PROBLEMAS
de
ALGEBRA
SUPERIOR

EDITORIAL MIR

Д. К. ФАДДЕЕВ, И. С. СОМИНСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

Издание девятое

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

D. FADDIEEV, I. SOMINSKI

PROBLEMAS de ALGEBRA SUPERIOR

Traducido del ruso
por
EMILIANO APARICIO BERNARDO,
Candidato a Doctor
en Ciencias Físico-Matemáticas,
Catedrático
de Matemáticas Superiores

EDITORIAL «MIR» • MOSCU 1971

CDU 512.8(075.8)-60

Impreso en la URSS

***На** испанском языке*

INDICE

SEGUNDA PARTE

INDICACIONES

TERCERA PARTE

RESPUESTAS Y RESOLUCIONES

INTRODUCCION

La aparición de la presente colección de problemas de álgebra superior es el resultado de las clases llevadas en la Universidad estatal de Leningrado y en el Instituto Pedagógico. El libro está destinado a los estudiantes de los cursos inferiores de las universidades e institutos pedagógicos para el estudio del curso fundamental de álgebra superior. Los problemas de la colección se dividen notablemente en dos tipos. Por una parte, se ha recopilado una gran cantidad de ejercicios numéricos, destinados a elaborar hábitos de cálculo, y los cuales ilustran las reglas principales del curso teórico. Según opinan los autores, la cantidad de ejercicios propuestos es suficiente para llevar las clases, deberes de casa y trabajos de control.

Por otra parte, se expone una cantidad considerable de problemas no muy difíciles, y otros difíciles, cuya solución exige de los estudiantes ahínco e inventiva. Muchos de los problemas de esta categoría van acompañados de indicaciones, incluidas en la segunda parte del libro. Los números de los problemas para los cuales se dan indicaciones, vienen marcados con un asterisco.

Se dan las soluciones de todos los problemas; para algunos de ellos se expone la resolución.

Los autores

PRIMERA PARTE

PROBLEMAS

CAPITULO I

NUMEROS COMPLEJOS

§ 1. Operaciones con los números complejos.

1. $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$. Hallar x e y, suponiendo qu son reales.

2. Resolver el sistema, suponiendo que x, y, z, t son reales:

$$(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t=1+5i,$$

$$(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it=2-i.$$

3. Calcular i^n, donde n es un número entero.

4. Comprobar la identidad

$$x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i).$$

5. Calcular:

a) $(1+2i)^6$; b) $(2+i)^7+(2-i)^7$; c) $(1+2i)^5-(1-2i)^5$.

6. Averiguar cuáles deben ser las condiciones para que el producto de dos números complejos sea imaginario puro.

7. Efectuar las operaciones indicadas:

a) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$; b) $\frac{a+bi}{a-bi}$; c) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

d) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$; e) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

8. Calcular $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, donde n es un número entero positivo.

9. Resolver el sistema de ecuaciones:

a) $(3-i)x+(4+2i)y=2+6i$, $(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i$;

b) $(2+i)x+(2-i)y=6$, $(3+2i)x+(3-2i)y=8$;

c) $x+yi-2z=10$, $x-y+2iz=20$, $ix+3iy-(1+i)z=30$.

10. Calcular:

a) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

***11.** Sea $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Calcular:

a) $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$; b) $(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)$;

c) $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$; d) $(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)$.

12. Hallar los números que son conjugados:
a) con su cuadrado, b) con su cubo.

***13.** Demostrar el teorema:
Si como resultado de efectuar una cantidad finita de operaciones racionales (o sea, sumar, restar, multiplicar y dividir) con los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ resulta el número u, entonces, al efectuar las mismas operaciones con los números conjugados $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, resulta el número $\bar{u}$ que es conjugado con u.

14. Demostrar que $x^2+y^2=(s^2+t^2)^n$, si $x+yi=(s+ti)^n$.

15. Calcular:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-8i}$; c) $\sqrt{3-4i}$; d) $\sqrt{-15+8i}$;

e) $\sqrt{-3-4i}$; f) $\sqrt{-11+60i}$; g) $\sqrt{-8+6i}$;

h) $\sqrt{-8-6i}$; i) $\sqrt{8-6i}$; j) $\sqrt{8+6i}$; k) $\sqrt{2-3i}$;

l) $\sqrt{4+i}+\sqrt{4-i}$; m) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; n) $\sqrt[4]{-1}$;

o) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

16. $\sqrt{a+bi}=\pm(\alpha+\beta i)$. ¿A qué es igual $\sqrt{-a-bi}$?

17. Resolver las ecuaciones:

a) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$;

b) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$;

c) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$.

***18.** Resolver las ecuaciones y descomponer sus primeros miembros en factores de coeficientes reales:

a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$; b) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

19. Resolver las ecuaciones:

a) $x^4-3x^2+4=0$; b) $x^4-30x^2+289=0$.

20. Componer una fórmula para la resolución de la ecuación bicuadrada $x^4+px^2+q=0$ con coeficientes reales, que sea cómoda para el caso en que $p^2/4-q<0$.

§ 2. Los números complejos en forma trigonométrica

21. Trazar los puntos que representan a los números complejos:

$$1,\ -1,\ -\sqrt{2},\ i,\ -i,\ i\sqrt{2},\ -1+i,\ 2-3i.$$

22. Expresar los siguientes números en forma trigonométrica:

a) 1; b) -1; c) i; d) $-i$; e) $1+i$;

f) $-1+i$; g) $-1-i$; h) $1-i$; i) $1+i\sqrt{3}$;

j) $-1+i\sqrt{3}$; k) $-1-i\sqrt{3}$; l) $1-i\sqrt{3}$; m) $2i$;

n) -3; o) $\sqrt{3}-i$; p) $2+\sqrt{3}+i$.

23. Empleando tablas, expresar los números siguientes en forma trigonométrica:

a) $3+i$; b) $4-i$; c) $-2+i$; d) $-1-2i$.

24. Hallar el lugar geométrico de los puntos que representan a los números complejos:

a) cuyos módulos son iguales a 1; b) cuyos argumentos son iguales a $\frac{\pi}{6}$.

25. Hallar el lugar geométrico de los puntos que representan a los números complejos z que satisfacen a las desigualdades:

a) $|z|<2$; b) $|z-i|\leqslant 1$; c) $|z-1-i|<1$.

26. Resolver las ecuaciones: a) $|x|-x=1+2i$; b) $|x|+x=2+i$.

***27.** Demostrar la identidad

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2(|x|^2+|y|^2).$$

¿Qué significado geométrico tiene esta identidad?

***28.** Demostrar que todo número complejo z, distinto de -1 y cuyo módulo es igual a 1, puede expresarse en la forma $z=\frac{1+ti}{1-ti}$, donde t es un número real.

29. ¿En qué condiciones el módulo de la suma de dos números complejos es igual a la diferencia de los módulos de los sumandos?

30. ¿En qué condiciones el módulo de la suma de dos números complejos es igual a la suma de los módulos de los sumandos?

***31.** z y z' son dos números complejos, $u=\sqrt{zz'}$. Demostrar que

$$|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|.$$

32. Demostrar que si $|z| < \frac{1}{2}$, entonces

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

33. Demostrar que

$$(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right].$$

34. Simplificar

$$\frac{\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi}{\cos\psi - i\operatorname{sen}\psi}.$$

35. Calcular

$$\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi)}.$$

36. Calcular:

a) $(1+i)^{25}$; b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; c) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$;

d) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

***37.** Demostrar que

a) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right)$;

n es un número entero.

***38.** Simplificar $(1+\omega)^n$, donde $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$.

39. Haciendo

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

determinar $\omega_1^n + \omega_2^n$, donde n es un número entero.

***40.** Calcular $(1+\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n$.

***41.** Demostrar que si $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, entonces

$$z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta.$$

42. Demostrar que

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}.$$

43. Extraer las raíces:

a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[3]{2-2i}$; c) $\sqrt[4]{-4}$; d) $\sqrt[6]{1}$; e) $\sqrt[6]{-27}$.

44. Empleando tablas, extraer las raíces:

a) $\sqrt[3]{2+i}$; b) $\sqrt[3]{3-i}$; c) $\sqrt[5]{2+3i}$.

45. Calcular:

a) $\sqrt[8]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; b) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; c) $\sqrt[8]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

46. Sabiendo que β es uno de los valores de $\sqrt[n]{\alpha}$, escribir todos los valores de $\sqrt[n]{\alpha}$.

47. Expresar mediante $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$:

a) $\cos 5x$; b) $\cos 8x$; c) $\operatorname{sen} 6x$; d) $\operatorname{sen} 7x$.

48. Expresar $\operatorname{tg} 6\varphi$ mediante $\operatorname{tg} \varphi$.

49. Componer las fórmulas que expresan $\cos nx$ y $\operatorname{sen} nx$ mediante $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

50. Representar en forma de un polinomio de primer grado en las funciones trigonométricas de los ángulos múltiplos de x:

a) $\operatorname{sen}^3 x$; b) $\operatorname{sen}^4 x$; c) $\cos^5 x$; d) $\cos^6 x$.

***51.** Demostrar que:

a) $2^{2m}\cos^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m$;

b) $2^{2m}\cos^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2m-2k+1)x$;

c) $2^{2m}\operatorname{sen}^{2m} x = 2\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + C_{2m}^m$;

d) $2^{2m}\operatorname{sen}^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \operatorname{sen}(2m-2k+1)x$.

***52.** Demostrar que $2\cos mx = (2\cos x)^m -$

$$-\frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}(2\cos x)^{m-4} - \ldots +$$

$$+(-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{p!}(2\cos x)^{m-2p} + \ldots.$$

***53.** Expresar $\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x}$ mediante $\cos x$.

***54.** Hallar las sumas:

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$; b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

***55.** Demostrar que:

a) $1 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $C_n^1+C_n^5+C^9+\dots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$;

c) $C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+\dots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

d) $C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+\dots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$.

*56. Hallar la suma

$$C_n^1-\frac{1}{3}C_n^3+\frac{1}{9}C_n^5-\frac{1}{27}C_n^7+\dots$$

57. Demostrar que $(x+a)^m+(x+a\omega)^m+(x+a\omega^2)^m=3x^m+$ $+3C_m^3x^{m-3}a^3+\dots+3C_m^nx^{m-n}a^n$, donde $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$, y n es el máximo número entero, múltiplo de 3, que no supera a m.

58. Demostrar que:

a) $1+C_n^3+C_n^6+\dots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$;

b) $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\dots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

c) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\dots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

59. Calcular las sumas:

a) $1+a\cos\varphi+a^2\cos 2\varphi+\dots+a^k\cos k\varphi$;

b) $\operatorname{sen}\varphi+a\operatorname{sen}(\varphi+h)+a^2\operatorname{sen}(\varphi+2h)+\dots+a^k\operatorname{sen}(\varphi+kh)$;

c) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx$.

60. Demostrar que

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\dots+\operatorname{sen}nx=\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\cdot\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

61. Hallar

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+\dots+\frac{1}{2^n}\cos nx\right).$$

62. Demostrar que si n es entero y positivo y θ es un ángulo que satisface a la condición $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2n}$, entonces

$$\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}+\dots+\cos\frac{2n-1}{2}\theta=n\operatorname{sen}n\theta.$$

63. Demostrar que

a) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$;

b) $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{2}$;

c) $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1}{2}$.

64. Hallar las sumas:

a) $\cos a-\cos(a+h)+\cos(a+2h)-\ldots$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\cos[a+(n-1)h];$$

b) $\operatorname{sen} a-\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen}(a+2h)-\ldots$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\operatorname{sen}[a+(n-1)h].$$

65. Demostrar que si x es menor que la unidad en valor absoluto, entonces las series

a) $\cos\alpha+x\cos(\alpha+\beta)+x^2\cos(\alpha+2\beta)+\ldots$

$$\ldots+x^n\cos(\alpha+n\beta)+\ldots,$$

b) $\operatorname{sen}\alpha+x\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+x^2\operatorname{sen}(\alpha+2\beta)+\ldots$

$$\ldots+x^n\operatorname{sen}(\alpha+n\beta)+\ldots$$

son convergentes y sus sumas son iguales a

$$\frac{\cos\alpha-x\cos(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2},\quad \frac{\operatorname{sen}\alpha-x\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2},$$

respectivamente.

66. Hallar las sumas:

a) $\cos x+C_n^1\cos 2x+\ldots+C_n^n\cos(n+1)x$;

b) $\operatorname{sen} x+C_n^1\operatorname{sen} 2x+\ldots+C_n^n\operatorname{sen}(n+1)x$.

67. Hallar las sumas:

a) $\cos x-C_n^1\cos 2x+C_n^2\cos 3x-\ldots+(-1)^n C_n^n\cos(n+1)x$;

b) $\operatorname{sen} x-C_n^1\operatorname{sen} 2x+C_n^2\operatorname{sen} 3x-\ldots+(-1)^n C_n^n\operatorname{sen}(n+1)x$.

***68.** $\overrightarrow{OA_1}$ y $\overrightarrow{OB}$ son los vectores que representan a 1 e i, respectivamente. Desde O se ha levantado una perpendicular OA_2 a A_1B; desde A_2 se ha trazado una perpendicular A_2A_3 a OA_1; desde A_3 se ha trazado una perpendicular A_3A_4 a A_1A_2, etc., según la regla: desde A_n se ha trazado una perpendicular A_nA_{n+1} a $A_{n-2}A_{n-1}$. Hallar el límite de la suma

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots$$

***69.** Hallar la suma

$$\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 3x+\ldots+\operatorname{sen}^2(2n-1)x.$$

70. Demostrar que

a) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 nx=\frac{n}{2}+\frac{\cos(n+1)x\,\operatorname{sen} nx}{2\operatorname{sen} x}$;

b) $\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 2x+\ldots+\operatorname{sen}^2 nx=\frac{n}{2}-\frac{\cos(n-1)x\,\operatorname{sen} nx}{2\operatorname{sen} x}$.

***71.** Hallar las sumas:

a) $\cos^3 x+\cos^3 2x+\ldots+\cos^3 nx$;

b) $\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen}^3 2x+\ldots+\operatorname{sen}^3 nx$.

***72.** Hallar las sumas:

a) $\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+\ldots+n\cos nx$;

b) $\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} 2x+3\operatorname{sen} 3x+\ldots+n\operatorname{sen} nx$.

73. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ para $\alpha=a+bi$.

74. Definición: $e^{\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$. Demostrar que:

a) $e^{2\pi i}=1$; b) $e^{\pi i}=-1$;

c) $e^{\alpha+\beta}=e^{\alpha}\cdot e^{\beta}$; d) $(e^{\alpha})^k=e^{\alpha k}$ para k entero.

§ 3. Ecuaciones de tercero y cuarto grado

75. Resolver las ecuaciones siguientes por la fórmula de Cardano:

a) $x^3-6x+9=0$;

b) $x^3+12x+63=0$;

c) $x^3+9x^2+18x+28=0$;

d) $x^3+6x^2+30x+25=0$;

e) $x^3-6x+4=0$;

f) $x^3+6x+2=0$;

g) $x^3+18x+15=0$;

h) $x^3-3x^2-3x+11=0$;

i) $x^3+3x^2-6x+4=0$;

j) $x^3+9x-26=0$;

k) $x^3+24x-56=0$;

l) $x^3+45x-98=0$;

m) $x^3+3x^2-3x-1=0$;

n) $x^3-6x^2+57x-196=0$;

o) $x^3+3x-2i=0$;

p) $x^3-6ix+4(1-i)=0$;

q) $x^3-3abx+a^3+b^3=0$;

r) $x^3-3abfgx+f^2ga^3+fg^2b^3=0$;

s) $x^3-4x-1=0$;

t) $x^3-4x+2=0$.

***76.** Aplicando la fórmula de Cardano, demostrar que

$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-4p^3-27q^2,$$

si x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación $x^3+px+q=0$.

(La expresión $-4p^3-27q^2$ se llama discriminante de la ecuación $x^3+px+q=0$).

*77. Resolver la ecuación

$$(x^3-3qx+p^3-3pq)^2-4(px+q)^3=0.$$

*78. Deducir la fórmula para la resolución de la ecuación

$$x^5-5ax^3+5a^2x-2b=0.$$

79. Resolver las ecuaciones:

a) $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$; b) $x^4+2x^3-2x^2+6x-15=0$;

c) $x^4-x^3-x^2+2x-2=0$; d) $x^4-4x^3+3x^2+2x-1=0$;

e) $x^4-3x^3+x^2+4x-6=0$; f) $x^4-6x^3+6x^2+27x-56=0$;

g) $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$; h) $x^4-x^3-3x^2+5x-10=0$;

i) $x^4+2x^3+8x^2+2x+7=0$; j) $x^4+6x^3+6x^2-8=0$;

k) $x^4-6x^3+10x^2-2x-3=0$; l) $x^4-2x^3+4x^2+2x-5=0$;

m) $x^4-x^3-3x^2+x+1=0$; n) $x^4-x^3-4x^2+4x+1=0$;

o) $x^4-2x^3+x^2+2x-1=0$; p) $x^4-4x^3-20x^2-8x+4=0$;

q) $x^4-2x^3+3x^2-2x-2=0$; r) $x^4-x^3+2x-1=0$;

s) $4x^4-4x^3+3x^2-2x+1=0$; t) $4x^4-4x^3-6x^2+2x+1=0$.

80. El método de Ferrari para la resolución de la ecuación de cuarto grado $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ consiste en que el primer miembro se representa en la forma

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}+\lambda-b\right)x^2+\left(\frac{a\lambda}{2}-c\right)x+\left(\frac{\lambda^2}{4}-d\right)\right]$$

y después se elige λ de tal modo que la expresión que figura entre corchetes sea el cuadrado de un binomio de primer grado. Para esto es necesario y suficiente que sea

$$\left(\frac{a\lambda}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}+\lambda-b\right)\left(\frac{\lambda^2}{4}-d\right)=0,$$

es decir, que λ sea una raíz de una ecuación cúbica auxiliar. Hallando λ, descomponemos el primer miembro en factores.

Expresar las raíces de la ecuación auxiliar mediante las raíces de la ecuación de cuarto grado.

§ 4. Raíces de la unidad

81. Escribir las raíces de la unidad de grado:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

82. Escribir las raíces primitivas de grado:

a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

83. ¿A qué exponente pertenece:

a) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{180} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{180}$ si $k = 27, 99, 137$;

b) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{144} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{144}$ si $k = 10, 35, 60$?

