatrix}.$$

De este modo la matriz del determinante D está compuesta de m^2 casillas de orden n. Estas casillas se obtienen de la matriz A multiplicando todos sus elementos por $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m}, b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2m}, \dots, b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mm}$, respectivamente. Aplicando el método de Gauss demostrar que

$$D = (\det A)^m (\det B)^n.$$

3.4.42. Demostrar que el producto de Kronecker de dos determinantes ortogonales —d de orden n y d' de orden m— es un determinante ortogonal de orden mn.

3.4.43. Hallar la relación entre el determinante de una matriz A de orden n y los determinantes de las matrices de orden $2n$ compuestas del modo siguiente:

a) $\begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} A & 3A \\ 2A & 5A \end{pmatrix}$.

Capítulo 4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

§ 4.0. Terminología y generalidades

La tabla numérica rectangular compuesta de m filas y n columnas

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

se llama *matriz rectangular de tipo* $m \times n$ (o matriz $m \times n$), *real* o *compleja*, según que los *elementos* a_{ij} de esta matriz sean reales o complejos.

Para una matriz rectangular el menor de orden k se define del mismo modo que en el § 3.0 para el caso particular de una matriz cuadrada. En este caso $k \leqslant \min(m, n)$. Se conserva también la notación del menor:

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix}.$$

El orden máximo r de los menores diferentes de cero de una matriz A se llama *rango* de esta matriz; todo menor no nulo de orden r se llama *menor de base* de la matriz A. Si todos los elementos de una matriz son iguales a cero (una tal matriz se llama *nula*), se admite por definición que su rango es nulo.

Si las filas de la matriz A se consideran como vectores de dimensión n y las columnas, como vectores de dimensión m, entonces tanto el rango del sistema de filas, como el rango del sistema de columnas son iguales al rango de la matriz A. De aquí se deduce que el rango de una matriz *transpuesta* A^T de tipo $n \times m$ (véase el § 3.0) coincide con el de A.

Supongamos que en un espacio lineal V de dimensión n están fijados el vector x_0 y un subespacio L. El conjunto P de todos los vectores de la forma

$$x = x_0 + y, \ y \in L$$

se llama *plano engendrado al desplazar el subespacio L en un vector* x_0 y se nota $x_0 + L$. En este caso x_0 se llama *vector de desplazamiento* y L se llama *subespacio director* del plano P.

Si el subespacio L se representa como una cápsula lineal $L(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ se puede escribir la *ecuación paramétrica* del plano P:

$$x = x_0 + t_1q_1 + t_2q_2 + \ldots + t_kq_k;$$

aquí los parámetros $t_1, t_2, \ldots, t_k$ toman valores numéricos arbitrarios.

Se puede mostrar (véase 4.2.1) que para el plano dado el subespacio director está definido unívocamente. Por eso se puede atribuir a todo plano una *dimensión* igual a la dimensión de su subespacio director. En estas condiciones el plano de dimensión 1 se llama *línea recta* y el plano de dimensión $(n - 1)$, *hiperplano*.

Los planos $P_1 = x_1 + L_1$ y $P_2 = x_2 + L_2$ se llaman *paralelos* si $L_1 \subset L_2$ o bien $L_2 \subset L_1$.

Aduzcamos algunos definiciones y resultados más, relativos a los sistemas de ecuaciones lineales (estos sistemas también han sido objeto de estudio en el § 1.0).

Un sistema de ecuaciones lineales se llama *homogéneo* si los segundos miembros de todas sus ecuaciones son iguales a cero y *no homogéneo* en el caso contrario.

Una matriz A compuesta de coeficientes de las incógnitas se llama *matriz del sistema de ecuaciones* dado. Si a A se le añade una columna de los segundos miembros del sistema, se obtiene la llamada *matriz ampliada del sistema* $\overline{A}$.

Supongamos que en un sistema de ecuaciones el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones. En este caso la matriz A del sistema es cuadrada y la condición $\det A \neq 0$ asegura su compatibilidad y su carácter bien definido. En este caso la solución única $x_1, \ldots, x_n$ puede ser calculada mediante las *fórmulas de Cramer*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

donde A_i es la matriz obtenida a partir de A reemplazando la i-ésima columna por la columna de los segundos miembros.

Dos notas sobre los problemas de este capítulo. En el § 4.2 damos toda una serie de problemas de cálculo relativos a la determinación de la disposición de planos en un espacio lineal. Estos problemas pueden ser resueltos por los métodos del capítulo 1: la busqueda del rango de un sistema de vectores dado, de la intersección de dos cápsulas lineales, etc.

Como mostramos en el § 4.5 el conjunto de soluciones de un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales puede considerarse como un plano en un espacio aritmético. Supongamos que hemos introducido en el espacio un producto escalar. Entre los vectores de un plano cualquiera hay un vector, y uno solo, ortogonal al subespacio director de este plano (véase el problema 4.3.11). Éste se llama *vector normal*. La solución correspondiente de un sistema de ecuaciones lineales se llama *solución normal*. Esta noción se utiliza, por ejemplo, en el problema 4.5.36.

§ 4.1. Rango de una matriz

Presentación de los problemas del párrafo. Aquí damos una serie de problemas para ilustrar las diferentes definiciones del rango de una matriz y su aplicación en el cálculo de matrices concretas.

4.1.1. Demostrar qué en r filas (columnas) linealmente independientes cualesquiera de una matriz existe un menor no nulo de orden r.

4.1.2*. Una matriz rectangular A de tipo $m \times n$ $(m \geqslant n)$ posee un menor de orden $(n-1)$ diferente de cero; todos los menores de orden n que lo *orlan* son nulos. Demostrar que *todos* los menores de orden n de la matriz A son iguales a cero y, por consiguiente, el rango de A es $n-1$.

4.1.3*. Una matriz A posee un menor M no nulo de orden r; todos los menores que orlan M son nulos. Mostrar que el rango de A es igual a r.

4.1.4. ¿Qué se puede decir de una matriz $m \times n$ $(m > n)$ de rango n si ella posee un solo menor de base?

4.1.5*. ¿Qué se puede decir de una matriz $m \times n$ arbitraria si ella posee un solo menor de base ?

4.1.6*. Demostrar que en la intersección de cualesquiera r filas linealmente independientes y de cualesquiera r columnas linealmente independientes de una matriz de rango r se halla un menor no nulo de orden r.

4.1.7. Una matriz cuadrada A se llama *simétrica* si $a_{ij} = a_{ji}$, cualesquiera que sean i, j. Demostrar que el rango de una matriz simétrica es igual al orden máximo de los menores principales no nulos de esta matriz.

4.1.8. Mostrar que la afirmación del problema 4.1.7 es válida también para una matriz *hermitiana* compleja A, es decir, para una matriz cuyos $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ para i, j cualesquiera.

4.1.9*. Demostrar que el rango de un sistema de vectores arbitrario de un espacio euclídeo (o unitario) es igual al rango de la matriz de Gram de este sistema.

4.1.10. Una matriz cuadrada A se llama *antisimétrica* si $a_{ij} = -a_{ji}$, cualesquiera que sean i, j. Demostrar que el rango de una matriz antisimétrica es igual al orden máximo de los menores principales no nulos de esta matriz.

4.1.11. Demostrar que el rango de una matriz antisimétrica es un número par.

4.1.12. El determinante de una matriz cuadrada de orden n no es igual a cero. Demostrar que para todo r, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, permutando solamente las filas se puede alcanzar que el menor principal rector de orden r de esta matriz sea diferente de cero.

4.1.13. Demostrar que permutando solamente las filas de una matriz cuadrada con determinante no nulo se puede alcanzar que todos los menores principales rectores de esta matriz sean diferentes de cero.

4.1.14. El rango de una matriz A de tipo $m \times n$ es igual a 1. Demostrar que existen números $b_1, \ldots, b_m$ y $c_1, \ldots, c_n$ tales que para todos i, j

$$a_{ij} = b_i c_j.$$

¿Están definidos de un modo único estos números?

4.1.15. Las filas de una matriz A de tipo $m \times n$ son ortogonales como vectores de un espacio aritmético de dimensión n; en este caso cada fila posee por lo menos un elemento no nulo. Demostrar que $n \geqslant m$.

4.1.16. Demostrar que el rango de la matriz A de la forma

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{Vmatrix}$$

es igual a la suma de rangos de las submatrices A_{11} y A_{22} (el 0 designa las submatrices nulas de dimensiones correspondientes).

4.1.17. ¿Es correcta la afirmación siguiente: el rango de la matriz A de la forma

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{Vmatrix}$$

es siempre igual a la suma de rangos de las submatrices A_{11} y A_{22}?

4.1.18. ¿Cómo puede cambiar el rango de una matriz si se cambia el valor de uno de estos elementos?

4.1.19*. ¿Cómo puede cambiar el rango de una matriz si se cambian los elementos de una sola fila? de k filas?

4.1.20*. Demostrar que en una matriz $n \times n$ de rango r existen k elementos tales que su cambio, por más pequeño que sea, en magnitud absoluta aumenta el rango de la matriz hasta $r + k$, $1 \leqslant k \leqslant n - r$.

4.1.21. Indicar los valores posibles del rango de la matriz cuya forma es

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

4.1.22. Demostrar que en una matriz cuadrada $n \times n$ con determinante no nulo el rango de toda submatriz cuadrada de orden $n-1$ es no menos de $n-2$.

4.1.23. Demostrar que dos sistemas de vectores de un espacio aritmético

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11}, \ldots, a_{1i}, \ldots, a_{1j}, \ldots, a_{1n}), \\ x_2 &= (a_{21}, \ldots, a_{2i}, \ldots, a_{2j}, \ldots, a_{2n}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k &= (a_{k1}, \ldots, a_{ki}, \ldots, a_{kj}, \ldots, a_{kn}) \end{aligned}$$

e

$$y_1=(a_{11},\ \ldots,\ a_{1j},\ \ldots,\ a_{1l},\ \ldots,\ a_{1n}),$$
$$y_2=(a_{21},\ \ldots,\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{2l},\ \ldots,\ a_{2n}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_k=(a_{k1},\ \ldots,\ a_{kj},\ \ldots,\ a_{kl},\ \ldots,\ a_{kn})$$

tienen el mismo rango.

4.1.24. Demostrar que la dimensión de la cápsula lineal tendida sobre el sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ es igual al rango de la matriz compuesta de las coordenadas de estos vectores en una base arbitraria del espacio.

4.1.25. Demostrar que el vector b pertenece a la cápsula lineal de los vectores $x_1, \ldots, x_k$ si, y sólo si, el rango de la matriz compuesta de las coordenadas de los vectores $x_1, \ldots, x_k$ en una base cualquiera del espacio es igual al rango de la matriz «ampliada» compuesta de las coordenadas en la misma base de vectores $x_1, \ldots$ $\ldots, x_k, b$.

4.1.26. Demostrar que las transformaciones elementales (véase el problema 1.2.17) de un sistema de filas o de un sistema de columnas de una matriz no cambian el rango de ésta.

4.1.27. Demostrar que toda matriz $m \times n$ puede ser reducida mediante transformaciones elementales de sus filas y columnas a la forma

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

donde $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ son diferentes de cero y r es igual al rango de la matriz inicial. Comparar esta afirmación con el problema 1.2.18.

Calcular el rango de las matrices siguientes:

4.1.28. $\begin{Vmatrix} 37 & 259 & 481 & 407 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \end{Vmatrix}$.

4.1.29. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{Vmatrix}$.

4.1.30*. $\begin{Vmatrix} 1241 & 381 & 273 & -165 \\ 134 & -987 & 562 & 213 \\ 702 & 225 & -1111 & 49 \end{Vmatrix}$.

4.1.31. $\left\| \begin{matrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{matrix} \right\|$.

4.1.32. $\left\| \begin{matrix} -5 & 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$.

4.1.33. $\left\| \begin{matrix} 9 & -12 & 3 & -4 & 12 & -16 \\ -15 & 21 & -5 & 7 & -20 & 28 \\ 18 & -24 & 6 & -8 & 15 & -20 \\ -30 & 42 & -10 & 14 & -25 & 35 \end{matrix} \right\|$.

4.1.34. Hallar la dimensión del subespacio lineal tendido sobre el sistema de vectores $x_1 = (73, -51, 13, 42, 15)$, $x_2 = (44, -32, 5, 25, 3)$, $x_3 = (76, -52, 16, 44, 18)$, $x_4 = (-37, 27, -4, -21, -2)$.

4.1.35. Un subespacio lineal L está tendido sobre los vectores $x_1 = (2, 4, 8, -4, 7)$, $x_2 = (4, -2, -1, 3, 1)$, $x_3 = (3, 5, 2, -2, 4)$, $x_4 = (-5, 1, 7, -6, 2)$.

¿Pertenecen a este subespacio los vectores siguientes:

a) $b_1 = (6, 18, 1, -9, 8)$;

b) $b_2 = (6, 18, 1, -9 + \varepsilon, 8)$;

c) $b_3 = (6, 18, 1, -9, 8 + \varepsilon)$?

Aquí ε es cualquier número diferente de cero.

4.1.36*. Demostrar que el rango de la matriz A de tipo $k \times n$ de la forma

$$\left\| \begin{matrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_k & a_k^2 & \ldots & a_k^{n-1} \end{matrix} \right\|,$$

donde $k \leqslant n$ y $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son números diferentes, es igual a k.

§ 4.2. Planos en un espacio lineal

Presentación de los problemas del párrafo. Los problemas del presente párrafo tratan principalmente dos cuestiones siguientes:

Determinación de los planos en un espacio lineal, dimensión de un plano.

Disposición de los planos.

Al final del párrafo establecemos ciertas relaciones entre los planos de dimensión arbitraria y los hiperplanos.

4.2.1. Demostrar que dos planos $P_1 = x_1 + L_1$ y $P_2 = x_2 + L_2$ coinciden, si y sólo si, $L_1 = L_2$ y $x_1 - x_2 \in L_1$. Con esto el subespacio director está definido unívocamente para cada plano.

4.2.2. Del resultado del problema precedente deducir que para el plano dado como vector de desplazamiento se puede tomar cualquiera de sus vectores.

4.2.3. Demostrar que si los vectores x_1 y x_2 pertenecen al plano $P = x_0 + L$, entonces $x_1 - x_2 \in L$. Inversamente, si $x_1 \in P$ y $x_1 - x_2 \in L$, entonces $x_2 \in P$.

4.2.4. Demostrar que el plano $P = x_0 + L$ es un subespacio, si y sólo si, $x_0 \in L$.

4.2.5. Demostrar que para que el plano $P = x_0 + L$ sea un subespacio es necesario que la suma de cualesquiera vectores x_1 y x_2 de P pertenezca a L.

4.2.6. Demostrar que la intersección del plano $P = x_0 + L$ con un subespacio cualquiera complementario de L se compone de un solo vector.

4.2.7. ¿Qué representa un plano de dimensión 0?

4.2.8. ¿Qué representa un plano de dimensión n en un espacio lineal V de dimensión n?

4.2.9. Demostrar que en el espacio de polinomios de grado $\leqslant n$ el conjunto de polinomios $f(t)$ que verifican la condición $f(a) = b$, donde a y b son números fijados, es un plano. Hallar la dimensión de este plano.

4.2.10. Demostrar que en un plano de dimensión k, que no es un subespacio, se puede hallar un sistema linealmente independiente compuesto de $k + 1$ vectores.

4.2.11. Demostrar que en un plano de dimensión k todo sistema compuesto de $k + 2$ vectores es linealmente dependiente.

4.2.12. Demostrar que para $k + 1$ vectores linealmente independientes existe un plano, y uno solo, de dimensión k que contiene estos vectores.

4.2.13. Demostrar que el plano de dimensión k que contiene los vectores linealmente independientes $x_0, x_1, \ldots, x_k$ puede ser descrito como el conjunto de todas las combinaciones lineales $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$ que satisfacen la condición $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$.

4.2.14. Demostrar que si la intersección de dos planos $P_1 = x_1 + L_1$ y $P_2 = x_2 + L_2$ no es vacía, ella es un plano con subespacio director $L_1 \cap L_2$.

4.2.15. Llámase *suma* $P_1 + P_2$ *de los planos* $P_1 = x_1 + L_1$ y $P_2 = x_2 + L_2$ al conjunto de todos los vectores de la forma $z_1 + z_2$, donde $z_1 \in P_1$, $z_2 \in P_2$. Demostrar que la suma de los planos P_1 y P_2 es también un plano. Hallar su subespacio director.

4.2.16. Llámase *producto* λP *de un plano* $P = x_0 + L$ *por un número* λ al conjunto de todos los vectores de la forma λz, donde $z \in P$. Demostrar que el producto del plano P multiplicado por el número α es también un plano. Hallar su espacio director.

4.2.17. En un espacio lineal V está fijado un subespacio L. ¿Será el conjunto M de todos los planos del espacio V engendrado por el deslizamiento del subespacio L un espacio lineal respecto a la adición y la multiplicación por un número, definidas en los problemas 4.2.15 y 4.2.16?

4.2.18. Cambiar la definición de la multiplicación de un plano por un número de modo que el conjunto M del problema 4.2.17 sea un espacio lineal. Indicar el elemento nulo de este espacio. (El espacio M obtenido se llama *espacio cociente del espacio V por el subespacio L*.)

4.2.19. Sea L de los datos del problema 4.2.18 un subespacio de dimensión k de un espacio V de dimensión n. ¿Cuál es la dimensión del espacio M?

4.2.20. En el espacio R_5 está dado el plano $x = x_0 + t_1p_1 + t_2p_2$, donde $x_0 = (2, 3, -1, 1, 1)$, $p_1 = (3, -1, 1, -1, 1)$, $p_2 = (-1, 1, 1, 1, -1)$. Deducir si los vectores $z = (1, 6, 4, 4, -2)$ y $v = (1, 6, 5, 4, -2)$ pertenecen a este plano o no.

4.2.21. Demostrar que si una recta posee dos vectores comunes con un plano, dicha recta pertenece a este plano.

4.2.22. Determinar la disposición del plano $P = x_0 + L$, donde $x_0 = (1, 0, 0, 1)$, en tanto que L está tendido sobre los vectores $y_1 = (5, 2, -3, 1)$, $y_2 = (4, 1, -1, 0)$, $y_3 = (-1, 2, -5, 3)$, y las rectas

a) $x = x_1 + tq_1$, $x_1 = (3, 1, -4, 1)$, $q_1 = (-1, 1, 2, 1)$;

b) $x = x_2 + tq_2$, $x_2 = (3, 0, -4, 1)$, $q_2 = (-1, 1, 2, 1)$;

c) $x = x_3 + tq_3$, $x_3 = (-2, 0, -1, 2)$, $q_3 = (1, 1, -2, 1)$.

4.2.23. Demostrar que las rectas $x = x_1 + tq_1$ y $x = x_2 + tq_2$, donde $x_1 = (9, 3, 6, 15, -3)$, $q_1 = (7, -4, 11, 13, -5)$, $x_2 = (-7, 2, -6, -5, 3)$, $q_2 = (2, 9, -10, -6, 4)$, se cortan. Hallar su intersección. Indicar el plano de dimensión 2 al cual pertenecen estas rectas.

4.2.24*. Demostrar que las rectas $x = x_1 + tq_1$ y $x = x_2 + tq_2$, donde $x_1 = (8, 2, 5, 15, -3)$, $q_1 = (7, -4, 11, 13, -5)$, $x_2 = (-7, 2, -6, -5, 3)$, $q_2 = (2, 9, -10, -6, 4)$, no se cortan. Construir el plano de dimensión 3 que contenga estas dos rectas.

Determinar la disposición de los planos $P_1 = x_0 + t_1p_1 + t_2p_2$ y $P_2 = y_0 + t_1q_1 + t_2q_2$:

4.2.25. $x_0 = (3, 1, 2, 0, 1)$, $p_1 = (2, -6, 3, 1, -6)$,
$y_0 = (1, 0, 1, 1, 0)$, $q_1 = (-1, 1, -1, 0, 1)$,
$p_2 = (0, 5, -2, -1, 6)$,
$q_2 = (-1, 3, -1, -1, 2)$.

4.2.26. $x_0 = (7, -4, 0, 3, 2)$, $p_1 = (-1, 1, 1, 1, 1)$,
$y_0 = (6, -5, -1, 2, 3)$, $q_1 = (1, 1, -1, 1, 1)$,
$p_2 = (1, -1, 1, 1, 1)$,
$q_2 = (1, 1, 1, -1, 1)$.

4.2.27. $x_0 = (2, -3, 1, 5, 0)$, $p_1 = (3, -2, 1, 0, 1)$,
$y_0 = (0, -1, 0, 4, 1)$, $q_1 = (1, 2, 4, 0, -2)$,
$p_2 = (-1, 5, -2, 0, 3)$,
$q_2 = (6, 3, 4, 0, 3)$.

4.2.28. $x_0 = (-3, -2, 1, -1, 2)$, $p_1 = (1, -1, 1, 1, 3)$,
$y_0 = (-1, 0, 3, 3, 8)$, $q_1 = (1, 1, -3, -3, 1)$,
$p_2 = (-1, 2, 1, 2, -2)$,
$q_2 = (0, 1, 2, 3, 1)$.

4.2.29. $x_0 = (1, 2, 0, 2, 1)$, $p_1 = (5, -2, 6, 1, -4)$,
$y_0 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $q_1 = (1, -4, 0, 1, -6)$,
$p_2 = (2, 1, 3, 0, 1)$,
$q_2 = (-3, 3, -3, -1, 5)$.

4.2.30. $x_0 = (4, 1, 10, -3, 5)$, $p_1 = (2, 1, 3, 0, 1)$,
$y_0 = (-3, 2, 1, -4, 8)$, $q_1 = (3, -3, 3, 1, -5)$,
$p_2 = (1, -4, 0, 1, -6)$,
$q_2 = (5, -2, 6, 1, -4)$.

4.2.31. Demostrar que si la recta $x = x_0 + tq$ y el hiperplano $\pi = y_0 + L$ no se cortan, entonces $q \in L$.

4.2.32. Demostrar que si los hiperplanos $\pi_1 = x_0 + L_1$ y $\pi_2 = y_0 + L_2$ no se cortan, entonces $L_1 = L_2$.

4.2.33*. Demostrar que si la intersección de los hiperplanos $\pi_1, \ldots, \pi_k$ de un espacio de dimensión n no es vacía, ésta es un plano cuya dimensión es no menos de $n - k$.

4.2.34*. Demostrar que todo plano de dimensión k en un espacio de dimensión n puede ser dado como la intersección de $n - k$ hiperplanos.

§ 4.3. Planos en un espacio euclídeo

Presentación de los problemas del párrafo. En este párrafo discutimos diferentes modos de representación de hiperplanos en un espacio euclídeo y establecemos la correspondencia entre los planos y los sistemas de ecuaciones lineales. Introducimos la noción de vector normal de un plano y examinamos ciertos problemas geométricos relacionados con la determinación de distancias. En conclusión consideramos de importancia notar que la descripción de planos por sistemas de ecuaciones lineales, obtenida por nosotros para las bases ortonormales de un espacio euclídeo, en realidad tiene lugar en toda base de un espacio lineal.

4.3.1*. Demostrar que un conjunto de vectores de un espacio euclídeo (unitario) E que verifican la condición $(n, x) = b$, donde n es un vector fijado no nulo, b es el número dado, es un hiperplano de este espacio. ¿En qué caso este hiperplano es un subespacio?

4.3.2. Mostrar que el hiperplano dado por la condición $(n, x) = b$ puede ser descrito también por la condición $(n, x - x_0) = 0$, donde x_0 es un vector arbitrario de este hiperplano.

4.3.3*. Demostrar que todo hiperplano de un espacio euclídeo puede ser dado por la condición de la forma $(n, x) = b$.

4.3.4. Demostrar que si los datos $(n_1, x) = b_1$ y $(n_2, x) = b_2$ determinan un mismo hiperplano, entonces $n_1 = \alpha n_2$, $b_1 = \alpha b_2$ para un cierto número no nulo α.

4.3.5. En un espacio de polinomios de grado $\leqslant n$ el producto escalar está definido por la fórmula (2.3.1). Para el hiperplano dado por la condición $f(c) = d$ hallar la notación de la forma $(n, f) = b$. Indicar el polinomio correspondiente $n(t)$.

4.3.6. ¿Puede definirse por la condición de la forma $f(c) = d$ todo hiperplano de un espacio de polinomios (véase el problema precedente)?

4.3.7. Demostrar que en cada base ortonormal de un espacio todo hiperplano puede ser descrito por la ecuación de primer grado

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n = b$$

respecto a las coordenadas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de vectores de este hiperplano.

4.3.8*. Demostrar que si la intersección de los hiperplanos de un espacio de dimensión n

$$\begin{gathered}(n_1, x) = b_1,\\ (n_2, x) = b_2,\\ \cdots\cdots\\ (n_k, x) = b_k\end{gathered}$$

no es vacía, entonces ésta es un plano de dimensión $n - r$, donde r es el rango de un sistema de vectores $n_1, \ldots, n_k$.

4.3.9. En un espacio euclídeo (unitario) E está fijada la base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$. Demostrar que

a) si

$$\begin{aligned}a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= b_1,\\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n &= b_m\end{aligned}$$

es un sistema compatible arbitrario de ecuaciones lineales con n incógnitas, entonces el conjunto de vectores z cuyas coordenadas en la base $e_1, \ldots, e_n$ satisfacen este sistema, es un plano del espacio E. Este plano es de dimensión $n - r$, donde r es el rango de la matriz

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{Vmatrix};$$

b) todo plano P del espacio E puede ser descrito por un cierto sistema de ecuaciones lineales. Esto significa que el vector z pertenece al plano P si, y solamente si, sus coordenadas en la base $e_1, \ldots, e_n$ satisfacen el sistema dado. Si r es la dimensión del plano P, todo sistema que describe este plano cuenta por lo menos con $n - r$ ecuaciones y además existe un tal sistema compuesto exactamente de $n - r$ ecuaciones.

4.3.10. Hallar el sistema de ecuaciones lineales que describe el plano $P = x_0 + L$, donde $x_0 = (1, 1, 1, 1)$ y L está tendido sobre los vectores $y_1 = (1, 3, 0, 2)$, $y_2 = (3, 7, -1, 2)$, $y_3 = (2, 4, -1, 0)$.

4.3.11. Demostrar que entre los vectores de todo plano P existe un solo vector z_0 ortogonal al subespacio director de este plano. El vector z_0 se llama *vector normal* del plano P.

4.3.12. Mostrar que entre todos los vectores de un plano P el más pequeño en longitud es el vector normal z_0.

4.3.13. Mostrar que el vector normal z_0 del plano P es igual a la perpendicular bajada desde un vector arbitrario de este plano sobre el subespacio director.

4.3.14. Hallar el vector normal z_0 de un hiperplano dado por la condición $(n, x) = b$.

4.3.15. Sea z_0 el vector normal de un plano P (que no coincide con todo el espacio). Demostrar que el plano P pertenece al hiperplano $(z_0, x) = (z_0, z_0)$.

4.3.16. Determinar en el espacio de polinomios de grado $\leqslant n$ con producto escalar (2.3.1) el vector normal del plano dado por las condiciones $f(0) = 1$, $f(1) = 1$.

4.3.17. Llámase *distancia del vector x al plano $P = x_0 + L$* al número

$$\rho(x, P) = \inf_{u \in P} \rho(x, u).$$

Demostrar que la distancia $\rho(x, P)$ es igual a la longitud de la perpendicular bajada desde el vector $x - x_0$ sobre el subespacio L.

4.3.18. El subespacio L está tendido sobre el sistema de vectores linealmente independientes $y_1, \ldots, y_k$. Utilizando el resultado del problema 4.3.17 y las propiedades de los determinantes de Gram demostrar que la distancia del vector x al plano $P = x_0 + L$ es igual a

$$\rho(x, P) = \left(\frac{G(y_1, \ldots, y_k, x - x_0)}{G(y_1, \ldots, y_k)}\right)^{1/2}.$$

4.3.19. Hallar la distancia del vector $x = (5, 3, -1, -1)$ a plano $P = x_0 + L$, donde $x_0 = (0, 0, -3, 6)$ y L está tendido sobre el sistema de vectores $y_1 = (1, 0, 2, -2)$, $y_2 = (0, 1, 2, 0)$, $y_3 = (2, 1, 6, -4)$.

4.3.20. Llámase *distancia entre dos planos* $P_1 = x_1 + L_1$ y $P_2 = x_2 + L_2$ al número

$$\rho(P_1, P_2) = \inf_{u_1 \in P_1,\ u_2 \in P_2} \rho(u_1, u_2).$$

Demostrar que la distancia $\rho(P_1, P_2)$ es igual a la longitud de la perpendicular bajada desde el vector $x_1 - x_2$ sobre el subespacio $L = L_1 + L_2$.

4.3.21. Demostrar que el cuadrado de la distancia entre las rectas $l_1 = x_1 + tq_1$ y $l_2 = x_2 + tq_2$ es igual a:

a) $\rho^2(l_1, l_2) = \frac{G(q_1, q_2, x_1 - x_2)}{G(q_1, q_2)}$ si las rectas l_1 y l_2 no son paralelas;

b) $\rho^2(l_1, l_2) = \frac{G(q_1, x_1 - x_2)}{(q_1, q_1)}$ si las rectas l_1 y l_2 son paralelas.

Hallar la distancia entre las rectas $l_1 = x_1 + tq_1$ y $l_2 = x_2 + tq_2$.

4.3.22. $x_1 = (5, 2, 0, 3)$, $q_1 = (1, 2, -4, 1)$; $x_2 = (3, -1, 3, 1)$, $q_2 = (1, 0, -1, 0)$.

4.3.23. $x_1 = (5, 4, 3, 2)$, $q_1 = (1, 1, -1, -1)$; $x_2 = (2, 1, 4, 3)$, $q_2 = (-3, -3, 3, 3)$.

Hallar la distancia entre los planos $P_1 = x_0 + t_1p_1 + t_2p_2$ y $P_2 = y_0 + t_1q_1 + t_2q_2$:

4.3.24. $x_0 = (89, 37, 111, 13, 54)$, $p_1 = (1, 1, 0, -1, -1)$,
$y_0 = (42, -16, -39, 71, 3)$, $q_1 = (1, 1, 0, 1, 1)$,
$p_2 = (1, -1, 0, -1, 1)$,
$q_2 = (1, -1, 0, 1, -1)$.

4.3.25. $x_0 = (5, 0, -1, 9, 3)$, $p_1 = (1, 1, 0, -1, -1)$,
$y_0 = (3, 2, -4, 7, 5)$, $q_1 = (1, 1, 0, 1, 1)$,
$p_2 = (1, -1, 0, -1, 1)$,
$q_2 = (0, 3, 0, 1, -2)$.

4.3.26. $x_0 = (4, 2, 2, 2, 0)$, $p_1 = (1, 2, 2, -1, 1)$,
$y_0 = (-1, 1, -1, 0, 2)$, $q_1 = (8, 7, -2, 1, -1)$,
$p_2 = (2, 1, -2, 1, -1)$,
$q_2 = (-5, -4, 2, -1, 1)$.

4.3.27. Demostrar que en una base cualquiera de un espacio lineal todo hiperplano puede ser descrito por una ecuación de primer grado respecto a las coordenadas de vectores de este hiperplano (comparar con el problema 4.3.7).

4.3.28. Demostrar que en una base cualquiera de un espacio lineal todo plano de dimensión r puede ser descrito por un sistema de $n - r$ ecuaciones lineales respecto a las coordenadas de vectores de este plano.

4.3.29. Sean P un cierto plano de un espacio lineal que no es un subespacio, x un vector arbitrario de este plano. Mostrar que en este espacio se puede introducir un producto escalar de modo que x será un vector normal del plano P.

§ 4.4. Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales

Presentación de los problemas del párrafo. Hemos considerado conveniente agrupar en un párrafo especial los problemas relacionados a los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales; a diferencia del caso no homogéneo, aquí la cuestión de compatibilidad no aparece y además la estructura algebraica del conjunto de soluciones es distinta: un subespacio para un sistema homogéneo y un plano para un sistema no homogéneo.

La atención principal está dedicada a dos problemas tradicionales que consisten en hallar la solución general y construir el sistema fundamental de soluciones. Hemos querido subrayar la relación entre estos dos modos de descripción del subespacio de soluciones de un sistema homogéneo: el problema 4.4.13 muestra que las fórmulas de solución general coinciden con la descripción de este subespacio al usar un sistema fundamental especial.

Al final del párrafo indicamos ciertas aplicaciones de los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales a los problemas del espacio lineal: cálculo de la base y de la dimensión de un subespacio, verificación de la equivalencia de dos sistemas de vectores, etc.

4.4.1. Mostrar que el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo arbitrario de ecuaciones lineales es un subespacio. En este caso las soluciones se consideran como vectores del espacio aritmético correspondiente.

4.4.2. Dos sistemas homogéneos de ecuaciones lineales

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered} b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{l1}x_1 + \ldots + b_{ln}x_n = 0 \end{gathered}$$

se llaman *equivalentes* si poseen el mismo conjunto de soluciones. Demostrar que los sistemas indicados son equivalentes si, y solamente si, son equivalentes los sistemas de vectores

$$\begin{gathered} u_1 = (a_{11}, \ \ldots, \ a_{1n}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m = (a_{m1}, \ \ldots, \ a_{mn}) \end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered} v_1 = (b_{11}, \ \ldots, \ b_{1n}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_l = (b_{l1}, \ \ldots, \ b_{ln}). \end{gathered}$$

4.4.3. Un sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas tiene una matriz de coeficientes de incógnitas, cuyo rango es igual a r. Demostrar que la dimensión del subespacio de soluciones de este sistema es igual a $n - r$.

4.4.4. Indicar todos los valores del parámetro λ tales que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (8 - \lambda)\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 &= 0, \\ x_1 + (9 - \lambda)\, x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + (10 - \lambda)\, x_3 + \lambda x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 &= 0 \end{aligned}$$

no esté definido.

Hallar la dimensión del subespacio de soluciones del sistema en función del valor del parámetro λ:

4.4.5. $(1-\lambda)x_1+\lambda x_2+2\lambda x_3+2\lambda x_4=0,$
$(-1+\lambda)x_1+(2-2\lambda)x_2-2\lambda x_3-2\lambda x_4=0,$
$(1-\lambda)x_1+\lambda x_2+(2+\lambda)x_3+(1+2\lambda)x_4=0,$
$(-1+\lambda)x_1-\lambda x_2-2\lambda x_3+(2-3\lambda)x_4=0.$

4.4.6. $-4x_1+(2+2\lambda)x_2+2\lambda x_3+2\lambda x_4=0,$
$\lambda x_1+(1+\lambda)x_2+\lambda x_3+\lambda x_4=0,$
$\lambda x_1+(1+\lambda)x_2-2x_3+\lambda x_4=0,$
$-\lambda x_1-(1+\lambda)x_2-\lambda x_3-(2+2\lambda)x_4=0.$

4.4.7. Sea que un sistema homogéneo de ecuaciones tiene rango r. Demostrar que permutando las ecuaciones y cambiando la numeración de las incógnitas se puede obtener que en la matriz del sistema los menores de orden $1, 2, \ldots, r$ de las primeras filas y las primeras columnas sean diferentes de cero.

En los problemas 4.4.8—4.4.15 se examina el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=0. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Se supone que el rango de este sistema es igual a r y que en la matriz del sistema los menores de orden $1, 2, \ldots, r$ de las primeras y las últimas filas y columnas son diferentes de cero (de acuerdo con el problema 4.4.7 se puede siempre obtenerlo cambiando el orden de ecuaciones o incógnitas).

4.4.8. Demostrar que aplicando el método de eliminación al sistema (4.4.1) se puede adoptar como elementos directores de pasos aislados $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{rr}^{(r-1)}$ para obtener finalmente el sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r\quad+a_{1,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2r}^{(1)}x_r\quad+a_{2,\,r+1}^{(1)}x_{r+1}+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{rr}^{(r-1)}x_r+a_{r,\,r+1}^{(r-1)}x_{r+1}+\ldots+a_{rn}^{(r-1)}x_n&=0 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

(omitiendo las ecuaciones cuyos todos los coeficientes son iguales a cero).

4.4.9. Mostrar que el sistema (4.4.2) permite hallar las expresiones de las incógnitas $x_1, \ldots, x_r$ por medio de las incógnitas independientes $x_{r+1}, \ldots, x_n$ de la forma siguiente

$$\begin{aligned} x_1&=c_{11}x_{r+1}+c_{12}x_{r+2}+\ldots+c_{1,\,n-r}x_n,\\ x_2&=c_{21}x_{r+1}+c_{22}x_{r+2}+\ldots+c_{2,\,n-r}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_r&=c_{r1}x_{r+1}+c_{r2}x_{r+2}+\ldots+c_{r,\,n-r}x_n. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Estas fórmulas se llaman *solución general* del sistema (4.4.1). El sentido de este nombre consiste en que atribuyendo valores arbitrarios a las incógnitas independientes mediante las fórmulas (4.4.3) se hallan los r primeros componentes de la solución del sistema (4.4.1) e, inversamente, toda solución de este sistema puede ser obtenida de este modo para valores correspondientes de las incógnitas independientes.

4.4.10*. Demostrar que las soluciones del sistema (4.4.1):

$$\begin{aligned} y_1 &= (x_{11}, \ \ldots, \ x_{1r}, \ x_{1,\, r+1}, \ \ldots, \ x_{1n}), \\ y_2 &= (x_{21}, \ \ldots, \ x_{2r}, \ x_{2,\, r+1}, \ \ldots, \ x_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k &= (x_{k1}, \ \ldots, \ x_{kr}, \ x_{k,\, r+1}, \ \ldots, \ x_{kn}) \end{aligned}$$

son linealmente dependientes si, y solamente si, son linealmente dependientes los vectores de dimensión $(n-r)$

$$\begin{aligned} z_1 &= (x_{1,\, r+1}, \ \ldots, \ x_{1n}), \\ z_2 &= (x_{2,\, r+1}, \ \ldots, \ x_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_k &= (x_{k,\, r+1}, \ \ldots, \ x_{kn}). \end{aligned}$$

4.4.11. Demostrar que una base del subespacio de soluciones del sistema (4.4.1) puede ser obtenida del modo siguiente: fijando un cierto determinante no nulo de orden $n-r$ y representando por turno sus filas como valores de las incógnitas independientes $x_{r+1}, \ldots, x_n$ y hallando mediante las fórmulas (4.4.3) los valores correspondientes de las incógnitas $x_1, \ldots, x_r$. Justamente las $n-r$ soluciones construidas forman una base. Toda base del subespacio de soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo se llama *sistema fundamental de soluciones* de este sistema.

4.4.12. Mostrar que todo sistema fundamental de soluciones del sistema (4.4.1) puede ser construido mediante el método descrito en el problema 4.4.11 efectuando una elección conveniente del determinante.

4.4.13. Mostrar que los vectores

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_{11}, \ c_{21}, \ \ldots, \ c_{r1}, \ 1, \ 0, \ \ldots, \ 0), \\ y_2 &= (c_{12}, \ c_{22}, \ \ldots, \ c_{r2}, \ 0, \ 1, \ \ldots, \ 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-r} &= (c_{1,\, n-r}, \ c_{2,\, n-r}, \ \ldots, \ c_{r,\, n-r}, \ 0, \ 0, \ \ldots, \ 1) \end{aligned}$$

forman un sistema fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones (4.4.1). Aquí c_{ij} son coeficientes de las fórmulas (4.4.3).

Completando las fórmulas (4.4.3) por las identidades

$$\begin{aligned} x_{r+1} &= x_{r+1}, \\ x_{r+2} &= \qquad x_{r+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \qquad x_n \end{aligned}$$

interpretar la solución general como una representación de toda solución del sistema (4.4.1) por la combinación lineal de las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_r$, cuyos coeficientes son los valores de las incógnitas independientes.

4.4.14*. Demostrar que el rango de la matriz C de tipo $r \times (n-r)$ compuesto de los coeficientes de las fórmulas (4.4.3) es igual al rango de la submatriz

$$\begin{Vmatrix} a_{1,\,r+1} & a_{1,\,r+2} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2,\,r+1} & a_{2,\,r+2} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,\,r+1} & a_{m,\,r+2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

de la matriz de coeficientes del sistema (4.4.1).

4.4.15. Demostrar que en las fórmulas (4.4.3) todos los coeficientes de la incógnita independiente x_k $(r < k \leqslant n)$ son iguales a cero si, y solamente si, son nulos todos los coeficientes de esta incógnita en el sistema inicial (4.4.1).

Hallar la solución general y el sistema fundamental de soluciones de los sistemas de ecuaciones:

4.4.16. $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 0.$

4.4.17. $$\begin{aligned} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 &= 0. \end{aligned}$$

4.4.18. $$\begin{aligned} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 &= 0, \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 &= 0, \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 &= 0. \end{aligned}$$

4.4.19. $$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

4.4.20. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 &= 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= 0, \\ x_1 \qquad + 8x_3 + 7x_4 &= 0. \end{aligned}$$

4.4.21. $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad - 3x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 &= 0. \end{aligned}$$

4.4.22. $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 + 8x_5 &= 0, \\ 8x_1 - 9x_2 + 13x_3 + 15x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 10x_1 - 12x_2 + 17x_3 + 12x_4 - 11x_5 &= 0, \\ -6x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 3x_5 &= 0, \\ -14x_1 + 17x_2 - 24x_3 - 15x_4 + 19x_5 &= 0. \end{aligned}$$

4.4.23. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 0,\\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 0,\\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 &= 0,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 0,\\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

4.4.24. $$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 0,\\ 6x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 7x_4 - 3x_5 &= 0,\\ 9x_1 \qquad\quad + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0,\\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 &= 0. \end{aligned}$$

4.4.25. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 6x_5 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 18x_5 &= 0,\\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 9x_4 - 27x_5 &= 0,\\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 16x_4 - 48x_5 &= 0,\\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 6x_5 &= 0. \end{aligned}$$

4.4.26. Verificar que el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 0,\\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 6x_5 &= 0,\\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 5x_5 &= 0,\\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 6x_5 &= 0,\\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

posee un número infinito de soluciones y en cada una de estas soluciones $x_4 = x_5 = 0$. Explicar estos hechos en términos de la dependencia lineal y la independencia lineal de las columnas de la matriz del sistema.

4.4.27. Indicar todos los grupos de incógnitas que pueden ser considerados como incógnitas independientes del sistema:

$$\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0,\\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 0,\\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0,\\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0. \end{aligned}$$

4.4.28. Determinar en el espacio de polinomios de grado $\leqslant n$ la dimensión del subespacio de polinomios $f(t)$ que verifican las condiciones $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_k) = 0$, donde $a_1, \ldots, a_k$ son números distintos.

4.4.29. Hallar en el espacio de polinomios de grado $\leqslant 5$ una base del subespacio lineal de polinomios $f(t)$ para los cuales están cumplidas las condiciones $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0$.

4.4.30. Hallar el sistema homogéneo de ecuaciones lineales compuesto: a) de dos ecuaciones; b) de tres ecuaciones; c) de cuatro ecuaciones, para el cual el sistema de vectores

$$y_1 = (1,\ 4,\ -2,\ 2,\ -1),$$
$$y_2 = (3,\ 13,\ -1,\ 2,\ 1),$$
$$y_3 = (2,\ 7,\ -8,\ 4,\ -5)$$

es el sistema fundamental de soluciones.

4.4.31. ¿Se puede hallar un sistema de ecuaciones lineales tal que los sistemas de vectores

$$y_1 = (2,\ 3,\ 1,\ 2),$$
$$y_2 = (1,\ 1,\ -2,\ -2),$$
$$y_3 = (3,\ 4,\ 2,\ 1)$$

y

$$z_1 = (1,\ 0,\ 2,\ -5),$$
$$z_2 = (0,\ 1,\ 8,\ 7),$$
$$z_3 = (4,\ 5,\ -2,\ 0)$$

sean dos sistemas fundamentales de soluciones?

4.4.32*. El rango de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales compuesto de $n-1$ ecuaciones con n incógnitas es igual a $n-1$. Demostrar que la solución no nula de este sistema puede ser construida mediante las fórmulas

$$x_i = (-1)^i A_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

donde A_i es el menor obtenido eliminando la i-ésima columna de la matriz de los coeficientes del sistema. Mostrar también que cualquier otra solución del sistema es colineal a la solución en cuestión.

4.4.33. Aplicando el resultado del problema 4.4.32 hallar el vector ortogonal al sistema de vectores

$$z_1 = (2,\ -1,\ 3,\ 1),$$
$$z_2 = (1,\ 0,\ 2,\ -3),$$
$$z_3 = (2,\ 3,\ 1,\ 4).$$

4.4.34*. Demostrar el teorema: para que dos sistemas linealmente independientes de vectores $x_1, \ldots, x_{n-1}$ e $y_1, \ldots, y_{n-1}$ de un espacio lineal de dimensión n sean equivalentes es necesario y suficiente que en cualquier base de este espacio todos los n menores de orden $n-1$ compuestos de coordenadas de los vectores $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sean proporcionales a los menores correspondientes compuestos de coordenadas de los vectores $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

4.4.35. Aplicando el resultado del problema 4.4.34 determinar si los sistemas de vectores del problema 4.4.31 son equivalentes.

§ 4.5. Sistemas no homogéneos de ecuaciones lineales

Presentación de los problemas del párrafo. Las cuestiones principales que se discuten en este párrafo son las siguientes:

Criterios de compatibilidad de sistemas no homogéneos de ecuaciones, estudio de sistemas concretos, en cuanto a la compatibilidad.

Determinación de la solución general de un sistema. Además de los problemas estrictamente de cálculo damos también problemas relativos a la determinación de la solución general. Lo mismo que en el caso homogéneo subrayamos el hecho de que las fórmulas de solución general dan las ecuaciones paramétricas del plano de soluciones del sistema de ecuaciones lineales dado (véase el problema 4.5.9). Notemos que en los problemas de cálculo describimos también ciertos métodos utilizados en cálculos prácticos, tales como el cambio de numeración y el escalonamiento de las ecuaciones e incógnitas, el aprovechamiento de la especificidad de un sistema, por ejemplo, de la propiedad de su descomposición en varios sistemas de órdenes más pequeños o la forma tridiagonal de la matriz de los coeficientes.

Al concluir el párrafo damos una serie de problemas sobre determinados sistemas de ecuaciones lineales. En particular, indicamos ciertas aplicaciones de las fórmulas de Cramer.

4.5.1. Demostrar que un sistema no homogéneo de m ecuaciones lineales cuya matriz de los coeficientes de las incógnitas tiene rango m, es compatible.

4.5.2. Demostrar que para que el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

sea compatible es necesario y suficiente que el vector

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

pertenezca a la cápsula lineal de vectores

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \\ a_2 &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}). \end{aligned}$$

4.5.3. Demostrar el *teorema de Fredholm*: para que el sistema no homogéneo (4.5.1) sea compatible es necesario y suficiente que el vector de dimensión m

$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

sea ortogonal a todas las soluciones del sistema homogéneo adjunto:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m &= 0, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m &= 0. \end{aligned}$$

4.5.4. Un sistema no homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas es compatible y el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es igual a r. Demostrar que el conjunto de soluciones de este sistema es un plano de un espacio aritmético de dimensión n; este plano es de dimensión $n - r$ y su subespacio director es un conjunto de soluciones del *sistema reducido* correspondiente, es decir, de un sistema homogéneo de la misma matriz de los coeficientes de las incógnitas.

4.5.5. Dos sistemas no homogéneos de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n &= d_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{l1}x_1 + \ldots + c_{ln}x_n &= d_l \end{aligned}$$

se llaman *equivalentes* si ellos, los dos, son incompatibles o compatibles y poseen el mismo conjunto de soluciones. Demostrar que si los sistemas mencionados son compatibles, los mismos son equivalentes si, y solamente si, los sistemas de vectores

$$\begin{aligned} u_1 &= (a_{11}, \ldots, a_{1n}, b_1), \\ \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_m &= (a_{m1}, \ldots, a_{mn}, b_m), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v_1 &= (c_{11}, \ldots, c_{1n}, d_1), \\ \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_l &= c_{l1}, \ldots, c_{ln}, d_l) \end{aligned}$$

son equivalentes.

Estudiar la compatibilidad del sistema e indicar la dimensión del plano de soluciones en función del valor del parámetro λ:

4.5.6.
$$\begin{aligned} (5-\lambda)x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1, \\ -2x_1 + (2-\lambda)x_2 - 2x_3 &= 2, \\ -x_1 - 2x_2 + (5-\lambda)x_3 &= 1. \end{aligned}$$

4.5.7.
$$\begin{aligned} -x_1 + (1+\lambda)x_2 + (2-\lambda)x_3 + \lambda x_4 &= 3, \\ \lambda x_1 - x_2 + (2-\lambda)x_3 + \lambda x_4 &= 2, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2-\lambda)x_3 + \lambda x_4 &= 2, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2-\lambda)x_3 - x_4 &= 2. \end{aligned}$$

En los problemas 4.5.8—4.5.11 se examina el sistema compatible no homogéneo de ecuaciones (4.5.1) de rango r. Se supone que las ecuaciones y las incógnitas están numeradas de modo que los menores de orden 1, 2, . . ., r de las primeras filas y las primeras columnas de la matriz del sistema difieren de cero.

4.5.8. Aplicando el método de eliminación de incógnitas mostrar que mediante el sistema (4.5.1) se puede hallar expresiones de las incógnitas $x_1, \ldots, x_r$ con ayuda de las incógnitas independientes

$x_{r+1}, \ldots, x_n$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{10} + c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \ldots + c_{1,\,n-r}x_n, \\ x_2 &= c_{20} + c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \ldots + c_{2,\,n-r}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= c_{r0} + c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \ldots + c_{r,\,n-r}x_n. \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Estas fórmulas se llaman *solución general* del sistema (4.5.1). Las fórmulas (4.4.3) son un caso particular de las fórmulas (4.5.2).

4.5.9. Mostrar que el vector

$$x_0 = (c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{r0}, 0, 0, \ldots, 0)$$

es solución del sistema (4.5.1) y los vectores

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_{11}, \quad c_{21}, \quad \ldots, \quad c_{r1}, 1, 0, \ldots, 0), \\ y_2 &= (c_{12}, \quad c_{22}, \quad \ldots, \quad c_{r2}, 0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-r} &= (c_{1,\,n-r}, c_{2,\,n-r}, \ldots, \quad c_{r,\,n-r}, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

forman el sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo reducido correspondiente.

Completando las fórmulas (4.5.2) por las identidades

$$\begin{aligned} x_{r+1} &= x_{r+1}, \\ x_{r+2} &= \qquad x_{r+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \qquad\qquad x_n, \end{aligned}$$

interpretar las relaciones obtenidas como ecuaciones paramétricas del plano de soluciones del sistema (4.5.1).

4.5.10. Demostrar que el rango de la matriz

$$\begin{Vmatrix} c_{10} & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1,\,n-r} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2,\,n-r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{r0} & c_{r1} & c_{r2} & \ldots & c_{r,\,n-r} \end{Vmatrix}$$

compuesto de los coeficientes de las fórmulas (4.5.2) es igual al rango de la submatriz

$$\begin{Vmatrix} a_{1,\,r+1} & \ldots & a_{1n} b_1 \\ a_{2,\,r+1} & \ldots & a_{2n} b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,\,r+1} & \ldots & a_{mn} b_m \end{Vmatrix}$$

de la matriz ampliada del sistema (4.5.1).

4.5.11. Demostrar que el vector

$$z_i = (c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ri}), \quad i = 1, \ldots, n-r,$$

es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r &= -a_{1t}, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r &= -a_{rt} \end{aligned}$$

y el vector

$$z_0 = (c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{r0})$$

es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r &= b_1, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r &= b_r. \end{aligned}$$

Estudiar la compatibilidad y hallar la solución general de los sistemas de ecuaciones aducidos a continuación:

4.5.12. $$\begin{aligned} 38x_1 - 74x_2 + 46x_3 + 84x_4 &= 90, \\ -95x_1 + 185x_2 - 115x_3 - 210x_4 &= -225, \\ 57x_1 - 111x_2 + 69x_3 + 126x_4 &= 135. \end{aligned}$$

4.5.13. $$\begin{aligned} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 &= 84, \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 &= 72, \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 &= 59. \end{aligned}$$

4.5.14. $$\begin{aligned} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3. \end{aligned}$$

4.5.15. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 &= 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 &= -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 &= 5. \end{aligned}$$

4.5.16. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 2, \\ x_4 + x_5 &= -1. \end{aligned}$$

4.5.17. $$\begin{aligned} 12x_1 - 18x_2 + 102x_3 - 174x_4 - 216x_5 &= 132, \\ 14x_1 - 21x_2 + 119x_3 - 203x_4 - 252x_5 &= 154, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= -1, \\ 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= -2, \\ 7x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= -3. \end{aligned}$$

4.5.18.
$$\begin{aligned} 24x_1 + 9x_2 + 33x_3 - 15x_4 &= 21, \\ 8x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 5x_4 &= 7, \\ 40x_1 + 15x_2 + 55x_3 - 25x_4 + 213x_5 &= 35, \\ 56x_1 + 21x_2 + 77x_3 - 35x_4 + 197x_5 &= 49. \end{aligned}$$

4.5.19*.
$$\begin{aligned} 2000x_1 + 0{,}003x_2 - 0{,}3x_3 + 40x_4 &= 5, \\ 3000x_1 + 0{,}005x_2 - 0{,}4x_3 + 90x_4 &= 8, \\ 500x_1 + 0{,}0007x_2 - 0{,}08x_3 + 8x_4 &= 1{,}3, \\ 60000x_1 + 0{,}09x_2 - 9x_3 + 1300x_4 &= 190. \end{aligned}$$

4.5.20.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_5 &= 4, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 10, \\ -x_2 - 13x_3 - 2x_4 + x_5 &= -14, \\ x_3 - 16x_4 + 2x_5 &= -11, \\ 2x_4 + 5x_5 &= 12. \end{aligned}$$

4.5.21.
$$\begin{aligned} 8x_1 + 12x_2 &= 20, \\ 14x_1 + 21x_2 &= 35, \\ 9x_3 + 11x_4 &= 0, \\ 16x_3 + 20x_4 &= 0, \\ 10x_5 + 12x_6 &= 22, \\ 15x_5 + 18x_6 &= 33. \end{aligned}$$

4.5.22.
$$\begin{aligned} x_1 - 5x_3 + 2x_6 &= 6, \\ 2x_2 + x_4 + 3x_5 &= 6, \\ 2x_1 - 7x_3 + 3x_6 &= 4, \\ 3x_2 + 2x_4 + 4x_5 &= 7, \\ 2x_1 - x_3 + x_6 &= -12, \\ 4x_2 + 3x_4 + 5x_5 &= 9. \end{aligned}$$

Estudiar el sistema y hallar la solución general en función del valor del parámetro λ:

4.5.23.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1, \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= \lambda, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2. \end{aligned}$$

4.5.24.
$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3. \end{aligned}$$

4.5.25.
$$\begin{aligned} 24x_1 - 38x_2 + 46x_3 &= 26, \\ 60x_1 + \lambda x_2 + 115x_3 &= 65, \\ 84x_1 - 133x_2 + 161x_3 &= 91. \end{aligned}$$

4.5.26.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

4.5.27.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 2, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= -1, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

4.5.28.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 0, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

4.5.29. $(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+\qquad x_3=\lambda,$
$(2-\lambda)\ x_1+(2-\lambda)x_2+\qquad x_3=1,$
$x_1+\qquad x_2+(2-\lambda)x_3=1.$

4.5.30. $(3+2\lambda)x_1+(1+3\lambda)x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4=3.$
$3\lambda x_1+(3+2\lambda)x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4=1.$
$3\lambda x_1+\qquad 3\lambda x_2+3x_3+(\lambda-1)x_4=1.$
$3\lambda x_1+\qquad 3\lambda x_2+\lambda x_3+(\lambda-1)x_4=1.$

4.5.31. Verificar si todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2x_1+3x_2+\ x_3+\qquad +\ x_5&=\ 6,\\ x_1+2x_2+\ x_3+\ x_4\qquad &=\ 5,\\ -x_1+\ x_2+3x_3+5x_4+\ x_5&=\ 8,\\ 2x_1-\ x_2+\ x_3-8x_4+2x_5&=-6\end{aligned}$$

tienen valores de las incógnitas x_3 y x_5 constantes e iguales a 1 y a 0, respectivamente. Explicar este hecho en términos de la dependencia lineal y de la independencia lineal de las columnas de la matriz ampliada del sistema.

4.5.32. ¿Pueden las fórmulas

$$\begin{aligned}x_1&=\ x_5+2x_6+\ 3x_7+\ 4x_8,\\ x_2&=\ 2x_5+3x_6+\ \ x_7+\ 2x_8,\\ x_3&=\ x_5+\ x_6+\ \ x_7-\ \ x_8,\\ x_4&=\ x_5\qquad -\ 2x_7-\ 6x_8\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}x_5&=\ 21x_1-6x_2-26x_3+17x_4,\\ x_6&=-17x_1+5x_2+20x_3-13x_4,\\ x_7&=\ -x_1\qquad +\ 2x_3-\ \ x_4,\\ x_8&=\ 4x_1-\ x_2-\ 5x_3+\ 3x_4\end{aligned}\tag{4.5.3}$$

describir la solución general de un mismo sistema de ecuaciones lineales de 8 incógnitas?

4.5.33. Reemplazar en las fórmulas (4.5.3) del problema 4.5.32 la primera relación por

$$x_5=22x_1-6x_2-26x_3+17x_4$$

y responder de nuevo a la pregunta del problema.

4.5.34. Demostrar que el conjunto de polinomios $f(t)$ de grado $\leqslant n$ que satisfacen las condiciones $f(a_1)=b_1,\ f(a_2)=b_2,\ \ldots$ $\ldots,\ f(a_k)=b_k$ (donde $k\leqslant n+1$ y $a_1,\ \ldots,\ a_k,\ b_1,\ \ldots,\ b_k$ son números arbitrarios y, además, todos los a_i, $1\leqslant i\leqslant k$ son distintos) no es vacío y es un plano. Determinar la dimensión de este plano.

4.5.35. Hallar tres polinomios $f(t)$ linealmente independientes de grado $\leqslant 5$ que satisfacen las condiciones $f(0)=1,\ f(1)=0,$ $f(2)=-5,\ f(3)=-20$

4.5.36*. Verificar si el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -2, \\ 8x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 9x_4 &= 3, \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 7 \end{aligned}$$

es compatible y hallar la solución normal de este sistema.

4.5.37. Demostrar que para que un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales, en el cual el número de ecuaciones es igual al de incógnitas, sea compatible es suficiente que el sistema homogéneo reducido tenga una solución única.

4.5.38. En el sistema compuesto de n ecuaciones con n incógnitas las columnas $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de la matriz de coeficientes forman un sistema ortonormalizado. Demostrar que este sistema está definido y su solución puede calcularse mediante las fórmulas

$$x_i = (b, q_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aquí b es un vector de dimensión n compuesto de los segundos miembros del sistema y el producto escalar se calcula por medio de la regla usual del espacio aritmético.

4.5.39. Demostrar que la afirmación del problema 4.5.38 también es válida para un sistema compatible cuyo número de ecuaciones no es igual al de incógnitas (se conserva la condición de columnas ortonormalizadas).

4.5.40. Utilizando el resultado del problema 4.5.38 resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 &= p, \\ -bx_1 + ax_2 + dx_3 - cx_4 &= q, \\ -cx_1 - dx_2 + ax_3 + bx_4 &= r, \\ -dx_1 + cx_2 - bx_3 + ax_4 &= s \end{aligned}$$

suponiendo que $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$.

4.5.41. Deducir del resultado del problema 4.5.34 que si los valores de dos polinomios $f(t)$ y $g(t)$ de grado $\leqslant n$ coinciden para más de n valores distintos del argumento, entonces estos polinomios son iguales (es decir, coinciden los coeficientes de un mismo índice de los polinomios). Deducir que la definición de igualdad de polinomios que hemos adoptado corresponde a su igualdad como funciones (es decir, a la coincidencia de valores para todos los valores de la incógnita).

4.5.42. Hallar el polinomio $f(t)$ de tercer grado para el cual $f(1) = -2$, $f(2) = -4$, $f(3) = -2$, $f(4) = 10$.

4.5.43. Hallar el polinomio $f(t)$ de grado $\leqslant 4$ para el cual $f(-2) = 10$, $f(1) = 4$, $f(-3) = 60$, $f(2) = -10$, $f(-1) = -4$.

4.5.44*. Demostrar que el polinomio $f(t)$ de grado $\leqslant 2k$ que satisface las condiciones $f(a_i) = f(-a_i)$, $i = 1, \ldots, k$, donde $a_1^2, \ldots, a_k^2$ son números distintos no iguales a cero, es obligatoriamente par, es decir, es válida la igualdad $f(-t) = f(t)$.

4.5.45. Demostrar que el polinomio $f(t)$ de grado $\leqslant 2k-1$ que satisface las condiciones $f(a_i)=-f(-a_i)$, $i=1,\ldots,k$, donde $a_1^2,\ldots,a_k^2$ son números distintos y no iguales a cero, es obligatoriamente impar, es decir, es válida la igualdad $f(-t)=-f(t)$.

4.5.46. Demostrar que cualesquiera que sean los números a, b_0, $b_1,\ldots,b_n$ existe un polinomio $f(t)$, y uno solo, de grado $\leqslant n$ tal que $f(a)=b_0$, $f'(a)=b_1,\ldots,f^{(n)}(a)=b_n$.

4.5.47. Hallar el polinomio $f(t)$ de grado $\leqslant 4$ para el cual $f(2)=5$, $f'(2)=19$, $f^{(2)}(2)=40$, $f^{(3)}(2)=48$, $f^{(4)}(2)=24$.

4.5.48*. Demostrar que cualesquiera que sean los números a_1, a_2, b_0, $b_1,\ldots,b_{n-1}$, c_0 $(a_1\neq a_2)$ existe un polinomio $f(t)$, y un solo, de grado $\leqslant n$ tal que $f(a_1)=b_0$, $f'(a_1)=b_1,\ldots,f^{n-1}(a_1)=b_{n-1}$, $f(a_2)=c_0$.

4.5.49. Hallar el polinomio $f(t)$ de grado $\leqslant 4$ para el cual $f(1)=-3$, $f'(1)=-3$, $f^{(2)}(1)=12$, $f^{(3)}(1)=42$, $f(-1)=3$.

4.5.50*. Demostrar que cualesquiera que sean los números a_1, a_2, b_0, $b_1,\ldots,b_k$, c_0, $c_1,\ldots,c_l$ $(a_1\neq a_2;\quad k+l=n-1)$, existe un polinomio, y uno solo, de grado $\leqslant n$ que satisface las condiciones $f(a_1)=b_0$, $f'(a_1)=b_1,\ldots,f^{(k)}(a_1)=b_k$, $f(a_2)=c_0$, $f'(a_2)=c_1,\ldots,f^{(l)}(a_2)=c_l$.

4.5.51. Hallar el polinomio $f(t)$ de grado $\leqslant 5$ para el cual $f(1)=-2$, $f'(1)=-7$, $f^{(2)}(1)=-14$, $f^{(3)}(1)=24$, $f(2)=-4$, $f'(2)=25$.

4.5.52. Los segundos miembros b_i de un cierto sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas son funciones derivables de la variable t; los coeficientes a_{ij} de incógnitas son números constantes. Demostrar que los componentes $x_1,\ldots,x_n$ de la solución son también funciones derivables de t; además,

$$x_i'(t)=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1'(t) & \ldots & a_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & \ldots & b_n'(t) & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}},\quad i=1,\ldots,n.$$

4.5.53*. Utilizando las fórmulas de Cramer deducir para la n-ésima función derivable

$$f(t)=\frac{g(t)}{h(t)}$$

la relación

$$f^{(n)}(t)=\frac{1}{h^{(n+1)}(t)}\begin{vmatrix} h(t) & 0 & 0 & \ldots & g(t)\\ h'(t) & h(t) & 0 & \ldots & g'(t)\\ h^{(2)}(t) & 2h'(t) & h(t) & \ldots & g^{(2)}(t)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ h^{(n)}(t) & C_n^1h^{(n-1)}(t) & C_n^2h^{(n-2)}(t) & \ldots & g^{(n)}(t)\end{vmatrix}.$$

4.5.54. Hallar el valor de la quinta derivada de la función

$$f(t)=\frac{(t-1)^5}{37t^6-61t^5+13t^3-74t+25}$$

para $t=1$.

4.5.55. Demostrar que las soluciones $x_1, \ldots, x_k$ de ciertos sistemas de ecuaciones lineales de una misma matriz de coeficientes para las incógnitas y los segundos miembros $b_1, \ldots, b_k$, respectivamente, son linealmente dependientes si, y sólo si, los segundos miembros son dependientes.

Capítulo 5

OPERADORES LINEALES Y MATRICES

§ 5.0. Terminología y generalidades

Supongamos que están dados dos espacios lineales X e Y y los dos son reales o complejos. Llámase *operador lineal* A de X en Y a la correspondencia entre los elementos de estos espacios, que a todo vector $x \in X$ le asigna un vector bien definido $y \in Y$ llamado imagen del vector x y designado Ax, además,

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2,$$

cualesquiera que sean los vectores x_1 y x_2 y los números α y β. Como en adelante se examinan solamente operadores lineales a veces omitimos el término «lineal» en la denominación del operador.

El conjunto de todos los vectores Ax, $x \in X$ se llama *campo de valores* o *imagen* del operador A y se nota T_A. El conjunto de todos los vectores x tales que $Ax = 0$ se llama *núcleo* del operador A y se nota N_A. La imagen y el núcleo de un operador lineal son subespacios lineales (véase el § 5.1); en este caso la dimensión del subespacio T_A se nota r_A y se llama *rango* del operador A; la dimensión del subespacio N_A se designa n_A y se llama *defecto* del operador A.

Designemos por ω_{XY} el conjunto de los operadores lineales de X en Y. Se puede definir la estructura del espacio lineal sobre el conjunto ω_{XY}. A saber, adoptemos que

1. $(A + B)x = Ax + Bx$;

2. $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$;

aquí x es un vector arbitrario de X. Los operadores $A + B$ y λA definidos por estas relaciones se llaman respectivamente *suma de operadores* A y B y *producto de un operador* A *por un número* λ. El cero del espacio lineal ω_{XY} será el *operador nulo* de X en Y, es decir, el operador que a todo vector de X le hace corresponder el cero del espacio Y.

Supongamos que ahora $A \in \omega_{XY}$, $B \in \omega_{YZ}$. Llámase *producto de un operador* B *por un operador* A al operador $C = BA$ de X en Z definido por la relación

$$Cx = B(Ax).$$

Para que el producto BA tenga un sentido es necesario y suficiente que la imagen del operador A pertenezca al dominio de definición del operador B. Esta condición está de antemano cumplida si se examinan los operadores de ω_{XX}. Cualquiera que sea un tal operador A diremos que él actúa en el espacio X.

Para un operador A de ω_{XX} una potencia natural A^k puede ser definida como el producto de k operadores iguales a A. Para todo operador A consideramos por definición que

$$A^0 = E,$$

donde E es un operador *idéntico* u *operador unidad* (es decir, un operador que a todo $x \in X$ le hace corresponder este mismo vector x). Si

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k$$

es un polinomio arbitrario, el polinomio $f(A)$ del operador A se llama operador

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k.$$

El operador A que actúa en un espacio X de dimensión n se llama *no singular* si el defecto de este operador es igual a cero o el rango es igual a n, lo que es lo mismo. Para un operador A no singular existe un operador lineal B y uno solo tal que

$$AB = BA = E.$$

El operador B se llama *inverso* del operador A y se nota A^{-1}.

El operador inverso permite calcular las potencias negativas enteras de un operador A no singular. A saber, si k es un número natural se supone que

$$A^{-k} = (A^{-1})^k$$

o, lo que es lo mismo,

$$A^{-k} = (A^k)^{-1}.$$

Llámase *suma de matrices* A y B *de tipo* $m \times n$ a la matriz $C = A + B$ de tipo $m \times n$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Llámase *producto de una matriz* A de tipo $m \times n$ *por un número* λ a la matriz $D = \lambda A$ de tipo $m \times n$ tal que

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Una *matriz unidad* (véase el § 3.0), así como un operador idéntico se notan E. Si hace falta indicar explícitamente el orden n de una matriz unidad se valen de la notación E_n. Las matrices de la forma λE se llaman *escalares*.

Llámase *producto* BA de la matriz B de tipo $p \times m$ por la matriz A de tipo $m \times n$ a la matriz C de tipo $p \times n$ tal que

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}, \quad i=1, \ldots, p, \quad j=1, \ldots, n.$$

Para que el producto BA tenga un sentido es necesario y suficiente que el número de columnas de la matriz B sea igual al número de filas de la matriz A. Esta condición está cumplida de antemano si las dos matrices son matrices cuadradas de un mismo orden.

Para una matriz A *no singular* (es decir, para una matriz cuadrada cuyo determinante no es igual a cero; véase el § 3.0) existe una sola matriz inversa A^{-1} que satisface las igualdades

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Si se supone que $B = A^{-1}$, los elementos b_{ij} de la matriz B pueden ser calculados mediante las fórmulas

$$b_{ij}=\frac{A_{ji}}{\det A}\,; \tag{5.0.1}$$

A_{ji} es el cofactor (complemento algebraico) del elemento a_{ji}.

Si la matriz cuadrada C de orden $m \times n$ es el producto de dos matrices rectangulares A y B de tipos $n \times m$ y $m \times n$, respectivamente, y si $m \geqslant n$, para el determinante de la matriz C es válida la *fórmula de Binet-Cauchy*

$$\det C=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\ldots<k_n\leqslant m} A\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ k_1 & k_2 \ldots k_n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \ldots k_n \\ 1 & 2 \ldots n \end{pmatrix}. \tag{5.0.2}$$

En particular, si A y B son también cuadradas, entonces

$$\det AB = \det A \cdot \det B. \tag{5.0.3}$$

Sea A un operador de ω_{XY} y sean $e_1, \ldots, e_n$, $q_1, \ldots, q_m$ las bases fijadas del espacio X y del espacio Y, respectivamente. Descompongamos los vectores $Ae_1, \ldots, Ae_n$ por la base $q_1, \ldots, q_m$:

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + \ldots + a_{m1}q_m, \\ Ae_2 &= a_{12}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{m2}q_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ae_n &= a_{1n}q_1 + a_{2n}q_2 + \ldots + a_{mn}q_m. \end{aligned}$$

A partir de los coeficientes de estas descomposiciones construyamos una matriz de tipo $m \times n$:

$$A_{qe}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{5.0.4}$$

Dicen que A_{qe} es *una matriz del operador* A *en el par de bases* $e_1, \ldots, e_n$ y $q_1, \ldots, q_m$ o que en este par de bases A_{qe} *define el operador* A.

Llamaremos a una matriz $m \times 1$ *vector columna* de dimensión m y a una matriz $1 \times n$, *vector fila* de dimensión n. A cada vector $x \in X$ le asignaremos un vector columna x_e de dimensión n compuesto de las coordenadas de este vector en la base $e_1, \ldots, e_n$. De un modo análogo a todo vector $y \in Y$ le asignaremos un vector columna y_q de dimensión m compuesto de las coordenadas de este vector en la base $q_1, \ldots, q_m$. La relación entre las coordenadas del vector x y del vector $y = Ax$ puede ser escrita en una forma matricial

$$y_q = A_{qe}\, x_e. \tag{5.0.5}$$

Para describir un operador A de ω_{XX} es suficiente fijar una sola base: $e_1, \ldots, e_n$. En este caso los vectores $Ae_1, \ldots, Ae_n$ deben ser descompuestos por esta base. La matriz compuesta a partir de coeficientes de descomposición se nota A_e y se llama *matriz del operador* A en la *base* $e_1, \ldots, e_n$. Dicen también que A_e *define el operador* A *en* esta *base*. La fórmula (5.0.5) pasa a

$$y_e = A_e x_e. \tag{5.0.6}$$

Supongamos que en un espacio X están fijadas dos bases $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_n$. Descompongamos los vectores $f_1, \ldots, f_n$ por la base $e_1, \ldots, e_n$:

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{n1}e_n, \\ f_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Utilizando los coeficientes de estas descomposiciones construyamos la matriz

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{5.0.7}$$

La matriz P se llama *matriz de cambio de la base* $e_1, \ldots, e_n$ *a la base* $f_1, \ldots, f_n$. Si x_e y x_f son columnas de las coordenadas del vector x en las bases indicadas, entonces la relación entre estas columnas está dada por la igualdad

$$x_e = Px_f. \tag{5.0.8}$$

Con ayuda de la matriz de cambio se puede escribir también la relación entre las matrices A_e y A_f de un operador A que actúa en el espacio X:

$$A_f = P^{-1}A_eP. \tag{5.0.9}$$

Si $A \in \omega_{XY}$ y si en cada uno de los espacios X e Y están fijadas dos bases $e_1, \ldots, e_n; f_1, \ldots, f_n$ y $q_1, \ldots, q_m; t_1, \ldots, t_m$, respectivamente, entonces las matrices A_{qe} y A_{tf} están enlazadas por la relación

$$A_{tf} = Q^{-1} A_{qe} P, \tag{5.0.10}$$

donde P es la matriz de cambio de $e_1, \ldots, e_n$ a $f_1, \ldots, f_n$ y Q es la matriz de cambio de $q_1, \ldots, q_m$ a $t_1, \ldots, t_m$.

Si los elementos de un espacio aritmético se escriben con la forma de vectores columnas, la fórmula (5.0.5) permite identificar los operadores de R_n en R_m (o de C_n en C_m) con matrices $m \times n$ reales o complejas, respectivamente (para obtener más detalles véase el problema (5.6.7)). Teniendo en cuenta esta advertencia hablamos más adelante de la imagen de una matriz, de su núcleo, etc.

§ 5.1. Definición del operador lineal, imagen y núcleo de un operador

Presentación de los probemas del párrafo. Además de ejemplos de operadores en espacios lineales concretos damos un grupo de problemas relativos a la definición del operador lineal. En este caso prestamos atención principal a la forma en que un operador lineal interviene en las relaciones principales de un espacio lineal (tales como la dependencia lineal, la equivalencia de sistemas de vectores, la suma de subespacios, etc.).

En el final del párrafo examinamos las nociones importantes del núcleo y de la imagen de un operador lineal.

Determinar, si es lineal cada uno de operadores siguientes de un espacio euclídeo tridimensional de vectores geométricos. Todos los operadores se describen por su acción sobre un vector arbitrario x. En este caso a y b designan los vectores fijados del espacio, α es un número fijado.

5.1.1. $Ax = a$. 5.1.2. $Ax = x + a$. 5.1.3. $Ax = \alpha x$.
5.1.4. $Ax = (x, a)\, a$. 5.1.5. $Ax = (a, x)\, b$. 5.1.6. $Ax = (a, x)\, x$.
5.1.7. $Ax = [x, a]$. 5.1.8. $Ax = [a, [x, b]]$.

Verificar cuáles de las aplicaciones del espacio euclídeo tridimensional de vectores geométricos en un conjunto de números reales indicadas más abajo son operadores lineales. Todas las aplicaciones se describen por su acción sobre un vector arbitrario x; a y b son vectores fijados en el espacio, α es un número fijo.

5.1.9. $f(x) = \alpha$ 5.1.10. $f(x) = (x, a)$. 5.1.11. $f(x) = \cos(x, a)$.
5.1.12. $f(x) = (x, x)$. 5.1.13. $f(x) = ([a, x], b)$. 5.1.14. $f(x) = (x, [a, x])$.

Establecer cuáles de las transformaciones del espacio aritmético tridimensional que siguen a continuación son lineales. Cada transformación se describe por su acción sobre un vector arbitrario x; en este caso los componentes del vector imagen están dados como funciones de componentes del vector x.

5.1.15. $Ax = (x_1, x_2, x_3^2)$. 5.1.16. $Ax = (x_3, x_1, x_2)$. 5.1.17. $Ax = (x_3, x_1, x_2 - 1)$.

5.1.18. $Ax = (x_1 + 2x_2 - 3x_3,\ 3x_1 - x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3)$.

Hallar cuáles de las transformaciones siguientes del espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ de la variable real t son operadores lineales sobre este espacio. Cada transformación se describe por su acción sobre un polinomio arbitrario $f(t)$.

5.1.19. $Af(t) = f(-t)$. 5.1.20. $Af(t) = f(t+1)$.

5.1.21. $Af(t) = f(at + b)$, donde a y b son números fijados, además, $a \neq 0$.

5.1.22. $Af(t) = f'(t)$. En el texto que sigue este operador se llama *operador de derivación*.

5.1.23. $Af(t) = f^{(k)}(t)$. En el texto que sigue este operador se llama *operador de derivación k-múltipla*.

5.1.24. $Af(t) = f(t+1) - f(t)$.

5.1.25. $Af(t) = f(t+1) - g(t)$, donde $g(t)$ es un polinomio no nulo fijado.

5.1.26. $Af(t) = tf(t)$.

5.1.27. $Af(t) = f(t^2)$.

5.1.28. Mostrar que a) la transformación del problema 5.1.22 puede ser considerada como un operador lineal de M_n en M_{n-1}; b) la transformación del problema 5.1.26 es un operador lineal de M_n en M_{n+1}; c) la transformación del problema 5.1.27 es un operador lineal de M_n en M_{2n}.

5.1.29. El espacio lineal X es la suma directa de los subespacios L_1 y L_2. Demostrar que el operador P, que asigna el vector x_1 de esta descomposición a cada vector x del espacio X con la descomposición

$$x = x_1 + x_2,$$

donde $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, es un operador lineal. El operador P se llama operador *de proyección del espacio X sobre L_1 paralelamente a L_2*.

5.1.30. El espacio lineal X es la suma directa de los subespacios L_1 y L_2. Demostrar que el operador R que asigna el vector $y = x_1 - x_2$ a cada vector x del espacio X con la descomposición

$$x = x_1 + x_2,$$

donde $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, es un operador lineal. El operador R se llama *aplicación del espacio X en L_1 paralelamente a L_2*.

5.1.31. Aclarar el sentido geométrico de la aplicación ortogonal de un espacio euclídeo tridimensional en un subespacio bidimensional L.

5.1.32. Una base $e_1, \ldots, e_n$ está fijada en un espacio lineal X. Demostrar que la correspondencia, que asigna a cada vector x del espacio su i-ésima coordenada en esta base, será un operador lineal de X en un espacio de números reales o complejos. El operador lineal que aplica el espacio X en el campo numérico correspondiente se llama *funcional lineal sobre X*.

5.1.33. Demostrar que todo operador lineal que actúa en un espacio unidimensional se reduce a la multiplicación de todos los vectores del espacio por un número fijado para el operador dado.

5.1.34. Describir todos los operadores lineales del espacio R^+ (véase el problema 1.1.6).

5.1.35. Demostrar que todo operador lineal transforma un sistema de vectores linealmente dependiente en un sistema de vectores linealmente dependiente.

5.1.36. ¿Es correcta la afirmación: un sistema de vectores linealmente independiente se transforma por un operador lineal en un sistema linealmente independiente?

5.1.37. ¿Es correcta la afirmación: si los sistemas de vectores $x_1, \ldots, x_k$ e $y_1, \ldots, y_l$ son equivalentes, los sistemas de vectores $Ax_1, \ldots, Ax_k$ y $Ay_1, \ldots, Ay_l$ son equivalentes para todo operador lineal A?

5.1.38. Supongamos que $A \in \omega_{XY}$ y L es un subespacio arbitrario de un espacio X. El conjunto de vectores Ax, donde $x \in L$ se llama *imagen del subespacio* L y se nota AL. Demostrar que AL es un subespacio del espacio Y.

5.1.39. Demostrar que la dimensión del subespacio AL no sobrepasa la dimensión del subespacio L.

5.1.40. Sean L la suma de los subespacios L_1 y L_2, L_0, su intersección. ¿Es verdad que para todo operador lineal A:

a) $AL = AL_1 + AL_2$;

b) $AL_0 = AL_1 \cap AL_2$?

5.1.41. Dar un ejemplo de operador lineal tal que la fórmula del problema 5.1.40, b) no tenga lugar.

5.1.42. Mostrar que si se conocen las imágenes $Ae_1, \ldots, Ae_n$ de los vectores $e_1, \ldots, e_n$ que constituyen una base de un espacio X, la acción de un operador lineal A sobre un vector cualquiera del espacio X se define de un modo único.