84. Escribir todas las raices de la unidad de grado 28 que pertenecen al exponente 7.

85. Para cada raíz de la unidad de grado: a) 16; b) 20; c) 24, indicar el exponente al que pertenece.

86. Escribir los "polinomios circulares" $X_n(x)$ para n igual a a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5; f) 6; g) 7; h) 8; i) 9; j) 10; k) 11; l) 12; m) 15; n) 105.

***87.** Sea ε una raiz primitiva de la unidad de grado $2n$. Calcular la suma $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}$.

***88.** Hallar la suma de todas las raíces de 1 de n-ésimo grado.

***89.** Hallar la suma de las k-ésimas potencias de todas las raíces de 1 de n-ésimo grado.

90. Poner sucesivamente en la expresión $(x+a)^m$, en lugar de a, las m raíces de 1 de m-ésimo grado, y sumar los resultados obtenidos.

***91.** Calcular $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\ldots+n\varepsilon^{n-1}$, donde ε es una raíz n-ésima de 1.

***92.** Calcular $1+4\varepsilon+9\varepsilon^2+\ldots+n^2\varepsilon^{n-1}$, donde ε es una raiz n-ésima de 1.

93. Hallar las sumas:

a) $\cos\frac{2\pi}{n}+2\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+(n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$;

b) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n}+\ldots+(n-1)\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

***94.** Hallar la suma de las raíces primitivas de la unidad de grado: a) 15; b) 24; c) 30.

95. Hallar las raíces de 1 de quinto grado, resolviendo algebraicamente la ecuación $x^5-1=0$.

96. Aplicando el resultado del problema 95, escribir sen 18° y cos 18°.

***97.** Formar la ecuación algebraica más simple que tenga por raíz la longitud del lado de un polígono regular de 14 lados inscrito en el círculo de radio 1.

***98.** Descomponer x^n-1 en factores de primero y segundo grados con coeficientes reales.

***99.** Aplicar el resultado del problema 98 para demostrar las fórmulas:

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2m}\ldots\operatorname{sen}\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$;

b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m+1}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2m+1}\ldots\operatorname{sen}\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$,

*100. Demostrar que $\prod_{k=0}^{n-1}(a+b\varepsilon_k)=a^n+(-1)^{n-1}b^n$,
donde
$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.$$

*101. Demostrar que
$$\prod_{k=0}^{n-1}(\varepsilon_k^2-2\varepsilon_k\cos\theta+1)=2(1-\cos n\theta),$$
si
$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.$$

102. Demostrar que
$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(t+\varepsilon_k)^n-1}{t}=\prod_{k=1}^{n-1}[t^n-(\varepsilon_k-1)^n],$$
donde $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$.

*103. Hallar todos los números complejos que satisfacen a la condición $\overline{x}=x^{n-1}$, donde $\overline{x}$ es el conjugado de x.

104. Demostrar que las raíces de la ecuación $\lambda(z-a)^n+$ $+\mu(z-b)^n=0$, donde λ, μ, a, b son complejos, están situados en una circunferencia, la cual, en caso particular, puede degenerarse en una recta (n es un número natural).

*105. Resolver las ecuaciones:

a) $(x+1)^m-(x-1)^m=0$; b) $(x+i)^m-(x-i)^m=0$;

c) $x^n-nax^{n-1}-C_n^2a^2x^{n-2}-\ldots-a^n=0$.

106. Demostrar que si A es un número complejo, cuyo módulo es igual a 1, entonces la ecuación
$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m=A$$
tiene todas las raíces reales y distintas.

*107. Resolver la ecuación
$$\cos\varphi+C_n^1\cos(\varphi+\alpha)x+C_n^2\cos(\varphi+2\alpha)x^2+\ldots$$
$$\ldots+C_n^n\cos(\varphi+n\alpha)x^n=0.$$

Demostrar los siguientes teoremas:

108. El producto de una raíz de 1 de grado a por una raíz de 1 de grado b es una raíz de 1 de grado ab.

109. Si a y b son primos entre sí, entonces x^a-1 y x^b-1 tienen una raíz común única.

110. Si a y b son primos entre sí, entonces todas las raíces de 1 de grado ab se obtienen multiplicando las raíces de 1 de grado a por las raíces de 1 de grado b.

111. Si a y b son primos entre sí, entonces el producto de una raíz primitiva de 1 de grado a por una raíz primitiva de 1 de grado b es una raíz primitiva de 1 de grado ab, y recíprocamente.

112. Designando con $\varphi(n)$ el número de raíces primitivas n-ésimas de 1, demostrar que $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$, si a y b son primos entre sí.

***113.** Demostrar que si $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, donde $p_1, p_2, \dots, p_k$ son números primos distintos, entonces

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

114. Demostrar que el número de raíces primitivas n-ésimas de la unidad, es par, si $n>2$.

115. Escribir el polinomio $X_p(x)$, donde p es un número primo.

***116.** Escribir el polinomio $X_{p^m}(x)$, donde p es un número primo.

***117.** Demostrar que para n impar, mayor que 1, $X_{2n}(x)=X_n(-x)$.

118. Demostrar que si d está formado por divisores primos que figuran en n, entonces cada raíz primitiva de 1 de grado nd es una raiz de grado d de la raíz primitiva n-ésima de 1, y recíprocamente.

***119.** Demostrar que si $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ donde $p_1, p_2, \dots, p_k$ son números primos distintos, entonces $X_n(x)=X_{n'}(x^{n''})$, donde

$$n'=p_1p_2\dots p_k;\quad n''=\frac{n}{n'}.$$

***120.** Designemos por $\mu(n)$ la suma de las raíces primitivas n-ésimas de 1; demostrar que $\mu(n)=0$, si n es divisible por el cuadrado de al menos un número primo; $\mu(n)=1$, si n es el producto de un número par de números primos distintos; $\mu(n)=-1$, si n es el producto de un número impar de números primos distintos.

121. Demostrar que $\sum\mu(d)=0$, si d recorre todos los divisores del número n para $n\neq 1$.

***122.** Demostrar que $X_n(x)=\Pi(x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$ donde d recorre todos los divisores de n.

***123.** Hallar $X_n(1)$.

***124.** Hallar $X_n(-1)$.

***125.** Determinar la suma de los productos de las raíces primitivas n-ésimas de 1, tomadas dos a dos.

***126.** $S=1+\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^9+\dots+\varepsilon^{(n-1)^2}$, donde ε es una raíz primitiva n-ésima de 1. Hallar $|S|$.

CAPITULO 2

CALCULO DE DETERMINANTES

§ 1. Determinantes de 2° y 3° órdenes

Calcular los determinantes:

127. a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ \gamma-\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

j) $\begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$; l) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

m) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$; n) $\begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix}$,

donde $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$;

o) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$,

donde $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$.

128. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{3}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & 1 & \cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{4}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{2\pi}{3}-i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} & 1 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, donde $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$;

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$, donde $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$.

§ 2. Permutaciones

129. Escribir las trasposiciones mediante las cuales se puede pasar de la permutación 1, 2, 4, 3, 5 a la permutación 2, 5, 3, 4, 1.

130. Suponiendo que 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 es la disposición inicial, determinar el número de inversiones en las permutaciones:

a) 1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5; b) 2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4;

c) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

131. Suponiendo que 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 es la disposición inicial, elegir i y k de tal manera que:

a) la permutación 1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9 sea par;

b) la permutación 1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7 sea impar.

***132.** Determinar el número de inversiones en la permutación $n, n-1, \ldots, 2, 1$, si la permutación inicial es $1, 2, \ldots, n$.

***133.** En la permutación $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ hay I inversiones. ¿Cuántas inversiones hay en la permutación $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$?

134. Determinar el número de inversiones en las permutaciones:

a) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n$;

b) $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$,

si la permutación inicial es $1, 2, \ldots, 2n$.

135. Determinar el número de inversiones en las permutaciones:

a) $3, 6, 9, \ldots, 3n, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, \ldots, 3n-1$;

b) $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, \ldots, 3n-1, 3, 6, \ldots, 3n$,

si la permutación inicial es $1, 2, 3, \ldots, 3n$.

136. Demostrar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una permutación con un número de inversiones I, entonces, después de reducirla a la disposición inicial, los índices $1, 2, \ldots, n$ forman una permutación con el mismo número de inversiones I.

137. Determinar la paridad de la permutación de las letras t, r, m, i, a, g, o, l, si se toma por inicial su disposición en las palabras:

a) logaritmo; b) algoritmo (en estas palabras la última letra o no se cuenta. *Nota del T.*)

Comparar y explicar los resultados.

§ 3. Definición de un determinante

138. ¿Con qué signo figuran en el determinante de 6° orden los productos: a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$?

139. ¿Figuran en el determinante de 5° orden los productos: a) $a_{13}a_{24}a_{23}a_{41}a_{55}$; b) $a_{21}a_{13}a_{34}a_{55}a_{42}$?

140. Elegir i y k de tal modo que el producto $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ figure en el determinante de 5° orden con el signo más.

141. Escribir todos los sumandos que figuran en el determinante de 4° orden con el signo menos y que contienen el factor a_{23}.

142. Escribir todos los sumandos que forman parte del determinante de 5° orden y que tienen la forma $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}a_{5\alpha_5}$. ¿Qué ocurrirá si de su suma se saca fuera de paréntesis $a_{14}a_{23}$?

143. ¿Con qué signo figura en el determinante de n-ésimo orden el producto de los elementos de la diagonal principal?

144. ¿Con qué signo figura en el determinante de n-ésimo orden el producto de los elementos de la segunda diagonal?

***145.** Basándose en la definición de determinante, demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

es igual a 0.

146. Basándose sólo en la definición de determinante, calcular los coeficientes de x^4 y x^3 en la expresión

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

147. Calcular los determinantes:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}; \text{ b)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}; \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Observación. En todos aquellos problemas en que de las condiciones del mismo no queda claro cuál es el orden del determinante, si no se ha hecho alguna restricción especial se supondrá que éste es igual a n.

148. $F(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$.

Calcular los determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} F(0) & F(1) & F(2) & \ldots & F(n) \\ F(1) & F(2) & F(3) & \ldots & F(n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F(n) & F(n+1) & F(n+2) & \ldots & F(2n) \end{vmatrix};$$

$$b)\ \begin{vmatrix} F(a) & F'(a) & F''(a) & \ldots & F^{(n)}(a) \\ F'(a) & F''(a) & F'''(a) & \ldots & F^{(n+1)}(a) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F^{(n)}(a) & F^{(n+1)}(a) & F^{(n+2)}(a) & \ldots & F^{(2n)}(a) \end{vmatrix}.$$

§ 4. Propiedades fundamentales de los determinantes

***149.** Demostrar que un determinante de n-ésimo orden, en el cual cada elemento a_{ik} es el conjugado complejo del elemento a_{ki}, es igual a un número real.

***150.** Demostrar que un determinante de orden impar es igual a 0, si todos sus elementos satisfacen a la condición

$$a_{ik}+a_{ki}=0$$

(determinante antisimétrico o hemisimétrico).

151. El determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ es igual a Δ.

¿A qué es igual el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{vmatrix}?$$

152. ¿Cómo variará un determinante si se escriben todas sus columnas en orden inverso?

*153. ¿A qué es igual la suma

$$\sum \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \dots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \dots & a_{2\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \dots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

si la sumación se extiende a todas las permutaciones $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$?

*154. Resolver las ecuaciones:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ son todos distintos;

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0.$$

*155. Los números 204, 527 y 255 son divisibles por 17. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

es divisible por 17.

*156. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

157. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

158. Simplificar el determinante $\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix}$, desarrollándolo en sumandos.

159. Hallar la suma de los complementos algebraicos de todos los elementos de los determinantes:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

160. Desarrollar por los elementos de la tercera fila y calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

161. Desarrollar por los elementos de la última columna y calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

162. Desarrollar por los elementos de la primera columna y calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

§ 5. Cálculo de determinantes

Calcular los determinantes:

***163.** $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$. **164.** $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$.

165. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. **166.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$. **167.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

168. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$. **169.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

170. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. **171.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

172. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$. **173.** $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

174. $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$. **175.** $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$.

176. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

177. $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \operatorname{sen}(a+b) & \operatorname{sen}(b+c) & \operatorname{sen}(c+a) \end{vmatrix}$.

178. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$. ***179.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

***180.** $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

***181.** $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$.

***182.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$.

***183.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$.

***184.** $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$.

***185.** $\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$.

***186.** $\begin{vmatrix} a & -(a+h) & \dots & (-1)^{n-1}[a+(n-1)h] \\ a & a & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$.

***187.** $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & C_{n-2}^3 & \dots & C_{n-2}^{n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

***188.** $$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

***189.** $$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

***190.** Calcular la diferencia $f(x+1)-f(x)$, donde

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \dots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

***191.** $$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

***192.** $$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

193. $$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}.$$

***194.** $$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***195.** $$\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

***196.** $$\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \dots & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \dots & h \end{vmatrix}.$$

***197.** $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

***198.** $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ 1 & a_2+a_1 & 0 & \dots & a_2+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

***199.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***200.** $$\begin{vmatrix} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

(el orden es $n+1$).

***201.** $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ x_{11} & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ x_{21} & x_{22} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***202.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***203.** $$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & -b_0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -b_1 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

***204.** $$\begin{vmatrix} a & a^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2a+b & (a+b)^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a+3b & (a+2b)^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2a+(2n-1)b & (a+nb)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2a+(2n+1)b \end{vmatrix}.$$

***205.** $$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

***206.** $$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

207. $$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \dots & a_2-b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$$

***208.** $$\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & \dots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \dots & a_2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \dots & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

209. $\begin{vmatrix} a^n-\alpha & a^{n+1}-\alpha & \dots & a^{n+p-1}-\alpha \\ a^{n+p}-\alpha & a^{n+p+1}-\alpha & \dots & a^{n+2p-1}-\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n+p(p-1)}-\alpha & a^{n+p(p-1)+1}-\alpha & \dots & a^{n+p^2-1}-\alpha \end{vmatrix}$.

210. Demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

es igual a cero, si $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ son polinomios en x, cada uno de grado no superior a $n-2$, y los números a_1, a_2, ..., a_n son arbitrarios.

Calcular los determinantes:

***211.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

***212.** $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$.

***213.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$.

***214.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

***215.** $\begin{vmatrix} n!\,a_0 & (n-1)!\,a_1 & (n-2)!\,a_2 & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

216. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$.

Escribir un determinante de n-ésimo orden de esta forma y calcularlo.

Calcular los determinantes:

217. $$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

218. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

***219.** $$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

220. $$\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

***221.** $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

***222.** $$\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \dots & x_1y_n \\ x_1y_2 & x_2y_2 & x_2y_3 & \dots & x_2y_n \\ x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 & \dots & x_3y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1y_n & x_2y_n & x_3y_n & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

***223.** $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

224. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a_1+1 \\ 1 & 1 & \dots & a_2+1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1}+1 & \dots & 1 & 1 \\ a_n+1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

***225.** $$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

***226.** $$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

***227.** $$\begin{vmatrix} x_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & x_2 & a_3b_2 & \dots & a_nb_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & x_3 & \dots & a_nb_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

3*

***228.** $$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n-m \end{vmatrix}.$$

229. Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n-\alpha_n x \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}-\alpha_{n-1}x & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1-\alpha_1 x & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=0.$$

Calcular los determinantes:

***230.** $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \text{ (de orden } 2n\text{)}.$$

***231.** $$\begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & \dots & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \dots & -(n-1)b \\ 1 & (n-1)a & a & -3b & \dots & -(n-1)b \\ 1 & (n-2)a & a & a & \dots & -(n-1)b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}.$$

***232.** $$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x-a_2)^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

***233.** $$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & (x-a_2)^2 & \dots & a_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & (x-a_n)^2 \end{vmatrix}.$$

***234.** $$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

***235.** $$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & 0 & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

***236.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***237.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ x & x & x & 1 & \dots & n-3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

***238.** $$\begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \dots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}.$$

***239.** Demostrar la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_{00}x^n & a_{01}x^{n-1} & a_{02}x^{n-2} & \dots & a_{0n} \\ a_{10}x & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20}x^2 & a_{21}x & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0}x^n & a_{n1}x^{n-1} & a_{n2}x^{n-2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x^n \cdot \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

***240.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***241.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & \dots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}.$$

***242.** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***243.** $$\begin{vmatrix} C_m^k & C_m^{k+1} & \dots & C_m^{k+n} \\ C_{m+1}^k & C_{m+1}^{k+1} & \dots & C_{m+1}^{k+n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{m+n}^k & C_{m+n}^{k+1} & \dots & C_{m+n}^{k+n} \end{vmatrix}.$$

***244.** $\begin{vmatrix} C_{k+m}^m & C_{k+m+1}^m & \dots & C_{k+2m}^m \\ C_{k+m+1}^m & C_{k+m+2}^m & \dots & C_{k+2m+1}^m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{k+2m}^m & C_{k+2m+1}^m & \dots & C_{k+3m}^m \end{vmatrix}$.

***245.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$.

***246.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \dots & x^2 \\ 1 & 3 & 3\cdot 2. & 3! & \dots & x^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & \dots & x^n \end{vmatrix}$.

***247.**

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\delta & \alpha+2\delta & \alpha+3\delta & \dots & \alpha+(n-1)\delta \\ \alpha & 2\alpha+\delta & 3\alpha+3\delta & 4\alpha+6\delta & \dots & C_n^1\alpha+C_n^2\delta \\ \alpha & 3\alpha+\delta & 6\alpha+4\delta & 10\alpha+10\delta & \dots & C_{n+1}^2\alpha+C_{n+1}^3\delta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha & C_n^{n-1}\alpha+\delta & C_{n+1}^{n-1}\alpha+C_{n+1}^n\delta & C_{n+2}^{n-1}\alpha+C_{n+2}^n\delta & \dots & C_{2n-2}^{n-1}\alpha+C_{2n-2}^n\delta \end{vmatrix}.$$

***248.** $\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y & y \\ z & x & y & \dots & y & y \\ z & z & x & \dots & y & y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}$.

***249.** $\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & 0 \\ a & a & a & \dots & 0 & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & 0 & b & \dots & b & b \\ 0 & b & b & \dots & b & b \end{vmatrix}$.