5.1.43. Sean $e_1, \ldots, e_n$ una base de un espacio X e $y_1, \ldots, y_n$ un sistema arbitrario de vectores de un espacio Y. Demostrar que existe un operador A, y uno solo, de ω_{XY} tal que $Ae_i = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

5.1.44. Sean $x_1, \ldots, x_k$ un sistema arbitrario de vectores de un espacio X e $y_1, \ldots, y_k$ un sistema arbitrario de vectores de un espacio Y. ¿Es correcta la afirmación: existe un operador lineal A de ω_{XY} que transforma los vectores x_i en vectores y_i, $i = 1, \ldots, k$?

5.1.45. En los datos del problema 5.1.44 suponer además que el sistema de vectores $x_1, \ldots, x_k$ es linealmente independiente. ¿Es justa en este caso la afirmación del problema?

5.1.46. Una base $e_1, \ldots, e_n$ está fijada en un espacio X. Mostrar que la acción de una funcional lineal f sobre un vector arbitrario x del espacio puede ser determinada mediante la fórmula

$$f(x) = c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n, \qquad (5.1.1)$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las coordenadas del vector x; $c_1, \ldots, c_n$ son las imágenes de los vectores de base. Inversamente, la fórmula (5.1.1) define la funcional lineal sobre X para los números $c_1, \ldots, c_n$ cualesquiera.

5.1.47. Mostrar que la fórmula

$$\varphi f(t) = f(a_0)$$

define en el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ una funcional lineal φ. Aquí f es un polinomio arbitrario de M_n; a_0 es un número fijado. ¿Es justa la afirmación recíproca: toda funcional lineal φ de M_n puede ser dada de este modo eligiendo convenientemente el número a_0?

5.1.48. Sean L un subespacio de un espacio X y A un operador arbitrario de ω_{XY}. Mostrar que la acción del operador A sobre el subespacio L puede ser considerada como a) un operador lineal de L en Y; b) un operador lineal de L en AL.

5.1.49. Sean L un subespacio de un espacio X y A un operador lineal de L en un cierto espacio Y. Mostrar que existe un operador lineal de X en Y cuya acción sobre el subespacio L coincide con el operador A.

5.1.50. Construir en el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ dos operadores lineales distintos que coincidan sobre el subespacio M_{n-1} con el operador de derivación.

5.1.51. Supongamos que el espacio X es una suma directa de los subespacios $L_1, \ldots, L_k$. Mostrar que la acción de un operador lineal A sobre un vector cualquiera del espacio se define de un modo único si es conocida la acción de este operador sobre cada uno de los subespacios $L_1, \ldots, L_k$.

5.1.52. Sean A un operador lineal en un espacio lineal real R y C un espacio complejo obtenido de R por complexificación (véase el problema 2.5.13). Definamos el operador $\hat{A}$ en C del modo siguiente: para un vector arbitrario $z = x + iy$ de C, donde $x, y \in R$, suponemos

$$\hat{A}z = Ax + iAy.$$

Mostrar que el operador $\hat{A}$ es lineal.

¿Se puede obtener de este modo todo operador lineal del espacio C?

5.1.53. ¿Puede una funcional lineal tomar sobre un espacio lineal complejo solamente valores reales?

5.1.54. Mostrar que el núcleo N_A de un operador lineal arbitrario A de un ω_{XY} es un subespacio de un espacio X.

5.1.55. ¿Es verdad que todo subespacio de un espacio X es un núcleo de un cierto operador lineal de X en Y?

5.1.56. Según el problema 5.1.38 la imagen T_A de un operador lineal arbitrario A de ω_{XY} es un subespacio Y. ¿Es verdad que todo subespacio del espacio Y es una imagen de un cierto operador lineal de X en Y?

5.1.57. Demostrar que el conjunto de todas las preimágenes de un vector y de T_A es un plano del espacio X con un subespacio director N_A.

5.1.58*. Construir para un operador A de ω_{XY} la correspondencia biunívoca entre T_A y los planos del espacio X de la forma $P = x_0 + N_A$.

5.1.59. Según el problema 4.2.18, el conjunto M de todos los planos del espacio X de la forma $P = x_0 + N_A$ es un espacio lineal. Demostrar que la correspondencia entre los planos de M y los vectores de T_A construida en el problema 5.1.58 es un operador lineal (de M en T_A). Hallar el núcleo y el defecto de este operador.

5.1.60*. Demostrar que para todo operador A de ω_{XY} la suma del rango y del defecto es igual a la dimensión del espacio X.

5.1.61. Dar un ejemplo de operador lineal de ω_{XX} tal que el espacio X no sea una suma directa de la imagen y del núcleo de este operador.

5.1.62. Sea M un subespacio cualquiera complementario del núcleo N_A del operador A. Demostrar que:

a) todo sistema linealmente independiente de vectores de M se transforma por el operador A en un sistema linealmente independiente (compárese esta afirmación con el problema 5.1.36);

b) el subespacio M se aplica por el operador A de un modo biunívoco sobre su imagen T_A.

5.1.63. Demostrar que para dos subespacios cualesquiera N en un espacio X de dimensión n y T en un espacio Y, tales que $\dim N + \dim T = n$, existe un operador lineal A de ω_{XY} tal que su núcleo coincide con N y su imagen, con T.

5.1.64. Construir en el espacio M_n dos operadores lineales distintos, de una misma imagen y un mismo núcléo.

5.1.65. Sea A un operador de X en Y; el subespacio L verifica la inclusión $L \subset T_A$. Demostrar que un conjunto de vectores x de X cuyas imágenes pertenecen a L (llamado *preimagen completa del subespacio* L) es también un subespacio y su dimensión es igual a $\dim L + n_A$.

5.1.66. Hallar el defecto de una funcional lineal f sobre un espacio X de dimensión n.

5.1.67. Hallar el núcleo de cada una de funcionales lineales de un espacio euclídeo tridimensional $f_1(x) = (x, a)$ y $f_2(x) = ([a, x], b)$.

5.1.68. Hallar la imagen y el núcleo de un operador lineal en un espacio euclídeo tridimensional definido por la fórmula $Ax = [x, a]$.

5.1.69*. El mismo problema para el operador $Ax = [a, [x, b]]$.

Para las transformaciones lineales de un espacio aritmético tridimensional indicadas más abajo se pide determinar el defecto y el rango, así como construir las bases del núcleo y de la imagen. Cada transformación se describe por su acción sobre un vector arbitrario x; en este caso los componentes del vector Ax están dados como funciones de componentes del vector x.

5.1.70. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$.

5.1.71. $Ax = (2x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$.

5.1.72. $Ax = (-x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$.

5.1.73. Describir la imagen y el núcleo de un operador de derivación en un espacio M_n.

5.1.74. Examinar en el mismo espacio M_n el *operador en diferencias* A_h

$$A_h f(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

donde h es el número fijo diferente de cero. Hallar su imagen y su núcleo.

5.1.75. Examinar la aplicación siguiente del espacio M_n en un espacio aritmético:

$$f(t) \to (f(a_1), \ldots, f(a_k)),$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son números distintos. Hallar el defecto de este operador.

5.1.76. Hallar la imagen y el núcleo de un operador de proyección (véase el problema 5.1.29).

5.1.77. Demostrar que durante la complexificación de un espacio real R el rango y el defecto de un operador A de ω_{XY} se conservan pasando al operador $\mathring{A}$ (véase el problema 5.1.52).

§ 5.2. Operaciones lineales sobre operadores

Presentación de los problemas del párrafo. En el presente párrafo el conjunto ω_{XY} de todos los operadores lineales de X en Y se examina como un espacio lineal. Se presta atención especial a las cuestiones siguientes:

1. Dimensión del espacio ω_{XY}.
2. Ciertas clases de subespacios del espacio ω_{XY}. Aquí examinamos detalladamente cómo están ligadas las propiedades de dependencia lineal de los operadores de ω_{XY} con la posición mutua de las imágenes de estos operadores.
3. Rango de la suma de operadores, condiciones en las cuales éste es igual a la suma de rangos de los sumandos.

5.2.1. Demostrar que el conjunto ω_{XY} de todos los operadores lineales de X en Y es un espacio lineal respecto a las operaciones de adición de operadores y de multiplicación de un operador por un número.

5.2.2. Demostrar que el espacio de todos los operadores lineales que actúan en un espacio lineal unidimensional es también unidimensional.

5.2.3. El espacio lineal X^* de todas las funcionales que actúan en un espacio X se llama *conjugado con el espacio* X. Demostrar que el espacio conjugado X^* es isomorfo al espacio X.

5.2.4. Mostrar que todo subespacio L de un espacio X verifica las relaciones:

a) $(\lambda A)\, L = AL$ si $\lambda \neq 0$;

b) $(A + B)\, L \subset AL + BL$, donde A y B son operadores de ω_{XY}. Mostrar que en la relación b), como regla, la igualdad no existe.

5.2.5. Demostrar que los operadores no nulos A y B de ω_{XY} cuyas imágenes son distintas, son linealmente independientes.

5.2.6. Sean $q_1, \ldots, q_m$ una base de un espacio Y y x un vector no nulo de un espacio X. Demostrar que los operadores $B_1, \ldots, B_m$ tales que

$$B_j x = q_j, \quad j = 1, \ldots, m \tag{5.2.1}$$

son linealmente dependientes.

5.2.7*. Demostrar que para todo operador A de ω_{XY} existen operadores $B_1, \ldots, B_m$ tales que $A = B_1 + \ldots + B_m$ y además:

a) el rango de cada uno de los operadores B_i no sobrepasa la unidad;

b) la imagen de un vector no nulo B_i está tendido sobre el vector q_i, donde $q_1, \ldots, q_m$ es la base fijada del espacio Y.

5.2.8. Sean $e_1, \ldots, e_n$ una base de un espacio X e y, un vector no nulo de un espacio Y. Demostrar que los operadores $A_1, \ldots, A_n$ tales que

$$A_j e_k = \begin{cases} y, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases},$$

son linealmente independientes.

5.2.9. Demostrar que todo operador de rango 1 cuya imagen contiene el vector y es una combinación lineal de operadores $A_1, \ldots, A_n$ del problema precedente.

5.2.10*. Supongamos que en los espacios X e Y están fijadas las bases $e_1, \ldots, e_n$ y $q_1, \ldots q_m$, respectivamente. Aplicando los resultados de los problemas 5.2.7 y 5.2.9 demostrar que todo operador de ω_{XY} es una combinación lineal de los operadores $A_{11}, \ldots, A_{mn}$ que satisfacen las relaciones:

$$A_{ij} e_k = \begin{cases} q_i, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.2.2}$$

5.2.11. Utilizando los resultados de los problemas 5.2.6 y 5.2.8 mostrar que el sistema de operadores definidos por las relaciones (5.2.2) es linealmente independiente. Deducir de esto y del problema 5.2.10 la dimensión del espacio ω_{XY}.

5.2.12. ¿Será un subespacio lineal del espacio ω_{XY} el conjunto de todos los operadores lineales que tienen: a) la misma imagen T; b) el mismo núcleo N?

5.2.13. Mostrar que si T es un subespacio del espacio Y, el conjunto ω_{XT} de todos los operadores lineales que reflejan el espacio X en T es un subespacio del espacio ω_{XY}. Hallar la dimensión de este subespacio si $\dim X = n$, $\dim T = k$.

5.2.14. Mostrar que si N es un subespacio del espacio X, el conjunto K_N de todos los operadores lineales de ω_{XY} cuyo núcleo contiene el subespacio N, es un subespacio del espacio ω_{XY}. Hallar la dimensión de este subespacio si $\dim X = n$, $\dim N = l$, $\dim Y = m$.

5.2.15*. Sean L_1 y L_2 subespacios arbitrarios de un espacio Y, $L = L_1 + L_2$, $L_0 = L_1 \cap L_2$. Demostrar las relaciones siguientes:

a) $\omega_{XL} = \omega_{XL_1} + \omega_{XL_2}$;

b) $\omega_{XL_0} = \omega_{XL_1} \cap \omega_{XL_2}$.

5.2.16. Supongamos que el espacio Y está descompuesto en una suma directa de los subespacios $L_1, L_2, \ldots, L_k$. Demostrar que

$$\omega_{XY} = \omega_{XL_1} \dot{+} \omega_{XL_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \omega_{XL_k}.$$

5.2.17. Demostrar que el rango de la suma de los operadores A y B de ω_{XY} no sobrepasa la suma de los rangos de estos operadores.

5.2.18. Sean los operadores A y B de ω_{XX} tales que

$$X = T_A \dot{+} T_B = N_A \dot{+} N_B.$$

Demostrar que el rango del operador $A + B$ es igual a la suma de los rangos de los operadores A y B.

5.2.19. Deducir del problema 5.2.17 la desigualdad

$$r_{A+B} \geqslant | r_A - r_B |.$$

5.2.20*. Demostrar que todo operador A de ω_{XY} de rango r puede ser representado bajo la forma de una suma de r operadores de rango 1 pero no puede ser representado en forma de la suma de menos de r de semejantes operadores.

5.2.21*. Hallar la condición necesaria y suficiente para que la suma de dos operadores A y B de rango 1 sea un operador de rango $\leqslant 1$.

5.2.22*. Un espacio X es de dimensión n (>1). Demostrar que en un espacio ω_{XX} todo subespacio L de dimensión $n + 1$ contiene por lo menos un operador de rango >1.

5.2.23. Supongamos que los operadores A y B de ω_{XY} son tales que para todo vector x de X los vectores Ax y Bx son colineales. ¿Significa esto que los operadores A y B son también colineales?

5.2.24*. Suponer en los datos del problema 5.2.23 que el operador B es de rango n (donde $n = \dim X$). ¿Son colineales en este caso los operadores A y B?

5.2.25. Demostrar que los operadores A y B de rango 1 de la misma imagen T y del mismo núcleo N son colineales.

5.2.26. Demostrar que para todo operador de proyección P el operador $E - P$ es también un operador de proyección. Hallar la relación que une el núcleo y la imagen de operador $E - P$ con el núcleo y con la imagen de P.

5.2.27. Demostrar que para los operadores P y R que efectúan la proyección y la aplicación, respectivamente, del espacio X en L_1

paralelamente a L_2 es justa la relación: $E + R = 2P$.

5.2.28. Mostrar que en una complexificación del espacio real R:

a) al operador $A + B$ le corresponde el operador $\hat{A} + \hat{B}$ (véase 5.1.52);

b) al operador αA le corresponde el operador $\alpha\hat{A}$; α es un número real.

§ 5.3. Multiplicación de operadores

Presentación de los problemas del párrafo. En el presente párrafo se examinan principalmente los problemas siguientes relacionados con la multiplicación de operadores:

1. Imagen y núcleo del producto de operadores.
2. Polinomios de un operador.
3. Permutabilidad de operadores.
4. Operadores no singulares.

En el texto que sigue hablando de los productos de operadores que actúan, a lo mejor, en espacios distintos suponemos que estos productos tienen sentido.

5.3.1. Demostrar que para el producto BA de los operadores A y B son justas las desigualdades:

a) $r_{BA} \leqslant \min(r_A, r_B)$;

b) $n_{BA} \geqslant n_A$.

Si los operadores A y B actúan en el mismo espacio, entonces

c) $n_{BA} \geqslant n_B$.

5.3.2. Demostrar que para el producto BA de los operadores A y B se efectúan las relaciones siguientes:

a) $r_{BA} = r_A - \dim(T_A \cap N_B)$;

b) $n_{BA} = n_A + \dim(T_A \cap N_B)$.

Notar que de b) se deduce la desigualdad siguiente:

$$n_{BA} \leqslant n_A + n_B.$$

5.3.3*. Demostrar la *desigualdad de Frobenius*:

$$r_{BA} + r_{AC} \leqslant r_A + r_{BAC}.$$

5.3.4. Sean A y B los operadores de ω_{XX} y $BA = 0$. ¿Se deduce de esto que $AB = 0$?

5.3.5. Dar un ejemplo de los operadores A y B tales que $AB = BA = 0$.

5.3.6. Demostrar que un conjunto de todos los operadores lineales B de ω_{XX}, los cuales, cuando el operador A está fijado, satisfacen la condición $AB = 0$, es un subespacio del espacio ω_{XX}. Hallar la dimensión de este subespacio si $\dim X = n$ y el rango del operador A es igual a r.

5.3.7. La misma pregunta para el conjunto de operadores C de ω_{XX} que satisfacen la condición $CA = 0$ cuando el operador A de rango r está fijado.

5.3.8. Sean X un espacio de dimensión n y A un operador de rango r de ω_{XX}. Construyamos con ayuda del operador A la transformación del espacio ω_{XX} tal que a cada operador B le asigna un operador AB. Demostrar que esta transformación es lineal. Hallar su rango y su defecto.

5.3.9. Sea A un operador arbitrario de ω_{XX} y supongamos que N_i y T_i designan respectivamente el núcleo y la imagen de un operador A^i. Demostrar que:

a) $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots$

b) $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \ldots$

5.3.10*. Demostrar que si en una sucesión de subespacios N_1, N_2, N_3, ... (véase el problema 5.3.9) para un cierto q por primera vez $N_q = N_{q+1}$, entonces $N_q = N_{q+k}$ para $k \geqslant 1$.

5.3.11. Un operador A de ω_{XX} se llama *nilpotente* si existe un número natural q tal que $A^q = 0$. El menor de tales números q se llama *índice de nilpotencia* de A. Demostrar que el índice de todo operador nilpotente que actúa en un espacio de dimensión n no sobrepasa n.

5.3.12. Mostrar que en el espacio M_n el operador de derivación de polinomios es nilpotente. Hallar su índice de nilpotencia.

5.3.13. Sean A un operador nilpotente de índice q y x, un vector tal que $A^{q-1}x \neq 0$. Demostrar que el sistema de vectores x, Ax, A^2x, ..., $A^{q-1}x$ es linealmente independiente.

5.3.14*. Demostrar que para todo operador A de ω_{XX} cuyo rango es igual a 1 existe un número α tal que $A^2 = \alpha A$.

5.3.15. Mostrar que todo operador de reflexión R verifica la relación $R^2 = E$.

5.3.16. Mostrar que todo operador de proyección P satisface la relación $P^2 = P$.

5.3.17*. Demostrar que inversamente todo operador P que satisface la condición $P^2 = P$ es un operador de proyección.

5.3.18. Mostrar que de las condiciones $P_1 + P_2 = E$, $P_1P_2 = 0$ se deduce que:

a) P_1, P_2 son operadores de proyección;

b) $P_2P_1 = 0$.

5.3.19. Demostrar que en el espacio M_n un operador A que asigna a todo polinomio $f(t)$ el polinomio $g(t) = f(t+1)$, es un polinomio del operador de derivación.

5.3.20. Dicen que $f(t)$ ($f(t) \neq 0$) es el *polinomio que anula el operador A* si $f(A) = 0$. Demostrar que para todo operador lineal A que actúa en un espacio de dimensión n existe un polinomio anulador de grado $\leqslant n^2$.

5.3.21. Sea $m(t)$ un polinomio de grado mínimo entre todos los polinomios que anulan el operador A. Demostrar que $m(t)$ es un divisor de cualquier otro polinomio que anula el operador A.

5.3.22. Demostrar que el polinomio $m(t)$ del problema 5.3.21 está definido por el operador A unívocamente y con una exactitud de la multiplicación por un número no nulo. El polinomio $m(t)$, normado por la condición de que su coeficiente mayor sea igual a uno, se llama *polinomio mínimo* del operador A.

5.2.23*. Hallar el polinomio mínimo

a) de un operador de proyección;

b) de un operador de reflexión;

c) de un operador nilpotente de índice q.

5.3.24. Mostrar que para un operador de rango 1 el polinomio mínimo es de grado 2.

5.3.25. Los operadores A y B de ω_{XX} se llaman *conmutables* si $AB = BA$. Sean A un operador que conmuta con B y B un operador que conmuta con C. ¿Se puede deducir que A conmuta con C?

5.3.26. Mostrar que dos polinomios cualesquiera de un operador A son conmutables.

5.3.27. Mostrar que si los operadores A y B son conmutables, entonces cualesquiera polinomios $f(A)$ y $g(B)$ de estos operadores son conmutables.

5.3.28. Demostrar que para los operadores conmutables A y B

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} A^{n-2} B^2 + \ldots + B^n.$$

5.3.29. Demostrar que los operadores de rango 1 de un mismo núcleo y una misma imagen son conmutables.

5.3.30. Los operadores A y B son conmutables. Demostrar que $BN_A \subset N_A$.

5.3.31*. Demostrar que si los operadores de proyección P_1 y P_2 son conmutables, su producto es igualmente un operador de proyección. Con esto:

a) $T_{P_1P_2} = T_{P_1} \cap T_{P_2}$;

b) $N_{P_1P_2} = N_{P_1} + N_{P_2}$.

5.3.32*. Demostrar que la suma de los operadores de proyección P_1 y P_2 es un operador de proyección si, y solamente si, $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$. Con esto:

a) $T_{P_1+P_2} = T_{P_1} \dot{+} T_{P_2}$;

b) $N_{P_1+P_2} = N_{P_1} \cap N_{P_2}$.

5.3.33*. Demostrar que si un operador A conmuta con cada operador de ω_{XX}, entonces $AL \subset L$ para todo subespacio L de X. En particular, para todo vector x de X los vectores x y Ax son colineales.

5.3.34. Aplicando el resultado del problema 5.3.33 demostrar el *lema de Schur*: si un operador A conmuta con cada operador de ω_{XX}, entonces éste es un operador *escalar*, es decir, $A = \alpha E$ para un cierto número α.

5.3.35. Mostrar que si A es un operador no singular, para todo subespacio L tiene lugar la igualdad $\dim L = \dim AL$.

5.3.36. Un espacio X es una suma directa de subespacios $L_1, \ldots, L_k$. Sea A_i un operador no singular dado sobre el subespacio L_i, $i = 1, \ldots, k$. Mostrar que el operador A de ω_{XX} que coincide sobre cada uno de subespacios L_i con el operador correspondiente A_i es un operador no singular.

5.3.37. Verificar que el operador de derivación:

a) es singular en el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$;

b) es no singular sobre un espacio lineal bidimensional tendido sobre las funciones $f_1 = \cos t$ y $f_2 = \operatorname{sen} t$ (con las definiciones usuales de la adición de funciones y de la multiplicación de una función por un número).

5.3.38. Hallar el operador inverso del operador de derivación del problema 5.3.37, *b*).

5.3.39. Hallar el operador inverso de un operador de reflexión R.

5.3.40. Mostrar que para un operador A no singular y para todo número α diferente de cero

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}.$$

5.3.41*. Demostrar que si A es un operador de rango 1, por lo menos uno de los operadores $E + A$ y $E - A$ es no singular.

5.3.42. Demostrar que si un operador A es no singular, para todo operador B

$$r_{AB} = r_{BA} = r_B.$$

5.3.43. Demostrar que el producto de operadores A y B es un operador no singular si, y solamente si, cada uno de los operadores A y B es no singular. Con esto

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

5.3.44. Demostrar que un operador A no singular y un operador B arbitrario verifican la identidad

$$(A+B)\,A^{-1}\,(A-B) = (A-B)\,A^{-1}\,(A+B).$$

5.3.45. Sea A un operador nilpotente de índice q. Demostrar que el operador $E - A$ es no singular y que

$$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^{q-1}.$$

5.3.46. Los operadores A y B están ligados por la relación $AB + A + E = 0$. Demostrar que A es un operador no singular y además $A^{-1} = -E - B$.

5.3.47. Demostrar que si el término independiente del polinomio $f(t)$ que anula el operador A, es diferente de cero, A es también no singular.

5.3.48. Demostrar que el término independiente del polinomio mínimo $m(t)$ que anula un operador no singular, es diferente de cero.

5.3.49. Demostrar que para un operador no singular A que actúa en un espacio de dimensión n, el operador inverso A^{-1} está representado por un polinomio de A de grado no mayor de $n^2 - 1$.

5.3.50. Mostrar que dos polinomios cualesquiera $f(A)$ y $g(A^{-1})$, donde A es un operador no singular, son conmutables.

5.3.51. Sea A un operador de ω_{XY}, además existe un operador B de ω_{YX} tal que $BA = E_X$ (operador idéntico del espacio X). ¿Significa esto que $AB = E_Y$?

5.3.52. Sean X la cápsula lineal de polinomios $t, t^2, \ldots, t^n$ e Y el espacio de polinomios de grado $\leqslant n-1$. Examinar la derivación de polinomios como un operador A de X en Y, así como la integración (es decir, una transformación que a cada polinomio le asigna su primitiva) como un operador B de Y en X. Mostrar que

$$BA = E_X, \quad AB = E_Y.$$

5.3.53. Supongamos que en los datos del problema 5.3.51 $\dim Y > \dim X$. Demostrar que el operador AB será un operador de proyección en el espacio Y.

5.3.54. Mostrar que durante la complexificación del espacio real R:

a) a un operador AB le corresponde el operador $\hat{A}\hat{B}$;

b) a un operador no singular A le corresponde el operador no singular $\hat{A}$;

c) si A es no singular, al operador inverso A^{-1} le corresponde el operador inverso $\hat{A}^{-1}$.

§ 5.4. Operaciones sobre matrices

Presentación de los problemas del párrafo. En el presente párrafo examinamos diversas propiedades de las operaciones definidas sobre matrices y, ante todo, ciertamente, de la operación de multiplicación. Entre los problemas que tratamos aquí centramos la atención principal en lo siguiente:

1. Propiedades formales de la operación de multiplicación: dimensiones de factores y del producto, número de operaciones aritméticas elementales, etc.
2. Matrices de transformaciones elementales.
3. Conmutatividad de las matrices.
4. Clases de matrices cerradas respecto a la multiplicación.
5. Rango del producto de matrices.
6. Operaciones sobre las matrices divididas en células: matrices celulares.
7. Producto de Kronecker de las matrices.

Hallar los productos AB y BA, donde

5.4.1. $A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}.$

5.4.2. $A = \begin{Vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$

Hallar los productos AB, donde

5.4.3. $A = \begin{Vmatrix} 83 & -29 & -52 & 46 \\ -15 & 97 & 78 & -112 \\ 38 & -4 & 69 & 85 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$

5.4.4. $A=\|0\quad 1\quad 0\|$, $B=\begin{Vmatrix} 83 & -29 & -52 & 46 \\ -15 & 97 & 78 & -112 \\ 38 & -4 & 69 & 85 \end{Vmatrix}$.

5.4.5. $A=\begin{Vmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.6. $A=\|1\quad 1\quad 1\quad 1\|$, $B=\begin{Vmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{Vmatrix}$.

5.4.7. $A=\begin{Vmatrix} 923 & 2115 & 0 & 0 \\ 1097 & 518 & 0 & 0 \\ 652 & 769 & 0 & 0 \\ 841 & 134 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 476 & 372 & 1505 & 882 \\ 549 & 795 & 999 & 400 \end{Vmatrix}$.

5.4.8*. Calcular el producto ABC, donde

$$A=\begin{Vmatrix} 991 & 992 & 993 \\ 994 & 995 & 996 \\ 997 & 998 & 999 \\ 1000 & 1001 & 1002 \end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 24 & -12 & -4 \end{Vmatrix},$$

$$C=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5.4.9*. Calcular el producto $ABCD$, donde

$$A=\begin{Vmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{Vmatrix},\quad B=\|213\quad 510\quad 128\|,\quad C=\begin{Vmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix},$$

$$D=\|1\quad -2\quad 1\|.$$

5.4.10. Mostrar que introduciendo las matrices

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},\qquad b=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix},\qquad x=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$$

el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned}$$

puede ser escrito en forma de una ecuación matricial $Ax=b$.

5.4.11. Mostrar que inversamente la solución de una ecuación matricial $AX = B$, donde A y B son las matrices dadas de tipo $m \times n$ y $m \times p$, respectivamente, se reduce a la solución de p sistemas de ecuaciones lineales de una misma matriz de los coeficientes A y de distintos segundos miembros.

Resolver las ecuaciones matriciales:

5.4.12. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{Vmatrix}$.

5.4.13. $X \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.14. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} X - X \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

5.4.15. $X - \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} X \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.4.16. $X \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{Vmatrix}$.

5.4.17. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.18. Mostrar que si dos productos AB y BA tienen sentido y A es una matriz $m \times n$, entonces B es una matriz $n \times m$.

5.4.19. Calcular el número de operaciones de multiplicación y de adición necesarias al multiplicar una matriz A de tipo $m \times n$ por una matriz B de tipo $n \times p$.

5.4.20. Sean A, B, C matrices de tipo $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$, respectivamente. Calcular el número de operaciones de multiplicación necesarias para obtener el producto ABC. Notar que esta cantidad de operaciones es función de la disposición de los paréntesis en el producto ABC.

5.4.21. Verificar si para las matrices cuadradas A y B de orden 2 la sucesión de cálculos de la matriz $C = AB$, indicada más abajo, impone 7 operaciones de multiplicación (mientras que para construir AB con ayuda del algoritmo usual hacen falta 8 multiplicaciones):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}), \\
\alpha_2 &= (a_{21} + a_{22})\, b_{11}, \\
\alpha_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}), \\
\alpha_4 &= a_{22}(b_{21} - b_{11}), \\
\alpha_5 &= (a_{11} + a_{12})\, b_{22},
\end{aligned}$$

$$\alpha_6 = (a_{21} - a_{11})(b_{11} + b_{12}),$$
$$\alpha_7 = (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}),$$
$$c_{11} = \alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_7,$$
$$c_{12} = \alpha_3 + \alpha_5,$$
$$c_{21} = \alpha_2 + \alpha_4,$$
$$c_{22} = \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_6.$$

Este algoritmo fue propuesto por Strassen.

5.4.22. Llámese *traza* de una matriz cuadrada la suma de elementos de su diagonal principal. La traza de una matriz A se nota $\operatorname{tr} A$.

Demostrar que se observan las propiedades siguientes:

a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$;

b) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$;

c) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Si los dos productos AB y BA tienen sentido, la última igualdad también vale para A y B rectangulares.

5.4.23. Las matrices A y B de tipo $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, poseen la propiedad que consiste en que para cada una de ellas las sumas de los elementos de una fila son las mismas para todas las filas e iguales a r para la matriz A y a s para la matriz B. Demostrar que el producto AB posee la misma propiedad; además, las sumas correspondientes de la matriz AB son iguales a rs. Formular y demostrar una confirmación análoga para las columnas.

5.4.24. Mostrar que las transformaciones elementales de las filas de una matriz A (véase el problema 4.1.26) son equivalentes a la multiplicación de esta matriz a la izquierda por matrices de forma especial llamadas *matrices de transformaciones elementales*:

a) a la permutación de la i-ésima y la j-ésima líneas le corresponde a multiplicación por la matriz P_{ij}

$$P_{ij} = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{matrix} \right\|$$

(los elementos no indicados de la diagonal principal son iguales a 1, los demás elementos, excepto los elementos (i, j) y (j, i) son iguales a cero);

b) a la multiplicación de la i-ésima fila por el número α le corresponde la multiplicación por la matriz diagonal D_i

$$D_i = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{Vmatrix};$$

c) la adición a la i-ésima fila del producto de la j-ésima fila por el número α equivale a la multiplicación por la matriz L_{ij}

$$L_{ij} = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{Vmatrix}$$

(todos los elementos fuera de la diagonal de esta matriz excepto el elemento (i, j) son iguales a cero).

Formular y demostrar proposiciones análogas para las transformaciones elementales de las columnas de la matriz A.

5.4.25. Determinar cómo cambia una matriz A al multiplicarla a la izquierda:

a) por la matriz N_i

$$N_i = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \alpha_{i+1,\,i} & \ddots & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \alpha_{ni} & & & 1 \end{Vmatrix};$$

b) por la matriz S_i

$$S_i = \begin{Vmatrix} 1 & & & \alpha_{1i} & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & \alpha_{i-1,i} & & \\ & & & 1 & & \\ & & & \alpha_{i+1,i} & & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & \alpha_{ni} & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Los elementos fuera de la diagonal en las dos matrices no indicados son iguales a cero.

Una tarea análoga para multiplicar la matriz A a la derecha por las matrices S_i y N_i.

5.4.26. Demostrar que: a) la matriz N_i del problema precedente es el producto de las matrices L_{ki}, $k = i + 1, \ldots, n$ (véase el problema 5.4.24, c)); b) la matriz S_i es el producto de las matrices L_{ki}, $k = 1, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n$; c) los elementos no triviales de los factores L_{ki} coinciden con los respectivos elementos no triviales de la matriz N_i (S_i); d) el orden de factores en el producto en ambos casos puede ser arbitrario.

5.4.27. Demostrar que el producto N_iN_j de las matrices N_i y N_j tiene la forma siguiente para $i < j$:

$$N_iN_j = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \alpha_{i+1,i} & \ddots & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & \alpha_{j,i} & & 1 & & \\ & & \alpha_{j+1,i} & & \alpha_{j+1,j} & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\ & & \alpha_{ni} & & \alpha_{nj} & & & 1 \end{Vmatrix}$$

(los elementos fuera de la diagonal son iguales a cero).

5.4.28*. Llámase *matriz de permutaciones* P a una matriz cuadrada, en la cual cada fila y cada columna tiene un solo elemento diferente de cero e igual a 1. Demostrar que toda matriz de permutaciones es el producto de las matrices P_{ij} (véase el problema 5.4.24, *a*)).

Calcular las expresiones (si el orden de la matriz no es explícito, éste es igual a n):

5.4.29. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^k$.

5.4.30. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^k$.

5.4.31. $\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & O \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \\ O & & & & \lambda_n \end{Vmatrix}^k$ (todos los elementos fuera de la diagonal son iguales a cero).

5.4.32. $\begin{Vmatrix} O & & & & \lambda_1 \\ & & & \lambda_2 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & & & \\ \lambda_n & & & & O \end{Vmatrix}^k$ 5.4.33. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{Vmatrix}^k$

(todos los elementos, excepto los elementos que están en $(i, i + 1)$, $i = 1, \ldots, n - 1$, son iguales a cero).

5.4.34. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & & & 0 \end{Vmatrix}^k$

(todos los elementos de la matriz, excepto los elementos que están en $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $\ldots$, $(n - 1, n)$, $(n, 1)$ son iguales a cero).

5.4.35*. Demostrar que para una matriz de orden $n \times n$

$$J_\lambda = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{Vmatrix}$$

la matriz J_λ^k tiene la forma $(k \geqslant n)$:

$$J_\lambda^k = \begin{Vmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \ldots & C_k^{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \ldots & C_k^{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ & & \lambda^k & \ldots & C_k^{n-3}\lambda^{k-n+3} \\ & & & \ddots & \vdots \\ O & & & & \lambda^k \end{Vmatrix}.$$

La matriz J_λ se llama *célula de Jordan que corresponde al número* λ.

5.4.36. Sea D una matriz diagonal de orden n cuyos todos los elementos diagonales son distintos. Demostrar que:

a) todo polinomio de D es una matriz diagonal;

b) toda matriz diagonal puede ser representada como un polinomio $f(D)$ de D;

c) se puede elegir un polinomio $f(t)$ cuyo grado no sobrepasa $n-1$.

5.4.37. Demostrar que para toda matriz diagonal de orden n el grado del polinomio mínimo no sobrepasa n. El polinomio mínimo de una matriz se define de un modo análogo al polinomio mínimo de un operador. Para la definición de este polinomio véase el problema 5.3.20.

5.4.38. Mostrar que el polinomio mínimo de una matriz diagonal de orden n con elementos diagonales distintos de dos en dos es de n-ésimo grado.

5.4.39. Demostrar que una matriz que conmuta con una matriz diagonal que posee elementos diagonales distintos de dos en dos es también una matriz diagonal.

5.4.40*. Una matriz cuadrada se llama *escalar* si ella es diagonal y todos sus elementos diagonales son iguales entre sí. Utilizando los resultados del problema 5.4.39 demostrar el *lema de Schur*: si una matriz cuadrada A es conmutativa con todas las matrices cuadradas del mismo orden, ésta es una matriz escalar (compárese con el problema 5.3.34).

5.4.41. Mostrar que para toda matriz A el conjunto de matrices conmutables con A es a) un subespacio; b) un anillo.

Hallar la forma general de las matrices conmutativas con la matriz:

5.4.42. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.4.43*. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{Vmatrix}$

(el orden de la matriz es n).

5.4.44. Demostrar que toda matriz conmutable con la matriz A conmuta también con la matriz $A-\lambda E$ cualquiera que sea el número λ. Deducir de esto que el conjunto de matrices conmutables con una célula de Jordan J_λ es el mismo para todos los λ y, por consiguiente, coincide con el conjunto del problema 5.4.43. Según el problema 5.4.41 este conjunto es un subespacio. Determinar su dimensión.

5.4.45. Una matriz cuadrada A se llama triangular *superior* (o *derecha*) si $a_{ij}=0$ para $i>j$. De un modo análogo una matriz cuadrada A cuyo $a_{ij}=0$ si $i<j$ se llama matriz *triangular inferior* (o *izquierda*). Demostrar que el producto de las matrices triangulares

superiores (inferiores) de un mismo orden es una matriz triangular superior (inferior).

5.4.46. Hallar el número de operaciones de multiplicación necesarias para calcular el producto de dos matrices triangulares de orden n de una misma forma (es decir, las dos matrices son triangulares superiores o triangulares inferiores).

5.4.47. Una matriz cuadrada A se llama *estrictamente triangular superior* (*inferior*) si $a_{ij} = 0$ para $i \geqslant j$ $(i \leqslant j)$. Demostrar que para un producto B de dos matrices estrictamente triangulares A_1 y A_2 de una misma forma, $b_{ij} = 0$ para $i \geqslant j - 1$ $(i \leqslant j + 1)$.

5.4.48. Mostrar que para una matriz estrictamente triangular A de orden $n + 1$ la n-ésima potencia de A es igual a la matriz nula.

5.4.49. Llámase matriz *de Toeplitz* a una matriz cuadrada A de orden $n + 1$ si ella tiene la estructura siguiente:

$$A = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \dots & a_0 & a_1 \\ a_{-n} & a_{-n+1} & a_{-n+2} & \dots & a_{-1} & a_0 \end{Vmatrix}.$$

Entonces una tal matriz se define completamente por $2n + 1$ números.

Demostrar que una matriz triangular superior A es una matriz de Toeplitz si, y solamente si, ella es un polinomio de una célula de Jordan J_0.

5.4.50. Deducir del resultado del problema 5.4.49 que a) el producto de matrices triangulares superiores de Toeplitz es una matriz de esta clase; b) dos matrices cualesquiera de esta clase son conmutables.

5.4.51. Demostrar que el producto de dos matrices conmutables es una matriz conmutable.

5.4.52. Una matriz cuadrada A de orden $n + 1$ se llama *matriz circulante* si su estructura es la siguiente

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_0 \end{Vmatrix}.$$

De este modo una matriz de esta clase se define completamente por $n + 1$ números.

Demostrar que una matriz C es una matriz circulante si, y sólo si, ella constituye un polinomio de la matriz de permutación P del problema 5.4.34.

5.4.53. Deducir del resultado del problema 5.4.52 que a) el producto de matrices circulantes es una matriz circulante; b) dos matrices circulantes cualesquiera son conmutables.

5.4.54. ¿Qué número de operaciones de multiplicación se necesita para calcular el producto de dos matrices circulantes de orden n?

5.4.55. Una matriz cuadrada A de orden n se llama *matriz de cinta* si para un cierto número m ($<n$) todos los elementos a_{ij} tales que $| i - j | > m$ son nulos. El número $2m + 1$ se llama *anchura de la cinta.*

Demostrar que el producto de matrices de cinta es una matriz de cinta. Determinar la anchura mínima de la cinta para el caso del producto si para los factores la anchura es $2m_1 + 1$ y $2m_2 + 1$ respectivamente.

5.4.56. Una matriz cuadrada A con los elementos no negativos se llama *matriz estocástica* si la suma de elementos de cada fila de esta matriz es igual a 1. Si además la suma de elementos de cada columna es igual a 1, la matriz se llama *biestocástica*. Demostrar que

a) el producto de matrices estocásticas es una matriz estocástica;

b) el producto de matrices biestocásticas es una matriz biestocástica.

5.4.57. Partiendo de la regla de multiplicación de las matrices demostrar que el rango del producto AB no sobrepasa el rango de cada uno de los factores A y B.

5.4.58. Una matriz C de tipo $n \times n$ es el producto de las matrices rectangulares A y B de tipo $n \times m$ y $m \times n$, respectivamente; además, $m < n$. Demostrar que el determinante de la matriz C es igual a cero.

5.4.59. Demostrar que la matriz A de tipo $m \times n$ de rango 1 puede ser representada en forma del producto $A = xy$, en que x es una matriz de tipo $m \times 1$ e y es una matriz de tipo $1 \times n$. ¿Es única una tal representación?

5.4.60. Sea $A = xy$ una matriz de tipo $n \times n$ de rango 1. Demostrar que existe un número α tal que $A^2 = \alpha A$. Hallar la expresión del número α por medio de los elementos de matrices x e y.

5.4.61. Hallar el número de operaciones de multiplicación necesarias para calcular el producto de dos matrices A y B de rango 1 si son conocidas las representaciones $A = xy$ y $B = uv$ de estas matrices.

5.4.62*. Mostrar que la matriz A de tipo $m \times n$ de rango r puede ser representada en forma del producto $A = BC$, en que B es una matriz de tipo $m \times r$ y C es una matriz de tipo $r \times n$. ¿Es única una tal representación?

La representación de la matriz A obtenida en el problema 5.4.62 se llama *descomposición según el rango* de esta matriz. Hallar las descomposiciones según el rango de las matrices siguientes:

5.4.63. $\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.   5.4.64. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.65. Una matriz rectangular A descompuesta en submatrices por las filas horizontales y verticales se llama matriz *celular*. Estas submatrices se llaman *células* y se notan A_{ij}. Por ejemplo, si la matriz A está descompuesta en tres «filas celulares» y dos «columnas celulares», ésta se escribe en la forma

$$A=\left\|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{matrix}\right\|.$$

Mostrar que:

a) la multiplicación de una matriz celular por un número es equivalente a la multiplicación de este número por cada una de sus células;

b) la adición de dos matrices rectangulares de dimensiones iguales y descompuestas de manéra igual en células consiste en la adición de células homónimas;

c) si A y B son dos matrices celulares rectangulares de tipo $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, además,

$$A=\left\|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \ldots & A_{rs} \end{matrix}\right\|, \quad B=\left\|\begin{matrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \ldots & B_{st} \end{matrix}\right\|$$

y el número de columnas en cada célula A_{ij} es igual al número de filas en la célula B_{jk}, entonces la matriz $C = AB$ también puede ser representada en forma celular

$$C=\left\|\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \ldots & C_{rt} \end{matrix}\right\|,$$

donde

$$C_{ik}=\sum_{j=1}^{s} A_{ij}B_{jk}, \quad i=1, \ldots, r; \quad k=1, \ldots, t.$$

Esta condición puede ser formulada de un otro modo: el número de columnas de A contenidas en cada una de sus columnas celulares es igual al número de filas de B contenidas en una fila celular homónima;

d) si A y B son matrices cuadradas homónimas descompuestas en células de un modo igual, con la particularidad de que las células diagonales A_{ii} y B_{ii}, $i = 1, \ldots, r$ son cuadradas, la matriz $C = AB$ puede ser representada en la misma forma celular y

$$C_{ik}=\sum_{j=1}^{r} A_{ij}B_{jk}, \quad i, k=1, \ldots, r.$$

5.4.66. Una matriz cuadrada D dividida en células se llama *casi diagonal* si sus células diagonales son cuadradas, mientras que las que están fuera de la diagonal son submatrices nulas. Mostrar que las operaciones sobre las matrices casi diagonales de una misma estructura celular dan matrices casi diagonales de la misma estructura. Advertir que al multiplicar las matrices casi diagonales A y B las células diagonales de la matriz $C = AB$ son iguales a los productos $A_{ii}B_{ii}$ de las células diagonales homónimas de los factores. Deducir que las matrices casi diagonales A y B de una misma estructura son conmutables si, y solamente si, sus células diagonales homónimas son conmutables.

5.4.67*. Hallar la forma general de las matrices conmutables con la matriz casi diagonal

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 E_{k_1} & & & O \\ & \lambda_2 E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_r E_{k_r} \end{Vmatrix}$$

($\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$).

5.4.68. Una matriz cuadrada A dividida en células se llama *casi triangular* si sus células diagonales son cuadradas y las que están fuera de la diagonal A_{ij}, $i > j$ ($i < j$) son submatrices nulas. Mostrar que las operaciones sobre las matrices casi triangulares de la misma estructura celular superiores o inferiores conducen a matrices casi diagonales de la misma estructura. Advertir que al multiplicar las matrices casi triangulares superiores (inferiores) A y B las células diagonales de la matriz $C = AB$ son iguales a los productos $A_{ii}B_{ii}$ de las células diagonales homónimas de los factores.

5.4.69*. Utilizando el algoritmo de Strassen (véase el problema 5.4.21) indicar el procedimiento de cálculo del producto $C = AB$ de las matrices cuadradas A y B de orden 4 que requiere solamente 49 operaciones de multiplicación (en comparación con las 64 multiplicaciones al emplear el procedimiento usual).

5.4.70. Sea A una matriz compleja de orden n. Imaginemos A en forma de $A = B + iC$, donde B y C son matrices reales y asignémosle la matriz real D de orden $2n$

$$D = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Mostrar que si A_1 y A_2 son matrices complejas $n \times n$, D_1 y D_2 son matrices reales de orden doble compuestas del modo indicado, entonces al producto A_1A_2 le corresponde el producto D_1D_2. Advertir que en un caso particular con $n = 1$ se obtiene una correspondencia entre los números complejos $z = x + iy$ y las matrices reales de orden 2 de la forma

$$\begin{Vmatrix} x & -y \\ y & x \end{Vmatrix}.$$

5.4.71. Supongamos que un vector columna complejo z_0 de orden n es solución de un sistema de ecuaciones lineales $Az = b$, donde A es una matriz compleja de tipo $m \times n$, b es un vector columna complejo de orden m. Representemos A, b, z_0 con la forma $A = B + iC$; $b = f + ig$, $z_0 = x_0 + iy_0$, donde B y C son matrices reales, f, g, x_0, y_0 son vectores columnas reales. Mostrar que el vector columna real

$$u_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$$

de orden $2n$ es solución de un sistema de $2m$ ecuaciones con coeficientes reales $Du = d$, donde

$$D = \begin{Vmatrix} B & -C \\ C & B \end{Vmatrix}, \quad d = \begin{Vmatrix} f \\ g \end{Vmatrix}.$$

5.4.72. Mostrar que la operación de transposición está ligada a otras operaciones sobre las matrices por medio de las propiedades siguientes:

a) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

b) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

c) $(AB)^T = B^T A^T$.

5.4.73*. Sean A y B matrices rectangulares de tipo $m \times n$ y $p \times q$, respectivamente. Llámase *producto de Kronecker* $A \times B$ de las matrices A y B a la matriz C de tipo $mp \times nq$ que puede ser representada con la forma celular:

$$C = \begin{Vmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{Vmatrix}.$$

Demostrar que el producto de Kronecker de las matrices verifica las condiciones:

a) $(\alpha A) \times B = A \times (\alpha B) = \alpha (A \times B)$;

b) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$;

c) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$;

d) si los productos AB y CD tienen sentido, entonces

$$(AB) \times (CD) = (A \times C)(B \times D);$$

e) permutando las filas y las columnas de la matriz $A \times B$ se puede reducirla a la matriz $B \times A$; en este caso, si A y B son matrices cuadradas, las permutaciones de filas y columnas son las mismas.

5.4.74. Mostrar que la representación de una matriz A de rango 1 por el producto $A = xy$ (véase el problema 5.4.59) puede ser interpretada como una representación de A con la forma del producto de Kronecker

$$A = y \times x$$

5.4.75*. Sean $e_1, \ldots, e_m$ una base en un espacio de vectores columna de orden m (es decir, matrices de tipo $m \times 1$); $f_1, \ldots, f_n$, una base del espacio de vectores fila de orden n (es decir, matrices de tipo $1 \times n$). Demostrar que los productos de Kronecker $f_j \times e_i$ engendran una base en el espacio de matrices de tipo $m \times n$.

5.4.76. Demostrar que el producto de Kronecker de las matrices cuadradas A y B de órdenes, posiblemente, distintos es:

a) una matriz diagonal si A y B son matrices diagonales;

b) una matriz triangular superior (inferior) si A y B son matrices triangulares superiores (inferiores);

c) una matriz estocástica (biestocástica) si A y B son matrices estocásticas (biestocásticas).

5.4.77*. Sean A y B matrices cuadradas de orden m y de orden n, respectivamente. Demostrar que:

a) $\operatorname{tr}(A \times B) = (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B)$;

b) $\det(A \times B) = (\det A)^n \cdot (\det B)^m$.

5.4.78. Sean A, B y C matrices rectangulares de tipo $m \times n$, $p \times q$ y $m \times q$, respectivamente. Examinemos la ecuación matricial $AXB = C$ respecto a la matriz X de tipo $n \times p$ como un sistema de mq ecuaciones lineales respecto a np coeficientes incógnitos de esta matriz indicados en el orden siguiente:

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1p}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2p}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{np}.$$

Las ecuaciones del sistema están indicadas conforme a la numeración análoga («por filas») de los coeficientes de la matriz C:

$$c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1q}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2q}, \ldots, c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mq}.$$

Demostrar que la matriz del sistema dado de ecuaciones lineales es $A \times B^T$. Pero si los coeficientes de las matrices X y C se indican según las columnas:

$$x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}, \ldots, x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{np};$$
$$c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{m1}, c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{m2}, \ldots, c_{1q}, c_{2q}, \ldots, c_{mq},$$

el sistema tiene una matriz $B^T \times A$.

5.4.79. Mostrar que si la ecuación matricial

$$AX + XB = C,$$

donde A es una matriz de tipo $m \times m$, B es una matriz de tipo $n \times n$ y C es una matriz de tipo $m \times n$, se considera como un sistema de ecuaciones lineales respecto a los coeficientes de la matriz X de tipo $m \times n$, entonces la matriz de este sistema es:

a) $A \times E_n + E_m \times B^T$ si los coeficientes de las matrices X y C están numerados según las filas;

b) $E_n \times A + \overline{B}^T \times E_m$ si los coeficientes de las matrices X y C están numerados según las columnas.

5.4.80. Los elementos de una matriz A de tipo $m \times n$ son funciones derivables reales de la variable real t. Llámase *derivada* de A a la matriz dA/dt de tipo $m \times n$

$$\frac{dA}{dt} = \begin{Vmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \cdots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \cdots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{Vmatrix}.$$

Demostrar que para la derivación de matrices así definida se observan las propiedades siguientes:

a) $\frac{d}{dt}(\alpha A) = \alpha \frac{dA}{dt}$;

b) $\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}$;

c) $\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$;

d) $\frac{d}{dt}(A^T) = \left(\frac{dA}{dt}\right)^T$.

§ 5.5. Matriz inversa

Presentación de los problemas del párrafo. Describimos aquí los distintos procedimientos de cálculo de una matriz inversa y las formas de matrices inversas para algunas clases de matrices que se encuentran a menudo. Lo mismo que en el § 5.4 prestamos gran atención al estudio de las matrices de transformaciones elementales y matrices celulares. Al final del párrafo aducimos problemas relacionados con la aplicación de la fórmula de Binet-Cauchy.

Utilizando la expresión explícita de los elementos de A^{-1} haciendo uso de los elementos de A calcular las inversas de las matrices siguientes:

5.5.1. $\begin{Vmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{Vmatrix}$.

5.5.2. $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$.

5.5.3. $\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}$, $a^2+b^2 \neq 0$.

5.5.4. $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, $ad-bc \neq 0$.

5.5.5. $\left\|\begin{matrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|$. 5.5.6. $\left\|\begin{matrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{matrix}\right\|$.

5.5.7. $\left\|\begin{matrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{matrix}\right\|$. 5.5.8. $\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$.

5.5.9. $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{matrix}\right\|$. 5.5.10. $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix}\right\|$.

5.5.11. $\left\|\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{matrix}\right\|$.

5.5.12*. $\left\|\begin{matrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{matrix}\right\|$, $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$.

5.5.13. Demostrar que el conjunto de matrices de la forma

$$\left\|\begin{matrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{matrix}\right\|,$$

donde α es un número real cualquiera, forma un grupo conmutativo de multiplicación.

5.5.14. Demostrar que el conjunto de matrices reales de la forma

$$\left\|\begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix}\right\|$$

tiene una estructura de campo respecto a las operaciones usuales de adición y de multiplicación de matrices. Mostrar que la correspondencia entre semejantes matrices y los números complejos

$$\left\|\begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix}\right\| \to z = a + ib$$

es biunívoca y conserva las operaciones.

5.5.15*. Demostrar que el conjunto de matrices reales de la forma

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{matrix}\right\|$$

tiene una estructura de anillo respecto a las operaciones usuales de adición y de multiplicación de matrices.

Demostrar que las matrices no nulas de esta forma constituyen un grupo de multiplicación, además, no conmutativo.

5.5.16*. ¿Puede considerarse como grupo de multiplicación un conjunto de matrices en el cual:

a) todas las matrices son singulares:

b) hay matrices singulares, así como matrices no singulares?

5.5.17*. Mostrar que la inversa de una matriz triangular superior (inferior) es una matriz triangular superior (inferior). Deducir de esto y del problema 5.4.45 el corolario de que el conjunto de matrices triangulares regulares de un solo tipo forma un grupo de multiplicación.

5.5.18*. Demostrar que la inversa de una matriz triangular de Toeplitz es una matriz triangular de Toeplitz de la misma forma. Deducir de esto y del problema 5.4.50 el corolario siguiente: el conjunto de matrices triangulares de Toeplitz regulares de la misma forma engendra un grupo de multiplicación.

5.5.19*. Demostrar que la inversa de una matriz circulante es una matriz circulante. Deducir de esto y del problema 5.4.53 el corolario siguiente: el conjunto de matrices circulantes regulares forma un grupo de multiplicación.

5.5.20*. Una matriz regular A posee una propiedad consistente en que las sumas de los elementos contenida en una fila de esta matriz son las mismas para todas las filas. Demostrar que la inversa A^{-1} posee igualmente esta propiedad; en este caso, si para A las sumas de los elementos de cada fila son iguales a $r \neq 0$, para A^{-1} estas sumas son iguales a $1/r$.

Enunciar y demostrar una afirmación análoga sobre las columnas.

5.5.21. Demostrar que

a) un conjunto de matrices estocásticas regulares;

b) un conjunto de matrices biestocásticas regulares

forma un grupo de multiplicación.

Hallar las inversas de las matrices de orden n siguientes:

5.5.22. $\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{Vmatrix}$. 5.5.23. $\begin{Vmatrix} O & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & O \end{Vmatrix}$

(todas $\lambda_i \neq 0$).

5.5.24. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.25. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.26. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.27*. $\begin{Vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{Vmatrix}$.

5.5.28. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

5.5.29. Hallar las inversas de las matrices de transformaciones elementales P_{ij}, D_i y L_{ij} (véase el problema 5.4.24).

5.5.30. ¿Cómo cambiará la inversa A^{-1} si en la matriz A:

a) se conmutan la i-ésima y la j-ésima filas?

b) la i-ésima fila se multiplica por un número α diferente de cero?

c) a la i-ésima fila se le suma la j-ésima fila multiplicada por un número α?

Resolver cuestiones análogas para las columnas de A.

5.5.31. Hallar las inversas de las matrices N_i y S_i (véase el problema 5.4.25).

5.5.32. Demostrar que para una matriz regular A de la forma

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

la inversa $B = A^{-1}$ tiene la forma

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ b_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5.5.33. Demostrar que la inversa de una matriz de permutaciones es una matriz de permutaciones. Mostrar que el conjunto de matrices de permutaciones de orden n dado forma un grupo multiplicativo y calcular el número de elementos de este grupo.

5.5.34. Mostrar que el cálculo de la inversa de la matriz A de orden $n \times n$ puede ser reducido a la resolución de n sistemas de ecuaciones lineales, cada uno de los cuales está compuesto de n ecuaciones con n incógnitas y cuya matriz de los coeficientes de las incógnitas es la matriz A. Comparar el número de operaciones aritméticas necesarias al resolver estos sistemas por el método de Gauss y al determinar la inversa mediante las expresiones explícitas de estos elementos haciendo uso de los elementos de A.

Por el método descrito en el problema 5.5.34 calcular las inversas de las matrices siguientes:

5.5.35. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$. 5.5.36. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 5 & -10 \\ -6 & 9 & -10 & 15 \end{Vmatrix}$.

5.5.37*. Todos los menores principales directores de una matriz A de orden $n \times n$ difieren de cero. Demostrar que el método de Gauss permite presentar la matriz A en forma del producto de una matriz triangular inferior L y de una matriz triangular superior R: $A = LR$. Se puede adoptar que los elementos diagonales de una de estas matrices son iguales a uno.

5.5.38. Mostrar que la representación de una matriz A en forma del producto $A = LR$ obtenida en el problema 5.5.37 es la única, si los elementos diagonales de la matriz L se eligen iguales a uno.

5.5.39. Demostrar que toda matriz regular A puede ser representada en forma del producto $A = PLR$, donde P es una matriz de permutaciones, L es una matriz triangular inferior y R es una matriz triangular superior.

5.5.40*. Demostrar que toda matriz regular A puede ser reducida a una matriz unidad utilizando transformaciones elementales de las filas y las columnas.

5.5.41. Mostrar que la afirmación del problema 5.5.40 sigue vigente si se admiten las transformaciones elementales solamente de las filas (solamente de las columnas) de la matriz.

5.5.42. Utilizando el resultado del problema 5.5.40 demostrar que toda matriz regular puede ser representada en forma del producto de matrices de transformaciones elementales.

5.5.43. Mostrar que si las transformaciones elementales de las filas que reducen una matriz regular A a la matriz unidad están aplicadas del mismo modo a las filas de la matriz unidad entonces se obtiene la matriz inversa A^{-1}.

Por el método indicado en el problema 5.5.43 hallar las inversas de las matrices siguientes:

5.5.44. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$. **5.5.45.** $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{Vmatrix}$.

5.5.46. Sea J_n una matriz de orden n cuyos todos los elementos son iguales a la unidad. Demostrar que

$$(E-J_n)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}J_n.$$

5.5.47. Sea B una matriz de rango 1. De acuerdo con el problema 5.4.60 $B^2=\alpha B$ para un cierto número α. Suponiendo que $\alpha\neq -1$ demostrar que

$$(E+B)^{-1}=E-\beta B,$$

donde $\beta=\frac{1}{1+\alpha}$. Mostrar que el problema 5.5.46 es un caso particular de esta afirmación.

5.5.48. Mostrar que si una matriz A es regular, las matrices $A+B$ y $E+A^{-1}B$ todas son singulares o regulares.

5.5.49*. Sea A una matriz regular cuya inversa A^{-1} es conocida; sea, además, $B=xy$ una matriz de rango 1. Demostrar que si la matriz $A+B$ es regular, su inversa puede ser hallada mediante la fórmula

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-\beta A^{-1}BA^{-1},$$

en que $\beta=\frac{1}{1+\alpha}$, $\alpha=yA^{-1}x$. Así, pues, si a la matriz A se le suma una matriz de rango 1, entonces a la inversa se le sumará igualmente una matriz de rango 1.

5.5.50. Calcular en el problema 5.5.49 el número de operaciones de multiplicación y de división necesarias para pasar de A^{-1} a $(A+B)^{-1}$ suponiendo que las matrices x e y están conocidas de la representación de la matriz B.

5.5.51. Añadir al elemento a_{ij} de una matriz regular A el número γ; en este caso la matriz obtenida $\widetilde{A}$ es igualmente una matriz regular. Hallar la expresión para $\widetilde{A}^{-1}$ a través de γ y los elementos de la matriz A^{-1}.

5.5.52. Añadir a los elementos de la última fila de una matriz regular A de orden n los números $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de modo que se conserve la regularidad de la matriz. Hallar la expresión de la inversa de la matriz obtenida $\widetilde{A}$, haciendo uso de los elementos de A^{-1} y los números $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

5.5.53. Añadir a todos los elementos de una matriz A regular el mismo número a. La matriz obtenida $\widetilde{A}$ sigue siendo regular. Hallar la expresión do $\widetilde{A}^{-1}$ a través de los elementos de A^{-1} y el número a.

Hallar las inversas de las matrices de orden n siguientes:

5.5.54. $\begin{Vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{Vmatrix}$, $a \neq b, \quad a \neq b(1-n)$.

5.5.55. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$. 5.5.56. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$.

5.5.57. $\begin{Vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{Vmatrix}$

(todos los a_n son diferentes de cero).

5.5.58. Demostrar que la inversa de la matriz casi diagonal regular D es casi diagonal y es también de la misma estructura celular que D. Advertir que las células diagonales D^{-1} son matrices inversas para las células diagonales homónimas de D.

5.5.59. Demostrar que la inversa de una matriz A casi triangular superior (inferior) regular es una matriz casi triangular superior (inferior) y además es de la misma estructura que A. Advertir que las células diagonales de A^{-1} son matrices inversas de las células diagonales homónimas de A.

5.5.60. Hallar la inversa de una matriz A de tipo $k + l$

$$A = \begin{Vmatrix} E_k & B \\ 0 & E_l \end{Vmatrix}.$$

5.5.61*. Supongamos que en una matriz celular cuadrada

$$M = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}$$

una submatriz A es cuadrada y regular. Demostrar que el determinante de la matriz M verifica la relación

$$|M| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

5.5.62*. Se conoce la inversa A_{n-1}^{-1} de una matriz A_{n-1} de orden $n-1$. Hallar la inversa de la matriz *bordeada* A_n de orden n

$$A_n = \begin{Vmatrix} A_{n-1} & u_{n-1} \\ v_{n-1} & a \end{Vmatrix}$$

suponiéndola no singular.

5.5.63. Calcular el número de operaciones de multiplicación y de división necesarias para realizar las fórmulas de cálculo de A_n^{-1} deducidas en el problema 5.5.62.

5.5.64. Verificar que para una matriz celular cuadrada M de orden $k+l$

$$M=\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix},$$

donde A y D son células cuadradas de órdenes k y l, respectivamente; la matriz inversa M^{-1} puede ser construida también en la forma celular

$$M^{-1}=\begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix},$$

donde $P=(A-BD^{-1}C)^{-1}$, $Q=-PBD^{-1}$, $R=-D^{-1}CP$, $S=$ $=D^{-1}-D^{-1}CQ$ o bien

$$S=(D-CA^{-1}B)^{-1}, \quad R=-SCA^{-1},$$
$$P=A^{-1}-A^{-1}BR, \quad Q=-A^{-1}BS.$$

Se supone que las matrices inversas indicadas aquí existen. Estas *fórmulas de Frobenius* permiten reducir el cálculo de la matriz inversa de orden $k+l$ a la inversión de una matriz de orden k y de una matriz de orden l.

5.5.65. Sean A y B matrices no regulares cuadradas de orden m y n, respectivamente. Demostrar que el producto de Kronecker de estas matrices es igualmente regular y que

$$(A\times B)^{-1}=A^{-1}\times B^{-1}.$$

Hallar las matrices inversas de las matrices siguientes:

5.5.66. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 83 & -47 & 1 & 0 & 0 \\ -55 & 94 & 0 & 1 & 0 \\ 62 & -71 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

5.5.67. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 5 \end{Vmatrix}.$

5.5.68. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & 21 \\ -3 & -12 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 5.5.69*. $\begin{Vmatrix} 24 & 32 & 9 & 12 \\ 40 & 56 & 15 & 21 \\ 15 & 20 & 6 & 8 \\ 25 & 35 & 10 & 14 \end{Vmatrix}.$

5.5.70. Sean $A=B+iC$ una matriz compleja de orden n; $A^{-1}=F+iG$, la inversa de la matriz A. Demostrar que las matrices reales de orden $2n$

$$\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} F & -G \\ G & F \end{pmatrix}$$

son inversas recíprocamente.

5.5.71. Demostrar que las operaciones de transposición y de inversión de una matriz son conmutables, es decir, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

5.5.72. Los elementos de una matriz cuadrada A son funciones derivables reales de una variable real t. Suponiendo que para un valor dado de t la matriz A es regular, demostrar la fórmula siguiente:

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}) = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

5.5.73. Mostrar que la solución de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ con una matriz cuadrada regular de los coeficientes de A es $x = A^{-1}b$. Deducir las fórmulas de Cramer.

5.5.74. Supongamos que en los datos del problema 5.5.73 los coeficientes de la matriz A y del vector columna b son funciones derivables reales de una variable real t. Demostrar la fórmula

$$\frac{dx}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}x + A^{-1}\frac{db}{dt}$$

5.5.75. Sean A y B matrices rectangulares de tipo $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente. Demostrar que para los menores de la matriz $C = AB$ son justas las expresiones:

$$C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_q \\ j_1 & j_2 & \dots & j_q \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_q \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_q \\ k_1 & k_2 & \dots & k_q \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_q \\ j_1 & j_2 & \dots & j_q \end{pmatrix}$$

$$(1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_q \leqslant m;$$
$$1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_q \leqslant p).$$

5.5.76. Utilizando la fórmula de Binet-Cauchy demostrar que el rango de cada una de las matrices AA^T y A^TA es igual al rango de la matriz A. Se supone que A es una matriz real.

5.5.77. Demostrar que para las matrices rectangulares A y B de tipo $m \times n$ y $n \times m$, respectivamente, la suma de todos los menores principales de orden k dado $(1 \leqslant k \leqslant \text{men}(n, m))$ de las matrices AB y BA es la misma.

5.5.78. Una matriz cuadrada A se llama *totalmente no negativa* (*totalmente positiva*) si todos los menores de cualesquiera órdenes de esta matriz son no negativos (positivos). Demostrar que el producto de matrices totalmente no negativas (totalmente positivas) es una matriz totalmente no negativa (totalmente positiva).

5.5.79*. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Para un número natural dado p, $1 \leqslant p \leqslant n$ ordenemos todas las $N = C_n^p$ combinaciones de n números $1, 2, \ldots, n$ a p números $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ en orden lexicográfico. Lo último significa que la combinación $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ precede a la combinación $k_1' < k_2' < \ldots < k_p'$ si $k_1 = k_1', \ldots, k_{l-1} = k_{l-1}'$, pero $k_l < k_l'$, $1 \leqslant l \leqslant p$. Compongamos una matriz cuadrada $A_p = (a_{ij;\,p})$ de orden N del modo siguiente:

$$a_{ij;\,p} = A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix}$$

si el índice de la combinación $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ es igual a i y el índice de la combinación $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$ es igual a j. La matriz obtenida A_p se llama *p-ésima matriz asociada* a A. En particular, $A_1 = A$, $A_n = |A|$.

Demostrar que

a) $(E_n)_p = E_N$;

b) la matriz asociada a una matriz diagonal D es una matriz diagonal;

c) la matriz asociada a una matriz triangular superior (inferior) A es una matriz triangular superior (inferior);

d) $(AB)_p = A_pB_p$;

e) si A es una matriz regular, entonces $(A^{-1})_p = (A_p)^{-1}$.

5.5.80*. Sea A una matriz regular de orden n. Demostrar que los menores de cualquier orden de la matriz inversa $B = A^{-1}$ están ligados con los menores de A por las relaciones

$$B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{p}(i_s+k_s)} A\begin{pmatrix} k_1' & k_2' & \ldots & k_{n-p}' \\ i_1' & i_2' & \ldots & i_{n-p}' \end{pmatrix}}{|A|},$$

donde $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ junto con $i_1' < i_2' < \ldots < i_{n-p}'$ y $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ junto con $k_1' < k_2' < \ldots < k_{n-p}'$ forman un sistema completo de índices $1, 2, \ldots, n$.

§ 5.6. Matriz de un operador lineal, cambio a otra base, matrices equivalentes y semejantes

Presentación de los problemas del párrafo. Los problemas de este párrafo están agrupados en tres secciones según los temas indicados por el título del párrafo.

5.6.1. Sobre un plano euclídeo E_2 está adoptada la orientación a derecha (es decir, el sentido de lectura de ángulos se considera positivo si está orientado en el sentido contrario a las agujas del reloj). Sea Oe_1e_2 un sistema cartesiano directo de coordenadas sobre el plano E_2. Componer para la base e_1, e_2 una matriz de transformación lineal que consiste en una rotación de E_2 a un ángulo α alrededor del origen de coordenadas.

5.6.2. Sea e_1, e_2, e_3 una base ortonormalizada a la derecha de un espacio euclídeo tridimensional E_3 de vectores geométricos. Se examina el siguiente operador lineal A de E_3:

$$Ax = [x, a].$$

Aquí a es el vector fijado de coordenadas α, β, γ en la base e_1, e_2, e_3. Hallar en esta base la matriz de A.

5.6.3. Para una base $1, t, t^2, \ldots, t^n$ de un espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ escribir las matrices: a) del operador de derivación; b) del operador de diferencias A_1.

5.6.4. Examinando un operador de derivación como un operador de M_n en M_{n-1} escribir su matriz en un par de bases $1, t, t^2, \ldots, t^n$ y $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$. Hallar en este mismo par de bases la matriz de un operador de integración como de un operador de M_{n-1} en M_n.

5.6.5. Hallar la matriz de un operador de derivación en un espacio lineal bidimensional tendido sobre las funciones de base:

a) $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \operatorname{sen} t$;

b) $g_1(t) = e^{at} \cos bt$, $g_2(t) = e^{at} \operatorname{sen} bt$.

5.6.6. Un espacio X es la suma directa de los subespacios L_1 y L_2. La base $e_1, \ldots, e_n$ está elegida de tal modo que los vectores $e_1, \ldots, e_r$ forman una base del subespacio L_1 y los vectores $e_{r+1}, \ldots, e_n$, una base del subespacio L_2. Componer para la base $e_1, \ldots, e_n$:

a) la matriz del operador de proyección sobre L_1 paralelamente a L_2;

b) la matriz del operador de proyección sobre L_2 paralelamente a L_1;

c) la matriz del operador de reflexión de L_1 paralelamente a L_2.

5.6.7. En un espacio aritmético X de dimensión n, real o complejo, y en un espacio aritmético Y de dimensión m correspondiente están fijadas las bases «naturales» compuestas de vectores unitarios de estos espacios. Asignemos a cada matriz A de tipo $m \times n$ un operador $\widetilde{A}$ de X en Y, definido del modo siguiente:

$$x \xrightarrow{\widetilde{A}} y = Ax,$$

es decir, que consiste en la multiplicación de cada vector columna x de X por la matriz A. Demostrar que: a) esta correspondencia entre las matrices $m \times n$ y los operadores de X en Y es biunívoca; b) en el par de bases naturales la matriz del operador $\widetilde{A}$ coincide con la matriz A. De este modo los operadores que actúan en los espacios aritméticos pueden ser identificados con las matrices rectangulares de tipos correspondientes.

5.6.8. Un operador A que actúa en un espacio aritmético tridimensional transforma los vectores linealmente independientes a_1, a_2, a_3 en vectores b_1, b_2, b_3, donde

$$a_1=\begin{Vmatrix}5\\3\\1\end{Vmatrix},\quad a_2=\begin{Vmatrix}1\\-3\\-2\end{Vmatrix},\quad a_3=\begin{Vmatrix}1\\2\\1\end{Vmatrix};$$

$$b_1=\begin{Vmatrix}-2\\1\\0\end{Vmatrix},\quad b_2=\begin{Vmatrix}-1\\3\\0\end{Vmatrix},\quad b_3=\begin{Vmatrix}-2\\-3\\0\end{Vmatrix}.$$

Hallar la matriz de este operador: a) en la base a_1, a_2, a_3; b) en la base natural e_1, e_2, e_3.

5.6.9. En un espacio de matrices cuadradas de orden 2 está fijada una base compuesta de las matrices

$$\begin{Vmatrix}1&0\\0&0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix}$$

(en el orden indicado). Escribir en esta base:

a) la matriz del operador de transposición, es decir, del operador que a cada matriz X le asigna una matriz traspuesta;

b) la matriz del operador G_{AB} que transforma cada matriz X en una matriz AXB, donde A y B son las matrices dadas;

c) la matriz del operador F_{AB} definido por la relación

$$X\to AX+XB.$$

¿Cómo cambiarán estas matrices si en la base se permutan las matrices

$$\begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}0&0\\1&0\end{Vmatrix}?$$

5.6.10. Supongamos que en el espacio de matrices de tipo $m\times n$ está fijada una base E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}, E_{21}, E_{22}, ..., E_{2n}, ..., E_{m1}, E_{m2}, ..., E_{mn} (en el orden indicado), donde E_{ij} es una matriz de tipo $m\times n$ cuyo único elemento diferente de cero se encuentra en (i, j) y es igual a 1. Sean luego A y B las matrices cuadradas dadas de orden m y n, respectivamente. Examinemos los operadores G_{AB} y F_{AB} definidas por las relaciones

$$X\xrightarrow{G_{AB}} AXB,$$

$$X\xrightarrow{F_{AB}} AX+XB.$$

Demostrar que en la base dada:

a) la matriz del operador G_{AB} es el producto de Kronecker $A \times B^T$;

b) la matriz del operador F_{AB} es $A \times E_n + E_m \times B^T$.

Hallar las matrices de estos mismos operadores en la base E_{11}, $E_{21}, \ldots, E_{m1}, E_{12}, E_{22}, \ldots, E_{m2}, \ldots, E_{1n}, E_{2n}, \ldots, E_{mn}$.

5.6.11. Sea A un operador de ω_{XY}. Demostrar que todas las matrices que definen el operador A en diferentes pares de bases de los espacios X e Y poseen el mismo rango igual al rango de A.

5.6.12. Hallar el rango del operador F_{AB}:

$$X \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.6.13. Demostrar que el operador F_{AB} del problema 5.6.12 es nilpotente y hallar el índice de su nilpotencia.

5.6.14. ¿Qué se puede decir de la matriz del operador A de rango r si en una base $e_1, \ldots, e_n$ de un espacio X los vectores $e_{r+1}, \ldots, e_n$ pertenecen al núcleo de este operador?

5.6.15*. Un operador A de ω_{XY} es de rango r. Demostrar que en los espacios X e Y se pueden elegir las bases $e_1, \ldots, e_n$ y $g_1, \ldots, g_m$, respectivamente, de tal modo que la matriz A_{ge} del operador A tenga la forma

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (5.6.1)$$

El número de columnas no nulas de la matriz A_{ge} es igual al rango r del operador.

5.6.16. Mostrar que toda matriz regular de orden n, real o compleja, puede ser considerada como una matriz que en un espacio X de dimensión n, real o complejo, respectivamente, define el cambio de una base $e_1, \ldots, e_n$ a otra base $f_1, \ldots, f_n$; en este caso una de las bases puede elegirse arbitrariamente.

5.6.17. Supongamos que una matriz A define el cambio de la base $e_1, \ldots, e_n$ a la base $f_1, \ldots, f_n$ y la matriz B, de la base $f_1, \ldots, f_n$ a la base $g_1, \ldots, g_n$. Mostrar que: a) la matriz de cambio de $f_1, \ldots, f_n$ a $e_1, \ldots, e_n$ es A^{-1}; b) la matriz de cambio de $e_1, \ldots, e_n$ a $g_1, \ldots, g_n$ es $C = AB$.

5.6.18. ¿Cómo cambiará la matriz de cambio de $e_1, \ldots, e_n$ a $f_1, \ldots, f_n$ si:

a) se conmutan los vectores e_i y e_j;

b) se conmutan los vectores f_k y f_l?

5.6.19. En la base $1, t, t^2$ del espacio M_2 el operador A está definido por la matriz

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Hallar la matriz de este operador en la base compuesta de polinomios $3t^2 + 2t$, $5t^2 + 3t + 1$, $7t^2 + 5t + 3$.

5.6.20. Dos operadores están dados en un espacio M_3. El operador A transforma todo polinomio $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ en $a_0 + a_1t + a_2t^2$. El operador B transforma, respectivamente, los polinomios $t^3 + t^2$, $t^3 + t$, $t^3 + 1$, $t^3 + t^2 + t + 1$ en $t^3 + t$, $t^3 + 1$, $t^3 + t^2 + t + 1$, y un polinomio nulo. Componer en la base $1, t, t^2, t^3$ las matrices de los operadores AB y BA.

5.6.21. Sean P y Q matrices regulares de orden m y n, respectivamente. Mostrar que las matrices $F_{11}, F_{12}, \ldots, F_{1n}, F_{21}, F_{22}, \ldots, F_{mn}$, donde $F_{ij} = PE_{ij}Q$ y E_{ij}, matrices definidas en 5.6.10, forman una base en el espacio de matrices de tipo $m \times n$. Hallar la matriz de cambio a esta base a partir de la base compuesta de matrices E_{ij} y la matriz de cambio inverso.

5.6.22. Hallar las matrices de los operadores G_{AB} y F_{AB} del problema 5.6.10 en la base $F_{11}, F_{12}, \ldots, F_{mn}$ (véase el problema 5.6.21).

5.6.23. Sean $\widetilde{A}_1$ un operador definido por la matriz cuadrada A de orden $n \times n$ en la base $e_1, \ldots, e_n$ del espacio X y $\widetilde{A}_2$ un operador definido por la misma matriz en la base $f_1, \ldots, f_n$. Demostrar que

$$\widetilde{A}_2 = P\widetilde{A}_1P^{-1},$$

donde P es un operador que transforma los vectores $e_1, \ldots, e_n$ en vectores $f_1, \ldots, f_n$.

5.6.24. Las matrices rectangulares A y B de tipo $m \times n$ se llaman *equivalentes* si existen matrices regulares R y S tales que $B = RAS$. Mostrar que la relación de equivalencia sobre un conjunto de matrices rectangulares de dimensiones fijadas $m \times n$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

5.6.25. Las matrices cuadradas A y B se llaman *semejantes* si existe una matriz regular P tal que $B = P^{-1}AP$. Además dicen que la matriz P *transforma* A en B. Mostrar que la relación de semejanza sobre el conjunto de matrices cuadradas de orden dado n es reflexiva, simétrica y transitiva.

5.6.26. Mostrar que dos matrices equivalentes (semejantes) cualesquiera son de un mismo rango.

5.6.27. Sean X e Y espacios de dimensiones n y m, respectivamente. Demostrar que dos matrices equivalentes cualesquiera A y B de tipo $m \times n$ pueden ser consideradas como dos matrices que definen el mismo operador de ω_{XY} en ciertos pares de bases $e_1, \ldots, e_n$;

$q_1, \ldots, q_m$ y $f_1, \ldots, f_n$; $t_1, \ldots, t_m$ de estos espacios. Uno de los pares de estas bases puede elegirse arbitrariamente.

5.6.28. Demostrar que dos matrices semejantes cualesquiera de orden n pueden ser examinadas como matrices que definen el mismo operador de un espacio X de dimensión n en las dos bases $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_n$ de este espacio. La elección de una de estas bases es arbitraria.

5.6.29*. Demostrar que toda matriz A es equivalente a una matriz de la forma (5.6.1).

5.6.30. Demostrar la afirmación recíproca a la del problema 5.6.26: dos matrices A y B de tipo $m \times n$ de un mismo rango son equivalentes.

5.6.31. Sean semejantes dos matrices A y B: $B = P^{-1}AP$. ¿Está definida de un modo unívoco la matriz de transformación P?

5.6.32*. Mostrar que una matriz escalar αE es semejante solamente a sí misma. Demostrar que esta propiedad la poseen solamente las matrices escalares.

5.6.33. Sea A una matriz cuadrada fijada. Demostrar que el conjunto de todas las matrices P que transforman A en A es un grupo de multiplicación.

5.6.34. Sean A y B matrices semejantes. Demostrar que si P_0 es una matriz que transforma A en B, todo el conjunto de matrices de transformación se obtiene a partir del conjunto de matrices que transforman A en A multiplicando estas matrices a la derecha por la matriz P_0.

5.6.35. Mostrar que una matriz A se transforma en una semejante si se hacen las transformaciones siguientes:

a) la i-ésima fila se multiplica por un número no nulo α, luego la i-ésima columna se multiplica por un número $1/\alpha$;

b) la j-ésima columna se multiplica por un número α y se suma a la i-ésima fila, luego de la j-ésima columna se resta la i-ésima columna multiplicada por α;

c) se conmutan la i-ésima y la j-ésima filas, luego las i-ésima y j-ésima columnas.