250. $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

251. $\begin{vmatrix} c_1 & a & a & \dots & a & 1 \\ b & c_2 & a & \dots & a & 1 \\ b & b & c_3 & \dots & a & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & b & b & \dots & c_n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

***252.** $\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}$.

***253.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$.

*254. $$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-1)h \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a \\ a+2h & a+3h & a+4h & \dots & a+h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-2)h \end{vmatrix}.$$

255. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x^2 & x^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

*256. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

257. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

*258. $$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

*259. $$\begin{vmatrix} \cos^{n-1}\varphi_1 & \cos^{n-2}\varphi_1 & \dots & \cos\varphi_1 & 1 \\ \cos^{n-1}\varphi_2 & \cos^{n-2}\varphi_2 & \dots & \cos\varphi_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos^{n-1}\varphi_n & \cos^{n-2}\varphi_n & \dots & \cos\varphi_n & 1 \end{vmatrix}.$$

260. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \operatorname{sen}\varphi_1 & \operatorname{sen}\varphi_2 & \dots & \operatorname{sen}\varphi_n \\ \operatorname{sen}^2\varphi_1 & \operatorname{sen}^2\varphi_2 & \dots & \operatorname{sen}^2\varphi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{sen}^{n-1}\varphi_1 & \operatorname{sen}^{n-1}\varphi_2 & \dots & \operatorname{sen}^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

261. $$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

262. $$\begin{vmatrix} (a_1+x)^n & (a_1+x)^{n-1} & \dots & a_1+x & 1 \\ (a_2+x)^n & (a_2+x)^{n-1} & \dots & a_2+x & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{n+1}+x)^n & (a_{n+1}+x)^{n-1} & \dots & a_{n+1}+x & 1 \end{vmatrix}.$$

263. $\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

***264.** $\begin{vmatrix} \omega_1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \omega_2 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$

***265.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \dots & x_n^2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$

266.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1+\operatorname{sen}\varphi_1 & 1+\operatorname{sen}\varphi_2 & \dots & 1+\operatorname{sen}\varphi_n \\ \operatorname{sen}\varphi_1+\operatorname{sen}^2\varphi_1 & \operatorname{sen}\varphi_2+\operatorname{sen}^2\varphi_2 & \dots & \operatorname{sen}\varphi_n+\operatorname{sen}^2\varphi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sen}^{n-2}\varphi_1+\operatorname{sen}^{n-1}\varphi_1 & \operatorname{sen}^{n-2}\varphi_2+\operatorname{sen}^{n-1}\varphi_2 & \dots & \operatorname{sen}^{n-2}\varphi_n+\operatorname{sen}^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

267. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$

donde $\varphi_k(x) = x^k + a_{1k}x^{k-1} + \dots + a_{kk}$.

268. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ F_1(\cos\varphi_1) & F_1(\cos\varphi_2) & \dots & F_1(\cos\varphi_n) \\ F_2(\cos\varphi_1) & F_2(\cos\varphi_2) & \dots & F_2(\cos\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n-1}(\cos\varphi_1) & F_{n-1}(\cos\varphi_2) & \dots & F_{n-1}(\cos\varphi_n) \end{vmatrix},$

donde $F_k(x) = a_{0k}x^k + a_{1k}x^{k-1} + \dots + a_{kk}$.

***269.** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \dots & \binom{x_n}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix},$$

donde $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{1\cdot 2\dots k}$.

***270.** Demostrar que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

para valores enteros de $a_1, a_2, \dots, a_n$, es divisible por $1^{n-1} 2^{n-2} \dots (n-1)$.

Calcular los determinantes:

***271.** $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

***272.** $$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \dots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***273.** $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

274. $$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_1 & \operatorname{sen}^{n-2}\alpha_1 \cos\alpha_1 & \dots & \operatorname{sen}\alpha_1 \cos^{n-2}\alpha_1 & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_2 & \operatorname{sen}^{n-2}\alpha_2 \cos\alpha_2 & \dots & \operatorname{sen}\alpha_2 \cos^{n-2}\alpha_2 & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_n & \operatorname{sen}^{n-2}\alpha_n \cos\alpha_n & \dots & \operatorname{sen}\alpha_n \cos^{n-2}\alpha_n & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}.$$

***275.** $$\begin{vmatrix} a_1^{2n}+1 & a_1^{2n-1}+a_1 & a_1^{2n-2}+a_1^2 & \dots & a_1^{n+1}+a_1^{n-1} & a_1^n \\ a_2^{2n}+1 & a_2^{2n-1}+a_2 & a_2^{2n-2}+a_2^2 & \dots & a_2^{n+1}+a_2^{n-1} & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^{2n}+1 & a_{n+1}^{2n-1}+a_{n+1} & a_{n+1}^{2n-2}+a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n+1}+a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

***276.** $$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_0 & \cos 2\varphi_0 & \dots & \cos(n-1)\varphi_0 \\ 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \dots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_{n-1} & \cos 2\varphi_{n-1} & \dots & \cos(n-1)\varphi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

***277.** $$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(n+1)\alpha_0 & \operatorname{sen} n\alpha_0 & \dots & \operatorname{sen}\alpha_0 \\ \operatorname{sen}(n+1)\alpha_1 & \operatorname{sen} n\alpha_1 & \dots & \operatorname{sen}\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sen}(n+1)\alpha_n & \operatorname{sen} n\alpha_n & \dots & \operatorname{sen}\alpha_n \end{vmatrix}.$$

***278.** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \dots & x_n(x_n-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_n^2(x_n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}.$$

***279.** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

***280.** $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

281. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{s-1} & x_2^{s-1} & \dots & x_n^{s-1} \\ x_1^{s+1} & x_2^{s+1} & \dots & x_n^{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

***282.** $$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

283. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}.$$

284. $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}.$$

***285.** $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & 2x & 3x^2 & \dots & (n+1)x^n \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 & \dots & (n+1)^2x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{n-1}x & 3^{n-1}x^2 & \dots & (n+1)^{n-1}x^n \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^n \end{vmatrix}.$$

***286.** $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \dots & x^{n-1} \\ 1 & 2x & 3x^2 \dots & nx^{n-1} \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 \dots & n^2x^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{k-1}x & 3^{k-1}x^2 \dots & n^{k-1}x^{n-1} \\ 1 & y_1 & y_1^2 \dots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 \dots & y_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_{n-k} & y_{n-k}^2 \dots & y_{n-k}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

***287.** $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1x & \dots & C_{n-1}^1x^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-1}^2x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{k-1}x^{n-k} \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1y & \dots & C_{n-1}^1y^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-k-1}y^k \end{vmatrix}.$$

288.

a) Escribir el desarrollo de un determinante de cuarto orden por los menores de las primeras dos filas.

b) Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

empleando el desarrollo por los menores de segundo orden.

c) Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

empleando el desarrollo por los menores de segundo orden.

d) Calcular el determinante del problema 145.

Calcular los determinantes:

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 9 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ x_1 & \alpha & \beta & \dots & \beta & y_1 \\ x_2 & \beta & \alpha & \dots & \beta & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & \beta & \beta & \dots & \alpha & y_n \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$.

i) Aplicando el teorema de Laplace, calcular el determinante del problema 230.

j) Aplicando el teorema de Laplace, calcular el determinante del problema 171.

k) Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

l) Sean A, B, C, D los determinantes de tercer orden que se forman de la tabla

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

al suprimir la primera, segunda, tercera y cuarta columna, respectivamente. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD - BC.$$

*m) Calcular el determinante de orden quince

$$\begin{vmatrix} \Delta & \Delta_1 & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta & \Delta_1 \\ \Delta_1 & \Delta_1 & \Delta \end{vmatrix},$$

formado del modo indicado por las mallas

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & x & x & -x & -x \\ x & 2a & a & 0 & 0 \\ x & a & 2a & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 2a & a \\ -x & 0 & 0 & a & 2a \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Multiplicación de determinantes

289. Aplicando la regla de multiplicación de las matrices, expresar en forma de un determinante los productos de determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

290. Calcular el determinante Δ multiplicándolo por el determinante δ:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -13 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

b) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

291. Calcular el cuadrado del determinante:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix};\quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix};$$

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

292. El determinante

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0,\,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,\,0} & a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2} & \dots & a_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix} = D.$$

¿A qué es igual el determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

donde $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \dots + a_{n-1,i}\, x^{n-1}$?

Aplicar el resultado obtenido a la resolución de los problemas 265, 267, 268.

Calcular los determinantes:

***293.**

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} (b_0+a_0)^n & (b_1+a_0)^n & \dots & (b_n+a_0)^n \\ (b_0+a_1)^n & (b_1+a_1)^n & \dots & (b_n+a_1)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_0+a_n)^n & (b_1+a_n)^n & \dots & (b_n+a_n)^n \end{vmatrix};$$

$$\text{b)}\ \begin{vmatrix} \frac{1-\alpha_1^n\beta_1^n}{1-\alpha_1\beta_1} & \frac{1-\alpha_1^n\beta_2^n}{1-\alpha_1\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_1^n\beta_n^n}{1-\alpha_1\beta_n} \\ \frac{1-\alpha_2^n\beta_1^n}{1-\alpha_2\beta_1} & \frac{1-\alpha_2^n\beta_2^n}{1-\alpha_2\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_2^n\beta_n^n}{1-\alpha_2\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-\alpha_n^n\beta_1^n}{1-\alpha_n\beta_1} & \frac{1-\alpha_n^n\beta_2^n}{1-\alpha_n\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_n^n\beta_n^n}{1-\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix}.$$

***294.** $$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} 2\alpha_1 & \operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_n) \\ \operatorname{sen}(\alpha_2+\alpha_1) & \operatorname{sen} 2\alpha_2 & \dots & \operatorname{sen}(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sen}(\alpha_n+\alpha_1) & \operatorname{sen}(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \operatorname{sen} 2\alpha_n \end{vmatrix}.$$

***295.** $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$,

donde $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.

***296.** $\begin{vmatrix} a & b & c & d & l & m & n & p \\ b & -a & -d & -c & m & -l & n & -n \\ c & d & -a & -b & n & -p & -l & m \\ d & -c & b & -a & p & n & -m & -l \\ l & -m & -n & -p & -a & b & c & d \\ m & l & p & -n & -b & -a & d & -c \\ n & -p & l & m & -c & -d & -a & b \\ p & n & -m & l & -d & c & -b & -a \end{vmatrix}$.

***297.** $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi & 2\cos 2\varphi & 2\operatorname{sen} 2\varphi \\ \cos 3\varphi & \operatorname{sen} 3\varphi & 3\cos 3\varphi & 3\operatorname{sen} 3\varphi \\ \cos 4\varphi & \operatorname{sen} 4\varphi & 4\cos 4\varphi & 4\operatorname{sen} 4\varphi \end{vmatrix}$.

***298.**

$$\begin{vmatrix} \cos n\varphi & n\cos n\varphi & \operatorname{sen} n\varphi & n\operatorname{sen} n\varphi \\ \cos(n+1)\varphi & (n+1)\cos(n+1)\varphi & \operatorname{sen}(n+1)\varphi & (n+1)\operatorname{sen}(n+1)\varphi \\ \cos(n+2)\varphi & (n+2)\cos(n+2)\varphi & \operatorname{sen}(n+2)\varphi & (n+2)\operatorname{sen}(n+2)\varphi \\ \cos(n+3)\varphi & (n+3)\cos(n+3)\varphi & \operatorname{sen}(n+3)\varphi & (n+3)\operatorname{sen}(n+3)\varphi \end{vmatrix}.$$

***299.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$,

donde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$.

***300.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$.
(determinante cíclico)

301. Aplicar el resultado del problema 300 al determinante

$$\begin{vmatrix} x & u & z & y \\ y & x & u & z \\ z & y & x & u \\ u & z & y & x \end{vmatrix}.$$

302. Aplicar el resultado del problema 300 a los problemas 192, 205, 255.

Calcular los determinantes:

303. $$\begin{vmatrix} 1 & C_{n-1}^{1} & C_{n-1}^{2} & \ldots & C_{n-1}^{n-2} & 1 \\ 1 & 1 & C_{n-1}^{1} & \ldots & C_{n-1}^{n-3} & C_{n-1}^{n-2} \\ C_{n-1}^{n-2} & 1 & 1 & \ldots & C_{n-1}^{n-4} & C_{n-1}^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1}^{1} & C_{n-1}^{2} & C_{n-1}^{3} & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

304. $$\begin{vmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \ldots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \ldots & (n-1)a^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2a & 3a^2 & 4a^3 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

305. $$\begin{vmatrix} s-a_1 & s-a_2 & \ldots & s-a_n \\ s-a_n & s-a_1 & \ldots & s-a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s-a_2 & s-a_3 & \ldots & s-a_1 \end{vmatrix},$$

donde $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

306. $$\begin{vmatrix} t^{n-1} & C_n^1 t^{n-2} & C_n^2 t^{n-3} & \ldots & C_n^{n-2} t & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & t^{n-1} & C_n^1 t^{n-2} & \ldots & C_n^{n-3} t^2 & C_n^{n-2} t \\ C_n^{n-2} t & C_n^{n-1} & t^{n-1} & \ldots & C_n^{n-4} t^3 & C_n^{n-3} t^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_n^1 t^{n-2} & C_n^2 t^{n-3} & C_n^3 t^{n-4} & \ldots & C_n^{n-1} & t^{n-1} \end{vmatrix}.$$

307. $$\begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \ldots & -1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 1 \end{matrix}}^{p} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \ldots & -1 \end{matrix}}^{n-p} \end{vmatrix}.$$

***308.** $$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \cos\frac{2\pi}{n} & \ldots & -1 \\ -1 & \cos\frac{\pi}{n} & \ldots & \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n} & -1 & \ldots & \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{3\pi}{n} & \ldots & \cos\frac{\pi}{n} \end{vmatrix}.$$

309. $$\begin{vmatrix} \cos 0 & \cos 2\theta & \ldots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos 0 & \ldots & \cos(n-1)\theta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \ldots & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

310. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & \operatorname{sen}(a+h) & \operatorname{sen}(a+2h) & \dots & \operatorname{sen}[a+(n-1)h] \\ \operatorname{sen}[a+(n-1)h] & \operatorname{sen} a & \operatorname{sen}(a+h) & \dots & \operatorname{sen}[a+(n-2)h] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{sen}(a+h) & \operatorname{sen}(a+2h) & \operatorname{sen}(a+3h) & \dots & \operatorname{sen} a \end{vmatrix}.$

*311. $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & 1^2 \end{vmatrix}.$

312. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_0+3a_1+3a_2)(a_0^2-a_0a_1-a_0a_2+2a_1^2+2a_2^2-3a_1a_2)^3.$$

313. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

(determinante hemicíclico).

*314. Demostrar que un determinante cíclico de orden $2n$ puede representarse como el producto de un determinante cíclico de orden n por un determinante hemicíclico de orden n.

315. Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \mu a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \mu a_{n-1} & \mu a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu a_2 & \mu a_3 & \mu a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

§ 7. Problemas diversos

316. Demostrar que si

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

entonces

$$\Delta'(x)=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\dots$$

$$\dots+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

317. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+x\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik},$$

donde A_{ik} es el complemento algebraico del elemento a_{ik}.

318. Aplicando el resultado del problema 317, calcular los determinantes de los problemas 200, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 232, 233, 248, 249, 250.

319. Demostrar que la suma de los complementos algebraicos de todos los elementos del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

es igual a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \dots & a_{2n}-a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-a_{n-1,1} & a_{n2}-a_{n-1,2} & \dots & a_{nn}-a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Demostrar los teoremas:

320. La suma de los complementos algebraicos de todos los elementos de un determinante no varía si a todos los elementos del determinante se les agrega un mismo número.

321. Si todos los elementos de una fila (columna) de un determinante son iguales a la unidad, entonces la suma de los complementos algebraicos de todos los elementos del determinante es igual al determinante mismo.

322. Calcular la suma de los complementos algebraicos de todos los elementos del determinante del problema 250.

***323.** Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \dots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

324. Indicando con P_n y Q_n los determinantes

$$\begin{vmatrix} a^0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

demostrar que

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}}$$

Calcular los determinantes:

***325.** $\begin{vmatrix} c & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & c & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c \end{vmatrix}.$

326. $\begin{vmatrix} p & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & p & q & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p & q \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p \end{vmatrix}.$

***327.** Representar el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

en forma de un polinomio, dispuesto según las potencias de x.

*328. Calcular el determinante de $(2n-1)$-ésimo orden, cuyos primeros $n-1$ elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad, los demás elementos de la diagonal principal son iguales a n. En cada una de las primeras $n-1$ filas, n elementos situados a la derecha de la diagonal principal son iguales a la unidad, en cada una de las últimas n filas, los elementos situados a la izquierda de la diagonal principal son $n-1, n-2, \ldots, 1$. Los demás elementos del determinante son iguales a cero.