5.6.36*. Mostrar que la simetría de una matriz cuadrada respecto a su centro es una transformación semejante de esta matriz.

5.6.37. Demostrar que las matrices semejantes A y B tienen la misma traza y el mismo determinante.

5.6.38. Demostrar que si por lo menos una de dos matrices cuadradas A y B de un mismo rango es regular, las matrices AB y BA son semejantes. Dar un ejemplo de matrices singulares A y B, para las cuales AB y BA no sean semejantes.

5.6.39. Mostrar que si las matrices A y B son semejantes, entonces

a) son semejantes las matrices A^2 y B^2;

b) son semejantes las matrices A^k y B^k para todo número entero natural k;

c) son semejantes las matrices $f(A)$ y $f(B)$ para cualquier polinomio $f(t)$.

5.6.40. Si las matrices A y B de orden $n \times n$ son equivalentes, ¿significa esto que son equivalentes las matrices A^2 y B^2 (compárese con el problema (5.6.39, a))?

5.6.41. Mostrar que las matrices semejantes A y B tienen el mismo polinomio mínimo.

5.6.42. Las matrices A y B de orden m y n son semejantes a las matrices C y D, respectivamente. Demostrar que

a) la matriz $A \times B$ es semejante a la matriz $C \times D$;

b) la matriz $A \times E_n + E_m \times B^T$ es semejante a la matriz $C \times E_n + E_m \times D^T$.

5.6.43. Demostrar que si las matrices A y B son semejantes, lo son también sus asociadas A_p y B_p.

5.6.44. Mostrar que si las matrices complejas $A_1 = B_1 + iC_1$ y $A_2 = B_2 + iC_2$ son semejantes, las matrices reales D_1 y D_2

$$D_i = \begin{Vmatrix} B_i & -C_i \\ C_i & B_i \end{Vmatrix}, \quad i = 1, 2$$

son también semejantes.

Capítulo 6

ESTRUCTURA DEL OPERADOR LINEAL

§ 6.0. Terminología y generalidades

Sea A un operador de ω_{XX}. El número λ se llama *valor propio* del operador A si existe un vector no nulo x tal que

$$Ax = \lambda x. \tag{6.0.1}$$

Todo vector $x \neq 0$ que satisface (6.0.1) se llama *vector propio* del operador A relativo al valor propio λ.

Si A_e es la matriz del operador A en una base arbitraria $e_1, \ldots, e_n$ de un espacio X, el polinomio $\det(\lambda E - A)$ no depende de la elección de la base y se llama *polinomio característico* del operador A.

Son valores propios del operador las raíces del polinomio característico (raíces pertenecientes al campo dado) y sólo ellas.

Según el *teorema fundamental del álgebra* todo polinomio de grado n $(n \geqslant 1)$ con coeficientes complejos posee en el campo de números complejos exactamente n raíces (si cada raíz se cuenta tantas veces como es su orden de multiplicidad). Si se llama *multiplicidad algebraica de un valor propio* a su multiplicidad como raíz del polinomio característico, entonces:

en un espacio lineal complejo de dimensión n todo operador posee n valores propios (teniendo en cuenta la multiplicidad). En estas condiciones *existe por lo menos un vector propio.*

El subespacio L se llama *invariante respecto al operador A* si de $x \in L$ se deduce que $Ax \in L$. El operador A examinado solamente para los vectores del subespacio invariante L se llama *operador inducido* y se nota A/L.

Si el espacio X es una suma directa de los subespacios L_1 y L_2 invariantes respecto al operador A, entonces para todo vector x de descomposición

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2,$$

tenemos

$$Ax = Ax_1 + Ax_2 = (A/L_1)\,x_1 + (A/L_2)\,x_2.$$

A consecuencia de esto dicen que el operador A es la *suma directa* de los operadores inducidos A/L_1 y A/L_2. Esta misma situación se describe con las palabras que siguen: el operador A *se reduce* por un par de subespacios L_1 y L_2.

Para todo operador A que actúa en un espacio complejo existe una base de este espacio llamada *base canónica de Jordan*, en la cual la matriz del operador tiene forma casi diagonal

$$J = \begin{Vmatrix} J_1 & & & & O \\ & J_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & J_k \end{Vmatrix},$$

en que cada una de las células diagonales J_i es una célula de Jordan relativa a uno de los valores propios del operador A. La matriz J se llama *forma de Jordan* del operador A.

Las expresiones «vector propio de una matriz», «subespacio invariante de una matriz», etc., que se emplean en el presente capítulo deben ser entendidas en el sentido definido en el final del § 5.0. En este caso, por ejemplo, un vector propio de una matriz $n \times n$ se considera como un vector columna de dimensión n, etc.

§ 6.1. Valores propios (autovalores) y vectores propios (autovectores)

Presentación de los problemas del párrafo. Aquí incluimos problemas sobre los valores propios y vectores propios de un operador que pueden ser resueltos sin utilizar el polinomio característico. Estos problemas se refieren, generalmente, a las cuestiones siguientes:

1. Determinación de los valores propios y vectores propios.
2. Teorema de la independencia lineal de los vectores propios referentes a diferentes valores propios y sus corolarios.
3. Operadores y matrices de estructura simple.

6.1.1. Demostrar que para que un operador A sea regular es necesario y suficiente que él no tenga autovalor nulo.

6.1.2. Mostrar que: a) los vectores propios de un operador A relacionados con el valor propio nulo, y solamente ellos, pertenecen al núcleo de este operador; b) los vectores propios relativos a los valores propios no nulos pertenecen a la imagen del operador.

6.1.3. Demostrar que si un operador A es regular, entonces los vectores propios de A y de A^{-1} son los mismos. Hallar la relación entre los valores propios de estos operadores.

6.1.4. Mostrar que al multiplicar un operador por un número no nulo los autovectores no cambian, mientras que los valores propios se multiplican por este número.

6.1.5. Mostrar que cualquiera que sea el número λ_0 el operador $A - \lambda_0 E$ posee los mismos vectores propios que el operador A. Hallar la relación entre los valores propios de estos operadores.

6.1.6. Demostrar que si x es un autovector del operador A relativo a su valor propio λ, entonces x es igualmente un vector propio del operador: a) A^2; b) A^k para todo k natural; c) $f(A)$, donde $f(t)$

es un polinomio cualquiera. Hallar los valores propios correspondientes de estos operadores.

6.1.7. ¿Es correcta la afirmación siguiente: si x es un autovector de un cierto polinomio $f(A)$ de un operador A, entonces x es un autovector del mismo operador A?

6.1.8. Demostrar que un operador nilpotente no posee valores propios diferentes de cero.

6.1.9. Demostrar que un operador de rotación de un espacio euclídeo a un ángulo α no múltiplo de π no posee vectores propios.

6.1.10. Hallar los vectores propios y los valores propios del operador A de un espacio euclídeo tridimensional: $Ax = [x, a]$, donde a es un vector fijado.

6.1.11. Hallar los valores propios y los vectores propios de un operador de derivación en el espacio de polinomios M_n.

6.1.12. Hallar los autovectores de un operador de derivación en el espacio tendido sobre $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \operatorname{sen} t$.

6.1.13. Demostrar que los autovalores de una matriz diagonal coinciden con sus elementos diagonales.

6.1.14. Demostrar que el valor propio de una matriz estocástica es la unidad. Hallar el vector propio correspondiente.

6.1.15*. Hallar los vectores propios de la matriz $A = xy$ cuyo rango es la unidad.

6.1.16. Hallar los valores propios y los vectores propios de la matriz J_n de orden $n \times n$

$$J_n = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.1.17. Hallar los valores propios y los vectores propios de la matriz A de orden $n \times n$

$$A = \begin{Vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{Vmatrix}.$$

6.1.18. Demostrar que si las matrices A y B son semejantes, todo valor propio de A es igualmente un valor propio de B e inversamente. Hallar la relación entre los vectores propios de las matrices A y B.

6.1.19*. Demostrar que los vectores propios de un operador relativo a los valores propios distintos son linealmente independientes.

6.1.20. Deducir del resultado del problema 6.1.19 que un operador A que actúa en un espacio X de dimensión n no puede tener más de n valores propios distintos. Si el número de valores propios distintos es exactamente n, existe una base del espacio X compuesta de vectores propios del operador A.

6.1.21. Demostrar que el conjunto de todos los vectores propios de un operador A relativo al valor propio dado λ_0 es un subespacio si está completado con el vector nulo. Este último se llama *subespacio propio* del operador A correspondiente al valor propio λ_0.

6.1.22. El espacio X es una suma directa de los subespacios L_1 y L_2. Hallar los valores propios y los subespacios propios

a) de un operador de proyección sobre L_1 paralelamente a L_2;

b) de un operador de reflexión en L_1 paralelamente a L_2.

6.1.23. La dimensión del subespacio propio de un operador A correspondiente al autovalor λ_0 se llama *multiplicidad geométrica* del autovalor λ_0. Mostrar que la multiplicidad geométrica de λ_0 es igual al defecto del operador $A - \lambda_0 E$.

6.1.24. Demostrar que la suma de los subespacios propios de un operador A es una suma directa.

6.1.25. Demostrar que todos los vectores diferentes de cero de un espacio son autovectores de un operador A si, y solamente si, A es un operador escalar.

6.1.26*. Demostrar que la suma de las multiplicidades geométricas de todos los autovalores de un operador A de ω_{XX} no sobrepasa la dimensión del espacio X. En este caso el que esta suma es igual a la dimensión del espacio X es la condición necesaria y suficiente para que en X exista una base compuesta de los vectores propios de A.

6.1.27. Un operador A, para el cual en el espacio existe una base compuesta de los vectores propios de este operador, se llama *operador de estructura simple*. Aclarar el sentido geométrico de tal operador. ¿Cuál es la forma de su matriz en una base compuesta de vectores propios?

6.1.28. Una matriz cuadrada se llama *matriz de estructura simple* si ella es semejante a una matriz diagonal. Demostrar que un operador A de ω_{XX} es de estructura simple si, y solamente si, su matriz en una base arbitraria del espacio es una matriz de estructura simple.

6.1.29. Demostrar que para un operador de estructura simple: a) la imagen es la cápsula lineal de los vectores propios relativos a los valores propios no nulos; b) la intersección del núcleo y de la imagen está compuesta únicamente del vector nulo.

6.1.30. Mostrar que los operadores de proyección y los operadores de reflexión son de estructura simple.

6.1.31. Mostrar que entre los operadores nilpotentes solamente el operador nulo posee una estructura simple.

6.1.32. Demostrar que todo polinomio $f(A)$ de un operador de estructura simple tiene estructura simple. En particular, si A es regular, A^{-1} tiene estructura simple.

6.1.33. Demostrar que si un operador A de un espacio de dimensión n tiene estructura simple, el grado del polinomio mínimo de este operador no sobrepasa n.

6.1.34. Un operador A que actúa en un espacio X de dimensión n posee n valores propios distintos. Demostrar que todo operador B conmutable con A tiene estructura simple.

6.1.35. Mostrar que en los datos del problema 6.1.34 el operador B puede ser representado en forma de un polinomio del operador A.

6.1.36. Sean A un operador del espacio real R, $\tilde{A}$ el operador deducido de A por complexificación del espacio R. Mostrar que si x es un vector propio de A, que corresponde al valor propio λ, entonces $x + i0$ es un vector propio de $\tilde{A}$ del mismo valor propio.

6.1.37. Mostrar que si en los datos del problema 6.1.36 el operador $\hat{A}$ es un operador de estructura simple, A es igualmente de estructura simple.

6.1.38. Según la definición, para una matriz A de estructura simple existe una matriz regular P tal que $P^{-1}AP = \Lambda$ es una matriz diagonal. Demostrar que los elementos diagonales de la matriz Λ son valores propios y las columnas de la matriz P son vectores propios de la matriz A. Inversamente, una matriz regular P compuesta (según las columnas) de los vectores propios de la matriz A transforma esta matriz en una matriz diagonal.

6.1.39. Mostrar que si A es una matriz de estructura simple, esto es válido para la matriz transpuesta A^T.

6.1.40. Sean λ y x el valor propio y el vector propio correspondiente de una matriz A de orden $m \times m$; μ e y, el valor propio y el vector propio correspondiente de una matriz B de orden $n \times n$. Demostrar que el producto de Kronecker $x \times y$ es

a) un vector propio de la matriz $A \times B$;

b) un vector propio de la matriz $A \times E_n + E_m \times B$. Hallar los valores propios correspondientes.

6.1.41. Demostrar que si en los datos del problema 6.1.40 las matrices A y B tienen estructura simple, entonces esto es también válido para las matrices $A \times B$ y $A \times E_n + E_m \times B$.

6.1.42. Deducir del problema 6.1.41 el corolario siguiente: si las matrices A y B son de estructura simple, entonces los operadores G_{AB} y E_{AB} del problema 5.6.10 igualmente tienen estructura simple.

6.1.43. Demostrar que si A es una matriz de estructura simple, esto es válido para todas las matrices asociadas A_p.

§ 6.2. Polinomio característico

Presentación de los problemas del párrafo. En este párrafo hemos querido ilustrar las cuestiones siguientes relacionadas con el polinomio característico:

1. Determinación del polinomio característico, expresión de sus coeficientes por los menores de una matriz, relación entre los coeficientes y los valores propios.

2. Polinomio característico como procedimiento de cálculo de los valores propios.

3. Matriz asociada a un polinomio.

4. Polinomio característico de clases especiales de operadores y matrices. Lo mismo que en el párrafo precedente se presta gran atención al estudio de los operadores y las matrices de estructura simple. El criterio establecido en el problema 6.1.26 solamente aquí toma su valor completo al usar un modo de cálculo de los valores propios.

6.2.1. Escribir las expresiones explícitas de los polinomios característicos de las matrices de orden: a) 1; b) 2; c) 3.

6.2.2*. Demostrar que en la notación del polinomio característico $|\lambda E - A|$ de la matriz A según las potencias de λ

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

el coeficiente a_k es igual a la suma de todos los menores principales de orden $n-k$ de la matriz A, tomada con el signo $(-1)^{n-k}$.

Componer los polinomios característicos de las matrices

6.2.3. $\begin{Vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{Vmatrix}$. **6.2.4.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & a \end{Vmatrix}$.

6.2.5. Demostrar que el polinomio característico de una matriz transpuesta A^T coincide con el polinomio característico de la matriz A.

6.2.6. Demostrar que si cada coeficiente de una matriz compleja A se reemplaza por un número conjugado, los coeficientes del polinomio característico de la matriz se reemplazarán también por números conjugados.

6.2.7*. A y B son matrices cuadradas de un mismo orden. Demostrar que las matrices AB y BA tienen un mismo polinomio característico.

6.2.8. Demostrar que los polinomios característicos $f(\lambda)$ de una matriz A y $g(\lambda)$ de una matriz $A - \lambda_0 E$ están ligados por la relación

$$g(\lambda) = f(\lambda + \lambda_0).$$

6.2.9. Supongamos que una matriz A de orden $n \times n$ es regular. Demostrar que los polinomios característicos $f(\lambda)$ de A y $h(\lambda)$ de A^{-1} están ligados por la relación

$$h(\lambda) = (-\lambda)^n \frac{1}{|A|} \cdot f\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Deducir la relación entre las sumas de todos los menores principales de orden dado de las matrices A y A^{-1}. (Un otro método para obtener esta relación está dado en el problema 5.5.80.)

6.2.10. Demostrar que las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico. Dar un ejemplo que muestre que es errónea la afirmación recíproca: las matrices que tienen un mismo polinomio característico son semejantes.

6.2.11*. Demostrar que la función siguiente de los elementos de una matriz A:

$$m(A) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}$$

no cambia al efectuar semejante transformación de esta matriz.

6.2.12. Suponiendo que en el problema 6.2.11 la matriz A es compleja escribir la expresión de la función $m(A)$ con ayuda de los valores propios de esta matriz.

6.2.13. Generalizando la afirmación del problema 6.2.11 demostrar que la función

$$m_l(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \dots \sum_{k_l=1}^{n} a_{ik_1}a_{k_1k_2} \dots a_{k_{l-1}k_l}a_{k_li}$$

no cambia al efectuar semejante transformación de la matriz A.

6.2.14. Se conocen n valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de una matriz A de tipo $n+1$. ¿De qué modo hallar un valor propio λ_{n+1} más?

6.2.15. Hallar el polinomio característico y los valores propios de la matriz triangular

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

6.2.16. Demostrar que el polinomio característico de la matriz

$$C(f(\lambda)) = \begin{Vmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

es igual a $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$. La matriz $C(f(\lambda))$ se llama *matriz asociada al polinomio* $f(\lambda)$ (o *matriz de Frobenius*).

6.2.17. Aplicando el problema 6.2.16 mostrar que todo polinomio de grado n con el coeficiente mayor igual a uno puede ser polinomio característico de una matriz cuadrada de orden n.

6.2.18. Hallar el polinomio característico del operador de giro de un plano euclídeo a un ángulo α.

6.2.19. Hallar el polinomio característico de un operador A de un espacio euclídeo tridimensional: $Ax = [x, a]$, donde a es un vector fijo.

6.2.20. Hallar el polinomio característico de un operador de derivación en el espacio M_n.

6.2.21. Hallar el polinomio característico de un operador nilpotente arbitrario que actúa en un espacio complejo de dimensión n.

6.2.22. Demostrar que el rango de un operador de proyección es igual a su traza.

6.2.23. Supongamos que el operador R realiza la reflexión de un espacio X de dimensión n respecto a un subespacio L. Demostrar que la dimensión de L está ligada con la traza de R por la relación

$$\operatorname{tr} R = 2 \dim L - n.$$

Calcular los autovalores y los autovectores de las matrices siguientes:

6.2.24. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 6.2.25. $\begin{Vmatrix} 3+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{Vmatrix}$.

6.2.26. $\begin{Vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$. 6.2.27. $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$.

6.2.28. $\begin{Vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{Vmatrix}$. 6.2.29. $\begin{Vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{Vmatrix}$.

6.2.30. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 6.2.31. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$

6.2.32. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$. 6.2.33. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$.

6.2.34. Demostrar que en un espacio real de dimensión $n = 2k + 1$ todo operador posee por lo menos un autovector.

Hallar los valores propios de las matrices siguientes: a) en un campo de números reales; b) en un campo de números complejos.

6.2.35. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$. 6.2.36. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.2.37. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$. 6.2.38. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.2.39. Mostrar que el polinomio característico de una matriz casi triangular (casi diagonal) es igual al producto de los polinomios característicos de las células diagonales.

6.2.40. Utilizando los problemas 6.2.8 y 6.2.9 mostrar que las multiplicidades algebraicas de los valores propios de los operadores A y $A - \lambda_0 E$ son las mismas, así como las de los valores propios correspondientes de los operadores A y A^{-1}.

6.2.41*. Demostrar que para un operador arbitrario A la multiplicidad algebraica de todo valor propio λ no sobrepasa su multiplicidad algebraica.

6.2.42. Demostrar que un operador A que actúa en un espacio complejo tiene estructura simple si, y solamente si, para cada autovalor de este operador la multiplicidad geométrica coincide con la multiplicidad algebraica. ¿Es justa una tal afirmación en el caso de un espacio real?

Establecer para cada una de las matrices que vienen a continuación si es simple o no su estructura. En el caso afirmativo hallar la matriz que transforma la matriz dada en una forma diagonal e indicar esta forma.

6.2.43. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$ 6.2.44. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

6.2.45. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$ 6.2.46. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$

6.2.47. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{Vmatrix}.$ 6.2.48. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

6.2.49*. Si un polinomio $f(\lambda)$ posee al menos una raíz múltiple, ¿puede tener su matriz de Frobenius estructura simple?

6.2.50. Demostrar que las matrices A y B de estructura simple son semejantes si, y sólo si, ellas poseen el mismo polinomio característico.

6.2.51. Demostrar que una matriz compleja cuyos todos los autovalores son distintos, es semejante a la matriz de Frobenius de su polinomio característico.

6.2.52. Hallar el polinomio característico de la matriz P de orden n:

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{Vmatrix}.$$

6.2.53*. Hallar para la matriz P del problema precedente los autovalores en un campo de números complejos y los autovectores que les corresponden.

6.2.54. Partiendo de los resultados del problema 6.2.53 mostrar que en un campo de números complejos toda matriz circulante tiene estructura simple. Hallar la expresión de los valores propios de la matriz circulante por sus elementos.

6.2.55*. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ las raíces del polinomio $f(\lambda)$, todas *distintas.* Hallar los vectores propios de la matriz de Frobenius de este *polinomio.*

6.2.56*. Deducir el resultado del problema 6.2.53 a partir del problema 6.2.55.

6.2.57*. Supongamos que la matriz A tiene estructura simple. Demostrar que para todo número λ_0 el rango de una matriz $A - \lambda_0 E$ es igual al orden más grande de los menores principales de esta matriz diferentes de cero.

6.2.58. Demostrar que todo operador de estructura simple se anula por su polinomio característico.

6.2.59. Sean A un operador de estructura simple que actúa en un espacio de dimensión n y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ todos los valores propios del operador A que son distintos. Hallar el polinomio mínimo de este operador.

6.2.60*. Sean A y B matrices rectangulares de tipo $m \times n$ y $n \times m$, respectivamente. Demostrar que los polinomios característicos de las matrices AB y BA verifican la relación

$$\lambda^n |\lambda E_m - AB| = \lambda^m |\lambda E_n - BA|.$$

En particular, para $m = n$ se obtiene el resultado del problema 6.2.7.

6.2.61*. Demostrar que el polinomio característico de la matriz

$$M = \begin{Vmatrix} A & B \\ B & A \end{Vmatrix},$$

donde A y B son matrices cuadradas de un mismo orden, es igual al producto de los polinomios característicos de las matrices $A + B$ y $A - B$.

6.2.62. Demostrar que al complexificar un espacio lineal real el operador A se transforma en operador $\tilde{A}$ del mismo polinomio característico.

6.2.63. Mostrar que el resultado del problema 6.2.21 es también válido para un operador nilpotente que actúa en un espacio real de dimensión n.

6.2.64. Demostrar que el polinomio característico de la matriz real D de orden $2n$

$$D = \qquad \begin{matrix} -C \\ B \end{matrix} \Bigg\|$$

es igual al producto de los polinomios característicos de las matrices complejas $n \times n$ $A = B + iC$ y $\overline{A} = B - iC$.

§ 6.3. Subespacios invariantes

Presentación de los problemas del párrafo. La primera parte de este párrafo está consagrada a los subespacios invariantes y a los operadores inducidos. En la segunda parte examinamos el teorema de la posibilidad de reducir la matriz de un operador a una forma triangular y los corolarios de este teorema.

6.3.1. Demostrar que la suma y la intersección de los subespacios L_1 y L_2 invariantes respecto al operador A son también invariantes respecto a A.

6.3.2. Mostrar que el núcleo y la imagen de un operador A de ω_{XX} son invariantes respecto a A.

6.3.3. Demostrar que si un operador A es singular, todo subespacio que contiene su imagen será invariante respecto a A.

6.3.4. Aclarar el sentido geométrico de los subespacios invariantes unidimensionales de un operador y mostrar que en un espacio complejo todo operador posee por lo menos un subespacio invariante unidimensional.

6.3.5. ¿Qué se puede decir de un operador A de ω_{XX}, respecto al cual todo subespacio de un espacio X es invariante?

6.3.6*. Demostrar que si en un espacio X de dimensión n todo subespacio de dimensión k, donde k es un número natural fijado, $1 \leqslant k < n$, es invariante respecto a un operador A, entonces A es un operador escalar.

6.3.7. Demostrar que la cápsula lineal de cualquier sistema de vectores propios de un operador A es invariante respecto a A. En particular, los subespacios propios del operador A son invariantes respecto a este operador.

6.3.8. Demostrar que los operadores A y $A - \lambda E$, donde λ es cualquier número, poseen los mismos espacios invariantes.

6.3.9*. Demostrar que todo operador que actúa en un espacio complejo de dimensión n posee un subespacio invariante de dimensión $n-1$.

6.3.10. Demostrar que si un operador A es regular, A y A^{-1} tienen los mismos subespacios invariantes.

6.3.11. Mostrar que todo subespacio invariante respecto a un operador A es invariante respecto a todo polinomio de este operador. ¿Es válida la afirmación inversa?

6.3.12. Demostrar que el núcleo y la imagen de todo polinomio $f(A)$ de un operador A son invariantes respecto a A.

6.3.13. Supongamos que los operadores A y B son conmutables. Demostrar que el núcleo y la imagen del operador B son invariantes respecto al operador A.

6.3.14. Demostrar que todo subespacio propio de un operador A es invariante respecto a todo operador que conmuta con A.

6.3.15. Demostrar que si un operador A que actúa en un espacio de dimensión n posee n valores propios distintos, todo operador B conmutable con A tiene estructura simple. En este caso todos los vectores propios de A son igualmente vectores propios de B.

6.3.16. Hallar todos los subespacios invariantes de un operador A de un espacio euclídeo tridimensional: $Ax = [x, a]$, donde a es un vector fijado. Determinar para cada subespacio invariante L el operador inducido A/L.

6.3.17*. Hallar todos los subespacios invariantes de un operador de derivación en el espacio de polinomios M_n.

6.3.18. Un espacio X de dimensión n es la suma directa del subespacio L_1 de dimensión k (>0) y del subespacio L_2 de dimensión $n-k$. Supongamos que una base $e_1, \ldots, e_n$ del espacio está elegida de modo que los vectores $e_1, \ldots, e_k$ pertenecen a L_1 y los vectores $e_{k+1}, \ldots, e_n$, a L_2. Representemos la matriz del operador A en la base $e_1, \ldots, e_n$ en forma celular

$$A_e = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix},$$

donde A_{11} y A_{22} son submatrices cuadradas de orden k y $n-k$, respectivamente. Demostrar que

a) $A_{21} = 0$ si, y solamente si, L_1 es invariante respecto al operador A;

b) $A_{21} = 0$ y $A_{12} = 0$ si, y solamente si, los dos subespacios L_1 y L_2 son invariantes respecto al operador A.

6.3.19. Mostrar que toda matriz cuadrada compleja A de orden n es semejante a la matriz B de la forma

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{Vmatrix},$$

donde B_{22} es una submatriz de orden $n-1$. Indicar el procedimiento de construcción de una matriz de transformación P tal que $B = P^{-1}AP$.

6.3.20. Demostrar que si un operador A actúa en un espacio complejo, todo subespacio invariante respecto a A contiene por lo menos un vector propio de este operador.

6.3.21. Sea L un subespacio invariante respecto a un operador A. Demostrar que

a) el polinomio característico del operador inducido A/L es un divisor del polinomio característico del operador A;

b) el polinomio mínimo del operador inducido A/L es un divisor del polinomio mínimo del operador A.

6.3.22. Los subespacios L_1 y L_2 son invariantes respecto a un operador A; además, $L_1 \subset L_2$. Demostrar que el polinomio característico del operador A/L_1 es un divisor del polinomio característico del operador A/L_2. Una afirmación análoga es válida para los polinomios mínimos.

6.3.23. Los subespacios L_1 y L_2 son invariantes respecto al operador A. Demostrar que el polinomio característico del operador $A/(L_1 + L_2)$ y el polinomio característico del operador $A/(L_1 \cap L_2)$

son el múltiplo común y el divisor común, respectivamente, de los polinomios característicos de los operadores A/L_1 y A/L_2. Una afirmación análoga es válida para los polinomios mínimos.

6.3.24*. Demostrar que un operador A de estructura simple induce sobre cada uno de sus subespacios invariantes L un operador A/L igualmente de estructura simple.

6.3.25. Deducir del problema 6.3.24 el corolario siguiente: todo subespacio invariante no trivial de un operador A de estructura simple está tendido sobre un cierto sistema de vectores propios de este operador.

6.3.26. Demostrar que para los operadores conmutables A y B de estructura simple existe una base del espacio compuesta de vectores propios comunes de estos operadores.

6.3.27. Demostrar que dos operadores conmutables cualesquiera de un espacio complejo poseen un vector propio común.

6.3.28. Demostrar que para todo conjunto G (aunque sea infinito) compuesto de operadores conmutables de dos en dos de un espacio complejo existe un vector propio común para todos los operadores de G.

6.3.29. Supongamos que un operador A se reduce por un par de subespacios L_1 y L_2. Demostrar que:

a) el rango del operador A es igual a la suma de los operadores A/L_1 y A/L_2;

b) el polinomio característico del operador A es igual al producto de los polinomios característicos de los operadores A/L_1 y A/L_2;

c) el polinomio mínimo de A es el mínimo común múltiplo de los polinomios mínimos de A/L_1 y A/L_2;

d) para todo número entero k el operador A^k es la suma directa de los operadores $(A/L_1)^k$ y $(A/L_2)^k$;

e) para todo polinomio $f(t)$ el operador $f(A)$ es la suma directa de los operadores $f(A/L_1)$ y $f(A/L_2)$.

6.3.30. Demostrar que un operador de derivación en el espacio M_n no se reduce por ningún par de subespacios.

6.3.31. Sean R un espacio lineal real, C, un espacio complejo obtenido de R por complexificación. Supongamos que L es un subespacio en R, invariante respecto a un operador A; $e_1, \ldots, e_k$ es una base de L. Mostrar que la cápsula lineal de los vectores $e_1 + i0, \ldots$ $\ldots, e_k + i0$ en el espacio C es un subespacio invariante respecto al operador $\hat{A}$ correspondiente al operador A.

6.3.32*. Aplicando la complexificación demostrar que todo operador de un espacio lineal real posee un subespacio invariante de dimensión 1 ó 2.

6.3.33. Hallar el subespacio invariante bidimensional de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

considerada como un operador de un espacio aritmético real R_3.

6.3.34. Supongamos que los vectores columna $z_1, \ldots, z_k$, $z_j = x_j + iy_j$ de dimensión n forman una base del subespacio invariante de dimensión k de una matriz compleja $A = B + iC$. Demostrar que los vectores columna $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$ de dimensión $2n$, donde

$$u_j = \begin{Vmatrix} x_j \\ y_j \end{Vmatrix}, \quad v_j = \begin{Vmatrix} -y_j \\ x_j \end{Vmatrix},$$

engendran una base del subespacio invariante de dimensión $2k$ de la matriz real

$$D = \begin{Vmatrix} B & -C \\ C & B \end{Vmatrix}.$$

6.3.35. Los vectores $e_1, \ldots, e_k$ forman una base del subespacio invariante de dimension k de una matriz A de orden $m \times m$; los vectores $f_1, \ldots, f_l$ forman una base del subespacio invariante de dimensión l de una matriz B de orden $n \times n$. Demostrar que la cápsula lineal de los productos de Kronecker $e_i \times f_j$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$ es un subespacio invariante de dimensión kl

a) de la matriz $A \times B$;

b) de la matriz $A \times E_n + E_m \times B$.

6.3.36*. Demostrar que para todo operador A que actúa en un espacio complejo X de dimensión n existe una sucesión de subespacios invariantes $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}, L_n$ tales que la dimensión del espacio L_k es k y

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_{n-1} \subset L_n = X.$$

Mostrar que en una base $e_1, \ldots, e_n$ del espacio compuesto de modo que $e_i \in L_i$ la matriz de un operador A es una matriz triangular superior; pero si el orden de los vectores de la base se cambia por $e_n, \ldots, e_1$, la matriz de A deviene triangular inferior. Aclarar el sentido de los elementos diagonales de estas matrices.

6.3.37. Deducir del problema 6.3.36 el corolario siguiente: toda matriz cuadrada compleja es semejante a una matriz triangular superior (inferior).

6.3.38*. Demostrar la afirmación del problema precedente independientemente del problema 6.3.36.

6.3.39. Demostrar la no unicidad de la forma triangular de una matriz compleja A dada. A saber, cualquiera que sea la ordenación preliminar dada de los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de la matriz A existe una matriz triangular superior (inferior) semejante cuya diagonal principal tiene los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en el orden requerido.

Reducir las matrices siguientes por una transformación de semejanza a una forma triangular (indicar las formas triangulares obtenidas y las matrices de transformación):

6.3.40. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

6.3.41. $\begin{Vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$.

6.3.42*. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ todos los valores propios distintos de una matriz compleja A de orden $n \times n$, $k_1, \ldots, k_m$, las multiplicidades algebraicas de estos valores propios. Demostrar que la matriz A tiene estructura simple si, y sólo si, es semejante a una matriz B de la estructura celular siguiente

$$B = \begin{Vmatrix} \lambda_1 E_{k_1} & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1m} \\ 0 & \lambda_2 E_{k_2} & B_{23} & \ldots & B_{2m} \\ 0 & 0 & \lambda_3 E_{k_3} & \ldots & B_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_m E_{k_m} \end{Vmatrix}.$$

6.3.43. Demostrar que en un espacio complejo un operador es nilpotente si, y sólo si, todos sus autovalores son iguales a cero.

6.3.44*. Demostrar que las matrices conmutables A y B pueden ser reducidas a la forma triangular por una misma transformación de semejanza.

6.3.45. ¿Qué significa la afirmación del problema 6.3.44 para los operadores conmutables A y B?

6.3.46*. Demostrar que toda matriz cuadrada real es semejante a una matriz casi triangular superior (inferior) cuyas casillas diagonales son de orden 1 ó 2.

6.3.47. Deducir del resultado del problema 6.3.46 el corolario siguiente: en un espacio real de dimensión n todo operador posee un subespacio invariante de dimensión $n-1$ o $n-2$.

6.3.48*. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ los autovalores de una matriz compleja A de orden $m \times m$, $\mu_1, \ldots, \mu_n$, los autovalores de una matriz compleja B de orden $n \times n$ (cada una de las sucesiones puede tener unos mismos elementos). Demostrar que:

a) los mn productos $\lambda_i\mu_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ dan en conjunto los autovalores de la matriz $A \times B$ y del operador G_{AB} (véase el problema 5.6.10);

b) las mn sumas $\lambda_i + \mu_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ dan en conjunto los autovalores de la matriz $A \times E_n + E_m \times B$ y del operador F_{AB}.

6.3.49. Demostrar que la ecuación matricial

$$AX + XB = C,$$

donde A, B, C son las matrices complejas dadas de orden $m \times m$, $n \times n$ y $m \times n$, respectivamente, posee una solución, y una sola, si los valores propios λ_i de la matriz A y μ_j de la matriz B no forman ningún par tal que $\lambda_i + \mu_j = 0$.

6.3.50*. Supongamos que un operador A de un espacio complejo se reduce por un par de subespacios L_1 y L_2, además, los operadores inducidos A/L_1 y A/L_2 no poseen valores propios iguales. Demostrar que este mismo par de subespacios L_1 y L_2 reduce todo operador B que conmuta con A. Extender esta afirmación al caso de un número finito cualquiera de subespacios.

6.3.51. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de una matriz compleja A de orden $n \times n$ (entre los números λ_i puede haber números iguales). Demostrar que todos los productos posibles según p de los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dan en conjunto todos los valores propios de la p-ésima matriz asociada a A_p.

§ 6.4. Subespacios radicales (principales), forma de Jordan

Presentación de los problemas del párrafo. Los problemas de este párrafo vienen en el orden siguiente:

Subespacios radicales (principales). Los instrumentos esenciales empleados aquí son el teorema de la descomposición de un espacio complejo en una suma directa de subespacios radicales de un operador A y la caracterización del subespacio principal K_{λ_i} correspondiente al valor propio λ_i considerado como un núcleo de cierta potencia del operador $A - \lambda_i E$. Damos los corolarios del teorema de la descomposición, los problemas de cálculo sobre la construcción de subespacios radicales y discutimos la noción de índice del vector radical.

Estructura del subespacio radical. Aquí la exposición se hace por etapas. Comenzamos por el caso más simple cuando el índice máximo del vector radical coincide con la dimensión del subespacio radical. Luego la situación se complica progresivamente para examinar por último el caso más general. En cada etapa mostramos la estructura de la base canónica y damos ejemplos de cálculo. Una vez aclarada la estructura de un subespacio radical aislado se hace posible la

Construcción de la forma de Jordan de un operador arbitrario. Además de los problemas de cálculo también proponemos al lector una serie de problemas teóricos que utilizan la forma de Jordan. En particular, deducimos las fórmulas para calcular la forma de Jordan omitiendo la construcción de una base canónica. Termina el párrafo la

Relación entre la semejanza de las matrices y la forma de Jordan.

En todo el párrafo, si no se hace una mención especial, examinamos únicamente los operadores que actúan en un espacio complejo y las matrices complejas.

6.4.1. Aprovechando los problemas 5.3.9 y 5.3.10 demostrar que para todo operador A que actúa en un espacio X real o complejo de dimensión n existe una descomposición de X en una suma directa de subespacios:

$$X = N \dot{+} T, \tag{6.4.1}$$

donde N es el núcleo y T es la imagen del operador A^q para un número natural q. En este caso para un tal número q mínimo es válida la desigualdad $q \leqslant n$.

Mostrar que sobre el subespacio N un operador A induce un operador nilpotente y sobre el subespacio T, un operador regular. De este modo, la afirmación del problema puede ser formulada también así: todo operador A es una suma directa de operadores nilpotente y regular.

6.4.2*. Demostrar que la descomposición de un operador A en una suma directa de operadores nilpotente y regular es la única.

6.4.3. Demostrar que la dimensión de un subespacio N en la descomposición (6.4.1) es igual a la multiplicidad algebraica del valor propio nulo del operador A.

6.4.4*. Demostrar que para todo operador A existe una descomposición del espacio X en una suma directa de subespacios $K_{\lambda_1}, \ldots$ $\ldots, K_{\lambda_m}$:

$$X = K_{\lambda_1} \dotplus K_{\lambda_2} \dotplus \ldots \dotplus K_{\lambda_m}, \tag{6.4.2}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son todos los valores propios distintos del operador A con multiplicidades algebraicas $k_1, \ldots, k_m$, respectivamente, cada uno de los subespacios K_{λ_i} es invariante respecto al operador A y el operador A/K_{λ_i} inducido sobre este subespacio posee el polinomio característico $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$.

6.4.5. Demostrar que la descomposición (6.4.2) que posee las propiedades descritas en el problema 6.4.4 es la única para el operador A dado.

6.4.6. El subespacio K_{λ_i} en la descomposición (6.4.2) se llama *subespacio radical (principal)* correspondiente al valor propio λ_i. Mostrar que de los problemas 6.4.1—6.4.5 se deduce que:

a) el subespacio K_{λ_i} puede ser descrito como un conjunto de todos los vectores x tales que $(A - \lambda_i E)^s x = 0$; aquí s es cualquier número natural;

b) el subespacio K_{λ_i} puede ser descrito como el núcleo del operador $(A - \lambda_i E)^{q_i}$, donde q_i es un número natural que no sobrepasa k_i;

c) el subespacio propio L_{λ_i} correspondiente al valor propio λ_i se encuentra en el subespacio radical K_{λ_i}.

6.4.7. Mostrar que para que un operador A tenga estructura simple es necesario y suficiente que para cada valor propio λ_i de este operador el subespacio propio L_{λ_i} coincide con el subespacio radical K_{λ_i}.

6.4.8. Demostrar que si K_{λ_i} es un subespacio radical de un operador A, que corresponde al valor propio λ_i, entonces:

a) K_{λ_i} es un subespacio radical del operador $A - \lambda_0 E$, que corresponde al valor propio $\lambda_i - \lambda_0$;

b) K_{λ_i} es un subespacio radical del operador A^{-1}, que corresponde al valor propio $1/\lambda_i$.

6.4.9*. Demostrar que todo subespacio radical de un operador A es un subespacio invariante de cualquier operador B que conmuta con A.

6.4.10*. Demostrar el *teorema de Cayley-Hamilton*: todo operador A se anula por su polinomio característico.

6.4.11. Demostrar que si un operador A de un espacio de dimensión n es regular, el operador inverso A^{-1} puede ser representado como un polinomio de grado $n - 1$ de A.

Construir los subespacios radicales de las matrices siguientes:

6.4.12. $\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 6.4.13. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$.

6.4.14. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$. 6.4.15. $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$.

6.4.16. Todo vector del subespacio radical K_{λ_i} de un operador A se llama *vector radical* de este operador referente al valor propio λ_i. Llámase *índice* del vector radical x de K_{λ_i} al número natural h tal que $(A - \lambda_i E)^h x = 0$, pero $(A - \lambda_i E)^{h-1} x \neq 0$. El índice del vector nulo es nulo por definición.

Mostrar que:

a) el índice de todo vector de K_{λ_i} no sobrepasa la multiplicidad algebraica k_i del valor propio λ_i;

b) el índice del vector propio es igual a 1;

c) el conjunto H_k de todos los vectores de K_{λ_i} cuyos índices no sobrepasan el número natural k dado es un subespacio.

6.4.17*. Sea x el vector radical de un operador A que corresponde al valor propio λ_i y de índice h (> 0). Demostrar que:

a) el índice del vector $(A - \lambda_i E)\, x$ es $h - 1$;

b) el índice del vector $(A - \lambda_j E)\, x$, donde λ_j es el valor propio del operador A distinto de λ_i, es h;

c) si λ_i es una raíz del polinomio $f(t)$ de multiplicidad l, donde $l \leqslant h$, entonces el índice del vector $f(A)\, x$ es $h - l$;

d) el índice del vector $A^{-1}x$ es $\leqslant h$;

e) si B es un operador que conmuta con A, el índice del vector Bx no sobrepasa h.

6.4.18. Mostrar que el vector radical x de un operador A es un vector radical del mismo índice a) para el operador $A - \lambda_0 E$; b) para el operador A^{-1}.

6.4.19. Demostrar que el sistema de vectores no nulos de K_{λ_i} que posee índices distintos de dos en dos es linealmente independiente.

6.4.20. Sea x un vector de índice h de K_{λ_i}.

Mostrar que:

a) el sistema de vectores $(A - \lambda_i E)^{h-1} x$, $(A - \lambda_i E)^{h-2} x$, ..., $(A - \lambda_i E)\, x$, x es linealmente independiente;

b) la cápsula lineal de este sistema es un subespacio invariante del operador A.

En los problemas 6.4.21—6.4.62 se examinan los operadores de un espacio de dimensión n y las matrices de orden n que poseen solamente un valor propio λ_0 de multiplicidad algebraica n. En el texto que sigue esta circunstancia no se menciona especialmente. Claro está que todos los resultados obtenidos son igualmente válidos para un operador arbitrario considerado solamente sobre el subespacio radical.

6.4.21. Un operador A de un espacio X de dimensión n se llama *unicelular* si el índice máximo del vector radical coincide con la dimensión n del espacio. Demostrar que:

a) toda base del espacio X contiene por lo menos un vector de índice n;

b) si x es un vector de índice n, el sistema de vectores $(A - \lambda_0 E)^{n-1}x$, $(A - \lambda_0 E)^{n-2}x$, . . ., $(A - \lambda_0 E)\,x$, x es una base del espacio X;

c) la matriz del operador A en esta base es una célula de Jordan de orden n referente al número λ_0. El punto c) explica el sentido de la denominación «*operador unicelular*».

Así, pues, en el caso de un operador unicelular la base canónica es un sistema $(A - \lambda_0 E)^{n-1}x$, . . ., $(A - \lambda_0 E)\,x$, x llamado *serie* construida a partir del vector x, en tanto que la forma de Jordan está compuesta de una sola célula de orden n.

6.4.22. En los datos del problema 6.4.21, b) hallar la matriz de un operador A en la base x, $(A - \lambda_0 E)\,x$, . . ., $(A - \lambda_0 E)^{n-1}x$.

Construir la base canónica y hallar la forma de Jordan de las matrices siguientes:

6.4.23. $\begin{Vmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{Vmatrix}$. 6.4.24. $\begin{Vmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{Vmatrix}$.

6.4.25. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$. 6.4.26. $\begin{Vmatrix} 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

Hallar la forma de Jordan de las matrices de orden n siguientes:

6.4.27. $$\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.28. $\begin{Vmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

6.4.29. $\begin{Vmatrix} 9 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 9 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 9 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 9 \end{Vmatrix}$,

$\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \neq 0$.

6.4.30. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

6.4.31. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{Vmatrix}$.

6.4.32. $\begin{Vmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{Vmatrix}$,

$a_{12}a_{23} \dots a_{n-1,n} \neq 0$.

6.4.33. Hallar la base canónica y la forma de Jordan de un operador de derivación en un espacio de polinomios M_n.

6.4.34. Demostrar que si A es un operador unicelular de valor propio $\lambda_0 \neq 0$, entonces serán también unicelulares: a) el operador A^2; b) el operador A^l para cualquier número natural l; c) el operador A^{-1}.

6.4.35. Mostrar que si A es un operador unicelular con el valor propio 0, A^2 ya no es un operador unicelular (se supone que la dimensión del espacio es superior a 1).

6.4.36. Demostrar que para un operador unicelular A el subespacio H_k —el núcleo del operador $(A - \lambda_0 E)^k$—, es de dimensión k, $0 < k \leqslant n$.

6.4.37. Demostrar que un operador unicelular A no posee subespacios invariantes no triviales distintos de los subespacios H_k (véase el problema 6.4.36).

6.4.38. Sean A y B operadores unicelulares conmutables. Demostrar que los espacios invariantes de estos operadores coinciden.

6.4.39. Demostrar que el polinomio mínimo de un operador unicelular A coincide con su polinomio característico.

6.4.40*. Supongamos que el índice máximo de un vector de un espacio X es igual a t. Los vectores $x_1, \ldots, x_p$ son linealmente independientes y tienen el índice t; en este caso la intersección de la cápsula lineal de los vectores $x_1, \ldots, x_p$ y del subespacio H_{t-1} se compone únicamente de un vector nulo. Demostrar que cualquiera que sea el número natural k, $0 < k < t$, los vectores $(A - \lambda_0 E)^k x_1, \ldots$ $\ldots, (A - \lambda_0 E)^k x_p$ son linealmente independientes y la intersección de la cápsula lineal de estos vectores con el subespacio H_{t-k-1} se compone sólo de un vector nulo (recordamos que el subespacio H_k es el núcleo del operador $(A - \lambda_0 E)^k$).

6.4.41. Designemos por m_k el defecto del operador $(A - \lambda_0 E)^k$. Deducir del resultado del problema 6.4.40 las desigualdades

$$n - m_{t-1} = m_t - m_{t-1} \leqslant m_k - m_{k-1},$$

donde $0 < k < t$, $m_0 = 0$.

6.4.42*. Demostrar que en el espacio del problema 6.4.40 las series construidas a partir de los vectores $x_1, \ldots, x_p$ engendran en su totalidad un sistema linealmente independiente.

6.4.43. Mostrar que si en los datos del problema 6.4.40 está cumplida la condición $n = (n - m_{t-1})\, t$ (donde n es la dimensión del espacio X), entonces:

a) las series $(A - \lambda_0 E)^{t-1} x_1, \ldots, (A - \lambda_0 E)\, x_1, \quad x_1, \ldots$ $\ldots, (A - \lambda_0 E)^{t-1} x_p, \ldots, (A - \lambda_0 E)\, x_p, x_p$ engendran en su totalidad una base del espacio X (aquí se considera que $p = n - m_{t-1}$);

b) la matriz del operador A en esta base tiene la forma casi diagonal siguiente:

$$\begin{Vmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_p \end{Vmatrix},$$

donde cada una de las matrices $J_1, J_2, \ldots, J_p$ es una célula de Jordan de orden t referente al número λ_0.

De este modo, en el caso considerado la base canónica de un operador A está compuesta de varias series de longitud máxima posible, mientras que la forma de Jordan se compone de algunas células de Jordan de un mismo orden.

Construir la base canónica y hallar la forma de Jordan de las matrices siguientes:

6.4.44. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. 6.4.45. $\begin{Vmatrix} 99 & 0 & 0 & 101 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 101 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{Vmatrix}$.

6.4.46. $\begin{Vmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{Vmatrix}$.

6.4.47. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

6.4.48. Hallar la base canónica y la forma de Jordan de un operador de derivación doble en un espacio de polinomios M_n suponiendo que $n = 2k - 1$, k es un número entero.

6.4.49. El índice máximo de un vector del espacio X es igual a t. Los vectores linealmente independientes $x_1, \ldots, x_{p_1}$ tienen el índice t; además el espacio X es una suma directa del subespacio H_{t-1} y de la cápsula lineal tendida sobre este sistema de vectores. Demostrar que si los números m_k (véase el problema 6.4.41) verifican la desigualdad

$$m_t - m_{t-1} < m_{t-1} - m_{t-2},$$

entonces:

a) las series construidas a partir de los vectores $x_1, \ldots, x_{p_1}$ no engendran en su totalidad la base del espacio X;

b) las series construidas a partir de los vectores $(A - \lambda_0 E)\, x_1, \ldots$ $\ldots, (A - \lambda_0 E)\, x_{p_1}$ no engendran en su totalidad la base del subespacio H_{t-1};

c) si los vectores linealmente independientes $x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2}$ de índice $t - 1$ son tales que la cápsula lineal tendida sobre el sistema de vectores $(A - \lambda_0 E)\, x_1, \ldots, (A - \lambda_0 E)\, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots$ $\ldots, x_{p_2}$ da en la suma directa con el subespacio H_{t-2} el subespacio H_{t-1}, las series construidas a partir de los vectores $x_1, \ldots, x_{p_1}$, $x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2}$ engendran en su totalidad un sistema linealmente independiente;

d) los números m_k satisfacen las condiciones

$$m_{t-1} - m_{t-2} \leqslant m_k - m_{k-1},$$

donde $0 < k < t-1$, $m_0 = 0$.

6.4.50. Hallar la relación entre la dimensión n de un espacio X, el índice máximo t de un vector y los números m_h, que permite formar una base de X a partir de las series construidas en el problema 6.4.49, c). Construir para este caso la forma de Jordan del operador A.

Construir la base canónica y hallar la forma de Jordan de las matrices siguientes:

6.4.51. $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$. 6.4.52. $\begin{Vmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$.

6.4.53. $\begin{Vmatrix} -2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$.

6.4.54. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$.

6.4.55. Hallar la base canónica y la forma de Jordan del operador de derivación doble en el espacio de polinomios M_n suponiendo que $n = 2k$, k es un número entero.

6.4.56. Mostrar que en el caso general la base de un espacio puede ser compuesta de p_1 series de longitud máxima t, $p_2 - p_1$ series de longitud $t-1$, en general, de $p_{t-k+1} - p_{t-k}$ series de longitud k, $0 < k < t$. Aquí

$$p_k = m_{t-k+1} - m_{t-k}.$$

Hallar para este caso la forma de Jordan del operador.

6.4.57. Deducir del resultado del problema 6.4.56 el corolario siguiente: los números m_k deben verificar la desigualdad

$$m_{r+1} - m_r \leqslant m_{s+1} - m_s$$

para $r > s$.

6.4.58. En un espacio de dimensión 8 ¿puede existir un operador nilpotente A, para el cual los números r_k, donde r_k designa el rango del operador A^k, constituyen la sucesión 6, 4, 3, 1, 0?

Construir la base canónica y hallar la forma de Jordan de las matrices siguientes:

6.4.59. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.4.60. $\begin{Vmatrix} -3 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.4.61. $\begin{Vmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{Vmatrix}$.

6.4.62*. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

Aprovechando el proceso de construcción de la base canónica en el subespacio radical descrito en la sección precedente y la descomposición de un espacio en una suma directa de subespacios radicales, hallar la base canónica y la forma de Jordan de las matrices siguientes:

6.4.63. $\begin{Vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

6.4.64. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.4.65. $\begin{Vmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$.

6.4.66. $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$.

6.4.67. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

6.4.68. $\begin{Vmatrix} -3 & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$.

6.4.69. $\begin{Vmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

6.4.70. $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{Vmatrix}$.

6.4.71. Los vectores de la base canónica de un operador A están numerados en el orden inverso. ¿Cómo cambiará la matriz del operador?

6.4.72. Conociendo la forma de Jordan de un operador A hallar la forma de Jordan del operador: a) $A - \lambda_0 E$; b) A^{-1}.

6.4.73. Mostrar que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de un operador A de un espacio de dimensión n (entre estos números puede haber números iguales), serán valores propios del polinomio $f(A)$ los números $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.

6.4.74. Demostrar que todo operador de un espacio complejo es una suma directa de los operadores unicelulares.

6.4.75*. Hallar una forma de Jordan del operador A^2 si se conoce una forma de Jordan de un operador A.

6.4.76. Demostrar que todo operador de un espacio complejo puede ser representado bajo la forma de la suma de un operador de estructura simple y de un operador nilpotente.

6.4.77*. Demostrar que el operador A que satisface la condición $A^2 = E$ y no es escalar es un operador de reflexión.

6.4.78. Demostrar que el operador A que satisface la condición $A^k = E$ para cierto k natural es un operador de estructura simple.

6.4.79*. Demostrar que en toda forma de Jordan de un operador A el número de células de Jordan referentes al valor propio λ_0 es igual al defecto m_1 del operador $A - \lambda_0 E$.

6.4.80*. Demostrar que en toda forma de Jordan de un operador A el número de células de Jordan referentes al valor propio λ_0 de orden superior o igual a k se define por la fórmula

$$S_{\geqslant k} = m_k - m_{k-1},$$

donde $m_0 = 0$ y m_k es el defecto del operador $(A - \lambda_0 E)^k$.

6.4.81. Deducir del resultado del problema 6.4.80 la relación

$$S_k = 2m_k - m_{k+1} - m_{k-1},$$

donde S_k es el número de células de Jordan de orden k referentes al valor propio λ_0.

De este modo la forma de Jordan de todo operador se define de un modo único con una exactitud de la disposición de las células de Jordan sobre la diagonal.

Sin calcular la base canónica hallar la forma de Jordan de las matrices siguientes:

6.4.82. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 6.4.83. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.4.84. $\begin{Vmatrix} 5 & 0 & 6 & 7 & 9 & 14 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{Vmatrix}$.

6.4.85. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 5 & 7 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 0 & -4 \end{Vmatrix}$.

6.4.86*. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

6.4.87*. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

6.4.88. En el espacio de polinomios M_n hallar la forma de Jordan de un operador en diferencias A_1.

6.4.89. En el espacio de polinomios M_8 hallar una forma de Jordan: a) de un operador de derivación triple; b) de un operador A_1^3, donde A_1 es un operador en diferencias.

6.4.90. Mostrar que en cada clase de matrices semejantes existe una forma de Jordan y una sola con una exactitud de la permutación de las células de Jordan sobre la diagonal.

Determinar si las matrices dadas A, B y C son semejantes:

6.4.91*. $A=\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -12 & 8 & 20 \\ 3 & -2 & -5 \end{Vmatrix}$,

$B=\begin{Vmatrix} 59 & -63 & 52 \\ -147 & 159 & -132 \\ -244 & 263 & -219 \end{Vmatrix}$, $C=\begin{Vmatrix} 59 & -63 & 52 \\ -147 & 159 & -132 \\ -244 & 263 & -218 \end{Vmatrix}$.

6.4.92. $A=\begin{Vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{Vmatrix}$,

$B=\begin{Vmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$, $C=\begin{Vmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$.

6.4.93. $A=\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{Vmatrix}$,

$B=\begin{Vmatrix} -8 & 12 & -6 \\ -10 & 18 & -10 \\ -12 & 24 & -14 \end{Vmatrix}$, $C=\begin{Vmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 16 & 12 \\ 4 & -28 & -20 \end{Vmatrix}$.

6.4.94. Demostrar que toda matriz compleja A es semejante a la matriz transpuesta A^T.

6.4.95. ¿Qué se puede decir de la forma de Jordan de una matriz A si A es semejante a la matriz inversa A^{-1}?

6.4.96. Demostrar que una célula de Jordan es semejante a la matriz de Frobenius de su polinomio característico.

6.4.97. Demostrar que toda matriz compleja es semejante a una matriz casi diagonal, todas las células diagonales de la cual son matrices de Frobenius.

6.4.98*. Hallar la condición necesaria y suficiente para que el polinomio mínimo de una matriz compleja coincida con su polinomio característico.

6.4.99. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ todos los valores propios distintos de una matriz compleja A de orden $n \times n$. Demostrar que la matriz A tiene estructura simple si, y solamente si, el polinomio $(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_m)$ es para A un polinomio mínimo.

6.4.100*. Una matriz cuadrada A de orden m tiene estructura simple; se conoce una forma de Jordan J de la matriz B $n \times n$. Hallar la forma de Jordan de la matriz: a) $A \times B$; b) $A \times E_n + E_m \times B$.

Aplicar los resultados obtenidos a los operadores G_{AB} y F_{AB} del problema 5.6.10.

6.4.101. Hallar la forma de Jordan de una matriz de orden n

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ \varepsilon & & & & & & 1 \end{Vmatrix},$$

donde ε es positivo y se halla en el lugar $(n, 1)$; los elementos no indicados fuera de la diagonal son iguales a cero.

6.4.102*. Reemplacemos en la forma de Jordan de una matriz A los elementos fuera de la diagonal iguales a la unidad (si los hay) por un número arbitrario $\varepsilon \neq 0$. Demostrar que la matriz obtenida es semejante a la matriz A.

Capítulo 7

OPERADORES DE UN ESPACIO UNITARIO

§ 7.0. Terminología y generalidades

Sean X e Y dos espacios, ambos euclídeos o ambos unitarios. Examinemos un operador lineal A de ω_{XY}. El operador lineal A^* de ω_{YX} se llama *conjugado respecto al operador* A si para todo vector $x \in X$ y todo vector $y \in Y$ se verifica la igualdad

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \tag{7.0.1}$$

Todo operador A posee un operador conjugado A^* y uno solo.

Sea A una matriz compleja $m \times n$. La matriz A^* de tipo $n \times m$ se llama *conjugada respecto a la matriz* A si

$$a_{ij}^* = \overline{a}_{ji}$$

para todos los i, j.

En cada par de bases ortonormalizadas de espacios unitarios X e Y al operador adjunto le corresponde una matriz conjugada e inversamente. En caso de los espacios euclídeos X e Y la correspondencia se establece del mismo modo entre los operadores conjugados y las matrices transpuestas.

Examinemos ahora los operadores que actúan en un espacio unitario X. Tiene lugar el teorema siguiente:

Teorema de Schur. Para todo operador A existe una base ortonormalizada de un espacio X en el cual la matriz de este operador es triangular.

La noción de operador conjugado permite destacar una serie de importantes clases de operadores que actúan en un espacio unitario X.

Un operador A se llama *normal* si

$$A^*A = AA^*. \tag{7.0.2}$$

Un operador U se llama *unitario* si

$$U^*U = UU^* = E. \tag{7.0.3}$$

Un operador H se llama *hermitiano* si

$$H^* = H. \tag{7.0.4}$$

Un operador K se llama *antihermitiano* si

$$K^* = -K. \tag{7.0.5}$$

El operador hermitiano H se llama *no negativo* (*definido positivo*) si para todo vector no nulo x

$$(Hx, x) \geqslant 0 \quad (>0). \tag{7.0.6}$$

Del mismo modo se determinan las *matrices normales, unitarias, hermitianas, antihermitianas, no negativas* y *definidas positivas*. En los dos últimos casos, por regla general, las matrices se identifican con los operadores de un espacio aritmético.

Para las clases de operadores indicadas más arriba son válidos los resultados siguientes:

Un operador A es normal si, y solamente si, existe una base ortonormalizada de vectores propios.

Un operador normal A es unitario si, y solamente si, todos sus valores propios son iguales a la unidad en módulo.

Un operador normal A es hermitiano si, y solamente si, todos sus valores propios son reales.

Un operador hermitiano H es no negativo (definido positivo) si, y solamente si, todos sus valores propios son no negativos (positivos).

Todo operador A de ω_{XX} verifica la representación

$$A = H_1 + iH_2, \tag{7.0.7}$$

donde H_1 y H_2 son operadores hermitianos, llamada *descomposición hermitiana* del operador A. En este caso

$$H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

En un espacio euclídeo X las relaciones (7.0.2)—(7.0.6) distinguen también clases de operadores llamados *normales, ortogonales, simétricos, antisimétricos, no negativos* y *definidos positivos*. Del mismo modo se definen las clases homónimas de matrices reales.

Las determinaciones y los resultados posteriores son también válidos tanto para los espacios unitarios, como para los espacios euclídeos.

Sea A un operador de rango r que actúa de X en Y. En este caso los valores propios no nulos de los operadores A^*A y AA^* coinciden (teniendo en cuenta su multiplicidad) y son positivos.

Si n y m son las dimensiones de los espacios X e Y, respectivamente, la multiplicidad del valor propio nulo es $n - r$ para el operador A^*A y $m - r$ para el operador AA^*.

Adoptemos $s = \min(n, m)$ y designemos por $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_s^2$ ($\alpha_i \geqslant 0$) los valores propios comunes de los operadores A^*A y AA^*. Los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ se llaman *números singulares del operador* A.

De un modo análogo se definen los *números singulares de una matriz*.

En todos los casos un operador A posee bases ortonormales $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_m$ (si $A \in \omega_{XX}$, entonces $m = n$) tales que:

1) los vectores $e_1, \ldots, e_n$ son vectores propios del operador A^*A;

2) los vectores $f_1, \ldots, f_m$ son vectores propios del operador AA^*;

3) si $e_1, \ldots, e_r$ y $f_1, \ldots, f_r$ corresponden a los números no nulos $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_r^2$, entonces

$$f_i = \frac{1}{\alpha_i} A e_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Cada par de bases $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_m$ que poseen las propiedades indicadas se llama par de *bases singulares* del operador A.

Para todo operador A que actúa en un espacio X tiene lugar una representación bajo la forma de un producto de operadores no negativo y unitario (ortogonal)

$$A = HU \tag{7.0.8}$$

llamada *descomposición polar* del operador A.

Sean A un operador de ω_{XY}, b, un vector fijado del espacio Y. Examinemos la igualdad

$$Ax = b \tag{7.0.9}$$

como una ecuación destinada a determinar los vectores x de X. Esta ecuación es compatible si. y solamente si. $b \in T_A$. En este caso serán soluciones de (7.0.9) todas las preimágenes del vector b. Pero si $b \notin T_A$, entonces en este caso es razonable buscar los vectores x para los cuales el vector

$$y = b - Ax$$

tiene la longitud mínima posible. Todo vector x de este tipo se llama *seudosolución* de la ecuación (7.0.9). La seudosolución con longitud mínima se llama *seudosolución normal* de la ecuación (7.0.9). Ésta existe siempre y es la única.

Considerando la ecuación (7.0.9) para todos los vectores b de Y y asignando a cada vector b la seudosolución normal de la ecuación correspondiente obtendremos un operador lineal de Y en X que se llama *seudoinverso* del operador A y se nota A^+.

Llámase *forma cuadrática* F de n variables reales $x_1, \ldots, x_n$ a la función de la forma

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{7.0.10}$$

donde a_{ij} son números reales y se puede considerar que $a_{ij} = a_{ji}$.

Componiendo una matriz simétrica A a partir de los coeficientes a_{ij} (llamada *matriz de la forma cuadrática*) y un vector columna x a base de las variables $x_1, \ldots, x_n$ la definición de la forma cuadrática puede escribirse así:

$$F = (Ax, x). \tag{7.0.11}$$

El producto escalar se define aquí por la regla usual (7.1.4). Llámase *rango* de una forma cuadrática F al rango de su matriz A.

Reemplazando las variables

$$x = Py \tag{7.0.12}$$

la forma F pasa a una forma cuadrática de nuevas variables $y_1, \ldots, y_n$, siendo que la matriz B de esta forma está ligada con la matriz A por la relación

$$B = P^T AP. \tag{7.0.13}$$

La transformación de variables (7.0.12) se llama *regular* si la matriz P es regular. En las transformaciones regulares de las variables el rango de una matriz cuadrática no cambia.

Mediante una transformación regular de las variables toda forma cuadrática F de rango r puede ser reducida a la forma

$$F = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2, \tag{7.0.14}$$

llamada *forma canónica* de la forma F. Aquí $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son diferentes de cero.

La forma canónica de la forma cuadrática dada, como regla, no está bien definida. En particular, se puede siempre obtener que los coeficientes no nulos de la forma canónica sean iguales a 1 o bien a -1. Semejante notación canónica se llama *forma normal* de la forma cuadrática. A pesar de que la forma canónica es no unívoca tiene lugar la afirmación siguiente.

Ley de inercia de las formas cuadráticas. El número de coeficientes positivos y el número de coeficientes negativos entre los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ es el mismo para toda forma canónica a la cual puede ser reducida una forma cuadrática dada por una transformación regular de las variables.

Estos números se llaman *índice de inercia positivo* e *índice de inercia negativo*, respectivamente, mientras que la diferencia entre estos índices se llama *signatura* de la forma cuadrática.

Advirtamos que toda forma cuadrática F puede ser reducida a la forma canónica por una transformación *ortogonal* de las variables (es decir, por una transformación con una matriz ortogonal de los coeficientes). Para eso es suficiente en la fórmula (7.0.12) tomar como P la matriz ortogonal cuyas columnas son los vectores propios de la matriz A. En este caso serán coeficientes de la forma canónica obtenida los valores propios de A.

La forma cuadrática (7.0.11) se llama *definida positiva* si

$$(Ax, x) > 0$$

para $x \neq 0$. La forma normal de una forma definida positiva F se escribe

$$F = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2. \tag{7.0.15}$$

Las dos formas cuadráticas F y G de unas mismas variables pueden ser reducidas a la forma canónica mediante una sola transformación si por lo menos una de las formas (por ejemplo, F) es definida positiva. En este caso se efectúa primeramente la transformación $x = Py$ que reduce la forma F a la forma normal (7.0.15). La forma G se transforma en este caso en cierta forma de las variables $y_1, \ldots, y_n$. En la segunda etapa se realiza la transformación ortogonal $y = Qz$ que reduce G a la forma canónica; F conserva su forma normal y pasa a la forma $F = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$.

Advirtamos en conclusión que la notación $e^{i\psi}$ utilizada en este capítulo debe ser entendida como una notación abreviada del número complejo $z = \cos\psi + i \operatorname{sen}\psi$.

§ 7.1. Operador conjugado, matriz conjugada

Presentación de los problemas del párrafo. En este párrafo examinamos las cuestiones siguientes:

Definición y propiedades algebraicas de los operadores conjugados y las matrices conjugadas.

Ejemplos de operadores conjugados.

Correspondencia entre los operadores conjugados y las matrices conjugadas que tiene lugar en las bases ortonormales de un espacio.

Correlaciones entre las características geométricas de un operador A y de un operador A^* conjugado tales como el núcleo, la imagen, los valores propios, etc.

Subrayamos en todos los casos que la propiedad de dos operadores de ser conjugados depende del procedimiento empleado para introducir un producto escalar en el espacio lineal dado.

7.1.1. Deducir de la definición de un operador conjugado las propiedades siguientes:

a) $(A^*)^* = A$;

b) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

c) $0^* = 0$;

d) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$;

e) $(AB)^* = B^* A^*$;

f) $E^* = E$;

g) si un operador A es regular, entonces $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$;

h) $(A^m)^* = (A^*)^m$ para todo m entero no negativo;

i) si un operador A es regular, la propiedad h) tiene lugar para todo m entero;

j) si $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m$ es un polinomio arbitrario, entonces

$$[f(A)]^* = \bar{f}(A^*),$$

donde $\bar{f}(t) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 t + \ldots + \bar{a}_m t^m$.

7.1.2. Demostrar que las propiedades enunciadas en el problema precedente también se cumplen para las matrices conjugadas.

7.1.3. Mostrar que para un operador nilpotente A de índice de nilpotencia q el operador conjugado A^* es también nilpotente y posee el mismo índice de nilpotencia.

7.1.4. Mostrar que si los operadores A y B son conmutables, lo son también los operadores conjugados A^* y B^*.

7.1.5. En los espacios unitarios (euclídeos) X e Y están fijadas ciertas bases $e_1, \ldots, e_n$ y $q_1, \ldots, q_m$, respectivamente. Supongamos que los operadores lineales A y B verifican las relaciones

$$(Ae_i, q_j) = (e_i, Bq_j), \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m.$$

Demostrar que en este caso $A^* = B$.

7.1.6. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortogonal (pero no ortonormal) de un espacio X. Hallar en esta base la relación entre las matrices del operador A de ω_{XX} y del operador conjugado A^*.

7.1.7*. Supongamos que en una base $e_1, \ldots, e_n$ de un espacio unitario (euclídeo) X la matriz del operador A es A_e. Demostrar que en la base $f_1, \ldots, f_n$ biortogonal a la base $e_1, \ldots, e_n$ la matriz del operador conjugado A^* es $(A_e)^*$.

7.1.8. Supongamos que un operador A actúa en un espacio unitario (euclídeo) unidimensional. ¿En qué consiste la transformación A^* conjugada respecto a A?

7.1.9. Hallar el operador conjugado para efectuar el giro de un plano euclídeo a un ángulo α.

7.1.10*. Hallar el operador conjugado de un operador del espacio euclídeo tridimensional $Ax = [x, a]$, a es un vector fijado.

7.1.11. En el espacio de polinomios M_2 está dado el producto escalar

$$(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2, \tag{7.1.1}$$

donde $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$. Hallar las matrices del operador de derivación A y del operador conjugado A^* en la base: a) $1, t, t^2$; b) $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$, $t^2 - 1$, $\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$; c) $1, t, \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$.

7.1.12. El producto escalar

$$(f, g) = f(-1)\,g(-1) + f(0)\,g(0) + f(1)\,g(1) \tag{7.1.2}$$

está introducido en un espacio M_2. Hallar la matriz del operador conjugado del operador de derivación en cada una de las bases indicadas en el problema 7.1.11. Comparar las matrices obtenidas con las matrices correspondientes del problema 7.1.11.

7.1.13. El producto escalar

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt \tag{7.1.3}$$

está introducido en un espacio M_2. En cada una de las bases indicadas en el problema 7.1.11 hallar la matriz del operador conjugado del operador de derivación.

7.1.14. En un espacio aritmético de dimensión n, cuyos elementos son vectores columna, está introducido el producto escalar natural

$$(x, y) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{\beta}_n. \tag{7.1.4}$$

Aquí

$$x=\begin{Vmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_n\end{Vmatrix}, \quad y=\begin{Vmatrix}\beta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \beta_n\end{Vmatrix}$$

(en el caso real el signo de conjugación compleja se omite).

Mostrar que si las matrices $n \times n$ se identifican con los operadores de este espacio en el sentido del problema 5.6.7, será operador conjugado de la matriz A:

a) la matriz transpuesta A^T en el caso del espacio real R_n;

b) la matriz conjugada A^* en el caso del espacio complejo C_n.

7.1.15. Demostrar que en el caso del producto de Kronecker $A \times B$ la matriz conjugada tiene la forma $A^* \times B^*$.

7.1.16. Demostrar que si A es una matriz cuadrada, las matrices asociadas verifican la relación

$$(A^*)_p = (A_p)^*.$$

7.1.17. Designemos por $R_{n\times n}$ y $C_{n\times n}$ los espacios de las matrices $n \times n$ reales y complejas, respectivamente, en las cuales el producto escalar está dado por la fórmula

$$(A, B)=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ij} \tag{7.1.5}$$

(en el caso real el signo de conjugación se omite).

Mostrar que

$$(A, B) = \operatorname{tr}(B^*A) = \operatorname{tr}(AB^*). \tag{7.1.6}$$

7.1.18. Mostrar que en los espacios $R_{n\times n}$ y $C_{n\times n}$ son operadores conjugados de los operadores G_{AB} y F_{AB} del problema 5.6.10 los operadores $G_{A^*B^*}$ y $F_{A^*B^*}$.

7.1.19. Sean $A_1, \ldots, A_n$ matrices $n \times n$ reales fijadas. Examinemos el operador A siguiente de R_n en $R_{n\times n}$:

$$x=\begin{Vmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_n\end{Vmatrix} \xrightarrow{A} Ax=\alpha_1A_1+\ldots+\alpha_nA_n.$$

El producto escalar de R_n está dado de acuerdo con (7.1.4). Mostrar que el conjugado de A es el operador

$$B\rightarrow y=\begin{Vmatrix}\beta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \beta_n\end{Vmatrix}, \quad \beta_i=\operatorname{tr}(B^TA_i)=\operatorname{tr}(A_i^TB), \quad i=1, \ldots, n.$$

Extender este resultado al caso complejo.

7.1.20. Mostrar que toda funcional lineal $f(x)$ de un espacio unitario (euclídeo) X puede darse como un producto escalar

$$f(x) = (x, f),$$

donde f es un vector fijado (para la funcional dada) del espacio.

7.1.21. Mostrar que un operador conjugado de un operador de proyección es también un operador de proyección.

7.1.22. Mostrar que un operador conjugado de un operador de reflexión es también un operador de reflexión.

7.1.23. Mostrar que el rango de un operador conjugado A^* es igual al rango de un operador A.

7.1.24. Demostrar que el núcleo de un operador A^* coincide con el complemento ortogonal de la imagen de un operador A.

7.1.25. En un espacio euclídeo tridimensional está fijado un sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$. Sea A el operador de proyección sobre el plano de coordenadas Oxy paralelo a la recta dada por las ecuaciones $x = y = z$. Hallar el operador conjugado A^*.

7.1.26. Hallar el núcleo y la imagen del operador de un espacio M_2 conjugado del operador de derivación si el producto escalar está introducido en M_2 mediante la fórmula: a) (7.1.1); b) (7.1.2); (7.1.3).

7.1.27. Demostrar el *teorema de Fredholm*: para que un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales $Ax = b$ sea compatible es necesario y suficiente que el vector columna b sea ortogonal a todas las soluciones del sistema homogéneo conjugado $A^*y = 0$ (compárese con 4.5.3).

7.1.28. Demostrar la *alternativa de Fredholm* siguiente: o bien el sistema de ecuaciones $Ax = b$ es compatible para cualquiera que sea el segundo miembro b, o bien el sistema homogéneo conjugado $A^*y = 0$ admite soluciones no nulas.

7.1.29. Demostrar que el núcleo del operador A^*A coincide con el del operador A.

7.1.30. Demostrar que la imagen del operador A^*A coincide con la imagen del operador A^*.

7.1.31. Sean los operadores A y B tales que $B^*A = 0$. Demostrar que las imágenes de estos operadores son subespacios ortogonales.

7.1.32*. Demostrar que si $AB^* = 0$ y $B^*A = 0$ el rango del operador $A + B$ es igual a la suma de rangos de los operadores A y B. En este caso el núcleo del operador $A + B$ es la intersección de los núcleos de los operadores A y B.

7.1.33. Demostrar que si el subespacio L de un espacio unitario (euclídeo) es invariante respecto a un operador A, su complemento ortogonal $L^\perp$ es invariante respecto al operador conjugado A^*.

7.1.34*. En el espacio M_n de polinomios de grado $\leqslant n$ el producto escalar viene dado por la fórmula

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \tag{7.1.7}$$

donde $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$; $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots$

$\ldots + b_n t^n$. Describir todos los subespacios invariantes del operador conjugado respecto al operador de derivación.

7.1.35. El producto escalar está introducido en M_n por la fórmula

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n} f(k) g(k). \tag{7.1.8}$$

Hallar el subespacio invariante de dimensión n del operador conjugado respecto al operador de derivación.

7.1.36. Se plantea la misma tarea para el caso cuando el producto escalar está definido en M_n por la fórmula

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt. \tag{7.1.9}$$

7.1.37. Demostrar que en un espacio unitario de dimensión n todo operador posee: a) un subespacio invariante de dimensión $n-1$; b) un subespacio invariante de dimensión k, $0 < k < n$ (compárese con 6.3.9 y 6.3.36).

7.1.38. Demostrar el teorema de Schur siguiente: para todo operador A que actúa en un espacio unitario existe una base ortonormalizada en la cual la matriz del operador A es triangular (compárese con 6.3.36).

7.1.39. Hallar la base de Schur de un operador de derivación en un espacio M_2 si el producto escalar está introducido en este espacio por la fórmula: a) (7.1.1); b) (7.1.2); c) (7.1.3).

7.1.40*. Demostrar que los operadores conmutables A y B que actúan en un espacio unitario poseen una base de Schur común, en la cual las matrices de estos operadores son de la misma forma triangular.

7.1.41. Hallar la relación entre los valores propios de un operador A que actúa en un espacio unitario, y del operador conjugado A^*.

7.1.42. Sea x el vector propio común de los operadores conjugados A y A^*. Demostrar que los valores propios λ y μ de los operadores A y A^* correspondientes al vector x son números conjugados.

7.1.43. Sean x el vector propio de un operador A referente al valor propio λ, y el vector propio del operador A^* con su valor propio μ; además $\mu \neq \bar{\lambda}$. Demostrar que los vectores x e y son ortogonales.

7.1.44*. Sean K_λ y K_μ^* subespacios principales de los operadores A y A^* que corresponden a los valores propios λ y μ, respectivamente; además $\mu \neq \bar{\lambda}$. Demostrar que los subespacios K_λ y K_μ^* son ortogonales.

7.1.45. ¿Cuál es la relación entre las formas de Jordan de los operadores conjugados A y A^*?

7.1.46. En el espacio de polinomios M_2 con el producto escalar (7.1.1) hallar las bases canónicas de Jordan de un operador de derivación y de su operador conjugado.

7.1.47*. Demostrar que la base de Schur de un operador A está definida no unívocamente. Precisamente, para toda disposición dada de antemano de los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de un operador A existe una base ortonormalizada del espacio unitario, en la cual la matriz de este operador es triangular superior (inferior); además sobre la diagonal principal se encuentran los valores propios λ_i en el orden indicado.

§ 7.2. Operadores y matrices normales

Presentación de los problemas del párrafo. En este párrafo discutimos las diversas propiedades que tienen los operadores normales y las matrices normales. Entre estas propiedades la más importante consiste en que semejantes operadores y matrices tienen una base ortonormalizada compuesta de vectores propios; de esto se trata en la mayoría de los problemas. Al mismo tiempo procuramos aclarar el siguiente hecho importante: entre todos los operadores de estructura simple los operadores normales se distinguen respecto al producto escalar dado en el espacio; a saber, su base de vectores propios no es arbitraria, sino ortogonal. Pero si en este mismo espacio lineal se cambia el producto escalar, los operadores que antes han sido normales cesan de serlo, como regla, y a la inversa, un otro subconjunto de operadores de estructura simple pasa a ser clase de operadores normales.

7.2.1. Mostrar que todo operador escalar de un espacio unitario (euclídeo) es un operador normal.

7.2.2. Mostrar que si A es un operador normal, lo serán también los operadores siguientes:

a) αA para todo número α;
b) A^k para todo k natural;
c) $f(A)$ para todo polinomio $f(t)$;
d) A^{-1}, si A es regular;
e) A^*.

7.2.3. Dar ejemplos que muestren que en el caso general la suma $A + B$ y el producto AB de operadores normales A y B ya no serán operadores normales.

7.2.4. Mostrar que en toda base ortonormalizada de un espacio la matriz de un operador normal es también normal. Y viceversa, toda matriz normal da en una tal base un operador normal.

7.2.5. Dar ejemplos que muestren que en una base no ortogonal la matriz de un operador normal: a) puede no ser normal; b) puede ser normal.

7.2.6. Mostrar que todo operador lineal que actúa en un espacio unitario (euclídeo) es un operador normal.

7.2.7. Mostrar que un operador de rotación de un espacio euclídeo es un operador normal.

7.2.8. Mostrar que un operador de un espacio euclídeo tridimensional $Ax = [x, a]$ es normal.

7.2.9. Mostrar que en un espacio de polinomios M_n con el producto escalar (7.1.7) los operadores siguientes son normales:

a) $f(t) \to f(-t)$;
b) $f(t) \to t^n f\left(\frac{1}{t}\right)$.

7.2.10. Demostrar que toda matriz circulante es una matriz normal.

7.2.11. Sea $A = B + iC$ una matriz normal compleja de orden n. Demostrar que la matriz D real de orden $2n$

$$D = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \tag{7.2.1}$$

es también normal.

7.2.12. Demostrar que si las filas y las columnas de una matriz normal se consideran como vectores de un espacio aritmético con el producto escalar natural (7.1.4), entonces:

a) la longitud de la i-ésima fila es igual a la longitud de la i-ésima columna;

b) el producto escalar de la i-ésima y la j-ésima filas es igual al producto escalar de la j-ésima y la i-ésima columnas (en el orden indicado).

7.2.13. Demostrar que una matriz normal casi triangular es obligatoriamente una matriz casi diagonal.

7.2.14. Demostrar que si A es una matriz normal, la matriz asociada A_p también lo es.

7.2.15. Demostrar que la suma de los cuadrados de módulos de todos los menores de orden k elegidos entre las filas de una matriz normal A de índices $i_1, \ldots, i_k$ es igual a la suma análoga de las columnas de los mismos índices.

7.2.16. Demostrar que el producto de Kronecker de las matrices normales A y B cuyo orden puede ser distinto es también una matriz normal.

7.2.17. Sean A y B matrices normales $n \times n$. Demostrar que los operadores G_{AB} y F_{AB} (véase el 5.6.10) son operadores normales del espacio $C_{n \times n}$ $(R_{n \times n})$.

7.2.18. Demostrar que si A es un operador normal, todo vector x verifica la igualdad

$$|Ax| = |A^*x|. \tag{7.2.2}$$

7.2.19. Demostrar que el núcleo de un operador normal es un complemento ortogonal de su imagen.

7.2.20*. Demostrar la afirmación siguiente: para que un operador A de un espacio unitario sea normal es necesario y suficiente que para todo número λ la imagen y el núcleo del operador $A - \lambda E$ sean ortogonales. ¿Es justa una afirmación análoga referente a un espacio euclídeo?

7.2.21. Demostrar que un operador de proyección P es normal si, y solamente si, su imagen y su núcleo son ortogonales. En este caso P se llama operador *de proyección ortogonal*.

7.2.22. Sean A y B operadores normales y $AB = 0$. ¿Resulta de esto que $BA = 0$?

7.2.23. Demostrar que todo vector propio de un operador normal A es también un vector propio del operador conjugado A^*.

7.2.24*. Demostrar la afirmación recíproca de 7.2.23: si todo vector propio de un operador A que actúa en un espacio unitario es también un vector propio del operador conjugado A^*, entonces el operador A es normal.

7.2.25*. Demostrar que todo subespacio invariante de un operador normal A es invariante respecto a A^*.

7.2.26. Demostrar que un operador inducido por un operador normal sobre un espacio invariante arbitrario es también un operador normal.

7.2.27. Mostrar que los subespacios propios de un operador normal son ortogonales de dos en dos.

7.2.28. Demostrar que un operador de reflexión R en L_1 paralelamente a L_2 es normal si, y solamente si, los subespacios L_1 y L_2 son ortogonales. En este caso R se llama operador *de reflexión ortogonal.*

7.2.29. ¿Puede un operador normal tener una base no ortogonal compuesta de vectores propios?

Verificar que las matrices indicadas más abajo son matrices normales y hallar para cada una de ellas la base ortonormalizada (en el sentido de (7.1.4)) de vectores propios:

7.2.30. $\begin{Vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{Vmatrix}$. **7.2.31.** $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.2.32*. $\begin{Vmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{Vmatrix}$.

7.2.33. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

7.2.34. ¿Se puede introducir un producto escalar en un espacio de polinomios M_n ($n \geqslant 1$) de modo que el operador de derivación sea un operador normal?

7.2.35. En un espacio de polinomios M_n ($n \geqslant 1$) se examina el operador $f(t) \to f(t+a)$, donde a es un número fijado. ¿Se puede establecer un producto escalar en M_n de modo que este operador sea normal?

7.2.36. Sea X un espacio lineal arbitrario. Demostrar que cualquiera que sea el operador A de estructura simple que actúa en X se puede dar en X un producto escalar de modo que A sea un operador normal.

7.2.37*. En una base natural la matriz de un operador A del espacio aritmético R_3 es

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Introducir un producto escalar en R_3 de modo que A sea un operador normal.

7.2.38*. Demostrar que A es un operador normal si, y solamente si, el operador conjugado A^* está representado por un polinomio de A.

7.2.39. Sea A un operador normal y supongamos que él conmuta con un cierto operador B. Demostrar que: a) A^* conmuta con B; b) A conmuta con B^*.

7.2.40. Demostrar que los operadores normales conmutables A y B poseen una base ortonormalizada común de vectores propios.

Verificar que las matrices A y B indicadas más abajo son normales y conmutables y construir para ellas una base ortonormalizada común a partir de sus vectores propios:

7.2.41. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$

7.2.42. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}.$

$$B = \begin{Vmatrix} \frac{1+5i}{6} & \frac{-1+i}{3} & \frac{1-i}{6} \\ \frac{-1+i}{3} & \frac{2+i}{3} & \frac{-1+i}{3} \\ \frac{1-i}{6} & \frac{-1+i}{3} & \frac{1+5i}{6} \end{Vmatrix}.$$

7.2.43. Demostrar que en los datos del problema 7.2.40 los operadores $A + B$, AB y BA son también normales como los operadores A y B.

7.2.44*. Demostrar la inversión parcial siguiente de la afirmación 7.2.43: si A, B y AB son operadores normales y si por lo menos uno de los operadores A o B posee no sólo valores propios simples, sino también valores propios distintos en módulo, entonces A y B son operadores conmutables.

7.2.45*. Demostrar la afirmación siguiente que refuerza la de 7.2.44: sean A, B y AB operadores normales y supongamos que por lo menos uno de los operadores A o B no posee valores propios distintos de un mismo módulo. En este caso A y B son conmutables.

7.2.46. Dar un ejemplo de operadores normales A y B tales que los operadores AB y BA sean normales y distintos.

7.2.47. Llámase *radio espectral* $\rho(A)$ de un operador A al módulo máximo de sus valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| .$$

Demostrar la característica extremal siguiente del radio espectral de un operador normal A:

$$\rho(A) = \max_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{(x, x)} .$$

¿Qué se puede decir de los vectores para los cuales se obtiene este máximo?

7.2.48. Demostrar que la estimación

$$\rho(A) \geqslant \frac{1}{n} \left| \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \right|$$

del radio espectral de una matriz normal A de orden $n \times n$ es válida.

7.2.49. Demostrar que el radio espectral de un operador normal A verifica la fórmula

$$\rho(A) = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} .$$

Todo vector x que realiza este máximo, ¿será un vector propio del operador A?

7.2.50*. Sean R un espacio euclídeo, C, un espacio unitario obtenido de R por complexificación (véase el 2.5.14). Mostrar que la correspondencia entre los operadores A del espacio R y los operadores $\hat{A}$ del espacio C (véase el 5.1.52):

a) asocia el operador conjugado $\hat{A}^*$ al operador conjugado A^*;

b) asocia el operador normal $\hat{A}$ al operador normal A.

Utilizando b) mostrar que si λ es un valor propio del operador normal A, la multiplicidad geométrica de este último coincide con su multiplicidad algebraica.

§ 7.3. Operadores y matrices unitarios

Presentación de los problemas del párrafo. La primera parte del párrafo está dedicada a los operadores unitarios. Entre sus propiedades destacamos sobre todo las dos siguientes: característica espectral (un operador unitario es un operador normal cuyos todos los valores propios son iguales a la unidad en módulo) y conservación del producto escalar.

En la segunda parte del párrafo se examinan las matrices unitarias. Después de discutir sus propiedades formales introducimos la noción de semejanza unitaria de las matrices y formulamos las analogías matriciales de una serie de afirmaciones ya conocidas sobre los operadores. Por fin damos aplicaciones de cálculo importantes de ciertas matrices de forma especial.

7.3.1. Mostrar que el conjunto de todos los operadores unitarios de ω_{XX} forma un grupo de multiplicación.

7.3.2. Mostrar que en el caso general la suma de operadores unitarios ya no será un operador unitario.

7.3.3. Mostrar que el producto de un operador unitario por un número α es un operador unitario si, y sólo si, $|\alpha| = 1$.

7.3.4. Describir todos los operadores unitarios de un espacio unidimensional.

7.3.5. Mostrar que un operador de rotación de un plano euclídeo es un operador ortogonal.

7.3.6. ¿Será ortogonal un operador de un espacio euclídeo tridimensional $Ax = [x, a]$?

7.3.7. Mostrar que los operadores del problema 7.2.9 son ortogonales.

7.3.8. Supongamos que en el espacio M_n $(n \geqslant 1)$ el producto escalar viene dado por la fórmula (7.1.9). ¿Serán ortogonales en un tal espacio los operadores del problema 7.2.9?

7.3.9. Sea A un operador normal del espacio unitario tridimensional. Demostrar que si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de este operador, considerados como puntos de un plano complejo, no están en una línea, entonces el operador A puede ser escrito bajo la forma

$$A = aE + \rho U,$$

donde U es un operador unitario, a es un número complejo, $\rho > 0$.

7.3.10. ¿Puede ser unitario un operador de proyección?

7.3.11. Mostrar que un operador de reflexión ortogonal es un operador unitario.

7.3.12. Mostrar que los operadores del problema 7.2.9 son operadores de reflexión ortogonales. Hallar los subespacios propios de cada uno de ellos.

7.3.13*. En la base $1, t, t^2$ del espacio M_2 la matriz del operador A es

$$\begin{Vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Mostrar que A es un operador de reflexión. Introducir en M_2 un producto escalar de modo que A sea un operador ortogonal.

7.3.14. Demostrar que el operador normal A que satisface la condición $A^k = E$ para cierto $k \neq 0$ entero es un operador unitario.

7.3.15. Demostrar que el determinante de un operador unitario en módulo es igual a la unidad.

7.3.16*. Un operador ortogonal Q del espacio de polinomios M_2 con el producto escalar (7.1.1) transforma los polinomios $1 + t + t^2$ y $1 - t^2$ en $-1 - t + t^2$ y $1 - t$, respectivamente. El determinante de este operador es igual a -1. Hallar su matriz en la base $1, t, t^2$.

7.3.17. Demostrar que si U es un operador unitario entonces cualesquiera que sean los vectores x e y

$$(Ux, Uy) = (x, y),$$

es decir, un operador unitario conserva el producto escalar. Inversamente, si un operador lineal U conserva el producto escalar de dos vectores cualesquiera, entonces U es un operador unitario.

7.3.18. Un operador del espacio aritmético R_4 con el producto escalar (7.1.4) transforma los vectores $x_1 = (2, 2, 2, 2)$; $x_2 = (2, 0, 2, 2)$; $x_3 = (2, 2, 0, 2)$; $x_4 = (2, 2, 2, 0)$ en vectores $y_1 = (4, 0, 0, 0)$; $y_2 = (3, -1, 1, 1)$; $y_3 = (3, 1, -1, 1)$; $y_4 = (3, 1, 1, -1)$, respectivamente. ¿Será ortogonal este operador?

7.3.19. Demostrar que para que un operador lineal de un espacio X sea unitario es suficiente que él conserve los productos escalares de los vectores de una base del espacio X. En particular, un operador será unitario si él transforma una base ortonormalizada de nuevo en una base ortonormalizada.

7.3.20*. Demostrar que para que un operador lineal U de un espacio X sea unitario es suficiente que U conserve las longitudes de todos los vectores de X.

7.3.21*. Demostrar que un operador lineal que conserva la ortogonalidad de dos vectores cualesquiera se distingue de un cierto operador unitario solamente por un factor numérico.

7.3.22. Demostrar que la condición de unitaria de una matriz U equivale a la condición de que las columnas (filas) de U consideradas como vectores de un espacio aritmético con el producto escalar (7.1.4) formen una base ortonormalizada de este espacio.

7.3.23. Demostrar que toda matriz de permutaciones es una matriz unitaria.

7.3.24. Demostrar que cada elemento de una matriz unitaria es igual en módulo a su menor complementario.

7.3.25. Sea $U = P + iQ$ una matriz unitaria compleja de orden n. Demostrar que la matriz real de orden $2n$

$$D = \begin{Vmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{Vmatrix}$$

es ortogonal.

7.3.26. Demostrar que si U es una matriz unitaria, su matriz asociada U_p también lo es.

7.3.27. Demostrar que la suma de los cuadrados de módulos de todos los menores de orden k elegidos de k filas (columnas) arbitrarias de una matriz unitaria es igual a la unidad.

7.3.28. Supongamos que el menor principal director de orden k de una matriz unitaria U es igual a la unidad en módulo. Demostrar que en este caso U tiene forma casi diagonal

$$U = \begin{Vmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{Vmatrix},$$

donde U_{11} es una célula de orden k.

7.3.29. Demostrar que el producto de Kronecker de las matrices unitarias U y V que tienen probablemente órdenes distintos es también una matriz unitaria.

7.3.30. Sean U y V matrices unitarias de orden $n \times n$. Mostrar que:

a) el operador G_{UV} (véase el 5.6.10) es unitario;

b) el operador F_{UV}, como regla, no es unitario.

7.3.31. Demostrar que para un par de bases ortonormalizadas de un espacio unitario la matriz de cambio es una matriz unitaria.

7.3.32. Las matrices A y B tienen *semejanza unitaria* si existe una matriz unitaria U tal que $B = U^{-1}AU$. Mostrar que la relación de semejanza unitaria sobre un conjunto de matrices cuadradas de orden n dada es reflexiva, simétrica y transitiva.

7.3.33. Demostrar que toda matriz compleja tiene semejanza unitaria con una matriz triangular.

7.3.34. Demostrar que una matriz triangular superior tiene semejanza unitaria con una cierta matriz triangular inferior.

7.3.35. Mostrar que en una transformación de semejanza unitaria una matriz normal se transforma en una matriz normal.

7.3.36. Mostrar que una matriz normal compleja tiene semejanza unitaria con una matriz diagonal.

7.3.37. Hallar la condición cuyo cumplimiento asegura que la matriz de la forma

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{-ésima fila} \\ \\ j\text{-ésima fila} \\ \\ \\ \end{array} \left\|\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\varphi\cdot e^{i\psi_1} & \dots & -\operatorname{sen}\varphi\cdot e^{i\psi_2} & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \operatorname{sen}\varphi\cdot e^{i\psi_3} & \dots & \cos\varphi\cdot e^{i\psi_4} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right\| \tag{7.3.1}$$

sea unitaria (los elementos fuera de la diagonal no señalados aquí son iguales a cero). La matriz unitaria obtenida se llama *matriz unitaria elemental* y en adelante se nota T_{ij}.

7.3.38. Sea A una matriz cuadrada de orden n ($n \geqslant 2$). Elegir la matriz unitaria elemental T_{ij} tal que en la matriz $B = T_{ij}A$ el elemento (j, i) sea igual a cero. En este caso se puede considerar (véase el problema 7.3.37) que $\psi_1 = \psi_4 = 0$.

7.3.39. ¿Cómo para la matriz dada A de orden n elegir la sucesión de matrices unitarias elementales $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$, tal que en el producto... $T^{(2)}T^{(1)}A$ todos los elementos subdiagonales de la primera columna sean iguales a cero?

7.3.40*. Basándose en 7.3.38 y 7.3.39 construir el método de descomposición de una matriz cuadrada en un producto de matrices unitaria y *triangular superior*.

7.3.41. Demostrar que toda matriz unitaria se descompone en un producto de matrices unitarias elementales y, tal vez, una matriz unitaria diagonal.

7.3.42. Supongamos que $A = U_1R_1$ y $A = U_2R_2$ dos descomposiciones de una matriz no singular A en un producto de una matriz unitaria y otra triangular superior. Demostrar que

$$U_2 = U_1Q, \qquad R_1 = QR_2,$$

donde Q es una matriz unitaria diagonal.

7.3.43. ¿Cómo aplicar el método construido en 7.3.40 para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ con una matriz de los coeficientes cuadrada regular?

7.3.44. Hallar la condición a imponer a un vector columna w, cuyo cumplimiento asegura que la matriz de la forma

$$H = E - 2ww^* \tag{7.3.2}$$

sea unitaria.

7.3.45. Sea w un vector columna normalizado. Demostrar que la matriz (7.3.2) que le corresponde, considerada como un operador de un espacio aritmético, establece en este espacio una reflexión ortogonal. Una tal matriz H se llama *matriz de reflexión*.

7.3.46. Hallar los valores propios y los vectores propios de una matriz de reflexión.

7.3.47. Hallar el determinante de una matriz de reflexión.

7.3.48. Mostrar que toda matriz unitaria todos los valores de la cual son iguales a $+1$ y a -1 (siendo que -1 es un valor propio simple) puede ser representada bajo la forma (7.3.2).

7.3.49. Mostrar que la matriz

$$T = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{Vmatrix}$$

es una matriz de reflexión. Hallar el vector w correspondiente.

7.3.50. Sea H una matriz de reflexión con un vector conocido w. ¿Cómo calcular el producto de H por el vector columna x de modo que este cálculo exija solamente $(2n + 1)$ operaciones de multiplicación?

7.3.51. Elegir el vector w de modo que la matriz de reflexión engendrada por él transforme el vector dado x en un vector colineal a la columna e_1 unitaria (suponiendo que el vector mismo x no es colineal a e_1).

7.3.52*. Utilizando el resultado del problema 7.3.51 construir el algoritmo de descomposición de una matriz cuadrada en un producto de matrices unitaria y triangular superior.

7.3.53. Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales con una matriz cuadrada A no singular. Describir el método de resolución de este sistema fundado sobre el proceso construido en el problema 7.3.52.

7.3.54*. Sea A una matriz cuadrada de orden n ($n > 2$). ¿Cómo elegir la matriz de reflexión H de modo que sean nulos los elementos que ocupan todos los lugares de la primera columna de la matriz $B = HAH^*$ a partir del tercero?

7.3.55. La matriz cuadrada B se llama *casi triangular superior* (*inferior*) si $b_{ij} = 0$ para $i > j + 1$ ($j > i + 1$). Demostrar con ayuda del resultado del problema 7.3.54 que toda matriz cuadrada tiene semejanza unitaria con una matriz casi triangular superior (inferior). Dar una formulación operatoria de esta afirmación.

§ 7.4. Operadores y matrices hermitianos

Presentación de los problemas del párrafo. En la primera parte del párrafo se examinan las propiedades más simples de los operadores y las matrices hermitianos. La discusión sigue el mismo plan que en los párrafos precedentes. Los problemas de la segunda parte conciernen a los valores propios de los operadores hermitianos. Sus propiedades extremales se examinan con atención particular. La aplicación de estas propiedades es la base de uno de los métodos más eficaces de cálculo de los valores propios de las matrices hermitianas que es el método de bisección descrito en los problemas 7.4.43—7.4.48.

7.4.1. Mostrar que el conjunto de todos los operadores hermitianos de ω_{XX} forma un grupo de adición.

7.4.2. Mostrar que en el espacio lineal ω_{XX} de todos los operadores lineales que actúan en un espacio euclídeo X el conjunto de todos los operadores simétricos es un subespacio lineal. Una afirmación análoga es válida para el conjunto de todos los operadores antisimétricos de ω_{XX}.

7.4.3. Mostrar que el producto de un operador hermitiano no nulo por un número α es un operador hermitiano si, y sólo si, α es un número real.

7.4.4. Mostrar que un operador K es antihermitiano si, y sólo si, el operador iK es hermitiano.

7.4.5. Mostrar que el producto de los operadores hermitianos H_1 y H_2 es un operador hermitiano si, y sólo si, H_1 y H_2 son conmutables.

7.4.6. Mostrar que el operador inverso de un operador hermitiano no singular es hermitiano también.

7.4.7. Describir todos los operadores hermitianos que actúan en un espacio unidimensional.

7.4.8. Un operador lineal A actúa en un espacio euclídeo bidimensional, además para un cierto par de vectores no colineales x e y

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Demostrar que A es un operador simétrico.

7.4.9. Mostrar que un operador de un espacio euclídeo tridimensional $Ax = [x, a]$ es antisimétrico.

7.4.10*. Demostrar que todo operador antisimétrico K del espacio euclídeo tridimensional puede ser representado bajo la forma $Kx = [x, a]$ eligiendo convenientemente el vector a.

7.4.11. Un operador de un espacio aritmético R_4 del producto escalar (7.1.4) transforma los vectores $x_1 = (0, 1, 1, 1)$, $x_2 = (-1, 0, 1, 1)$, $x_3 = (-1, -1, 0, 1)$, $x_4 = (-1, -1, -1, 0)$ en vectores $y_1 = (3, -1, -1, -1)$, $y_2 = (1, -3, -1, -1)$, $y_3 = (-1, -3, -1, 1)$, $y_4 = (-3, -1, -1, 1)$, respectivamente. ¿Será simétrico este operador?

7.4.12. Mostrar que los operadores del problema 7.2.9 son simétricos.

7.4.13. Mostrar que todo operador de reflexión ortogonal es un operador hermitiano. En particular, la matriz de reflexión (7.3.2) es una matriz hermitiana.

7.4.14. Mostrar que un operador unitario y hermitiano simultáneamente o bien es igual a $\pm E$, o bien es un operador de reflexión ortogonal.

7.4.15*. El operador simétrico S de un espacio de polinomios M_2 con el producto escalar (7.1.1) transforma los polinomios $2 + 2t - t^2$ y $2 - t + 2t^2$ en polinomios $5 - t - t^2$ y $3 + 3t + 3t^2$, respectivamente. La traza de este operador es igual a 3. Hallar su matriz en la base $1, t, t^2$.

7.4.16. Sean H_1 y H_2 matrices hermitianas complejas de un mismo orden. Demostrar que la traza de la matriz H_1H_2 es un número real.

7.4.17. Supongamos que una matriz hermitiana H está representada bajo la forma $H = S + iK$, donde S y K son matrices reales. Mostrar que S es una matriz simétrica y K es una matriz antisimétrica.

7.4.18. Demostrar que en los datos del problema 7.4.17 la matriz real

$$D = \left\| \begin{matrix} S & -K \\ K & S \end{matrix} \right\|$$

es simétrica.

7.4.19. Demostrar que si H es una matriz hermitiana, la matriz asociada H_p también lo es.

7.4.20. Demostrar que el producto de Kronecker de las matrices hermitianas H_1 y H_2 que admiten, posiblemente, órdenes distintos, es también una matriz hermitiana.

7.4.21. Sean H_1 y H_2 matrices hermitianas de orden $n \times n$. Mostrar que los operadores $G_{H_1H_2}$ y $F_{H_1H_2}$ del problema 5.6.10 son operadores hermitianos.

7.4.22. Demostrar que para un operador hermitiano H el producto escalar (Hx, x) es un número real para cualquier vector x.

7.4.23. Sea K un operador antisimétrico de un espacio euclídeo X. Demostrar que $(Kx, x) = 0$ para todo vector x de X.

7.4.24. ¿Qué se puede decir de un operador hermitiano H si $(Hx, x) = 0$ para todos los vectores x?

7.4.25. Mostrar que si para los operadores hermitianos H_1 y H_2 la igualdad $(H_1x, x) = (H_2x, x)$ se verifica para cualquier vector x, entonces $H_1 = H_2$.

7.4.26. Demostrar la afirmación recíproca de 7.2.18: si, cualquiera que sea el vector x, un operador lineal A verifica la igualdad (7.2.2), entonces A es un operador normal.

7.4.27. Los valores propios de un operador normal A que actúa en un espacio unitario, se encuentran sobre un plano complejo recto. Demostrar que el operador A puede ser representado con la forma

$$A = aE + \alpha H,$$

donde H es un operador hermitiano, a y α son números complejos, $|\alpha| = 1$.

7.4.28. Mostrar que los valores propios de un operador antihermitiano son números puramente imaginarios.

7.4.29. Mostrar que un operador de proyección ortogonal es un operador hermitiano.

En los problemas 7.4.30—7.4.37 se supone que los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de un operador hermitiano (o de una matriz hermitiana) H están numerados de modo que

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n. \tag{7.4.1}$$

Si junto con los valores propios se examina una base ortonormalizada $e_1, \ldots, e_n$ de vectores propios del operador H, se considera que la numeración de vectores en este operador corresponde a la ordenación (7.4.1).

7.4.30. Demostrar que la validez de las representaciones siguientes de valores propios máximo y mínimo del operador hermitiano H:

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}. \tag{7.4.2}$$

Mostrar que los vectores para los cuales se obtienen los extremos indicados son vectores propios del operador H.

7.4.31. Mostrar que para los valores propios extremales de una matriz hermitiana H son válidas las estimaciones siguientes:

$$\lambda_1 \geqslant \max_i h_{ii}, \quad \lambda_n \leqslant \min_i h_{ii}.$$

7.4.32. Supongamos que para una matriz hermitiana H tiene lugar la igualdad $\lambda_1 = h_{ii}$. Demostrar que todos los elementos fuera de la diagonal de la i-ésima fila y de la i-ésima columna de la matriz H son ceros.

7.4.33. Demostrar que para el subespacio lineal L tendido sobre los vectores propios $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ $(i_1 < \ldots < i_k)$ de un operador hermitiano H se verifican las relaciones

$$\lambda_{i_1} = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L}} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}, \quad \lambda_{i_k} = \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L}} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}. \tag{7.4.3}$$

7.4.34*. Demostrar el *teorema de Courant-Fischer*: para un valor propio λ_k de un operador hermitiano H que actúa en un espacio X de dimensión n son válidas las representaciones:

$$\lambda_k = \max_{L_k} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_k}} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}, \tag{7.4.4}$$

$$\lambda_k = \min_{L_{n-k+1}} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_{n-k+1}}} \frac{(Hx, x)}{(x, x)}. \tag{7.4.5}$$

En la igualdad (7.4.4) el máximo se toma respecto a todos los subespacios L_k de dimensión k de un espacio X; de un modo análogo en (7.4.5) L_{n-k+1} designa un subespacio arbitrario de dimensión $n - - k + 1$.

7.4.35*. Sea H_{n-1} una submatriz principal arbitraria de una matriz hermitiana H de orden n. Aplicando el teorema de Courant-Fischer demostrar que los valores propios $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ de la matriz H_{n-1} indicados en el orden decreciente *separan* los valores propios de la matriz H. Esto significa que

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant \mu_{n-1} \geqslant \lambda_n.$$

7.4.36. Sin calcular los valores propios de la matriz H de orden n

$$H = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 \ldots & n-1 & n \end{matrix} \right\|,$$

indicar el número de valores propios no nulos y sus signos.

7.4.37. Supongamos que el rango de una matriz hermitiana H sobrepasa en dos unidades el rango de la submatriz principal H_{n-1}. Demostrar que la matriz H posee un valor propio positivo y un valor propio negativo más que H_{n-1}.

7.4.38. Supongamos que los valores propios de los operadores hermitianos H_1, H_2 y $H_1 + H_2$ están indicados en el orden decreciente

$$\begin{aligned} H_1 &- \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n, \\ H_2 &- \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n, \\ H_1 + H_2 &- \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_n. \end{aligned} \tag{7.4.6}$$

Utilizando el teorema de Courant-Fischer demostrar que las desigualdades ($k = 1, 2, \ldots, n$)

$$\gamma_k \leqslant \alpha_1 + \beta_k, \quad \gamma_k \leqslant \alpha_k + \beta_1,$$
$$\gamma_k \geqslant \alpha_n + \beta_k, \quad \gamma_k \geqslant \alpha_k + \beta_n.$$

son válidas.

7.4.39. Mostrar que en una transformación de semejanza unitaria una matriz hermitiana pasa a una matriz hermitiana.

7.4.40. Una matriz de cinta se llama *tridiagonal* si el ancho de la cinta es igual a 3. Deducir del problema 7.3.55 el corolario siguiente: toda matriz hermitiana tiene semejanza unitaria con una matriz tridiagonal. Dar la formulación operatoria de esta afirmación.

7.4.41. Una matriz tridiagonal C se llama *irreducible* si $c_{ij} \neq 0$ para $|i - j| = 1$. Demostrar que si una matriz hermitiana tridiagonal posee un valor propio λ de multiplicidad r, ésta es casi diagonal, además la diagonal cuenta por lo menos r submatrices irreducibles de un orden más pequeño.

Para una matriz hermitiana irreducible tridiagonal C de orden n de los problemas 7.4.42—7.4.49 que siguen se examina la sucesión de polinomios $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$, donde $f_0(\lambda) \equiv 1$ y $f_i(\lambda)$ es un polinomio característico de la submatriz principal directora C_i de la matriz C (de modo que el polinomio $f_i(\lambda)$ es de grado i). Las relaciones recurrentes que enlazan los polinomios de este sistema han sido obtenidas en el problema 3.2.46 (en nuestro caso hermitiano, $c_i = \overline{b_i}$) y en adelante se utilizan sin referencias algunas. Las raíces del polinomio $f_i(\lambda)$, es decir, los valores propios de la submatriz C_i se notan $\lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_i^{(i)}$ y están indicados en el orden decreciente de modo que $\lambda_1^{(i)} \geqslant \lambda_2^{(i)} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_i^{(i)}$ (véase el 7.4.43, b)); en este caso $\lambda_i^{(n)} = \lambda_i, \ i = 1, \ldots, n$.

7.4.42. Componer la sucesión de polinomios $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots$ $\ldots, f_5(\lambda)$ de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{7.4.7}$$

7.4.43. Demostrar que en el sistema de polinomios $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots$ $\ldots, f_n(\lambda)$:

a) los polinomios vecinos no tienen raíces comunes;

b) las raíces del polinomio $f_i(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, separan *estrictamente* las raíces del polinomio $f_{i+1}(\lambda)$:

$$\lambda_1^{(i+1)} > \lambda_1^{(i)} > \lambda_2^{(i+1)} > \lambda_2^{(i)} > \ldots > \lambda_i^{(i+1)} > \lambda_i^{(i)} > \lambda_{i+1}^{(i+1)};$$

c) si $\lambda_k^{(i)}$, $i < n$, es la raíz del polinomio $f_i(\lambda)$, los números $f_{i-1}(\lambda_k^{(i)})$ y $f_{i+1}(\lambda_k^{(i)})$ tienen signos opuestos.

7.4.44*. El número real μ no es raíz de ninguno de los polinomios $f_i(\lambda)$. Demostrar que el número de cambios de signos de la sucesión numérica

$$f_0(\mu), f_1(\mu), \ldots, f_n(\mu) \tag{7.4.8}$$

es igual al número de valores propios de la matriz C (es decir, de raíces del polinomio $f_n(\lambda)$) que son estrictamente más grandes que μ.

7.4.45*. Supongamos ahora que el número μ puede ser raíz de polinomios del sistema $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$. Calculemos como antes el número de cambios de signos en la sucesión (7.4.8) atribuyendo a cada valor nulo de $f_i(\mu)$ el mismo signo que posee el número $f_{i-1}(\mu)$. Demostrar que en este caso la afirmación 7.4.44 sigue siendo válida.

7.4.46*. Se sabe que el valor propio λ_k de una matriz C se encuentra en el intervalo (a, b). En este caso dicen que λ_k está *localizado* en (a, b). ¿Cómo localizar λ_k en un intervalo dos veces menor aplicando el resultado de los problemas 7.4.44—7.4.45?

7.4.47. Supongamos que todos los valores propios de una matriz C pertenecen al intervalo (m, M). Partiendo de los resultados del problema 7.4.46 indicar cómo hallar los números λ_i con una exactitud dada ε.

7.4.48. Mostrar que se puede calcular la sucesión (7.4.8) efectuando solamente $2(n-1)$ operaciones de multiplicación (suponiendo que los números $|b_i|^2$ de las fórmulas recurrentes que enlazan los polinomios $f_i(\lambda)$, están calculados de antemano).

7.4.49. El procedimiento de cálculo de los valores propios de una matriz hermitiana tridiagonal obtenido en el problema 7.4.47 se llama *método de bisección*. Aplicar el método de bisección al calcular el valor propio máximo de la matriz (7.4.7) con una exactitud $\varepsilon = 1/16$.

7.4.50*. Basándose en los resultados de problemas 7.4.40, 7.4.41 y 7.4.47 describir el método de cálculo aproximado de los valores propios de una matriz hermitiana arbitraria.

7.4.51*. Una matriz irreducible tridiagonal A se llama *jacobiana* si $a_{i,i+1}a_{i+1,i} > 0$ para todo i. Mostrar que las matrices jacobianas con elementos diagonales reales verifican los resultados de los problemas 7.4.43—7.4.47.

7.4.52. Utilizando la correspondencia entre los operadores de un espacio euclídeo R y del espacio unitario C obtenido a partir de R por complexificación demostrar que:

a) al operador simétrico S del espacio R le corresponde el operador hermitiano $\hat{S}$ del espacio C;

b) para todo operador simétrico del espacio R existe en R una base ortonormalizada tal que la matriz de este operador es diagonal.

Reformular la afirmación b) para las matrices.

7.4.53. Sean $z_1, \ldots, z_n$, $z_j = x_j + iy_j$, una base ortonormalizada de vectores propios de una matriz hermitiana $H = S + iK$ de orden $n \times n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, los valores propios correspondientes.

Demostrar que los vectores columna reales de dimensión $2n$ u_1, v_1, . . ., u_n, v_n, donde

$$u_j=\left\|\begin{matrix} x_j \\ y_j \end{matrix}\right\|, \quad v_j=\left\|\begin{matrix} -y_j \\ x_j \end{matrix}\right\|,$$

forman una base ortonormalizada de vectores propios de la matriz real

$$D=\left\|\begin{matrix} S & -K \\ K & S \end{matrix}\right\|;$$

los valores propios correspondientes son $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_n$.

§ 7.5. Operadores y matrices no negativos y definidos positivos

Presentación de los problemas del párrafo. Las cuestiones esenciales que se tratan en este párrafo son los siguientes:

Propiedades formales de los operadores no negativos y definidos positivos que se deducen inmediatamente de sus definiciones.

Matrices definidas positivas y matrices de Gram. Mostramos aquí que en cierto sentido las matrices definidas positivas son un medio universal para introducir un producto escalar en un espacio lineal dado.

La no negatividad (positividad) de los valores propios o autovalores de un operador (matriz) no negativo (definido positivo).

Diferentes criterios de la definición positiva de las matrices hermitianas, en particular, la dominación diagonal (véase el 7.5.24), criterio de Sylvester, etc. Damos también problemas de cálculo para su aplicación.

Relación de orden parcial sobre un conjunto de operadores hermitianos.

Raíz cuadrada de un operador no negativo, ejemplos numéricos de extracción de una raíz cuadrada.

Aplicación del teorema importante de los valores propios reales de un operador HS, donde H y S son operadores hermitianos y S es definido positivo.

7.5.1. ¿Puede un vector definido positivo H transformar un vector no nulo x en un vector y ortogonal a x?

7.5.2. Deducir de la definición de un operador definido positivo su regularidad.

7.5.3. Sea H un operador definido positivo de un espacio euclídeo X. Mostrar que para todo vector no nulo x de X su imagen forma con x ángulo agudo.

7.5.4. Sean H y S operadores no negativos. Mostrar que para números α y β no negativos cualesquiera el operador $\alpha H + \beta S$ es no negativo.

7.5.5. Sean H y S operadores no negativos suponiendo que para ciertos números reales α_0 y β_0 el operador $\alpha_0 H + \beta_0 S$ es definido positivo. Mostrar que en este caso todos los operadores $\alpha H + \beta S$, donde α y β son números positivos arbitrarios, son definidos positivos.

7.5.6. Demostrar que un operador inverso a un operador definido positivo es también definido positivo.

7.5.7. Mostrar que todo operador de proyección ortogonal es no negativo.

7.5.8. Sea H una matriz compleja definida positiva. Demostrar que su transpuesta H^T es también definida positiva.

7.5.9. Demostrar que toda submatriz principal de una matriz no negativa (definida positiva) es igualmente una matriz no negativa (definida positiva).

7.5.10*. Sea $x_1, \ldots, x_k$ un sistema arbitrario de vectores de un espacio unitario (euclídeo) X. Demostrar que una matriz de Gram del sistema $x_1, \ldots, x_k$ es una matriz no negativa. Esta matriz es definida positiva si el sistema $x_1, \ldots, x_k$ es linealmente independiente.

7.5.11. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una base arbitraria de un espacio unitario (euclídeo) X. Demostrar que el producto escalar de dos vectores cualesquiera x e y de X puede calcularse mediante la fórmula

$$(x, y) = (\Gamma X_e, Y_e), \tag{7.5.1}$$

donde Γ^T es la matriz de Gram del sistema $e_1, \ldots, e_n$; X_e, Y_e son vectores columna de dimensión n compuestos de las coordenadas de los vectores x e y en la base $e_1, \ldots, e_n$; el producto escalar del segundo miembro de (7.5.1) se toma de acuerdo con la regla usual (7.1.4).

7.5.12. Sean $e_1, \ldots, e_n$ una base arbitraria de un espacio lineal X; Γ, una matriz definida positiva arbitraria. Mostrar que la fórmula (7.5.1) define en X un producto escalar. En este caso Γ^T es la matriz de Gram del sistema $e_1, \ldots, e_n$ en el sentido del producto escalar obtenido.

De este modo la fórmula (7.5.1) (al igual que el método del problema 2.1.2) comprueba todos los procedimientos posibles de introducción de un producto escalar en el espacio lineal dado X.

7.5.13. Sean $(x, y)_1$ y $(x, y)_2$ dos productos escalares distintos de un espacio aritmético. Demostrar que:

a) existe una matriz no singular A tal que

$$(x, y)_2 = (Ax, y)_1;$$

b) se deduce de a) que

$$(x, y)_1 = (A^{-1}x, y)_2.$$

7.5.14. Sea A un vector lineal arbitrario de un espacio unitario (euclídeo) X en el espacio unitario (euclídeo) Y. Mostrar que el producto A^*A es un operador no negativo del espacio X, mientras que el producto AA^* es un operador no negativo del espacio Y. Para toda matriz rectangular A las matrices A^*A y AA^* son, respectivamente, no negativas.

7.5.15. Sea H una matriz compleja definida positiva. Demostrar que en la representación de H

$$H = S + iK,$$

donde S y K son matrices reales, S es definida positiva.

7.5.16. Sean H un operador no negativo y $(Hx, x) = 0$ para un cierto vector x. Demostrar que:

a) x pertenece al núcleo N_H del operador H;

b) el operador H/T_H inducido sobre la imagen T_H de H es definido positivo.

7.5.17. Mostrar que un operador definido positivo puede ser determinado como un operador no negativo regular.

7.5.18. Mostrar que un operador hermitiano H es no negativo (definido positivo) sí, y sólo si, para todo número ε positivo (no negativo) el operador $H + \varepsilon E$ es no singular.

7.5.19. Un operador hermitiano H se llama *no positivo (definido negativo)* si para todo vector no nulo x del producto escalar (Hx, x) es no positivo (negativo). La definición de las *matrices no positivas* y *definidas negativas* es análoga.

Demostrar que todo operador hermitiano puede ser presentado bajo la forma de una suma de operadores no negativo y no positivo.

7.5.20*. Una matriz cuadrada compleja A se llama *estable* si para todo autovalor λ de esta matriz se verifica la condición $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

Demostrar que si para un matriz A de orden $n \times n$

$$A^*X + XA = C,$$

donde C es una matriz definida negativa, la *ecuación matricial de Liapunov* admite una solución B definida positiva, entonces A es una matriz estable. Deducir que B es la única solución de la ecuación dada.

7.5.21. ¿Qué se puede decir de un operador no negativo H si su traza es nula?

7.5.22. Mostrar que el determinante de un operador definido positivo es positivo. Deducir que en una matriz definida positiva todos los menores principales son positivos.

7.5.23. Mostrar que en una matriz definida positiva el elemento máximo en módulo se encuentra sobre la diagonal principal.

7.5.24*. Demostrar que una matriz hermitiana H de orden $n \times n$ es definida positiva si

$$h_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |h_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.5.2}$$

7.5.25. Sea $H = S + iK$ una matriz definida positiva compleja. Demostrar que la matriz real

$$D = \begin{Vmatrix} S & -K \\ K & S \end{Vmatrix}$$

es definida positiva.

7.5.26*. Sea H una matriz definida positiva. Demostrar que la matriz asociada H_p es también definida positiva.

7.5.27. Demostrar que entre todos los menores de orden k de una matriz H definida positiva el más grande en módulo es un menor principal.

7.5.28. Demostrar que el producto de Kronecker de las matrices H_1 y H_2 definidas positivas que tienen posiblemente órdenes distintos, es también una matriz definida positiva.

7.5.29*. Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden n. Llámase *producto de Schur* de las matrices A y B a la matriz C de orden $n \times n$ tal que para todas i, j

$$c_{ij} = a_{ij}b_{ij}.$$

Demostrar que el producto de Schur de las matrices definidas positivas H_1 y H_2 es también una matriz definida positiva.

7.5.30. Sea H una matriz definida positiva de orden n. Demostrar que la matriz S de orden $n\times n$ tal que $s_{ij} = |h_{ij}|^2$ para todos los i, j es también definida positiva.

7.5.31. Sean H y S operadores hermitianos; la diferencia $H-S$ es un operador no negativo (definido positivo). En este caso escribiremos $H\geqslant S$ ($H > S$). Mostrar que la relación $\geqslant$ verifica las propiedades:

a) $H \geqslant S,\ S \geqslant T \Rightarrow H \geqslant T$;

b) $H_1 \geqslant S_1,\ H_2 \geqslant S_2 \Rightarrow \alpha H_1 + \beta H_2 \geqslant \alpha S_1 + \beta S_2$, donde α y β son números no negativos cualesquiera;

c) $H \geqslant S \Rightarrow A^*HA \geqslant A^*SA$ para todo operador A.

7.5.32. Sean H y S operadores hermitianos, $H \geqslant S$. Demostrar que los autovalores del operador S dispuestos en el orden decreciente no sobrepasan los autovalores homónimos (ordenados de la misma manera) del operador H.

7.5.33. Un operador definido positivo H verifica la desigualdad $H \geqslant E$. Demostrar que $H^{-1} \leqslant E$.

7.5.34. Las matrices H y S son definidas positivas; además $H \geqslant S$. Demostrar que:

a) $\max\limits_{i,j} |h_{ij}| \geqslant \max\limits_{i,j} |s_{ij}|$;

b) los menores principales de S no sobrepasan los menores homónimos de H; en particular;

c) $\det H \geqslant \det S$.

7.5.35. El elemento diagonal h_{ii} de una matriz definida positiva ha sido aumentado. Demostrar que el determinante de la matriz obtenida $\tilde{H}$ es más grande que el determinante de H.

7.5.36*. Demostrar el *criterio de Sylvester* de definición positiva que reza: para que una matriz hermitiana H sea definida positiva es necesario y suficiente que todos los menores principales directores de esta matriz sean positivos.

7.5.37. El menor principal director de orden k de una matriz no negativa H es igual a cero. Demostrar que todos los menores principales directores de orden superior a k son iguales a cero.

7.5.38. Demostrar que en una matriz definida negativa H todos los menores principales de orden impar son negativos, mientras que todos los menores principales de orden par son positivos.

Para cada una de matrices tridiagonales de orden n aducidas más abajo determinar si la matriz en cuestión es definida positiva o no negativa.

7.5.39. $$\begin{Vmatrix} n-1 & 1 & & & & & \\ 1 & n-2 & \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & 2 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

7.5.40. $$\begin{Vmatrix} n-1 & 1 & & & & & \\ 1 & n-2 & \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & 2 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

7.5.41. $$\begin{Vmatrix} n+1 & 1 & & & & \\ 1 & n & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 3 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

7.5.42*. $$\begin{Vmatrix} n & 1 & & & & & \\ 1 & n-1 & \cdot & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & 3 & 1 & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

7.5.43. $$\begin{Vmatrix} n^2 & 1 & & & \\ 1 & (n-1)^2 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & 4 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

7.5.44. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.5.45*. Demostrar que para todo operador H no negativo (definido positivo) existe un operador K no negativo (definido positivo) y uno solo tal que $K^2 = H$. El operador K se llama *raíz cuadrada* (aritmética) *del operador* H y se nota $H^{1/2}$.

Hallar las raíces cuadradas de las matrices siguientes:

7.5.46. $\begin{Vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{Vmatrix}$. 7.5.47. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

7.5.48. $\begin{Vmatrix} 24 & 6 & -12 \\ 6 & 33 & 6 \\ -12 & 6 & 24 \end{Vmatrix}$. 7.5.49. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.5.50*. Aprovechando la existencia de una raíz cuadrada demostrar que el determinante de una matriz definida positiva H de orden n verifica la desigualdad

$$\det H \leqslant h_{11}h_{22}\dots h_{nn}.$$

En este caso la igualdad tiene lugar si, y sólo si, H es una matriz diagonal.

7.5.51.* Una matriz definida positiva H está representada bajo la forma celular

$$H = \begin{Vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^* & H_{22} \end{Vmatrix},$$

donde H_{11} y H_{22} son submatrices cuadradas. Demostrar que

$$\det H \leqslant \det H_{11} \cdot \det H_{22};$$

además, la igualdad se obtiene si, y sólo si, $H_{12} = 0$.

7.5.52. Sean H y S operadores hermitianos, S es un operador no negativo. Demostrar que si H y S son conmutables, H y $S^{1/2}$ también lo son.

7.5.53*. Los operadores H y S son definidos positivos y $H \geqslant S$. Demostrar que $H^{-1} \leqslant S^{-1}$.

7.5.54. Mostrar que el producto HS de los operadores no negativos conmutables H y S es también un operador no negativo.

7.5.55. Sean $H \geqslant S$ y T un operador no negativo conmutable con H y S. Demostrar que $HT \geqslant ST$.

7.5.56*. Sean H y S operadores hermitianos y S definido positivo. Demostrar que los valores propios del operador HS son números reales; además, el mismo operador es de estructura simple.

7.5.57. Supongamos que en los datos del problema 7.5.56 el operador H es no negativo. Mostrar que todos los valores propios de HS son no negativos.

7.5.58. Mostrar que la afirmación recíproca del problema 7.5.57 es justa: si H y S son operadores hermitianos, S es definido positivo y todos los autovalores de HS son no negativos, entonces H es un operador no negativo.

7.5.59*. Sean H y S matrices hermitianas de orden n, S, una matriz definida positiva. Demostrar que:

a) el primer miembro de la ecuación

$$\det(\lambda S - H) = 0 \tag{7.5.3}$$

es un polinomio de λ de grado n, cuyo coeficiente mayor es igual al determinante de S;

b) la ecuación (7.5.3) admite n raíces reales si cada una se cuenta tantas veces como es su multiplicidad.

7.5.60. Sean H y S operadores definidos positivos cuyos autovalores máximos son α_1 y β_1, respectivamente. Demostrar que el autovalor máximo γ_1 del operador HS verifica la desigualdad $\gamma_1 \leqslant \alpha_1\beta_1$.

7.5.61*. Demostrar que en los datos del problema 7.5.15 las afirmaciones siguientes son justas:

a) los valores propios de la matriz $iS^{-1}K$ son reales e inferiores a la unidad en módulo;

b) $\det S \geqslant \det H$; además, la igualdad tiene lugar si, y sólo si, $H = S$;

c) $\det S > \det K$.

7.5.62*. Sean A un operador de rango r del espacio X de dimensión n en el espacio Y de dimensión m, $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormalizada de vectores propios de un operador no negativo A^*A; además, los vectores $e_1, \ldots, e_r$ corresponden a los valores propios no nulos $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_r^2$ $(\alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, r)$. Demostrar que:

a) los vectores $e_{r+1}, \ldots, e_n$ forman una base del núcleo N_A del operador A;

b) los vectores $e_1, \ldots, e_r$ forman una base de la imagen T_{A^*} del operador conjugado A^*;

c) los vectores $Ae_1, \ldots, Ae_r$ son ortogonales y forman una base de la imagen T_A de A;

d) la longitud del vector Ae_i es igual a α_i, $i = 1, \ldots, r$;

e) cada uno de los vectores Ae_i es un autovector del operador AA^* y, además, relativo a su autovalor α_i^2;

f) si se supone que

$$f_i = \frac{1}{\alpha_i} Ae_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

entonces,

$$A^* f_i = \alpha_i e_i.$$

§ 7.6. Números singulares y descomposición polar

Presentación de los problemas del párrafo. Hablando de números singulares prestamos la atención principal a los diversos métodos que en casos concretos facilitan su cálculo o su estimación. Las aplicaciones fundamentales de los números singulares están relacionadas con los problemas métricos y se describirán en el § 7.8 y en el capítulo que sigue. En el presente párrafo damos solamente algunas desigualdades que enlazan los números singulares con los valores propios de un operador. Se discute detalladamente la descomposición singular de una matriz rectangular arbitraria y la descomposición polar de un operador de ω_{XX} y de una matriz cuadrada.

En todos los problemas los números singulares $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ se suponen numerados en el orden decreciente:

$$\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_s.$$

7.6.1. Conociendo los números singulares de un operador A hallar los números singulares: a) del operador A^*; b) del operador αA, α es un número complejo arbitrario.

7.6.2. Demostrar que al multiplicar un operador por operadores unitarios sus números singulares no cambian.

7.6.3. Supongamos que un operador A actúa en un espacio X. Mostrar que A es regular si, y sólo si, todos los números singulares de este operador son diferentes de cero.

7.6.4. Mostrar que el módulo del determinante de un operador es igual al producto de sus números singulares.

7.6.5. Suponiendo que un operador A es no singular hallar la relación entre los números singulares de los operadores A y A^{-1}.

7.6.6. Demostrar que los números singulares de un operador normal coinciden con los módulos de sus valores propios.

7.6.7. Demostrar que un operador A de un espacio unitario es unitario si, y sólo si, todos los números singulares de este operador son iguales a uno.

7.6.8*. En el espacio de polinomios M_n con el producto escalar (7.1.7) hallar los números singulares del operador de derivación.

7.6.9*. Hallar los números singulares del operador de derivación del espacio de polinomios M_2 si el producto escalar está dado por la fórmula (7.1.2). Comparar el resultado con el del problema 7.6.8.

7.6.10*. Sea A una matriz $m \times n$ rectangular de rango r, real o compleja. Demostrar que A puede escribirse así:

$$A = U\Lambda V, \tag{7.6.1}$$

donde U y V son matrices ortogonales (unitarias) de orden m y n, respectivamente; Λ, la matriz $m \times n$ tal que $\lambda_{11} \geqslant \lambda_{22} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{rr} > 0$ y los demás elementos son iguales a cero. La representacion (7.6.1) se llama *descomposición singular* de la matriz A.

7.6.11. Mostrar que la matriz Λ de la descomposición (7.6.1) está unívocamente definida por la misma matriz A. Precisamente, los números $\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{rr}$ son los autovalores no nulos de la matriz $(A^*A)^{1/2}$ (al igual que de la matriz $(AA^*)^{1/2}$).

7.6.12. ¿Cómo interpretar las matrices U y V de la descomposición singular de una matriz A?

7.6.13. Las matrices rectangulares A y B de tipo $m \times n$ están enlazadas por la *relación de equivalencia unitaria* si existen matrices unitarias U y V tales que $B = UAV$. Demostrar que la relación de equivalencia unitaria sobre el conjunto de matrices $m \times n$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

7.6.14. Demostrar que las matrices A y B de tipo $m \times n$ están enlazadas por la relación de equivalencia unitaria si, y sólo si, ellas poseen los mismos números singulares.

7.6.15. Mostrar que las matrices A y B están enlazadas por la relación de equivalencia unitaria si, y sólo si, las matrices A^*A y B^*B son semejantes.

7.6.16. Conociendo la descomposición singular $A = U\Lambda V$ de una matriz A cuadrada regular hallar la descomposición singular y los números singulares de las matrices: a) A^T; b) A^*; c) A^{-1}.

7.6.17. Mostrar que para toda matriz A de tipo $m \times n$ existe una matriz unitaria W de orden m tal que las filas de la matriz WA son ortogonales. De un modo análogo existe una matriz unitaria Z de orden n tal que las columnas de la matriz AZ son ortogonales.

7.6.18. Las columnas de una matriz son ortogonales. Demostrar que los números singulares de esta matriz son iguales a las longitudes de sus filas.

7.6.19. Hallar los números singulares de una matriz A de tipo $m \times n$ cuyo rango es la unidad.

7.6.20. Sea A una matriz celular de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

donde A_1 y A_2 no son obligatoriamente cuadrados. Demostrar que los números singulares no nulos de las células A_1 y A_2 dan en conjunto todos los números singulares no nulos de la matriz A. Esta afirmación es igualmente válida para la matriz celular de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.6.21. Obtener de la afirmación 7.6.20 el corolario siguiente: si un par de subespacios ortogonales L y M reduce un operador A, los números singulares de los operadores A/L y A/M dan en conjunto todos los números singulares de A.

7.6.22. Demostrar que la descomposición singular (7.6.1) de la matriz A puede escribirse así:

$$A = \widetilde{U}\Lambda_r\widetilde{V}, \tag{7.6.2}$$

donde $\widetilde{U}$ es una matriz de tipo $m \times r$ con las columnas ortonormalizadas, $\widetilde{V}$ es una matriz de tipo $r \times n$ con las filas ortonormalizadas. Λ_r es una matriz diagonal de elementos diagonales positivos. La representación (7.6.2) se llama también descomposición singular de la matriz A.

7.6.23. Demostrar que los números singulares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de un operador A verifican la variante siguiente del teorema de Courant-Fischer:

$$\alpha_k = \max_{L_k} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_k}} \frac{|Ax|}{|x|},$$

$$\alpha_k = \min_{L_{n-k+1}} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_{n-k+1}}} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

Aquí, como en el 7.4.34, L_k y L_{n-k+1} son espacios arbitrarios de dimensiones k y $n-k+1$, respectivamente, de un espacio X de dimensión n. En particular, las relaciones

$$\alpha_1 = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}, \quad \alpha_n = \min_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$$

son válidas.

7.6.24. Demostrar que el radio espectral de un operador no sobrepasa su número singular máximo.

7.6.25. Demostrar que para el autovalor mínimo en módulo λ_n y el número singular mínimo α_n de un operador A se verifica la relación

$$|\lambda_n| \geqslant \alpha_n.$$

7.6.26. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números singulares de una matriz A de orden $n \times n$. Demostrar que los números singulares de la matriz asociada A_p son todos los productos posibles por p de los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

7.6.27. Los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matriz A de orden $n \times n$ están ordenados de modo que $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$. Demostrar que las *desigualdades de Weyl* siguiente

$$|\lambda_1| \ldots |\lambda_k| \leqslant \alpha_1 \ldots \alpha_k,$$

$$|\lambda_k| \, |\lambda_{k+1}| \ldots |\lambda_n| \geqslant \alpha_k \alpha_{k+1} \ldots \alpha_n, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

que generalizan los 7.6.24 y 7.6.25 son justas.

7.6.28. Demostrar que en caso de los números singulares máximo y mínimo de una matriz A de orden $n \times n$ tienen lugar las estimaciones siguientes:

$$\alpha_1 \geqslant \max\left\{\max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}, \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}\right\},$$

$$\alpha_n \leqslant \min\left\{\min_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}, \min_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}\right\}.$$

7.6.29*. Un operador A satisface la igualdad $|\lambda_1| = \alpha_1$. Aquí λ_1 es el autovalor máximo en módulo de A. Demostrar que los operadores A y A^* tienen un autovector común referente al autovalor λ_1 $(\bar{\lambda}_1)$.

7.6.30*. Demostrar la afirmación recíproca de la del 7.6.6: si los números singulares de un operador A coinciden con los módulos de los autovalores A es un operador normal.

7.6.31*. Sean A una matriz rectangular de tipo $m \times n$, $\tilde{A}$, una submatriz arbitraria de la matriz A. Demostrar que los números singulares de la matriz $\tilde{A}$ no sobrepasan los números singulares homónimos de A.

7.6.32. Sea A una submatriz arbitraria de una matriz normal A Demostrar que el radio espectral de $\tilde{A}$ no sobrepasa el radio espectral de A.

7.6.33. Demostrar que los números singulares α_k, β_k, γ_k de los operadores A, B y $A+B$ verifican las desigualdades

$$\gamma_k \leqslant \alpha_1 + \beta_k, \qquad \gamma_k \leqslant \alpha_k + \beta_1,$$
$$\gamma_k \geqslant -\alpha_1 + \beta_k, \quad \gamma_k \geqslant \alpha_k - \beta_1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

7.6.34*. Los operadores A y B actúan en un espacio X de dimensión n. Demostrar que los números singulares α_k, β_k, δ_k de los operadores A, B y AB verifican las relaciones

$$\delta_k \leqslant \alpha_1\beta_k, \quad \delta_k \leqslant \alpha_k\beta_1,$$
$$\delta_k \geqslant \alpha_n\beta_k, \quad \delta_k \geqslant \alpha_k\beta_n, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

7.6.35. Sean A y B operadores definidos positivos. Demostrar que los valores propios del operador AB son iguales a los cuadrados de los números singulares del operador $A^{1/2}B^{1/2}$.

7.6.36. Se conocen los números singulares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_m$ de las matrices A y B de orden n y m, respectivamente. Hallar los números singulares del producto de Kronecker $A \times B$.

Hallar los números singulares de las matrices siguientes:

7.6.37. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$. 7.6.38. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.6.39. $\begin{Vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{Vmatrix}$. 7.6.40. $\begin{Vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{Vmatrix}$.

7.6.41. $\begin{Vmatrix} 4 & -3i & 0 \\ -3i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix}$. 7.6.42. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.6.43. $\begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{Vmatrix}$.

7.6.44. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.6.45. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{Vmatrix}$.

7.6.46*. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.6.47. ¿Cómo se transforma la descomposición polar de una matriz de orden n con $n = 1$?

7.6.48. Mostrar que en la descomposición polar $A = HU$ de un operador A el operador no negativo H está definido de un modo único.

7.6.49*. Sea $A = HU$ una descomposición polar *arbitraria* de un operador A. Mostrar que el operador U transforma la base ortonormalizada de vectores propios del operador A^*A en una base análoga del operador AA^*.

7.6.50. Mostrar que cualquiera que sea la descomposición polar $A = HU$ de un operador A el operador unitario U transforma el subespacio T_{A^*} en T_A y el subespacio N_A en N_{A^*}.

7.6.51*. Sea $A = HU$ la descomposición polar arbitraria de un operador A. Demostrar que la acción del operador unitario U sobre el subespacio T_{A^*} se determina unívocamente por el operador A.

7.6.52. Demostrar que un operador regular admite una sola descomposición polar.

7.6.53. Demostrar que todo operador A que actúa en un espacio unitario (euclídeo) puede ser escrito bajo la forma

$$A = U_1 H_1.$$

donde U_1 es un operador unitario (ortogonal) y H_1 es un operador no negativo. Mostrar que en esta representación el operador H_1 está definido de un modo único.

7.6.54*. Demostrar que un operador A es normal si, y sólo si, en su descomposición polar $A = HU$ los operadores H y U son conmutables.

7.6.55. Sean A un operador normal no singular de un espacio unitario y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, sus valores propios notados en la forma trigonométrica

$$\lambda_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1), \ldots, \lambda_n = \\ = \rho_n (\cos \varphi_n + i \operatorname{sen} \varphi_n).$$

Demostrar que los autovalores de los operadores H y U de la descomposición polar de A son $\rho_1, \ldots, \rho_n$ y $\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1, \ldots$ $\ldots, \cos \varphi_n + i \operatorname{sen} \varphi_n$, respectivamente.

7.6.56. Un operador S es definido negativo. Hallar su descomposición polar.

7.6.57. Hallar la descomposición polar de un operador de derivación en el espacio de polinomios M_n con el producto escalar (7.1.7).

7.6.58. Conociendo la descomposición polar $A = HU$ de una matriz A hallar la descomposición polar de su matriz asociada A_p.

7.6.59. Vienen dadas matrices cuadradas A y B y puede ser que ellas sean de órdenes distintos. Sean $A = HU$ y $B = KV$ sus descomposiciones polares. Hallar la descomposición polar del producto de Kronecker $A \times B$.

Hallar las descomposiciones polares de las matrices siguientes:

7.6.60. $\begin{Vmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 7 \end{Vmatrix}$. 7.6.61. $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -5i & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.6.62*. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.6.63*. Aplicando la descomposición polar demostrar la afirmación recíproca del 7.5.56: si A es una matriz $n \times n$ de estructura simple cuyos valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son números reales, entonces A puede ser representada bajo la forma $A = HS$, donde H y S son matrices hermitianas y S es definida positiva. Los factores H y S de una matriz real A también se pueden elegir reales.

7.6.64*. Demostrar que la suma de los números singulares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de una matriz A de orden $n \times n$ verifica las representaciones

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \max_W |\operatorname{tr}(AW)| = \max_W \operatorname{Re} \operatorname{tr}(AW),$$

donde W recorre todo el conjunto de matrices unitarias de orden n.

§ 7.7. Descomposición hermitiana

Presentación de los problemas del párrafo. El objetivo de este párrafo es mostrar que a pesar de su simplicidad la descomposición hermitiana es un instrumento muy útil. Precisamente con ayuda de la descomposición hermitiana en numerosos casos se puede reducir la resolución de un problema planteado para operadores arbitrarios a la resolución de problemas análogos relacionados con los operadores hermitianos, lo que generalmente es mucho más simple.

Al final del párrafo damos una transformación análoga a la descomposición hermitiana para los operadores de un espacio euclídeo (véase el problema 7.7.23).

7.7.1. ¿Cómo se transforma la descomposición hermitiana de una matriz de orden n para $n = 1$?

7.7.2. ¿Qué se puede decir de un operador lineal A si $(Ax, x) = 0$ para todo operador x?

7.7.3. ¿Qué se puede decir de los operadores lineales A y B si para todos los operadores x:

a) $(Ax, x) = (Bx, x)$ y

b) $(Ax, x) = (x, Bx)$?

7.7.4. Demostrar la afirmación recíproca de 7.4.22: si para un operador lineal A el producto escalar (Ax, x) es un número real, cualquiera que sea el vector x, entonces A es un operador hermitiano.

7.7.5. Mostrar que en la definición de un operador definido positivo de un espacio unitario, la restricción impuesta a este operador de ser hermitiano es superflua.

7.7.6. Sean H y S operadores hermitianos. Mostrar que para todo vector x el producto escalar (Hx, Sx) es un número real si, y sólo si, H y S son conmutables.

7.7.7. ¿Qué se puede decir de una matriz A de orden $n \times n$ si ésta es ortogonal a toda matriz hermitiana en el sentido del producto escalar (7.1.5)?

7.7.8. Supongamos que una matriz A de orden $n \times n$ es tal que para toda matriz hermitiana H la traza del producto AH es un número real. Demostrar que en este caso la matriz A es hermitiana.

7.7.9. Sea $A = H_1 + iH_2$ la descomposición hermitiana de un operador A. Hallar la descomposición hermitiana del operador conjugado A^*.

7.7.10. Demostrar que un operador A es un operador normal si, y sólo si, los operadores H_1 y H_2 de su descomposición hermitiana $A = H_1 + iH_2$ son conmutables.

7.7.11. Mostrar que para un operador normal A los autovalores de los operadores H_1 y H_2 de su descomposición hermitiana coinciden con las partes reales e imaginarias, respectivamente, de los valores propios del operador A.

7.7.12. Mostrar que toda base ortonormalizada de los autovectores de un operador normal A es al mismo tiempo una base de autovectores de los operadores H_1 y H_2 de su descomposición hermitiana.

7.7.13. Sean A y B operadores normales conmutables. $A = H_1 + iH_2$, $B = S_1 + iS_2$, sus descomposiciones hermitianas. Demostrar que todos los operadores H_1, H_2, S_1, S_2 son conmutables.

7.7.14. Sea A un operador de un espacio de dimensión n con la descomposición hermitiana $A = H_1 + iH_2$. Demostrar que el conjunto de valores de la relación

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

donde x es un vector no nulo arbitrario, está comprendido en el rectángulo de un plano complejo de vértices (α_1, β_1), (α_1, β_n), (α_n, β_n), (α_n, β_1). Aquí α_1, α_n y β_1, β_n son los valores propios máximo y mínimo de las matrices H_1 y H_2, respectivamente.

7.7.15. Deducir del 7.7.14 el *teorema de Bendixson* siguiente: las partes reales (imaginarias) de los valores propios de un operador A

están comprendidas entre los valores propios máximo y mínimo del operador H_1 (H_2) de su descomposición hermitiana.

7.7.16. En la descomposición hermitiana de un operador A el operador H_1 es definido positivo. Demostrar que el operador A es regular.

7.7.17*. En la descomposición hermitiana de una matriz A la matriz H_1 es definida negativa. Demostrar que:

a) la matriz A es estable (véase el 7.5.20);

b) el producto de la matriz A por una matriz definida positiva cualquiera H es también una matriz estable.

7.7.18*. En una matriz tridiagonal compleja A los elementos diagonales a_{ii} son números reales; los elementos fuera de la diagonal verifican las desigualdades $a_{i,i+1}a_{i+1,i} < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Demostrar que los autovalores de la matriz A están comprendidos en la banda del plano complejo

$$\min_i a_{ii} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \max_i a_{ii}.$$

7.7.19*. Una matriz real cuadrada se llama matriz *de torneo* si todos los elementos diagonales a_{ii} son iguales a cero y los elementos fuera de la diagonal satisfacen la condición $a_{ij} + a_{ji} = 1$ cualesquiera que sean $i, j, i \neq j$. Demostrar que los autovalores de la matriz de torneo A que se examina sobre un campo de números complejos, pertenecen a la banda del plano complejo

$$-\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}(n-1),$$

donde n es el orden de A.

7.7.20*. Demostrar que en los datos del problema 7.7.16

$$|\det A| \geqslant \det H_1.$$

¿Cuándo en esta relación se obtiene la igualdad?

7.7.21*. Aplicando el teorema de Schur demostrar que en los datos del problema 7.7.16 tiene lugar la relación siguiente entre los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de los operadores A y H_1, respectivamente:

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \operatorname{Re}\lambda_2 \ldots \operatorname{Re}\lambda_n \geqslant \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

La igualdad se obtiene aquí si, y sólo si, $\operatorname{Re}\lambda_i = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$ para la ordenación conveniente de los valores propios.

7.7.22. Mostrar que el número singular máximo α_1 de un operador A verifica la igualdad

$$\alpha_1 \leqslant \rho(H_1) + \rho(H_2).$$

Aquí $\rho(H_1)$ y $\rho(H_2)$ son los radios espectrales de los operadores H_1 y H_2 de la descomposición hermitiana.

7.7.23. Mostrar que todo operador lineal A de un espacio euclídeo puede ser representado bajo la forma, y bajo una sola,

$$A = S + K,$$

donde S es un operador simétrico y K es un operador antisimétrico.

7.7.24. Demostrar que el espacio $R_{n \times n}$ (véase el 7.1.17) es una suma ortogonal de un subespacio de matrices simétricas y un subespacio de matrices antisimétricas.

7.7.25. ¿Qué se puede decir de un operador lineal A de un espacio euclídeo si $(Ax, x) = 0$ para todo vector x? Comparar este resultado con el del 7.7.2.

§ 7.8. Seudosoluciones y operador seudoinverso

Presentación de los problemas del párrafo. En la primera parte del párrafo se discuten las propiedades de las seudosoluciones y de la seudosolución normal de la ecuación $Ax = b$, donde, en el caso general, A es un operador de ω_{XY}, b es un vector *fijo* del espacio Y. También están indicados ciertos métodos de cálculo de las seudosoluciones basadas en la búsqueda preliminar de las bases ortonormalizadas compuestas de autovectores de los operadores A^*A o AA^*. Recordemos, a propósito, que las bases $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_m$ se llaman bases singulares del operador A (y del operador A^*) si los vectores $e_1, \ldots, e_r$ y $f_1, \ldots, f_r$ que corresponden a los autovalores no nulos $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_r^2$ están ligados por las relaciones:

$$f_i = \frac{1}{\alpha_i} Ae_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Las bases singulares desempeñan el papel principal en la demostración de diversas propiedades de un operador seudoinverso al que está dedicada la segunda parte del párrafo. Tratamos esta cuestión de un modo más profundo en comparación con lo que requieren los objetivos didácticos inmediatos teniendo en cuenta que los cursos de álgebra lineal prácticamente no prestan atención al operador seudoinverso, mientras que las publicaciones especiales dan interpretaciones a primera vista muy diferentes (aunque éstas, por cierto, son equivalentes) de esta noción. Ofrecemos una serie de definiciones de este género y proponemos demostrar su equivalencia. También mostramos que la serie de clases de operadores que actúan en un espacio unitario (operadores normales, hermitianos y no negativos) está cerrada respecto a la operación de seudoinversión.

7.8.1. Sea b_T la proyección de un vector b sobre la imagen T_A de un operador A. Demostrar que toda seudosolución de la ecuación $Ax = b$ es una imagen recíproca del vector b_T.

7.8.2. Mostrar que el conjunto de todas las seudosoluciones de la ecuación $Ax = b$ es un plano cuyo espacio director es el núcleo N_A de un operador A. Este plano es un subespacio si, y sólo si, b pertenece al núcleo N · del operador conjugado A^*.

7.8.3. Mostrar que una seudosolución normal de la ecuación $Ax = b$ puede ser definida como una seudosolución de esta ecuación, ortogonal al núcleo de un operador A o, lo que es lo mismo, como una seudosolución que pertenece a la imagen del operador conjugado A^*.

7.8.4. Sean A un operador de derivación en el espacio de polinomios M_n con el producto escalar (7.1.7), $g(t)$, el polinomio dado de M_n. Hallar todas las seudosoluciones y la seudosolución normal de la ecuación $Af = g$.

7.8.5. ¿Cómo están ligadas entre sí las seudosoluciones y las seudosoluciones normales de la ecuación $Ax = b$ y de las ecuaciones: a) $\alpha Ax = b$; b) $Ax = \alpha b$; c) $\alpha Ax = \alpha b$, donde α es un número diferente de cero?

7.8.6. ¿Cómo están ligadas entre sí las seudosoluciones normales de la ecuación $Ax = b$ y de las ecuaciones: a) $UAx = Ub$; b) $AVx = b$? Aquí U y V son operadores unitarios.

7.8.7. Supongamos que A es un operador normal y se conoce la base ortonormalizada $e_1, \ldots, e_n$ compuesta de vectores propios de este operador. ¿Cómo hallar las seudosoluciones y la seudosolución normal de la ecuación $Ax = b$?

7.8.8*. Sea A un operador de rango r de un espacio X de dimensión n en el espacio Y de dimensión m. Es conocida la base ortonormalizada $e_1, \ldots, e_n$ de vectores propios del operador A^*A y los valores propios correspondientes $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2$ ($\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$). Demostrar que:

a) las seudosoluciones de la ecuación $Ax = b$ están descritas por la fórmula

$$x = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_r e_r + \gamma_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \gamma_n e_n,$$

donde

$$\beta_i = \frac{(b, Ae_i)}{(Ae_i, Ae_i)} = \frac{(A^*b, e_i)}{\alpha_i^2}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

y $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n$ son números arbitrarios;

b) la seudosolución normal es el vector

$$x_0 = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_r e_r.$$

7.8.9. Para el operador A del problema precedente es conocida la base ortonormalizada $f_1, \ldots, f_m$ de vectores propios AA^* (en este caso $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$). Demostrar que la seudosolución normal de la ecuación $Ax = b$ puede hallarse mediante la fórmula

$$x_0 = \xi_1 A^* f_1 + \ldots + \xi_r A^* f_r,$$

donde

$$\xi_i = \frac{(b, f_i)}{\alpha_i^2}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Hallar las seudosoluciones normales de los sistemas de ecuaciones lineales siguientes considerando que en los espacios aritméticos correspondientes los productos escalares están introducidos de acuerdo con el (7.1.4):

7.8.10. $279x_1 + 362x_2 - 408x_3 = 0,$

$$515x_1 - 187x_2 + 734x_3 = 0.$$

7.8.11*. $27x_1 - 55x_2 = 1,$

$$\begin{aligned} -13x_1 + 27x_2 &= 1, \\ -14x_1 + 28x_2 &= 1. \end{aligned}$$

7.8.12. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

7.8.13. $x_1 + x_2 = 2,$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 &= 2. \end{aligned}$$

7.8.14. $-x_1 - 2x_2 = 1,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 &= 0, \\ 3x_1 + 6x_2 &= 0. \end{aligned}$$

7.8.15. $2x_1 - x_2 = 1,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

7.8.16. $2x_1 - \quad x_2 \qquad = 1,$

$$\begin{aligned} -x_1 + (1 + \varepsilon)x_2 + x_3 &= 0, \ (\varepsilon \neq 0). \\ x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

7.8.17. $2x_1 - x_2 \qquad = 1,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_2 + (2 + \varepsilon)\, x_3 &= 1, \ (\varepsilon \neq 0). \end{aligned}$$

7.8.18*. $5x_1 - 3x_4 \qquad = 2,$

$$\begin{aligned} 4x_2 + 2x_3 + 2x_5 &= 3, \\ 2x_2 + 2x_3 \qquad &= 0, \\ -3x_1 + x_4 \qquad &= -2, \\ 2x_2 + \qquad 2x_5 &= 3. \end{aligned}$$

7.8.19. Hallar el operador seudoinverso del operador nulo de X en Y.

7.8.20. Demostrar que para un operador regular el operador seudoinverso coincide con el operador inverso.

7.8.21. Hallar el operador seudoinverso del operador de derivación en el espacio de polinomios M_n con el producto escalar (7.1.7). Comparar el operador obtenido con el operador conjugado (véase el 7.1.34).

7.8.22. Demostrar que para todo operador A y el número α no nulo

$$(\alpha A)^+ = \frac{1}{\alpha} A^+.$$

7.8.23. Demostrar que para los operadores unitarios cualesquiera U y V:

a) $(UA)^+ = A^+U^*$;
b) $(AV)^+ = V^*A^+$.

7.8.24. Mostrar que la imagen y el núcleo del operador seudoinverso A^+ coinciden con la imagen y el núcleo del operador conjugado A^*, respectivamente.

7.8.25. Examinemos un operador A como un operador de T_{A^*} en T_A y el operador seudoinverso A^+ como un operador de T_A en T_{A^*}. Mostrar que sobre este par de subespacios los operadores A y A^+ son recíprocamente inversos. Esto significa que cualesquiera que sean el vector x de T_{A^*} y el vector y de T_A

$$A^+Ax = x, \quad AA^+y = y.$$

7.8.26. Mostrar que las propiedades del operador seudoinverso indicadas en los 7.8.24 y 7.8.25 con la hipótesis complementaria sobre la linealidad equivalen a la definición del operador seudoinverso.

7.8.27. Sean $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_m$ las bases singulares del operador A. Hallar en este par de bases la matriz del operador seudoinverso A^+.

7.8.28. Mostrar que las bases singulares del operador A son también las bases singulares del operador seudoinverso A^+. En este caso los números singulares no nulos de A y de A^+ son recíprocamente inversos.

7.8.29. Mostrar que $(A^+)^+ = A$.

7.8.30. Mostrar que $(A^*)^+ = (A^+)^*$.

7.8.31. Mostrar que el operador seudoinverso de un operador hermitiano es también hermitiano.

7.8.32. Demostrar que el operador seudoinverso A^+ de un operador normal A es también normal. Hallar la relación entre los autovalores de los operadores A y A^+.

7.8.33. Demostrar que cualquiera que sea k natural, un operador normal A verifica las relaciones $(A^k)^+ = (A^+)^k$.

7.8.34. Demostrar que el operador seudoinverso de un operador no negativo es también no negativo.

7.8.35. Sean $A = HU$ y $A = U_1H_1$ las descomposiciones polares de un operador A. Hallar las descomposiciones polares del operador A^+.

7.8.36. Demostrar que para que un operador A coincida con su operador seudoinverso es necesario y suficiente que:

a) la imagen T_A y el núcleo N_A sean ortogonales;
b) el operador inducido A/T_A verifique la igualdad

$$(A/T_A)^{-1} = A/T_A.$$

En particular, estas condiciones se cumplen para un operador de proyección ortogonal.

7.8.37*. Sean los operadores A y B tales que $A^*B = 0$ y $BA^* = 0$. Demostrar que $(A + B)^+ = A^+ + B^+$.

7.8.38*. Los operadores A y B verifican la relación $T_A = T_{B^*}$. Demostrar que $(BA)^+ = A^+B^+$.

7.8.39. Demostrar la igualdad

$$AA^+A = A.$$

7.8.40. Demostrar que el sentido geométrico de la ecuación

$$AXA = A \tag{7.8.1}$$

respecto al operador lineal X consiste en que sobre el par de subespacios XT_A y T_A los operadores A y X deben ser recíprocamente inversos en el sentido definido por el 7.8.25

7.8.41. Demostrar que el operador seudoinverso A^+ puede ser definido como un operador lineal que verifica la ecuación (7.8.1) y posee la misma imagen y el mismo núcleo que el operador conjugado A^*.

7.8.42*. Demostrar que cada una de definiciones indicadas más abajo es equivalente a la definición del operador seudoinverso:

a) un operador X que verifica la ecuación (7.8.1) y tal que

$$X = A^*B = CA^*$$

para ciertos operadores lineales B y C;

b) un operador X que verifica la ecuación (7.8.1) y tal que

$$X = A^*DA^*$$

para cierto operador lineal D;

c) un operador X que verifica la ecuación $A^*AX = A^*$ y tal que

$$X = A^*AF$$

para cierto operador lineal F.

7.8.43. Demostrar que el rango del operador $(A^+)^2$ es igual al rango del operador A^2.

7.8.44. Un operador A del espacio X actúa en el espacio Y. Demostrar que el operador A^*A es hermitiano y que su acción consiste en realizar la proyección ortogonal del espacio X sobre el subespacio T_{A^*}.

7.8.45. Describir el sentido geométrico de las exigencias planteadas ante un operador X por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} AXA &= A, \\ (XA)^* &= XA. \end{aligned} \tag{7.8.2}$$

7.8.46. Demostrar la igualdad $A^+AA^+ = A^+$.

7.8.47. El operador X verifica el sistema (7.8.2). ¿Cuál es la nueva exigencia que la ecuación

$$XAX = X$$

plantea ante este operador?

7.8.48. Demostrar que para el operador A del problema 7.8.44 el operador AA^+ es hermitiano y su acción consiste en realizar la proyección ortogonal del espacio Y sobre el subespacio T_A.

7.8.49. Demostrar que las condiciones

$$AXA = A, \qquad XAX = X,$$
$$(XA)^* = XA, \quad (AX)^* = AX$$

definen unívocamente el operador seudoinverso. Estas condiciones se llaman *ecuaciones de Penrose*, por el nombre del matemático inglés que ha sido uno de los primeros en introducir el operador seudoinverso (más exactamente, la matriz seudoinversa).

§ 7.9. Formas cuadráticas

Presentación de los problemas del párrafo. Las cuestiones esenciales que se examinan en este párrafo son:

Reducción de la forma cuadrática a la forma canónica mediante la transformación ortogonal de incógnitas.

Ley de inercia, relación de congruencia de las matrices, determinación de los índices de inercia con ayuda de los menores principales.

Reducción simultánea de un par de formas cuadráticas.

Método de Lagrange de reducción a la forma canónica que se estudia solamente en su aplicación a las formas definidas positivas. La descomposición posible que se deduce de una matriz definida positiva en un producto de dos matrices triangulares recíprocamente transpuestas se halla en la base de uno de los métodos más eficaces de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con las matrices de esta clase. Prestamos gran atención a este método y a sus aspectos de cálculo.

Advirtamos que todas las matrices que se examinan en este párrafo se suponen reales.

Para cada una de las formas cuadráticas indicadas más abajo hallar la transformación ortogonal de incógnitas que reduce esta forma a la forma canónica y notar la forma canónica obtenida:

7.9.1. $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

7.9.2. $-3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$.

7.9.3. $-x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

7.9.4. $2x_1x_4 + 6x_2x_3$.

7.9.5. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 8x_2x_4 + 4x_3x_4$.

7.9.6*. Supongamos que una forma cuadrática $F(x_1, \ldots, x_n)$ puede ser reducida mediante una transformación singular de incógnitas a la forma

$$F = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_{k+l}^2.$$

Demostrar que el índice de inercia positivo de la forma F no sobrepasa k y el índice de inercia negativo no sobrepasa l.

7.9.7. Demostrar que para descomponer una forma cuadrática en un producto de dos formas lineales es necesario y suficiente que el rango de la forma no sobrepase dos y que para un rango igual a dos la signatura sea nula.

7.9.8. Mostrar que el rango y la signatura de una forma cuadrática son de una misma paridad.

7.9.9. Las matrices reales A y B de orden $n \times n$ se llaman *congruentes* si existe una matriz no singular P tal que $B = P^T A P$. Mostrar que la relación de congruencia sobre un conjunto de matrices cuadradas de orden dado es reflexiva, simétrica y transitiva.

7.9.10. Demostrar que una matriz A es congruente a una matriz diagonal si, y sólo si, ella es simétrica.

7.9.11. Demostrar que las matrices simétricas A y B son congruentes si, y sólo si, ellas tienen el mismo número de autovalores positivos y el mismo número de autovalores negativos.