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Calcular los determinantes:

*329. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -n & x-2 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x-4 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x-2n \end{vmatrix}.$$

330. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

331. $$\begin{vmatrix} x & a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n(a-1) & x-1 & 2a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & (n-1)(a-1) & x-2 & 3a & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a-1 & x-n \end{vmatrix}.$$

332. $$\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \ldots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \ldots & (n+1)^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \ldots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}$$

333. $$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

334. Hallar el coeficiente de la potencia inferior de x en el determinante

$$\begin{vmatrix} (1+x)^{a_1b_1} & (1+x)^{a_1b_2} & \dots & (1+x)^{a_1b_n} \\ (1+x)^{a_2b_1} & (1+x)^{a_2b_2} & \dots & (1+x)^{a_2b_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1+x)^{a_nb_1} & (1+x)^{a_nb_2} & \dots & (1+x)^{a_nb_n} \end{vmatrix}.$$

CAPITULO 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

§ 1. Teorema de Cramer

Resolver los sistemas de ecuaciones:

335. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11. \end{aligned}$$

336. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2. \end{aligned}$$

337. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11. \end{aligned}$$

338. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10. \end{aligned}$$

339. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4. \end{aligned}$$

340. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8. \end{aligned}$$

341. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5. \end{aligned}$$

342. $$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5, \\ x_1 \qquad - 2x_3 + 3x_4 &= -4, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - 5x_4 &= 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \qquad &= 5. \end{aligned}$$

343. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6. \end{aligned}$$

344. $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=0,\\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0,\\ x_1+3x_2+6x_3+10x_4&=0,\\ x_1+4x_2+10x_3+20x_4&=0. \end{aligned}$$

345. $$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3+7x_4&=12,\\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4&=0,\\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4&=4,\\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4&=16. \end{aligned}$$

346. $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=0,\\ x_1-x_2+2x_3-2x_4+3x_5&=0,\\ x_1+x_2+4x_3+4x_4+9x_5&=0,\\ x_1-x_2+8x_3-8x_4+27x_5&=0,\\ x_1+x_2+16x_3+16x_4+81x_5&=0. \end{aligned}$$

347. $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0,\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4&=0,\\ x_1+5x_2+x_3+2x_4&=0,\\ x_1+5x_2+5x_3+2x_4&=0. \end{aligned}$$

348. $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=0,\\ x_2+x_3+x_4+x_5&=0,\\ x_1+2x_2+3x_3&=2,\\ x_2+2x_3+3x_4&=-2,\\ x_3+2x_4+3x_5&=2. \end{aligned}$$

349. $$\begin{aligned} x_1+4x_2+6x_3+4x_4+x_5&=0,\\ x_1+x_2+4x_3+6x_4+4x_5&=0,\\ 4x_1+x_2+x_3+4x_4+6x_5&=0,\\ 6x_1+4x_2+x_3+x_4+4x_5&=0,\\ 4x_1+6x_2+4x_3+x_4+x_5&=0. \end{aligned}$$

350. $$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=2,\\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5&=0,\\ x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5&=3,\\ x_1+x_2+x_3+4x_4+x_5&=-2,\\ x_1+x_2+x_3+x_4+5x_5&=5. \end{aligned}$$

351. $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5&=13,\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=10,\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5&=11,\\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5&=6,\\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5&=3. \end{aligned}$$

352. $$\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3+4x_4-x_5&=-1,\\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5&=8,\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5&=3,\\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5&=-2,\\ x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5&=-3.\end{aligned}$$

353. $$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+4x_3-4x_4&=0,\\ 3x_1-x_2+11x_3-13x_4&=0,\\ 4x_1+5x_2-7x_3-2x_4&=0,\\ 13x_1-25x_2+x_3+11x_4&=0.\end{aligned}$$

Comprobar que el sistema tiene la solución $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, y calcular el determinante del sistema.

354. Demostrar que el sistema

$$\begin{aligned} ax+by+cz+dt&=0,\\ bx-ay+dz-ct&=0,\\ cx-dy-az+bt&=0,\\ dx+cy-bz-at&=0\end{aligned}$$

tiene solución única, si a, b, c, d son reales y no son todos iguales a cero.

Resolver los sistemas de ecuaciones:

355. $$\begin{aligned} \alpha x_1+\alpha x_2+\ldots+\alpha x_{n-1}+\beta x_n&=a_n,\\ \alpha x_1+\alpha x_2+\ldots+\beta x_{n-1}+\alpha x_n&=a_{n-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ \beta x_1+\alpha x_2+\ldots+\alpha x_{n-1}+\alpha x_n&=a_1,\end{aligned}$$

donde $\alpha\neq\beta$.

356. $$\begin{aligned} \frac{x_1}{b_1-\beta_1}+\frac{x_2}{b_1-\beta_2}+\ldots+\frac{x_n}{b_1-\beta_n}&=1,\\ \frac{x_1}{b_2-\beta_1}+\frac{x_2}{b_2-\beta_2}+\ldots+\frac{x_n}{b_2-\beta_n}&=1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ \frac{x_1}{b_n-\beta_1}+\frac{x_2}{b_n-\beta_2}+\ldots+\frac{x_n}{b_n-\beta_n}&=1,\end{aligned}$$

donde $b_1, b_2, \ldots, b_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ son todos distintos.

357. $$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_n&=1,\\ x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n&=t,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ x_1\alpha_1^{n-1}+x_2\alpha_2^{n-1}+\ldots+x_n\alpha_n^{n-1}&=t^{n-1},\end{aligned}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todos distintos.

358. $x_1 + x_2\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_1^{n-1} = u_1,$
$$x_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_2^{n-1} = u_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1 + x_2\alpha_n + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} = u_n,$$
donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todos distintos.

359. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = u_1,$
$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = u_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1\alpha_1^{n-1} + x_2\alpha_2^{n-1} + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} = u_n,$$
donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todos distintos.

360. $1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,$
$$1 + 2x_1 + 2^2x_2 + \ldots + 2^nx_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1 + nx_1 + n^2x_2 + \ldots + n^nx_n = 0.$$

§ 2. Rango de una matriz

361. ¿Cuántos determinantes de k-ésimo orden se pueden formar de una matriz de m filas y n columnas?

362. Formar una matriz de rango: a) 2; b) 3.

363. Demostrar que el rango de una matriz no varía:

a) al sustituir las filas por las columnas;

b) al multiplicar los elementos de una fila o una columna por un número distinto de 0;

c) al permutar dos filas o dos columnas;

d) al agregar a los elementos de una fila (columna) los elementos de otra fila (columna), multiplicados por algún número.

364. Se llama suma de dos matrices de igual cantidad de filas y columnas, a la matriz cuyos elementos son las sumas de los elementos correspondientes de las matrices que se suman. Demostrar que el rango de la suma de dos matrices no es superior a la suma de los rangos de las matrices que se suman.

365. ¿Cómo puede alterarse el rango de una matriz si se le agregan: a) 1 columna; b) 2 columnas?

Calcular los rangos de las matrices:

366. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$ **367.** $\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}.$

368. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$ **369.** $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$

370. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$. **371.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

372. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **373.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$.

374. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **375.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

376. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. **377.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

378. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **379.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

380. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

§ 3. Sistemas de formas lineales

381. a) Escribir dos formas lineales independientes.

b) Escribir tres formas lineales independientes.

382. Formar un sistema de cuatro formas lineales de cinco variables, de modo que dos de ellas sean independientes y las demás sus combinaciones lineales.

Hallar las dependencias fundamentales entre las formas del sistema:

383. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4, \\ y_2 &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4, \\ y_3 &= x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4. \end{aligned}$$

384. $$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4, \\ y_2 &= 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4, \\ y_3 &= 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4. \end{aligned}$$

385. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4, \\ y_2 &= x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4, \\ y_3 &= 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 8x_4, \\ y_4 &= 3x_1 + 8x_2 - 9x_3 - 5x_4. \end{aligned}$$

386. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4, \\ y_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4. \end{aligned}$$

387. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4, \\ y_2 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4, \\ y_3 &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4, \\ y_4 &= 4x_2 + 2x_3 + 5x_4. \end{aligned}$$

388. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2, \\ y_2 &= 3x_1 + 2x_2, \\ y_3 &= x_1 + x_2, \\ y_4 &= 2x_1 + 3x_2. \end{aligned}$$

389. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \\ y_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5, \\ y_3 &= x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + x_5, \\ y_4 &= x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + x_5. \end{aligned}$$

390. $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4, \\ y_2 &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4, \\ y_3 &= 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4, \\ y_4 &= 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4. \end{aligned}$$

391. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 - 3x_3, \\ y_2 &= 3x_1 + x_2 - 5x_3, \\ y_3 &= 4x_1 + 2x_2 - x_3, \\ y_4 &= x_1 - 7x_3. \end{aligned}$$

392. $$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5, \\ y_2 &= x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5, \\ y_3 &= 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5, \\ y_4 &= x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5. \end{aligned}$$

393. $y_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5,$
$y_2 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5,$
$y_3 = 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5,$
$y_4 = x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5.$

394. $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5,$
$y_2 = 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5,$
$y_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5,$
$y_4 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5,$
$y_5 = x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 7x_5.$

395. $y_1 = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5,$
$y_2 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5,$
$y_3 = x_1 - 3x_2 + x_4 - 2x_5,$
$y_4 = x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5.$

396. $y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6,$
$y_2 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 - x_6,$
$y_3 = 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6,$
$y_4 = 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 15x_4 + 6x_5 - 5x_6,$
$y_5 = 5x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 + 9x_6.$

397. $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5,$
$y_2 = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5,$
$y_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5,$
$y_4 = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + \lambda x_5.$

Elegir λ de tal modo que la cuarta forma sea combinación lineal de las tres primeras.

§ 4. Sistemas de ecuaciones lineales

398. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5. \end{aligned}$$

399. Elegir λ de tal modo que el sistema de ecuaciones tenga solución:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda. \end{aligned}$$

Resolver los sistemas de ecuaciones:

400.
$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3&=-1,\\ 2x_1+x_2-2x_3&=1,\\ x_1+x_2+x_3&=3,\\ x_1+2x_2-3x_3&=1. \end{aligned}$$

401.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=2,\\ x_1+3x_2+x_3&=5,\\ x_1+x_2+5x_3&=-7,\\ 2x_1+3x_2-3x_3&=14. \end{aligned}$$

402.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3&=3,\\ 3x_1+x_2-5x_3&=0,\\ 4x_1-x_2+x_3&=3,\\ x_1+3x_2-13x_3&=-6. \end{aligned}$$

403.
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3&=0,\\ 2x_1-x_2+3x_3&=0,\\ 3x_1-5x_2+4x_3&=0,\\ x_1+17x_2+4x_3&=0 \end{aligned}$$

404.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4&=1,\\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4&=2,\\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4&=-1,\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4&=4. \end{aligned}$$

405.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1,\\ 2x_1-x_2-3x_4&=2,\\ 3x_1-x_3+x_4&=-3,\\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4&=-6. \end{aligned}$$

406.
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-4x_4&=4,\\ x_2-x_3+x_4&=-3,\\ x_1+3x_2-3x_4&=1,\\ -7x_2+3x_3+x_4&=-3. \end{aligned}$$

407.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=11,\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4&=12,\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4&=13,\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4&=14. \end{aligned}$$

408.
$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4&=0,\\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4&=0,\\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4&=0,\\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4&=0. \end{aligned}$$

409.
$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4&=0,\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4&=0,\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4&=0,\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4&=0. \end{aligned}$$

410.
$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_4-x_5&=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4&=0,\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5&=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5&=0. \end{aligned}$$

411.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=7,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5&=-2,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5&=23,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5&=12. \end{aligned}$$

412.
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5&=0,\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5&=0,\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5&=0,\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5&=0. \end{aligned}$$

413. $$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5&=0,\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=0,\\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5&=0,\\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5&=0. \end{aligned}$$

414. $$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=1,\\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5&=0,\\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5&=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5&=3. \end{aligned}$$

415. $$\begin{aligned} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5&=1,\\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5&=1,\\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5&=1,\\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5&=-1. \end{aligned}$$

416. $$\begin{aligned} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5&=1,\\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5&=2,\\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5&=3,\\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5&=3. \end{aligned}$$

417. $$\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_4+2x_5&=1,\\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5&=2,\\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5&=7,\\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5&=25. \end{aligned}$$

418. $$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3-4x_4&=1,\\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5&=-1,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5&=3,\\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5&=3,\\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5&=-1. \end{aligned}$$

419. $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-x_4&=1,\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4&=1,\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4&=1,\\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4&=1,\\ 5x_1+5x_2+2x_3&=2. \end{aligned}$$

420. $$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5&=-2,\\ x_1+2x_2-x_3-x_5&=-3,\\ x_1-x_2+2x_3-3x_4&=10,\\ x_2-x_3+x_4-2x_5&=-5,\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4+4x_5&=1. \end{aligned}$$

421. El sistema

$$\begin{aligned} ay+bx&=c,\\ cx+az&=b,\\ bz+cy&=a \end{aligned}$$

tiene solución única. Demostrar que $abc\neq 0$ y hallar la solución.

Resolver los sistemas de ecuaciones:

422. $$\begin{aligned} \lambda x+y+z&=1,\\ x+\lambda y+z&=\lambda,\\ x+y+\lambda z&=\lambda^2. \end{aligned}$$

423. $$\begin{aligned} \lambda x+y+z+t&=1,\\ x+\lambda y+z+t&=\lambda,\\ x+y+\lambda z+t&=\lambda^2,\\ x+y+z+\lambda t&=\lambda^3. \end{aligned}$$

424. $$\begin{aligned} x+ay+a^2z&=a^3,\\ x+by+b^2z&=b^3,\\ x+cy+c^2z&=c^3. \end{aligned}$$

425. $$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ ax+by+cz&=d,\\ a^2x+b^2y+c^2z&=d^2. \end{aligned}$$

426. $$\begin{aligned} ax+y+z&=4,\\ x+by+z&=3,\\ x+2by+z&=4. \end{aligned}$$

427. $$\begin{aligned} ax+by+z&=1,\\ x+aby+z&=b,\\ x+by+az&=1. \end{aligned}$$

428. $$\begin{aligned} \alpha x+y+z&=m,\\ x+\alpha y+z&=n,\\ x+y+\alpha z&=p. \end{aligned}$$

429. $$\begin{aligned} x+ay+a^2z&=1,\\ x+ay+abz&=a,\\ bx+a^2y+a^2bz&=a^2b. \end{aligned}$$

430. $$\begin{aligned} (\lambda+3)x+y+2z&=\lambda,\\ \lambda x+(\lambda-1)y+z&=2\lambda,\\ 3(\lambda+1)x+\lambda y+(\lambda+3)z&=3. \end{aligned}$$

431. $$\begin{aligned} \lambda x+\lambda y+(\lambda+1)z&=\lambda,\\ \lambda x+\lambda y+(\lambda-1)z&=\lambda,\\ (\lambda+1)x+\lambda y+(2\lambda+3)z&=1. \end{aligned}$$

432. $$\begin{aligned} 3kx+(2k+1)y+(k+1)z&=k,\\ (2k-1)x+(2k-1)y+(k-2)z&=k+1,\\ (4k-1)x+3ky+2kz&=1. \end{aligned}$$

433. $$\begin{aligned} ax+by+2z&=1,\\ ax+(2b-1)y+3z&=1,\\ ax+by+(b+3)z&=2b-1. \end{aligned}$$

434. a) $$\begin{aligned} 3mx+(3m-7)y+(m-5)z&=m-1,\\ (2m-1)x+(4m-1)y+2mz&=m+1,\\ 4mx+(5m-7)y+(2m-5)z&=0. \end{aligned}$$

b) $(2m+1)x - my + (m+1)z = m-1,$
$(m-2)x + (m-1)y + (m-2)z = m,$
$(2m-1)x + (m-1)y + (2m-1)z = m.$

c) $(5\lambda+1)x + 2\lambda y + (4\lambda+1)z = 1+\lambda,$
$(4\lambda-1)x + (\lambda-1)y + (4\lambda-1)z = -1,$
$2(3\lambda+1)x + 2\lambda y + (5\lambda+2)z = 2-\lambda.$

435. a) $(2c+1)x - cy - (c+1)z = 2c,$
$3cx - (2c-1)y - (3c-1)z = c+1,$
$(c+2)x - y - 2cz - 2.$

b) $2(\lambda+1)x + 3y + \lambda z = \lambda+4,$
$(4\lambda-1)x + (\lambda+1)y + (2\lambda-1)z = 2\lambda+2,$
$(5\lambda-4)x + (\lambda+1)y + (3\lambda-4)z = \lambda-1.$

c) $dx + (2d-1)y + (d+2)z = 1,$
$(d-1)y + (d-3)z = 1+d,$
$dx + (3d-2)y + (3d+1)z = 2-d.$

d) $(3a-1)x + 2ay + (3a+1)z = 1,$
$2ax + 2ay + (3a+1)z - a,$
$(a+1)x + (a+1)y + 2(a+1)z = a^2.$

436. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

437. ¿Cuál es la condición para que tres puntos $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ estén situados en una recta?

438. ¿Cuál es la condición para que tres rectas $a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$; $a_3x+b_3y+c_3=0$ pasen por un punto?

439. ¿Cuál es la condición para que cuatro puntos $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ estén situados en una circunferencia?

440. Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $M_1(2, 1)$; $M_2(1, 2)$; $M_3(0, 1)$.

441. Hallar la ecuación de la curva de 2° orden que pasa por los puntos $M_1(0, 0)$; $M_2(1, 0)$; $M_3(-1, 0)$; $M_4(1, 1)$ y $M_5(-1, 1)$.

442. Hallar la ecuación de la parábola de tercer grado que pasa por los puntos $M_1(1, 0)$; $M_2(0, -1)$; $M_3(-1, -2)$ y $M_4(2, 7)$.

443. Formar la ecuación de la parábola de n-ésimo grado $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ que pasa por $n+1$ puntos $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $\ldots$; $M_n(x_n, y_n)$.

444. ¿Cuál es la condición para que cuatro puntos $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$; $M_4(x_4, y_4, z_4)$ estén situados en un plano?

445. Formar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $M_1(1, 0, 0)$; $M_2(1, 1, 0)$; $M_3(1, 1, 1)$; $M_4(0, 1, 1)$.

446. ¿Cuál es la condición para que n puntos $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$; $\ldots$; $M_n(x_n, y_n)$ estén situados en una recta?

447. ¿Cuál es la condición para que n rectas $a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$; $\ldots$; $a_nx+b_ny+c_n=0$ pasen por un punto?

448. ¿Cuál es la condición para que n puntos $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $\ldots$; $M_n(x_n, y_n, z_n)$ estén situados en un plano, y cuál es la condición para que estos puntos estén situados en una recta?

449. ¿Cuál es la condición para que n planos $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ pasen por un punto, y cuál es la condición para que todos estos planos pasen por una recta?

450. Eliminar $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entre el sistema de n igualdades:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1,\,n-1}x_{n-1}+a_{1n}=0,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2,\,n-1}x_{n-1}+a_{2n}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{n,\,n-1}x_{n-1}+a_{nn}=0.
\end{gathered}$$

451. Sean

$$\left.\begin{array}{llll}
x_1^{(1)}=\alpha_{11}; & x_2^{(1)}=\alpha_{12}; & \ldots; & x_n^{(1)}=\alpha_{1n},\\
x_1^{(2)}=\alpha_{21}; & x_2^{(2)}=\alpha_{22}; & \ldots; & x_n^{(2)}=\alpha_{2n},\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
x_1^{(m)}=\alpha_{m1}; & x_2^{(m)}=\alpha_{m2}; & \ldots; & x_n^{(m)}=\alpha_{mn}
\end{array}\right\} \tag{1}$$

m soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Estas soluciones se llaman linealmente dependientes, si existen unas constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$, no simultáneamente iguales a cero, tales que

$$\begin{gathered}
c_1\alpha_{1i}+c_2\alpha_{2i}+\ldots+c_m\alpha_{mi}=0\\
(i=1, 2, \ldots, n).
\end{gathered} \tag{2}$$

Si las igualdades (2) se cumplen solamente cuando $c_1=c_2=\ldots$ $\ldots=c_m=0$, las soluciones se llaman linealmente independientes.