7.9.12*. Aplicando las propiedades de los autovalores de las matrices simétricas y de sus submatrices principales (véase el 7.4.35) demostrar la afirmación siguiente: sea A matriz de una forma cuadrática F con n incógnitas y supongamos que todos los menores principales directores de la matriz A son diferentes de cero. El índice de inercia positivo (negativo) de la forma F es en este caso igual al número de coincidencias (cambios) de signos en la sucesión numérica

$$1, D_1, D_2, \ldots, D_n,$$

donde D_i es el menor principal director de orden i. Esta *regla* de definición de los índices de inercia pertenece a *Jacobi*.

7.9.13*. Supongamos que en las notaciones del problema 7.9.12 el menor D_k es nulo, $k < n$, y los menores D_{k-1} y D_{k+1} son diferentes de cero. Demostrar que $D_{k-1}D_{k+1} < 0$.

7.9.14*. Supongamos que en la sucesión $1, D_1, \ldots, D_n$ el determinante $D_n \neq 0$, pero para $k < n$ el menor D_k puede ser igual a cero. En cada uno de estos casos supongamos que D_{k-1} y D_{k+1} son diferentes de cero. Atribuyamos de un modo arbitrario signos a los valores nulos de D_k. Mostrar que en estas condiciones la regla de Jacobi de cálculo de los índices de inercia conserva su validez. Este complemento a la regla de Jakobi pertenece a *Gundelfinger*.

7.9.15. Deducir las afirmaciones 7.4.44 y 7.4.45 de 7.9.12 y 7.9.14.

Calcular los índices de inercia de las formas cuadráticas indicadas más abajo:

7.9.16. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$.

7.9.17. $x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4$.

7.9.18. $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 6x_3x_4$.

7.9.19. Supongamos que en una forma cuadrática $F(x_1, \ldots, x_n)$ el coeficiente $a_{11} > 0$. ¿Cuál es el resultado de la siguiente transformación de incógnitas

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n),$$

$$y_i = x_i, \quad i = 2, \ldots, n?$$

7.9.20*. Demostrar que una forma cuadrática definida positiva puede ser reducida a la forma normal por una transformación *trian-*

gular de incógnitas, es decir, por una transformación de la forma

$$\begin{aligned} y_1 &= s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + \ldots + s_{1n}x_n, \\ y_2 &= \qquad\quad s_{22}x_2 + \ldots + s_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \qquad\qquad\qquad\quad s_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{7.9.1}$$

donde $s_{11}, s_{22}, \ldots, s_{nn}$ son diferentes de cero.

Reducir a la forma normal por una transformación triangular de incógnitas las formas cuadráticas siguientes:

7.9.21. $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$.

7.9.22. $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$.

7.9.23. $x_1^2+4x_2^2+11x_3^2+24x_4^2-2x_1x_3-4x_1x_4+4x_2x_3+16x_3x_4$.

7.9.24. Demostrar que para toda matriz definida positiva A existe la llamada *descomposición triangular*, es decir, una representación de la forma

$$A = S^T S, \tag{7.9.2}$$

donde S es una matriz triangular superior.

7.9.25. Mostrar que los elementos diagonales de la matriz S de la descomposición triangular (7.9.2) y los menores principales directores D_i de la matriz A están ligados por las relaciones

$$s_{ii}^2 = \frac{D_i}{D_{i-1}}, \quad i=1, \ \ldots, \ n; \quad D_0 = 1.$$

Esto mismo se refiere a los elementos diagonales de las fórmulas (7.9.1).

7.9.26. Demostrar que la descomposición triangular (7.9.2) de una matriz definida positiva A es la única si se introduce la restricción complementaria de que los elementos diagonales s_{ii} sean positivos.

7.9.27. Mostrar que los elementos de la matriz S de la descomposición (7.9.2) pueden ser calculados sucesivamente en el orden s_{11}, $s_{12}, \ldots, s_{1n}, s_{22}, s_{23}, \ldots, s_{nn}$ mediante las fórmulas

$$\begin{gathered} s_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad j=2, \ \ldots, \ n, \\ s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2} \quad (i>1), \\ s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}s_{kj}}{s_{ii}} \quad (j>i). \end{gathered} \tag{7.9.3}$$

Aplicando las fórmulas (7.9.3) hallar la descomposición triangular de las matrices siguientes:

7.9.28. $\left\|\begin{matrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{matrix}\right\|$. 7.9.29. $\left\|\begin{matrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{matrix}\right\|$.

7.9.30. $\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{matrix}\right\|$.

7.9.31. Una matriz definida positiva A tiene estructura de cinta, es decir, $a_{ij} = 0$ para $|i-j| > d > 0$. Utilizando las fórmulas (7.9.3) mostrar que en este caso también $s_{ij} = 0$ para $j - i > d$.

7.9.32. Hallar la descomposición triangular de la matriz tridiagonal de orden n siguiente:

$$A = \left\|\begin{matrix} 1 & \sqrt{2} & & & & \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} & & & \\ & \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ & & & & 3 & \sqrt{2} \\ & & & & \sqrt{2} & 3 \end{matrix}\right\|.$$

7.9.33. Mostrar que si la matriz S es la descomposición triangular de una matriz A su submatriz principal S_k es la descomposición triangular de la submatriz A_k en la matriz A.

7.9.34. Utilizando el resultado del problema 7.9.30 hallar la descomposicion triangular de la matriz

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{matrix}\right\|.$$

7.9.35. Demostrar que los elementos de la matriz S de la descomposición triangular (7.9.2) verifican la desigualdad

$$\max_{i,j} |s_{ij}| \leqslant \max_{i} \sqrt{a_{ii}}.$$

Deducir que si para la matriz $A \max\limits_{i,j} |a_{ij}| = 1$, entonces $\max\limits_{i,j} |s_{ij}| \leqslant 1$.

De este modo al calcular la descomposición triangular de una matriz definida positiva los elementos no crecen (en el sentido indicado).

7.9.36. Hallar el número de operaciones de multiplicación, de división y de extracción de una raíz cuadrada necesarias para calcular la matriz de una descomposición triangular haciendo uso de las fórmulas (7.9.3).

7.9.37. Supongamos que se conoce la descomposición triangular de una matriz definida positiva A. Proponer un método de resolución del sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$.

7.9.38. Hallar el número total de operaciones de multiplicación y de división necesarias para resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ con matriz definida positiva A calculando la descomposición triangular de esta matriz mediante las fórmulas (7.9.3) y resolviendo después sistemas de ecuaciones lineales con matrices triangulares (véase el 7.9.37). Comparar este número con el número de operaciones de multiplicación y de división necesarias para la realización del método de Gauss.

Este método de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con matriz definida positiva se llama *método de raíces cuadradas.*

7.9.39. Demostrar que una matriz definida positiva A puede ser representada en forma del producto

$$A = S_1 S_1^T, \tag{7.9.4}$$

donde S_1 es una matriz triangular superior.

7.9.40. Sean A una matriz definida positiva, $\widetilde{A}$ la matriz simétrica a A respecto a su centro y $\widetilde{A} = \widetilde{S}^T \widetilde{S}$ la descomposición triangular de $\widetilde{A}$. Demostrar que la representación (7.9.4) de A puede ser obtenida buscando la simétrica de cada una de las matrices $\widetilde{S}^T$ y $\widetilde{S}$ respecto a su centro.

7.9.41. Demostrar que dos formas cuadráticas F y G de las mismas incógnitas pueden ser reducidas simultáneamente a la forma canónica por medio de una transformación lineal no singular si por lo menos una de las formas F y G es definida positiva.

7.9.42. Se dan dos formas cuadráticas F y G de las mismas incógnitas; además, la forma G es regular. Demostrar que si existe una transformación lineal regular que reduce las dos formas a la forma canónica

$$F = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$
$$G = \mu_1 y_1^2 + \ldots + \mu_n y_n^2,$$

entonces para toda transformación de este tipo la colección de relaciones

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\mu_n}$$

es la misma. A saber, estas relaciones son raíces de la llamada *ecuación z del par de formas F y G*; $|A - zB| = 0$, donde A y B son matrices de las formas F y G; respectivamente.

7.9.43. Las formas cuadráticas F y G son definidas positivas. Examinemos dos transformaciones lineales no singulares. Una de ellas reduce la forma F a la forma canónica $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ y la forma G, a la forma normal; la otra transformación reduce la forma F a forma normal y la forma G, a la forma canónica $\mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_n z_n^2$. ¿Cuál es la relación entre los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y $\mu_1, \ldots, \mu_n$?

7.9.44. Demostrar que las formas F y G pueden ser reducidas simultáneamente a la forma canónica por una transformación lineal no singular si las matrices de estas formas son conmutables.

Para cada uno de los pares de formas cuadráticas indicadas más abajo hallar la transformación lineal no singular que las reduzca a la forma canónica. Indicar las formas canónicas obtenidas:

7.9.45. $F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$,

$$G = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

7.9.46. $F = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$,

$$G = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

7.9.47. $F = -x_1^2 - 5x_2^2 - 14x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$,

$$G = -x_1^2 - 14x_2^2 - 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

7.9.48. $F = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_4$,

$$G = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4.$$

7.9.49. $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$,

$$G = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$$

7.9.50. Sean F y G formas cuadráticas de las mismas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, además, G es definida positiva. Numeremos las raíces de la ecuación z del par de formas F y G en el orden decreciente: $z_1 \geqslant z_2 \geqslant \ldots \geqslant z_n$. Demostrar que la raíz máxima z_1 y la raíz mínima z_n verifican las representaciones

$$z_1 = \max_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \neq 0} \frac{F(x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)},$$

$$z_n = \min_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \neq 0} \frac{F(x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}.$$

7.9.51. Formular y demostrar el análogo del teorema de Courant-Fischer para el par de formas del problema precedente.

§ 7.10. Teoría espectral de los pares de matrices

Sean A y B matrices $n \times n$ complejas. El número λ y el vector no nulo x son tales que

$$Ax = \lambda Bx \tag{7.10.1}$$

se llaman, respectivamente, *valor propio (autovalor)* y *vector propio (autovector)* del par de matrices (A, B). Esta definición generaliza la definición (6.0.1) que se obtiene cuando $B = E$.

7.10.1. Estudiando los pares de matrices siguientes:

a) $$A=\begin{Vmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix};$$

b) $$A=\begin{Vmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{Vmatrix};$$

c) $$A=\begin{Vmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}7&0&0\\0&8&0\\0&0&9\end{Vmatrix};$$

d) $$A=\begin{Vmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}7&0&0\\0&8&0\\0&0&0\end{Vmatrix}$$

convénzase de que un par de matrices generalmente puede carecer de valores propios; pero si existen valores propios, su número puede coincidir con el orden de matrices, pero también puede ser rigurosamente menor que éste. Además, es posible una situación cuando cualquier número λ es autovalor del par (A, B). En este caso el par (A, B) se llama *singular* y los demás pares (A, B) se llaman *regulares*.

7.10.2. Mostrar que los valores propios del par de matrices de orden $n\times n$ son raíces de su *ecuación característica*

$$|\lambda B - A| = 0. \qquad (7.10.2)$$

7.10.3. El primer miembro de la ecuación (7.10.2) se llama *polinomio característico* del par de matrices (A, B). Hallar expresiones para el coeficiente mayor y para el término independiente del polinomio característico valiéndose de los elementos de las matrices A y B. Advirtamos que: a) todos los coeficientes del polinomio característico del par singular (A, B) son iguales a cero; b) si un par (A, B) no tiene valores propios, todos los coeficientes del polinomio característico, excepto el término independiente, son iguales a cero. En el caso a) la noción de polinomio característico pierde su contenido. En cuanto al caso b) advertimos que el par (B, A), a diferencia del (A, B), posee un autovalor. ¿Cuál es este autovalor?

7.10.4. Demostrar que el núcleo de las matrices A y B que componen un par regular, se intersecan solamente por el vector cero. En particular, $Bx \neq 0$ para el vector propio x del par regular (A, B).

7.10.5. Sean P y Q matrices de orden $n \times n$ no singulares. Mostrar que los pares de matrices (A, B) y (PAQ, PBQ) poseen los mismos autovalores o no los tienen en general. Hallar la relación entre autovectores de ambos pares.

Los pares (A, B) y (A_1, B_1) tales que $A_1 = PAQ$, $B_1 = PBQ$ para ciertas matrices no singulares P y Q, los llamaremos *pares equivalentes.*

7.10.6. Hallar la relación entre autovalores y los autovectores de un par regular (A, B) y de pares: a) (B, A); b) $(A - \alpha B, B)$; c) $(\cos\varphi A - \operatorname{sen}\varphi B, \operatorname{sen}\varphi A + \cos\varphi B)$; d) $(B^{-1}A, E)$; e) $(A^{-1}B, E)$; f) $(B(A - \alpha B)^{-1}B, B)$. En los últimos tres casos se supone que las matrices correspondientes son regulares.

7.10.7. Mostrar que de un par regular de matrices de orden $n \times n$ (A, B) se puede obtener mediante el *desplazamiento*, es decir, mediante el cambio al par $(B, A - \alpha B)$ para cierto número correspondiente α, un par con un polinomio característico de grado n.

El problema 7.10.7 permite considerar que en cierto sentido todo par regular de matrices de orden $n \times n$ (A, B) tiene n valores propios. Efectivamente, esto es así para el par $(B, A - \alpha B)$ obtenido mediante el desplazamiento si cada valor propio se cuenta tantas veces, como es su multiplicidad como raíz de polinomio característico. De los valores propios $\mu_1, \ldots, \mu_n$ del par $(B, A - \alpha B)$ se obtienen los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ del par inicial usando la fórmula $\lambda = \alpha + 1/\mu$. En este caso es necesario admitir la posibilidad de que aparezcan valores propios *infinitos* que responden al caso de $\mu = 0$. Para un vector propio correspondiente x tenemos $Bx = 0$, aunque según el 7.10.4 $Ax \neq 0$. Conque los vectores propios de un par regular (A, B) asociados a los valores propios $\lambda = \infty$ son exactamente vectores (no nulos) del núcleo de la matriz B.

7.10.8. Según el 7.10.4., si los núcleos de las matrices $n \times n$ A y B poseen una intersección no trivial, el par (A, B) es singular. Dar un ejemplo de un par singular (A, B) para el cual la intersección de los núcleos de las matrices A y B está compuesta solamente del vector nulo; esto es también válido respecto a la intersección de los núcleos de las matrices A^T y B^T.

7.10.9. Supongamos que en un par (A, B) la matriz B es no singular. Mostrar que entre los pares equivalentes al par (A, B) hay un par de tipo (J, E), donde J es una matriz de Jordan. ¿Cuál es el sentido de los elementos diagonales de la matriz J?

7.10.10. Supóngamos que en los pares (A, B) y (C, D) todas las matrices poseen una misma estructura casi diagonal:

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{Vmatrix}, \qquad (7.10.4)$$

y análogamente para C, D. Mostrar que a partir de la equivalencia de los pares (A_{ii}, B_{ii}) y (C_{ii}, D_{ii}), $i = 1, 2$ se deduce la equivalencia de los pares (A, B) y (C, D). ¿Es correcta una afirmación inversa: de la equivalencia de los pares (A, B) y (C, D) se infiere la equivalencia de los pares de las células diagonales correspondientes?

7.10.11. En un par (A, B) la matriz B es singular, pero la matriz A no lo es. Proponer —por analogía con el 7.10.9— el par más simple entre los pares equivalentes.

Un par de matrices (A, B) de tipo (7.10.4) lo llamaremos *suma directa* de los pares de matrices (A_{11}, B_{11}) y (A_{22}, B_{22}). La noción de suma directa de pares se refiere también al caso de un gran número de células en la estructura casi diagonal de las matrices (A, B).

7.10.12*. En los datos del problema 7.10.11 demostrar que el par (A, B) es equivalente a la suma directa de pares de tipo (J_l, E_l) y (E_h, N_h), donde J_l, N_l son células de Jordan y además N_h se refiere siempre al número 0.

7.10.13*. Demostrar que la afirmación del problema 7.10.12 es válida en realidad para cualquier par regular de matrices (A, B).

Entonces, según el 7.10.13 en toda clase de pares de matrices equivalentes hay un par de la forma

$$\widetilde{A} = \left\|\begin{array}{ccc:ccc} J_{s_1}(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{s_p}(\lambda_p) & & & \\ \hdashline & & & E_{t_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & E_{t_q} \end{array}\right\|,$$

$$\widetilde{B} = \left\|\begin{array}{ccc:ccc} E_{s_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & E_{s_p} & & & \\ \hdashline & & & N_{t_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & N_{t_q} \end{array}\right\| \qquad (7.10.5)$$

que se llama *forma canónica* para los pares de la clase dada. En los problemas 7.10.14—7.10.16 se establece que la forma canónica de una clase se define de un modo único, con una exactitud de hasta una conmutación de pares diagonales.

7.10.14. Mostrar que para todo par (A, B) de la clase con forma canónica (7.10.5) el polinomio característico es igual a $(\lambda - \lambda_1)^{s_1} \ldots \ldots (\lambda - \lambda_p)^{s_p}$, por lo que los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son autovalores del par (A, B).

7.10.15*. Supongamos que α no coincide con ninguno de los números $\{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Demostrar que el orden de células en la forma canónica (7.10.5) coincide con el orden de células en la forma de Jordan de la matriz $(\alpha\widetilde{B} - \widetilde{A})^{-1}\widetilde{A}$.

7.10.16. Mostrar que para todos los pares (A, B) de una clase dada y el número α subordinado a los datos del problema 7.10.15 las matrices $(\alpha B - A)^{-1}A$ son semejantes y, por consiguiente, poseen una misma forma de Jordan que determina el tipo y el orden de células en el (7.10.5).

Hallar la forma canónica para los pares de matrices que siguen:

7.10.17.
$$A=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}.$$

7.10.18.
$$A=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}.$$

7.10.19.
$$A=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}.$$

7.10.20.
$$A=\begin{Vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}.$$

7.10.21.
$$A=\begin{Vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}3 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}.$$

El subespacio $L\subset \mathbb{C}^n$ se llama *subespacio reductor* del par de matrices $n\times n$ (A, B) si

$$\dim (AL+BL)\leqslant \dim L. \tag{7.10.6}$$

7.10.22. Supongamos que ambas matrices (A, B) poseen una misma estructura casi triangular

$$A=\begin{Vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}B_{11} & B_{12}\\ 0 & Bt_2\end{Vmatrix}. \tag{7.10.7}$$

donde A_{11}, B_{11} son células de orden k. Mostrar que la cápsula lineal de los primeros k vectores unitarios $e_1, \ldots, e_k$ es un subespacio reductor del par (7.10.7).

7.10.23. Sea L un subespacio reductor de dimensión k $(0<k<$ $<n)$ para un par de matrices de orden $n\times n$ (C, D). ¿De qué modo se puede pasar a un par de matrices equivalentes de tipo (7.10.7) aplicando la información acerca de L?

7.10.24. Mostrar que un conjunto de autovalores del par (7.10.7) —su espectro— es una reunión de espectros de los pares (A_{11}, B_{11}) y (A_{22}, B_{22}).

El problema 7.10.24 explica el sentido del término «subespacio reductor».

7.10.25. Demostrar que para un par regular (A, B) el signo de desigualdad estricta en (7.10.6) es imposible.

7.10.26. Mostrar que si en un par (A, B) la matriz B es no singular todo subespacio reductor de este par es un subespacio invariante de la matriz $B^{-1}A$. Formular y demostrar una proposición análoga para el caso cuando en el par (A, B) la matriz A es no singular.

7.10.27. Mostrar que un subespacio reductor de un par (A, B) es al mismo tiempo un subespacio reductor del par $(A - \alpha B, B)$, cualquiera que sea el número α.

7.10.28. A partir de los problemas 7.10.26—7.10.27 deducir la descripción siguiente de subespacios reductores para los pares de matrices regulares: todo subespacio reductor de un par regular (A, B) es un subespacio invariante de la matriz $(A - \alpha B)^{-1}B$, donde α es un número arbitrario que no coincide con ningún valor propio del par dado.

7.10.29. Mostrar que un par regular de matrices $n \times n$ (A, B) posee un subespacio reductor de cualquier dimensión k, $0 < k < n$.

La forma canónica (7.10.5) es una generalización para el caso de un par matricial de matrices de forma de Jordan. La construcción de ambas formas exige la aplicación de transformaciones (equivalentes y semejantes, respectivamente) con matrices no singulares arbitrarias. Según el teorema de Schur, para pasar a *la forma triangular* de una matriz compleja (llamada *forma de Schur*) son suficientes las semejanzas unitarias. Los problemas 7.10.30—7.10.32 muestran que *la forma triangular de un par regular de matrices* —la llamaremos también *forma de Schur*— también puede ser construida basándose solamente en las transformaciones unitarias.

7.10.30*. Supongamos que en un par de matrices $n \times n$ (A, B) la matriz B no es singular. Mostrar que existen matrices unitarias P_1 y Q_1 para las cuales

$$A_1 = P_1^* A Q_1 = \begin{Vmatrix} \alpha & a_1 \\ 0 & \hat{A} \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix} \beta & b_1 \\ 0 & \hat{B} \end{Vmatrix} = P_1^* B Q_1,$$

donde α, β son números y $\hat{A}$, $\hat{B}$ son matrices de orden $n - 1$.

7.10.31. Demostrar que para el par (A, B) del problema precedente existen matrices unitarias P y Q tales que

$$\Delta_A = P^* A Q = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdot & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \alpha_{nn} \end{Vmatrix},$$

$$\Delta_B = P^* B Q = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & & \beta_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \beta_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (7.10.8)$$

Un par de matrices triangulares Δ_A, Δ_B) se llaman *forma de Schur* del par inicial (A, B).

7.10.32. Mostrar que una reducción unitaria a la forma de Schur es posible en caso de un par regular arbitrario (A, B) (y no solamente en caso de los pares con matriz no singular B).

7.10.33. Un par de matrices de tipo $n \times n$ (A, B) se llama *par diagonalizable* (o *par de estructura simple*) si en $\mathbb{C}^n$ existe una base de vectores propios de este par. Demostrar que el par (A, B) será diagonalizable si, y sólo si, para ciertas matrices no singulares R, S y matrices diagonales D_A, D_B son válidas las representaciones

$$A = RD_A S^{-1}, \quad B = RD_B S^{-1}. \tag{7.10.9}$$

7.10.34. Un par de matrices de tipo $n \times n$ (A, B) se llama *normal* si en $\mathbb{C}^n$ existe una base ortonormal de autovectores de este par. Demostrar que el par (A, B) será normal si, y sólo si, son válidas las representaciones (7.10.9) y la matriz S de éstas puede ser unitaria.

7.10.35. Supongamos que en un par (A, B) la matriz B es no singular. Mostrar que el par (A, B) será diagonal o normal si, y sólo si, la matriz $B^{-1}A$ es de estructura simple o normal, respectivamente.

Capítulo 8

PROBLEMAS MÉTRICOS EN UN ESPACIO LINEAL

§ 8.0. Terminología y generalidades

Un conjunto X se llama *espacio métrico* si a cada par de sus elementos x e y le está asignado un número no negativo $\rho(x, y)$ llamado *distancia entre* x e y, además se respetan los axiomas siguientes:

1. $\rho(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Sea M_1 un subconjunto de un espacio métrico X. El conjunto de todos los elementos $x \in X$ no pertenecientes a M_1 se llama *complemento* de M_1. Si $M_1, M_2, \ldots$ son subconjuntos de X, llámase *unión* de éstos al conjunto de todos los elementos, cada uno de los cuales pertenece por lo menos a uno de los conjuntos $M_1, M_2, \ldots$. Llámase *intersección* de $M_1, M_2, \ldots$ al conjunto de todos los elementos que forman parte de cada uno de los conjuntos $M_1, M_2, \ldots$.

Llámase *bola* $S(a, r)$ al conjunto de todos los elementos x de X que verifican la condición

$$\rho(a, x) < r.$$

El elemento a se llama *centro* de la bola y el número positivo r, *radio* de la bola.

Llámase *entorno* del elemento x a toda bola de centro x. En un espacio métrico X el conjunto M se llama *abierto* si conjuntamente con cada uno de sus elementos x él contiene cierto entorno de este elemento.

Un elemento $x \in X$ se llama *punto límite* de un conjunto M si todo entorno de este elemento contiene por lo menos un elemento de M que no coincide con x. El conjunto obtenido agregando a M todos sus puntos límites se llama *adherencia* de M que se indica con $\overline{M}$. El conjunto M se llama *cerrado* si $M = \overline{M}$.

Llámase *bola cerrada* de centro a y de radio r al conjunto $\overline{S}(a, r)$ de todos los elementos x de X que satisfacen la condición

$$\rho(x, a) \leqslant r.$$

El elemento x_0 de un espacio métrico X se llama *límite de una sucesión* $\{x_n\}$ de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$ de X si $\rho(x_0, x_n) \to$

$\to 0$ para $n \to \infty$. En este caso se escribe

$$x_n \to x$$

o bien

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

La sucesión $\{x_n\}$ que tiene un límite se llama *convergente* (hacia x_0).

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio métrico se llama *fundamental* si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un índice $N(\varepsilon)$ tal que $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ para $n, m \geq N(\varepsilon)$.

Si en un espacio métrico X toda sucesión fundamental converge hacia un cierto límite, el espacio X se llama *completo*.

Un espacio lineal X real o complejo se llama *espacio* lineal *normalizado* si a cada vector $x \in X$ se le asigna un número real $\| x \|$ llamado *norma* del vector x satisfaciendo los axiomas siguientes:

1. $\| x \| \geq 0$, además $\| x \| = 0$ sólo si $x = 0$;
2. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (desigualdad triangular);
3. $\| \lambda x \| = | \lambda | \, \| x \|$. (8.0.1)

Si se adopta

$$\rho(x, y) = \| x - y \|,$$

un espacio normalizado puede ser considerado como un espacio métrico. La convergencia de la sucesión respecto a una tal distancia se llama *convergencia en norma*.

Un conjunto M de un espacio lineal normalizado X se llama *limitado* si existe un número positivo C tal que $\| x \| \leq C$ para todos los x de M.

Llámase *bola unidad* (*esfera unidad*) de un espacio normalizado al conjunto de todos los vectores x tales que $\| x \| \leq 1$ ($\| x \| = 1$).

En un espacio normalizado el conjunto M se llama *convexo* si conjuntamente con dos de sus vectores cualesquiera x e y él contiene todo el segmento $\lambda x + (1 - \lambda) y$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Todo espacio lineal normalizado X de dimensión finita es un espacio métrico completo. El hecho de que el conjunto M de X está acotado es equivalente al que en toda base del espacio X las coordenadas de todos los vectores x de M están acotadas. Igualmente la convergencia de la sucesión $\{x_k\}$ hacia el vector x_0 es equivalente al hecho de que en toda base del espacio X las coordenadas de los vectores x_k convergen hacia las coordenadas correspondientes del vector x_0.

Un ejemplo de espacio normalizado está dado por un espacio aritmético de dimensión n en el cual la norma del vector $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ viene definida por la igualdad

$$\| x \|_p = (| \alpha_1 |^p + | \alpha_2 |^p + \ldots + | \alpha_n |^p)^{1/p}, \quad p \geq 1. \qquad (8.0.2)$$

La desigualdad triangular de esta norma se llama *desigualdad de Minkowski*. Esta última se deduce de la *desigualdad de Hölder*

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k\beta_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^q\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \quad (8.0.3)$$

Sean X e Y espacios normalizados con las normas $\| x \|_X$ e $\| y \|_Y$, respectivamente. Dicen que en el espacio de operadores ω_{XY} la norma $\| A \|$ es *concordante* con las normas vectoriales de los espacios X e Y si

$$\| Ax \|_Y \leqslant \| A \| \; \| x \|_X \qquad (8.0.4)$$

para todos los $x \in X$ y todo operador $A \in \omega_{XY}$.

Si X es un espacio normalizado con la norma $\| x \|$, en el espacio ω_{XX} la norma definida por la igualdad

$$\| A \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} \qquad (8.0.5)$$

se llama *subordinada* a la norma vectorial $\| x \|$. Además de los axiomas usuales (8.0.1), la norma subordinada posee también una propiedad especial respecto a la multiplicación de operadores:

$$\| AB \| \leqslant \| A \| \; \| B \|. \qquad (8.0.6)$$

La definición de las normas concordante y subordinada se extiende inmediatamente a los espacios de matrices que se consideran como operadores en espacios aritméticos. Si, en particular, en un espacio aritmético se introduce la norma $\| x \|_p$ (véase (8.0.2)), la norma subordinada correspondiente se nota $\| A \|_p$. Se examinan más frecuentemente las normas $\| A \|_1$, $\| A \|_2$, $\| A \|_\infty$.

Aun cuando la norma de matrices en cuestión no es subordinada, supondremos que ella observa la propiedad (8.0.6).

Supongamos que una matriz A tiene la forma $A = E + B$, donde $\| B \| < 1$ para cierta norma matricial. En este caso A es no singular y para la norma de la matriz inversa se verifica la estimación

$$\| A^{-1} \| \leqslant \frac{\| E \|}{1 - \| B \|}. \qquad (8.0.7)$$

Supongamos que se examinan el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

con una matriz cuadrada no singular A y un sistema *perturbado*

$$(A + \varepsilon_A) \tilde{x} = b + \varepsilon_b.$$

Respecto a la matriz ε_A se supone que

$$\| \varepsilon \|_A < \| A^{-1} \|^{-1}.$$

Esta condición asegura la no singularidad de la matriz $A + \varepsilon_A$. Si se adopta

$$\delta x = \frac{\| x - \tilde{x} \|}{\| x \|}, \quad \delta A = \frac{\| \varepsilon_A \|}{\| A \|}, \quad \delta b = \frac{\| \varepsilon_b \|}{\| b \|},$$

tiene lugar la estimación

$$\delta x \leqslant \frac{\| A \| \| A^{-1} \|}{1 - \| A \| \| A^{-1} \| \delta A} (\delta A + \delta b). \tag{8.0.8}$$

Aquí se supone que la norma de matrices $\| A \|$ está subordinada a la norma vectorial $\| x \|$.

El producto $\| A \| \; \| A^{-1} \|$ se llama *número de condicionalidad* de la matriz A y se nota cond (A). Si hace falta indicar explícitamente una norma matricial, respecto a la cual se elige el número de condicionalidad, se escribe $\text{cond}_1 (A)$, $\text{cond}_2 (A)$ o $\text{cond}_\infty (A)$.

Como muestra la estimación (8.0.8) el número de condicionalidad caracteriza la sensibilidad de la solución del sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ con respecto a las perturbaciones de sus coeficientes. Las matrices con números de condicionalidad grandes se llaman usualmente *mal condicionadas*.

Sean A una matriz $n \times n$ de estructura simple con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, X, una matriz no singular cuyas columnas son vectores propios de la matriz A. Entonces todos los autovalores de la matriz $A + \varepsilon_A$ están comprendidos en el dominio del plano complejo que es una unión de n círculos

$$| z - \lambda_i | \leqslant \text{cond} (X) \| \varepsilon_A \|, \; i = 1, \ldots, n. \tag{8.0.9}$$

Aquí por norma de matrices se entiende una de las normas $\| A \|_1$, $\| A \|_2$, $\| A \|_\infty$.

§ 8.1. Espacio lineal normalizado

Presentación de los problemas del párrafo. Además de los ejercicios sobre las nociones métricas esenciales examinamos en este párrafo dos cuestiones más: la equivalencia de normas en un espacio lineal de dimensión finita y la relación de dualidad de normas respecto al producto escalar. Los hechos relativos a las normas duales nos permiten introducir en el párrafo siguiente la relación de orden parcial sobre el conjunto de normas de operadores.

8.1.1. Mostrar que en un espacio euclídeo (unitario) la longitud de un vector verifica todos los axiomas de una norma.

8.1.2. En un espacio X de dimensión n está fijada una base $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n$. Sea x un vector arbitrario de X a descomponer por la base

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Mostrar que en X una norma puede ser definida por la igualdad:

a) $\| x \|_1 = | \alpha_1 | + | \alpha_2 | + \ldots + | \alpha_n |$;
b) $\| x \|_2 = (| \alpha_1 |^2 + | \alpha_2 |^2 + \ldots + | \alpha_n |^2)^{1/2}$;
c) $\| x \|_\infty = \max\limits_i | \alpha_i |$;

d) en general, para todo número positivo p, $p > 1$,

$$\| x \|_p = (|\alpha_1|^p + |\alpha_2|^p + \ldots + |\alpha_n|^p)^{1/p}.$$

8.1.3. Sean $m(x)$ y $n(x)$ dos normas de un espacio lineal X. Mostrar que las normas de este espacio son igualmente

a) $p(x) = \text{máx}(m(x), n(x))$;

b) $q(x) = \alpha m(x) + \beta n(x)$, donde α y β son números no negativos fijos no iguales simultáneamente a cero;

c) $r(x) = (m^2(x) + n^2(x))^{1/2}$.

8.1.4. Sea P un operador lineal no singular de un espacio lineal normalizado X con norma $\| x \|$. Demostrar que $m(x)$ también es una norma del espacio X, donde

$$m(x) = \| Px \|. \tag{8.1.1}$$

8.1.5. Un espacio lineal X es una suma directa de los subespacios L_1 y L_2. Además, sobre L_1 está introducida la norma $m(x)$ y sobre L_2, la norma $n(x)$. Sea x un vector arbitrario de X; se considera que $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in L_1$; $x_2 \in L_2$. Adoptemos

$$\| x \| = m(x_1) + n(x_2).$$

Mostrar que mediante este procedimiento se introduce la norma sobre el espacio X.

8.1.6. Al definir la norma rechacemos la exigencia de nulidad de la norma solamente para el vector nulo. La función de vector así obtenida se llama *seminorma*. De este modo, la seminorma $\| x \|$ se define por los axiomas:

a) $\| x \| \geqslant 0$;

b) $\| \alpha x \| = |\alpha| \; \| x \|$;

c) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

Demostrar que si en un espacio lineal X se introduce la seminorma $\| x \|$, entonces:

a) el conjunto de vectores para los cuales la seminorma es igual a cero es un subespacio lineal L del espacio X;

b) todos los vectores del plano $x_0 + L$ tienen la misma seminorma;

c) asignando a cada plano $x_0 + L$ el valor general de la seminorma de sus vectores se obtiene la norma sobre el espacio factor del espacio X por el subespacio L.

8.1.7. Demostrar que para cuatro vectores cualesquiera x, y, z, u de un espacio normalizado se verifica la desigualdad

$$| \| x - y \| - \| z - u \| | \leqslant \| x - z \| + \| y - u \|.$$

8.1.8. Demostrar que la bola $\| x - x_0 \| < r$ es un conjunto abierto.

8.1.9. Demostrar que la unión de cualquier número de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

8.1.10. Mostrar que toda bola es un conjunto acotado.

8.1.11. Mostrar que todo plano de dimensión positiva no es un conjunto acotado.

8.1.12. Mostrar que toda bola es un conjunto convexo.

8.1.13. Mostrar que todo plano de dimensión positiva es un conjunto convexo.

8.1.14. Demostrar que la bola $\| x - x_0 \| \leqslant r$ es un conjunto cerrado.

8.1.15. Demostrar que un conjunto complementario a un conjunto abierto es un conjunto cerrado.

8.1.16. Demostrar que un conjunto complementario a un conjunto cerrado es un conjunto abierto.

8.1.17. Mostrar que la intersección de cualquier número de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

8.1.18. Mostrar que la unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Dar un ejemplo que muestre que la unión de un número infinito de conjuntos cerrados puede ya no ser un conjunto cerrado.

8.1.19. Demostrar que si $x_k \to x_0$, $y_k \to y_0$, entonces

a) $\| x_k \| \to \| x_0 \|$;

b) $\| x_k - a \| \to \| x_0 + a \|$ para todo vector a;

c) $\alpha x_k + \beta y_k \to \alpha x_0 + \beta y_0$ para todos los números α y β;

d) si la sucesión de números λ_k converge hacia el número λ_0, entnces $\lambda_k x_k \to \lambda_0 x_0$.

8.1.20. Demostrar que si toda subsucesión no trivial de una sucesión $\{x_k\}$ converge, converge también la propia sucesión $\{x_k\}$. Llámase trivial a una subsucesión que coincide, a partir de cierto término, con la sucesión inicial.

8.1.21. Demostrar que si x_0 es un punto límite de un conjunto M, existe una sucesión $\{x_k\}$, $x_k \in M$, convergente hacia x_0.

8.1.22. Demostrar que la clausura de un conjunto convexo es también un conjunto convexo.

8.1.23. Demostrar que de toda sucesión acotada de vectores de un espacio normalizado su puede extraer una subsucesión convergente.

8.1.24. Demostrar que todo conjunto acotado infinito posee puntos límites.

8.1.25. Llámase *distancia del vector x al conjunto M* a la magnitud

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \| x - y \|.$$

Mostrar que si M es un conjunto cerrado, existe un $y_0 \in M$ tal que $\rho(x, M) = \| x - y_0 \|$.

8.1.26. Llámase *distancia entre los conjuntos M_1 y M_2* a la magnitud

$$\rho(M_1, M_2) \inf_{x \in M_1\ y \in M_2} \| x - y \|.$$

Demostrar que si los conjuntos M_1 y M_2 son cerrados y acotados, existen $x_0 \in M_1$ e $y_0 \in M_2$ tales que $\rho(M_1, M_2) = \| x_0 - y_0 \|$.

8.1.27. Mostrar que el resultado del problema 8.1.26 sigue siendo válido si se suprime la restricción impuesta a uno de los conjuntos M_1 y M_2 de ser acotado. Dar un ejemplo que muestre que la afirmación del problema no es válida si los dos conjuntos M_1 y M_2 no son acotados.

8.1.28. ¿Están unívocamente definidos los vectores x_0 e y_0 en las formulaciones de los problemas 8.1.25, 8.1.26 y 8.1.27?

8.1.29*. Sea M un conjunto convexo de un espacio euclídeo (unitario) y supongamos que como norma se adopta la longitud de un vector. Demostrar que en los datos del problema 8.1.25 el vector y_0 en este caso viene unívocamente definido.

8.1.30. Sean M_1 y M_2 conjuntos cerrados acotados. Demostrar que el conjunto N de todos los vectores de la forma $x + y$, donde $x \in M_1$, $y \in M_2$, es cerrado y acotado.

8.1.31. Los conjuntos M_1 y M_2 son cerrados; además, M_1 es acotado. Demostrar que en este caso la afirmación del problema 8.1.30 sobre la clausura del conjunto N también es válida. Dar un ejemplo que muestre que para los conjuntos cerrados no acotados M_1 y M_2 el conjunto N puede ser no cerrado.

8.1.32*. Sea X un espacio lineal real o complejo. La aplicación de X sobre el conjunto de números reales o complejos, respectivamente, se llama *funcional* sobre X. Sea X un espacio normalizado. Una funcional $F(x)$ se llama *continua en el punto* x_0 si $x_k \to x_0$ implica $F(x_k) \to F(x_0)$. Una funcional $F(x)$ es *continua sobre el conjunto* M si ella es continua para todo x_0 de M. Una funcional continua para todo x de X se llama *continua*.

Demostrar que:

a) toda funcional lineal sobre el espacio X es continua;

b) si $\| x \|$ es una norma introducida sobre el espacio X, toda otra norma $m(x)$ de X es una funcional continua respecto a $\| x \|$.

8.1.33*. Sean M un conjunto cerrado acotado y $F(x)$ una funcional continua sobre M. Demostrar que existe un número positivo c tal que $| F(x) | \leqslant c$ para todo x de M.

8.1.34*. Demostrar que en los datos del problema precedente en el conjunto M existe un vector x_0 tal que $| F(x_0) | = \max\limits_{x \in M} | F(x) |$.

8.1.35*. Demostrar que para dos normas cualesquiera $m(x)$ y $n(x)$ de un espacio lineal X existen números positivos c_1 y c_2 tales que

$$c_1 n(x) \leqslant m(x) \leqslant c_2 n(x). \tag{8.1.2}$$

¿Cómo elegir el mayor de los números posibles c_1 y el menor de números posibles c_2?

8.1.36. En las desigualdades (8.1.2) hallar los números óptimos posibles c_1 y c_2 para cada par de tres normas $\| x \|_1$, $\| x \|_2$, $\| x \|_\infty$ (véase 8.1.2).

8.1.37*. En un espacio aritmético de dimensión n se examinan las normas

$\| x \|_2 = (| \alpha_1 |^2 + \ldots + | \alpha_n |^2)^{1/2}$

y

$$m(x) = \| Px \|_2,$$

donde P es una matriz $n \times n$ no singular. ¿Cómo calcular para este par de normas las constantes óptimas posibles c_1 y c_2 de las desigualdades (8.1.2)?

8.1.38. Demostrar que el conjunto M perteneciente a un espacio X y abierto respecto a la norma $m(x)$ de este espacio es abierto también respecto a cualquier otra norma.

8.1.39. Demostrar que un conjunto M cerrado respecto a una norma cualquiera de un espacio X es también cerrado respecto a cualquier otra norma de este espacio.

8.1.40. Demostrar que todo plano de un espacio normalizado X es un conjunto cerrado y no abierto (excepto el espacio mismo X).

8.1.41*. Un espacio X es una suma directa de los subespacios L_1 y L_2. Un conjunto cerrado M_1 pertenece a L_1 y un conjunto cerrado M_2 pertenece a L_2. Demostrar que el conjunto N compuesto de todas las sumas $x + y$, donde $x \in M_1$, $y \in M_2$, es cerrado. Advertir que a diferencia de 8.1.31 aquí no se exige que esté acotado ninguno de los conjuntos M_1 y M_2.

8.1.42. En un espacio euclídeo (unitario) X, además de la longitud del vector se examina también la norma $m(x)$. Adoptemos para todo y de X

$$m^*(y) = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|}{m(x)}. \qquad (8.1.3)$$

Mostrar que esta expresión es siempre finita y $m^*(y)$ satisface todos los axiomas de la norma. La norma obtenida $m^*(y)$ se llama *dual de la norma* $m(x)$ respecto al producto escalar (x, y).

8.1.43. Mostrar que la determinación de una norma dual es equivalente a cada una de las expresiones siguientes:

a) $m^*(y) = \sup\limits_{m(x)=1} |(x, y)|$;

b) $m^*(y) = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{|(x, y)|}{m(x)}$;

c) $m^*(y) = \max\limits_{m(x)=1} |(x, y)|$;

d) $m^*(y) = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\operatorname{Re}(x, y)}{m(x)}$;

e) $m^*(y) = \max\limits_{m(x)=1} \operatorname{Re}(y, x)$.

8.1.44. Mostrar que en los datos del problema 8.1.42 dos vectores cualesquiera x e y verifican la desigualdad

$$|(x, y)| \leqslant m(x)\, m^*(y). \qquad (8.1.4)$$

En este caso para todo y existe un vector x_0 tal que

$$(x_0, y) = m(x_0)\, m^*(y).$$

8.1.45. Hallar la norma dual de la longitud de un vector.

8.1.46. Hallar la norma dual de la norma $\| x \|_\infty = \max\limits_i | \alpha_i |$ en un espacio aritmético de dimensión n con el producto escalar (7.1.4).

8.1.47*. Demostrar generalizando el 8.1.46 que la norma dual de la norma

$$\| x \|_p = (| \alpha_1 |^p + \ldots + | \alpha_n |^p)^{1/p}, \quad p > 1,$$

es la norma

$$\| x \|_q = (| \alpha_1 |^q + \ldots + | \alpha_n |^q)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

¿Qué es para este par de normas la desigualdad (8.1.4)?

8.1.48. Para las normas $m(x)$ y $n(x)$ de un espacio euclídeo (unitario) X para todo vector x se verifica la desigualdad: $m(x) \geqslant n(x)$. Mostrar que para las normas duales $m^*(y)$ y $n^*(y)$ tiene lugar una correlación inversa: $m^*(y) \leqslant n^*(y)$ para todo vector y.

8.1.49*. Demostrar que para todo vector x existe un vector y tal que la desigualdad (8.1.4) deviene igualdad.

8.1.50. Mostrar que la norma $m^{**}(x)$, dual de la norma dual de $m^*(y)$, coincide con la norma inicial $m(x)$.

§ 8.2. Normas de operadores y matrices

Presentación de los problemas del párrafo. En el presente párrafo examinamos casi exclusivamente las normas en el espacio de matrices teniendo en cuenta las aplicaciones indicadas en los párrafos que siguen. Claro está que todas las afirmaciones pueden ser formuladas explícitamente en el idioma de operadores. Subrayamos que decimos matricial a una norma que además de los tres axiomas usuales posee la propiedad siguiente relacionada con la operación de multiplicación de matrices:

$$\| AB \| \leqslant \| A \| \, \| B \|.$$

Estudiamos diferentes clases de normas matriciales y, en particular, las propiedades de la norma espectral y euclídea. En el último caso damos una serie de relaciones métricas interesantes, análogas a las que tienen lugar en un plano complejo. En conclusión analizamos las propiedades de las normas subordinadas y la propiedad de concordancia entre las normas vectorial y matricial. Este análisis conduce a la relación de orden parcial sobre un conjunto de normas.

8.2.1. Demostrar que todo operador lineal transforma un conjunto cerrado en un conjunto cerrado.

8.2.2. ¿Es cierto que un conjunto abierto se transforma por todo operador lineal en un conjunto abierto?

8.2.3. ¿Es cierto que un conjunto cerrado pasa a ser un conjunto cerrado mediante una transformación lineal?

8.2.4. Demostrar que un conjunto cerrado y acotado sometido a la acción de un operador lineal arbitrario se transforma en un conjunto cerrado.

8.2.5*. Sean M un conjunto cerrado y A, un operador lineal. Demostrar que la *imagen recíproca completa del conjunto M* (es decir, el conjunto de todos los x para los cuales $Ax \in M$) es también un conjunto cerrado.

8.2.6*. Sea $\{A_k\}$ una sucesión de operadores lineales de un espacio normalizado X y supongamos que para todo x de X la sucesión $\{A_k x\}$ converge. Adoptemos que

$$Ax = \lim_{k\to\infty} A_k x.$$

Mostrar que:

a) el operador A definido por esta igualdad es lineal;

b) $A_k \to A$ cualquiera que sea la norma sobre el espacio de operadores.

8.2.7. Mostrar que la sucesión de matrices $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ converge (en toda norma) hacia la matriz $A = (a_{ij})$ si, y sólo si, $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$ para todos los i, j.

8.2.8. Mostrar que una secesión de matrices normales puede tener como límite únicamente una matriz normal. De un modo análogo, una sucesión de matrices unitarias puede converger solamente hacia una matriz unitaria y una secesión de matrices definidas positivas converge hacia una matriz definida positiva.

8.2.9. Mostrar que cualquiera que sea la norma sobre un espacio de matrices, la norma de la matriz unidad no es inferior a uno.

8.2.10. Sea $\| A \|$ la norma sobre un espacio de matrices $n \times n$. Mostrar que las normas matriciales serán también:

a) $M(A) = \alpha \| A \|$, $\alpha > 1$;

b) $L(A) = \| A^* \|$;

c) $N(A) = \| P^{-1}AP \|$, donde P es una matriz no singular de orden n.

8.2.11. Mostrar que si $M(A)$ y $L(A)$ son normas matriciales, $N(A) = \max\{M(A), L(A)\}$ es también una norma matricial.

8.2.12. Demostrar que la función siguiente de una matriz $n \times n$

$$K(A) = \sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} | \tag{8.2.1}$$

es una norma matricial.

8.2.13. Sea E_{ij} una matriz de orden n, cuyo único elemento no nulo se encuentra en el lugar (i, j) y es igual a uno. Mostrar que si para todos los i, j la norma matricial $\| A \|$ verifica la desigualdad

$$\| E_{ij} \| \leqslant 1,$$

entonces

$$\| A \| \leqslant K(A),$$

donde $K(A)$ es la norma definida por la fórmula (8.2.1).

8.2.14. En un espacio aritmético de dimensión n se introduce el producto escalar natural (7.1.4). En un tal espacio la norma de matrices subordinada a la longitud de un vector se llama *norma espectral* y se designa $\| A \|_2$. Demostrar que la norma espectral de una matriz es igual a su número singular máximo.

8.2.15. ¿Cómo calcular la norma espectral: a) de una matriz diagonal y b) de una matriz casi diagonal?

8.2.16. Introduzcamos en un espacio de matrices $n \times n$ un producto escalar según (7.1.5). La longitud de una matriz en el espacio euclídeo (unitario) obtenido se expresa por la fórmula

$$\| A \|_E = \Big(\sum_{i, j=1}^{n} | a_{ij} |^2 \Big)^{1/2}$$

y se llama *norma euclídea de una matriz.* Mostrar que para cualesquiera matrices A y B

$$\| AB \|_E \leqslant \| A \|_E \| B \|_E.$$

8.2.17. Hallar la norma euclídea de una matriz unitaria de orden n.

8.2.18*. Deducir la expresión de la norma euclídea de una matriz A $n \times n$ por medio de sus números singulares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

8.2.19. Demostrar que la norma espectral de una matriz espectral A es igual a su norma euclídea si, y sólo si, A es de rango 1.

8.2.20. Demostrar que para cualesquiera matrices U y V

$$\| UAV \|_2 = \| A \|_2, \quad \| UAV \|_E = \| A \|_E.$$

8.2.21*. Demostrar las desigualdades:

a) $\| A \|_E \leqslant \sqrt{n} \| A \|_2$;
b) $\| AB \|_E \leqslant \| A \|_2 \| B \|_E$;
c) $\| AB \|_E \leqslant \| A \|_E \| B \|_2$.

8.2.22. Supongamos que una matriz A tiene la descomposición hermitiana siguiente: $A = H_1 + iH_2$. Demostrar que

a) $\| H_1 \|_2 \leqslant \| A \|_2, \quad \| H_2 \|_2 \leqslant \| A \|_2$;
b) $\| H_1 \|_E^2 + \| H_2 \|_E^2 = \| A \|_E^2$.

8.2.23. Demostrar que para toda matriz hermitiana H

$$\| A - H \|_E \geqslant \| A - H_1 \|_E.$$

De este modo la matriz H_1 de la descomposición hermitiana de A es la matriz hermitiana más cercana (en el sentido de la distancia euclídea) a la matriz A. De un modo análogo la matriz iH_2 es la matriz antihermitiana más cercana a A. Indicar la propiedad análoga de esta propiedad en el plano complejo.

8.2.24. Sea $A = HU$ una descomposición polar de una matriz A. Mostrar que

$$\| H \|_E^2 = \| H_1 \|_E^2 + \| H_2 \|_E^2.$$

¿A qué propiedad de los números complejos le corresponde esta igualdad?

8.2.25*. Demostrar que para toda matriz definida positiva H la matriz unitaria más cercana en el sentido de la distancia euclídea es la matriz unidad E y la más alejada, la matriz E. ¿Qué cambiará si H es una matriz no negativa?

8.2.26. Sea $A = HU$ una descomposición polar arbitraria de una matriz A. Demostrar que toda matriz unitaria V verifica las desigualdades

$$\| A - U \|_E \leqslant \|A - V\|_E \leqslant \| A + U \|_E.$$

Indicar la propiedad correspondiente de los números complejos.

8.2.27*. Sea A una matriz $n \times n$ con números singulares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Consideremos que

$$S(A) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n. \qquad (8.2.2)$$

Demostrar que $S(A)$ es una norma matricial.

8.2.28. Demostrar que para cualesquiera matrices no negativas A y B y cualesquiera números no negativos α y β

$$S(\alpha A + \beta B) = \alpha S(A) + \beta S(B).$$

La norma $S(A)$ viene definida por la igualdad (8.2.2).

8.2.29*. Mostrar que en la definición de una norma subordinada

$$\| A \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$$

la abreviatura sup puede ser sustituida por máx.

8.2.30. Hallar las normas subordinadas de matrices de las normas siguientes de un espacio aritmético de dimensión n:

a) $\| x \|_1 = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$;

b) $\| x \|_\infty = \max |\alpha_i|$.

Hallar los valores de las normas obtenidas sobre la matriz diagonal D.

8.2.31. Demostrar que toda matriz A $n \times n$ verifica la igualdad

$$\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|_\infty}{\| x \|_1}.$$

8.2.32. Las normas $m(x)$ y $n(x)$ de un espacio aritmético son tales que para todo vector x $m(x) = c\, n(x)$, donde c es un número fijado. Mostrar que las normas subordinadas correspondientes coinciden.

8.2.33. Sea $M(A)$ la norma de matrices subordinada a la norma vectorial $m(x)$. Hallar la norma matricial subordinada a la norma $n(x) = m(P, x)$, donde P es una matriz fijada no singular.

8.2.34. Sea A una matriz de rango 1 representada en forma de producto $A = xy^*$, donde x e y son vectores columna de dimensión n. Demostrar la igualdad para toda norma $m(x)$ de un espacio aritmético y la norma subordinada correspondiente de matrices $M(A)$:

$$M(A) = m(x)\, m^*(y), \qquad (8.2.3)$$

donde $m^*(y)$ es la norma dual de $m(x)$ respecto al producto escalar (7.1.4).

8.2.35. Hallar el valor de la norma $\| A \|_\infty$ sobre la matriz de rango 1 con representación conocida $A = xy^*$.

8.2.36. Sea $M(A)$ una norma matricial subordinada. Demostrar que $M(A)$ verifica la representación:

$$M(A) = \max_{B \neq 0} \frac{M(AB)}{M(B)}. \tag{8.2.4}$$

8.2.37. Demostrar que la representación (8.2.4) también sigue en vigor cuando se examinan no todas las matrices no nulas B, sino solamente las matrices de rango 1.

8.2.38*. Demostrar que una norma matricial subordinada $M(A)$ también verifica la representación

$$M(A) = \max_{r_B = 1} \frac{|\operatorname{tr}(AB)|}{M(B)}. \tag{8.2.5}$$

Aquí B recorre un conjunto de matrices de rango 1.

8.2.39. Sean $M(A)$ y $N(A)$ normas matriciales subordinadas y supongamos que $M(A) \geqslant N(A)$ para todas las A. Demostrar que en este caso $M(A) \equiv N(A)$.

8.2.40*. Sean $m(x)$ y $m^*(x)$ normas duales de un espacio aritmético, $M(A)$ y $M^*(A)$, sus normas subordinadas de matrices. Demostrar que para toda matriz A

$$M(A) = M^*(A^*).$$

8.2.41*. Demostrar que toda norma de matrices está concordada con una cierta norma de un espacio aritmético.

8.2.42. Mostrar que si una norma matricial $\| A \|$ concuerda con una norma vectorial $m(x)$ y si $M(A)$ está subordinada a $m(x)$, entonces $\| A \| \geqslant M(A)$ para todas las matrices A. De este modo la norma subordinada $M(A)$ es la menor de todas las normas concordadas con la norma vectorial $m(x)$.

8.2.43*. Demostrar que toda norma subordinada de matrices está concordada con la norma vectorial única (con una exactitud de hasta la multiplicación por un número).

8.2.44. Mostrar que toda norma matricial subordinada $M(A)$ es *mínima* en el sentido de que no existe una otra norma matricial $L(A)$ tal que

$$L(A) \leqslant M(A)$$

para toda matriz A.

8.2.45*. Supongamos que la norma matricial $\| A \|$ concuerda con la norma vectorial $m(x)$ tal que $M(A)$ es una norma subordinada. Además, $\| A \|$ coincide con $M(A)$ sobre un conjunto de matrices de rango 1. Demostrar que $m(x)$ es la única norma vectorial (con una exactitud de hasta la multiplicación por un número) con la cual concuerda $\| A \|$.

8.2.46. Mostrar que una norma euclídea de matrices, así como una norma $S(A)$ (véase la (8.2.2)) están concordadas (con una exactitud de hasta la multiplicación por un número) solamente con la norma $\| x \|_2 = (| \alpha_1 |^2 + \ldots + | \alpha_n |^2)^{1/2}$.

8.2.47. Sobre una matriz unidad E una norma matricial $M(A)$ es igual a uno. ¿Significa esto que $M(A)$ es una norma subordinada?

§ 8.3. Normas matriciales y sistemas de ecuaciones lineales

Presentación de los problemas del párrafo. Aquí se discuten las aplicaciones de las normas matriciales a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales definidas (los sistemas no definidos e incompatibles han sido examinados en el § 7.8). En este párrafo las cuestiones esenciales son:

Criterios de no singularidad de las matrices.

Estimación de las normas de matrices inversas.

Condicionalidad de los sistemas de ecuaciones lineales, propiedades de los números de condicionalidad.

Estimación de la perturbación de la solución de un sistema con una perturbación dada de sus coeficientes.

Solución aproximada de un sistema con estimación de la precisión de la solución obtenida.

8.3.1. Demostrar que una matriz $A + B$, donde A es una matriz no singular y $\| A^{-1}B \| < 1$, es también una matriz no singular.

8.3.2. Demostrar que si una matriz A es no singular y la matriz $A + B$ es singular, para el número convenido (de condicionalidad) de A tiene lugar la estimación

$$\operatorname{cond}(A) \geqslant \frac{\| A \|}{\| B \|}.$$

8.3.3. Evaluar inferiormente el número convenido $\operatorname{cond}_\infty(A)$ de la matriz

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{Vmatrix}, \quad \varepsilon \neq 0.$$

8.3.4. Demostrar que una matriz $U + B$, donde U es una matriz unitaria y la norma espectral de la matriz B es inferior a la unidad, es no singular.

8.3.5*. Sea α_n el número singular mínimo de una matriz A $n \times n$. Demostrar que la distancia (en el sentido de la norma espectral) de A al conjunto M de matrices singulares es

$$\rho_2(A, M) = \alpha_n.$$

8.3.6*. Demostrar que el número singular mínimo de la matriz del determinante (3.3.1) no pasa $2^{-(n-1)}$.

8.3.7*. Los números singulares de una matriz A de orden n son $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$. Demostrar que la distancia (en el sentido de la norma espectral) de A al conjunto M_r de matrices de rango inferior a r es

$$\rho_2(A, M_r) = \alpha_r, \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

8.3.8. Una matriz A de orden n se llama *diagonalmente dominante* (*según las filas*) si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Demostrar que una matriz diagonalmente dominante es no singular. Enunciar un criterio análogo de la dominación por las columnas.

8.3.9*. Sea A una matriz dividida en células de la forma

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{k1} & A_{k2} & \ldots & A_{kk} \end{Vmatrix},$$

donde todas las células A_{ij} son cuadradas y son del mismo orden m; las células diagonales A_{ii} son no singulares. Además, todo i, $1 \leqslant i \leqslant k$, verifica las desigualdades

$$\| A_{ii}^{-1} \| (\| A_{i1} \| + \ldots + \| A_{i,\,i-1} \| + \| A_{i,\,i+1} \| + \ldots + \| A_{ik} \|) < 1.$$

Demostrar que la matriz A es no singular. Formular la afirmación que se obtiene si $m = 1$.

8.3.10. ¿Será no singular la matriz

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 1 & 0 & -0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 2 & 1 \\ -0{,}5 & 0{,}4 & 1 & 1 \end{Vmatrix}?$$

8.3.11*. Sea A una matriz diagonalmente dominante de orden n y además para cierto número positivo α inferior a la unidad.

$$\alpha |a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Demostrar que para la norma de la matriz inversa A^{-1} son válidas las estimaciones:

$$\frac{1}{\min\limits_i |a_{ii}|} \cdot \frac{1}{1+\alpha} \leqslant \| A^{-1} \|_\infty \leqslant \frac{1}{\min\limits_i |a_{ii}|} \cdot \frac{1}{1-\alpha}. \qquad (8.3.1)$$

8.3.12. En los datos del problema 8.3.11 evaluar inferior y superiormente el número convenido $\operatorname{cond}_\infty(A)$ mediante los elementos diagonales de la matriz A y el número α.

8.3.13. Evaluar inferior y superiormente el número convenido $\operatorname{cond}_\infty(A)$ de la matriz $n \times n$

$$\left\|\begin{array}{ccccc} 1 & 10^{-1} & 10^{-2} & \dots & 10^{-(n-1)} \\ 10^{-1} & 2 & 10^{-2} & \dots & 10^{-(n-1)} \\ 10^{-2} & 10^{-2} & 3 & \dots & 10^{-(n-1)} \\ . & . & . & \dots & . \\ 10^{-(n-1)} & 10^{-(n-1)} & 10^{-(n-1)} & \dots & n \end{array}\right\|.$$

8.3.14. Sea R una matriz triangular de orden n tal que

a) $\| r_{ij} \| \leqslant 1$ para todos los i, j;

b) $r_{ii} = 1$ para todos los i.

Hallar el valor máximo posible del número convenido $\operatorname{cond}_\infty(R)$.

8.3.15. Supongamos que viene dada una sucesión de matrices A_k de orden fijado n, además, $\| A_k \| = 1$ y $\operatorname{cond}(A_k) \to \infty$ para $k \to \infty$. Demostrar que $\det A_k \to 0$ para $k \to \infty$.

De este modo teniendo fijado el orden de una matriz, el aumento del número convenido está relacionado con la disminución de la magnitud del determinante. Sin embargo, como muestra 8.3.14 cuando n es suficientemente grande el número convenido de una matriz puede ser muy grande aunque su determinante sea igual a 1.

8.3.16. Mostrar que el número convenido de toda matriz está inferiormente acotado por el número 1.

8.3.17. Mostrar que al multiplicar una matriz A por un número no nulo su número convenido $\operatorname{cond}(A)$ no cambia.

8.3.18. Hallar la expresión del número convenido espectral de una matriz normal no singular A por sus autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

8.3.19. Hallar la expresión del número convenido espectral de una matriz A no singular de orden $n \times n$ por sus números singulares $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$.

8.3.20. Demostrar que la igualdad $\operatorname{cond}_2(A) = 1$ tiene lugar si, y sólo si, $A = \alpha U$, donde U es una matriz unitaria y α, un número no nulo.

8.3.21. Mostrar que la permutación de las filas y las columnas de una matriz A no cambia los números convenidos $\operatorname{cond}_{1,2,\infty,E}(A)$.

8.3.22. Mostrar que la multiplicación a la izquierda y la multiplicación a la derecha de una matriz A por matrices unitarias arbitrarias U y V no cambian los números convenidos espectral y euclídeo de esta matriz.

8.3.23. Demostrar las desigualdades

$$\text{máx}\left\{\frac{\operatorname{cond}(A)}{\operatorname{cond}(B)}, \frac{\operatorname{cond}(B)}{\operatorname{cond}(A)}\right\} \leqslant \operatorname{cond}(AB) \leqslant \operatorname{cond}(A)\operatorname{cond}(B).$$

8.3.24. Dar una expresión explícita del número convenido euclídeo $\operatorname{cond}_E(A)$ de una matriz no singular A de orden 2×2 a través de sus elementos.

8.3.25. Mostrar que entre todas las matrices 2×2 no singulares, cuyos elementos son números enteros no negativos que no sobrepasan 100, la matriz

$$\begin{Vmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{Vmatrix}$$

admite el mayor número convenido euclídeo.

8.3.26. A la solución de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$a_{11}x + a_{12}y = a_1, \quad a_{21}x + a_{22}y = a_2,$$

cuya matriz A es real y no singular, le corresponde el problema geométrico de búsqueda del punto de intersección de dos rectas dadas por las ecuaciones del sistema. Demostrar que el ángulo α entre estas rectas verifica la desigualdad

$$|\operatorname{ctg} \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{cond}_E(A).$$

8.3.27. Sea A una matriz definida positiva. Demostrar que el número convenido espectral de la matriz $A + \alpha E$ es una función monótonamente decreciente de α cuando $\alpha > 0$.

8.3.28. Sean A una matriz definida positiva y A_k, una submatriz principal arbitraria de A. Demostrar que

$$\operatorname{cond}_2(A_k) \leqslant \operatorname{cond}_2(A).$$

8.3.29. Sea $A = S^T S$ la descomposición triangular de una matriz A definida positiva real. ¿Cómo están relacionados los números convenidos espectrales de las matrices A y S?

8.3.30. Evaluar inferiormente el número convenido espectral de la matriz del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 10\,x_1 + 10\,x_2 + 30\,x_3 &= -5, \\ 0{,}1\,x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}1x_3 &= 0{,}55, \\ 0{,}03x_1 + 0{,}01x_2 + 0{,}01x_3 &= 0{,}045. \end{aligned}$$

Indicar el procedimiento de disminuir el número convenido de modo que el sistema obtenido $\hat{A}x = \hat{b}$ tenga $\operatorname{cond}_2(\hat{A}) = 3$. Hallar la solución de este sistema.

8.3.31*. Evaluar inferiormente el número convenido espectral de la matriz del sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 20\,x_2 - 400x_3 &= 1, \\ 0{,}2x_1 - 2x_2 - 20x_3 &= 0{,}2, \\ -0{,}04x_1 - 0{,}2x_2 + x_3 &= 0{,}05. \end{aligned}$$

Indicar el procedimiento de disminuir el número convenido de modo que el sistema $\hat{A}y = \hat{b}$ tenga $\operatorname{cond}_2(\hat{A}) = 2$. Hallar la solución de este sistema.

8.3.32. Sean $\| x \|$ una norma sobre un espacio aritmético, $\| A \|$ la norma de matrices subordinada a ésta. Mostrar que si se cambia el segundo miembro del sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ en un vector con norma igual al número $\varepsilon > 0$, la solucóin del sistema puede cambiar en un vector cuya norma es $\varepsilon \| A^{-1} \|$.

8.3.33. Evaluar la perturbación eventual de la solución del sistema

$$\begin{aligned} x - 2y &= -1, \\ -2x + 4{,}01y &= 2, \end{aligned}$$

si se cambia en 0,01 los componentes del segundo miembro. Hallar la solución del sistema dado y del sistema de la misma matriz y del mismo segundo miembro

$$\tilde{b} = \left\| \begin{matrix} -1 \\ 2{,}01 \end{matrix} \right\|.$$

8.3.34. Hallar el número convenido $\operatorname{cond}_\infty (A)$ de la matriz del sistema

$$\begin{aligned} 5x - 3{,}31y &= 1{,}69, \\ 6x - 3{,}97y &= 2{,}03. \end{aligned}$$

Indicar cómo cambia la solución de este sistema al pasar a un sistema de la misma matriz y del mismo segundo miembro

$$\tilde{b} = \left\| \begin{matrix} 1{,}7 \\ 2 \end{matrix} \right\|.$$

8.3.35. Hallar la solución aproximada del sistema

$$\begin{aligned} 2{,}503x_1 + 0{,}002x_2 - 0{,}004x_3 + 0{,}001x_4 &= 5, \\ 0{,}006x_1 - 3{,}002x_2 + 0{,}001x_3 - 0{,}001x_4 &= 3, \\ -0{,}002x_1 + 0{,}002x_2 + 4{,}998x_3 + 0{,}004x_4 &= 10, \\ 0{,}005x_1 - 0{,}001x_2 \qquad\qquad + 3{,}997x_4 &= 4, \end{aligned}$$

de modo que el error de cada componente no sobrepase 0,01.

8.3.36. Hallar la solución aproximada del sistema

$$\begin{aligned} 0{,}501x_1 - 0{,}499x_2 + 0{,}001x_3 \qquad\qquad &= 0{,}5, \\ 0{,}498x_1 + 0{,}502x_2 \qquad\qquad - 0{,}001x_4 &= 0{,}5, \\ 0{,}006x_1 + 0{,}007x_2 + 3{,}008x_3 - 1{,}991x_4 &= 0, \\ -0{,}001x_1 \qquad\qquad - 2{,}001x_3 + 1{,}000x_4 &= 0, \end{aligned}$$

de modo que el error de cada componente no sobrepase 0,06.

8.3.37. Demostrar la desigualdad

$$\frac{\| B^{-1} - A^{-1} \|}{\| B^{-1} \|} \leqslant \operatorname{cond}(A) \frac{\| B - A \|}{\| A \|}$$

§ 8.4. Normas matriciales y valores propios (autovalores)

Presentación de los problemas del párrafo. En este párrafo hemos querido presentar algunas de las numerosas aplicaciones de las normas matriciales en los problemas relacionados con los valores propios (autovalores) de las matrices complejas.

Primeramente examinamos ciertas desigualdades entre los autovalores y las normas de matrices. Estas desigualdades pueden ser utilizadas para indicar el dominio sobre un plano complejo que contiene todos los valores propios de la matriz. Para este mismo fin se puede aplicar el teorema de Gershgorin (véase 8.4.20), así como el teorema de perturbación de los valores propios (véase el § 8.0).

Utilizando las propiedades de los valores propios de las matrices hermitianas se puede modificar el teorema de pertuba aciones para este caso de modo que se pueda obtener una estimación de cada autovalor por separado (véase los problemas 8.4.25—8.4.32).

Si se dan una aproximación de un valor propio λ_1 bien separado y el autovector $\tilde{x}$ aproximado correspondiente de la matriz normal, el cociente de Rayleigh compuesto para el vector $\tilde{x}$ da una aproximación de mucho mayor exactitud de λ_1. Esta cuestión se discute en los problemas 8.4.33—8.4.39.

Para concluir estudiamos la relación existente entre los valores propios de una matriz y una matriz de vectores propios mal condicionada. Se muestra fácilmente que en un entorno pequeño de una matriz que posee autovalores cercanos o múltiples existe una matriz de estructura de Jordan. Esta última puede ser considerada como un caso límite de una matriz con autovectores mal condicionados. Como observó Wilkinson, tiene también lugar una relación recíproca: si para una matriz A (aun con valores propios bien separados) la matriz de vectores propios es mal condicionada, en un entorno pequeño de A existe una matriz con raíz múltiple.

8.4.1*. Demostrar que el radio espectral de una matriz A verifica la desigualdad

$$\rho(A) \leqslant \| A \|, \tag{8.4.1}$$

cualquiera que sea la norma matricial $\| A \|$.

8.4.2. Indicar el círculo sobre un plano complejo que contiene todos los valores propios de la matriz

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1+2i \\ 0 & 2 & 1+i \\ 1+2i & 1+i & 0 \end{Vmatrix}.$$

8.4.3. Demostrar que todos los autovalores de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$$

pertenecen al círculo del plano complejo $|z| \leqslant 6$.

8.4.4. Demostrar que el autovalor máximo λ_1 y el autovalor mínimo λ_4 de la matriz simétrica

$$\left\| \begin{array}{rrrr} 6 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 13 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 20 \end{array} \right\|$$

verifica las desigualdades

$$20 \leqslant \lambda_1 \leqslant 23, \quad 0 < \lambda_4 \leqslant 6.$$

8.4.5. Demostrar que todos los valores propios de una matriz estocástica no sobrepasan la unidad en módulo.

8.4.6. Demostrar que los valores propios de la matriz tridiagonal

$$C = \left\| \begin{array}{cccccc} a_1 & b_2 & & & & \\ c_2 & a_2 & b_3 & & & \\ & c_3 & a_3 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & a_{n-1} & b_n \\ & & & & c_n & a_n \end{array} \right\|$$

verifican la desigualdad

$$|\lambda| \leqslant \max_i \{|a_i| + |b_{i+1}| + |c_i|\}, \quad c_1 = b_{n+1} = 0.$$

¿Cómo utilizar este resultado al calcular los valores propios de una matriz hermitiana usando el método de bisección?

8.4.7. Demostrar que todas las raíces del polinomio $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$ se contienen en cada uno de los círculos siguientes de un plano complejo

a) $|z| \leqslant \max \left\{1, \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_1}{a_n}\right| + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\right\}$;

b) $|z| \leqslant \max \left\{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|, 1 + \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \left|\frac{a_i}{a_n}\right|\right\}$.

8.4.8*. Sea A_0 una matriz de estructura simple. Demostrar que existe una norma matricial $\| A \|$ tal que para $A = A_0$ la relación (8.4.1) deviene igualdad.

8.4.9*. Sea A_0 una matriz arbitraria. Demostrar que para todo número positivo ε existe una norma matricial $\| A \|$ tal que $\| A_0 \| < \rho(A_0) + \varepsilon$.

8.4.10. Demostrar que para una matriz normal A_0 $\| A_0 \|_2 \leqslant M(A_0)$ para toda norma matricial $M(A)$.

8.4.11. Demostrar que para una matriz arbitraria A_0 y toda norma matricial $M(A)$ $\| A_0 \|_2 \leqslant \sqrt{M(A_0)\, M(A_0^*)}$.

8.4.12*. Sea A una matriz de orden n con valores propies $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Demostrar la *desigualdad de Schur* siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \|A\|_E^2. \tag{8.4.2}$$

8.4.13*. Sean en los datos del problema 8.4.12 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ partes reales e imaginarias de los valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Demostrar que

$$\text{a)}\ 4\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leqslant \|A + A^*\|_E^2;$$

$$\text{b)}\ 4\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \leqslant \|A - A^*\|_E^2. \tag{8.4.3}$$

8.4.14*. Demostrar que (8.4.2) se hace igualdad si, y sólo si, A es una matriz normal. Esto es también válido para cada una de las relaciones (8.4.3).

8.4.15*. Sean A una matriz $n \times n$ con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y P, una matriz no singular arbitraria. Demostrar que

$$\inf_P \|P^{-1}AP\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

¿Para qué matrices A se alcanza el límite inferior indicado?

8.4.16*. Aplicando 8.4.14 demostrar que de la normalidad de las matrices A, B y AB se infiere la normalidad de BA.

8.4.17*. Supongamos que la matriz normal A está dividida en células A_{ij} tales que

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} \end{Vmatrix}.$$

En este caso las células diagonales A_{ii} son cuadradas y es posible que sean de órdenes distintos. Supongamos luego que los autovalores de A coinciden con el conjunto de autovalores de las matrices A_{ii}. Demostrar que en este caso todas las células fuera de la diagonal A_{ij} son nulas.

8.4.18*. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, números singulares de una matriz A. Demostrar que

$$|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| \leqslant \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

8.4.19*. Aplicando 8.4.18 demostrar que para toda matriz A de orden n

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

8.4.20*. Demostrar el *teorema de Gershgorin* siguiente: todos los valores propios de una matriz A $n \times n$ pertenecen al dominio de un plano complejo que es una unión de n círculos

$$|z-a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1, \ldots, n.$$

8.4.21. Indicar el dominio del plano complejo que contiene todos los autovalores de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1,23 & 0,03 & 0,04 \\ 0,03 & 2,17 & 0,01 \\ 0,02 & 0,04 & 3,06 \end{Vmatrix}.$$

8.4.22. La matriz A verifica las desigualdades

$$\operatorname{Re} a_{ii} < -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1, \ldots, n.$$

Demostrar que A es una matriz estable.

8.4.23. Aplicando el teorema de perturbación de los valores propios indicar el dominio de un plano complejo que contiene todos los valores propios de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 2,001 & 1,499 & 0,001 \\ 0,499 & 1,001 & -0,001 \\ -0,001 & 0,001 & 0,999 \end{Vmatrix}.$$

8.4.24. Supongamos que

$$A=\begin{Vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Hallar el dominio de un plano complejo que contiene todos los valores propios de la matriz $A+\varepsilon B$. Para ello utilizar el teorema de perturbación de los valores propios.

8.4.25*. Sean A y B matrices hermitianas y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalores de la matriz A. Demostrar que cada intervalo

$$-\|B\|_2 \leqslant x-\lambda_i \leqslant \|B\|_2, \; i=1, \ldots, n, \qquad (8.4.4)$$

contiene por lo menos un valor propio de la matriz $A+B$.

8.4.26. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y μ_1, μ_2, μ_3 valores propios de las matrices A y B, respectivamente, donde

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 2,1 & 2,9 & -2 \\ 2,9 & 0,9 & 0,1 \\ -2 & 0,1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Demostrar que para cada λ_i existe μ_j tal que $|\lambda_i - \mu_j| \leqslant 0,3$.

8.4.27*. Hallar para la matriz

$$\begin{Vmatrix} 2\cdot 10^{-4} & -3 & 4 & 9991 \\ -3\cdot 10^{-8} & 1\cdot 10^{-4} & -0,4993 & -6\cdot 10^{-4} \\ 4\cdot 10^{-8} & -0,4993 & 2\cdot 10^{-4} & -2\cdot 10^{-4} \\ 0,9991\cdot 10^{-4} & -6\cdot 10^{-4} & -2\cdot 10^{-4} & 1\cdot 10^{-4} \end{Vmatrix}$$

los valores propios aproximados de tal modo que el error de cada uno no sobrepase 0,002.

8.4.28. Supongamos que en los datos del problema 8.4.25 λ_i es un valor propio de multiplicidad k. Demostrar que en este caso el intervalo

$$-\| B \|_2 \leqslant x - \lambda_i \leqslant \| B \|_2$$

contiene por lo menos k valores propios de la matriz $A + B$.

8.4.29*. Hallar las aproximaciones de los valores propios de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1,01 & -1,99 & 0,01 & 0,01 \\ -1,99 & 1,01 & -0,01 & -0,01 \\ 0,01 & -0,01 & -0,01 & -0,99 \\ 0,01 & -0,01 & -0,99 & -0,01 \end{Vmatrix}$$

de tal modo que el error de cada valor no sobrepase 0,02.

8.4.30. Supongamos que en los datos del problema 8.4.25 el dominio D compuesto por los intervalos (8.4.4) se descompone en dominio (es decir, intervalos) que no tienen puntos comunes. Demostrar que cada uno de estos dominios D_k contiene tantos autovalores de la matriz $A + B$ cuantos intervalos del sistema (8.4.4) lo componen. En este caso, si λ_i es un autovalor múltiplo de A, el intervalo que le corresponde se cuenta tantas veces, como es su multiplicidad λ_i.

8.4.31. La matriz hermitiana A está dividida en células

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{Vmatrix}$$

de tal modo que A_{11} y A_{22} son células cuadradas y $\| A_{12} \|_2 = \varepsilon$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valores propios de A numerados en el orden decreciente; $\xi_1, \ldots, \xi_r$ valores propios de A_{11}, $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$, los valores propios de A_{22} y, por fin, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, números del conjunto $\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$ numerados igualmente en el orden decreciente. Demostrar que $|\lambda_i - \mu_i| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$.

De este modo los valores propios de las células diagonales pueden ser considerados como aproximaciones de exactitud ε a los valores propios de la matriz misma A.

8.4.32*. Demostrar que la matriz siguiente A de orden 8

$$\begin{Vmatrix}
1 & 1/N & 0 & & & & & 1/N \\
1/N & 1 & 2/N & & & & & \\
0 & 2/N & 1 & & & & & \\
 & & & 2 & 1/N & & & \\
 & & & 1/N & 2 & & & \\
 & & & & & -0{,}5 & 0{,}1 & -0{,}2 \\
 & & & & & 0{,}1 & -1 & 0 \\
1/N & & & & & -0{,}2 & 0 & 2
\end{Vmatrix}$$

(con una exactitud de hasta elementos que ocupan las posiciones (1,8) y (8,1); A es una matriz casi diagonal);

a) para cualquiera que sea $N > 0$ tiene *por lo menos* un valor propio en el intervalo

$$-\frac{\sqrt{2}}{N} \leqslant \lambda - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{N};$$

b) para $N \geqslant 10$ tiene *exactamente* tres valores propios en el intervalo

$$-\frac{3}{N} \leqslant \lambda - 1 \leqslant \frac{3}{N}.$$

En los problemas 8.4.33 — 8.4.35 se supone que A es una matriz normal, $\tilde{x}$ es un vector columna normalizado tal que $\|\tilde{x}\|_2 = 1$.

8.4.33. Sea $\|A\tilde{x}\|_2 = \varepsilon$. Demostrar que la matriz A posee un valor propio λ tal que $|\lambda| \leqslant \varepsilon$.

8.4.34. Para un número arbitrario μ pongamos que $\varepsilon = \|A\tilde{x} - \mu\tilde{x}\|_2$. Mostrar que el círculo de un plano complejo $|z - \mu| \leqslant \varepsilon$ contiene por lo menos un valor propio de la matriz A.