Convengamos en escribir las soluciones como filas de una matriz. Así, pues, el sistema de soluciones (1) se escribirá en forma de la matriz

$$\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn}
\end{pmatrix}=A.$$

Demostrar que si el rango de la matriz A es igual a r, el sistema (1) tiene r soluciones linealmente independientes, y todas las demás soluciones del sistema (1) son combinaciones lineales de ellas.

452. Demostrar que si el rango de un sistema de m ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas es igual a r, entonces existen $n-r$ soluciones linealmente independientes del sistema y todas las demás soluciones del sistema son combinaciones lineales de ellas.

Tal sistema de $n-r$ soluciones se llama sistema fundamental de soluciones.

453. ¿Es $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ un sistema

fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0? \end{aligned}$$

454. Escribir el sistema fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones del problema 453.

455. ¿Es $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ un sistema

fundamental de soluciones del sistema del problema 453?

456. Demostrar que si A es una matriz de rango r que forma un sistema fundamental de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas y B es una matriz no singular arbitraria de r-ésimo orden, entonces la matriz BA también forma un sistema fundamental de soluciones del mismo sistema de ecuaciones.

457. Demostrar que si dos matrices A y C de rango r forman unos sistemas fundamentales de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, entonces una de ellas es el producto de una matriz no singular B, de r-ésimo orden, por la otra, es decir, $A = BC$.

458. Sea

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn} \end{pmatrix}$$

un sistema fundamental de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas; demostrar que

$$\begin{aligned}
x_1 &= c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{21} + \ldots + c_r\alpha_{r1}, \\
x_2 &= c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{22} + \ldots + c_r\alpha_{r2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= c_1\alpha_{1n} + c_2\alpha_{2n} + \ldots + c_r\alpha_{rn}
\end{aligned}$$

es la solución general de este sistema de ecuaciones, es decir, que cualquier solución del sistema puede obtenerse de ésta para ciertos valores de c_1, c_2, $\ldots$, c_r, y recíprocamente.

459. Escribir la solución general del sistema del problema 453.

460. Comprobar que (11, 1, −7) es un sistema fundamental de soluciones del sistema del problema 403, y escribir la solución general.

461. Escribir las soluciones generales de los sistemas de los problemas 408, 409, 410, 412, 413.

462. Conociendo la solución general del problema 453 (véase la respuesta del problema 459) y sabiendo que $x_1 = -16$, $x_2 = 23$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ es una solución particular del sistema 411, hallar la solución general del sistema 411.

463. Escribir las soluciones generales de los sistemas de los problemas 406, 414, 415.

C A P I T U L O 4

MATRICES

§ 1. Operaciones con las matrices cuadradas

464. Multiplicar las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

465. Efectuar las operaciones:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; e) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

***466.** Hallar $\lim\limits_{n \to \infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$, α es un número real.

467. Demostrar que si $AB = BA$, se tiene

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; b) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$;

c) $(A+B)^n = A^n + \frac{n}{1} A^{n-1}B + \ldots + B^n$.

468. Calcular $AB - BA$, si:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

469. Hallar todas las matrices que son conmutables con la matriz A:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

470. Hallar $f(A)$:

a) $f(x) = x^2 - x - 1$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

471. Demostrar que toda matriz de segundo orden $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisface a la ecuación

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0.$$

472. Demostrar que para cualquier matriz dada A existe un polinomio $f(x)$ tal que $f(A) = 0$, y que todos los polinomios que poseen esta propiedad son divisibles por uno de ellos.

***473.** Demostrar que la igualdad $AB - BA = E$ es imposible.

474. Sea $A^k = 0$. Demostrar que $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$.

475. Hallar todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz nula.

476. Hallar todas las matrices de segundo orden, cuyos cubos son iguales a la matriz nula.

477. Hallar todas las matrices de segundo orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz unidad.

478. Resolver y discutir la ecuación $XA = 0$, donde A es una matriz dada y X es la matriz incógnita de segundo orden.

479. Resolver y discutir la ecuación $X^2 = A$, donde A es una matriz dada y X es la matriz incógnita de segundo orden.

480. Hallar la matriz inversa de A:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

e) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; f) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

g) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; h) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0\end{pmatrix}$;

i) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1}\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2n-2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2n-2} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2}\end{pmatrix}$,

donde $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$;

j) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & \dots & & 0\\ -1 & 2 & -1 & \dots & & 0\\ 0 & -1 & 2 & \dots & & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{pmatrix}$;

k) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1\\ 2n-1 & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-3\\ 2n-3 & 2n-1 & 1 & 3 & \dots & 2n-5\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & 1\end{pmatrix}$;

l) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_2\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & c_3\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_n\\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & a\end{pmatrix}$;

m) $A = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & -x \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$;

n) $A = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\lambda_1} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{\lambda_2} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{\lambda_3} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$;

o) Siendo B^{-1} una matriz conocida, hallar la matriz inversa para la matriz orlada $\begin{pmatrix} B & U \\ V & a \end{pmatrix}$.

481. Hallar la matriz incógnita X de las ecuaciones:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; g) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

482. Demostrar que si $AB = BA$, se tiene: $A^{-1}B = BA^{-1}$.

483. Calcular $\varphi(A)$, donde $\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

484. Hallar todas las matrices reales de segundo orden, cuyos cubos son iguales a la matriz unidad.

485. Hallar todas las matrices reales de segundo orden, cuyas cuartas potencias son iguales a la matriz unidad.

486. Establecer el isomorfismo del campo de números complejos y del conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, siendo a y b reales.

487. Establecer que las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ siendo a, b, c, d reales, forman un anillo sin divisores de cero.

488. Representar $(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)$ en forma de una suma de cuatro cuadrados de expresiones bilineales.

489. Demostrar que las siguientes operaciones con las matrices:

a) permutación de dos filas,

b) agregación a los elementos de una fila los números proporcionales a los elementos de otra fila,

c) multiplicación de los elementos de una fila por un número distinto de 0,

se realizan multiplicando la matriz a la izquierda por unas matrices no singulares.

Las mismas operaciones con las columnas se realizan multiplicando a la derecha.

490. Demostrar que toda matriz puede expresarse en la forma PRQ, donde P y Q son matrices no singulares y R es una matriz diagonal de la forma

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

***491.** Demostrar que toda matriz puede representarse en forma de un producto de matrices $E + \alpha e_{ik}$, donde e_{ik} es una matriz cuyo elemento de la i-ésima fila y k-ésima columna es igual a 1, mientras que todos los demás elementos son iguales a 0.

*492. Demostrar que el rango del producto de dos matrices cuadradas de orden n no es inferior a r_1+r_2-n, donde r_1 y r_2 son los rangos de los factores.

493. Demostrar que toda matriz cuadrada de rango 1 tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \dots & \lambda_1\mu_n \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \dots & \lambda_2\mu_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n\mu_1 & \lambda_n\mu_2 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

***494.** Hallar todas las matrices de tercer orden, cuyos cuadrados son iguales a 0.

***495.** Hallar todas las matrices de tercer orden, cuyos cuadrados son iguales a la matriz unidad.

***496.** Supongamos que las matrices rectangulares A y B tienen una misma cantidad de filas. Representemos por (A, B) la matriz que se obtiene al agregar a la matriz A todas las columnas de la matriz B. Demostrar que rango $(A, B) \leqslant$ rango A + rango B.

***497.** Demostrar que si $A^2=E$, entonces rango $(E+A)$ + rango $(E-A)=n$, donde n es el orden de la matriz A.

***498.** Demostrar que la matriz A que posee la propiedad $A^2=E$, puede representarse en la forma PBP^{-1}, donde P es una matriz no singular y B es una matriz diagonal cuyos elementos son todos iguales a ± 1.

499. Hallar la condición a que debe satisfacer una matriz de elementos enteros para que todos los elementos de la matriz inversa sean enteros.

500. Demostrar que toda matriz no singular de elementos numéricos enteros puede representarse en la forma PR, donde P es una matriz unimodular de elementos numéricos enteros y R es una matriz triangular de elementos numéricos enteros, cuyos elementos situados debajo de la diagonal principal son todos iguales a cero, los elementos diagonales son positivos, y los elementos situados encima de la diagonal principal son no negativos y menores que los elementos diagonales de la misma columna.

***501.** Reunamos en una clase todas las matrices de elementos numéricos enteros que se obtienen una de otra multiplicando a la izquierda por matrices unimodulares de elementos numéricos enteros. Calcular el número de clases de matrices de n-ésimo orden que tienen un determinante dado k.

502. Demostrar que toda matriz de elementos numéricos enteros puede representarse en la forma PRQ, donde P y Q son matrices unimodulares de elementos numéricos enteros y R es una matriz diagonal de elementos numéricos enteros.

503. Demostrar que toda matriz unimodular de elementos numéricos enteros de segundo orden, con el determinante 1, puede representarse en forma de un producto de potencias (positivas y negativas) de las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

504. Demostrar que toda matriz unimodular de segundo orden de elementos numéricos enteros, puede representarse en forma de un producto de potencias de las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

505. Demostrar que toda matriz de tercer orden de elementos numéricos enteros, distinta de la matriz unidad, con determinante positivo y que satisface a la condición $A^2=E$, puede representarse en la forma QCQ^{-1}, donde Q es una matriz unimodular de elementos numéricos enteros y C es una de las matrices

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

§ 2. Matrices rectangulares. Algunas desigualdades

506. Multiplicar las matrices:

a) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ y $(1\ \ 2\ \ 3)$; d) $(1\ \ 2\ \ 3)$ y $\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$.

507. Hallar el determinante del producto de la matriz $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ por la traspuesta.

508. Multiplicar la matriz $\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}$ por la traspuesta y aplicar el teorema del determinante del producto.

509. Expresar el menor de m-ésimo orden del producto de dos matrices mediante los menores de los factores.

510. Demostrar que todos los menores principales (diagonales) de la matriz $\overline{A}A$ son no negativos. Aquí A es una matriz real y $\overline{A}$ es la matriz traspuesta de A.

511. Demostrar que si todos los menores principales de k-ésimo orden de la matriz $\overline{A}A$ son iguales a cero, los rangos de las matrices $\overline{A}A$ y A son menores que k. Aquí A es una matriz real y $\overline{A}$ es la matriz traspuesta de ella.

512. Demostrar que las sumas de todos los menores diagonales de un orden dado k, calculados para las matrices $\overline{A}A$ y $A\overline{A}$, son iguales.

513. Empleando la multiplicación de matrices rectangulares, demostrar la identidad

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-\\-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2=\sum_{i<k}(a_ib_k-a_kb_i)^2.$$

514. Demostrar la identidad

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i'\right|^2=\sum_{i<k}|a_ib_k-a_kb_i|^2.$$

Aquí a_i, b_i son números complejos, b_i' son los números conjugados con b_i.

515. Demostrar la desigualdad de Buniakovski

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

para a_i, b_i reales, partiendo de la identidad del problema 513.

516. Demostrar la desigualdad

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i'\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2$$

para a_i, b_i complejos.

***517.** Sean B y C dos matrices rectangulares reales, tales que $(B, C)=A$ es una matriz cuadrada [el sentido del la notación (B, C) es el mismo que en el problema 496]. Demostrar que $|A|^2\leqslant|\overline{B}B|\cdot|\overline{C}C|$.

***518.** Sea $A=(B, C)$ una matriz rectangular de elementos reales. Demostrar que

$$|\overline{A}A|\leqslant|\overline{B}B|\cdot|\overline{C}C|.$$

519. Sea A una matriz rectangular real

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Demostrar que

$$|A\overline{A}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_{1k}^2\cdot\sum_{k=1}^{n}a_{2k}^2\ \ldots\ \sum_{k=1}^{n}a_{mk}^2.$$

520. Sea A una matriz rectangular de elementos complejos y sea A^* la matriz traspuesta de la matriz compleja conjugada de A. Demostrar que el determinante de la matriz A^*A es un número real no negativo y que este determinante es igual a 0, si y sólo si, el rango de A es menor que el número de columnas.

521. Sea $A=(B, C)$ una matriz rectangular compleja. Demostrar que $|A^*A| \leqslant |B^*B| \cdot |C^*C|$.

522. Demostrar que si $|a_{ik}| \leqslant M$, el módulo del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

no es superior a $M^n n^{n/2}$.

***523.** Demostrar que si a_{ik} son reales y están situados en el intervalo $0 \leqslant a_{ik} \leqslant M$, el valor absoluto del determinante formado por los números a_{ik} no es superior a $M^n 2^{-n} \cdot (n+1)^{\frac{n+1}{2}}$.

524. Demostrar que para los determinantes de elementos complejos, la cota expuesta en el problema 522 es exacta y no puede mejorarse.

525. Demostrar que para los determinantes de elementos reales, la cota expuesta en el problema 522 es exacta para $n=2^m$.

526. Demostrar que el máximo de los valores absolutos de los determinantes de n-ésimo orden, cuyos elementos son reales y no superiores a 1 en valor absoluto, es un número entero divisible por 2^{n-1}.

***527.** Hallar el máximo de los valores absolutos de los determinantes de órdenes 3 y 5, formados por números reales no superiores a 1 en valor absoluto.

***528.** Se llama matriz recíproca de una matriz dada A, aquella cuyos elementos son los menores de $(n-1)$-ésimo orden de la matriz inicial en su disposición natural. Demostrar que la matriz recíproca de la recíproca, es igual a la matriz inicial multiplicada por su determinante elevado a la potencia $n-2$.

***529.** Demostrar que los menores de m-ésimo orden de la matriz recíproca son iguales a los menores complementarios a los menores correspondientes de la matriz inicial, multiplicados por Δ^{m-1}.

530. Demostrar que la matriz recíproca al producto de dos matrices es igual al producto de las matrices recíprocas en el mismo orden.

531. Supongamos que se han numerado de algún modo todas las combinaciones m-arias de los números $1, 2, \dots, n$.

Se da una matriz cuadrada $A=(a_{ik})$ de orden n. Sea $A_{\alpha\beta}$ el menor de m-ésimo orden de la matriz A, cuyos índices de las filas forman la combinación de índice α y los índices de las columnas forman la combinación de índice β. Entonces, con todos estos menores se puede construir una matriz $A'_m=(A_{\alpha\beta})$ de orden C_n^m. En particular, $A'_1=A$, A'_{n-1} es la matriz recíproca de A.

Demostrar que $(AB)'_m = A'_m B'_m$, $E'_m = E$, $(A^{-1})'_m = (A'_m)^{-1}$.

532. Demostrar que si A es una matriz "triangular" de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces, mediante una numeración adecuada de las combinaciones, la matriz A'_m será también triangular.

533. Demostrar que el determinante de la matriz A'_m es igual a $|A|^{C_{n-1}^{m-1}}$.

534. Supongamos que se ha establecido de algún modo una numeración de los pares (i, k); $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$. Se llama producto de Kronecker de dos matrices cuadradas A y B de órdenes n y m, respectivamente, a la matriz $C = A \times B$ de orden nm con los elementos $c_{\alpha_1 \alpha_2} = a_{i_1 i_2} b_{k_1 k_2}$, donde α_1 es el índice del par (i_1, k_1) y α_2 es el indice de (i_2, k_2). Demostrar que

a) $(A_1 \pm A_2) \times B = (A_1 \times B) \pm (A_2 \times B)$,

b) $A \times (B_1 \pm B_2) = (A \times B_1) \pm (A \times B_2)$,

c) $(A' \times B') \cdot (A'' \times B'') = (A' \cdot A'') \times (B' \cdot B'')$.

***535.** Demostrar que el determinante de $A \times B$ es igual a $|A|^m \cdot |B|^n$.

536. Supongamos que las matrices A y B de orden mn se han dividido en n^2 mallas cuadradas, de modo que tienen la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix}.$$

donde A_{ik} y B_{ik} son matrices cuadradas de orden m. Supongamos que se ha formado su producto C y que éste se ha dividido del mismo modo en mallas C_{ik}. Demostrar que

$$C_{ik} = A_{i1} B_{1k} + A_{i2} B_{2k} + \dots + A_{in} B_{nk}.$$

Por lo tanto, el producto de matrices divididas en mallas se efectúa formalmente según la misma regla, como si en las mallas no hubiesen matrices, sino números.

***537.** Supongamos que una matriz C de orden mn se ha dividido en n^2 mallas cuadradas iguales. Supongamos que las matrices A_{ik} formadas por los elementos de cada malla por separado son conmutables dos a dos al multiplicarlas. Con las matrices A_{ik} se forma el "determinante" $\sum \pm A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} \dots A_{n\alpha_n} = B$. Este "determinante" es una matriz de orden m. Demostrar que el determinante de la matriz C es igual al determinante de la matriz B.

CAPITULO 5

POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES DE UNA VARIABLE

§ 1. Operaciones con los polinomios. Fórmula de Taylor. Raíces múltiples

538. Multiplicar los polinomios:

a) $(2x^4-x^3+x^2+x+1)(x^2-3x+1)$;
b) $(x^3+x^2-x-1)(x^2-2x-1)$.

539. Efectuar la división con resto de:

a) $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ por x^2-3x+1;
b) x^3-3x^2-x-1 por $3x^2-2x+1$.

540. ¿Bajo qué condición el polinomio x^3+px+q es divisible por un polinomio de la forma x^2+mx-1?

541. ¿Bajo qué condición el polinomio x^4+px^2+q es divisible por un polinomio de la forma x^2+mx+1?

542. Simplificar el polinomio

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

543. Efectuar la división con resto de:

a) $x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ por $x-1$;
b) $2x^5-5x^3-8x$ por $x+3$;
c) $4x^3+x^2$ por $x+1+i$;
d) x^3-x^2-x por $x-1+2i$.

544. Aplicando la regla de Horner, calcular $f(x_0)$:

a) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16$, $x_0=4$;
b) $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$, $x_0=-2-i$.

545. Aplicando la regla de Horner, desarrollar el polinomio $f(x)$ según las potencias de $x-x_0$:

a) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$, $x_0=-1$;
b) $f(x)=x^5$, $x_0=1$;
c) $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90$, $x_0=2$;
d) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$, $x_0=-i$;

e) $f(x)=x^4+(3-8i)x^3-(21+18i)x^2-$
$$-(33-20i)x+7+18i, \quad x_0=-1+2i.$$

546. Aplicando la regla de Horner, descomponer en fracciones simples:

a) $\frac{x^3-x+1}{(x-2)^5}$; b) $\frac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}$.