8.4.35*. Sea λ_1 un autovalor de una matriz A situado en el círculo $|z - \mu_0| \leqslant \varepsilon$ (respecto a ε véase 8.4.34) y supongamos que los demás valores propios $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ verifican la condición

$$|\lambda_i - \mu_0| \geqslant a \gg \varepsilon.$$

Designemos por e_1 el vector propio normalizado referente al valor propio λ_1 y sea

$$\tilde{x} = \alpha e_1 + z, \tag{8.4.5}$$

donde $z \perp e_1$. Demostrar que

a) $\| Az - \mu_0 z \|_2 \geqslant a \| z \|_2$;
b) $\| Az - \mu_0 z \|_2 \leqslant \varepsilon$, $\| z \|_2 \leqslant \varepsilon/a$;
c) $|\alpha| \geqslant \sqrt{1 - \varepsilon^2/a^2}$;
d) $| (Az, z) - \mu_0 \| z \|_2^2 | \leqslant \varepsilon^2/a$.

De este modo, si ε es suficientemente pequeño respecto a a, $\tilde{x}$ puede ser considerado como una aproximación a e_1.

8.4.36. Sean A una matriz de orden n, x, un vector columna no nulo arbitrario de dimensión n. El número

$$r(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

se llama *cociente de Rayleigh* correspondiente al vector x. Demostrar que todo número μ verifica la desigualdad

$$\| Ax - r(x) x \|_2 \leqslant \| Ax - \mu x \|_2.$$

8.4.37. Demostrar que para una matriz normal A y todo vector normalizado $\tilde{x}$ el círculo

$$| z - r(\tilde{x}) | \leqslant (\| A\tilde{x} \|_2^2 - | r(\tilde{x}) |^2)^{1/2}$$

contiene un valor propio de la matriz A.

8.4.38*. Supongamos que en los datos del problema 8.4.35 μ_0 es el cociente de Rayleigh asociado al vector $\tilde{x}$. Demostrar que en este caso tiene lugar la estimación

$$| \lambda_1 - \mu_0 | \leqslant \frac{\varepsilon^2}{a} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2} \right)^{-1}. \qquad (8.4.6)$$

8.4.39. Para la matriz simétrica A

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0{,}001 & 0{,}002 & 0{,}002 \\ 0{,}001 & 2 & 0{,}002 & 0{,}002 \\ 0{,}002 & 0{,}002 & 3 & 0{,}001 \\ 0{,}002 & 0{,}002 & 0{,}001 & 4 \end{Vmatrix}$$

a) hallar los autovalores con una exactitud de 0,005 utilizando 8.4.25;

b) mostrar que todos los elementos diagonales de la matriz A pueden ser considerados como cocientes de Rayleigh, indicando los vectores que les corresponden;

c) demostrar que los elementos diagonales son aproximaciones a los valores propios respectivos con una exactitud de 10^{-5}.

8.4.40. Supongamos que todos los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de una matriz A son distintos y que $d = \min\limits_{i \neq j} | \lambda_i - \lambda_j |$. Demostrar que existe una matriz B tal que $\| B \|_2 \leqslant d/2$ y que la matriz $A + B$ admite un autovalor múltiplo.

8.4.41*. Demostrar que en los datos del problema 8.4.40 para todo número $\varepsilon > 0$ existe una matriz C_ε tal que $\| C_\varepsilon \|_2 < \frac{d}{2} + \varepsilon$ y que $A + C_\varepsilon$ no es una matriz de estructura simple.

8.4.42*. Todos los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de una matriz A son distintos. Sean x_i un vector propio de la matriz A relativo a λ_i e y_i. el vector propio de la matriz A^* relativo a $\bar{\lambda}_i$. Consideremos que

$$s_i = \frac{(x_i, y_i)}{\| x_i \|_2 \| y_i \|_2}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Para x_i e y_i reales el número s_i es el coseno del ángulo comprendido entre estos vectores. Es evidente que $| s_i |$ no depende de la elección de un par concreto de vectores x_i, y_i (para λ_i dado).

Demostrar que:

a) para toda matriz X compuesta de vectores propios de la matriz A

$$\operatorname{cond}_2 (X) \geqslant \frac{1}{| s_i |}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

b) la matriz X puede ser elegida de tal modo que

$$\operatorname{cond}_2 (X) \leqslant \operatorname{cond}_E (X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{| s_i |}.$$

De este modo el valor de los números $| s_i |$ puede servir de medida de condicionalidad de la matriz de vectores propios junto con su número de condicionalidad.

8.4.43. Sea C una matriz triangular

$$C = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

y supongamos que el primer componente β_1 de cierto autovector propio y de la matriz conjugada C^* relativa al autovalor $\bar{\lambda}_1$ es nula. Demostar que λ_1 es un autovalor múltiplo de C.

8.4.44. Las matrices A y A^* poseen vectores propios x e y relativos a λ_1 y $\bar{\lambda}_2$, respectivamente, además $(x, y) = 0$. Demostrar que λ_1 es un valor propio múltiplo de A.

8.4.45*. Escribamos la matriz C del problema 8.4.43 en la forma celular

$$C = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & c \\ 0 & C_{n-1} \end{Vmatrix}.$$

Consideremos que el autovector y de la matriz C^* relativo al autovalor $\bar{\lambda}_1$ es normalizado y en vez de $\beta_1 = 0$ exijamos que $\beta_1 = \varepsilon$, $|\varepsilon| < 1$. Presentemos el vector y bajo la forma

$$y = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ z \end{pmatrix}.$$

Demostrar que λ_1 es un autovalor de la matriz

$$\widetilde{C}_{n-1} = C_{n-1} + \frac{\bar{\varepsilon}}{1 - |\varepsilon|^2} zc.$$

8.4.46. Demostrar que en los datos del problema 8.4.45 existe una matriz $\widetilde{C}$ tal que

a) $\| C - \widetilde{C} \|_2 \leqslant \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{1 - |\varepsilon|^2}} \| C \|_2$;

b) $\widetilde{C}$ posee un valor propio múltiplo λ_1.

8.4.47. Sean x e y autovectores normalizados de las matrices A y A^* relativos a λ_1 y $\bar{\lambda}_1$, respectivamente. En este caso $|s| = |(x, y)| = \varepsilon \ll 1$. Demostrar que existe una matriz $\widetilde{A}$ tal que:

a) $\| A - \widetilde{A} \|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \| A \|_2$;

b) $\widetilde{A}$ posee un autovalor múltiplo λ_1. Por eso el que las matrices conjugadas tienen un par de autovectores casi ortogonales relativos a los autovalores conjugados testimonia la existencia de una matriz cercana con autovalor múltiplo.

INDICACIONES

1.1.18. Aprovechando solamente la distributividad y la existencia de un elemento opuesto demostrar que para todo vector x $0 \cdot x = 0$. Deducir de ello que $(-1) \cdot x = -x$. Por fin, aplicando la asociatividad de la adición demostrar que $x + y = y + x$.

1.2.28. Escribir la combinación lineal $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s$ de vectores $x_1, \ldots, x_s$. Suponiendo que entre los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ hay coeficientes no nulos y que entre estos últimos λ_j es máximo en módulo, mostrar que el j-ésimo componente del vector $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s$ es diferente de cero.

1.3.16. Utilizar el teorema 15.1 (V. Voevodin, p. 54).

1.3.25. Utilizar 1.3.17 y 1.3.19.

1.3.26. Mostrar que cada una de las transformaciones elementales conduce a un sistema equivalente de vectores.

1.3.34. Sea r el rango del sistema de vectores $x_1, \ldots, x_s$. En este caso las primeras r filas de la matriz reducida a la forma trapezoidal (véase la solución del problema 1.2.18) son no nulas. Supongamos que en la matriz inicial éstas son las filas de índices $i_1, \ldots, i_r$. Demostrar que los vectores $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ constituyen la base del sistema dado.

1.3.36. Organizar la reducción de modo que los elementos nulos se sitúen en las últimas filas y las últimas columnas de la matriz.

1.3.37. Antes de comenzar la reducción disminuir la magnitud de las coordenadas de vectores mediante transformaciones elementales.

1.3.39. Si $x_j = \alpha_1 x_{i_1} + \ldots + \alpha_r x_{i_r}$, entonces se puede tomar como vector x_{i_l} todo vector para el cual en esta descomposición el coeficiente α_l es diferente de cero.

1.3.44. Utilizar 1.3.23.

1.4.41. Completar la base arbitraria del subespacio L hasta la base $e_1, \ldots, e_n$ del espacio V. Obtener mediante transformaciones elementales del sistema $e_1, \ldots, e_n$ una base que satisfaga las condiciones del problema.

1.5.16. Utilizar 1.5.14.

1.5.18. Utilizar 1.5.16.

2.1.2. Sea $e_1, \ldots, e_n$ la base del espacio lineal dado. Adoptemos para vectores arbitrarios $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ e $y = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$

$$(x, y) = \alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n.$$

Verificar, si todas las propiedades del producto escalar son respetadas o no.

2.1.8. Obtener la necesidad de la condición $ac > b^2$ considerando el cuadrado escalar (x, x) del vector de la forma $x = (\alpha_1, 1)$ como un trinomio cuadrado de α_1.

2.1.9. Obtener para el cuadrado escalar del vector $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ la representación

$$(x, x) = \alpha_1^2 + (3\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)^2.$$

2.1.10. Para vericifar el 4° axioma del producto escalar aplicar la desigualdad:

$$2 \, |a_{ij}| \, |\alpha_i| \, |\alpha_j| \leqslant |a_{ij}| \, |\alpha_i|^2 + |a_{ij}| \, |\alpha_j|^2.$$

2.1.15. Introducir arbitrariamente el producto escalar sobre un subespacio complementario de L y utilizar el 2.1.13.

2.1.16. Véase V. Voevodin, el teorema 27.2, p. 99.

2.1.18. d) Utilizar el 2.1.16.

2.2.23. Para cada i, $1 \leqslant i \leqslant k$, los vectores $y_1, \ldots, y_i$ y $z_1, \ldots, z_i$ forman una base ortogonal de la cápsula lineal tendida sobre los vectores $x_1, \ldots, x_i$. Por eso $(y_l, z_m) = 0$ para $l \neq m$.

2.2.25. Véase la indicación para el problema 2.1.2.

2.3.7. a) Interpretar cada una de las ecuaciones del sistema como condición de ortogonalidad del vector $z = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y del vector compuesto de los coeficientes de la ecuacion.

2.3.9. Aplicar la base del complemento ortogonal hallado en el 2.3.6.

2.3.11. Véase la solución del problema 2.3.10.

2.3.14. Los coeficientes de las ecuaciones del sistema dan las coordenadas de los vectores sobre los cuales está tendido $L^{\perp}$. Mediante el procedimiento empleado en el problema 2.3.10 hallar la perpendicular z y luego hallar y como la diferencia $x - z$.

2.3.27. Componer la base de V como una unión de bases de subespacios $L_1, \ldots, L_p$ e introducir en V el prroducto escalar según el 2.2.25.

2.4.16. Mostrar que en la descomposición del vector x: $x = y + z$, donde $y \in L$, $z \perp L$, el vector $y \in L_2$ y, por consiguiente, la perpendicular bajada desde x sobre L_2 coincide con la perpendicular z desde x sobre L.

2.4.17. La perpendicular z bajada desde el vector x sobre L es colineal al vector z

2.4.19. Utilizar 2.4.17.

2.4.20. Para calcular el coseno del ángulo formado por x y un vector arbitrario u del subespacio L aplicar la descomposición $x=y + z$, donde $y \in L$, $z \perp L$.

2.4.23. Véase la indicación para el 2.4.16.

2.5.2. Igualmente como en el problema 2.1.2 (véase la indicación) fijemos la base $e_1, \ldots, e_n$ y para los vectores arbitrarios x e y adoptemos $(x, y) = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\beta}_n$.

2.5.5. Véase la indicación para el 2.1.10.

2.5.13. c) Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base del espacio B mostrar que todo vector de C es una combinación lineal de vectores $e_1 + i0, \ldots, e_n + i0$.

3.1.21. Obtener para el número m_n de términos no nulos contenidos en el determinante de orden n de la forma dada la relación recurrente: $m_n = m_{n-1} + 1$. En este caso $m_1 = 1$.

3.1.22. Obtener la relación recurrente $m_n = m_{n-1} + m_{n-2}$ para el número m_n de términos no nulos contenidos en el determinante de orden n de la forma dada. La solución general de una tal ecuación (véase el § 3.0)

$$m_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Las constantes c_1 y c_2 se determinan según las condiciones: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

3.1.23. Obtener la relación recurrente $m_n = 2m_{n-1}$ para el número m_n de términos no nulos contenidos en el determinante de orden n de la forma dada. En este caso $m_1 = 1$.

3.1.25. Sea $P_n(t)$ un determinante de orden n de la forma dada. Obtener la relación recurrente siguiente. $P_n(t) = tP_{n-1}(t) + a_1$.

3.1.34. Mostrar que la transformación dada del determinante es equivalente a la multiplicación de sus filas por $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ y de sus columnas $\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \ldots, \alpha^{-n}$, respectivamente.

3.1.35. Aplicar 3.1.34.

3.1.36. Transponer el determinante.

3.1.37. Transponer el determinante.

3.1.40. Utilizar 3.1.38.

3.1.42. Transponer el determinante y utilizar 3.1.40.

3.1.43. La transformación indicada del determinante puede ser reemplazada por la transposición respecto a la diagonal principal y la permutación de filas en el orden inverso.

3.1.44. El polinomio de cuarto grado posee no más de cuatro raíces distintas.

3.1.56. Diferenciar el término general del determinante.

3.2.6. Utilizar 3.1.35.

3.2.20. El determinante dado tiene forma casi triangular. Si este determinante se descompone por las dos primeras columnas, la suma consta sólo de tres términos.

3.2.26. Descomponer el determinante por las tres primeras columnas.

3.2.33. Restar la primera fila de la segunda, la tercera y de la cuarta.

3.2.45. Mostrar que para el determinante d_n de la forma dada se cumple la relación recurrente $d_n = 2\cos\alpha d_{n-1} - d_{n-2}$. En este caso $d_1 = \cos\alpha$, $d_2 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$.

3.3.1. El vector b_i se obtiene restando de a_i la combinación lineal de vectores $a_1, \ldots, a_{i-1}$.

3.3.15. Véase V. Voevodin, el teorema 41.2. p. 145.

3.3.16. Todo menor principal del determinante de Gram es también un determinante de Gram para el subsistema del sistema de vectores dado.

3.3.17. Utilizar 3.3.14.

3.3.18. Utilizar 3.3.17 y 3.3.13.

3.3.23. Utilizar 3.3.17 y 3.3.13.

3.3.24. Utilizar 3.3.18.

3.3.25. La longitud de la perpendicular bajada desde el vector x_{l+1} sobre la cápsula lineal de los vectores $x_1, \ldots, x_l$ no sobrepasa la longitud de este vector; la longitud de la perpendicular bajada desde el vector x_j, $l+1 < j \leqslant k$, sobre la cápsula lineal de los vectores $x_1, \ldots, x_{j-1}$ no sobrepasa la longitud de la perpendicular bajada desde este vector sobre la cápsula lineal de los vectores $x_{l+1}, \ldots, x_{j-1}$.

3.3.32. Reemplazar el elemento del caso $(n, 1)$ por $(-1)^n \cdot 2^{-(n-1)}$.

3.4.3. Utilizar 1.2.28.

3.4.4. Para demostrar la última afirmación del problema utilizar 3.3.25 y 3.4.3.

3.4.8. Permutando las filas y las columnas hacer pasar el menor M a las primeras filas y las primeras columnas de la matriz y aplicar el método de Gauss.

3.4.9. Utilizar 3.2.11 teniendo en cuenta que el método de Gauss consiste en una sucesión de transformaciones elementales de las filas y las columnas del determinante.

3.4.16. Antes de aplicar el método de Gauss disminuir la magnitud de los elementos del determinante por transformaciones elementales.

3.4.17. Reducir los elementos de cada fila al común denominador y aplicar 3.4.16.

3.4.19. En cada fila sacar el factor común de elementos.

3.4.20. Véase la indicación para el 3.4.16.

3.4.24. El determinante se obtiene bordeando el determinante del problema 3.4.10.

3.4.26. El determinante se obtiene bordeando el determinante del problema 3.4.24.

3.4.35. b) Aplicar las fórmulas del $(k+1)$-ésimo paso del método de eliminación teniendo en cuenta que las relaciones $\dfrac{a^{(k)}_{i,\ k+1}}{a^{(k)}_{k,\ k+1}}$, $i > k+1$, están acotadas por la unidad en módulo.

3.4.41. Aplicar a cada uno de n grupos de n filas del determinante D las transformaciones que reducen la matriz A a una forma triangular. Obtendremos el determinante cuya matriz está compuesta de m^2 células triangulares. Este determinante puede ser descompuesto utilizando el teorema de Laplace de un modo análogo a 3.2.27, b).

4.1.2. Demostrar que el rango del sistema de columnas es $n-1$.

4.1.3. Demostrar utilizando 4.1.2 que las columnas de la matriz A que contienen el menor M constituyen la base del sistema de columnas.

4.1.4. Utilizar 1.3.39.

4.1.6. Examinar la submatriz formada por r columnas linealmente independientes dadas. Mostrar que las filas que contienen el menor dado son en esta submatriz filas de base.

4.1.9. El rango de la matriz de Gram es igual al orden más elevado de menores principales diferentes de cero de esta matriz. Para los menores principales de una matriz de Gram véase el 3.3.16.

4.1.11. Utilizar 3.1.16.

4.1.12. Las primeras r columnas contienen por lo menos un menor no nulo de orden r.

4.1.20. El aumento indicado del rango puede ser obtenido cambiando los elementos del menor complementario del menor de base.

4.1.22. Utilizar 4.1.19.

4.1.29. Las filas de la matriz son ortogonales.

4.1.30. Véase el 1.2.28.

4.1.36. Demostrar que el menor de orden k situado en las primeras fila y columna no es igual a cero.

4.2.5. Utilizar 4.2.4.

4.2.9. Véase el 1.4.38.

4.2.19. Establecer el isomorfismo entre M y un subespacio arbitrario complementario de L.

4.2.33. El hecho de que la intersección es un plano se deduce del 4.2.14. En este caso, si $L_1, \ldots, L_k$ son subespacios directores de los hiperplanos dados, entonces

$$\dim (\pi_1 \cap \ldots \cap \pi_k) = \dim (L_1 \cap \ldots \cap L_k).$$

Ahora demostrar mediante la inducción que en un espacio de dimensión n la dimensión de la intersección de k subespacios de dimensión $(n - 1)$ no es inferior a $n - k$.

4.3.3. Si $\pi = x_0 + L_{n-1}$ es el hiperplano dado, escribiéndolo bajo la forma $(n, x) = b$ se puede tomar como vector n todo vector no nulo de $L_{n-1}^{\perp}$. En este caso $b = (n, x_0)$.

4.3.9. a) se deduce del 4.3.8; b) se deduce de los 4.2.34 y 4.3.7.

4.3.11. Utilizar 4.2.6.

4.3.17. En un espacio euclídeo la distancia posee evidentemente la propiedad $\rho (x, u) = \rho (x - x_0, u - x_0)$.

4.3.20. Véase la indicación para el 4.3.17.

4.3.24. Advertir que $L (p_1, p_2, q_1, q_2)$ puede ser descrito por la ecuación $\alpha_3 = 0$.

4.3.25. El vector $x_0 - y_0$ es ortogonal al subespacio $L (p_1, p_2, q_1, q_2)$.

4.3.27. Introducir en el espacio el producto escalar de modo que la base dada se haga ortonormalizada.

4.3.28. Véase la indicación para el 4.3.27.

4.3.29. Sea $e_1, \ldots, e_k$ la base del subespacio director del plano P. Completar hasta la base el sistema de vectores linealmente independientes $e_1, \ldots, e_k, x$ y luego con ayuda de esta base introducir el producto escalar.

4.4.2. Los subespacios $L (u_1, \ldots, u_m)$ y $L (v_1, \ldots, v_l)$ deben coincidir.

4.4.11. Véanse los 4.4.10 y 4.4.3.

4.4.12. Utilizar 4.4.10.

4.4.24. Realizar el cambio de variables $t_1 = 3x_1$; $t_2 = 2x_2$.

4.4.28. Utilizar 4.1.36.

4.4.30. Hallar la base del complemento ortogonal de $L (y_1, y_2, y_3)$.

4.4.32. Si a la matriz del sistema se le añade de un modo arbitrario la n-ésima fila, los números $(-1)^i A_i$ de la matriz cuadrada obtenida son (con una exactitud hasta el signo igual para los n números) cofactores de los elementos de la n-ésima fila.

4.4.34. Utilizar 4.4.32.

4.5.3. Utilizar 4.5.2.

4.5.10. Véase el 4.4.14.

4.5.18. Realizar el cambio de variables: $t_1 = 6x_1$, $t_2 = 3x_2$, $t_3 = 11x_3$, $t_4 = -5x_4$.

4.5.19. Multiplicar la tercera ecuación del sistema por 10, la cuarta, por 10^{-1} y luego realizar el cambio de variables: $t_1 = 1000x_1$, $t_2 = 0{,}001x_2$, $t_3 = 0{,}1x_3$, $t_4 = 10x_4$.

4.5.34. Véase el 4.4.28.

4.5.36. Construir la solución general del sistema de ecuaciones dado y hallar el sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo reducido. Téngase en cuenta el hecho de que la solución normal debe ser ortogonal a este sistema fundamental.

4.5.48. Descomponer el polinomio $f(t)$ por la base $1, t - a_1, (t - a_1)^2, \ldots, (t - a_1)^n$.

4.5.50. Demostrar que solamente el polinomio nulo satisface las condiciones homogéneas correspondientes.

4.5.52. Utilizar las fórmulas de Cramer y 3.1.56.

5.1.8. $Ax = (a, b)\, x - (a, x)\, b$.

5.1.49. Utilizar 5.1.43.

5.1.56. Utilizar 5.1.43.

5.1.58. Asignar a cada vector de T_A el plano de sus imágenes recíprocas.

5.1.58. Asignar a cada vector de T_A el plano de sus imágenes recíprocas.

5.1.60. Según el 5.1.59 el subespacio T_A es isomorfo al espacio cociente del espacio X por el subespacio N_A.

5.1.63. Utilizar 5.1.43.

5.1.65. Sea $y_1 = Ax_1, \ldots, y_k = Ax_k$ una base arbitraria del subespacio L. Mostrar que la imagen recíproca completa L es una suma directa de los subespacios N_A y $L(x_1, \ldots, x_k)$.

5.2.3. Utilizar 5.1.46.

5.2.9. El conjunto de todos los operadores que aplican el espacio X de dimensión n en un espacio unidimensional es de dimensión n (véase el 5.2.3).

5.2.14. Mostrar que si M es un subespacio arbitrario complementario de N, los espacios ω_{MY} y K_N son isomorfos.

5.2.15. a) Sea $e_1, \ldots, e_n$ cierta base de X. Para el operador dado A de ω_{XL} fijemos descomposiciones cualesquiera de vectores $Ae_1, \ldots, Ae_n$ por los subespacios L_1 y L_2: $Ae_i = u_i + v_i$, $u_i \in L_1$, $v_i \in L_2$. Entonces, $A = A_1 + A_2$, donde $A_1e_i = u_i$, $A_2e_i = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

5.2.16. Utilizar 1.5.16.

5.2.17. Utilizar 5.2.4.

5.2.18. Demostrar que $T_{A+B} = X$.

5.2.24. De los datos se deduce que $Ax = \lambda_x Bx$ y $Ay = \lambda_y By$ para todos los vectores no nulos x e y. Mostrar que $\lambda_x = \lambda_y$.

5.2.25. Utilizar 5.2.14.

5.3.1. a) Utilizar las relaciones: $T_{BA} \subset T_B$ y $T_{BA} = BT_A$.

5.3.2. a) Utilizar la igualdad $(BA)\,X = BT_A$.

5.3.3. Utilizar las relaciones:

$$r_{BAC} = r_{AC} - \dim (T_{AC} \cap N_B),\ r_{BA} = r_A - \dim (T_A \cap N_B).$$

5.3.8. Utilizar 5.3.6.

5.3.11. Utilizar 5.3.10.

5.3.14. Si $A^2 = 0$, entonces $\alpha = 0$. Para $A^2 \neq 0$ utilizar 5.2.25.

5.3.17. Mostrar que la intersección de N_P y T_P consta solamente de un vector nulo y además $PT_P = T_P$.

5.3.18. a) Utilizar 5.3.17.

5.3.20. Los operadores $E, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ son linealmente dependientes.

5.3.23. Utilizar 5.3.16, 5.3.15.

5.3.24. Utilizar 5.3.14.

5.3.29. Véase el 5.2.25.

5.3.33. Utilizar 5.3.30.

5.3.34. Utilizar 5.2.24.

5.3.47. Si x es un vector no nulo de N_Λ, entonces $f(A)\,x \neq 0$ contrariamente a la condición de que $f(t)$ es un polinomio anulador.

5.3.48. Si el término independiente es nulo, se puede hallar un polinomio de grado menor que anula también el operador dado.

5.3.49. Utilizar 5.3.20.

5.4.8. Calcular primeramente BC.

5.4.9. Calcular primeramente BC.

5.4.28. Aplicar el teorema según el cual toda permutación puede ser descompuesta en un producto de transposición.

5.4.35. Suponer que la matriz J_λ es de la forma $J_\lambda = \lambda E + A$, donde A es una célula de Jordan relativa al número 0 y utilizar el resultado del problema 5.4.33.

5.4.36. b), c) Construir para la matriz diagonal dada Λ el polinomio de interpolación $f(t)$ tal que $f(d_{ii}) = \lambda_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$.

5.4.40. Utilizar 5.4.39.

5.4.49. Utilizar 5.4.33.

5.4.52. Utilizar 5.4.34.

5.4.56. Utilizar 5.4.23.

5.4.57. Las columnas de AB son combinaciones lineales de las columnas de A, las filas de AB son combinaciones lineales de las filas de B.

5.4.59. Véase el 4.1.14.

5.4.69. Dividir las matrices A y B en cuatro células cuadradas de orden 2 y aplicar el teorema de Strassen a estas células. Para calcular el producto de células aplicar el algoritmo de Strassen.

5.4.73. d) Utilizar la multiplicación de matrices celulares.

5.4.77. b) Véase el 3.4.41.

5.5.12. Aplicando las propiedades de la simetría (antisimetría) respecto a la diagonal principal y la no principal se puede limitarse a calcular cuatro menores. Para calcular el determinante utilizar la ortogonalidad de sus filas.

5.5.15. Utilizar el resultado de problema 5.5.12.

5.5.17. Se puede, por ejemplo, utilizar la afirmación del problema 5.3.49, según la cual la matriz inversa A^{-1} es un polinomio de la matriz A.

5.5.18. Utilizar 5.4.49.

5.5.19. Utilizar 5.4.52.

5.5.20. Aplicar dos procedimientos para hallar en el producto $A^{-1}A = E$ la suma de elementos de la i-ésima fila.

5.5.27. Representar la matriz bajo la forma $a\left(E + \frac{1}{a}J_0\right)$ y utilizar 5.3.45; aquí J_0 es una célula de Jordan referente al número 0.

5.5.28. Según el 5.5.18 es suficiente calcular sólo los elementos de la fila superior de la matriz inversa.

5.5.32. Si P es una matriz de permutaciones de la forma

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 \end{Vmatrix},$$

PA es una matriz triangular superior.

5.5.39. Obtener conmutando las filas que todos los menores principales directores se hagan diferentes de cero.

5.5.46. Mostrar que $J_n^2 = nJ_n$.

5.5.49. Utilizar 5.5.47.

5.5.54. Utilizar 5.5.53.

5.5.56. Aplicar a la matriz 5.5.55 el resultado del problema 5.5.51

5.5.57. Utilizar 5.5.53.

5.5.61. Representar la matriz M bajo la forma del producto

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ C & E_l \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} E_k & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{Vmatrix},$$

donde k es el orden de la matriz A, $k + l$ es el orden de la matriz M.

5.5.65. Utilizar 5.4.73, d).

5.5.66. Véase el 5.5.60.

5.5.67. Utilizar las fórmulas del problema 5.5.62.

5.5.68. Utilizar las fórmulas del problema 5.5.64.

5.5.69. Utilizar 5.5.65.

5.5.72. Diferenciar la igualdad $AA^{-1} = E$.

5.5.77. Utilizar la fórmula del problema 5.5.75.

5.5.79. d) Utilizar la fórmula del problema 5.5.75.

5.6.12. Utilizar 5.6.9, c).

5.6.27. Utilizar 5.6.16.

5.6.29. Examinar el operador que la matriz A da en un par de bases arbitrarias de los espacios X e Y.

5.6.30. Utilizar el 5.6.29.

5.6.32. Supongamos que para la matriz A, cualquiera que sea la matriz no singular P,

$$P^{-1}AP = A \text{ o bien } AP = PA.$$

Verificar que el lema de Schur (véase el 5.4.40) sigue siendo válido también en el caso si se supone que A es conmutable solamente con todas las matrices A no singulares.

5.6.36. Mostrar que la simetría de la matriz respecto de su centro es una transformación semejante con la matriz P (véase la indicación para el 5.5.32).

5.6.37. La igualdad de las trazas de matrices semejantes puede deducirse del 5.4.22, c).

5.6.42. Utilizar el 5.6.22.

6.1.17. La matriz A es un polinomio de la matriz J_n del problema 6.1.16.

6.1.19. Véase V. Voevodin, el teorema 6.5.1, p. 224.

6.1.24. Utilizar el criterio de la suma directa del 1.5.18.

6.1.25. Para demostrar la necesidad utilizar el 6.1.24.

6.1.33. Véase el 5.4.37.

6.1.34. Véase el 5.4.39.

6.1.35. Véase el 5.4.36.

6.1.38. Escribir la condición $P^{-1}AP=\Lambda$ bajo la forma $AP = P\Lambda$ y anotar esta última por columnas.

6.1.40. Utilizar la propiedad del producto de Kronecker del 5.4.73, d).

6.1.41. Véase el 5.6.42.

6.1.43. Véase el 5.6.43.

6.2.2. Véase el 3.2.4.

6.2.3. El rango de la matriz es igual a la unidad.

6.2.4. El rango de la matriz es igual a dos.

6.2.7. Utilizar el 5.5.77.

6.2.13. Mostrar que $m_l(A) = \mathrm{tr}(A^l)$.

6.2.19. Utilizar la matriz del operador construida en el 5.6.2.

6.2.20. Utilizar la matriz del operador construida en el 5.6.3, a).

6.2.21. Véase el 6.1.8.

6.2.41. Examinar la matriz del operador en la base cuyos primeros vectores forman una base del subespacio propio correspondiente a λ. Con ayuda de esta matriz calcular el polinomio característico del operador.

6.2.49. Mostrar que para todo valor propio λ_0 el rango de la matriz $\lambda_0 E - C(f(\lambda))$ es igual a $n - 1$.

6.2.56. La matriz P^T es una matriz de Frobenius del polinomio $f(\lambda) = \lambda^n - 1$.

6.2.60. Utilizar la igualdad matricial

$$\left\|\begin{matrix} \lambda E_m - AB & A \\ 0 & \lambda E_n \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} E_m & 0 \\ B & E_n \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} E_m & 0 \\ B & E_n \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \lambda E_m & A \\ 0 & \lambda E_n - BA \end{matrix}\right\|.$$

6.2.61. Utilizar la igualdad matricial

$$\left\|\begin{matrix} E & E \\ 0 & E \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \lambda E - A & -B \\ -B & \lambda E - A \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \lambda E - (A+B) & 0 \\ -B & \lambda E - (A-B) \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} E & E \\ 0 & E \end{matrix}\right\|.$$

6.2.64. Utilizar la igualdad matricial

$$\left\|\begin{matrix} E & iE \\ 0 & E \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \lambda E - B & C \\ -C & \lambda E - B \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \lambda E - A & 0 \\ -C & \lambda E - \overline{A} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} E & iE \\ 0 & E \end{matrix}\right\|,$$

$A = B + iC$, $\overline{A} = B - iC$.

6.3.5. Véase el 6.1.25.

6.3.6. Tódo subespacio de dimensión $k-1$ puede ser representado como intersección de los subespacios de dimensión k. De este modo todo subespacio de dimensión $k-1$ es también invariante respecto a A.

6.3.9. Aplicar el 6.3.3 al operador $A - \lambda_0 E$, donde λ_0 es el valor propio de A.

6.3.21. Utilizar el 6.3.18, a).

6.3.26. Utilizar el 6.3.14 y el 6.3.25.

6.3.27. Utilizar el 6.3.14.

6.3.28. Si n es la dimensión del espacio, entonces G contiene no más de n^2 operadores linealmente independientes, por lo que basta demostrar la afirmación para un número finito de operadores de permutación, por ejemplo, por inducción sobre este número.

6.3.30. En cada par de subespacios invariantes del operador de derivación uno está encajado en el otro.

6.3.32. Supongamos que todas las raíces del polinomio característico del operador A son complejos; cada una de ellas es un valor propio del operador correspondiente $\hat{A}$. Mostrar que si λ es un valor propio arbitrario de $\hat{A}$, $z = x + iy$ es el vector propio de $\hat{A}$ referente a λ, entonces el subespacio tendido sobre los vectores reales x e y es de dimensión 2 y es invariante respecto a A.

6.3.36. Utilizar el 6.3.9.

6.3.38. Utilizar el 6.3.19.

6.3.39. Utilizar el 6.3.19.

6.3.42. Mostrar que para cada uno de los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ el defecto de la matriz $B - \lambda_i E$ es igual a k_i.

6.3.46. Repetir la construcción del problema 6.3.38 teniendo en cuenta el problema 6.3.32.

6.3.49. Véase el 6.3.48, b).

6.4.1. Demostrar que para el número q indicado en el 5.3.10 los subespacios N_q y T_q se intersecan solamente por el vector nulo.

6.4.2. Sea $X = N \dot{+} T$ la descomposición obtenida en el 6.4.1, donde N es el núcleo y T es la imagen del operador A^q. Si $X = N_1 \dot{+} T_1$ es cualquier otra descomposición tal que A/N_1 es un operador nilpotente y A/T_1 es un operador no singular, mostrar que $N_1 \subset N$, $T_1 \subset T$.

6.4.3. El polinomio característico del operador A es igual al producto de los polinomios característicos de los operadores A/N y A/T.

6.4.4. Aplicar 6.4.1 al operador $A - \lambda_1 E$ y mostrar que en la descomposición $X = N_1 \dot{+} T_1$ el subespacio N_1 posee todas las propiedades exigidas de K_{λ_1}. Luego descomponer el subespacio T_1 partiendo del operador $A - \lambda_2 E$, etc.

6.4.5. Utilizar los problemas 6.4.2 y 6.3.43.

6.4.9. Véase el 6.3.50.

6.4.10. Utilizar la descomposición (6.4.2).

6.4.11. Utilizar el 6.4.10.

6.4.14. Para hallar los valores propios de la matriz utilizar el 6.2.61.

6.4.37. Comparar con el 6.3.17.

6.4.38. Utilizar 6.4.17, c) y 6.4.37.

6.4.41. Elegir los vectores linealmente independientes $x_1, \ldots, x_p$ tales que su cápsula lineal en la suma directa con H_{t-1} dé todo el espacio X.

6.4.49. d) $m_{t-1} - m_{t-2} = p_t$.

6.4.57. De acuerdo con el 6.4.56 la sucesión de números $\rho_1, \ldots, \rho_t$ es no decreciente.

6.4.62. La matriz se reduce a la forma casi diagonal por las mismas permutaciones de las filas y las columnas.

6.4.72. Utilizar el 6.4.18.

6.4.75. Utilizar el 6.4.34, 6.4.48, 6.4.55.

6.4.76. Utilizar la forma de Jordan del operador.

6.4.80. Elevar al cuadrado la matriz $J - \lambda_0 E$ y calcular el incremento del defecto; multiplicar la matriz $(J - \lambda_0 E)^2$ por $J - \lambda_0 E$ y volver a calcular el incremento del defecto, etc.

6.4.86. Advertir que la matriz

$$B = \left\| \begin{array}{rrr} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right\|$$

verifica la igualdad $B^3 = 0$. Elevando la matriz $A - E$ a una potencia aprovechar el hecho de que la matriz es casi triangular.

6.4.87. Véase la indicación para el 6.4.86.

6.4.88. El defecto del operador es igual a uno.

6.4.91. Verificar la igualdad de los rangos y las trazas de las matrices A, B, C.

6.4.98. Utilizar el 6.4.39.

6.4.100. Sea $A = P \Lambda P^{-1}$, donde Λ es una matriz diagonal. En este caso la matriz $A \times B$ es semejante a la matriz $\Lambda \times J$ y $A \times E_n + E_m \times B$ es semejante a $\Lambda \times E_n + E_m \times J$.

6.4.102. Utilizar 6.4.32.

7.1.9. Examinar la matriz del operador en el sistema de coordenadas cartesianas.

7.1.12. Advertir que la base b) del problema 7.1.11 es ortonormalizada en el sentido del producto escalar (7.1.2).

7.1.13. Verificar, si la base c) del problema 7.1.11 es ortogonal en el sentido del producto escalar (7.1.3) o no y utilizar el resultado del 7.1.6.

7.1.22. Utilizar el 6.4.77.

7.1.23. Utilizar la correspondencia entre los operadores conjugados y las matrices conjugadas.

7.1.34. Utilizar el resultado del problema 6.3.17.

7.1.40. Aprovechar la existencia del vector propio común de los operadores conmutables A^* y B^* y, por consecuencia, del subespacio invariante común de dimensión $n - 1$ de los operadores A y B. Aquí n es la dimensión del espacio.

7.1.41. Utilizar el teorema de Schur.

7.1.45. Utilizar el 7.1.7.

7.2.8. Véase el 7.1.10.

7.2.9. Componer las matrices de los operadores en la base ortonormalizada $1, t, t^2, \ldots, t^n$.

7.2.10. Utilizar el 5.4.52.

7.2.14. Utilizar el 7.1.16.

7.2.16. Utilizar el 7.1.15.

7.2.19. Mostrar que $N_A = N_{A^*}$.

7.2.20. Deducir de la condición dada que los subespacios principales del operador A coinciden con sus subespacios propios y son ortogonales de dos en dos.

7.2.23. Utilizar el 7.2.18.

7.2.24. Demostrar que existe una base ortonormalizada de vectores propios del operador A repitiendo el proceso de construcción de la base de Schur.

7.2.25. Utilizar el 6.3.25. Una otra solución posible utiliza el 7.2.13.

7.2.26. Utilizar el 7.2.25.

7.2.32. La matriz dada se distingue de la matriz real por el término $-tE$.

7.2.36. Introducir el producto escalar con ayuda de la base de autovectores del operador A.

7.2.38. Demostrando la necesidad construir el polinomio de interpolación $f(\lambda)$ tal que cada valor propio λ_i del operador A verifica la condición $f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$.

7.2.40. Véase el 7.1.40.

7.2.47. Utilizar la descomposición del vector x por una base ortonormalizada de autovectores del operador A.

7.2.48. Aplicar el 7.2.47 al vector $x = (1\ 1\ \ldots\ 1)^T$.

7.2.50. Para demostrar la última afirmación mostrar que en el subespacio propio del operador $\hat{A}$ relativo al autovalor λ se puede elegir una base compuesta de vectores «reales», es decir, de vectores de la forma $x + i0$.

7.3.9. Examinar la matriz del operador en una base ortonormalizada de vectores propios y aprovechar el hecho de que por los puntos del plano complejo λ_1, λ_2, λ_3 se puede trazar una circunferencia.

7.3.13. Verificar que $A^2 = E$.

7.3.16. De los datos del problema se puede deducir la acción que ejerce el operador sobre el polinomio $1 - 2t + t^2$ ortogonal a los dos polinomios dados $1 + t + t^2$ y $1 - t^2$. Al componer la matriz del operador Q en la base formada por estos polinomios pasar a la base necesaria $1, t, t^2$.

7.3.18. Véase el 7.3.19.

7.3.20. Utilizar la relación $(x, y) = \dfrac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}$ para el caso real y

$$(x, y) = \frac{|x+y|^2 - |x-y|^2 + i\,|x+iy|^2 - i\,|x-iy|^2}{4},$$

para el espacio complejo.

7.3.39. Examinar la sucesión de matrices $T_{12}, T_{13}, \ldots, T_{1n}$; los parámetros de cada una de ellas se eligen conforme al 7.3.38.

7.4.8. Adoptar los vectores x e y como base del espacio.

7.4.10. El operador antisimétrico del espacio tridimensional es singular. Examinar la matriz del operador K en la base ortonormalizada, uno de cuyos vectores pertenece al núcleo K.

7.4.11. Verificar, si $(x_i, y_j) = (y_i, x_j)$ para $i \neq j$.

7.4.15. Hallar el polinomio $f_3(t)$ ortogonal a los polinomios dados $f_1(t) = 2 + 2t - t^2$ y $f_2(t) = 2 - t + 2t^2$ y de la misma longitud. A partir de los datos del problema se puede obtener la matriz del operador S en la base ortogonal $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ y luego pasar a la base necesaria $1, t, t^2$.

7.4.27. Examinar la matriz del operador A en la base ortonormalizada de sus autovectores. Trazar una línea recta por los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sobre el plano complejo.

7.4.32. Según el 7.4.30 la i-ésima columna unidad e_i es el vector propio referente al valor propio λ_i.

7.4.41. Mostrar que los autovalores de la matriz hermitiana irreductible no pueden ser múltiplos.

7.4.43. a) La raíz común de los polinomios $f_{i+1}(\lambda)$ y $f_i(\lambda)$ es también la raíz del polinomio $f_{i-1}(\lambda)$, etc. Pero el polinomio $f_0(\lambda) \equiv 1$ no tiene raíces; b) utilizar a) y 7.4.35; c) utilizar la relación recurrente.

7.4.48. Calcular la sucesión (7.4.8) según las fórmulas de relación recurrente que enlazan los polinomios $f_i(\lambda)$.

7.4.51. Mostrar que la matriz A es semejante a la matriz hermitiana tridiagonal irreductible.

7.4.52. Para demostrar b) utilizar el 7.2.50.

7.5.9. Sin limitar la generalidad se puede considerar que la submatriz principal de orden k en cuestión se sitúa en las primeras filas y las primeras columnas de la matriz dada H. En este caso hace falta examinar el producto escalar (Hx, x) para aquellos vectores columna x cuyos sólo los primeros k componentes pueden ser diferentes de cero.

7.5.10. Sean Γ una matriz de Gram, $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^T$ un vector columna de dimensión k arbitrario. Mostrar que $(\Gamma x, x) = |\bar{\alpha}_1 x_1 + \ldots + \bar{\alpha}_k x_k|$.

7.5.16. a) Utilizar la descomposición del vector x por los autovectores del operador H.

7.5.23. Utilizar el 7.5.22.

7.5.24. Utilizar el criterio del 7.5.18.

7.5.25. Utilizar el 7.4.53.

7.5.27. Examinar la matriz asociada H_k.

7.5.29. Mostrar que el producto de Schur de las matrices H_1 y H_2 es la submatriz principal del producto de Kronecker $H_1 \times H_2$.

7.5.32. Utilizar el 7.4.38.

7.5.33. Utilizar la descomposición por los autovectores del operador H.

7.5.34. a) Utilizar el 7.5.23; b) utilizar el 7.5.32.

7.5.36. Para demostrar la suficiencia de la condición utilizar el 7.4.35.

7.5.41. Utilizar el 7.5.24.

7.5.43. Utilizar el 7.5.30.

7.5.44. Aplicar el criterio de Sylvester.

7.5.45. Véase V. Voevodin, p. 270.

7.5.49. $H^2 = 4H$.

7.5.50. Para extraer la raíz cuadrada de la matriz H utilizar la desigualdad de Hadamard (véase el 3.3.3).

7.5.51. Utilizar el 3.3.25.

7.5.55. Utilizar el 7.5.52.

7.5.56. Mostrar que el operador HS posee los mismos valores propios que el operador hermitiano $S^{1/2}HS^{1/2}$.

7.5.62. Véase V. Voevodin, el § 78.

7.6.8. Examinar las matrices del operador de derivación y de su conjugado en la base ortonormalizada $1, t, t^2, \ldots, t^n$.

7.6.9. Para el cálculo de números singulares utilizar la matriz del operador conjugado en la base $1, t, t^2$ obtenida en el 7.1.12.

7.6.10. Sean X e Y espacios euclídeos (unitarios) arbitrarios de dimensiones n y m, respectivamente. Examinar el operador engendrado por la matriz A en un par de bases ortonormalizadas de espacios X e Y y utilizar la existencia de bases singulares de este operador.

7.6.17. Si $A = U\Lambda V$ es la descomposición singular de la matriz A, entonces U^* y V^* son las matrices que convienen.

7.6.26. Utilizar el 6.3.51.

7.6.27. Utilizar el 7.6.26.

7.6.29. Utilizando el 7.6.28 demostrar que en la forma de Schur del operador A son nulos todos los elementos fuera de la diagonal de aquellas fila y columna en cuya intersección se halla λ_1.

7.6.30. Utilizando el 7.6.29 demostrar la existencia de la base común de vectores propios de los operadores A y A^*.

7.6.33. La demostración es análoga a la del 7.4.38.

7.6.39. Las columnas de la matriz son ortogonales.

7.6.40. El rango de la matriz es igual a uno.

7.6.42. Utilizar el 7.6.20.

7.6.43. La martiz es simétrica.

7.6.45. Verificar, si la matriz con una exactitud de hasta el factor numérico 2 es unitaria.

7.6.46. Utilizar el 7.6.36.

7.6.50. Véase la solución del 7.6.49.

7.6.51. Utilizar la igualdad $A/T_{A^*} = (H/T_A)(U/T_{A^*})$ o bien $(H/T_A)^{-1} \times \times (A/T_{A^*}) = U/T_{A^*}$.

7.6.62. Utilizar el 7.6.59.
7.7.2. Utilizar el 7.4.24.
7.7.8. Utilizar el 7.4.16.
7.7.13. Aprovechar la existencia de la base ortonormalizada común de vectores propios de los operadores normales conmutables (véase el 7.2.40).
7.7.17. b) AH es semejante a la matriz $H^{1/2}AH^{1/2} = H^{1/2}H_1H^{1/2} + iH^{1/2}H_2H^{1/2}$.

7.7.18. Realizar la transformación de semejanza $\widetilde{A} = DAD^{-1}$, donde D es la matriz diagonal con elementos diagonales positivos elegidos de modo que para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ la matriz $\widetilde{A}$ verifica: $\widetilde{a}_{i,i+1} = -\widetilde{\overline{a}}_{i+1,i}$. Luego aplicar el teorema de Bendixson (véase el 7.7.15).
7.7.19. Aplicar el teorema de Bendixson.
7.7.20. Examinar la igualdad $AH_1^{-1} = E + iH_2H_1^{-1}$ y mostrar que $|\det (AH_1^{-1})| \geqslant 1$.
7.7.21. Examinar la descomposición hermitiana de la matriz del operador A en la base de Schur y utilizar el 7.5.50.
7.8.8. Utilizar el 7.5.62.
7.8.11. El vector $b = (1\ 1\ 1)^T$ es ortogonal a T_A.
7.8.15. La matriz del sistema es no negativa.
7.8.18. El sistema se descompone en dos sistemas: uno respecto a x_1, x_4 y el otro respecto a x_2, x_3, x_5.
7.8.22. Utilizar el 7.8.5.
7.8.23. Utilizar el 7.8.6.
7.8.32. Utilizar el 7.8.7.
7.8.37. Utilizar el 7.1.32 y el 7.8.26.
7.8.38. De los datos se deduce que $T_{BA} = T_B$, $N_{BA} = N_A$. Para demostrar la relación necesaria utilizar el 7.8.26.
7.8.39. Mostrar que los dos operadores actúan del mismo modo sobre los vectores de la base singular $e_1, \ldots, e_n$.
7.8.42. a), b). Utilizar el 7.8.41; c) primero mostrar que la imagen y el núcleo del operador X son los mismos que del operador A^*; luego deducir de la ecuación $A^*AX = A^*$ que la acción de X sobre el par de subespacios T_A y T_{A^*} es opuesta a la del operador A.
7.8.43. Utilizar el 7.8.42, a).
7.9.6. La demostración es la misma que para la ley de inercia.
7.9.11. Hacer uso de la ley de inercia.
7.9.14. Notar que en el paso de D_{k-1} a D_{k+1} el número de coincidencias de signos y el número de cambio de signos aumenta en una cada uno, independientemente del signo atribuido a D_k. En este caso el número de autovalores positivos y el número de autovalores negativos de la submatriz A_{k+1} es mayor en uno cada uno que el número correspondiente de la submatriz A_{k-1}.
7.9.39. Véase el 7.9.40.
7.9.40. Utilizar el 5.6.36.
7.9.42. Mostrar que en caso de la transformación no singular de las dos formas las raíces z de la ecuación no cambian.
7.9.44. Utilizar el 7.2.40.
7.9.50. Sean A y B matrices de las formas cuadráticas F y G y supongamos que $B = S^TS$ es la descomposición triangular de la matriz B. Las raíces z de la ecuación $|A - zB| = 0$ son valores propios de la matriz simétrica $(S^{-1})^TAS^{-1}$, por eso se puede utilizar el 7.4.30.
7.10.4. Si $Ax = Bx = 0$, $(A - \lambda B)x = 0$ para cualquier λ.
7.10.7. Utilizar el 7.10.3.
7.10.13. Pasar al par $(A - \alpha B, B)$, donde la primera matriz no es singular, y utilizar el 7.10.12. Luego volver a (A, B) y transformar en una suma directa correspondiente los últimos sumandos a partir de que un par de tipo $(E_k + \alpha_k N_k, N_k)$ es equivalente al par $(E_k, \widetilde{N}_k)$, donde $\widetilde{N}_k = (E_k + \alpha_k N_k)^{-1}N_k$. Mostrar que las matrices N_k y $\widetilde{N}_k$ son semejantes y, por consiguiente, cada par $(E_k, \widetilde{N}_k)$ de la suma directa puede ser sustituido por el par (E_k, N_k).

7.10.25. Utilizar la solución del problema 7.10.23.

7.10.29. Utilizar el 7.10.28 y el 6.3.36. También se puede hacer uso de la forma canónica (7.10.5) del par de matrices dado.

7.10.30. Actuar por analogía con la solución del problema 7.10.23 eligiendo como Q_1 una matriz arbitraria cuya primera columna es cierto autovector x del par (A, B) y como P_1 una matriz unitaria cuya primera columna es colineal a cada uno de los vectores Ax y Bx.

7.10.31. La reducción a la forma de Schur se efectúa en $n-1$ pasos el primero de los cuales está descrito en el problema 7.10.30. Para el segundo paso se utilizan matrices unitarias de tipo

$$P_2=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & \hat{P}\end{Vmatrix}, \quad Q_2=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & \hat{Q}\end{Vmatrix},$$

donde $\hat{P}$ y $\hat{Q}$ se construyen por $\hat{A}$ y $\hat{B}$ del mismo modo que en el primer paso han sido construidas P_1 y Q_1 por A y B.

7.10.32. Pasar al par $(B, A-\alpha B)$ con matriz no singular $A-\alpha B$ y aprovechar el resultado del problema 7.10.31. Obtener de aquí la fórmula de Schur del par inicial (A, B).

8.1.2. d) Utilizar la desigualdad de Minkowski.

8.1.20. Mostrar que el límite a de todas las subsucesiones es el mismo y que a es el límite de toda la sucesión.

8.1.22. Utilizar el 8.1.21.

8.1.23. Cuando la base del espacio es fija, las coordenadas de todos los vectores de la sucesión dada son acotadas.

8.1.32. Utilizar la equivalencia de la convergencia en norma cualquiera y de la convergencia por coordenadas.

8.1.35. Examinar el valor de cada una de las normas sobre la bola unidad de la otra norma.

8.1.38. Utilizar el 8.1.35.

8.1.50. Utilizar el 8.1.49.

8.2.6. Demostrar la afirmación b) de la norma operacional subordinada y después utilizar la equivalencia de normas.

8.2.18. Utilizar el 7.1.17.

8.2.21. b), c) Utilizar el 7.6.34.

8.2.22. Utilizar las relaciones

$$H_1=\frac{1}{2}(A+A^*), \quad H_2=\frac{1}{2i}(A-A^*).$$

8.2.27. Utilizar los 7.6.64 y 7.6.34.

8.2.28. Mostrar que una matriz no singular A verifica la igualdad $S(A) = \operatorname{tr} A$.

8.2.29. Utilizar el 8.1.34.

8.2.37. Utilizar el 8.2.34.

8.2.39. Utilizar la representación de la norma subordinada del 8.2.38.

8.2.41. Para la norma dada $M(A)$ considerar que $m(x) = M(X)$, donde X es la matriz cuya primera columna es x y las otras columnas son nulas. Mostrar que $m(x)$ es una norma en un espacio aritmético y que $M(A)$ y $m(x)$ concuerdan.

8.2.44. Utilizar el 8.2.42 y el 8.2.39.

8.2.46. Utilizar el 8.2.45.

8.3.3. Utilizar el 8.3.2.

8.3.5. Utilizar el 7.6.33.

8.3.6. Utilizar el 3.3.32 y el 8.3.5.

8.3.7. Utilizar el 7.6.33. La solución es análoga a la del 8.3.5.

8.3.8. Representar A bajo la forma $A = D(E + D^{-1}B)$, donde D es una matriz diagonal compuesta de elementos diagonales de A.

8.3.10. Aplicar el criterio del problema 8.3.9 a la matriz transpuesta A^T.

8.3.11. Véase la indicación para el 8.3.8.

8.3.25. Verificar, si $|\det A| = 1$. Por eso (véase el 8.3.24) el aumento del número convenido es posible solamente aumentando la norma de la matriz. Mostrar que las matrices con una norma euclídea mayor, que verifican las condiciones del problema, tienen un número convenido menor.

8.3.27. Utilizar la expresión $\mathrm{cond}_2 (A + \alpha E)$ valiéndose de los valores propios de la matriz A.

8.3.28. Véase el 7.4.35.

8.3.30. Para la estimación del número convenido hay que utilizar las desigualdades del problema 7.6.28. Si se multiplica la primera línea del sistema por 10^{-1}, la segunda, por 10, la tercera, por 100, la matriz del sistema obtenido se hará simétrica.

8.3.35. Mostrar que se puede tomar como aproximación a la solución exacta del sistema dado la solución del sistema $D(x) = b$, donde

$$D = \begin{Vmatrix} 2{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 4 \end{Vmatrix}.$$

8.3.36. Mostrar que como aproximación a la solución exacta del sistema dado se puede tomar la solución del sistema $Bx = b$, donde

$$D = \begin{Vmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

8.3.37. Utilizar la identidad $B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A - B)B^{-1}$.

8.4.1. Véase el 8.2.41, así como V. Voevodin, p. 287.

8.4.4. Demostrar que la matriz es definida positiva.

8.4.7. Aplicar el 8.4.1 a la matriz de Frobenius del polinomio $f(z)/a_n$.

8.4.9. Utilizar el 6.4.102.

8.4.12. Utilizar el teorema de Schur.

8.4.15. Utilizar el 6.4.102.

8.4.17. Utilizar la desigualdad de Schur y la afirmación del 8.4.14.

8.4.23. Examinar la matriz dada como una perturbación de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

8.4.25. Utilizar las desigualdades del problema 7.4.38.

8.4.27. La matriz dada es semejante a la matriz simétrica

$$\begin{Vmatrix} 2\cdot 10^{-4} & -3\cdot 10^{-4} & 4\cdot 10^{-4} & 0{,}9991 \\ -3\cdot 10^{-4} & 1\cdot 10^{-4} & -0{,}4993 & -6\cdot 10^{-4} \\ 4\cdot 10^{-4} & -0{,}4993 & 2\cdot 10^{-4} & -2\cdot 10^{-4} \\ 0{,}9991 & -6\cdot 10^{-4} & -2\cdot 10^{-4} & 1\cdot 10^{-4} \end{Vmatrix}$$

que puede ser considerada como una perturbación de la matriz simétrica B tal que $b_{14} = b_{41} = 1$, $b_{23} = b_{32} = -0{,}5$, mientras que los demás elementos b_{ij} son iguales a cero.

8.4.28. Utilizar las desigualdades del problema 7.4.38.

8.4.29. Examinar la matriz dada como una perturbación de la matriz simétrica B tal que $b_{11} = b_{22} = 1$, $b_{12} = b_{21} = -2$, $b_{34} = b_{43} = -1$, y los demás elementos son iguales a cero.

8.4.30. Utilizar el problema 7.4.38.

8.4.33. Véase el 7.6.23.

8.4.34. La matriz normal A implica que la matriz $A - \mu E$ también es normal.

8.4.35. a) Sobre el complemento ortogonal del vector e_1 los valores propios de la matriz normal $A - \mu_0 E$ en módulo no son inferiores a a; b) utilizar la condición $\| \widetilde{A} x - \mu_0 \widetilde{x} \|_2 = \varepsilon$; d) utilizar la desigualdad de Cauchy-Buniakovski.

8.4.37. Véase el 8.4.34.

8.4.39. c) Utilizar la estimación (8.4.6).

8.4.40. Utilizar el teorema de Schur.

8.4.41. Utilizar el teorema de Schur.

8.4.46. Sumar a C_{n-1} la matriz $\Delta_{n-1} = \frac{\bar{\varepsilon}}{1 - |\varepsilon|^2} zc$ y estimar $\| \Delta_{n-1} \|_2$

8.4.47. Esta afirmación se deduce del 8.4.46 igualmente como el 8.4.44 se deduce del 8.4.43.

RESPUESTAS Y SOLUCIONES

1.1.2. Sí, si la recta pasa por el punto O; no, en el caso contrario. 1.1.3. No. 1.1.4. No. 1.1.7. No. 1.1.8. Sí.

1.1.10. 2^k. 1.1.11. Sí. 1.1.12. Sí. 1.1.13. Sí. 1.1.14. Sí. 1.1.15. No.

1.1.16. a) No; b), c), d) Sí. 1.1.17. Sea G un grupo abeliano de adición que contiene más de un elemento. Fijemos cierto cuerpo P y para todo $x \in G$ y todo $\lambda \in P$ adoptemos $\lambda x = 0$.

De este modo el sentido del axioma $1 \cdot x = x$ consiste en el hecho de que multiplicando los vectores del espacio dado por números arbitrarios se pueda obtener todos los vectores.

1.2.9. a) Sí; b) sí; c) no.

1.2.11. El sistema es linealmente independiente.

1.2.12. El sistema es linealmente dependiente.

1.2.13. En los dos casos: $5t^3 - 5t^2 - 4t + 6$. El sistema es linealmente dependiente.

1.2.18. Sea $x_1, \ldots, x_s$ un sistema de vectores arbitrario de un espacio aritmético. Compongamos una matriz de coordenadas de estos vectores:

$$\begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{s1} & \beta_{s2} & \ldots & \beta_{sk} \end{Vmatrix}.$$

Sea m la primera columna de esta matriz que contiene números diferentes de cero. Permutando las filas de la matriz, lo que corresponde a la permutación de los vectores de un sistema, se puede obtener que $\beta_{1m} \neq 0$. Restando ahora de las filas (a partir de la segunda) las filas múltiplas correspondientes de la primera fila hagamos que todas las casillas de la m-ésima columna, excepto la primera, estén ocupadas por ceros. Las transformaciones realizadas de las filas de la matriz evidentemente son equivalentes a una sucesión de transformaciones elementales de tipo c) de un sistema de vectores $x_1, \ldots, x_s$. Operando ahora con todas las filas de la matriz, excepto la primera, repetimos el proceso descrito, etc.

1.2.19. El sistema es linealmente independiente. 1.2.20. El sistema es linealmente dependiente. 1.2.21. El sistema es linealmente independiente. 1.2.22. El sistema es linealmente dependiente. 1.2.23. El sistema es linealmente dependiente. 1.2.24. El sistema es linealmente independiente. 1.2.25. El sistema es linealmente independiente. 1.2.26. El sistema es linealmente independiente. 1.2.27. El sistema es linealmente independiente.

1.3.1. Todos los vectores son de la forma $(\alpha, 0, \beta, 0, \gamma)$. 1.3.2. Todos los vectores son de la forma $(\alpha, \beta, \gamma, \beta, \alpha)$. 1.3.3. Todos los vectores son $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ que verifican la condición $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 0$.

1.3.4. Todos los polinomios de grado $\leqslant 2$ y el polinomio nulo. 1.3.5. La misma respuesta que para el 1.3.4. 1.3.6. Todos los polinomios de grado $\leqslant 2$ cuya suma de los coeficientes es nula y el polinomio nulo. 1.3.7. La misma respuesta que para el 1.3.6. 1.3.8. No.

1.3.11. $z_1 = 6x_2 + 4x_3$; $z_2 = 2x_1 - 10x_2 + 8x_3$. 1.3.14. Sí. 1.3.15. No. 1.3.28. 2. 1.3.29. 2. 1.3.30. 4. 1.3.31. 3. 1.3.32. 3. 1.3.33. 4.

1.3.35. Por ejemplo, x_1, x_2. 1.3.36. Por ejemplo, x_1, x_2, x_4. 1.3.37. Por ejemplo, x_1, x_2, x_4. 1.3.38. Por ejemplo, x_1, x_2.

1.3.40. a) Exactamente r vectores del sistema son diferentes de cero; b) $r + 1$ vectores del sistema son diferentes de cero; además dos de ellos son colineales; c) bien $r + 2$ vectores del sistema son diferentes de cero, con la particularidad de que tres de ellos son colineales, bien $r + 1$ vectores del sistema son diferentes de cero y existen una terna de vectores linealmente dependientes, donde no hay dos que sean colineales.

1.3.41. x_1, x_2; x_1, x_4; x_2, x_3; x_3, x_4. 1.3.42. Dos vectores cualesquiera. 1.3.43. x_1, x_2; x_2, x_3; x_2, x_4. 1.3.45. Sí. 1.3.46. Sí.

1.4.1. El espacio es unidimensional, su base es un número cualquiera diferente de 1. 1.4.2. La dimensión del espacio es igual a k.

1.4.3. El espacio es de dimensión infinita. 1.4.4. La dimensión del espacio es igual a 2. 1.4.5. El espacio es de dimensión infinita. 1.4.6. La dimensión del espacio es igual a $n + 1$.

1.4.7. a) 1; b) 2. 1.4.8. a) n; b) $2n$.

1.4.13. La base es el sistema b).

1.4.21. Componen la base, por ejemplo, el 1°, el 3° y el 4° polinomios.

1.4.22. Constituyen la base, por ejemplo, 1° y el 2° polinomios.

1.4.23. 1/3, 1/3, 1/3. 1.4.24. 0, −5,4. 1.4.25. 0, 2, 1, 2. 1.4.26. 67, −51, −3, 11.

1.4.27. a) 1, −1, −1, 1, −1,1; b) 2, −1, −1,1, −1,1; c) 1, −1, −1,2, −1,1.

1.4.28. $e = e_1 - e_2$. 1.4.35. x_1, x_2, x_3, x_4

1.4.36. Por ejemplo, x_1, x_2, x_3.

1.4.37. La dimensión de L es igual a $n - 1$.

1.4.38. a), b), c) n; d) $n - 1$.

1.4.39. Constituyen la base, por ejemplo, el 1° el 2° y el 3^er^ polinomios.

1.4.43. No.

1.5.2. No. 1.5.3. No.

1.5.7. $L_2 \subset L_1$. Los vectores x_1, x_2, x_3 son linealmente independientes.

1.5.8. Constituyen la base de la suma, por ejemplo, los vectores x_1, x_2, x_3, y_1. La dimensión de la intersección es igual a 2.

1.5.10. Constituyen la base de la suma, por ejemplo, los vectores x_1, x_2, y_1 y la base de la intersección, el vector $z = (3, 5, 7)$. 1.5.11. Constituyen la base de la suma, por ejemplo, los vectores x_1, x_2, x_3, y_1; la base de la intersección está constituida, por ejemplo, de $z_1 = (1, -1, 1, -1)$, $z_2 = (2, 0, 2, 0)$.

1.5.12. La base de la suma está constituida, por ejemplo, de x_1, x_2, x_3, y_2; la base de la intersección está constituida de $z_1 = (0, 4, 1, 3)$, $z_2 = (2, 0, 1, -1)$.

1.5.20. $x = (-1, -2, -6, -3) + (3, 2, 6, 6)$.

1.5.23. El subespacio L es bidimensional. Como subespacio complementario se pueden tomar, por ejemplo, las cápsulas lineales de los vectores $e_1 = (1, 0, 0, 0,)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

1.5.24. Por ejemplo, el conjunto de polinomios de la forma $c \cdot t^n$.

2.1.5. El cambio de la unidad de escala de medida de longitudes.

2.1.7. a) −1; b) 4; c) 0.

2.1.11. Sí, si $\alpha = 0$; no, para $\alpha \neq 0$.

2.1.14. 0. 2.1.19. No.

2.2.5. $y_1 = x_1 = (1, -2, 2)$, $y_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $y_3 = (6, -3, -6)$.

2.2.6. $y_1 = x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $y_2 = (2, 2, -2, -2)$, $y_3 = (-1, 1, -1, 1)$.

2.2.10. Por ejemplo, con los vectores $x_3 = (1, 1, 1, 0)$ y $x_4 = (-1, 1, 0, 1)$.

2.2.11. Por ejemplo, con los vectores $x_3 = (2, 3, 1, 0)$ y $x_4 = (1, -1, 1, 1)$.

2.2.12. Por ejemplo, con el vector $x_3 = (2/3, -1/3, 2/3)$.

2.2.13. Por ejemplo, con $x_3 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, $x_4 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.

2.2.16. $n-1$ donde n es la dimensión del espacio euclídeo dado.

2.2.17. a) $(x, y) = \lambda_1^2\alpha_1\beta_1 + \lambda_2^2\alpha_2\beta_2 + \ldots + \lambda_n^2\alpha_n\beta_n$; b) $(x, y) = (2\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + (\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \ldots + \alpha_n\beta_n)$. Aquí $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son las coordenadas de los vectores x o y en las bases correspondientes.

2.2.19. $y_1 = x_1 = (2, 3, -4, -6)$, $y_2 = (-3, 2, 6, -4)$, $y_3 = (4, 6, 2, 3)$.

2.2.20. $y_1 = x_1 = (1, 1, -1, -2)$, $y_2 = (2, 5, 1, 3)$, $y_3 = (2, -1, 1, 0)$.

2.2.22. Sea $n \geqslant 3$. Compongamos según las filas una matriz de coordenadas de los vectores $e_1, \ldots, e_n$. Notemos que si se cambia el signo de todos los elementos de una columna arbitraria de esta matriz, sus filas dan las coordenadas de un nuevo sistema de vectores, ortogonal como antes. Por eso se puede considerar que la primera fila de la matriz está compuesta solamente de unidades y en las primeras tres filas son posibles las columnas de una de las formas siguientes:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1. \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

Designemos por x, y, z, w, respectivamente, el número de columnas de cada una de las formas indicadas. En este caso es evidente que

$$x + y + z + w = n.$$

De la ortogonalidad de los primeros tres vectores se deduce

$$x + y - z - w = 0,$$
$$x - y + z - w = 0,$$
$$x - y - z + w = 0.$$

De este sistema de ecuaciones obtenemos: $x = y = z = w = n/4$. De este modo n debe ser un múltiplo de 4.

2.2.26. Si $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_n t^n$, $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 \ldots + b_nt^n$, — entonces $(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + (2!)^2a_2b_2 + \ldots + (n!)^2 a_nb_n$.

2.3.6. Por ejemplo, $y_1 = (-3, 1, -2, 0)$, $y_2 = (1, -1, -2, 1)$.

2.3.8. a) Un subespacio unidimensional de polinomios cuyos todos los coeficientes son iguales; b) el subespacio de todos los polinomios impares.

2.3.9. Por ejemplo,

$$3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

para el subespacio L y

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_4 = 0,$$
$$3\alpha_1 + 7\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0$$

para su complemento ortogonal.

2.3.10. Sea L la cápsula lineal del sistema de vectores $a_1, \ldots, a_k$ no obligatoriamente linealmente independiente. El vector buscado y puede ser representado por una combinación lineal $y = \alpha_1a_1 + \ldots + \alpha_ka_k$. Como $(z, a_i) = 0$ $i = 1, \ldots, k$, para determinar los coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ se puede obtener un sistema de ecuaciones lineales:

$$(a_1, a_1)\,\alpha_1 + (a_2, a_1)\,\alpha_2 + \ldots + (a_k, a_1)\,\alpha_k = (x, a_1),$$
$$(a_1, a_2)\,\alpha_1 + (a_2, a_2)\,\alpha_2 + \ldots + (a_k, a_2)\,\alpha_k = (x, a_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_1, a_k)\,\alpha_1 + (a_2, a_k)\,\alpha_2 + \ldots + (a_k, a_k)\,\alpha_k = (x, a_k).$$

Para construir el vector y se puede utilizar cualquier solución de este sistema. El vector z se obtiene como la diferencia $x - y$.

2.3.11. Si el sistema $x_1, \ldots, x_k$ es linealmente independiente.

2.3.12. $y = (5, 2, -9, -8)$, $z = (9, -5, 3, 1)$.

2.3.13. $y = (0, -3, 5, 2)$, $z = (2, -2, -2, 2)$.

2.3.14. $y = (1, 2, -5, 1)$, $z = (-4, -2, 0, 8)$.

2.3.16. Sean $e_1, \ldots, e_n$ la base dada y $f_1, \ldots, f_n$ la base biortogonal buscada. Las condiciones

$$(e_i, f_j) = 0, \ i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$$

muestran que el vector f_j debe pertenecer al complemento ortogonal de la cápsula lineal de vectores $e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n$. En este subespacio unidimensional el vector f_j se define de un modo único por la condición

$$(e_j, f_j) = 1.$$

2.3.18. $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $f_3 = \left(0, 0, \frac{1}{3}, 0\right)$, $f_4 = \left(0, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$.

2.3.19. $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0, 0)$, $f_3 = (-1, -2, 1, -3)$, $f_4 = (0, 0, 0, 1)$.

2.3.20. $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $f_3 = (0, -1, 1, 0)$, $f_4 = (0, 0, -1, 1)$.

2.3.21. $f_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $f_2 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $f_3 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $f_4 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

2.4.2. a) no cambia; b) se reemplaza por el ángulo complementario (hasta π); c) no cambia.

2.4.4. $|x| = 3\sqrt{2}$, $|y| = 6$, $|x-y| = 3\sqrt{2}$. De este modo, el triángulo es isósceles, $\widehat{x, (x-y)} = \frac{\pi}{2}$, de modo que el triángulo es rectángulo. $\widehat{x, y} = \frac{\pi}{4}$ y es un ángulo interior del triángulo. $\widehat{y, (x-y)} = \frac{3\pi}{4}$, por eso el ángulo interior del triángulo es $\widehat{y, (y-x)}$.

2.4.6. a) $|f|^2 = 10$, $|g|^2 = 9$, $|f-g|^2 = 3$; $|f|^2 < |g|^2 + |f-g|^2$, por consiguiente, el triángulo es agudo; b) $|f|^2 = 19$, $|g|^2 = 13$, $|f-g|^2 = 4$; $|f|^2 > |g|^2 + |f-g|^2$, el triángulo es obtuso.

2.4.10. Para un paralelogramo las condiciones de igualdad de las longitudes de los lados y de perpendicularidad de las diagonales son equivalentes.

2.4.14. a) $t^2 + 3t + 3$; b) 3; c) $(3 + m_3^2 + \ldots + m_n^2)^{1/2}$. 2.4.18. a) 1; b) 1; c) α.

2.4.24. $\frac{\pi}{4}$. 2.4.25. $\frac{\pi}{3}$.

2.5.8. La igualdad $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ significa que el producto escalar de los vectores x e y es un número estrictamente imaginario.

2.5.10. El hecho de que las longitudes de los vectores x e y son iguales no supone la ortogonalidad de los vectores $x+y$ y $x-y$.

2.5.15. El espacio aritmético complejo C_n.

2.5.19. Al vector ix le corresponde el vector $(-\beta_1, \ldots, -\beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. En R_{2n} se induce el producto escalar natural (2.2.1).

3.1.1. Pertenece con el signo más.

3.1.2. No es un elemento del determinante.

3.1.3. Pertenece con el signo menos.

3.1.4. No es un elemento del determinante.

3.1.5. a) $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}a_{61}a_{72}$; b) $a_{13}a_{24}a_{35}a_{46}a_{57}a_{62}a_{71}$.

3.1.6. a) $i = j$; $i < j$; c) $i > j$. 3.1.7. Con el signo más. 3.1.8. $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$.

3.1.9. a) $i + j = n + 1$; b) $i + j < n + 1$; c) $i + j > n + 1$.

3.1.10. Con el signo $(-1)^{n(n-1)/2}$. 3.1.11. $(-1)^{n(n-1)/2} \cdot a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$.
3.1.12. $(-1)^{n-1}$.
3.1.13. $(-1)^{(n-2)(n-1)/2}$. 3.1.14. 1. 3.1.15. 1. 3.1.17. 0. 3.1.18. 0.
3.1.19. 16. 3.1.21. n.
3.1.22. Si se considera que

$$r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

entonces el número de términos no nulos del determinante de orden n de la forma dada es

$$\frac{r_2-1}{r_2-r_1}r_1^n+\frac{1-r_1}{r_2-r_1}r_2^n.$$

3.1.23. 2^{n-1}. 3.1.24. $(-1)^n(t^n-a_1a_2\ldots a_n)$. 3.1.25. $t^n+a_nt^{n-1}+$ $+a_{n-1}t^{n-2}+\ldots+a_2t+a_1$. 3.1.26. n. 3.1.27. n.
3.1.29. El determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

debe ser igual a cero.
3.1.30. El término constante es el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3.1.31. El determinante obtenido es un número complejo conjugado del determinante inicial.
3.1.32. El determinante se multiplica por $(-1)^n$.
3.1.33. El determinante se multiplica por α^n.
3.1.34. El determinante no cambia.
3.1.38. El determinante se multiplica por $(-1)^{n(n-1)/2}$. El elemento de la casilla (i, j) del determinante transformado es $a_{n+1-i,j}$ del determinante inicial.
3.1.39. $a_{n+1-i,\,n+1-j}$. 3.1.40. El determinante no cambia.
3.1.41. $a_{n+1-j,\,n+1-i}$.
3.1.42. El determinante no cambia.
3.1.43. El determinante se multiplica por $(-1)^{n(n-1)/2}$.
3.1.44. Las raíces de la ecuación son los números -2, -1, 1, 2.
3.1.45. Las raíces de la ecuación son los números 0 y -1.
3.1.46. x_1y_1 para $n=1$; 0 para $n>1$.
3.1.47. 1 para $n=1$; -2 para $n=2$; 0 para $n>2$.
3.1.48. Los polinomios $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ son linealmente dependientes. Sea, para mayor definición, que $f_n(t)=\alpha_1f_1(t)+\ldots+\alpha_{n-1}f_{n-1}(t)$. En este caso para todo número a $f_n(a)=\alpha_1f_1(a)+\ldots+\alpha_{n-1}f_{n-1}(a)$. Por eso en el determinante dado las filas son linealmente dependientes.
3.1.49. a) El determinante no cambia; b) el determinante se anula.
3.1.51. $1+x_1y_1$ para $n=1$; $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$ para $n=2$; 0 para $n>2$.
3.1.52. $\cos(\alpha_1-\beta_1)$ para $n=1$, $\operatorname{sen}(\alpha_1-\alpha_2)\times\operatorname{sen}(\beta_1-\beta_2)$ para $n=2$, 0 para $n>2$.
3.1.53. $1+x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$.
3.1.54. $1-2(w_1^2+w_2^2+\ldots+w_n^2)=-1$.
3.1.57. El permanente de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es igual a 2, aunque sus filas son linealmente dependientes. Al mismo tiempo el permanente de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con filas linealmente independientes es igual a cero.

3.2.1. a) C_n^k; b) $(C_n^k)^2$. 3.2.3. C_n^k.

3.2.4. Sea p_i la suma de todos los menores principales de orden i del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

En este caso $f(t) = t^n + p_1 t^{n-1} + \ldots + p_{n-1} t + p_n$.

3.2.5. $k+1$. 3.2.8. Si D es de orden impar, D' es simétrico; si D es de orden par, D' es antisimétrico.

3.2.9. Sea $i > j$. En este caso en las primeras j filas del menor M_{ij} complementario del elemento a_{ij} se halla la submatriz compuesta solamente de ceros, en la cual hay $n-j$ columnas. Puesto que $j + (n-j) = n > n-1$, entonces de acuerdo con el 3.1.20 $M_{ij} = 0$.

3.2.10. $D' = D^{n-1}$.

3.2.11. a) La i-ésima fila de D' no cambia y las demás se multiplican por α. El determinante D' se multiplica por α^{n-1}; b) en D' se conmutan las i-ésima y j-ésima filas después de lo cual todas las filas se multiplican por (-1). De este modo el cambio general del determinante consiste en la multiplicación por $(-1)^{n+1}$; c) todas las filas de D', excepto la i-ésima, no cambian; de los elementos de la i-ésima fila se restan los elementos correspondientes de la j-ésima fila multiplicados por α. El determinante D' no cambia; d) D' se transpone.

3.2.16. 216. 3.2.17. -106. 3.2.18. 1. 3.2.19. 120. 3.2.20 -11. 3.2.21. -2. 3.2.22. -13. 3.2.23. 1. 3.2.24. 15. 3.2.25. 3. 3.2.26. 7.

3.2.28. -12. 3.2.29. 16. 3.2.30. 1. 3.2.31. -400. 3.2.32. -36. 3.2.33. 0. 3.2.34. 8. 3.2.35. -1.

3.2.37. $\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$. 3.2.38. $4^{n+1}-3^{n+1}$. 3.2.39. $2^{n+1}-1$. 3.2.40. 5^n.

3.2.41. $\frac{i^n}{2}[1+(-1)^n]$. 3.2.42. $\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$. 3.2.43. $1+n$.

3.2.44. $6^n(1+n)$.

3.2.46. $f_{i+1}(\lambda) = (\lambda - a_{i+1}) f_i(\lambda) - b_{i+1} c_{i+1} f_{i-1}(\lambda)$.

3.3.2. Esta propiedad la posee el volumen orientado de un paralelepípedo en todo espacio euclídeo o unitario.

3.3.5. a) resulta de la desigualdad de Hadamard; b) sea ε la raíz n-ésima de la unidad: $\varepsilon = \cos 2\pi/n + i \operatorname{sen} 2\pi/n$. En este caso la estimación dada por a) se obtiene sobre el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix};$$

c) para $n = 2$ la estimación se obtiene sobre el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Supongamos que para $n = 2^k$ la estimación se obtiene sobre el determinante de la matriz A_n; en este caso para $m = 2^{k+1}$ hace falta tomar el determinante de la matriz de orden $2n$ siguiente

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} A_n & -A_n \\ A_n & A_n \end{pmatrix}.$$

3.3.6. Si en el determinante dado d_n para cierto par de índices i, j el elemento a_{ij} es en módulo inferior a la unidad, entonces, si $A_{ij} > 0$, d_n aumenta al reemplazar a_{ij} por 1 y si $A_{ij} < 0$, al reemplazar a_{ij} por -1. Por fin, si $A_{ij} = 0$ el determinante no cambia al reemplazar a_{ij} por uno de sus valores cualesquiera. Un razonamiento análogo sobre el mínimo del determinante muestra que uno de los determinantes del orden dado con valor máximo en módulo es el determinante compuesto de 1 y -1.

3.3.7. Para demostrar la desigualdad $h_{n-1} \leqslant h_n$ es suficiente bordear del modo siguiente el determinante d_{n-1} de orden $n-1$ compuesto de 0 y 1 e igual en módulo a h_{n-1}:

$$d = \left| \begin{array}{c|c} d_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \ldots 0 & 1 \end{array} \right|$$

para obtener un determinante de orden n compuesto igualmente de 0 y 1 e igual en módulo a h_{n-1}.

Para demostrar la desigualdad $h_n \leqslant g_{n-1}$ tomemos el determinante extremo d_n compuesto de 0 y 1; conmutemos sus filas de modo que en la casilla (1, 1) se halle la unidad y obtengamos, restando de las filas que siguen, que los demás elementos de la primera columna sean iguales a cero. En este caso en la última fila y la última columna se obtiene el determinante de orden $n-1$ compuesto de 0, 1, -1, igual en módulo a h_n. Según el 3.3.6 el módulo de un tal determinante no sobrepasa g_{n-1}.

Para demostrar la desigualdad $g_{n-1} \leqslant g_n$ es suficiente bordear el determinante extremo $\tilde{d}_{n-1}$ compuesto de 1 y -1, del mismo modo que en la demostración de la primera desigualdad y luego aplicar el 3.3.6.