***547.** Aplicando la regla de Horner, desarrollar según las potencias de x:

a) $f(x+3)$, donde $f(x)=x^4-x^3+1$;

b) $(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$.

548. Hallar los valores del polinomio $f(x)$ y de sus derivadas para $x=x_0$:

a) $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10, \quad x_0=2$;

b) $f(x)=x^4-3ix^3-4x^2+5ix-1; \quad x_0=1+2i$.

549. ¿Cuál es el orden de multiplicidad de la raíz:

a) 2 para el polinomio $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;

b) -2 para el polinomio $x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$?

550. Determinar el coeficiente a de tal modo que el número -1 sea una raíz múltiple de orden no inferior a dos del polinomio x^5-ax^2-ax+1.

551. Determinar A y B de tal modo que el trinomio Ax^4+Bx^3+1 sea divisible por $(x-1)^2$.

552. Determinar A y B de tal modo que el trinomio $Ax^{n+1}+Bx^n+1$ sea divisible por $(x-1)^2$.

***553.** Demostrar que para los polinomios:

a) $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$;

b) $x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1$;

c) $(n-2m)x^n-nx^{n-m}+nx^m-(n-2m)$

el número 1 es una raíz múltiple, de tercer orden.

554. Demostrar que el polinomio

$$x^{2n+1}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n+2}+\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^{n+1}-$$
$$-\frac{(n-1)(n+2)(2n+1)}{2}x^n+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}x^{n-1}-1$$

es divisible por $(x-1)^5$ y no es divisible por $(x-1)^6$.

***555.** Demostrar que para que el polinomio

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

sea divisible por $(x-1)^{k+1}$, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:

$$
\begin{aligned}
a_0+a_1+\ a_2+\ldots+\ a_n&=0,\\
a_1+2a_2+\ldots+n\,a_n&=0,\\
a_1+4a_2+\ldots+n^2a_n&=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
a_1+2^ka_2+\ldots+n^ka_n&=0.
\end{aligned}
$$

556. Averiguar el orden de multiplicidad de la raíz a del polinomio

$$\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a),$$

donde $f(x)$ es un polinomio.

557. Hallar la condición según la cual el polinomio x^5+ax^3+b tiene una raíz doble, distinta de cero.

558. Hallar la condición según la cual el polinomio x^5+10ax^3+ $+5bx+c$ tiene una raíz triple, distinta de cero.

559. Demostrar que el polinomio $x^n+ax^{n-m}+b$ no puede tener raíces, distintas de cero, de orden superior al segundo.

560. Hallar la condición según la cual el polinomio x^n+ $+ax^{n-m}+b$ tiene una raíz doble, distinta de cero.

***561.** Demostrar que el polinomio de k términos

$$a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\ldots+a_kx^{p_k}$$

no tiene raíces de orden superior a $k-1$, distintas de cero.

***562.** Demostrar que toda raíz distinta de cero, de orden $k-1$, del polinomio

$$a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\ldots+a_kx^{p_k}$$

satisface a las ecuaciones

$$a_1x^{p_1}\varphi'(p_1)=a_2x^{p_2}\varphi'(p_2)=\ldots=a_kx^{p_k}\varphi'(p_k),$$

donde

$$\varphi(t)=(t-p_1)(t-p_2)(t-p_3)\ldots(t-p_k),$$

y recíprocamente.

***563.** Demostrar que un polinomio es divisible por su derivada si, y sólo si, es igual a $a_0(x-x_0)^n$.

564. Demostrar que el polinomio

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

no tiene raíces múltiples.

565. Demostrar que para que x_0 sea una raíz de orden k del numerador de una función racional fraccionaria $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, cuyo denominador $w(x)$ no se anula para $x=x_0$, es necesario y suficiente que sea

$$f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0, \quad f^k(x_0)\neq 0.$$

566. Demostrar que toda función racional fraccionaria $f(x)=\frac{\varphi(x)}{w(x)}$ puede representarse en la forma

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{F(x)}{w(x)}(x-x_0)^{n+1},$$

donde $F(x)$ es un polinomio. Se supone que $w(x_0)\neq 0$ (fórmula de Taylor para la función racional fraccionaria).

*567. Demostrar que si x_0 es una raíz de orden k del polinomio $f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)$, entonces x_0 es una raíz de orden $k+1$ del polinomio $f_1(x)f_2(x_0)-f_2(x)f_1(x_0)$, si este último no es idénticamente igual a cero, y recíprocamente.

*568. Demostrar que si $f(x)$ no tiene raíces múltiples, entonces $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ no tiene raíces múltiples de orden superior a $n-1$, donde n es el grado de $f(x)$.

*569. Construir un polinomio $f(x)$ de grado n, para el cual $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ tenga una raíz x_0 de orden $n-1$ que no sea raíz de $f(x)$.

§ 2. Demostración del teorema fundamental del álgebra superior y cuestiones contiguas

570. Determinar δ de tal modo que para $|x|<\delta$ el polinomio

$$x^5-4x^3+2x$$

sea menor que 0,1 en valor absoluto.

571. Determinar δ de tal modo que sea $|f(x)-f(2)|<0{,}01$ para todos los x que satisfacen a la desigualdad $|x-2|<\delta$; $f(x)=x^4-3x^3+4x+5$.

572. Determinar M de tal modo que para $|x|>M$ sea

$$|x^4-4x^3+4x^2+2|>100.$$

573. Hallar x de tal modo que sea $|f(x)|<|f(0)|$, donde a) $f(x)=x^5-3ix^3+4$; b) $f(x)=x^5-3x^3+4$.

574. Hallar x de tal modo que sea $|f(x)|<|f(1)|$, donde

a) $f(x)=x^4-4x^3+2$;

b) $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+5$;

c) $f(x)=x^4-4x+5$.

575. Demostrar que si $z-i=a(1-i)$, $0<a<\frac{1}{2}$, entonces

$$|f(z)|<\sqrt{5},$$

donde

$$f(z)=(1+i)z^5+(3-5i)z^4-(9+5i)z^3-$$
$$-7(1-i)z^2+2(1+3i)z+4-i.$$

*576. Demostrar que si $f(z)$ es un polinomio distinto de una constante, entonces en un entorno arbitrariamente pequeño de z_0 se puede hallar z_1 de modo que sea $|f(z_1)>|f(z_0)||$.

577. Demostrar el lema de D'Alembert para la función racional fraccionaria.

578. Demostrar que el módulo de una función racional fraccionaria alcanza su extremo inferior (exacto) al variar la variable independiente en un recinto rectangular cerrado.

579. Es evidente que el teorema de existencia de la raíz no subsiste para la función racional fraccionaria. Así, pues, la función $\frac{1}{z}$ no tiene ninguna raíz. ¿Qué es lo que impide que «la demostración» del teorema se efectúe por el mismo esquema que para el polinomio?

*580. Sea $f(x)$ un polinomio o una función racional fraccionaria. Demostrar que si a es una raíz de $f(z)-f(a)$ de orden k y $f(a)\neq 0$, entonces para ρ suficientemente pequeño existen en la circunferencia $|z-a|=\rho$ $2k$ puntos en los cuales $|f(z)|=|f(a)|$.

*581. Demostrar que si a es una raíz de $f(z)-f(a)$ de orden k, entonces para ρ suficientemente pequeño existen en la circunferencia $|z-a|=\rho$ $2k$ puntos en los cuales $\operatorname{Re}(f(z))=\operatorname{Re}(f(a))$, y $2k$ puntos en los cuales $\operatorname{Im}(f(z))=\operatorname{Im}(f(a))$. Aquí $f(z)$ es un polinomio o una función racional fraccionaria.

§ 3. Descomposición en factores lineales. Descomposición en factores irreducibles en el campo de los números reales. Relaciones entre los coeficientes y las raíces

582. Descomponer los polinomios:

a) $x^3-6x^2+11x-6$; b) x^4+4; c) $x^4+4x^3+4x^2+1$;

d) x^4-10x^2+1.

en factores lineales.

*583. Descomponer los polinomios:

a) $\cos(n \arccos x)$;

b) $(x+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^n+(x+\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)^n$;

c) $x^m-C_{2m}^2x^{m-1}+C_{2m}^4x^{m-2}-\ldots+(-1)^m C_{2m}^{2m}$.

en factores lineales.

584. Descomponer los polinomios:

a) x^4+4; b) x^6+27; c) $x^4+4x^3+4x^2+1$;

d) $x^{2n}-2x^n+2$; e) x^4-ax^2+1, $-2<a<2$;

f) $x^{2n}+x^n+1$.

en factores reales irreducibles.

585. Construir un polinomio de grado mínimo que tenga:

a) la raíz doble 1 y las raíces simples 2, 3 y $1+i$;

b) la raíz triple -1 y las raíces simples 3 y 4;

c) la raíz doble i y la raíz simple $-1-i$.

586. Hallar un polinomio de grado mínimo cuyas raíces sean todas las raíces de 1 de órdenes no superiores a n.

587. Construir un polinomio de grado mínimo de coeficientes reales que tenga:

a) la raíz doble 1 y las raíces simples 2, 3 y $1+i$;

b) la raíz triple $2-3i$;

c) la raíz doble i y la raíz simple $-1-i$.

588. Hallar el máximo común divisor de los polinomios:

a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ y $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

b) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ y $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;

c) $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ y $(x^2-1)^3$.

***589.** Hallar el máximo común divisor de los polinomios:

$$x^m-1 \text{ y } x^n-1.$$

590. Hallar el máximo común divisor de los polinomios

$$x^m+a^m \text{ y } x^n+a^n.$$

591. Hallar el máximo común divisor del polinomio y su derivada:

a) $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x-3)$;

b) $f(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$;

c) $f(x)=x^{m+n}-x^m-x^n+1$.

592. El polinomio $f(x)$ no tiene raíces múltiples. Demostrar que si x_0 es una raíz múltiple de orden $k>1$, de la ecuación $f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=0$, entonces x_0 es una raíz de orden $k-1$ de la ecuación $f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)=0$.

Se supone que $v(x_0)\neq 0$, $v'(x_0)\neq 0$.

593. Demostrar que $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ es divisible por x^2+x+1.

594. ¿Cuándo $x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2}$ es divisible por x^2-x+1?

595. ¿Bajo qué condición $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ es divisible por x^4+x^2+1?

596. ¿Bajo qué condición $x^{2m}+x^m+1$ es divisible por x^2+x+1?

597. Demostrar que

$$x^{ka_1}+x^{ka_2+1}+\ldots+x^{ka_k+k-1}$$

es divisible por $x^{k-1}+x^{k-2}+\ldots+1$.

598. ¿Para qué valores de $m(x+1)^m-x^m-1$ es divisible por x^2+x+1?

599. ¿Para qué valores de $m(x+1)^m+x^m+1$ es divisible por x^2+x+1?

600. ¿Para qué valores de $m(x+1)^m-x^m-1$ es divisible por $(x^2+x+1)^2$?

601. ¿Para qué valores de $m(x+1)^m+x^m+1$ es divisible por $(x^2+x+1)^2$?

602. ¿Pueden ser divisibles por $(x^2+x+1)^3$ los polinomios $(x+1)^m+x^m+1$ y $(x+1)^m-x^m-1$?

603. Transformar el polinomio

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1\cdot 2\ldots n},$$

asignando a x sucesivamente los valores 1, 2, ..., n. (Comparar con el problema 542.)

604. ¿Para qué valores de $mX_n(x^m)$ es divisible por $X_n(x)$? (X_n es el polinomio circular.)

Demostrar los teoremas:

605. Si $f(x^n)$ es divisible por $x-1$, también es divisible por x^n-1.

606. Si $f(x^n)$ es divisible por $(x-a)^k$, también es divisible por $(x^n-a^n)^k$ para $a\neq 0$.

607. Si $F(x)=f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ es divisible por x^2+x+1, entonces $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son divisibles por $x-1$.

*608. Si un polinomio $f(x)$ de coeficientes reales satisface a la desigualdad $f(x)\geqslant 0$ para todos los valores reales de x, entonces $f(x)=[\varphi_1(x)]^2+[\varphi_2(x)]^2$, donde $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son polinomios de coeficientes reales.

609. El polinomio $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ tiene las raíces $x_1, \ldots, x_n$. ¿Qué raíces tienen los polinomios:

a) $a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^n a_n$;

b) $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$;

c) $f(a)+\frac{f'(a)}{1}x+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$;

d) $a_0x^n+a_1bx^{n-1}+a_2b^2x^{n-2}+\ldots+a_nb^n$?

610. Hallar la relación entre los coeficientes de la ecuación cúbica $x^3+px^2+qx+r=0$, para que una de las raíces sea igual a la suma de las otras dos.

611. Comprobar que una de las raíces de la ecuación $36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ es igual a la suma de las otras dos y resolver la ecuación.

612. Hallar la relación entre los coeficientes de la ecuación de cuarto grado $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ para que la suma de dos raíces sea igual a la suma de las otras dos.

613. Demostrar que la ecuación que satisface a la condición del problema 612 se reduce a una bicuadrada mediante la sustitución $x = y + \alpha$, eligiendo adecuadamente α.

614. Hallar la relación entre los coeficientes de la ecuación de cuarto grado $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ para que el producto de dos raíces sea igual al producto de las otras dos.

615. Demostrar que la ecuación que satisface a la condición del problema 614 se resuelve dividiendo por x^2 y haciendo la sustitución $y = x + \frac{c}{ax}$ (para $a \neq 0$).

616. Resolver las ecuaciones:

a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$;
b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$;
c) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$;
d) $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$,

aplicando los problemas 612—615.

617. Determinar λ de tal modo que una de las raíces de la ecuación $x^3 - 7x + \lambda = 0$ sea igual al doble de otra.

618. Determinar a, b, c de tal modo que éstos sean raíces de la ecuación

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

619. Determinar a, b, c de tal modo que éstos sean raíces de la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

620. La suma de dos raíces de la ecuación

$$2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$$

es igual a 1. Determinar λ.

621. Hallar la relación entre los coeficientes de la ecuación $x^3 + px + q = 0$ para que sea $x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

622. Hallar la suma de los cuadrados de las raíces del polinomio

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

***623.** Resolver la ecuación

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

conociendo los coeficientes a_1 y a_2 y sabiendo que sus raíces forman una progresión aritmética.

624. ¿Forman las raíces de las ecuaciones:

a) $8x^3-12x^2-2x+3 \quad =0$;

b) $2x^4+8x^3+7x^2-2x-2=0$

progresiones aritméticas?

625. Se da la curva

$$y=x^4+ax^3+bx^2+cx+d.$$

Hallar una recta de tal modo que los puntos de su intersección con la curva M_1, M_2, M_3, M_4, corten tres segmentos iguales: $M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4$. ¿Cuál es la condición para que este problema tenga solución?

*626. Formar una ecuación de 4° grado cuyas raíces sean α, $\frac{1}{\alpha}$, $-\alpha$, $-\frac{1}{\alpha}$.

*627. Formar una ecuación de 6° grado que tenga las raíces:

$$\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\quad 1-\alpha,\quad \frac{1}{1-\alpha},\quad 1-\frac{1}{\alpha},\quad \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

628. Sea $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.
Hallar $f'(x_i)$, $f''(x_i)$ y demostrar que

$$\frac{\partial f'(x_i)}{\partial x_i}=\frac{1}{2}f''(x_i).$$

629. Demostrar que si $f(x_1)=f''(x_1)=0$, pero $f'(x_1)\neq 0$, entonces

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_1-x_i}=0.$$

630. Las raíces del polinomio $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ forman una progresión aritmética. Determinar $f'(x_i)$.

§ 4. Algoritmo de Euclides

631. Hallar el máximo común divisor de los polinomios:

a) $x^4+x^3-3x^2-4x-1$ y x^3+x^2-x-1;

b) $x^5+x^4-x^3-2x-1$ y $3x^4+2x^3+x^2+2x-2$;

c) $x^6-7x^4+8x^3-7x+7$ y $3x^5-7x^3+3x^2-7$;

d) $x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10$ y $3x^4-6x^3+5x^2+2x-2$;

e) $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ y x^5+x^2-x+1;

f) $x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12$ y $x^4+3x^3-6x^2-22x-12$;

g) $x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1$ y $x^4-2x^3-x^2-2x+1$;

h) x^4-10x^2+1 y $x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$;

i) $x^4+7x^3+19x^2+23x+10$ y $x^4+7x^3+18x^2+22x+12$;

j) x^4-4x^3+1 y x^3-3x^2+1;

k) $2x^6-5x^5-14x^4+36x^3+86x^2+12x-31$ y
$2x^5-9x^4+2x^3+37x^2+10x-14$;

l) $3x^6-x^5-9x^4-14x^3-11x^2-3x-1$ y
$3x^5+8x^4+9x^3+15x^2+10x+9$.

632. Sirviéndose del algoritmo de Euclides, elegir unos polinomios $M_1(x)$ y $M_2(x)$ de tal modo que sea $f_1(x)M_2(x)+f_2(x)M_1(x)=\delta(x)$, donde $\delta(x)$ es el máximo común divisor de $f_1(x)$ y $f_2(x)$:

a) $f_1(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $f_2(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;

b) $f_1(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$, $f_2(x)=x^4+2x^3+x+2$;

c) $f_1(x)=x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35$,
$f_2(x)=x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$;

d) $f_1(x)=3x^7+6x^6-3x^5+4x^4+14x^3-6x^2-4x+4$,
$f_2(x)=3x^6-3x^4+7x^3-6x+2$;

e) $f_1(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$,
$f_2(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$;

f) $f_1(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $f_2(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

633. Sirviéndose del algoritmo de Euclides, elegir unos polinomios $M_1(x)$ y $M_2(x)$ de modo que sea $f_1(x)M_2(x)+f_2(x)M_1(x)=1$:

a) $f_1(x)=3x^3-2x^2+x+2$, $f_2(x)=x^2-x+1$;

b) $f_1(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $f_2(x)=x^2-x-1$;

c) $f_1(x)=x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12$,
$f_2(x)=x^3-5x^2-3x+17$;

d) $f_1(x)=2x^4+3x^3-3x^2-5x+2$, $f_2(x)=2x^3+x^2-x-1$;

e) $f_1(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1$, $f_2(x)=3x^3-2x^2+x-1$;

f) $f_1(x)=x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+3$,
$f_2(x)=x^4+2x^3+2x^2+x+1$.