Para demostrar la última desigualdad tomemos el determinante extremo $\tilde{d}_n$ compuesto de 1 y -1. Multiplicando, si hace falta, sus filas y columnas por -1 obtengamos que todos los elementos de la primera fila sean iguales a 1 y los demás elementos de la primera columna, a partir del segundo elemento, sean iguales a -1. Añadiendo ahora la primera fila a las demás filas se obtiene en la última fila y la última columna un determinante de orden $n-1$ compuesto de 0 y de 2 e igual en módulo a g_n. Sacando 2 de cada fila descubrimos que este determinante es el producto de 2^{n-1} por un cierto determinante de orden $n-1$ compuesto de 0 y 1, de donde se deduce la desigualdad necesaria.

3.3.8. De acuerdo con el 3.3.7, $h_3 \leqslant g_2 = 2$. El determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

muestra, por ejemplo, que $h_3 = 2$.

Puesto que es evidente que $h_2 = 1$, según el 3.3.7, $g_3 \leqslant 4$. Como $g_3 \geqslant g_2 = 2$ y g_3 es múltiplo de 4, $g_3 = 4$.

3.3.9. Sea $\tilde{d}_{n-1}$ el determinante extremo de orden $n-1$ compuesto de 1 y -1. Designemos las columnas de este determinante por $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ y compongamos el determinante siguiente de orden n que contiene igualmente 1 y -1:

$$d = \left| \begin{array}{cccc|c} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_1 \\ \hline -1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{array} \right|.$$

Entre los menores de orden $n-1$ que se encuentran en las primeras $n-1$ filas del determinante solamente dos difieren de cero, por eso descomponiendo por la última fila obtenemos $d = 2d_{n-1}$.

3.3.10. Según los 3.3.5, 3.3.7 y 3.3.9, g_5 es múltiplo de 16 y $g_5 \geqslant 2g_4 = 32$. Por otra parte, según la desigualdad de Hadamard,

$$g_5 \leqslant (\sqrt{5})^5 = 25\sqrt{5} < 64.$$

Por consiguiente, g_5 es igual sea a 32 sea a 48. El método de bordear el determinante extremo de orden 4 dado en la solución del problema 3.3.9 permite obtener para el determinante de orden 5 solamente el valor 32. Por eso bordeemos este determinante de otro modo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Este determinante es igual a 48. Entonces, $g_5 = 48$.

3.3.11. Admitamos que $M = 1$. Bordeemos el determinante d de orden n del modo siguiente:

$$\tilde{d} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ 0 & & & \\ \vdots & & d & \\ 0 & & & \end{vmatrix}.$$

Es evidente que el determinante obtenido $\tilde{d}$ de orden $n+1$ es igual a $d/2$. Ahora, en $\tilde{d}$, restemos la primera fila de las demás filas. En este caso todos los elementos del determinante no sobrepasarán 1/2 en módulo y, de acuerdo con el 3.3.5, a),

$$d/2 \leqslant (1/2)^{n+1} \cdot (n+1)^{(n+1)/2},$$

lo que hacía falta obtener.

3.3.13. a) El determinante $G(x_1, \ldots, x_k)$ tiene forma diagonal y es igual a $|x_1|^2 \cdot |x_2|^2 \ldots |x_k|^2$; b) el determinante $G(x_1, \ldots, x_k)$ tiene forma «casi diagonal» y es igual a $G(x_1, \ldots, x_l) \cdot G(x_{l+1}, \ldots, x_k)$.

3.3.14. a) El determinante no cambia; b) el determinante se multiplica por $|\alpha|^2$; c) el determinante no cambia.

3.3.20. Según el 3.3.18 $G^{1/2}(a_1, \ldots, a_n)$ es el volumen del paralelepípedo tendido sobre los vectores $a_1, \ldots, a_n$; el sentido del módulo de det A es el mismo.

3.3.25. El determinante de Gram no sobrepasa el producto de dos de sus menores recíprocamente complementarios y es igual a éste si, y sólo si, por lo menos uno de estos menores es igual a cero o lo son todos los elementos del determinante situados fuera de estos menores.

3.3.27. Para $k = 3$ la desigualdad se hace

$$V^2(x_1, x_2, x_3) \leqslant S(x_1, x_2)\, S(x_1, x_3)\, S(x_2, x_3).$$

De este modo el cuadrado del volumen del paralelepípedo tendido sobre los vectores x_1, x_2, x_3 no sobrepasa el producto de las áreas de sus caras.

3.3.29. Si todos los elementos de una cierta fila del determinante ortogonal se sustituyen por los números ε_j, $j = 1, \ldots, n$ tales que $\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j|^2 < 1$, entonces el determinante obtenido d' verifica las desigualdades

$$1 - |\varepsilon| \leqslant |d'| \leqslant 1 + |\varepsilon|.$$

3.3.30. El módulo del menor situado en la intersección de las filas indexadas de $i_1, \ldots, i_k$ y de las columnas con índices $j_1, \ldots, j_k$ es el volumen del paralelepípedo obtenido proyectando las filas indicadas sobre el subespacio de coordenadas de vectores $e_{j1}, \ldots, e_{jk}$, donde $e_1, \ldots, e_k$ es la base natural del espacio aritmético.

3.3.32. Si se adopta como base del paralelepípedo Π_n de dimensión n correspondiente el paralelepípedo Π_{n-1} de dimensión $n-1$ tendido sobre las primeras $n-1$ filas, entonces el índice de Π_n es muy pequeño, mientras que la base Π_{n-1} es muy grande.

3.4.2. $a_{pp}^{(p-1)} = \dfrac{A(1, \ldots, p)}{A(1, \ldots, p-1)}$.

3.4.6. $a_{pj}^{(p-1)} = \dfrac{A\begin{pmatrix} 1 & \ldots & p-1 & p \\ 1 & \ldots & p-1 & j \end{pmatrix}}{A(1, \ldots, p-1)}, \quad p \leqslant j \leqslant n.$

3.4.10. 4. 3.4.11. -161. 3.4.12. -12. 3.4.13. 5. 3.4.14. 0. 3.4.15. 80. 3.4.16. 3. 3.4.17. $2^{-9} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-4} \cdot 7^{-2}$. 3.4.18. 240. 3.4.19. $-1/2$. 3.4.20. $-18\,016$. 3.4.21. 2. 3.4.22. -1. 3.4.23. 5. 3.4.24. 16. 3.4.25. 63. 3.4.26. 32. 3.4.27. 1. 3.4.28. 13.

3.4.29. Este número es un polinomio de n cuyo término mayor es igual a $n^3/3$.

3.4.30. a) El término mayor del número de operaciones es igual a $n^2/2$; b) el término mayor es igual a $3n$.

3.4.31. El cálculo del determinante d_{n+1} debe realizarse de tal modo que d_n siga siendo el menor principal director en d_{n+1}. La construcción del determinante de la matriz triangular debe comenzar a partir del ángulo superior.

3.4.32. La condición de no singularidad permite, sólo conmutando filas, obtener que sean desiguales a cero todos los menores principales directores; también se admiten las conmutaciones de las primeras $n-1$ columnas. Luego se aplica el método de Gauss que abarca las últimas columnas de todos los k determinantes.

3.4.33. Por ejemplo, poner la primera fila en el último lugar y hacer lo mismo con la primera columna.

3.4.36. Por ejemplo, el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

3.4.38. Para el método de Gauss de elección según una columna la afirmación no es correcta; he aquí un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1000 \\ 1 & 2000 \end{vmatrix}.$$

3.4.39. Supongamos que $\max\limits_{i,j} |a_{ij}| = 1$. Designemos: $\alpha = |a_{22}^{(1)}|$, $\beta = |a_{33}^{(2)}|$. En este caso $\beta \leqslant 2\alpha$, $\alpha\beta \leqslant 4$, de donde $\beta \leqslant 2\sqrt{2} < 3$.

3.4.42. El determinante es igual a 1 y la longitud de cada una de sus filas es igual a 1; según el 3.3.4, las filas del determinante son ortogonales de dos en dos.

3.4.43. a) $2^n \cdot (\det A)^2$; b) 0; c) $(\det A)^2$; d) $(-1)^n \cdot (\det A)^2$.

4.1.4. Todos los elementos de la matriz que no pertenecen al menor de base son ceros.

4.1.5. Véase la respuesta del problema 4.1.4.

4.1.14. Si $b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n$ es una colección conveniente de números, entonces para todo número α, $\alpha \neq 0$, será también conveniente la colección $\alpha b_1, \ldots, \alpha b_m, \frac{1}{\alpha} c_1, \ldots, \frac{1}{\alpha} c_n$.

4.1.17. No. Un ejemplo contrario

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.18. El rango no cambia o cambia en uno.

4.1.19. El rango cambia no más que en uno; el rango cambia no más que en k.

4.1.21. 0, 1, 2.

4.1.28. 1. 4.1.29. 4. 4.1.30. 3. 4.1.31. 3. 4.1.32. 4. 4.1.33. 4.

4.1.34. La dimensión es igual a tres.

4.1.35. a) Sí; b) sí; c) no.

4.2.7. Un tal plano consta de un solo vector.

4.2.8. Un tal plano coincide con todo el espacio.

4.2.9. n.

4.2.12. Si $x_0, x_1, \ldots, x_k$ es el sistema de vectores dado, se puede tomar como vector de traslación del plano buscado x_0 y como subespacio director, la cápsula lineal de vectores $x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0$.

4.2.15. $L_1 + L_2$.

4.2.16. L, si $\lambda \neq 0$; O si $\lambda = 0$.

4.2.17. Sí, si $L = 0$; en este caso M coincide con V. No, si $L \neq 0$, ya que la operación de multiplicación por un número, como ella está determinada en el 4.2.16, hace salir de los límites de M.

4.2.18. Conservar la definición de la operación de multiplicación por un número para los números λ diferentes de cero. Para todo plano $P = x_0 + L$ poner $0 \cdot P = L$. En este caso L será un elemento nulo del espacio M.

4.2.19. $\dim M = n - k$.

4.2.20. El plano indicado contiene el vector z, pero no contiene el vector v.

4.2.22. a) La recta no se interseca con el plano; b) la recta posee con el plano un solo vector común $z_0 = (2, 1, -2, 2)$; c) la recta pertenece al plano.

4.2.23. Las rectas poseen un vector común $z_0 = (-5, 11, -16, -11, 7)$. El plano que pasa por este vector y cuyo subespacio director es la cápsula lineal de vectores q_1 y q_2 contiene las dos rectas dadas.

4.2.24. Trazar el plano por x_1 paralelamente a la cápsula lineal de vectores $x_2 - x_1, q_1, q_2$.

4.2.25. Los planos tienen un vector común único $z_0 = (1, 2, 1, 0, 1)$.

4.2.26. Los planos no se intersecan. En este caso sus subespacios directores se intersecan solamente por el vector nulo.

4.2.27. Los planos no se intersecan. En este caso sus subespacios directores se intersecan por un subespacio unidimensional tendido sobre el vector $2p_1 + p_2 = q_2 - q_1 = (5, 1, 0, 0, 5)$.

4.2.28. Los planos se intersecan por la recta $x = z_0 + q_2 t$, donde $z_0 = (-2, -1, 6, 6, 7)$.

4.2.29. Los planos no se intersecan. En este caso ellos tienen el mismo subespacio director.

4.2.30. Los planos coinciden.

4.2.34. Sean $P = x_0 + L_k$ y $e_1, \ldots, e_k$ la base de L_k. Completémosla hasta la base de todo el subespacio: $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1} \ldots e_n$. En este caso se puede tomar como hiperplanos buscados

$$\pi_1 = x_0 + L(e_1, \ldots, e_k, e_{k+2}, e_{k+3}, \ldots, e_n),$$
$$\pi_2 = x_0 + L(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, e_{k+3}, \ldots, e_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pi_{n-k} = x_0 + L(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{n-1}).$$

4.3.1. Si x_0 es un vector arbitrario que satisface la condición $(n, x_0) = b$ (como x_0 se puede tomar, por ejemplo, el vector $\alpha_0 n$, $\alpha_0 = b/(n, n)$), el conjunto dado es un hiperplano de vectores de la forma $x_0 + y$, donde y es un vector cualquiera ortogonal a n. Este hiperplano es un subespacio si, y sólo si, $b = 0$.

4.3.5. $n(t) = 1 + ct + c^2t^2 + \dots + c^nt^n$, $b = d$.

4.3.8. Sea x_0 un vector de intersección arbitrario. Reescribamos las ecuaciones de hiperplanos bajo la forma

$$\begin{aligned} (n_1, x - x_0) &= 0, \\ (n_2, x - x_0) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ (n_k, x - x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que la intersección de los hiperplanos dados es el plano $P = x_0 + L$, donde L es el complemento ortogonal a la cápsula lineal de vectores $n_1, \dots, n_k$.

4.3.10. El complemento ortogonal de L está tendido sobre los vectores $z_1 = (-3, 1, -2, 0)$, $z_2 = (1, -1, -2, 1)$ (véase el 2.3.6). Por eso P puede ser descrito, por ejemplo, por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (z_1, x) &= (z_1, x_0), \\ (z_2, x) &= (z_2, x_0), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} -3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= -4, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 &= -1. \end{aligned}$$

4.3.14. $z_0 = \alpha_0 n$, donde $\alpha_0 = b/(n, n)$.

4.3.16. $f(t) \equiv 1$.

4.3.19. 5. 4.3.22. 2. 4.3.23. 2. 4.3.24. 150.

4.3.25. 5. 4.3.26. 5.

4.4.4. 0, 7.

4.4.5. Para $\lambda \neq 1, 2$ el sistema admite una sola solución; para $\lambda = 1$ el subespacio de soluciones es unidimensional y para $\lambda = 2$ el subespacio de soluciones es bidimensional.

4.4.6. Para $\lambda \neq -1, -2$ el sistema admite una sola solución; para $\lambda = -1$ el subespacio de soluciones es unidimensional y para $\lambda = -2$ el subespacio de soluciones es tridimensional.

4.4.8. Los elementos rectores son iguales a las relaciones de los menores angulares.

4.4.10. La dependencia lineal de los vectores $y_1, \dots, y_k$ conduce de un modo evidente a la dependencia lineal de los vectores $z_1, \dots, z_k$. Supongamos ahora inversamente que en la igualdad $\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_k z_k = 0$ existen coeficientes diferentes de cero. En este caso dos soluciones del sistema (4.4.1) —la solución nula y $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k$ tienen los mismos valores de los últimos $n - r$ componentes, por consiguiente, $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k = 0$, es decir, los vectores $y_1, \dots, y_k$ son linealmente dependientes.

4.4.14. Para realizar el método de Gauss y obtener después las fórmulas de solución general, con las filas de la submatriz dada se efectúan solamente las transformaciones elementales. El resultado final es la matriz C (las filas nulas desde la fila $(r + 1)$-ésima a la m-ésima están suprimidas).

4.4.16. Todo vector del espacio aritmético de dimensión 4 es solución del sistema.

4.4.17. Por ejemplo, la solución general es $x_1 = -\frac{7}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3$, $x_4 = 0$. El sistema fundamental de soluciones: $y_1 = (-7, 3, 0, 0)$, $y_2 = (5, 0, 3, 0)$.

4.4.18. Solución general: $x_3 = 2x_1 + 5x_2 - 9x_4$. El sistema fundamental de soluciones es $y_1 = (1, 0, 2, 0)$, $y_2 = (0, 1, 5, 0)$, $y_3 = (0, 0, -9, 1)$.

4.4.19. El sistema posee solamente una solución nula.

4.4.20. Solución general: $x_1 = x_4$; $x_2 = x_4$; $x_3 = -x_4$. El sistema fundamental de soluciones se compone de un solo vector, por ejemplo, $y = (1, 1, -1, 1)$

4.4.21. Solución general: $x_1 = 2x_3 + 8x_4$, $x_2 = -x_3 - 2x_4$; $x_5 = 0$. El sistema fundamental de soluciones es $y_1 = (2, -1, 1, 0, 0)$, $y_2 = (8, -2, 0, 1, 0)$.

4.4.22. Solución general: $x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - 12x_4 - \frac{41}{2}x_5$; $x_2 = x_3 - 9x_4 - 18x_5$. El sistema fundamental de soluciones es $y_1 = (-1, 2, 2, 0, 0)$; $y_2 = (12, 9, 0, -1, 0)$; $y_3 = (41, 36, 0, 0, -2)$.

4.4.23. La solución general es $x_1 = x_2 = \frac{1}{7}x_5$; $x_3 = x_4 = -\frac{3}{7}x_5$. El sistema fundamental de soluciones se compone de un solo vector, por ejemplo, $y = (1, 1, -3, -3, 7)$.

4.4.24. La solución general es $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5$; $x_2 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$; $x_4 = 0$. El sistema fundamental de soluciones es $y_1 = (2, 9, -6, 0, 0)$, $y_2 = (-2, 3, 0, 0, 6)$.

4.4.25. La solución general es $x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4 + 3x_5$. El sistema fundamental de soluciones es $y_1 = (-1, 1, -1, 1, 0)$, $y_2 = (3, -3, 3, 0, 1)$.

4.4.26. Las primeras tres columnas de la matriz son linealmente dependientes; la cuarta columna no se expresa linealmente por las otras y por eso $x_4 = 0$; esto es también correcto para la quinta columna, por eso $x_5 = 0$.

4.4.27. x_4, x_5; x_1, x_4; x_3, x_4; x_2, x_5; x_1, x_2; x_2, x_3.

4.4.28. $n + 1 - k$.

4.4.29. Forman la base del subespacio, por ejemplo, los polinomios $f_1(t) = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t$ y $f_2(t) = t^5 - 25t^3 + 60t^2 - 36t$

4.4.30. a) Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 70x_1 - 16x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0, \\ -5x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Para obtener la respuesta b) y c) se puede añadir a a) una combinación lineal (dos combinaciones lineales) cualquiera de ecuaciones a).

4.4.31. No. Los sistemas dados no son equivalentes.

4.4.33. $(44, -11, -31, -6)$.

4.5.6. Para $\lambda \neq 0, 6$, el sistema es definido; para $\lambda = 0$ el sistema es incompatible; para $\lambda = 6$ el sistema admite un plano bidimensional de soluciones.

4.5.7. Para $\lambda \neq -1, 2$, el sistema es definido; para $\lambda = 2$ el sistema es incompatible; para $\lambda = -1$ el sistema admite un plano bidimensional de soluciones.

4.5.12. Por ejemplo, la solución general: $x_1 = \frac{45}{19} + \frac{37}{19}x_2 - \frac{23}{19}x_3 - \frac{42}{19}x_4$.

4.5.13. El sistema es incompatible.

4.5.14. Por ejemplo, la solución general: $x_1 = -1 + x_3 + 2x_4$, $x_2 = -3 + x_3 + 2x_4$.

4.5.15. El sistema posee una sola solución: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

4.5.16. Solución general: $x_1 = 6 - x_5$, $x_2 = -5 + x_5$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1 - x_5$.

4.5.17. Solución general: $x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{39}{2}x_5$, $x_3 = \frac{1}{3} + x_5$, $x_4 = -\frac{2}{3} - 2x_5$.

4.5.18. Solución general: $x_1 = \frac{7}{8} - \frac{3}{8}x_2 - \frac{11}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_4$, $x_5 = 0$.

4.5.19. El sistema es incompatible.

4.5.20. El sistema posee una sola solución: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 2$.

4.5.21. Solución general $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} x_2$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = \frac{11}{5} - \frac{6}{5} x_6$.

4.5.22. El sistema es incompatible.

4.5.23. Para $\lambda \neq 5$ el sistema es incompatible. Para $\lambda = 5$ el sistema es compatible y su solución general es, por ejemplo, $x_1 = -4 + x_3$, $x_2 = \frac{11}{2} - 2x_3$.

4.5.24. Para $\lambda \neq -3$ el sistema admite una sola solución:

$$x_1 = -\frac{1}{\lambda+3}, \quad x_2 = \frac{4\lambda+11}{3(\lambda+3)}, \quad x_3 = -\frac{\lambda+11}{3(\lambda+3)}.$$

Para $\lambda = -3$ el sistema es incompatible.

4.5.25. El sistema es compatible, cualquiera que sea el valor de λ. Para $\lambda \neq -95$ la solución general es de la forma: $x_2 = 0$, $x_1 = \frac{13}{12} - \frac{23}{12} x_3$. Para $\lambda = -95$ la solución general es: $x_1 = \frac{13}{12} + \frac{19}{12} x_2 - \frac{23}{12} x_3$.

4.5.26. Para $\lambda \neq 1, -2$ el sistema admite una sola solución:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+2}.$$

Para $\lambda = 1$ la solución general es: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. Para $\lambda = -2$ el sistema es incompatible.

4.5.27. Para $\lambda \neq 1, -2$ el sistema admite una sola solución:

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{\lambda-1}, \quad x_3 = \frac{2}{\lambda-1}.$$

Para $\lambda = 1$ el sistema es incompatible. Para $\lambda = -2$ el sistema es compatible y su solución general es: $x_1 = x_2 = -1 + x_3$.

4.5.28. Para $\lambda \neq 1, -2$ el sistema admite una sola solución:

$$x_1 = x_2 = -\frac{3}{(\lambda-1)(\lambda+2)},$$

$$x_3 = \frac{3(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+2)}.$$

Para $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$ el sistema es incompatible.

4.5.29. Para $\lambda \neq 1, 3$ el sistema admite una sola solución:

$$x_1 = -1, \quad x_2 \, \frac{\lambda-4}{\lambda-3}, \quad x_3 = -\frac{1}{\lambda-3}.$$

Para $\lambda = 1$ la solución general es: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. Para $\lambda = 3$ el sistema es incompatible.

4.5.30. Para $\lambda \neq 1, 3$, el sistema admite una sola solución:

$$x_1 = \frac{2}{3-\lambda}, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{3-7\lambda}{(\lambda-1)(3-\lambda)}.$$

Para $\lambda = 1$ el sistema es incompatible. Para $\lambda = 3$ la solución general es:

$$x_1 = -\frac{17}{9} - \frac{1}{3} x_3 - \frac{2}{9} x_4, \quad x_2 = 2.$$

4.5.31. La tercera columna de la matriz del sistema no se expresa linealmente por las demás columnas; la quinta columna no se expresa linealmente por las demás columnas de la matriz ampliada del sistema.

4.5.32. No. Las fórmulas no son equivalentes.

4.5.33. Sí.

4.5.34. $n+1-k$.

4.5.35. Las condiciones dadas determinan un plano bidimensional. Si $f_0(t)$ es un polinomio cualquiera de este plano, los polinomios $f_0(t)$, $f_0(t)+f_1(t)$, $f_0(t)+f_2(t)$, de donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ constituyen la base del subespacio director, son linealmente independientes. Como $f_1(t)$ y $f_2(t)$ se pueden tomar los polinomios del problema 4.4.29.

4.5.36. $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=3$.

4.5.40. $x_1=\dfrac{ap-bq-cr-ds}{A}$, $x_2=\dfrac{bp+aq-dr+cs}{A}$,

$x_3=\dfrac{cp+dq+ar-bs}{A}$, $x_4=\dfrac{dp-cq+br+as}{A}$.

4.5.42. $f(t)=t^3-4t^2+3t-2$.

4.5.43. $f(t)=-3t^3+7t$.

4.5.47. $f(t)=t^4-4t^2+3t-1$.

4.5.49. $f(t)=2t^4-t^3-3t^2-2t+1$.

4.5.51. $f(t)=2t^5-4t^4-3t^2+5t-2$.

4.5.53. Escribamos para la función f y sus derivadas el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&hf &&=g,\\
&h'f+hf' &&=g',\\
&h^{(2)}f+2h'f'+hf^{(2)} &&=g^{(2)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&h^{(n)}f+nh^{(n-1)}f'+C_n^2h^{(n-2)}f^{(2)}+\ldots+hf^{(n)} &&=g^{(n)}.
\end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Cramer para $f^{(n)}$ obtendremos la relación necesaria.

4.5.54. $f^{(5)}(1)=-2$.

5.1.1. Sí, si $a=0$; no, si $a\neq 0$. 5.1.2. Véase la respuesta para el 5.1.1. 5.1.3. Sí. 5.1.4. Sí.

5.1.5. Sí. 5.1.6. No. 5.1.7. Sí. 5.1.8. Sí.

5.1.9. Sí, para $\alpha=0$; no, para $\alpha\neq 0$. 5.1.10. Sí. 5.1.11. No. 5.1.12. No. 5.1.13. Sí. 5.1.14. Sí. 5.1.15. No.

5.1.16. Sí. 5.1.17. No.

5.1.18. Sí. 5.1.19. Sí. 5.1.20. Sí. 5.1.21. Sí. 5.1.22. Sí. 5.1.23. Sí.

5.1.24. Sí. 5.1.25. No. 5.1.26. No. 5.1.27. No.

5.1.34. Todo operador del espacio R^+ consiste en elevar todos los números de este espacio a la potencia con el exponente real fijo (para el operador dado).

5.1.36. No. 5.1.37. Sí. 5.1.40. a) Sí; b) no.

5.1.44. No, si el sistema $x_1, \ldots, x_k$ es linealmente dependiente.

5.1.45. Sí.

5.1.47. Para que la funcional lineal φ del espacio M_n pueda ser dada por la fórmula $\varphi f(t)=f(a_0)$ es necesario y suficiente que los números

$$c_i=\varphi(t^i),\quad i=0, 1, \ldots, n$$

verifiquen las relaciones:

$$c_0=1,\ \frac{c_{i+1}}{c_i}=\text{const.},\ i=0, 1, \ldots, n-1,$$

5.1.52. No. Todo operador del espacio C obtenido de este modo transforma los vectores «reales» (es decir, los vectores de la forma $x+i0$) de nuevo en vectores reales.

5.1.53. No, si esta funcional no es idénticamente nula.

5.1.55. Sí, para $\dim Y \geqslant \dim X$; no, para $\dim Y < \dim X$.

5.1.56. No, para $\dim Y > \dim X$; sí, para $\dim Y \leqslant \dim X$.

5.1.59. N_A; 0.

5.1.66. n, si $f=0$; $n-1$, si $f\neq 0$.

5.1.67. El subespacio bidimensional de vectores ortogonales a a; el subespacio bidimensional de vectores coplanares con a y b.

5.1.68. N_A es una recta tendida sobre el vector a; T_A es un plano perpendicular al vector a.

5.1.69. Si $(a, b) = 0$, N_A es un plano perpendicular al vector a; T_A es una recta tendida sobre el vector b. Pero si $(a, b) \neq 0$, N_A es una recta tendida sobre el vector b; T_A es un plano perpendicular al vector a.

5.1.70. $r_A = 1$, la base de la imagen: $y = (1, 1, 1)$; $n_A = 2$, la base del núcleo: $Z_1 = (1, -1, 0)$, $Z_2r = (1, 0, -1)$.

5.1.71. $r_A = 2$, la base de la imagen: $y_1 = (2, 1, 1)$; $y_2 = (-1, -2, 1)$; $n_A = 1$, la base del núcleo: $Z = (1, 1, 1)$.

5.1.72. $r_A = 3$, $n_A = 0$.

5.1.73. La imagen: M_{n-1}; el núcleo: M_0.

5.1.74. Véase la respuesta para el 5.1.73.

5.1.75. $n + 1 - k$, si $k < n + 1$; 0, si $k \geqslant n + 1$.

5.1.76. $N_P = L_2$; $T_P = L_1$.

5.2.7. Sea $e_1, \ldots, e_n$ una cierta base del espacio X y supongamos que para el operador dado A de ω_{XY}

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + \ldots + a_{m1}q_m, \\ Ae_2 &= a_{12}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{m2}q_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ae_n &= a_{1n}q_1 + a_{2n}q_2 + \ldots + a_{mn}q_m. \end{aligned}$$

Pongamos

$$\begin{aligned} &B_1e_1 = a_{11}q_1, \quad B_2e_1 = a_{21}q_2, \quad \ldots, \quad B_me_1 = a_{m1}q_m, \\ &B_1e_2 = a_{12}q_1, \quad B_2e_2 = a_{22}q_2, \quad \ldots, \quad B_me_2 = a_{m2}q_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &B_1e_n = a_{1n}q_1, \quad B_2e_n = a_{2n}q_2, \quad \ldots, \quad B_me_n = a_{mn}q_m. \end{aligned}$$

Es evidente que los operadores B_i, $i = 1, \ldots, m$, satisfacen las condiciones del problema.

5.2.11. $\dim \omega_{XY} = mn$.

5.2.12. a) No, si $T \neq 0$; b) no, si $N \neq X$.

5.2.13. $\dim \omega_{XT} = kn$.

5.2.14. $\dim K_N = m(n - l)$.

5.2.20. Sean $e_1, \ldots, e_d$ $(d = n - r)$ una base cualquiera de N_A, $e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n$ una base de X. Entonces, los vectores $y_1 = Ae_{d+1}, \ldots, y_r = Ae_n$ constituyen una base de T_A. La representación buscada del operador A se da por los operadores $B_1, \ldots, B_r$ definidos por las igualdades

$$B_ie_k = \begin{cases} 0, & k \neq d+i, \\ y_i, & k = d+i. \end{cases}$$

5.2.21. O bien $N_A = N_B$, o bien $T_A = T_B$.

5.2.22. Supongamos que en L todos los operadores tienen el rango $\leqslant 1$ y A es un operador arbitrario de rango 1 de L. Examinemos en L el subespacio L_1 de todos los operadores B, para los cuales $N_B \supset N_A$ y el subespacio L_2 de todos los operadores C, para los cuales $T_C \subset T_A$. Según los problemas 5.2.13, 5.2.14 estos subespacios son subespacios de L de dimensión $\leqslant n$. Por eso $L_1 \neq L$, $L_2 \neq L$ y existe un operador D de L tal que $D \notin L_1$, $D \notin L_2$, es decir, $T_D \neq T_A$, $N_D \neq N$. Pero en tal caso (véase el 5.2.21) $A + D$ es de rango 2.

5.2.23. No (véase el 5.2.8).

5.2.24. Sí.

5.2.26. $N_{E-P} = T_P$, $T_{E-P} = N_P$.

5.3.4. No.

5.3.6. $n(n - r)$.

5.3.7. $n(n - r)$.

5.3.8. El rango es igual a nr, el defecto es igual a $n(n - r)$.

5.3.10. Sea $x \in N_{q+h}$. En este caso

$$A^{q+h}x = 0 = A^{q+1}(A^{h-1}x).$$

Puesto que $N_q = N_{q+1}$, entonces

$$A^q(A^{h-1}x) = 0 = A^{q+h-1}x,$$

es decir, $x \in N_{q+h-1}$. Por consiguiente, $N_{q+h} = N_{q+h-1}$. Continuando de este modo obtendremos

$$N_{q+h} = N_{q+h-1} = N_{q+h-2} = \ldots = N_{q+1} = N_q.$$

5.3.12. $n+1$.

5.3.19. Si D es un operador de derivación, entonces

$$A = E + \frac{1}{1!} D + \frac{1}{2!} D^2 + \ldots + \frac{1}{n!} D^n.$$

5.3.21. Sean $\varphi(A) = 0$ y $\varphi(t) = q(t)\, m(t) + r(t)$, donde el grado de $r(t)$ es menor que el grado de $m(t)$, o bien $r(t) \equiv 0$. Si $r(t)$ es un polinomio no nulo, entonces $r(A) = \varphi(A) - q(A)\, m(A) = 0$, lo cual contradice a la definición del polinomio $m(t)$.

5.3.22. Sean $m_1(t)$ y $m_2(t)$ dos polinomios anuladores con grado mínimo. En este caso se puede considerar que los coeficientes mayores de los dos polinomios son iguales a 1. Si $p(t) = m_1(t) - m_2(t)$ es un polinomio no nulo, él también anula el operador A.

5.3.23. a) $m(t) = t^2 - t$, si $P \neq 0$, E, $m(t) = t$ para $P = 0$; $m(t) = t - 1$ para $P = E$; b) $m(t) = t^2 - 1$; c) $m(t) = t^n$.

5.3.25. No.

5.3.31. El hecho de que P_1P_2 es un operador de proyección (véase el 5.3.17) se deduce de la igualdad:

$$(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2.$$

De la conmutatividad de P_1 y P_2 se infiere también que $T_{P_1P_2} \subset T_{P_1} \cap T_{P_2}$. Si inversamente $x \in T_{P_1} \cap T_{P_2}$, entonces $P_1x = P_2x = x$ y $P_1P_2x = x$, es decir, $x \in T_{P_1P_2}$.

Utilizando de nuevo la conmutatividad de P_1 y P_2 obtenemos que $N_{P_1} \subset N_{P_1P_2}$ y $N_{P_2} \subset N_{P_1P_2}$, es decir, $N_{P_1} + N_{P_2} \subset N_{P_1P_2}$. Supongamos ahora que $x \in N_{P_1P_2}$. En este caso $P_2x \in N_{P_1}$ y $(E - P_2)\, x \in N_{P_2}$. La identidad $x = P_2x + (E - P_2)\, x$ demuestra la inclusión inversa: $N_{P_1P_2} \subset N_{P_1} + N_{P_2}$.

5.3.32. Se verifica fácilmente que de $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ se deduce $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$, es decir, $P_1 + P_2$ es un operador de proyección. Supongamos inversamente que $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$, de donde

$$P_2P_1 + P_1P_2 = 0.$$

Multiplicando esta igualdad a la izquierda y a la derecha por P_1 obtendremos

$$P_1P_2P_1 + P_1P_2 = 0,$$

$$P_2P_1 + P_1P_2P_1 = 0$$

lo que da

$$P_2P_1 - P_1P_2 = 0$$

y, por consiguiente,

$$P_1P_2 = P_2P_1 = 0.$$

La inclusión $T_{P_1+P_2} \subset T_{P_1} + T_{P_2}$ es evidente. De la condición $P_1P_2 = 0$ se deduce que $T_{P_2} \subset N_{P_1}$. Como la suma $T_{P_1} + N_{P_1}$ es recta, esto es también válido para la suma $T_{P_1} + T_{P_2}$. Sea ahora $x \in T_{P_1} + T_{P_2}$, es decir, $x = x_1 +$

$+ x_2$, donde $x_1 \in T_{P_1}$, $x_2 \in T_{P_2}$. Entonces,

$$\begin{aligned}(P_1 + P_2)\,x &= (P_1 + P_2)\,x_1 + (P_1 + P_2)\,x_2 = \\ &= (P_1 + P_2)\,P_1 x_1 + (P_1 + P_2)\,P_2 x_2 = \\ &= P_1^2 x_1 + P_2^2 x_2 = x_1 + x_2 = x,\end{aligned}$$

es decir,

$$T_{P_1} \dot{+} T_{P_2} \subset T_{P_1+P_2}.$$

Puesto que $T_{P_1} \cap T_{P_2} = 0$, entonces de $x \in N_{P_1+P_2}$, es decir, $P_1 x = -P_2 x$, se deduce que $x \in N_{P_1} \cap N_{P_2}$.

5.3.38. El operador que a cada función le asigna su primitiva (única) perteneciente al espacio dado.

5.3.39. $R^{-1} = R$.

5.3.41. De ser singulares los operadores $E + A$ y $E - A$ el núcleo de cada uno de ellos debe coincidir con la imagen del operador A. Pero para el vector no nulo x la observancia simultánea de las igualdades $-Ax = x$ y $Ax = x$ es imposible.

5.3.51. Sí, si $\dim Y = \dim X$; no, si $\dim Y > \dim X$. El caso de $\dim Y < \dim X$ es imposible.

5.4.1. $AB = -1$. $BA = \begin{Vmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.4.2. $AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $BA = \begin{Vmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{Vmatrix}$.

5.4.3. $AB = \begin{Vmatrix} -52 \\ 78 \\ 69 \end{Vmatrix}$.

5.4.4. $AB = (-15 \;\; 97 \;\; 78 \;\; -112)$.

5.4.5. $AB = \begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.6. $AB = (-1 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 4)$.

5.4.7. $AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.4.8. $ABC = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.4.9. $ABCD = \begin{Vmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{Vmatrix}$.

5.4.12. $X = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

5.4.13. $X=\begin{Vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$.

5.4.14. $X=\frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{Vmatrix}$.

5.4.15. $X=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.16. $X=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

5.4.17. $X=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.19. mpn multiplicaciones; $mp(n-1)$ adiciones.

5.4.20. El producto $(AB)C$ demanda $mp(n+q)$ multiplicaciones; el producto $A(BC)$ demanda $nq(m+p)$ multiplicaciones.

5.4.25. a) A las filas de A se les suma, a partir de la $(i+1)$-ésima fila la i-ésima fila multiplicada por $\alpha_{i+1,i}, \alpha_{i+2,i}, \ldots, \alpha_{ni}$ respectivamente; b) a todas las filas de A, excepto la i-ésima fila, se les suma la i-ésima fila multiplicada por $\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{i-1,i}, \alpha_{i+1,i}, \ldots, \alpha_{ni}$ respectivamente.

Para multiplicar a la derecha: a) a la i-ésima columna de A se le suma cada una de las columnas siguientes, multiplicada por el número α_{ki}, $k=i+1, \ldots, n$; b) a la i-ésima columna de A se suma cada una de las demás columnas, multiplicada por el número correspondiente α_{ki}, $k \neq i$.

5.4.29. $\begin{Vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.30. $\begin{Vmatrix} c_k & c_{k-1} \\ c_{k-1} & c_{k-2} \end{Vmatrix}$,

c_i son números de Fibonacci; $c_{-1}=0$, $c_0=1$, $c_k=c_{k-1}+c_{k-2}$.

5.4.31. $\begin{vmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{vmatrix}$.

5.4.32. $$\begin{Vmatrix} \lambda_1^m\lambda_n^m & & & & 0 \\ & \lambda_2^m\lambda_{n-1}^m & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1}^m\lambda_2^m & \\ 0 & & & & \lambda_n^m\lambda_1^m \end{Vmatrix}.$$

para $k=2m$ y

$$\begin{Vmatrix} 0 & & & & \lambda_1^{m+1}\lambda_n^m \\ & & & \lambda_2^{m+1}\lambda_{n-1}^m & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & \lambda_{n-1}^{m+1}\lambda_2^m & & & \\ \lambda_n^{m+1}\lambda_1^m & & & & 0 \end{Vmatrix}.$$

para $k=2m+1$.

5.4.33. Si la matriz dada se designa por A, entonces, para $B = A^k$, cuando $k < n$, tenemos: $b_{i,i+k} = 1$, $i = 1, \ldots, n-k$; los demás elementos b_{ij} son iguales a cero. Si $k \geqslant n$, $B = 0$.

5.4.34. Si la matriz dada se designa por A, entonces, para $B = A^k$, cuando $k < n$ tenemos: $b_{i,i+k} = 1$, $i = 1, \ldots, n-k$; $b_{i,i+k-n} = 1$, $i = n - k + 1, \ldots, n$; los demás elementos b_{ij} son iguales a cero. Para $k = n$ obtenemos $A^k = E$. Si $k > n$, poniendo k bajo la forma $k = np + m$ tenemos $A^k = A^m$.

5.4.42. $\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{Vmatrix}$.

5.4.43. $\begin{Vmatrix} a & b & c & \ldots & h \\ & a & b & \ldots & \cdot \\ & & a & \ldots & \cdot \\ & & & \ldots & \cdot \\ & & & \ldots & c \\ & & & \cdot & b \\ 0 & & & & a \end{Vmatrix}$.

5.4.44. n, donde n es el orden de la célula de Jordan.

5.4.46. $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

5.4.54. n^2. Es necesario calcular solamente n elementos que determinan totalmente la matriz circulante.

5.4.55. $2(m_1 + m_2) + 1$.

5.4.60. $\alpha = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.

5.4.61. $n(n+2)$, si se parte de la representación de la matriz AB con la forma $AB = (\beta x)v$, donde $\beta = y_1u_1 + \ldots + y_nu_n$. En este caso para calcular β hacen falta n multiplicaciones, para calcular el vector columna βx, n multiplicaciones; para calcular $(\beta x)v$, n^2 multiplicaciones.

5.4.62. Compongamos la matriz B a partir de un sistema cualquiera de columnas de base de A; compongamos las columnas de B a partir de los coeficientes de descomposición de las columnas correspondientes de A por este sistema.

5.4.63. Por ejemplo, $B = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

5.4.64. Por ejemplo, $B = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

5.4.67. Una matriz casi diagonal arbitraria con células diagonales de orden $k_1, k_2, \ldots, k_r$, respectivamente.

5.4.75. Supongamos que $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j \times e_i = 0$.

De aquí

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j \right) \times e_i = 0.$$

En virtud de la independencia lineal del sistema $e_1, \ldots, e_m$ obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

de donde $\alpha_{ij} = 0$ para todos los i, j.

5.5.1. $-\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{Vmatrix}$.

5.5.2. $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$.

5.5.3. $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix}$.

5.5.4. $\frac{1}{ad-bc}\begin{Vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{Vmatrix}$.

5.5.5. $-\frac{1}{7}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & -21 \end{Vmatrix}$.

5.5.6. $\frac{1}{9}\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$.

5.5.7. $\begin{Vmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{Vmatrix}$.

5.5.8. $-\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

5.5.9. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.5.10. $-\frac{1}{6}\begin{Vmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$.

5.5.11. $\begin{Vmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 9 \end{Vmatrix}$.

5.5.12. $\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{Vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{Vmatrix}$.

5.5.16. a) Sí. Ejemplo: el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

donde $a \neq 0$; b) no, la ecuación $Ax = B$, donde A es una matriz singular y B es una matriz no singular, es irresoluble.

5.5.22. $\left\| \begin{matrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{matrix} \right\|$.

5.5.23. $\left\| \begin{matrix} 0 & & & \frac{1}{\lambda_n} \\ & & \frac{1}{\lambda_{n-1}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \end{matrix} \right\|$.

5.5.24. $\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|$.

5.5.25. $\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \dots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 2^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|$.

5.5.26. $\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & (-a)^{n-4} & \dots & -a & 1 \end{matrix} \right\|$.

5.5.27. $\left\| \begin{matrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^4} & \dots & (-1)^{n-1}\frac{1}{a^n} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} & \dots & (-1)^{n-2}\frac{1}{a^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \dots & (-1)^{n-3}\frac{1}{a^{n-2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a} \end{matrix} \right\|$.

5.5.28. $\left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|$.

5.5.29. $P_{ij}^{-1} = P_{ij}^T = P_{ij}$;

$$D_i^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \frac{1}{\alpha} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{Vmatrix};$$

$$L_{ij}^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & -\alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

5.5.30. En la matriz inversa: a) las i-ésima y j-ésima columnas cambian de lugares; b) la i-ésima columna se multiplica por el número $1/\alpha$; c) de la j-ésima columna se resta la i-ésima columna multiplicada por el número α.

$$N_i^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\alpha_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\alpha_{ni} & & & 1 \end{Vmatrix},$$

$$S_i^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & & & -\alpha_{1i} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -\alpha_{i-1,i} & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & -\alpha_{i+1,i} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -\alpha_{ni} & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

5.5.33. $n!$

5.5.35. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

5.5.36. $\begin{Vmatrix} 15 & 10 & -6 & -4 \\ 10 & 5 & -4 & -2 \\ -9 & -6 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$

5.5.37. En los datos del problema la matriz A puede ser reducida a la forma triangular solamente por transformaciones elementales de la forma c). En este caso cada paso del método de Gauss puede ser interpretado como una multiplicación a la izquierda de la matriz corriente por la sucesión de matrices L_{ki} o, lo que es lo mismo, por la matriz correspondiente N_i. Finalmente se obtiene

$$N_{n-1} \ldots N_i \ldots N_1 A = R,$$

donde R es una matriz triangular superior. De aquí

$$A = (N_1^{-1} \ldots N_i^{-1} \ldots N_{n-1}^{-1}) R.$$

Todas las matrices N_i^{-1} son matrices triangulares inferiores, cuyos elementos de la diagonal principal son unidades; esto es también válido para su producto.

5.5.40. Aplicando el método de Gauss reducimos A a una matriz triangular superior cuyos elementos de la diagonal principal son unidades. Luego restamos de las filas precedentes los múltiplos convenientes de la última fila para anular todos los elementos no diagonales de la última columna. Procedemos igualmente con la penúltima fila, etc.

5.5.43. Si M_i son matrices de transformaciones elementales, que participan en el proceso de reducción de A a la matriz unidad, entonces

$$M_k \ldots M_1 A = E,$$

es decir,

$$A^{-1} = M_k \ldots M_1.$$

5.5.44. $$\begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

5.5.45. $$\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{Vmatrix}.$$

5.5.50. Efectuemos los cálculos en el orden siguiente: 1. $A^{-1}x$. 2. yA^{-1}. 3. $\alpha = y\,(A^{-1}x)$. 4. $\beta = \dfrac{1}{1+\alpha}$. 5. $\beta\,(A^{-1}x)$. 6. $\beta A^{-1}BA^{-1} = (\beta A^{-1}x)\,(yA^{-1})$ 7. $(A+B)^{-1}$. En este caso hará falta efectuar $3n^2 + 2n + 1$ operaciones de multiplicación y de división.

5.5.51.

$$\widetilde{A}^{-1} = A^{-1} - \frac{\gamma}{1+\gamma c_{ji}}\, r_i s_j.$$

Aquí c_{ji} es el elemento (j, i) de la matriz $C = A^{-1}$; r_i es la i-ésima columna y s_j, la j-ésima fila de A^{-1}.

5.5.52. Notemos: $v = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $s = vA^{-1}$, r_n es la última columna de A^{-1}. En este caso

$$\widetilde{A}^{-1} = A^{-1} - \frac{a}{1+vr_n}\, r_n s.$$

5.5.53. Sea e el vector columna (del mismo orden que A), todos los elementos del cual son iguales a la unidad. Supongamos que $t = A^{-1}e$, $u = e^{T}A^{-1}$. En este caso obtendremos

$$\widetilde{A}^{-1} = A^{-1} - \frac{a}{1+aS}\, tu,$$

donde S es la suma de todos los elementos de A^{-1}.

5.5.54. $$\frac{1}{(a-b)(a+b(n-1))}\left\|\begin{matrix}\alpha & -b & -b & \dots & -b\\ -b & \alpha & -b & \dots & -b\\ -b & -b & \alpha & \dots & -b\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -b & -b & -b & \dots & \alpha\end{matrix}\right\|,\ \alpha=a+b(n-2).$$

5.5.55. $$\frac{1}{n-1}\left\|\begin{matrix}2-n & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n\end{matrix}\right\|.$$

5.5.56. $$\left\|\begin{matrix}2-n & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1\end{matrix}\right\|.$$

5.5.57. $$-\frac{1}{t}\left\|\begin{matrix}\frac{1-a_1t}{a_1^2} & \frac{1}{a_1a_2} & \frac{1}{a_1a_3} & \dots & \frac{1}{a_1a_n}\\ \frac{1}{a_1a_2} & \frac{1-a_2t}{a_2^2} & \frac{1}{a_2a_3} & \dots & \frac{1}{a_2a_n}\\ \frac{1}{a_1a_3} & \frac{1}{a_2a_3} & \frac{1-a_3t}{a_3^2} & \dots & \frac{1}{a_3a_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{1}{a_1a_n} & \frac{1}{a_2a_n} & \frac{1}{a_3a_n} & \dots & \frac{1-a_nt}{a_n^2}\end{matrix}\right\|,$$

donde $t=1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}$.

5.5.60. $\left\|\begin{matrix}E_k & -B\\ 0 & E_l\end{matrix}\right\|$.

5.5.62. Calculemos A_n^{-1} en la división celular

$$A_n^{-1}=\left\|\begin{matrix}P_{n-1} & r_{n-1}\\ q_{n-1} & b\end{matrix}\right\|,$$

donde P_{n-1} es la matriz cuadrada de orden $n-1$. De la condición $A_nA_n^{-1}=$ $=E_N$ tenemos:

$$A_{n-1}P_{n-1}+u_{n-1}q_{n-1}=E_{n-1}, \tag{α}$$

$$A_{n-1}r_{n-1}+bu_{n-1}=0, \tag{β}$$

$$v_{n-1}P_{n-1}+aq_{n-1}=0, \tag{γ}$$

$$v_{n-1}r_{n-1}+ab=1. \tag{δ}$$

De (β) resulta

$$r_{n-1}=-bA_{n-1}^{-1}-u_{n-1}. \tag{ε}$$

Sustituyendo en (δ) hallamos b:

$$b=\frac{1}{a-v_{n-1}A_{n-1}^{-1}-u_{n-1}}.$$

Ahora (ε) permite calcular r_{n-1}.

Pongamos la expresión de P_{n-1}, obtenida de (α),

$$P_{n-1}=A_{n-1}^{-1}-A_{n-1}^{-1}u_{n-1}q_{n-1}$$

en (γ)

$$v_{n-1}A_{n-1}^{-1}-v_{n-1}A_{n-1}^{-1}u_{n-1}q_{n-1}+aq_{n-1}=0,$$

de donde

$$q_{n-1}=\frac{v_{n-1}A_{n-1}^{-1}}{v_{n-1}A_{n-1}^{-1}u_{n-1}-a}=-bv_{n-1}A_{n-1}^{-1}.$$

Finalmente hallamos P_{n-1}:

$$P_{n-1}=A_{n-1}^{-1}+bA_{n-1}^{-1}u_{n-1}v_{n-1}A_{n-1}^{-1}.$$

5.5.63. Realizaremos los cálculos en el orden siguiente:
1. $A_{n-1}^{-1}u_{n-1}$. 2. $v_{n-1}A_{n-1}^{-1}$. 3. $v_{n-1}(A_{n-1}^{-1}u_{n-1})$.
4. b. 5. r_{n-1}. 6. q_{n-1}. 7. $r_{n-1}(v_{n-1}A_{n-1}^{-1})$.
8. P_{n-1}. En este caso será necesario efectuar $3n^2-3n+1$ operaciones de multiplicación y de división.

5.5.66. $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -83 & 47 & 1 & 0 & 0 \\ 55 & -94 & 0 & 1 & 0 \\ -62 & 71 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$.

5.5.67. $\left\|\begin{matrix} 1 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 9 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|$.

5.5.68. $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & -21 \\ 3 & 12 & -92 & -279 \\ -1 & -4 & 31 & 94 \end{matrix}\right\|$.

5.5.69. $\left\|\begin{matrix} 14 & -8 & -21 & 12 \\ -10 & 6 & 15 & -9 \\ -35 & 20 & 56 & -32 \\ 25 & -15 & -40 & 24 \end{matrix}\right\|$.

5.5.80. Examinemos la igualdad

$$A_pB_p=(E_n)_p \tag{α}$$

como un sistema de ecuaciones respecto a los elementos de la matriz B_p. Este sistema es un sistema definido.

Apliquemos al determinante de la matriz A el teorema de Laplace:

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant n} A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \ldots & j_p \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p \end{pmatrix}\cdot(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{p}(i_s+k_s)}\cdot A\begin{pmatrix} k_1' & k_2' & \ldots & k_{n-p}' \\ i_1' & i_2' & \ldots & i_{n-p}' \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{cases} |A|, & \text{si } \sum\limits_{s=1}^{p}(j_s-k_s)^2=0, \\ 0, & \text{si } \sum\limits_{s=1}^{p}(j_s-k_s)^2\neq 0 \end{cases}$$

Comparando las descomposiciones indicadas para todas las colecciones $i_1, i_2, \ldots, i_p$ y $k_1, k_2, \ldots, k_p$ tales que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$, $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leqslant n$ se ve que los números

$$\frac{(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{n}(i_s+k_s)} A\begin{pmatrix} k_1' & k_2' & \ldots & k_{n-p}' \\ i_1' & i_2' & \ldots & i_{n-p}' \end{pmatrix}}{|A|}$$

son la solución del sistema (α).

5.6.1. $\left\|\begin{matrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{matrix}\right\|$.

5.6.2. $\left\|\begin{matrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{matrix}\right\|$.

5.6.3. a) $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}\right\|$;

b) $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & C_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}\right\|$.

5.6.4. a) $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{matrix}\right\|$.

La matriz es de tipo $n\times(n+1)$.

b) $\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{n} \end{matrix}\right\|$.

La matriz es de tipo $(n+1)\times n$.

5.6.5. a) $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right\|$; b) $\left\|\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}\right\|$.

5.6.6. a) Los primeros r elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad; los demás elementos son iguales a cero; b) los últimos $n-r$ elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad; los demás elementos son iguales a cero; c) la matriz es diagonal, con la particularidad de que los primeros r elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y los demás, a (-1).

5.6.8. a) $\begin{Vmatrix} -5 & -10 & 7 \\ 6 & 13 & -10 \\ 17 & 36 & -27 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 5 & -20 & 33 \\ 7 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.6.9. a) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; b) $A \times B^T$; c) $A \times E + E \times B^T$.

La permutación de las matrices de base no cambia la matriz a); la matriz b) se reemplaza por la $B^T \times A$; la matriz c) se reemplaza por la $E \times A + B^T \times E$.

5.6.10. a) $B^T \times A$; b) $E_n \times A + B^T \times E_m$.

5.6.12. 2. 5.6.13. 3.

5.6.14. Las últimas $n - r$ columnas de la matriz son nulas, en tanto que las primeras r son linealmente independientes.

5.6.18. Se cambian de lugares: a) la i-ésima y la j-ésima filas; b) la k-ésima y la l-ésima columnas.

5.6.19. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{4} & -4 & -5 \\ \frac{9}{4} & 3 & 4 \end{Vmatrix}$.

5.6.20. $AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$,

$$BA = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}.$$

5.6.21. a) $P \times Q^T$; b) $P^{-1} \times (Q^{-1})^T$.

5.6.22. En la base $F_{11}, \ldots, F_{mn}$ la matriz del operador G_{AB} es

$$(P^{-1}AP) \times (QBQ^{-1})^T,$$

y el operador F_{AB}, la matriz

$$(P^{-1}AP) \times E_n + E_m \times (QBQ^{-1})^T.$$

5.6.31. No; si $B = P^{-1}AP$, entonces $B = (\alpha P)^{-1}A\,(\alpha P)$ para todo número no nulo α.

5.6.38. Por ejemplo, para las matrices

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

tenemos

$$AB=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\quad BA=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}.$$

5.6.40. No. Por ejemplo, para las matrices A y B dadas en la solución del problema 5.6.38, $A^2=0$, $B^2=B$, aunque A y B son equivalentes.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son valores propios del operador A, entonces:

6.1.3. El operador A^{-1} tiene los valores propios $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n$.

6.1.5. El operador $A-\lambda_0 E$ tiene los valores propios $\lambda_1-\lambda_0, \ldots, \lambda_n-\lambda_0$.

En general,

6.1.6. c) El operador $f(A)$ tiene los autovalores $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$.

6.1.7. No.

6.1.10. Serán propios los vectores colineales con a. El valor propio correspondiente es cero.

6.1.11. Los vectores propios son polinomios de grado cero; el valor propio correspondiente es cero.

6.1.12. No posee autovectores.

6.1.14. $(1\ 1\ \ldots\ 1)^T$.

6.1.15. La matriz $A=xy$ posee siempre el valor propio $\lambda=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$. Si el orden de la matriz es superior a uno, existe también el valor propio nulo.

6.1.16. El valor propio no nulo es n, el autovector correspondiente es $(1\ 1\ \ldots\ 1)^T$. Para los componentes de los vectores propios referentes al valor propio nulo se obtiene la ecuación

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=0.$$

6.1.17. Los vectores propios son los mismos que los de la matriz J_n del problema 6.1.16. Los valores propios son: $a+b(n-1)$, $a-b$.

6.1.18. Si $B=T^{-1}AT$ y x es el vector propio de la matriz A referente al valor propio λ, entonces $T^{-1}x$ es el vector propio de la matriz B con el mismo valor propio.

6.1.22. a) Los valores propios del operador de proyección son 1 y 0; en este caso L_1 es un subespacio propio de $\lambda=1$; L_2 es el subespacio propio para $\lambda=0$; b) los valores propios del operador de reflexión son 1 y -1; en este caso L_1 es el subespacio propio para $\lambda=1$; L_2 es el subespacio propio para $\lambda=-1$.

6.1.27. Un operador de estructura simple «estira» el espacio en n direcciones linealmente independientes (n es la dimensión del espacio).

En la base compuesta de los vectores propios la matriz de este operador es una matriz diagonal.

6.2.1. a) $\lambda-a_{11}$; b) $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$; c) $\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}-a_{13}a_{31}-a_{23}a_{32})\lambda-|A|$.

6.2.3. $\lambda^n-(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)\lambda^{n-1}$.

6.2.4. $\lambda^n-a\lambda^{n-1}-(b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_{n-1}c_{n-1})\lambda^{n-2}$.

6.2.9. La suma de todos los menores principales de orden k de la matriz A^{-1} es igual a la suma de todos los menores principales de orden $n-k$ de la matriz A dividida por el determinante $|A|$ ($k=1, \ldots, n-1$). El determinante $|A^{-1}|$ es un número inverso del determinante $|A|$.

6.2.10. Por ejemplo, las matrices

$$A=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$$

no son semejantes.

6.2.12. $m(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son autovalores de la matriz A.

6.2.15. Son valores propios los elementos diagonales $a_{11}, \ldots, a_{nn}$.
6.2.18. $\lambda^2 - (2 \cos \alpha) \lambda + 1 = 0$.
6.2.19. $\lambda^3 + |a|^2 \lambda = 0$.
6.2.20. λ^{n+1}.
6.2.21. λ^n.

6.2.24. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Son vectores propios todos los vectores columna bidimensionales no nulos.

6.2.25. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Los vectores propios son de la forma $\alpha (1 \ 1+i)^T$, $\alpha \neq 0$.

6.2.26. $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$. Los autovectores para $\lambda = 1$ son de la forma $\alpha (1 \ 1 \ 1)^T$; para $\lambda = 2$ son de la forma $\alpha (1 \ 0 \ 1)^T$, para $\lambda = 3$, de la forma $\alpha (1 \ 1 \ 0)^T$; $\alpha \neq 0$.

6.2.27. $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$. Los vectores propios para $\lambda = 3$ son de la forma $\alpha (0 \ 1 \ -1)^T$; para $\lambda = 6$ son de la forma $\alpha (3 \ 4 \ -2)^T$, $\alpha \neq 0$.

6.2.28. $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$. Los vectores propios para $\lambda = 3$ son de la forma $\alpha (-7 \ 5 \ -6)^T + \beta (6 \ -3 \ 3)^T$ (α y β no son simultáneamente iguales a cero); para $\lambda = 6$ son de la forma $\alpha (1 \ 1 \ -3)^T$, donde $\alpha \neq 0$.

6.2.29. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Los vectores propios son de la forma $\alpha (1 \ 1 \ 0)^T + \beta (0 \ 1 \ 2)^T$, donde α y β no son simultáneamente nulos.

6.2.30. $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 3$. Los vectores propios para $\lambda = -3$ son de la forma $\alpha (1 \ -3 \ 3 \ -1)^T$, para $\lambda = -1$ son de la forma $\alpha = (1 \ -1 \ -1 \ 1)^T$, para $\lambda = 1$ son de la forma $\alpha (1 \ 1 \ -1 \ -1)^T$; para $\lambda = 3$ son de la forma $\alpha (1 \ -3 \ 3 \ -1)^T$, $\alpha \neq 0$.

6.2.31. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Los vectores priopos para $\lambda = 0$ son de la forma $\alpha (0 \ 1 \ 0 \ -1)^T$; para $\lambda = 2$ son de la forma $\alpha (0 \ 1 \ 0 \ 1)^T$, $\alpha \neq 0$.

6.2.32. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Los autovectores para $\lambda = 0$ son de la forma $\alpha (2 \ -1 \ 0 \ 0)^T + \beta (3 \ 0 \ 0 \ -1)^T$, para $\lambda = 2$, $\alpha (1 \ -1 \ 0 \ 1)^T + \beta (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$, α y β no son simultáneamente iguales a cero.

6.2.33. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 3$. Los vectores propios son de la forma $\alpha (1 \ 0 \ 0 \ -1)^T + \beta (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$, α y β no son simultáneamente iguales a cero.

6.2.35. a) No posee valores propios; b) $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$.

6.2.36. a) $\lambda_1 = 2$; b) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6.2.37. a) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$; b) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 2 + i$, $\lambda_4 = 2 - i$.

6.2.38. a) No posee valores propios; b) $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 1 + i$, $\lambda_4 = 1 - i$.

6.2.42. En el caso complejo la suma de multiplicidades algebraicas de los valores propios del operador es igual a la dimensión del espacio. En el caso real esto puede ser no correcto.

6.2.43. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{6} \end{Vmatrix}.$$

6.2.44. La matriz no tiene estructura simple.

6.2.45. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

6.2.46. La matriz no tiene estructura simple.

6.2.47. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -27 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix}.$

6.2.48. La matriz no tiene estructura simple.

6.2.52. $\lambda^n - 1$.

6.2.53. Sea ε un valor propio arbitrario de P, es decir, una raíz arbitraria de n-ésima potencia de la unidad. El autovector correspondiente a ε, con una exactitud hasta de carácter colineal, tiene la forma $(1 \ \varepsilon \ \varepsilon^2 \ \ldots \ \varepsilon^{n-1})^T$.

6.2.54. Según el 5.4.52 toda matriz circulante es un polinomio de la matriz P del problema 6.2.52. La matriz circulante de orden n se caracteriza por n números: $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Si se compone el polinomio $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}$, entonces serán valores propios de la matriz circulante los números $f(\varepsilon_1), \ldots, f(\varepsilon_n)$, donde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ son todas las raíces de n-ésima potencia de la unidad.

6.2.55. Los vectores propios para λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ son de la forma $\alpha(\lambda_i^{n-1} \lambda_i^{n-2} \ldots \lambda_i^2 \lambda_i 1)^T$, $\alpha \neq 0$.

6.2.57. Debe ser demostrado sólo el caso cuando λ_0 es el valor propio de A. Supongamos que su multiplicidad es igual a k. En este caso el rango de $A - \lambda_0 E$ es igual a $n - k$ (¡la matriz tiene estructura simple!); ya que el polinomio característico de la matriz $A - \lambda_0 E$ posee una raíz múltipla de k igual a cero, el coeficiente de λ^k de este polinomio es diferente de cero, por consiguiente, entre los menores principales de orden $n - k$ existe un menor principal no nulo.

6.2.59. $(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_m)$.

6.3.5. A es un operador escalar.

6.3.11. La afirmación recíproca no es correcta.

6.3.16. Los espacios invariantes no triviales son una recta con un vector director a (sobre la cual se induce el operador nulo) y un plano ortogonal a a. El operador inducido sobre este plano es un operador de rotación a 90°.

6.3.17. Los espacios M_k, $0 \leqslant k \leqslant n$ y el subespacio nulo.

6.3.19. Escribiendo otra vez la condición $B = P^{-1}AP$ en la forma $PB = AP$ e igualando en la relación matricial obtenida las primeras columnas vemos que b_{11} es el valor propio de A y la primera columna P es el vector propio que le corresponde. De aquí se deduce el procedimiento de construcción de la matriz de una transformación P: hallar un vector propio cualquiera de A y luego completarlo de un modo arbitrario hasta una matriz no singular.

6.3.24. Elijamos la base del espacio $e_1, \ldots, e_n$ de modo que los primeros vectores de esta base $e_1, \ldots, e_k$ constituyan una base de L. En este caso la matriz del operador A es de la forma

$$A_e = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{Vmatrix},$$

además, A_{11} es la matriz del operador inducido A/L en la base $e_1, \ldots, e_k$. Supongamos que A_{11} no tiene estructura simple y para cierto valor propio λ de multiplicidad algebraica p de esta matriz, $r_1 = r_{A_{11} - \lambda E_k} > k - p$. Supongamos que λ tiene la multiplicidad algebraica q como valor propio de A_{22}; en este caso $r_2 = r_{A_{22} - \lambda E_{n-k}} \geqslant (n - k) - q$. De este modo λ es el valor propio de A_e de multiplicidad $p + q$, pero

$$r_{A_e - \lambda E_n} \geqslant r_1 + r_2 > k - p + (n - k) - q = n - (p + q),$$

en contra de que A_e es una matriz de estructura simple.

6.3.33. El subespacio invariante bidimensional está tendido sobre los vectores $x = (0 \ 1 \ 1)^T$ e $y = (2 \ 1 \ 0)^T$.

6.3.36. La diagonal de la matriz está compuesta de valores propios del operador.

6.3.40. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.3.41. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.3.44. De acuerdo con los problemas 6.3.19 y 6.3.38 construyamos la matriz P que transforma A en la forma triangular en $n-1$ etapas. En este caso en la primera etapa tomemos como la primera columna de la matriz de transformación $P^{(1)}$ el autovector común de las matrices A y B. Entonces, $A^{(1)} = (P^{(1)})^{-1}AP^{(1)}$ y $B^{(1)} = (P^{(1)})^{-1}BP^{(1)}$ son de la forma

$$A^{(1)} = \begin{Vmatrix} \alpha & a \\ 0 & A_{n-1} \end{Vmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{Vmatrix} \beta & b \\ 0 & B_{n-1} \end{Vmatrix},$$

A_{n-1} y B_{n-1} son submatrices cuadradas de orden $n-1$. La matriz $P^{(2)}$

$$P^{(2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{Vmatrix}$$

se construye de modo que la primera columna P_{n-1} sea el autovector común de las matrices (conmutables) A_{n-1} y B_{n-1}. Siguiendo de este modo calculemos P como el producto de $P^{(1)}P^{(2)} \ldots P^{(n-1)}$, además, ambas matrices $P^{-1}AP$ y $P^{-1}BP$ son triangulares superiores.

6.3.45. Para los operadores conmutables A y B existe una base del espacio en la cual las matrices de ambos operadores son triangulares y de la misma forma.

6.3.48. Supongamos que la matriz A es semejante a la matriz triangular superior R y la matriz B, a la matriz triangular superior T. En este caso $A \times B$ es semejante a $R \times T$; esta última es también una matriz triangular superior, además, su diagonal principal está compuesta de todo tipo de productos $\lambda_i\mu_j$. De un modo análogo la matriz $A \times E_n + E_m \times B$ es semejante a la matriz triangular superior $R \times E_n + E_m \times T$ cuya diagonal principal está compuesta de todo tipo posible de sumas $\lambda_i + \mu_j$.

6.3.50. Elijamos una base del espacio $e_1, \ldots, e_n$ tal que los vectores $e_1, \ldots, e_k$ formen una base de L_1 y los vectores $e_{k+1}, \ldots, e_n$, una base de L_2. En este caso la matriz del operador A es casi diagonal

$$A_e = \begin{Vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{Vmatrix}.$$

Partamos de un modo correspondiente la matriz B_e del operador B:

$$B_e = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Vmatrix}.$$

De la condición $A_eB_e - B_eA_e = 0$ tenemos

$$A_{11}B_{12} - B_{12}A_{22} = 0,$$
$$A_{22}B_{21} - B_{21}A_{11} = 0.$$

Ahora del 6.3.49 se deduce que $B_{12} = 0$, $B_{21} = 0$.

6.3.51. Si A es semejante a la matriz triangular R, A_p es semejante a la matriz triangular R_p.

6.4.12. La base del subespacio principal para $\lambda = 0$ es el vector $(0 \ 1 \ -1)^T$. La base del subespacio principal para $\lambda = 1$ la forman los vectores $(1 \ 0 \ 1)^T$ y $(0 \ 1 \ 0)^T$.

6.4.13. El valor propio único es $\lambda = -1$. El subespacio principal coincide con el espacio aritmético tridimensional.

6.4.14. La base del subespacio radical para $\lambda = 2$ está compuesta de los vectores $(2\ -1\ 0\ 0)^T$, $(1\ 0\ 1\ 0)^T$, $(2\ 0\ 0\ 1)^T$. La base del subespacio principal para $\lambda = -2$ es el vector $(0\ 1\ 0\ -1)^T$.

6.4.15. La base del subespacio principal para $\lambda = -1$ está compuesta de los vectores $(1\ 1\ 0\ 0)^T$, $(0\ 0\ 1\ 1)^T$. La base del subespacio principal para $\lambda = 1$ está compuesta de los vectores $(3\ 1\ 0\ 0)^T$, $(0\ -2\ 3\ 1)^T$.

6.4.17. b) Supongamos que el índice del vector $(A - \lambda_j E)\,x$ es k, $k < h$. En este caso

$$(A - \lambda_i E)^k (A - \lambda_j E)\,x = 0 = (A - \lambda_j E)^k (A - \lambda_i E)^h\,x.$$

Por eso el vector no nulo $(A - \lambda_i E)^h x$ es un vector propio para el valor propio λ_j, $\lambda_j \neq \lambda_i$, lo que es imposible, porque los subespacios principales se intersecan solamente por el vector nulo;

c) de un modo análogo a b) mostraremos que para todo número α diferente de λ_i el índice del vector $(A - \alpha E)\,x$ es el mismo que el del vecto x.

6.4.22. La célula de Jordan transpuesta de orden n para el número λ_0.

6.4.23. La base canónica está compuesta, por ejemplo, de los vectores $e_1 = (4\ -4)^T$, $e_2 = (0\ 1)^T$. La forma de Jordan es:

$$J = \begin{Vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix}.$$

6.4.24. $e_1 = (1\ 1\ -1)^T$, $e_2 = (-4\ -5\ 6)^T$, $e_3 = (0\ 0\ 1)^T$;
$$J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

6.4.25. $e_1 = (1\ -1\ 0\ 0)^T$, $e_2 = (0\ 1\ -1\ 0)^T$, $e_3 = (0\ 0\ 1\ -1)^T$, $e_4 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$;
$$J = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

6.4.26. $e_1 = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)^T$, $e_2 = (3\ 2\ 1\ 0\ -1)^T$, $e_3 = (3\ 1\ 0\ 0\ 1)^T$, $e_4 = (1\ 0\ 0\ 0\ -1)^T$, $e_5 = (0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T$;
$$J = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.27.
$$\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.28.
$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.29. $\begin{Vmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 9 \end{Vmatrix}$

6.4.30. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

6.4.31. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$

6.4.32. $\begin{Vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{Vmatrix}.$

6.4.33. Será forma de Jordan una célula de Jordan de tipo $n+1$ referente al número 0. La base canónica es $1,\ t,\ \frac{1}{2!}t^2,\ \dots,\ \frac{1}{n!}t^n$.

6.4.39. Los dos son iguales a $(\lambda-\lambda_0)^n$, donde n es la dimensión del espacio.

6.4.40. Si

$$\alpha_1 (A-\lambda_0 E)^k x_1 + \dots + \alpha_p (A-\lambda_0 E)^k x_p = 0,$$

entonces

$$(A-\lambda_0 E)^k (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p) = 0,$$

de donde (ya que $k < l$)

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = 0,$$

es decir, $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.

Supongamos ahora que $y = \alpha_1 (A-\lambda_0 E)^k x_1 + \dots + \alpha_p (A-\lambda_0 E)^k x_p \in \in H_{l-k-1}$; en este caso

$$0 = (A-\lambda_0 E)^{l-k-1} y = (A-\lambda_0 E)^{l-1} (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p);$$

por consiguiente,

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = 0$$

y $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.

6.4.42. Aplicando a los dos miembros de la igualdad

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p + \beta_1 (A-\lambda_0 E) x_1 + \dots + \beta_p (A-\lambda_0 E) x_p + \dots$$
$$\dots + \gamma_1 (A-\lambda_0 E)^{l-1} x_1 + \dots + \gamma_p (A-\lambda_0 E)^{l-1} x_p = 0 \qquad (\alpha)$$

el operador $(A-\lambda_0 E)^{l-1}$, obtendremos

$$(A-\lambda_0 E)^{l-1}(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_p x_p)=0,$$
de donde $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$. De un modo análogo, aplicando a (α) el operador $(A-\lambda_0 E)^{l-2}$ mostremos que $\beta_1 = \ldots = \beta_p = 0$, etc.

6.4.44. La base canónica, por ejemplo: la forma de Jordan:

$$e_1=(-2\ 2\ 1\ \ 2)^T,\quad e_2=(0\ 0\ 1\ \ 1)^T,\quad e_3=(1\ 2\ 1\ -1)^T,\quad e_4=(1\ 1\ 0\ \ 0)^T;\qquad J=\begin{Vmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{Vmatrix}.$$

6.4.45. $$e_1=(0\ 0\ 101\ 0)^T,\quad e_2=(0\ 1\ 0\ 0)^T,\quad e_3=(101\ 0\ 0\ 0)^T,\quad e_4=(0\ 0\ 0\ 1)^T;\qquad J=\begin{Vmatrix}99&1&0&0\\0&99&0&0\\0&0&99&1\\0&0&0&99\end{Vmatrix}.$$

6.4.46. $$\begin{aligned}e_1&=(1\ \ 2\ \ 1\ 0\ 0\ 0)^T,\\ e_2&=(-2\ -3\ -1\ 0\ 0\ 0)^T,\\ e_3&=(1\ \ 0\ \ 0\ 0\ 0\ 0)^T,\\ e_4&=(0\ \ 0\ \ 0\ 1\ 2\ 1)^T,\\ e_5&=(0\ \ 0\ \ 0\ 1\ 1\ 0)^T,\\ e_6&=(0\ \ 0\ \ 0\ 1\ 0\ 0)^T,\end{aligned}\qquad J=\begin{Vmatrix}-1&1&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0&-1\end{Vmatrix}.$$

6.4.47. $$\begin{aligned}e_1&=(0\ 0\ 0\ \ 0\ -1\ \ 0)^T,\\ e_2&=(1\ 0\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_3&=(0\ 0\ 0\ -3\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_4&=(0\ 1\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T,\\ e_5&=(0\ 0\ 0\ \ 0\ \ 0\ -5)^T,\\ e_6&=(0\ 0\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T;\end{aligned}\qquad J=\begin{Vmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&2\end{Vmatrix}.$$

6.4.48. La forma de Jordan está compuesta de dos células de Jordan de orden k referentes al número 0. La base canónica es, por ejemplo, 1, $\frac{1}{2!}t^2$, $\frac{1}{4!}t^4$, $\ldots$, $\frac{1}{(2k-2)!}t^{2k-2}$, t, $\frac{1}{3!}t^3$, $\frac{1}{5!}t^5$, $\ldots$, $\frac{1}{(2k-1)!}t^{2k-1}$.

6.4.50. $n=(m_l-m_{l-1})\,l+2\,(m_{l-1}-m_l-m_{l-2})\,(l-1)=p_1 l+(p_2-p_1)\,(l-1)$. La forma de Jordan está compuesta de p_1 células de orden l y de p_2-p_1 células de orden $l-1$.

6.4.51. $$e_1=(1\ -2\ \ 1)^T,\quad e_2=(1\ \ 0\ \ 0)^T,\quad e_3=(0\ \ 1\ -1)^T,\qquad J=\begin{Vmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&3\end{Vmatrix}.$$

6.4.52. $$e_1=(1\ 1\ 1\ \ 1)^T,\quad e_2=(1\ 0\ 0\ \ 0)^T,\quad e_3=(0\ 1\ 1\ \ 0)^T,\quad e_4=(0\ 0\ 1\ -1)^T;\qquad J=\begin{Vmatrix}4&1&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{Vmatrix}.$$

6.4.53. $e_1=(24\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$,
$e_2=(\ 5\ 7\ 8\ 0\ 0)^T$,
$e_3=(\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T$,
$e_4=(\ 4\ 6\ 0\ 0\ 0)^T$,
$e_5=(\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}.$$

6.4.54. $e_1=(1\quad 1\ 1\quad 1\ 1)^T$,
$e_2=(0\ -1\ 0\quad 0\ 0)^T$,
$e_3=(1\quad 1\ 0\quad 1\ 1)^T$,
$e_4=(0\quad 0\ 0\ -1\ 0)^T$,
$e_5=(0\quad 0\ 0\quad 0\ 1)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.55. La forma de Jordan está compuesta de dos células de Jordan referentes al número 0; una de ellas es de orden $k+1$ y la otra es de orden k. La base canónica es

$$1,\ \frac{1}{2!}t^2,\ \frac{1}{4!}t^4,\ \ldots,\ \frac{1}{2k!}t^{2k},\ t,\ \frac{1}{3!}t^3,\ \frac{1}{5!}t^5,\ \ldots,\ \frac{1}{(2k-1)!}t^{2k-1}.$$

6.4.56. La forma de Jordan está compuesta de p_1 células de orden t, p_2-p_1 células de orden $t-1$, en general, de $p_{t-k+1}-p_{t-k}$ células de orden k, $0<k<t$.

6.4.58. No, pues sería

$$m_4-m_3=2>m_3-m_2=1.$$

6.4.59. $e_1=(2\ 2\ -2\ -2)^T$,
$e_2=(0\ 1\quad 1\quad 0)^T$,
$e_3=(0\ 0\quad 0\quad 1)^T$,
$e_4=(1\ 0\quad 0\quad 1)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.60. $e_1=(-3\ 1\ 1\quad 1\quad 1)^T$,
$e_2=(-2\ 0\ 1\quad 1\quad 1)^T$,
$e_3=(\ 1\ 0\ 0\quad 0\quad 0)^T$,
$e_4=(\ 1\ 0\ 0\ -1\quad 0)^T$,
$e_5=(\ 1\ 0\ 0\quad 0\ -1)^T$,

$$J=\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

6.4.61. $e_1=(24\ -12\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0)^T$,
$e_2=(\ 6\quad 0\ -2\quad 8\ -4\quad 0)^T$,
$e_3=(\ 1\quad 0\quad 0\quad 3\quad 0\ -1)^T$,
$e_4=(\ 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0)^T$,
$e_5=(\ 3\quad 0\ -1\ -8\quad 4\quad 0)^T$,
$e_6=(\ 2\quad 0\quad 0\ -3\quad 0\quad 1)^T$;

$$J=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

6.4.62. $e_1=(-2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0)^T$,
$e_2=(\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0)^T$,
$e_3=(\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$,
$e_4=(\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 1)^T$,
$e_5=(\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$,
$e_6=(\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$,

$$J=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

6.4.63. $e_1=(-2\ \ 2\ \ 2)^T,$
$e_2=(1\ \ 1\ \ -1)^T,$
$e_3=(0\ \ 1\ \ 1)^T;$ $\quad J=\left\|\begin{matrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{matrix}\right\|.$

6.4.64. $e_1=(1\ \ 1\ \ 0)^T,$
$e_2=(0\ \ 1\ \ 1)^T,$
$e_3=(-1\ \ 2\ \ 2)^T;$ $\quad J=\left\|\begin{matrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{matrix}\right\|.$

6.4.65. $e_1=(-4\ \ -3\ \ -4)^T,$
$e_2=(2\ \ 2\ \ -1)^T,$
$e_3=(1\ \ 0\ \ 1)^T;$ $\quad J=\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{matrix}\right\|.$

6.4.66. $e_1=(1\ \ -1\ \ 2)^T,$
$e_2=(0\ \ 0\ \ -1)^T,$
$e_3=(0\ \ 1\ \ 0)^T;$ $\quad J=\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|.$

6.4.67. $e_1=(3\ \ 3\ \ -3\ \ -3)^T,$
$e_2=(1\ \ 0\ \ -1\ \ 0)^T,$
$e_3=(-3\ \ -3\ \ -3\ \ -3)^T,$
$e_4=(1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^T;$ $\quad J=\left\|\begin{matrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{matrix}\right\|.$

6.4.68. $e_1=(2\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T,$
$e_2=(-21\ \ -10\ \ 0\ \ 0)^T,$
$e_3=(0\ \ 0\ \ 3\ \ -2)^T,$
$e_4=(8\ \ 3\ \ -1\ \ 1)^T;$ $\quad J=\left\|\begin{matrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$

6.4.69. $e_1=(-2\ \ -1\ \ 0\ \ 0)^T,$
$e_2=(1\ \ 0\ \ -2\ \ 3)^T,$
$e_3=(0\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^T,$
$e_4=(0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T;$ $\quad J=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{matrix}\right\|.$

6.4.70. $e_1=(2\ \ -2\ \ 2\ \ -2)^T,$
$e_2=(1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^T,$
$e_3=(0\ \ -1\ \ 0\ \ 1)^T,$
$e_4=(0\ \ 0\ \ 1\ \ -1)^T;$ $\quad J=\left\|\begin{matrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{matrix}\right\|.$

6.4.71. Cada célula se reemplaza por una célula transpuesta; las células mismas se dispondrán sobre la diagonal en el orden inverso.