634. Elegir por el método de los coeficientes indeterminados $M_1(x)$ y $M_2(x)$ de tal modo que sea $f_1(x)M_2(x)+f_2(x)M_1(x)=1$:

a) $f_1(x)=x^4-4x^3+1$, $f_2(x)=x^3-3x^2+1$;

b) $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=(1-x)^2$;

c) $f_1(x)=x^4$, $f_2(x)=(1-x)^4$.

635. Elegir unos polinomios de menor grado $M_1(x)$ y $M_2(x)$ de tal modo que sea

a) $(x^4-2x^3-4x^2+6x+1)\,M_1(x)+(x^3-5x-3)\,M_2(x)=x^4$,

b) $(x^4+2x^3+x+1)\,M_1(x)+(x^4+x^3-2x^2+2x-1)\,M_2(x)=x^3-2x$.

636. Hallar un polinomio de menor grado que dé el residuo:

a) $2x$ al dividirlo por $(x-1)^2$ y $3x$ al dividirlo por $(x-2)^3$;

b) x^2+x+1 al dividirlo por $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ y $2x^2-3$ al dividirlo por $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$.

***637.** Hallar unos polinomios $M(x)$ y $N(x)$ de modo que sea

$$x^m M(x)+(1-x)^n N(x)=1.$$

638. Sea $f_1(x)\,M(x)+f_2(x)\,N(x)=\delta(x)$, donde $\delta(x)$ es el máximo común divisor de $f_1(x)$ y $f_2(x)$. ¿Cuál es el máximo común divisor de $M(x)$ y $N(x)$?

639. Separar las raices múltiples de los polinomios:

a) $x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$;

b) $x^5-10x^3-20x^2-15x-4$;

c) $x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$;

d) $x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$;

e) $x^6-2x^5-x^4-2x^3+5x^2+4x+4$;

f) $x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1$;

g) $x^8+2x^7+5x^6+6x^5+8x^4+6x^3+5x^2+2x+1$.

§ 5. Problema de interpolación y función racional fraccionaria

640. Sirviéndose del método de Newton, construir el polinomio de menor grado, si se da la tabla de valores:

a) $\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{array}$; b) $\begin{array}{c|ccccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & 6 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{array}$;

c) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & \frac{9}{4} & 4 & \frac{25}{4} \\ \hline f(x) & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \end{array}$, hallar $f(2)$; d) $\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline f(x) & 5 & 6 & 1 & -4 & 10 \end{array}$.

641. Sirviéndose de la fórmula de Lagrange, construir el polinomio, si se da la tabla de valores:

a) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$; b) $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & i & -1 & -i \\ \hline y & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$.

***642.** Dada la tabla de valores:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{array}, \quad \varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi k}{n},$$

hallar $f(x)$.

643. El polinomio $f(x)$, cuyo grado no es superior a $n-1$, toma los valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en las raíces n-ésimas de 1. Hallar $f(0)$.

***644.** Demostrar el teorema: para que sea

$$f(x)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]$$

para cualquier polinomio $f(x)$ de grado no superior a $n-1$, es necesario y suficiente que los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estén situados en una circunferencia con el centro en x_0 y que dividan a ésta en partes iguales.

***645.** Demostrar que si las raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del polinomio $\varphi(x)$ son todas distintas, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)}=0 \quad \text{si} \quad 0\leqslant s\leqslant n-2.$$

646. Hallar la suma $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}$ (las notaciones son las mismas que en el problema 645).

647. Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered}
a_0+a_1x_1+\ldots+a_{n-1}x_1^{n-1}=y_1,\\
a_0+a_1x_2+\ldots+a_{n-1}x_2^{n-1}=y_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_0+a_1x_n+\ldots+a_{n-1}x_n^{n-1}=y_n.
\end{gathered}$$

deducir la fórmula de interpolación de Lagrange.

***648.** Construir el polinomio de menor grado, si se da la tabla de valores:

x	0	1	2	...	n
y	1	2	4	...	2^n

***649.** Construir el polinomio de menor grado, si se da la tabla de valores:

x	0	1	2	...	n
y	1	a	a^2	...	a^n

***650.** Hallar el polinomio de grado $2n$ que, al dividirlo por $x(x-2)\ldots(x-2n)$, da el residuo 1, y al dividirlo por $(x-1)\times$ $\times(x-3)\ldots[x-(2n-1)]$, da el residuo -1.

***651.** Construir el polinomio de menor grado, si se da la tabla de valores:

x	1	2	3	...	n
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{n}$

*652. Hallar el polinomio de grado no superior a $(n-1)$ que satisface a la condición $f(x)=\frac{1}{x-a}$ en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i \neq a$, $i=1, 2, \ldots, n$.

*653. Demostrar que un polinomio de grado $k \leqslant n$, que toma valores enteros para $n+1$ valores sucesivos enteros de la variable independiente, toma valores enteros para todos los valores enteros de la variable independiente.

*654. Demostrar que un polinomio de grado n, que toma valores enteros para $x=0, 1, 4, 9, \ldots, n^2$, toma valores enteros para todos los cuadrados de los números naturales.

*655. Descomponer en fracciones simples del primer tipo:

a) $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; b) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

c) $\frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$; d) $\frac{x^2}{x^4-1}$; e) $\frac{1}{x^3-1}$;

f) $\frac{1}{x^4+4}$; g) $\frac{1}{x^n-1}$; h) $\frac{1}{x^n+1}$;

i) $\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}$;

j) $\frac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-n^2)}$; k) $\frac{1}{\cos(n \arccos x)}$.

*656. Descomponer en fracciones simples reales del primero y segundo tipos:

a) $\frac{1}{x^3-1}$; b) $\frac{x^2}{x^4-16}$; c) $\frac{1}{x^4+4}$; d) $\frac{x^2}{x^6+27}$;

e) $\frac{x^m}{x^{2n+1}-1}$, $m<2n+1$;

f) $\frac{x^m}{x^{2n+1}+1}$, $m<2n+1$;

g) $\frac{1}{x^{2n}-1}$; h) $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, $m<n$;

i) $\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+4)\ldots(x^2+n^2)}$.

*657. Descomponer en fracciones simples del primer tipo:

a) $\frac{x}{(x^2-1)^2}$; b) $\frac{1}{(x^2-1)^2}$; c) $\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$;

d) $\frac{1}{(x^n-1)^2}$; e) $\frac{1}{x^m(1-x)^n}$; f) $\frac{1}{(x^2-a^2)^n}$, $a \neq 0$;

g) $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$; h) $\frac{g(x)}{[f(x)]^2}$,

donde $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ es un polinomio sin raíces múltiples y $g(x)$ es un polinomio de grado inferior a $2n$.

658. Descomponer en fracciones simples reales del primero y segundo tipos:

a) $\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; b) $\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$;

c) $\frac{1}{(x^4-1)^2}$; d) $\frac{1}{(x^{2n}-1)^2}$.

659. Sea $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.
Expresar mediante $\varphi(x)$ las sumas:

a) $\sum\frac{1}{x-x_i}$; b) $\sum\frac{x_i}{x-x_i}$; c) $\sum\frac{1}{(x-x_i)^2}$.

***660.** Calcular las siguientes sumas, sabiendo que $x_1, x_2, \ldots$ son las raíces del polinomio $\varphi(x)$:

a) $\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}$, $\varphi(x)=x^3-3x-1$;

b) $\frac{1}{x_1^2-3x_1+2}+\frac{1}{x_2^2-3x_2+2}+\frac{1}{x_3^2-3x_3+2}$, $\varphi(x)=x^3+x^2-4x+1$;

c) $\frac{1}{x_1^2-2x_1+1}+\frac{1}{x_2^2-2x_2+1}+\frac{1}{x_3^2-2x_3+1}$, $\varphi(x)=x^3+x^2-1$.

661. Hallar un polinomio de primer grado que tome aproximadamente los valores de la tabla

x	0	1	2	3	4
y	2,1	2,5	3,0	3,6	4,1

de tal modo que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima.

662. Hallar un polinomio de segundo grado que tome aproximadamente los valores de la tabla

x	0	1	2	3	4
y	1	1,4	2	2,7	3,6

de modo que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima.

§ 6. Raíces racionales de los polinomios. Reductibilidad e irreductibilidad en el campo de los números racionales

663. Demostrar que si $\frac{p}{q}$ es una fracción racional irreducible y es raíz del polinomio $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ de coeficientes enteros, entonces:

1) q es un divisor de a_0; 2) p es un divisor de a_n;

3) $p-mq$ es un divisor de $f(m)$ para cualquier m entero. En particular, $p-q$ es un divisor de $f(1)$, $p+q$ es un divisor de $f(-1)$.

664. Hallar las raíces racionales de los polinomios:

a) $x^3-6x^2+15x-14$; b) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$;

c) $x^5-7x^3-12x^2+6x+36$: d) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$;

e) $24x^4-42x^3-77x^2+56x+60$; f) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$;

g) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$;

h) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$;

i) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24$;

k) $2x^3+3x^2+6x-4$; l) $4x^4-7x^2-5x-1$;

m) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$; n) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$;

o) $x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$.

***665.** Demostrar que un polinomio $f(x)$ de coeficientes enteros no tiene raíces enteras, si $f(0)$ y $f(1)$ son números impares.

***666.** Demostrar que si un polinomio de coeficientes enteros toma los valores ± 1 para dos valores enteros x_1 y x_2 de la variable independiente, entonces no tiene raíces racionales si $|x_1-x_2|>2$. Si $|x_1-x_2|\leqslant 2$, sólo puede tener la raíz racional $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

***667.** Demostrar la irreductibilidad de los polinomios, aplicando el criterio de Eisenstein:

a) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;

b) $x^5-12x^3+36x-12$; c) x^4-x^3+2x+1.

***668.** Demostrar que el polinomio

$$X_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1},$$

es irreducible, p es un número primo.

***669.** Demostrar que el polinomio

$$X_{p^k}(x)=\frac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1},$$

es irreducible, p es un número primo.

***670.** Demostrar que un polinomio $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, de coeficientes enteros, que no tiene raíces racionales, es irreducible, si existe un número primo p tal que a_0 no es divisible por p; $a_2, a_3, \ldots, a_n$ son divisibles por p y a_n no es divisible por p^2.

***671.** Sea $f(x)$ un polinomio de coeficientes enteros, para el cual existe un número primo p tal que a_0 no es divisible por p; $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ son divisibles por p y a_n no es divisible por p^2. Demostrar que entonces $f(x)$ tiene un divisor irreducible de grado $\geqslant n-k$.

672. Por el método de descomposición en factores de los valores del polinomio para valores enteros de la variable, descomponer en factores los polinomios o demostrar que son irreducibles:

a) x^4-3x^2+1; b) $x^4+5x^3-3x^2-5x+1$;

c) $x^4+3x^3-2x^2-2x+1$; d) $x^4-x^3-3x^2+2x+2$.

673. Demostrar que un polinomio de tercer grado es irreducible, si no tiene raíces racionales.

674. Demostrar que un polinomio de cuarto grado x^4+ax^3+ $+bx^2+cx+d$, de coeficientes enteros, es irreducible, si no tiene raíces enteras y no es divisible por ninguno de los polinomios de la forma

$$x^2+\frac{cm-am^2}{d-m^2}x+m,$$

donde m son los divisores del número d. Los polinomios de coeficientes fraccionarios se pueden no tener en cuenta. Pueden servir de excepción los polinomios "semejantes a los recíprocos" (problemas 614—615).

675. Demostrar que un polinomio de quinto grado x^5+ax^4+ $+bx^3+cx^2+dx+e$, de coeficientes enteros, es irreducible, si no tiene raíces enteras y no es divisible por ninguno de los polinomios de coeficientes enteros de la forma

$$x^2+\frac{am^3-cm^2-dn+be}{m^3-n^2+ae-dm}x+m,$$

donde m es divisor de e, $n=\frac{e}{m}$.

676. Descomponer los polinomios en factores o demostrar que son irreducibles, aplicando los problemas 674, 675:

a) $x^4-3x^3+2x^2+3x-9$; b) $x^4-3x^3+2x^2+2x-6$;

c) $x^4+4x^3-6x^2-23x-12$; d) $x^5+x^4-4x^3+9x^2-6x+6$.

677. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que el polinomio de coeficientes racionales (posiblemente fraccionarios) x^4+px^2+q sea reducible.

678. Demostrar que para que un polinomio de cuarto grado sin raíces racionales sea reducible, es necesaria (pero no suficiente) la existencia de una raíz racional de la ecuación cúbica que resulta al resolver por el método de Ferrari.

***679.** Demostrar que el polinomio $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots$ $\ldots(x-a_n)-1$ es irreducible; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números enteros distintos entre sí.

***680.** Demostrar que el polinomio $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots$ $\ldots(x-a_n)+1$ es irreducible, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros distintos entre sí, a excepción de

$$(x-a)(x-a-1)(x-a-2)(x-a-3)+1=$$
$$=[(x-a-1)(x-a-2)-1]^2$$

y

$$(x-a)(x-a-2)+1=(x-a-1)^2.$$

***681.** Demostrar que si un polinomio de n-ésimo grado, de coeficientes enteros, toma los valores ± 1 para más de $2m$ valores enteros de la variable ($n=2m$ o $2m+1$), entonces es irreducible.

***682.** Demostrar que el polinomio

$$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1,$$

es irreducible, si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números enteros distintos entre sí.

***683.** Demostrar que un polinomio $f(x)$, de coeficientes enteros, que toma el valor $+1$ para más de tres valores enteros de la variable independiente, no puede tomar el valor -1 para valores enteros de la variable independiente.

***684.** Demostrar que un polinomio de n-ésimo grado, de coeficientes enteros, que toma los valores ± 1 para más de $n/2$ valores enteros de la variable independiente, es irreducible si $n \geqslant 12$.

***685.** Demostrar que si el polinomio de coeficientes enteros ax^2+bx+1 es irreducible, también lo es el polinomio $a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1$, donde $\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ si $n\geqslant 7$. Aquí $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números enteros distintos entre sí.

§ 7. Cotas de las raíces de un polinomio

686. Demostrar que las raíces de un polinomio $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$, de coeficientes reales o complejos, no son superiores en valor absoluto a:

a) $1+\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$, $k=1, 2, \dots, n$;   b) $\rho+\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|$,

$k=1, 2, \dots, n$, ρ es un número positivo arbitrario;

c) $2\max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, $k=1, 2, \dots, n$;

d) $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|+\max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$, $k=1, 2, \dots, n$.

687. Demostrar que los módulos de las raíces de un polinomio $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ no superan a la única raíz positiva de la ecuación $b_0x^n-b_1x^{n-1}-b_2x^{n-2}-\dots-b_n$, donde

$$0<b_0\leqslant|a_0|,\ b_1\geqslant|a_1|,\ b_2\geqslant|a_2|,\ \dots,\ b_n\geqslant|a_n|.$$

688. Demostrar que los módulos de las raíces del polinomio $f(x)=a_0x^n+a_rx^{n-r}+\dots+a_n$, $a_r\neq 0$, no son superiores a

a) $1+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, $k=r, \dots, n$;

b) $\rho+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}$, $k=r, \dots, n$, ρ es cualquier número positivo;

c) $\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|}+\max \sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$, $k=r, \ldots, n$.

689. Demostrar que las raíces reales de un polinomio de coeficientes reales no superan a la raíz no negativa única del polinomio que resulta al eliminar todos los términos, menos el superior, cuyos coeficientes tienen el mismo signo que el coeficiente del término superior.

Demostrar los teoremas:

690. Las raíces reales de un polinomio de coeficientes reales $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ (siendo $a_0>0$), no son superiores a:

a) $1+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$, donde r es el índice del primer coeficiente negativo, a_k son los coeficientes negativos del polinomio;

b) $\rho+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}$, r es el índice del primer coeficiente negativo, a_k son los coeficientes negativos, ρ es un número positivo arbitrario;

c) $2\max\sqrt[k]{\frac{|a_k|}{a_0}}$, a_k son los coeficientes negativos del polinomio;

d) $\sqrt[r]{\frac{|a_r|}{a_0}}+\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$, r es el índice del primer coeficiente negativo, a_k son los coeficientes negativos.

691. Si todos los coeficientes de un polinomio $f(x)$ son no negativos, el polinomio no tiene raíces positivas.

692. Si $f(a)>0$, $f'(a)\geqslant 0, \ldots, f^{(n)}(a)\geqslant 0$, entonces todas las raíces reales del polinomio no son superiores a a.

693. Acotar superior e inferiormente las raíces reales de los polinomios:

a) $x^4-4x^3+7x^2-8x+3$; b) x^5+7x^3-3;

c) $x^7-108x^5-445x^3+900x^2+801$;

d) $x^4+4x^3-8x^2-10x+14$.

§ 8. Teorema de Sturm

694. Formar los polinomios de Sturm y separar las raíces de los polinomios:

a) x^3-3x-1; b) x^3+x^2-2x-1;

c) x^3-7x+7; d) x^3-x+5; e) x^3+3x-5.

695. Formar los polinomios de Sturm y separar las raíces de los polinomios:

a) $x^4-12x^2-16x-4$; b) x^4-x-1;

c) $2x^4-8x^3+8x^2-1$; d) x^4+x^3-1; e) $x^4+4x^3-12x+9$.

696. Formar los polinomios de Sturm y separar las raíces de los polinomios:

a) $x^4-2x^3-4x^2+5x+5$; b) $x^4-2x^3+x^2-2x+1$;

c) $x^4-2x^3-3x^2+2x+1$; d) $x^4-x^3+x^2-x-1$;

e) $x^4-4x^3-4x^2+4x+1$.

697. Formar la serie de Sturm y separar las raíces de los polinomios:

a) $x^4-2x^3-7x^2+8x+1$; b) x^4-4x^2+x+1;

c) $x^4-x^3-x^2-x+1$; d) $x^4-4x^3+8x^2-12x+8$;

e) x^4-x^3-2x+1.

698. Formar la serie de Sturm y separar las raíces de los polinomios:

a) x^4-6x^2-4x+2; b) $4x^4-12x^2+8x-1$;

c) $3x^4+12x^3+9x^2-1$; d) $x^4-x^3-4x^2+4x+1$;

e) $9x^4-126x^2-252x-140$.