6.4.72. En la forma de Jordan del operador A los elementos diagonales $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ se reemplazan por: a) $\lambda_1-\lambda_0, \ldots, \lambda_m-\lambda_0$; b) $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_m$.

6.4.75. La forma de Jordan del operador A^2 puede ser obtenida a partir de la forma de Jordan del operador A del modo siguiente: en cada célula referente a $\lambda \neq 0$ reemplazar λ por λ^2; cada célula de orden k referente a 0 reemplazar por dos células de orden l, si $k=2l$, y por dos células de órdenes $l+1$ y l respectivamente, si $k=2l+1$.

6.4.77. De la condición $A^2=E$ se deduce que pueden ser autovalores del operador A solamente los números 1 y -1. Verificando la igualdad $J^2=E$ para la forma de Jordan J del operador A hallamos que J es una matriz diagonal, es decir, A es un operador de estructura simple. En este caso ambos números, 1 y -1, deben ser autovalores de A, pues de otro modo sería $A=-E$ o bien $A=E$. Designando por L_1 y L_2 los subespacios propios del operador A

referentes a 1 y a -1, respectivamente, obtendremos que A es un operador de reflexión en L_1 paralelamente a L_2.

6.4.79. El defecto del operador $A - \lambda_0 E$ puede ser definido con ayuda de la matriz $J - \lambda_0 E$, donde J es la forma de Jordan del operador A. En este caso cada célula J referente a λ_0 pasa a la célula $J - \lambda_0 E$ referente a 0; el defecto de esta última es igual a 1. Las demás células $J - \lambda_0 E$ son no singulares y por eso el defecto $J - \lambda_0 E$ es igual al número de células de Jordan J referentes a λ_0.

6.4.82. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

6.4.83. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

6.4.84. $\begin{Vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{Vmatrix}$.

6.4.85. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{Vmatrix}$.

6.4.86. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 6.4.87. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

6.4.88. La forma de Jordan está compuesta de una célula de orden $n + 1$ referente al número 0.

6.4.89. Las formas de Jordan de los dos operadores coinciden y están compuestas de tres células de Jordan de orden 3 referentes al número 0.

6.4.91. Entre las matrices A, B, C no hay dos que sean semejantes.

6.4.92. A y C son semejantes entre sí y no son semejantes a B.

6.4.93. A y B son semejantes entre sí y no son semejantes a C.

6.4.95. Si λ es un autovalor de A, distinto de 1 y de -1, entonces, $1/\lambda$ es igualmente un autovalor; además, a los dos se refiere el mismo número de células de Jordan de respectivos órdenes iguales.

6.4.98. A cada valor propio de la forma de Jordan de la matriz le debe corresponder una sola célula de Jordan.

6.4.100. Escibamos la matriz casi diagonal de oden mn en cuya diagonal se repite m veces la matriz J. En este caso la forma de Jordan de las matrices $A \times B$ y $A \times E_n + E_m \times B$, respectivamente, se obtiene del modo siguiente: a) para cada valor propio λ_i de la matriz A no nulo multiplicamos los elementos diagonales de la i-ésima célula J por λ_i; pero si $\lambda_i = 0$ reemplazamos la célula correspondiente de J por la matriz nula; b) a todos los elementos diagonales de la i-ésima célula de J le sumamos λ_i. Para los operadores G_{AB} y F_{AB}, respectivamente, la forma de Jordan es la misma.

6.4.101. Si α es la raíz primitiva de n-ésima potencia de la unidad, $r = \sqrt[n]{\varepsilon}$, la forma de Jordan de A será la siguiente:

$$\begin{Vmatrix} 1+r & & & & 0 \\ & 1+r\alpha & & & \\ & & 1+r\alpha^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1+r\alpha^{n-1} \end{Vmatrix}.$$

7.1.6. Si Λ es una matriz diagonal tal que $\lambda_{ii} = (e_i, e_i)$, entonces

$$(A^*)_e = \Lambda^{-1} (A_e)^* \Lambda,$$

donde $(A_e)^*$ es la matriz conjugada de A_e. En particular, si las longitudes de todos los vectores e_i son las mismas, entonces $(A^*)_e = (A_e)^*$.

7.1.7. Los elementos a_{ij} de la matriz A_e del operador A deben verificar las igualdades

$$a_{ij} = (Ae_j, f_i);$$

de un modo análogo los elementos a^*_{ij} de la matriz A^*_f del operador conjugado A^* es válido:

$$a^*_{ij} = (A^* f_j, e_i).$$

Por eso

$$a^*_{ij} = \overline{a}_{ji}.$$

7.1.8. Todo operador de un espacio unidimensional es la multiplicación de cada vector del espacio por un número fijo (para el operador dado) α. Si el espacio es unitario, el operador conjugado es la multiplicación por un número conjugado $\overline{\alpha}$. En un espacio euclídeo unidimensional todo operador coincide con su conjugado.

7.1.9. Rotación a un ángulo α en el sentido opuesto.

7.1.10. $A^* = -A$.

7.1.11. a) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$;

b) $\dfrac{1}{2}\begin{Vmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;

c) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{Vmatrix}$.

7.1.12. a) $\begin{Vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{Vmatrix}$; b) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$;

c) $\begin{Vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3/4 \\ 0 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.1.13. a) $\begin{Vmatrix} 0 & -5/2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 15/2 & 0 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -5/4 & 0 & 5/4 \\ -2 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$;

c) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.1.19. En el caso complejo $\beta_i = \operatorname{tr}(A^*_i B)$.

7.1.20. Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormalizada del espacio X, tomemos como vector f el vector cuyas coordenadas en esta base son los números $\overline{f(e_1)}, \ldots, \overline{f(e_n)}$.

7.1.25. A^* es un operador de proyección sobre el plano $x + y + z = 0$ paralelamente al eje Oz.

7.1.26. a) La base del núcleo es el polinomio t^2; la base de la imagen son los polinomios t, t^2; b) la base del núcleo es el polinomio $3t^2 - 2$; la base de la imagen son los polinomios t, $3t^2 - 2$; c) la base del núcleo es el polinomio $3t^2 - 1$: la base de la imagen son los polinomios t, $3t^2 - 1$.

7.1.32. La inclusión $T_{A+B} \subset T_A + T_B$ se cumple siempre. Mostremos que en los datos del problema $T_{A+B} = T_A + T_B$, para lo cual es suficiente mostrar que $T_A \subset T_{A+B}$ y $T_B \subset T_{A+B}$.

Sea $x \in T_{B^*}$; en este caso $Ax = 0$ (de acuerdo con la condición $AB^* = 0$) y $(A + B)x = Bx$. Si x recorre T_{B^*}, Bx recorre T_B, por lo que $T_B \subset T_{A+B}$. De un modo análogo escribiendo de nuevo la condición $AB^* = 0$ bajo la forma $BA^* = 0$ se deduce que $T_A \subset T_{A+B}$.

De acuerdo con la segunda condición del problema y del problema 7.1.31 la suma $T_{A+B} = T_A + T_B$ es ortogonal, por eso

$$r_{A+B} = r_A + r_B.$$

De un modo análogo se puede mostrar que $T_{(A+B)^*} = T_{A^*} + T_{B^*}$, de donde pasando a los complementos ortogonales obtenemos la segunda afirmación del problema.

7.1.34. El subespacio nulo y las cápsulas lineales de los sistemas de polinomios t^k, t^{k+1}, $\ldots$, t^n $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

7.1.35. El subespacio buscado viene dado por la condición

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = 0.$$

7.1.36. El subespacio buscado se da por la condición

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt = 0.$$

7.1.39. a) 1, t, t^2; b) $1/\sqrt{3}$, $t/\sqrt{2}$, $(3t^2-2)/\sqrt{6}$; c) $1/\sqrt{2}$, $\sqrt{3/2}\,t$, $\sqrt{5/8}\,(3t^2-1)$.

7.1.43. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores del operador A, los autovalores del operador A^* son $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$.

7.1.44. Sea k la dimensión de K_λ. En este caso, para todo vector x de K_λ es válido: $(A - \lambda E)^k x = 0$. Si y es un vector arbitrario de K_μ^*, entonces

$$0 = ((A - \lambda E)^k x,\ y) = (x,\ (A^* - \overline{\lambda} E)^k y).$$

Sobre el subespacio invariante K_μ^* el operador $A^* - \overline{\lambda} E$ es no singular. Por eso la igualdad obtenida significa que $K_\lambda \perp K_\mu^*$.

7.1.45. La forma de Jordan del operador A^* se obtiene de la forma de Jordan de A reemplazando los elementos diagonales por números complejos conjugados.

7.1.46. La base canónica del operador de derivación consta, por ejemplo, de los polinomios 2, $2t$, t^2; la base canónica del operador conjugado se compone de los polinomios t^2, $t/2$, $1/2$.

7.1.47. Supongamos que el orden dado de los valores propios es $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_n}$ y que hace falta construir la forma de Schur superior. En este caso, como vector e_n tomemos el autovector normalizado del operador A^* referente al valor propio $\overline{\lambda}_{i_n}$. Examinemos sobre el complemento ortogonal de e_n, que será invariante respecto a A, el operador inducido A_1 y su operador conjugado A_1^*. Tomemos como e_{n-1} el autovector normalizado de A_1^* referente a $\overline{\lambda}_{i_{n-1}}$, luego examinamos el complemento ortogonal de la cápsula lineal de los vectores e_{n-1} y e_n, etc. Se puede efectuar esta construcción en el «sentido inverso» tomando como e_1 el autovector normalizado de A referente a λ_{i_1}; examinar el complemento ortogonal de e_1 invariante respecto a A^*, etc.

7.2.20. En un espacio euclídeo la afirmación indicada no es válida. Se puede dar como un ejemplo contrario todo operador que no posee valores propios y no es un operador normal.

7.2.22. Sí, es así.

7.2.29. No, si todos los valores propios del operador son simples; sí, cuando por lo menos un valor es múltiplo.

7.2.30. $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$. Componen la base, por ejemplo, los vectores $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ -1)^T$.

7.2.31. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3i$, $\lambda_3 = -3i$. Componen la base, por ejemplo, los vectores $e_1 = \frac{1}{3}(2\ \ 1\ \ -2)^T$, $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4 - 3i\ \ \ 2 + 6i\ \ \ 5)^T$, $e_3 = \frac{1}{3\sqrt{10}} \times$ $\times (4 + 3i\ \ 2 - 6i\ \ 5)^T$.

7.2.32. $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = 2 - i$, $\lambda_3 = 3 - i$. La base está compuesta de los vectores $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\ \ 2\ \ -1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 0\ \ 1)^T$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1\ \ 1\ \ 1)^T$.

7.2.33. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$. La base está compuesta de los vectores $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\ \ 0\ \ 1\ \ -1)^T$, $e_3 = \frac{1}{2}(1\ \ -1\ \ i\ \ i)^T$, $e_4 = \frac{1}{2}(1\ \ -1\ \ -i\ \ -i)^T$.

7.2.34. No. El operador de derivación no es un operador de estructura simple.

7.2.35. No, si $a \neq 0$. Para $a = 0$ se obtiene un operador idéntico.

7.2.37. Si $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ son vectores arbitrarios de R_3, el producto escalar puede ser dado por la fórmula:

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + 2\alpha_2\beta_3 + \\ + \alpha_3\beta_1 + 2\alpha_3\beta_2 + 3\alpha_3\beta_3.$$

7.2.41. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$,
$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$.

7.2.42. Por ejemplo, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\ -2\ 1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 0\ -1)^T$,
$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^T$.

7.2.44. Sean distintos en módulo todos los valores propios del operador $A: |\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$, y sea $e_1, \ldots, e_n$ la base ortonormalizada de autovectores correspondiente. La matriz del operador AB en esta base es normal e igual al producto de las matrices A_e y B_e. Igualando (conforme al 7.2.12) las sumas de cuadrados de los módulos de los elementos de la primera fila y de la primera columna de la matriz A_eB_e obtenemos

$$|\lambda_1|^2(|b_{11}|^2+|b_{12}|^2+\ldots+|b_{1n}|^2)=$$
$$=|\lambda_1|^2|b_{11}|^2+|\lambda_2|\ |b_{21}|^2+\ldots+|\lambda_n|\ |b_{n1}|^2.$$

Puesto que B_e es también una matriz normal, entonces,
$|b_{11}|^2+|b_{21}|^2+\ldots+|b_{n1}|^2=|b_{11}|^2+|b_{12}|^2+\ldots+|b_{1n}|^2$.
Estas igualdades son posibles a un mismo tiempo solamente cuando

$$b_{21}=\ldots=b_{n1}=b_{12}=\ldots=b_{1n}=0.$$

De un modo análogo se muestra que los otros elementos fuera de la diagonal de la matriz B son iguales a cero. De este modo B_e es una matriz diagonal y, por consiguiente, los operadores A y B son conmutables.

7.2.45. Razonando del mismo modo que en la demostración del problema 7.2.44, mostremos que en una base ortonormal de autovectores del operador A (si éste cumple el planteamiento del problema) la matriz del operador B es casi diagonal, además, sus células diagonales de orden >1 corresponden a los autovalores múltiplos del operador A. De esto se infiere que las matrices de los operadores son conmutables.

7.2.47. Todo vector para el cual se alcanza este máximo es un vector propio del operador A, referente al valor propio máximo en módulo.

7.2.49. No. Por ejemplo, para el operador unitario U la relación $|Ux|/|x|$ es igual a uno para cualquier vector x no nulo.

7.3.4. Los operadores de multiplicación por un número igual a la unidad en módulo.

7.3.6. No. El operador A es singular.

7.3.8. a) Sí; b) no.

7.3.10. No, si el operador no es idéntico.

7.3.12. a) El subespacio propio para $\lambda = 1$ coincide con el conjunto de todos los polinomios pares; el subespacio propio para $\lambda = -1$ coincide con el conjunto de todos los polinomios impares; c) subespacio propio para $\lambda = 1$ está tendido sobre el sistema de polinomios $t^n + 1$, $t^{n-1} + t$, ...; el subespacio propio para $\lambda = -1$ está tendido sobre los polinomios $t^n - 1$, $t^{n-1} - t$, ... Si $n = 2k - 1$, los dos subespacios son de dimensión k; pero si $n = 2k$, la dimensión del primer subespacio es $k + 1$ y del segundo, k.

7.3.13. El producto escalar de los polinomios $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ y $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ puede ser calculado mediante la fórmula

$$\begin{aligned}(f, g) = 3a_0b_0 - 2a_0b_1 - 2a_0b_2 \\ - 2a_1b_0 + 2a_1b_1 + a_1b_2 \\ - 2a_2b_0 + a_2b_1 + 2a_2b_2\end{aligned}$$

7.3.16. $Q_e = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}$.

7.3.18. Sí, este operador será ortogonal.

7.3.21. Sean A el operador dado y $e_1, \ldots, e_n$, una base ortonormalizada arbitraria. Según los datos, los vectores $Ae_1, \ldots, Ae_n$ son ortogonales de dos en dos. Mostremos que ellos son de misma longitud. Si, por ejemplo, $\alpha_1 = |Ae_1| \neq \alpha_2 = |Ae_2|$, los vectores $e_1 + e_2$ y $e_1 - e_2$ son ortogonales y los vectores $A(e_1 + e_2)$ y $A(e_1 - e_2)$ no lo son:

$$(A(e_1+e_2),\ A(e_1-e_2)) = (Ae_1,\ Ae_1) - (Ae_2,\ Ae_2) = \alpha_1^2 - \alpha_2^2.$$

Por eso $|Ae_i| = \alpha$ para todos los $i = 1, \ldots, n$ y en este caso $A = \alpha U$, donde U es un operador unitario que transforma los vectores e_i en vectores $(1/\alpha)\,Ae_i$.

7.3.34. La permutación de las filas y las columnas de la matriz en el orden inverso es una transformación unitariamente semejante.

7.3.37. $\psi_1 - \psi_2 = (\psi_3 - \psi_4) + 2k\pi$.

7.3.38. $\psi_2 = -\psi_3 = \arg a_{ii} - \arg a_{ji}$,

$$\cos\varphi = \frac{|a_{ii}|}{\sqrt{|a_{ii}|^2 + |a_{ji}|^2}}, \quad \operatorname{sen}\varphi = -\frac{|a_{ji}|}{\sqrt{|a_{ii}|^2 + |a_{ji}|^2}}.$$

7.3.40. Multipliquemos a la izquierda la matriz dada A por la sucesión de matrices unitarias elementales $T_{12}, T_{13}, \ldots, T_{1n}, T_{23}, \ldots, T_{n-1,n}$ para anular sucesivamente todos los elementos subdiagonales. La matriz triangular superior obtenida es uno de los factores de la descomposición buscada, mientras que el otro es el producto $T_{12}^*T_{13}^* \ldots T_{n-1,n}^*$.

7.3.44. La longitud del vector w debe ser igual a la unidad.

7.3.46. Los autovalores son iguales a 1 y a -1. En este caso $\lambda = -1$ es un autovalor simple y los autovectores que le corresponden son colineales con w. Los vectores propios para $\lambda = 1$ (y el vector nulo) forman el complemento ortogonal de w.

7.3.47. El determinante es igual a -1.

7.3.49. $w = \left(-\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\ \cos\frac{\varphi}{2}\right)^T$.

7.3.50. El producto Hx debe ser calculado mediante la fórmula:

$$Hx = x - 2(x, w)\,w.$$

El producto escalar (x, w) se calcula según (7.1.4).

7.3.51. $w = \frac{1}{|x - ke_1|}(x - ke_1)$, donde $|k| = |x| = (x, x)^{1/2}$, para lo demás la elección de k es arbitraria.

7.3.52. Elijamos según la matriz A de orden n dada, en virtud del 7.3.51, a matriz H_1 de tal modo que $A_1 = H_1A$ sea de la forma:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} k & \times \ldots \times \\ 0 & \widetilde{A}_1 \end{Vmatrix};$$

$\widetilde{A}$ es la submatriz de orden $n-1$. Construyamos ahora la matriz H_2:

$$H_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \widetilde{H}_2 \end{Vmatrix},$$

donde $\widetilde{H}_2$ es la matriz de reflexión de orden $n-1$ elegida de tal modo que todos los elementos subdiagonales de la primera columna de la matriz $\widetilde{H}_2\widetilde{A}_1$ sean iguales a cero. En este caso las primeras dos columnas de la matriz H_2H_1A coinciden con las columnas de la matriz triangular. Siguiendo así, después de $n-1$ pasos se obtiene una matriz triangular superior.

El factor unitario de la descomposición buscada es el producto $H_1H_2 \ldots$ $\ldots H_{n-1}$.

7.3.54. Si designamos por $\widetilde{a}_1$ el vector columna de $(a_{21}a_{31} \ldots a_{n1})^T$, entonces como H hay que tomar la matriz de tipo

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \widetilde{H} \end{Vmatrix},$$

donde $\widetilde{H}$ es la matriz de reflexión que hace pasar $\widetilde{a}_1$ a un vector colineal con la columna unitaria e_1 de orden $n-1$. En este caso la misma H será también una matriz de reflexión.

7.3.55. Para todo operador existe una base ortonormalizada del espacio en la cual la matriz superior (inferior) de este operador es casi triangular.

7.4.7. En el caso complejo éstos son operadores de multiplicación por un número real. Todos los operadores lineales que actúan en un espacio euclídeo unidimensional son simétricos.

7.4.11. Sí.

7.4.15.
$$S_e = \frac{1}{9}\begin{Vmatrix} 17 & 5 & -1 \\ 5 & -7 & 5 \\ -1 & 5 & 17 \end{Vmatrix}.$$

7.4.24. $H = 0$.

7.4.34. Sea L_k un subespacio arbitrario de dimensión k. Junto con L_k examinemos la cápsula lineal M_{n-k+1} de los vectores $e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$. La intersección de L_k y M_{n-k+1} es por lo menos unidimensional; sea x_0 el vector no nulo de esta intersección. Entonces, según (7.4.3),

$$\frac{(Hx_0, x_0)}{(x_0, x_0)} \leqslant \lambda_k,$$

por eso

$$\min_{\substack{x\neq 0\\ x\in L_k}} \frac{(Hx, x)}{(x, x)} \leqslant \lambda_k$$

y resulta que

$$\max_{L_k} \min_{\substack{x\neq 0\\ x\in L_k}} \frac{(Hx, x)}{(x, x)} \leqslant \lambda_k.$$

La cápsula lineal de dimensión k de los vectores $e_1, \ldots, e_k$ muestra que la igualdad en la relación (7.4.4) se logra.

La relación (7.4.5) se demuestra análogamente.

7.4.35. Sin limitar la generalidad se puede suponer que la submatriz H_{n-1} se encuentra en la primera fila y la primera columna de la matriz H. Sea $f_1, \ldots, f_{n-1}$ una base ortonormalizada de los autovectores de la matriz H_{n-1}, relativos a $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, respectivamente, donde $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_{n-1}$. Conforme a (7.4.3)

$$\max_{\substack{y\neq 0\\ y\in \widetilde{M}_{n-k}}} \frac{(H_{n-1}y, y)}{(y, y)} = \mu_k = \min_{\substack{y\neq 0\\ y\in \widetilde{M}_k}} \frac{(H_{n-1}y, y)}{(y, y)},$$

donde $\widetilde{M}_k$ está tendido sobre $f_1, \ldots, f_k$, en tanto que $\widetilde{M}_{n-k}$ lo está sobre $f_k, \ldots, f_{n-1}$. Ahora asignemos a cada columna y de dimensión $(n-1)$ un vector columna x de dimensión n tal que

$$x=\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso

$$\frac{(H_{n-1}y,\ y)}{(y,\ y)}=\frac{(Hx,\ x)}{(x,\ x)}$$

para los vectores correspondientes y y x. A los subespacios $\widetilde{M}_{n-k}$ y $\widetilde{M}_k$ les corresponderán en el espacio de dimensión n M_{n-k} y M_k de la misma dimensión. Por eso, del teorema de Courant-Fisher se desprende que

$$\lambda_{k+1}\leqslant\mu_k\leqslant\lambda_k.$$

7.4.36. Un valor propio positivo y un valor propio negativo.

7.4.40. Para todo operador hermitiano existe una base ortonormalizada del espacio en la cual la matriz de este operador es tridiagonal.

7.4.42. $f_0(\lambda)=1,\ f_1(\lambda)=\lambda,\ f_2(\lambda)=\lambda^2-1,\ f_3(\lambda)=\lambda^3-2\lambda,\ f_4(\lambda)=$ $=\lambda^4-3\lambda^2+1,\ f_5(\lambda)=\lambda^5-4\lambda^3+3\lambda.$

7.4.44. Realicemos la inducción de acuerdo con el número de polinomios en el sistema $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \ldots, f_k(\lambda)$. Sea $k=1$. En este caso $f_1(\mu)$ es superior o inferior a cero según que el número μ sea mayor o menor que la raíz única $\lambda_1^{(1)}$ del polinomio $f_1(\lambda)$. En el primer caso la sucesión

$$f_0(\mu)=1,\ f_1(\mu)$$

no admite el cambio de signos y en el último caso lo admite.

Supongamos que la afirmación está demostrada para todos los $k\leqslant r$. Los valores de los polinomios $f_r(\lambda)$ y $f_{r+1}(\lambda)$ en el punto μ pueden ser calculados mediante las fórmulas:

$$f_r(\mu)=\prod_{j=1}^{r}(\mu-\lambda_j^{(r)}),\quad f_{r+1}(\mu)=\prod_{j=1}^{r+1}(\mu-\lambda_j^{(r+1)}).$$

De aquí se ve que el signo de cada uno de los números $f_r(\mu), f_{r+1}(\mu)$ se define por el número de paréntesis negativos del producto correspondiente. El número de raíces del polinomio $f_{r+1}(\lambda)$, situadas a la derecha del punto μ, es igual o es en uno más grande que el número de raíces del polinomio $f_r(\lambda)$ (véase el 7.4.43, b)). En el primer caso el signo de $f_{r+1}(\mu)$ coincide con el signo de $f_r(\mu)$ y la sucesión

$$f_0(\mu),\ f_1(\mu),\ \ldots,\ f_r(\mu),\ f_{r+1}(\mu)$$

admite el mismo número de cambios de signos que la sucesión

$$f_0(\mu),\ f_1(\mu),\ \ldots,\ f_r(\mu).$$

En el segundo caso los signos de $f_{r+1}(\mu)$ y $f_r(\mu)$ son opuestos y la primera sucesión tiene un cambio de signos más que la segunda.

7.4.45. Del mismo modo que en el 7.4.44 efectuemos la demostración por medio de la inducción. Sea primeramente $k=1$. Si $\mu=\lambda_1^{(1)}$, al valor nulo de $f_1(\mu)$ se le atribuye el mismo signo que a $f_0(\mu)=1$ y la sucesión

$$f_0(\mu),\ f_1(\mu)$$

no admite cambio de signos.

Supongamos ahora que la afirmación está establecida para todos los $k\leqslant r$. Si μ no es una raíz de los polinomios $f_r(\lambda)$ y $f_{r+1}(\lambda)$, el paso por inducción se hace del mismo modo que en la demostración del 7.4.44. Examinemos las dos posibilidades que nos quedan:

a) μ es una raíz del polinomio $f_r(\lambda)$. Según el 7.4.43, b) en este caso el número de raíces del polinomio $f_{r+1}(\lambda)$, situadas a la derecha de μ, es en uno más grande que el número de raíces del $f_r(\lambda)$. Los números de $f_{r+1}(\mu)$ y $f_{r-1}(\mu)$

tienen signos opuestos y la sucesión

$$f_0(\mu),\ f_1(\mu),\ \ldots,\ f_{r-1}(\mu),\ f_r(\mu),\ f_{r+1}(\mu)$$

tiene un cambio de signos más que la sucesión

$$f_0(\mu),\ f_1(\mu),\ \ldots,\ f_{r-1}(\mu),\ f_r(\mu);$$

b) μ es una raíz del polinomio $f_{r+1}(\lambda)$. En este caso, de acuerdo con nuestra regla de atribución del signo al valor nulo, las dos sucesiones mencionadas tienen un mismo número de cambios de signos. Al mismo tiempo, ambos polinomios $f_r(\lambda)$ y $f_{r+1}(\lambda)$ tienen un mismo número de raíces situadas a la derecha de μ.

7.4.46. Designemos por $S(x)$ el número de cambios de signos de la sucesión numérica

$$f_0(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x).$$

Según la condición: $S(a) \geqslant k$, $S(b) < k$. Adoptemos que $c = \dfrac{a+b}{2}$ y compongamos la sucesión

$$f_0(c),\ f_1(c),\ \ldots,\ f_n(c).$$

Si $S(c) \geqslant k$, entonces, λ_h se encuentra en el intervalo (c, b). Pero si $S(c) < k$, sea $\lambda_h = c$, sea λ_h se encuentra en el intervalo (a, c).

7.4.49. La aproximación buscada de λ_1 es 27/16.

7.4.52. b) Toda matriz simétrica real es ortogonalmente semejante a una matriz diagonal.

7.5.1. No.

7.5.20. Sean λ un valor propio cualquiera de la matriz A y x, el vector propio correspondiente. En este caso

$$0 > (Cx, x) = (A^*Bx, x) + (BAx, x) = (Bx, Ax) + (Ax, Bx) =$$
$$= (\bar{\lambda} + \lambda)(Bx, x) = 2\operatorname{Re}\lambda\cdot(Bx, x),$$

de donde $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Ahora para la matriz A la unicidad de la solución de la ecuación de Liapunóv se deduce del 6.3.49.

7.5.21. $H = 0$.

7.5.26. La afirmación del problema se deduce de los problemas 7.4.19 y 6.3.51.

7.5.28. La afirmación del problema se deduce de los problemas 7.4.20 y 6.3.48.

7.5.30. La matriz S es el producto de Schur de las matrices definidas positivas H y H^T.

7.5.36. La necesidad de la condición se deduce del problema 7.5.9. Supongamos ahora que para la matriz H la condición del criterio de Sylvester está cumplida. Demostremos por inducción que la submatriz principal directora H_k es definida positiva.

Para $k = 1$ esto es evidente. Luego si H_k es definida positiva, los valores propios $\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_k$ de esta submatriz son positivos. Del 7.4.35 se deduce que entre los valores propios $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k \geqslant \lambda_{k+1}$ de la submatriz H_{k+1} por lo menos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son positivos. Pero en virtud de la condición del $H_{k+1} > 0$ λ_{k+1} es positivo, de modo que H_{k+1} es una matriz definida positiva.

7.5.39. La matriz no es no negativa.

7.5.40. La matriz no es no negativa.

7.5.41. La matriz es definida positiva.

7.5.42. Para todo $\varepsilon > 0$ la matriz $H + \varepsilon E$ verifica la condición (7.5.2), por eso H es por lo menos no negativa. Sin embargo el determinante de la matriz H es positivo, lo que se puede mostrar calculándolo mediante las fórmulas recurrentes que enlazan los menores principales situados en las últimas fila y columna de la matriz. Por eso H es definida positiva.

7.5.43. La matriz es no negativa.

7.5.44. La matriz es no negativa.

7.5.46. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$.

7.5.47. $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$.

7.5.48. $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{Vmatrix}$.

7.5.49. $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.5.53. De $H \geqslant S$ se deduce $S^{-1/2}HS^{-1/2} \geqslant E$, donde $S^{-1/2} = (S^{1/2})^{-1}$. En este caso de acuerdo con el 7.3.33 $S^{1/2}H^{-1}S^{1/2} \leqslant E$ o bien $H^{-1} \leqslant S^{-1}$.

7.5.60. Sea x el vector propio normalizado del operador HS, referente al valor propio γ_1. Tenemos

$$\gamma_1 = (HSx, x) = (Sx, Hx) \leqslant |Sx|\cdot|Hx| \leqslant \alpha_1\beta_1.$$

En el último paso hemos utilizado la relación (7.4.2).

7.5.61. a) De $H = S + iK$ se deduce: $iS^{-1}K = S^{-1}H - E$. Como los autovalores de la matriz $S^{-1}H$ son positivos, los autovalores de la matriz $iS^{-1}K$ son reales y superiores a -1. Advirtamos que $S^{-1}K$ es semejante a la matriz antisimétrica $S^{-1/2}KS^{-1/2}$, por eso sus valores propios se sitúan simétricamente respecto al cero. De esto se sigue que los valores propios de $iS^{-1}K$ son inferiores a 1;

b) para la demostración es suficiente verificar que $\det(S^{-1}H) \leqslant 1$. De a) se deduce que los valores propios de la matriz $S^{-1}H$ se encuentran en el intervalo $(0, 2)$, simétricamente respecto a su centro. El producto de cada par simétrico de autovalores $1+x$, $1-x$ no sobrepasa la unidad; de esto se infiere la igualdad necesaria. En el caso $\det S = \det H$, la matriz $S^{-1}H$ es igual a la matriz unidad;

c) de a) se desprende que $|\det(S^{-1}K)| < 1$, de donde $\det K < \det S$.

7.6.1. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ son números singulares del operador A, entonces a) A^* tiene los mismos números singulares; b) los números singulares de αA son $|\alpha|\alpha_1, \ldots, |\alpha|\alpha_s$.

7.6.5. Los números singulares de A^{-1} son inversos de los números singulares de A.

7.6.8. $n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$.

7.6.9. $2\sqrt{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0$.

7.6.12. Las columnas de U forman el sistema ortonormalizado de vectores propios de la matriz AA^*; las columnas de V^* forman el sistema ortonormalizado de vectores propios de la matriz A^*A.

7.6.16. a) $A^T = V^T\Lambda U$; b) $A^* = V^*\Lambda U^*$; c) $A^{-1} = (PV)^*P\Lambda^{-1}P(UP)^*$, donde P es la matriz de permutaciones siguientes

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 \end{Vmatrix}.$$

7.6.19. El único número singular no nulo es

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

7.6.28. Estas estimaciones se obtienen del 7.6.23, si como x se adoptan los vectores columna unidad.

7.6.31. Sin limitar la generalidad se considera que $\widetilde{A}$ se halla en las primeras fila y columna de A, puesto que se puede obtenerlo conmutando las filas y columnas que no cambian evidentemente los números singulares. Sea A una matriz de la forma celular siguiente:

$$A = \left\| \begin{matrix} \widetilde{A} & B \\ C & D \end{matrix} \right\|.$$

En este caso la matriz $F = \widetilde{A}\widetilde{A}^* + BB^*$ es la submatriz principal de AA^* y sus valores propios indicados en el orden decreciente no sobrepasan los autovalores homónimos de AA^*. Como BB^* es una matriz no negativa, a su vez los valores propios de $\widetilde{A}\widetilde{A}^*$ no sobrepasan los autovalores homónimos de F. De esto se deduce la afirmación necesaria.

7.6.34. Sea L_k^0 un subespacio de X tal que

$$\sigma_k = \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_k^0}} \frac{|ABx|}{|x|}.$$

Puesto que

$$\frac{|ABx|}{|x|} \leqslant \alpha_1 \frac{|Bx|}{|x|},$$

entonces

$$\sigma_k \leqslant \alpha_1 \cdot \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_k^0}} \frac{|Bx|}{|x|} \leqslant \alpha_1 \cdot \max_{L_k} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_k}} \frac{|Bx|}{|x|} = \alpha_1 \beta_k.$$

Si en el subespacio L^{k^0} existe un vector no nulo x tal que $Bx = 0$, entonces $\delta_k = 0$ y la desigualdad $\sigma_k \leqslant \alpha_k \beta_1$ es evidente. (Advirtamos que en este caso $\beta_n = 0$ igualmente, porque la cuarta desigualdad se cumple también.) En el caso contrario el subespacio BL_k^0 es de dimensión k y todos los vectores no nulos de L_k^0 verifican las relaciones

$$\frac{|ABx|}{|x|} = \frac{|ABx|}{|Bx|} \cdot \frac{|Bx|}{|x|} \leqslant \beta_1 \frac{|A(Bx)|}{|Bx|},$$

de donde

$$\delta_k \leqslant \beta_1 \cdot \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_k^0}} \frac{|A(Bx)|}{|Bx|} = \beta_1 \cdot \min_{\substack{y \neq 0 \\ y \in BL_k^0}} \frac{|Ay|}{|y|} \leqslant \beta_1 \cdot \max_{L_k} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_k}} \frac{|Ax|}{|x|} = \beta_1 \alpha_k.$$

De un modo análogo se demuestran las otras dos desigualdades.

7.6.36. Todos los tipos posibles de productos $\alpha_i \beta_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

7.6.37. $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$.

7.6.38. $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$.

7.6.39. $\alpha_1 = \alpha_2 = 6$, $\alpha_3 = 3$.

7.6.40. $\alpha_1 = 9$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

7.6.41. $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 3$. 7.6.42. $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\sqrt{2}$, $\alpha_3 = \sqrt{2}$, $\alpha_4 = 0$.

7.6.43. $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

7.6.44. $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

7.6.45. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 2$.

7.6.46. $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\sqrt{10}$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \sqrt{10}$.

7.6.47. Para $n = 1$ se obtiene la forma trigonométrica de un número complejo.

7.6.48. $H = (A^*A)^{1/2}$.

7.6.49. De la descomposición polar $A = HU$ se deduce: $AA^* = H^2$, $A^*A = U^*H^2U$. Sea $A^*Ae_i = U^*H^2Ue_i = \alpha_i^2 e_i$. En este caso $H^2(Ue_i) = \alpha_i^2 (Ue_i)$, lo que hacía falta demostrar.

7.6.53. $H_1 = (A^*A)^{1/2}$.

7.6.54. Si H y U son conmutables, entonces $A^*A = AA^* = H^2$ y el operador A es normal. Supongamos, inversamente, que A es un operador normal, es decir, $A^*A = AA^*$ y que $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormalizada de vectores propios del operador AA^*. Ya que $AA^* = H^2$, los mismos vectores $e_1, \ldots, e_n$ serán también autovectores para el operador H, por eso

$$(UH)\, e_i = U\,(He_i) = \alpha_i U e_i,\ i = 1, \ldots, n. \qquad (\alpha)$$

Por otro lado, del 7.6.49 resulta que

$$H^2\,(Ue_i) = \alpha_i^2 U e_i,\ i = 1, \ldots, n$$

o bien

$$(HU)\, e_i = H\,(Ue_i) = \alpha_i U e_i,\ i = 1, \ldots, n. \qquad (\beta)$$

Las relaciones (α) y (β) muestran que $UH = HU$.

7.6.56. $H = -S$, $U = -E$.

7.6.57. Si se examina la matriz del operador de derivación en la base $1, t, t^2, \ldots, t^n$, en esta misma base el operador H posee una matriz diagonal con elementos diagonales $1, 2, 3, \ldots, n, 0$ y el operador U, la matriz

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Por esto mismo U es bien un operador de permutación cíclica: $1 \to t^n$, $t \to 1$, $t^2 \to t, \ldots, t^n \to t^{n-1}$, bien un operador de permutación cíclica con reflexión $1 \to -t^n$.

7.6.58. $A_p = H_p U_p$.

7.6.59. $A \times B = (H \times K)\,(U \times V)$.

7.6.60. $H = \begin{Vmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{Vmatrix}$, $U = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}$.

7.6.61. $H = \begin{Vmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$, $U = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -i & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

7.6.62. $H = \frac{\sqrt{10}}{2}\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$, $U = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

7.6.63. Sean $A = P\Lambda P^{-1}$, donde Λ es una matriz diagonal, y $P = KU$, la descomposición polar de la matriz P. En este caso

$$A = KU\Lambda U^* K^{-1} = (KU\Lambda U^* K)(K^{-1})^2.$$

Adoptando $H = KU\Lambda U^* K$, $S = (K^{-1})^2$ se obtiene la representación necesaria.

7.6.64. Sea $A = U\Lambda V$ la descomposición singular de la matriz A. En este caso

$$\operatorname{tr}(AW) = \operatorname{tr}(U\Lambda VW) = \operatorname{tr}(\Lambda VWU) = \operatorname{tr}(\Lambda Z),$$

donde $Z = VWU$ y recorre con W todo el conjunto de matrices unitarias. Es evidente que

$$|\operatorname{tr}(\Lambda Z)| \leqslant \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

La igualdad se obtiene aquí, por ejemplo, para $Z = E$, es decir, $W = V^* U^*$.

7.7.1. Para $n = 1$ obtenemos la anotación usual $z = a + ib$ del número complejo z.

7.7.2. $A = 0$.

7.7.3. a) $A = B$; b) $A^* = B$.

7.7.7. $A = 0$.

7.7.9. $A^* = H_1 - iH_2$.

7.7.20. La igualdad $|\det A| = \det H_1$ tiene lugar si, y sólo si, $A = H_1$.

7.7.23. $S = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $K = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

7.7.25. A es un operador antisimétrico.

7.8.4. Si representamos el polinomio $g(t)$ bajo la forma $g(t) = at^n + g_{n-1}(t)$, donde $g_{n-1}(t)$ es un polinomio de grado $\leqslant n-1$, las seudosoluciones de la ecuación $Af = g$ son imágenes recíprocas del polinomio $g_{n-1}(t)$, es decir, todas son sus primitivas. La seudosolución normal es una primitiva con el término independiente igual a cero.

7.8.5. Si el plano de seudosoluciones de la ecuación $Ax = b$ se escribe, bajo la forma $x = x_0 + N_A$, donde x_0 es una seudosolución normal, entonces para a), b), c) los planos correspondientes son: a) $x = \frac{1}{\alpha}x_0 + N_A$; b) $x = \alpha x_0 + N_A$; c) $x = x_0 + N_A$.

7.8.6. Sea x_0 la seudosolución normal de la ecuación $Ax = b$. En este caso a) x_0 es la seudosolución normal de la ecuación $UAx = Ub$; b) $V^* x_0$ es la seudosolución normal de la ecuación $AVx = b$.

7.8.7. Sea r el rango del operador A y supongamos que los autovectores $e_1, \ldots, e_r$ corresponden a los valores propios no nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Si

$$b = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r + \alpha_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \alpha_n e_n,$$

las seudosoluciones de la ecuación $Ax = b$ son vectores de la forma

$$x = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} e_1 + \ldots + \frac{\alpha_r}{\lambda_r} e_r + \beta_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \beta_n e_n,$$

donde $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ son números arbitrarios. La seudosolución normal es:

$$x_0 = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} e_1 + \ldots + \frac{\alpha_r}{\lambda_r} e_r.$$

7.8.10. $x_0 = (0\ 0\ 0)^T$.

7.8.11. $x_0 = (0\ 0)^T$.

7.8.12. $x_0 = \frac{3}{4}(1\ 1\ 1\ 1)^T$.

7.8.13. $x_0 = \frac{1}{7}(5\ \ 6)^T$.

7.8.14. $x_0 = -\frac{1}{75}(1\ \ 2)^T$.

7.8.15. $x_0 = \frac{1}{2}(1\ \ 0\ \ 1)^T$.

7.8.16. $x_0 = \frac{1}{2}(1\ \ 0\ \ 1)^T$.

7.8.17. $x_0 = (1\ \ 1\ \ 0)^T$.

7.8.18. $x_0 = \left(1\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ 1\ \ 1\right)^T$.

7.8.19. El operador nulo de Y en X.

7.8.21. Sobre el subespacio M_{n-1} el operador seudoinverso actúa como un operador de derivación. Los polinomios de la forma at^n forman el núcleo del operador seudoinverso.

7.8.27. Sea $B = (A^+)_{ef}$. En este caso B es una matriz de tipo $n \times m$ tal que $b_{11} = 1/\alpha_1$, $b_{22} = 1/\alpha_2$, . . ., $b_{rr} = 1/\alpha_r$ y los demás elementos son iguales a cero.

7.8.32. Los autovalores no nulos de los operadores A y A^+ son recíprocamente inversos.

7.8.35. $A^+ = U^* H^+ = H_1^+ U_1^*$.

7.8.45. Los operadores A y X son recíprocamente inversos sobre el par de subespacios T_{A^*} y T_A.

7.8.47. El operador X debe tener el mismo rango que A. Por consiguiente, el subespacio T_{A^*} es la imagen de este operador.

7.8.49. Como complemento de los datos del problema 7.8.47 la ecuación $(AX)^* = AX$ muestra que el núcleo del operador X debe ser ortogonal al subespacio T_A. Entonces, la imagen y el núcleo de X coinciden con la imagen y el núcleo de A^*, respectivamente; además, sobre el par de subespacios T_{A^*} y T_A los operadores A y X son recíprocamente inversos. Según el 7.8.26, $X = A^+$.

En los problemas 7.9.1—7.9.5 la transformación de incógnitas viene definida no unívocamente.

7.9.1. $y_1^2 + 7y_2^2 + y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3$, $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_3$.

7.9.2. $-y_1^2 - 7y_2^2 + 5y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_2$, $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$.

7.9.3. $-7y_1^2 + 2y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{\sqrt{21}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{3}{\sqrt{14}} y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{21}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{2}{\sqrt{14}} y_3$, $x_3 = -\frac{4}{\sqrt{21}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{14}} y_3$.

7.9.4. $y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 - y_4^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_4$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$, $x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_4$.

7.9.5. $10y_1^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{10}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{10}} y_3 + \frac{2}{\sqrt{10}} y_4$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{10}} y_1 -$

$-\frac{1}{\sqrt{10}}y_2+\frac{2}{\sqrt{10}}y_3-\frac{1}{\sqrt{10}}y_4$, $\quad x_3=-\frac{1}{\sqrt{10}}y_1+\frac{2}{\sqrt{10}}y_2-\frac{1}{\sqrt{10}}y_3-$
$-\frac{2}{\sqrt{10}}y_4$, $x_4=\frac{2}{\sqrt{10}}y_1-\frac{1}{\sqrt{10}}y_2-\frac{2}{\sqrt{10}}y_3+\frac{1}{\sqrt{10}}y_4$.

7.9.12. En la demostración apliquemos la inducción por el número n. Para $n=1$ la afirmación es evidente. Supongamos que ésta es válida para $n=k$. Examinemos la forma de $k+1$ incógnitas; sean A_{k+1} su matriz, A_k, la submatriz principal directriz de orden k. Como A_{k+1} y A_k son matrices no singulares, entonces, según el 7.4.35 A_{k+1} posee bien un valor propio positivo, bien un valor propio negativo más que la matriz A_k. En el primer caso D_{k+1} tiene el mismo signo que D_k y la sucesión $1, D_1, \ldots, D_k, D_{k+1}$ tiene en una coincidencia de signos más que la sucesión $1, D_1, \ldots, D_k$. En el segundo caso el signo de D_{k+1} es opuesto al signo de D_k y obtenemos un cambio de signo complementario.

7.9.13. Como $D_{k-1}\neq 0$, $\lambda=0$ es un valor propio simple de la submatriz principal directriz A_k. Sea l el número de sus valores propios negativos. En este caso según el 7.4.35 el número de valores propios negativos de A_{k-1} es l y de A_{k+1} es $l+1$. Por eso $D_{k-1}D_{k+1}<0$.

7.9.16. Cada uno de los índices de inercia es igual a 2.

7.9.17. El índice de inercia positivo es 1; el índice de inercia negativo es 3.

7.9.18. La forma es definida positiva.

7.9.19. La forma F se reduce a la forma $F=y_1^2+G$, donde G es la forma cuadrática, pero solamente de las variables $y_2, \ldots, y_n$.

7.9.21. Por ejemplo, $y_1=x_1+x_2+x_3$, $y_2=x_2+x_3$, $y_3=x_3$.

7.9.22. Por ejemplo, $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_2+x_3$, $y_3=x_3$.

7.9.23. Por ejemplo, $y_1=x_1-x_3-2x_4$, $y_2=2x_2+x_3$, $y_3=3x_3+$ $+2x_4$, $y_4=4x_4$.

7.9.28. $S=\begin{Vmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\0&0&1\end{Vmatrix}$. $\quad$ 7.9.29. $S=\begin{Vmatrix}3&-1&0\\0&2&-2\\0&0&1\end{Vmatrix}$.

7.9.30. $S=\begin{Vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{Vmatrix}$.

7.9.32. $S=\begin{Vmatrix}1&\sqrt{2}&&&\\&1&\sqrt{2}&&0\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots\\0&&&1&\sqrt{2}\\&&&&1\end{Vmatrix}$.

7.9.34. $S=\begin{Vmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\\0&0&1&2&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1\end{Vmatrix}$.

7.9.36. n extracciones de la raíz cuadrada. El número de operaciones de multiplicación y de división se expresa por el polinomio de n cuyo término mayor es $n^3/6$

7.9.37. La resolución del sistema $Ax=b$ se reduce a la solución de dos sistemas de ecuaciones triangulares: $S^{\mathrm{T}}y=b$ y $Sx=y$.

7.9.38. La solución de dos sistemas triangulares necesita $O(n^2)$ operaciones de multiplicación y de división. Teniendo en cuenta el 7.9.36 vemos que el método de la raíz cuadrada es aproximadamente dos veces más económico que el método de Gauss.

7.9.43. Si la numeración es adecuada $\lambda_i\mu_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

7.9.45. La forma F es definida positiva. La transformación de incógnitas $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_3$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} x_2 - \frac{2}{\sqrt{6}} x_3$, $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \sqrt{2} x_3$ reduce la forma F a la forma normal y la forma G, a la forma canónica $5z_1^2 + 2z_2^2$.

7.9.46. Las matrices de las formas F y G son conmutables. La transformación ortogonal de incógnitas $y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_3$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_3$, $y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x_3$ reducen la forma F a la forma canónica $3y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2$ y la forma G, a la forma canónica $(-6)\, y_1^2 + 6y_2^2$.

7.9.47. La forma F es definida negativa. La transformación de incógnitas $z_1 = \frac{1}{3} x_1 - \frac{4}{3} x_2 + x_3$, $z_2 = \frac{2}{3} x_1 - \frac{5}{3} x_2 - 2x_3$, $z_3 = \frac{2}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 - 3x_3$ reduce la forma F a la forma normal y la forma G, a la forma canónica $(-5)\, z_1^2 - 2z_2^2 + z_3^2$.

7.9.48. La forma G es definida positiva. La transformación de incógnitas $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_2 - x_3$, $y_3 = x_3 - x_4$, $y_4 = x_4$ reduce la forma G a la forma normal y la forma F, a la forma canónica

$$y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2.$$

7.9.49. Las matrices de las formas F y G son conmutables. Las transformaciones ortogonales de incógnitas $y_1 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4$, $y_2 = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_4$, $y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_3$, $y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_4$ reducen la forma F a la forma canónica $5y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$ y la forma G, a la forma canónica $y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$.

7.10.3. El coeficiente λ^n y el término independiente son iguales a $\det B$ y $(-1)^n \det A$, respectivamente. En el caso b) el par (B, A) posee su valor propio igual a cero.

7.10.5. Si y es el vector propio del par (PAQ, PBQ), entonces, $x = Qy$ es el vector propio del par (A, B).

7.10.6. Todo autovector z del par (A, B) será también un autovector de cada uno de los pares a) — e). Si λ es el valor propio del par (A, B), los valores propios correspondientes de los demás pares serán: a) $\mu = \lambda^{-1}$; b) $\mu = \lambda - \alpha$; c) si $\lambda \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi \neq 0$, entonces, $\mu = (\lambda \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi)/(\lambda \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi)$; d) $\mu = \lambda$; e) $\mu = \lambda^{-1}$; f) $\mu = (\lambda - \alpha)^{-1}$.

7.10.8. Por ejemplo, el par

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ambos determinantes $\det(A - \lambda B)$ y $\det(A^T - \lambda B^T)$ son iguales a cero idénticamente según λ.

7.10.9. Los elementos diagonales de la matriz J son los autovalores del par (A, B).

7.10.10. En el caso general la afirmación no es correcta. Así, los pares de matrices (A, B) y (B, A), donde

$$A=\left\|\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}\right\|, \quad B=\left\|\begin{matrix}0&0\\0&1\end{matrix}\right\|$$

son equivalentes. Sin embargo, los pares numéricos (1, 0) y (0, 1) no lo son.

7.10.11. El par de tipo (E, N), donde N es la matriz de Jordan.

7.10.12. De acuerdo con el 7.10.11, el par (A, B) es equivalente al par (E, N), además, N puede ser considerada, sin acotar la generalidad, como una matriz de tipo $N^{(1)} \oplus N^{(2)}$, $N^{(2)}$ está compuesta de todas las células de Jordan referentes al número 0, y $N^{(1)}$ es no singular. Sea $E = E_l \oplus E_m$ una representación celular análoga de la matriz unidad E. En virtud del 7.10.9, el par $(E_l, N^{(1)})$ es equivalente al par $(J^{(1)}, E_l)$ con la matriz de Jordan $J^{(1)}$. Por consiguiente, el par (A, B) es equivalente a la suma directa de los pares $(J^{(1)}, E_l)$ y $(E_m, N^{(2)})$. Esto es efectivamente la afirmación del problema.

7.10.15. La matriz $(\alpha\widetilde{B}-\widetilde{A})^{-1}\widetilde{A}$ es casi diagonal con células diagonales de dos tipos: $[\alpha E_{s_i}-J_{s_i}(\lambda_i)]^{-1} J_{s_i}(\lambda_i)$ y $(\alpha N_{t_j}-E_{t_j})^{-1}$. Supongamos que la célula del primer tipo es de la forma de un polinomio de $J_{s_i}(\lambda_i)$ y será una matriz triangular superior de Toeplitz con el elemento diagonal $\lambda_i/(\alpha-\lambda_i)$ y el primer elemento supradiagonal no igual a cero. Una tal matriz es necesariamente unicelular. Esto es también justo respecto a la célula $(\alpha N_{t_j}-E_{t_j})^{-1}$, porque $(\alpha N_{t_j}-E_{t_j})^{-1}=-(E_{t_j}+\alpha N_{t_j}+\alpha^2N^2_{t_j}+\ldots+\alpha^{t_j-1}\cdot N^{t_j-1}_{t_j})$. El valor propio de la última matriz es el número (-1).

7.10.17. $\widetilde{A}=\left\|\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right\|, \quad \widetilde{B}=\left\|\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&0\end{array}\right\|.$

7.10.18. $\widetilde{A}=\left\|\begin{array}{c|cc}-1&0&0\\\hline 0&1&0\\0&0&1\end{array}\right\|, \quad \widetilde{B}=\left\|\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&0&1\\0&0&0\end{array}\right\|.$

7.10.19. $\widetilde{A}=\left\|\begin{array}{c|c|c}0&0&0\\\hline 0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right\|, \quad \widetilde{B}=\left\|\begin{array}{c|c|c}1&0&0\\\hline 0&1&0\\\hline 0&0&0\end{array}\right\|.$

7.10.20. $\widetilde{A}=\left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\|, \quad \widetilde{B}=\left\|\begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}\right\|.$

7.10.21. $\widetilde{A}=\left\|\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right\|, \quad \widetilde{B}=\left\|\begin{array}{cc|c}0&1&0\\0&0&0\\\hline 0&0&0\end{array}\right\|.$

7.10.23. Sea Q una matriz no singular arbitraria cuyas primeras k columnas forman una base del subespacio L. Adoptemos $M = AL + BL$ y supongamos que P es también una matriz no singular que contiene en sus primeras k columnas una base del subespacio M (la dimensión de éste puede ser menor de k). Las matrices $A = P^{-1}CQ$, $B = P^{-1}DQ$ poseen la forma casi triangular buscada.

7.10.25. Supongamos que $\dim M = m < \dim L = k$ (véase la solución del problema 7.10.23) y que la base del subespacio M está compuesta de las primeras m columnas de la matriz P. En este caso después de pasar a las matrices (A, B) de tipo de (7.10.7) en las células A_{11}, B_{11} las filas de $(m+1)$-ésima a k-ésima serán nulas. Pero en este caso el polinomio característico del par (A, B) será igual a cero idénticamente según λ.

7.10.26. Como resultado de la no singularidad de la matriz B, $\dim L = \dim (AL + BL) = \dim [B^{-1}(AL + BL)] = \dim [(B^{-1}A) L + L]$. De aquí $(B^{-1}A) L \subset L$, es decir, L es un subespacio invariante de la matriz $B^{-1}A$. Si la matriz A es no singular, mostramos análogamente que los espacios reductores (A, B) coinciden con los subespacios invariantes de la matriz $A^{-1}B$.

7.10.27. Mostremos que los subespacios $AL + BL$ y $(A - \alpha B) L + BL$ coinciden. Efectivamente, si $z \in AL + BL$, entonces $z = Ax + By$; $x, y \in L$; en este caso $z = (A - \alpha B) x + B(\alpha x + y)$ y $z \in (A - \alpha B) L + BL$. La inclusión inversa se demuestra análogamente.

7.10.33. La suficiencia de la condición es evidente. En este caso la base de vectores propios la forman las columnas de la matriz S. Y al contrario, si el par (A, B) puede ser diagonalizado, entonces, tomando como S una matriz, compuesta de vectores propios $s_1, \ldots, s_n$ por columnas, y como R, una matriz cuya i-ésima columna $(i = 1, \ldots, n)$ difiere de cero y es colineal a cada uno de los vectores As_i y Bs_i, obtendremos la igualdad (7.10.9).

8.1.29. Sea $\rho(x, M) = \| x - y_0 \| = \| x - y_0' \|$. En este caso

$$\rho(x, M) \leqslant \left\| x - \frac{y_0 + y'}{2} \right\| \leqslant \frac{1}{2} (\| x - y_0 \| + \| x - y_0' \|) = \rho(x, M),$$

por consiguiente,

$$\left\| \frac{x - y_0}{2} + \frac{x - y_0'}{2} \right\| = \left\| \frac{x - y_0}{2} \right\| + \left\| \frac{x - y_0'}{2} \right\|.$$

Según el 2.4.13, $x - y_0 = \lambda (x - y_0')$, donde $\lambda > 0$. De aquí $\lambda = \dfrac{\| x - y_0 \|}{\| x - y_0' \|} = 1$ e $y_0 = y_0'$.

8.1.33. Si el número c indicado no existe, entonces existe una sucesión $\{x_k\}$, $x_k \in M$ tal que $| F(x_k) | > k$. Extraigamos de $\{x_k\}$ la subsucesión $\{x_{k_j}\}$ que converge a un cierto $x_0 \in M$. Entonces, de acuerdo con la continuidad de la funcional, debe observarse la relación: $F(x_{k_j}) \to F(x_0)$, lo que contradice la hipótesis $F(x_{k_j}) \to \infty$.

8.1.34. Adoptemos

$$C = \sup_{x \in M} | F(x) |.$$

Según el 8.1.33, el número C es finito. Si no hay x de M, para el cual no se alcance esta frontera, la funcional

$$G(x) = \frac{1}{G - | F(x) |}$$

debe ser continua sobre M y sus valores deben ser acotados, lo que contradice a la definición del número C.

8.1.35. $c_1^{-1} = \max\limits_{\substack{m(x) \leqslant 1 \\ x \neq 0}} n(x)$, $c_2 = \max\limits_{\substack{n(x) \leqslant 1 \\ x \neq 0}} m(x)$.

8.1.36.
$$\| x \|_2 \leqslant \| x \|_1 \leqslant \sqrt{n} \| x \|_2,$$
$$\| x \|_\infty \leqslant \| x \|_1 \leqslant n \| x \|_\infty,$$
$$\| x \|_\infty \leqslant \| x \|_2 \leqslant \sqrt{n} \| x \|_\infty.$$

8.1.37. Adoptar c_1 igual al número singular mínimo y c_2 igual al número singular máximo de la matriz P.

8.1.41. Introduzcamos el producto escalar en X de modo que L_1 y L_2 sean ortogonales. Sean z_0 el punto límite de N y $\{z_k\}$ una sucesión de vectores de N, que converge hacia z_0. Si $z_k = x_k + y_k$, $x_k \in M_1$, $y_k \in M_2$ y $z_0 = x_0 + y_0$ es la descomposición del vector z_0 según los subespacios L_1 y L_2, entonces

$$|z_k - z_0|^2 = |x_k - x_0|^2 + |y_k - y_0|^2,$$

de donde $x_k \to x_0$ e $y_k \to y_0$. En vista del carácter cerrado de M_1 y M_2 tenemos $x_0 \in M_1$, $y_0 \in M_2$, $z_0 \in N$.

8.1.45. La longitud del vector es dual a ella misma respecto al producto escalar que la engendra.

8.1.46. $m^*(x) = \| x \|_1 = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$.

8.1.47. La desigualdad (8.1.4) para el par de normas $\| x \|_p$ y $\| x \|_q$ es la desigualdad de Hölder.

8.1.49. Es suficiente examinar los vectores x_0, para los cuales $m(x_0) = 1$. Cada uno de estos vectores es un punto límite de la bola unidad de la norma $m(x)$. En los cursos de análisis convexo se demuestra que para todo punto límite x_0 de un conjunto convexo M existe el llamado «hiperplano de apoyo» que se da por la igualdad $\operatorname{Re}(x, y) = c$ (donde y es un vector fijo) y posee la propiedad de que $\operatorname{Re}(x_0, y) = c$ y $\operatorname{Re}(x, y) \leqslant c$ para los demás x de M. Aplicando este teorema al caso examinado construyamos para el vector dado x_0 el hiperplano de apoyo $\operatorname{Re}(x, y) = c$. El vector y que determina este hiperplano será precisamente el vector buscado.

8.2.2. Sí, cuando el operador es no singular. No, si el operador es singular.

8.2.3. En el caso de un operador singular la afirmación puede ser incorrecta.

8.2.5. Sea $M_1 = M \cap T_A$; M_1 es cerrado siendo una intersección de conjuntos cerrados. Introduzcamos productos escalares en los espacios examinados. La imagen recíproca completa de M (o, lo que es lo mismo, M_1) es un conjunto de planos $x + N_A$, donde x recorre el conjunto A^*M_1. Puesto que el operador A^* que se examina solamente sobre T_A es no singular, A^*M_1 es un conjunto cerrado (véase el 8.2.3). Ahora la afirmación necesaria se deduce del 8.1.41.

8.2.15. a) La norma espectral de la matriz diagonal es igual al elemento diagonal máximo en módulo; b) la norma espectral de la matriz casi diagonal es igual a la norma espectral máxima de las células diagonales.

8.2.17. $\sqrt{n}$.

8.2.18. $\| A \|_E^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$.

8.2.23. La parte real (imaginaria) del número complejo z es el punto del eje real (imaginario) más cercano a z.

8.2.24. Esta igualdad es análoga a la fórmula del módulo del número complejo $z = x + iy$.

8.2.25. Sea U una matriz unitaria arbitraria. En este caso

$$\| H - U \|_E^2 = \operatorname{tr}((H - U)^*(H - U)) = \operatorname{tr} H^2 + n - 2\operatorname{Re} \operatorname{tr}(HU).$$

Según el 7.6.64.

$$-\operatorname{tr} H \leqslant \operatorname{Re} \operatorname{tr}(HU) \leqslant \operatorname{tr} H;$$

además, la igualdad de la derecha se obtiene solamente cuando $U = E$ y de la izquierda, solamente cuando $U = -E$.

En el caso cuando H es una matriz no negativa la afirmación sigue siendo válida, sin embargo, las matrices unitarias más cercana y más alejada pueden ser definidas de manera ambigua.

8.2.26. Para el número complejo no nulo $z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ el número $r_1 = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$ es el punto más cercano y el número $r_2 = -(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ es el punto más alejado de la circunferencia unidad.

8.2.30. a) $\| A \|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$; b) $\| A \|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Los valores de las dos normas sobre la matriz diagonal D son iguales al módulo máximo de los elementos diagonales d_{ii}.

8.2.33. $N(A) = M(PAP^{-1})$.

8.2.35. Si $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T$, $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^T$, entonces

$$\| A \|_\infty = (\max_i |\alpha_i|) \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| \right).$$

8.2.38. Como toda matriz B de rango 1 puede ser representada bajo la forma de producto xy^*, donde x e y son vectores columna, utilizando (8.1.4) obtendremos

$$\max_{r_B=1} \frac{|\operatorname{tr}(AB)|}{M(B)} = \max_{x,\, y\neq 0} \frac{|\operatorname{tr}(Axy^*)|}{M(xy^*)} = \max_{x,\, y\neq 0} \frac{|(Ax,\, y)|}{m(x)\, m^*(y)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x,\, y\neq 0} \frac{m(Ax)\, m^*(y)}{m(x)\, m^*(y)} = \max_{x\neq 0} \frac{m(Ax)}{m(x)} = M(A).$$

Según el 8.1.49, para el vector fijo x existe un vector y tal que

$$|(Ax,\, y)| = m(Ax)\, m^*(y).$$

Eligiendo convenientemente x, y reduzcamos las relaciones escritas arriba a las igualdades.

8.2.40. La demostración se desarrolla por la cadena de igualdades siguientes:

$$M^*(A^*) = \max_{m^*(y)=1} m^*(A^*y) = \max_{m^*(y)=1} \max_{m(x)=1} |(A^*y,\, x)| =$$

$$= \max_{m(x)=1} \max_{m^*(y)=1} |(Ax,\, y)| = \max_{m(x)=1} m(Ax) = M(A).$$

Aquí utilizamos la afirmación del 8.1.50: $m(x)$ coincide con la norma dual de $m^*(y)$.

8.2.43. Supongamos que la norma dada $\| A \|$ concuerda con las normas vectoriales $m(x)$ y $n(x)$. De los problemas 8.2.42 y 8.2.39 se deduce que $\| A \|$ también debe estar subordinada a $m(x)$ y $n(x)$, de modo que

$$\| A \| = \max_{x\neq 0} \frac{m(Ax)}{m(x)}, \tag{α}$$

$$\| A \| = \max_{x\neq 0} \frac{n(Ax)}{n(x)}. \tag{β}$$

Supongamos que no existe una constante c tal que $m(x) = cn(x)$ para todo vector x. Multiplicando una de las normas por un número conveniente (lo que, según el 8.2.32, no cambia la norma subordinada) se puede obtener que $m(x) \leqslant n(x)$ para todo x; además, $m(x_0) = n(x_0)$ para un cierto vector x_0. Puesto que por la suposición las normas $m(x)$ y $n(x)$ no coinciden existe un vector x_1 tal que $m(x_1) < n(x_1)$. Se puede considerar que $m(x_0) = m(x_1) = 1$.

De acuerdo con el 8.1.49 existe un vector y tal que

$$(x_0,\, y) = m(x_0)\, m^*(y) = m^*(y).$$

El vector y también puede ser normado por la condición $m^*(y) = 1$. Ahora para la matriz $A = x_1 y^*$ tenemos

$$Ax_0 = x_1 y^* x_0 = (x_0,\, y)\, x_1 = x_1,$$
$$\| A \| = m(x_1)\, m^*(y^*) = 1.$$

Sin embargo, si para calcular $\| A \|$ utilizamos la representación (β) obtenemos

$$\| A \| \geqslant \frac{n(Ax_0)}{n(x_0)} = n(x_1) > m(x_1) = 1.$$

Esta contradicción muestra que las normas $m(x)$ y $n(x)$ deben ser proporcionales.

8.2.45. Si $\| A \|$ también concuerda con la norma $n(x)$ y $N(A)$ es la norma subordinada correspondiente, entonces $M(A) \geqslant N(A)$ sobre el conjunto de matrices de rango 1. Aprovechando la representación (8.2.5) obtendremos que $M(A) \equiv N(A)$ para toda A, de donde resulta (véase el 8.2.43) que las normas $m(x)$ y $n(x)$ son proporcionales.

8.2.47. No. Por ejemplo, la norma

$$M(A) = \max \{\| A \|_1, \| A \|_\infty\}$$

satisface la condición del problema, pero ella no puede ser subordinada porque concuerda con dos normas no proporcionales: $\| x \|_1$ y $\| x \|_\infty$.

8.3.3. $\operatorname{cond}_\infty(A) \geqslant \dfrac{3}{2} e^{-1}$.

8.3.5. Del 7.6.33 se deduce que si $\| B \|_2 < \alpha_n$, la matriz $A + B$ es no singular. Construyamos ahora una matriz B tal que $\| B \|_2 = \alpha_n$ y que $A + B$ sea una matriz singular. Sea $A = U\Lambda V$ una descomposición singular de la matriz A; como siempre, $\lambda_{11} \geqslant \lambda_{22} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{nn}$ y $\lambda_{nn} = \alpha_n$. En este caso la matriz B es de la forma $B = U\widetilde{\Lambda}V$, donde $\widetilde{\lambda}_{11} = \ldots = \widetilde{\lambda}_{n-1,n-1} = 0$, $\widetilde{\lambda}_{nn} = -\alpha_n$.

8.3.9. Supongamos que la matriz A es singular y $Ax = 0$ para un vector x no nulo. Partamos el vector x conforme a la partición de la matriz A:

$$x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{matrix} \right\|.$$

Supongamos que $\| x_i \| = \max \{\| x_1 \|, \| x_2 \|, \ldots, \| x_k \|\}$. En este caso, de la igualdad

$$-A_{ii}x_i = A_{i1}x_1 + \ldots + A_{i,i-1}x_{i-1} + \\ + A_{i,i+1}x_{i+1} + \ldots + A_{ik}x_k$$

se obtiene

$$\| x_i \| = \left\| A_{ii}^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} A_{ij}x_j \right\| \leqslant \| A_{ii}^{-1} \| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \| A_{ij} \| \| x_j \| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\| A_{ii}^{-1} \| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \| A_{ij} \| \right) \| x_i \| < \| x_i \|.$$

Esta contradicción muestra que A es no singular.

Para $m = 1$ se obtiene el criterio de dominación diagonal según las filas.

8.3.10. La matriz A es no singular.

8.3.12. Si D es una matriz diagonal compuesta de elementos diagonales de la matriz A, entonces

$$\operatorname{cond}_\infty(D) \frac{1}{1+\alpha} \leqslant \operatorname{cond}_\infty(A) \leqslant \operatorname{cond}_\infty(D) \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

8.3.13. Si se utilizan las desigualdades deducidas en el problema 8.3.12, obtenemos

$$0{,}9n \leqslant \operatorname{cond}_\infty(A) \leqslant 1{,}25\, n.$$

8.3.14. El valor máximo del número convenido se obtiene para la matriz

$$R_0=\begin{Vmatrix}1 & -1 & -1 & \dots & -1\\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1\\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1\\ . & . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{Vmatrix},$$

tal que

$$R_0^{-1}=\begin{Vmatrix}1 & 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2}\\ 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2^{n-4} & 2^{n-3}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 2^{n-5} & 2^{n-4}\\ . & . & . & . & \dots & . & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Por eso $\operatorname{cond}_\infty(R_0) = n2^{n-1}$.

8.3.15. Como $\| A_k \| = 1$, los elementos de todas las matrices A_k están acotados en valor absoluto y, por consiguiente, también lo están todos los menores de orden $n-1$ de estas matrices. Por eso el aumento del número convenido es posible solamente al tender $\det A_k$ hacia cero.

8.3.18. Si $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_n|$, entonces

$$\operatorname{cond}_2(A)=\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}.$$

8.3.19. $\operatorname{cond}_2(A)=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_n}$.

8.3.24. $\operatorname{cond}_E(A)=\dfrac{\|A\|_E^2}{|\det A|}=\dfrac{|a_{11}|^2+|a_{12}|^2+|a_{21}|^2+|a_{22}|^2}{|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|}$.

8.3.29. $\operatorname{cond}_2(A)=\operatorname{cond}_2^2(S)$.

8.3.30. Para el sistema inicial de ecuaciones $\operatorname{cond}_2(A)\geqslant 1000$. La solución es: $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$.

8.3.31. Para la matriz A del sistema de ecuaciones inicial, utilizando las desigualdades 7.6.28 se puede obtener la estimación: $\operatorname{cond}_2(A) > 303$. Para disminuir el número convenido multipliquemos la segunda ecuación del sistema por 10 y la tercera, por 100, luego efectuemos el cambio de variables: $y_1 = x_1$; $y_2 = 10x_2$; $y_3 = 100x_3$. Se obtiene un sistema con matriz simétrica cuya solución es: $y_1 = -1$, $y_2 = -1$, $y_3 = -1$. Por eso la solución del sistema inicial es: $x_1 = -1$, $x_2 = -0{,}1$, $x_3 = -0{,}01$.

8.3.33. Los componentes de la solución pueden variar en 6,01. La solución del sistema inicial es: $x = -1$, $y = 0$. La solución del sistema perturbado es: $\tilde{x} = 1$; $\tilde{y} = 1$.

8.3.34. $\operatorname{cond}_\infty(A) = 10\,967$. La solución del sistema inicial es: $x = 1$, $y = 1$. La solución del sistema perturbado es: $\tilde{x} = -12{,}9$, $\tilde{y} = -20$. La perturbación de la solución es: $x - \tilde{x} = 13{,}9$, $y - \tilde{y} = 21$.

8.3.35. Por ejemplo, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$.

8.3.36. Por ejemplo, $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

8.4.2. Por ejemplo, el círculo $|z| \leqslant \sqrt{5}+\sqrt{2}$.

8.4.6. Esta desigualdad da el intervalo de localización de valores propios, a partir del cual se puede aplicar el método de bisección.

8.4.8. Supongamos que $P^{-1}A_0P = \Lambda$, donde Λ es una matriz diagonal compuesta de los valores propios de la matriz A_0. Como norma buscada $\| A \|$ se puede tomar cualquier norma de las $\| P^{-1}AP \|_{1,2,\infty}$ (véase el 8.2.10 c)).

8.4.13. Supongamos que $A = H_1 + iH_2$ es la descomposición hermitiana y $B = U^* AU$, la forma de Schur de la matriz A. En este caso, la descomposición hermitiana de la matriz B es

$$B = U^* H_1 U + iU^* H_2 U = \widetilde{H}_1 + i\widetilde{H}_2.$$

La diagonal principal de las matrices $\widetilde{H}_1$ y $\widetilde{H}_2$ porta los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$, respectivamente, por eso $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leqslant \| U^* H_1 U \|_E^2 = \| H_1 \|_E^2 = \frac{1}{4} \| A + A^* \|_E^2$ y para los números $\beta_1, \ldots, \beta_n$ la fórmula es análoga.

8.4.14. Respecto a las relaciones (8.4.3): la igualdad $4\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \| A + A^* \|_E^2$ significa (véase la solución del 8.4.13) que $\widetilde{H}_1$ es una matriz diagonal. Como $\widetilde{H}_1 = \frac{1}{2}(B + B^*)$ y B es una matriz triangular, y como los elementos fuera de la diagonal de $\widetilde{H}_1$ son nulos, resulta que esto es válido también para B. Por eso A es una matriz normal.

8.4.15. Para las matrices A de estructura simple.

8.4.16. Según el 6.2.7 las matrices AB y BA tienen los mismos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Como AB es una matriz normal, tenemos

$$\| AB \|_E^2 = \sum_{i=1}^{n} \| \lambda_i \|^2.$$

Mostremos que $\| BA \|_E = \| AB \|_E$, de donde (en virtud de 8.4.14) se deduce que la matriz BA es normal. Efectivamente,

$\| BA \|_E^2 = \mathrm{tr}\,(BA\,(BA)^*) = \mathrm{tr}\,(BAA^*B^*) = \mathrm{tr}\,(AA^*B^*B) =$
$= \mathrm{tr}\,(A^*ABB^*) = \mathrm{tr}\,(B^*A^*AB) = \mathrm{tr}\,((AB)^*\,AB) = \| AB \|_E^2.$

Aquí han sido aprovechadas la normalidad de las matrices A y B y la igualdad $\mathrm{tr}\,(XY) = \mathrm{tr}\,(YX)$.

8.4.18. En el 7.6.64 hemos obtenido la representación $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \max\limits_{W} | \mathrm{tr}\,(AW) |$, donde W es una matriz unitaria arbitraria. Supongamos que $B = U^*AU$ es la forma de Schur de la matriz A. En este caso, $\mathrm{tr}\,(AW) = \mathrm{tr}\,(UBU^*W) = \mathrm{tr}\,(BU^*WU)$. Calculemos W_0 a partir de la relación $U^*W_0U = D$, donde D es la matriz unitaria diagonal tal que $b_{ii}d_{ii} = | b_{ii} | = | \lambda_i |$. Para la matriz W_0 (definida de manera no unívoca, si entre los números λ_i hay números nulos) $\mathrm{tr}\,(AW_0) = | \lambda_1 | + \ldots + | \lambda_n |$, de donde resulta la igualdad necesaria.

8.4.19. La afirmación se deduce de los 8.2.13, 8.2.27 y 8.4.18.

8.4.20. Si

$$|z - a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

la matriz $zE - A$ es una matriz diagonalmente dominante y, por consiguiente, es no singular. Por eso z no puede ser valor propio de la matriz A.

8.4.21. Este dominio consta de tres círculos:
$| z - 1{,}23 | \leqslant 0{,}07$; $| z - 2{,}17 | \leqslant 0{,}04$; $| z - 3{,}06 | \leqslant 0{,}06$.

8.4.23. Por ejemplo, un dominio compuesto de tres círculos:
$| z - \lambda_i | \leqslant 0{,}012$; $i = 1, 2, 3$, donde $\lambda_1 = 0{,}5$; $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2{,}5$.

8.4.24. Por ejemplo, un dominio compuesto de tres círculos: $| z - \lambda_i | \leqslant 45\varepsilon$, $i = 1, 2, 3$, donde $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

8.4.27. Por ejemplo, $\widetilde{\lambda}_1 = -0{,}5$, $\widetilde{\lambda}_2 = -1$, $\widetilde{\lambda}_3 = 0{,}5$, $\widetilde{\lambda}_4 = 1$.

8.4.29. Por ejemplo, $\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_2 = -1$, $\widetilde{\lambda}_3 = 1$, $\widetilde{\lambda}_4 = 3$.

8.4.32. Para la demostración de a) reemplacemos los elementos a_{12}, a_{21} y a_{18}, a_{81} por ceros. La norma espectral de la matriz de perturbación correspondiente es igual a $\sqrt{2}/N$, de donde se deduce a).

Para demostrar b) examinemos la matriz A como una perturbación de una matriz casi diagonal D con células diagonales

$$D_{11}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix},\quad D_{22}=\begin{Vmatrix}2&0\\0&2\end{Vmatrix},\quad D_{33}=\begin{Vmatrix}-0.5&0,1&-0,2\\0.1&-1&0\\-0.2&0&2\end{Vmatrix}$$

Para la matriz de perturbación $B = A - D$ $\|B\|_2 \leqslant \|B\|_\infty = 3/N$. Por eso el intervalo

$$-3/N \leqslant \lambda - 1 \leqslant 3/N \qquad (\alpha)$$

contiene por lo menos tres valores propios de la matriz A. Para mostrar que los hay exactamente tres demostremos que para $N \geqslant 10$ el intervalo (α) no se interseca con otros intervalos del sistema $|x-\lambda_i| \leqslant 3/N$, $i = 1, \ldots, n$; λ_i son autovalores de D.

Esto está claro para el intervalo $|x-2| \leqslant 3/N \leqslant 0,3$. Advirtamos ahora que según el teorema de Gershgorin los valores propios λ_6, λ_7, λ_8 de la matriz D_{33} se encuentran en los intervalos $[-1,3; -0.7]$, $[-0,8; -0.2]$, $[1,7; 2,3]$. Por eso para $N \geqslant 10$ los intervalos $|x-\lambda_i| \leqslant 3/N \leqslant 0,3$, $i = 6, 7, 8$ permanecen separados del intervalo (α).

8.4.36. El vector $r(x)\,x$ es la proyección del vector Ax sobre L (x).

8.4.38. Como $|\alpha|^2 + \|z\|_2^2 = 1$, tenemos $\mu_0 = \mu_0 |\alpha|^2 + \mu_0 \|z\|_2^2$. Por otra parte, $\mu_0 = (A\tilde{x}, \tilde{x}) = \lambda_1 |\alpha|^2 + (Az, z)$. De aquí se deduce que $|\lambda_1 - \mu_0|\,|\alpha|^2 = |(Az, z) - \mu_0 \|z\|_2^2| \leqslant \varepsilon^2/a$. Puesto que $|\alpha| \geqslant \sqrt{1-\varepsilon^2/a^2}$, se obtiene la estimación necesaria.

8.4.39. a) Por ejemplo, $\tilde{\lambda}_1 = 1$, $\tilde{\lambda}_2 = 2$, $\tilde{\lambda}_3 = 3$, $\tilde{\lambda}_4 = 4$; b) vectores columna unitarios.

8.4.42. a) Si $Z = X^{-1}$ y z_i es la i-ésima fila de la matriz Z, entonces $z_i^* = y_i$ es un vector propio de la matriz A^* relativo a su autovalor $\bar{\lambda}_i$. En este caso de la igualdad matricial $XZ = E$ se deduce que $(x_i, y_i) = 1$ y $|s_i|^{-1} = \|x_i\|_2 \|y_i\|_2$. Ahora deduzcamos del 7.6.28: $\mathrm{cond}_2(X) = \|X\|_2 \|X^{-1}\|_2 \geqslant \|x_i\|_2 \|y_i\|_2 = 1/|s_i|$;

b) elijamos los vectores x_i tales que $\|x_i\|_2 = 1/\sqrt{|s_i|}$. Entonces, para las filas z_i de la matriz X^{-1} se obtiene también $\|z_i\|_2 = 1/\sqrt{|s_i|}$. Por eso

$$\mathrm{cond}_E(X) = \|X\|_E \|X^{-1}\|_E = \|X\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|s_i|}.$$

8.4.44. Sin limitar la generalidad se puede considerar que los vectores x e y son normalizados. Sea $C = Q^*AQ$ la forma de Schur superior de la matriz A elegida de modo que $c_{11} = \lambda_1$. Según 7.1.47 una tal forma puede ser construida y como la primera columna de la matriz Q se puede tomar el vector x. Entonces el vector $z = Q^*y$ será un autovector de C^* y $(e_1, z) = (Q^*x, Q^*y) = (x, y) = 0$. De este modo, el primer componente del vector z es igual a cero y la afirmación necesaria se deduce del 8.4.43.

8.4.45. La condición $C^*y = \tilde{\lambda}_1 y$ conduce a $\varepsilon c^* + C_{n-1}^* z = \bar{\lambda}_1 z$ o bien

$$C_{n-1}^* z + \varepsilon c^* \cdot \frac{z^* z}{1-|\varepsilon|^2} = \left(C_{n-1}^* + \frac{\varepsilon}{1-|\varepsilon|^2} c^* z^*\right) z = \bar{\lambda}_1 z.$$

De aquí se deduce la afirmación del problema.

ÍNDICE DE MATERIAS