699. Formar la serie de Sturm y separar las raíces de los polinomios:

a) $2x^5-10x^3+10x-3$;

b) $x^6-3x^5-3x^4+11x^3-3x^2-3x+1$;

c) $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$; d) $x^5-5x^3-10x^2+2$.

700. Formar la serie de Sturm sirviéndose del derecho de dividir las funciones de Sturm por cantidades positivas, y separar las raíces de los polinomios:

a) x^4+4x^3-1; b) $x^4-2x^3+3x^2-9x+1$;

c) $x^4-2x^3+2x^2-6x+1$; d) $x^5+5x^4+10x^2-5x-3$.

701. Aplicando el teorema de Sturm, averiguar el número de raíces reales de la ecuación $x^3+px+q=0$ para p y q reales.

***702.** Determinar el número de raíces reales de la ecuación

$$x^n+px+q=0.$$

703. Determinar el número de raíces reales de la ecuación

$$x^5-5ax^3+5a^2x+2b=0.$$

704. Demostrar que si la serie de Sturm contiene polinomios de todos los grados, desde el grado cero hasta el n-ésimo, entonces el número de variaciones de signo que presenta la serie de los coeficientes superiores de los polinomios de Sturm es igual al número de pares de raíces complejas conjugadas del polinomio inicial.

705. Demostrar que si los polinomios $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_k(x)$ poseen las propiedades:

1) $f(x)f_1(x)$ cambia el signo de más a menos al pasar por una raíz de $f(x)$;

2) dos polinomios consecutivos no se anulan simultáneamente;

3) si $f_\lambda(x_0)=0$, entonces $f_{\lambda-1}(x_0)$ y $f_{\lambda+1}(x_0)$ tienen signos contrarios;

4) el último polinomio $f_k(x)$ no cambia el signo en el intervalo (a, b), entonces el número de raíces del polinomio $f(x)$ en el intervalo (a, b) es igual al incremento del número de variaciones de signo que presenta la serie de valores de los polinomios f, f_1, $\ldots$, f_k al pasar de a a b.

706. Sea x_0 una raíz real de $f'(x)$:

$$f_1(x)=\frac{1}{x-x_0}f'(x);$$

$f_2(x)$ es el residuo de la división de $f(x)$ por $f_1(x)$, tomado con signo contrario; $f_3(x)$ es el residuo de la división de $f_1(x)$ por $f_2(x)$, tomado con signo contrario, etc. Se supone que $f(x)$ no tiene raíces múltiples. Ligar el número de raíces reales de $f(x)$ con el número de variaciones de signo que presenta la serie de valores de los polinomios construidos para $x=-\infty$, $x=x_0$ y $x=+\infty$.

***707.** Formar la serie de Sturm para los polinomios de Hermite

$$P_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$$

y determinar el número de raíces reales.

***708.** Determinar el número de raíces reales de los polinomios de Laguerre

$$P_n(x)=(-1)^n e^x\frac{d^n(e^{-x}x^n)}{dx^n}.$$

Determinar el número de raíces reales de los polinomios:

***709.** $E_n(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$.

***710.** $P_n(x)=(-1)^{n+1}x^{2n+2}e^{-\frac{1}{x}}\frac{d^{n+1}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^{n+1}}$.

***711.** $P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}(x^2+1)^{n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$.

***712.** $P_n(x)=(-1)^n(x^2+1)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

* 713. Sea $f(x)$ un polinomio de tercer grado sin raíces múltiples. Demostrar que el polinomio $F(x)=2f(x)f''(x)-[f'(x)]^2$ tiene dos raíces reales y sólo dos. Estudiar el caso en que $f(x)$ tiene una raíz doble o triple.

714. Demostrar que si todas las raíces de un polinomio $f(x)$ son reales y distintas, entonces todas las raíces de cada uno de los polinomios de la serie de Sturm, formada mediante el algoritmo de Euclides, son reales y distintas.

§ 9. Diversos teoremas sobre la distribución de las raíces de un polinomio

Demostrar los teoremas siguientes:

715. Todas las raíces del polinomio de Legendre $P_n(x)=\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ son reales, distintas y están comprendidas en el intervalo $(-1, +1)$.

716. Si todas las raíces de un polinomio $f(x)$ son reales, entonces todas las raíces del polinomio $\lambda f(x)+f'(x)$ son reales para cualquier λ real.

*717. Si todas las raíces de un polinomio $f(x)$ son reales y todas las raíces del polinomio $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ son reales, entonces todas las raices del polinomio

$$F(x)=a_0f(x)+a_1f'(x)+\ldots+a_nf^{(n)}(x)$$

son reales.

*718. Si todas las raíces de un polinomio $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ son reales, entonces todas las raíces del polinomio

$$a_0x^n+a_1mx^{n-1}+a_2m(m-1)x^{n-2}+\ldots\\ \ldots+a_nm(m-1)\ldots(m-n+1)$$

son reales para cualquier entero positivo m.

*719. Si todas las raíces de un polinomio $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ son reales, entonces todas las raíces del polinomio

$$G(x)=a_0x^n+C_n^1a_1x^{n-1}+C_n^2a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

son reales.

720. Demostrar que todas las raíces del polinomio

$$x^n+\left(\frac{n}{1}\right)^2x^{n-1}+\left(\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right)^2x^{n-2}+\ldots+1.$$

son reales.

*721. Determinar el número de raíces reales del polinomio

$$nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ldots-1.$$

722. Determinar el número de raíces reales del polinomio

$$x^{2n_1+1}+x^{2n_2+1}+\ldots+x^{2n_k+1}+a.$$

723. Determinar el número de raíces reales del polinomio
$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)-A^2(x-a)-B^2(x-b)-C^2(x-c),$$
si a, b, c, A, B, C son reales.

724. Demostrar que
$$\varphi(x)=\frac{A_1^2}{x-a_1}+\frac{A_2^2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n^2}{x-a_n}+B$$
no tiene raíces imaginarias si $a_1, a_2, \ldots, a_n, A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ son reales.

Demostrar los teoremas siguientes:

725. Si un polinomio $f(x)$ tiene raíces reales distintas, entonces $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ carece de raíces reales.

726. Si las raíces de los polinomios $f(x)$ y $\varphi(x)$ son reales, simples y se separan, es decir, que entre dos raíces cualesquiera de $f(x)$ hay una raíz de $\varphi(x)$ y entre dos raíces cualesquiera de $\varphi(x)$ hay una raíz de $f(x)$, entonces todas las raíces de la ecuación $\lambda f(x)+\mu\varphi(x)=0$ son reales para cualesquiera λ y μ reales.

***727.** Si todas las raíces de los polinomios $F(x)=\lambda f(x)+\mu\varphi(x)$ son reales para cualesquiera λ y μ reales, las raíces de los polinomios $f(x)$ y $\varphi(x)$ se separan.

***728.** Si $f'(x)$ tiene todas las raíces reales y distintas y $f(x)$ no tiene raíces múltiples, entonces el número de raíces reales del polinomio $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ es igual al número de raíces imaginarias del polinomio $f(x)$.

***729.** Si las raíces de los polinomios $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son todas reales y se separan, las raíces de sus derivadas se separan.

***730.** Si todas las raíces de un polinomio $f(x)$ son reales, las raíces del polinomio $F(x)=\gamma f(x)+(\lambda+x)f'(x)$ son reales para $\gamma>0$ o $\gamma<-n$ y cualquier λ real.

***731.** Si el polinomio
$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$
tiene sólo raíces reales y el polinomio
$$\varphi(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_kx^k$$
tiene raíces reales que no están comprendidas en el intervalo $(0, n)$, entonces todas las raíces del polinomio
$$a_0\varphi(0)+a_1\varphi(1)x+a_2\varphi(2)x^2+\ldots+a_n\varphi(n)x^n$$
son reales.

***732.** Si todas las raíces de un polinomio $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ son reales, entonces todas las raíces del polinomio $a_0+a_1\gamma x+a_2\gamma(\gamma-1)x^2+\ldots+a_n\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+1)x^n$ son reales para $\gamma>n-1$.

***733.** Si todas las raíces de un polinomio $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$

son reales, también lo son las raíces del polinomio

$$a_0+\frac{\gamma}{\alpha}a_1x+\frac{\gamma(\gamma-1)}{\alpha(\alpha+1)}a_2x^2+\ldots+\frac{\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}a_nx^n$$

para $\gamma>n-1$, $\alpha>0$.

***734.** Si todas las raíces de un polinomio $f(x)=a_0+a_1x+ +\ldots+a_nx^n$ son reales, también lo son las raíces del polinomio

$$a_0+a_1\omega x+a_2\omega^4x^2+\ldots+a_n\omega^{n^2}x^n$$

para $0<\omega\leqslant 1$.

***735.** Si todas las raíces de un polinomio $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ son reales y de un mismo signo, entonces todas las raíces del polinomio $a_0\cos\varphi+a_1\cos(\varphi+\theta)x+a_2\cos(\varphi+2\theta)x^2+\ldots+a_n\cos(\varphi+ +n\theta)x^n$ son reales.

***736.** Si todas las raíces del polinomio

$$(a_0+ib_0)+(a_1+ib_1)x+\ldots+(a_n+ib_n)x^n$$

están situadas en el semiplano superior, entonces todas las raíces de los polinomios

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \text{ y } b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n$$

son reales y se separan (los números $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots$ $\ldots, b_n$ son reales).

***737.** Si todas las raíces de los polinomios $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son reales y se separan, entonces las partes imaginarias de las raíces de $\varphi(x)+i\psi(x)$ tienen signos iguales.

***738.** Si todas las raíces de un polinomio $f(x)$ están situadas en el semiplano superior, entonces todas las raíces de su derivada están situadas en el semiplano superior.

***739.** Si todas las raíces de un polinomio $f(x)$ están situadas en algún semiplano, entonces todas las raíces de su derivada están situadas en el mismo semiplano.

***740.** Las raíces de la derivada de un polinomio $f(x)$ estan situadas dentro de cualquier circuito convexo que contenga en su interior todas las raíces del polinomio $f(x)$.

***741.** Si $f(x)$ es un polinomio de grado n con raíces reales, entonces todas las raíces de la ecuación $[f(x)]^2+k^2[f'(x)]^2=0$ tienen la parte imaginaria menor que kn en valor absoluto.

742. Si todas las raíces de los polinomios $f(x)-a$ y $f(x)-b$ son reales, entonces todas las raíces del polinomio $f(x)-\lambda$ son reales si λ está comprendido entre a y b.

***743.** Para que las partes reales de todas las raíces de un polinomio de coeficientes reales $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ sean de un mismo signo, es necesario y suficiente que las raíces de los polinomios

$$x^n-a_2x^{n-2}+a_4x^{n-4}-\ldots$$

y

$$a_1x^{n-1}-a_3x^{n-3}+\dots$$

sean todas reales y se separen.

***744.** Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que las partes reales de todas las raíces de la ecuación de coeficientes reales $x^3+ax^2+bx+c=0$ sean negativas.

***745.** Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que las partes reales de todas las raíces de la ecuación de coeficientes reales $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ sean negativas.

***746.** Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que todas las raíces de la ecuación de coeficientes reales $x^3+ax^2+bx+c=0$ no superen en valor absoluto a la unidad.

***747.** Demostrar que si $a_0\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant\dots\geqslant a_n\geqslant 0$, entonces todas las raíces del polinomio $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ no superan en valor absoluto a la unidad.

§ 10. Cálculo aproximado de las raíces de un polinomio

748. Calcular la raíz de la ecuación $x^3-3x^2-13x-7=0$, contenida en el intervalo $(-1,0)$, con una exactitud de 0,0001.

749. Calcular la raíz real de la ecuación $x^3-2x-5=0$ con una exactitud de 0,000001.

750. Calcular las raíces reales de las ecuaciones:

a) $x^3-10x-5=0$; b) $x^3-2x-30=0$;

c) $x^3-3x^2-4x+1=0$; d) $x^3-3x^2-x+2=0$

con una exactitud de 0,0001.

751. Dividir una semiesfera de radio 1 en dos partes iguales mediante un plano paralelo a la base.

752. Calcular la raíz positiva de la ecuación $x^3-5x-3=0$ con una exactitud de 0,0001.

753. Calcular, con una exactitud de 0,0001, la raíz de la ecuación:

a) $x^4+3x^3-9x-9=0$, comprendida en el intervalo $(1, 2)$;

b) $x^4-4x^3+4x^2-4=0$, comprendida en el intervalo $(-1, 0)$;

c) $x^4+3x^3+4x^2+x-3=0$, comprendida en el intervalo $(0, 1)$;

d) $x^4-10x^3-16x+5=0$, comprendida en el intervalo $(0, 1)$;

e) $x^4-x^3-9x^2+10x-10=0$, comprendida en el intervalo $(-4, -3)$;

f) $x^4-6x^2+12x-8=0$, comprendida en el intervalo $(1, 2)$;

g) $x^4-3x^2+4x-3=0$, comprendida en el intervalo $(-3, -2)$;

h) $x^4-x^3-7x^2-8x-6=0$, comprendida en el intervalo $(3, 4)$.

i) $x^4-3x^3+3x^2-2=0$, comprendida en el intervalo (1, 2).

754. Calcular las raíces reales de las ecuaciones:

a) $x^4+3x^3-4x-1=0$; b) $x^4+3x^3-x^2-3x+1=0$;

c) $x^4-6x^3+13x^2-10x+1=0$; d) $x^4-8x^3-2x^2+16x-3=0$;

e) $x^4-5x^3+9x^2-5x-1=0$; f) $x^4-2x^3-6x^2+4x+4=0$;

g) $x^4+2x^3+3x^2+2x-2=0$; h) $x^4+4x^3-4x^2-16x-8=0$,

con una exactitud de 0,0001.

CAPITULO 6

FUNCIONES SIMETRICAS

§ 1. Expresión de las funciones simétricas mediante las fundamentales. Cálculo de las funciones simétricas de las raíces de una ecuación algebraica

755. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales *)

a) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$;

b) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;

c) $x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_2^2x_3^2-2x_3^2x_1^2$;

d) $x_1^5x_2^2+x_1^2x_2^5+x_1^5x_3^2+x_1^2x_3^5+x_2^5x_3^2+x_2^2x_3^5$;

e) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

f) $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$;

g) $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;

h) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$.

756. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales

a) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)$;

b) $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$;

c) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$.

757. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales los polinomios monógenos:

a) $x_1^2+\ldots$;
b) $x_1^3+\ldots$;
c) $x_1^2x_2x_3+\ldots$;
d) $x_1^2x_2^2+\ldots$;
e) $x_1^3x_2+\ldots$;
f) $x_1^4+\ldots$;
g) $x_1^2x_2^2x_3+\ldots$;
h) $x_1^3x_2x_3+\ldots$;
i) $x_1^3x_2^2+\ldots$;
j) $x_1^4x_2+\ldots$;
k) $x_1^5+\ldots$;
l) $x_1^2x_2^2x_3x_4+\ldots$;
m) $x_1^2x_2^2x_3^2+\ldots$;
n) $x_1^3x_2x_3x_4+\ldots$;
o) $x_1^3x_2^2x_3+\ldots$;
p) $x_1^3x_2^3+\ldots$;
q) $x_1^4x_2x_3+\ldots$;
r) $x_1^4x_2^2+\ldots$;
s) $x_1^5x_2+\ldots$;
t) $x_1^6+\ldots$

*) Es decir, mediante los polinomios simétricos elementales. Véase A. G. Kurosch. Curso de álgebra superior. Editorial Mir, Moscú, 1968, pág. 330. *(Nota del T.)*

758. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales:

a) $(-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2+(x_1-x_2+x_3+\ldots$
$\ldots+x_n)^2+(x_1+x_2-x_3+\ldots+x_n)^2+\ldots$
$\ldots+(x_1+x_2+x_3+\ldots-x_n)^2$;

b) $(-x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)(x_1-x_2+x_3+\ldots$
$\ldots+x_n)\ldots(x_1+x_2+\ldots-x_n)$.

759. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales:

a) $\sum\limits_{i>k}(x_i-x_k)^2$; b) $\sum\limits_{i>k}(x_i+x_k)^3$;

c) $\sum\limits_{i>k}(x_i-x_k)^4$; d) $\sum\limits_{\substack{i>k\\ j\neq i;\ j\neq k}}(x_i+x_k-x_j)^2$.

760. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales el polinomio monógeno:

$$x_1^2x_2^2\ldots x_k^2+\ldots$$

761. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales:

$$\sum(a_1x_{i_1}+a_2x_{i_2}+\ldots+a_nx_{i_n})^2.$$

La suma se extiende a todas las permutaciones posibles

$i_1, i_2, \ldots, i_n$ de los números $1, 2, \ldots, n$.

762. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales:

a) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x^2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}$; b) $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1+x_2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_2+x_3}+\frac{(x_3-x_1)^2}{x_3+x_1}$;

c) $\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}\right)$.

763. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales:

a) $\frac{x_1x_2}{x_3x_4}+\frac{x_1x_3}{x_2x_4}+\frac{x_1x_4}{x_2x_3}+\frac{x_2x_3}{x_1x_4}+\frac{x_2x_4}{x_1x_3}+\frac{x_3x_4}{x_1x_2}$;

b) $\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}+\frac{x_1+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_1+x_4}+\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3}+\frac{x_3+x_4}{x_1+x_2}$.

764. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales:

a) $\sum\frac{1}{x_i}$; b) $\sum\frac{1}{x_i^2}$; c) $\sum\limits_{i\neq j}\frac{x_i}{x_j}$;

d) $\sum\limits_{i\neq j}\frac{x_i^2}{x_j^2}$; e) $\sum\limits_{i\neq j}\frac{x_i^2}{x_j}$; f) $\sum\limits_{\substack{i\neq j\\ i\neq k\\ j>k}}\frac{x_jx_k}{x_i}$.

765. Calcular la suma de los cuadrados de las raíces de la

ecuación

$$x^3+2x-3=0.$$

766. Calcular el valor de la función simétrica $x_1^2x_2+x_1x_2^2+$ $+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^2x_1+x_3x_1^2$ de las raíces de la ecuación x^3-x^2- $-4x+1=0$.

767. Determinar el valor de la función simétrica monógena

$$x_1^2x_2x_3+\ldots$$

de las raíces de la ecuación

$$x^4+x^3-2x^2-3x+1=0.$$

768. Sean x_1, x_2, x_3 las raíces de la ecuación $x^3+px+q=0$. Calcular:

a) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}$;

b) $x_1^4x_2^2+x_1^2x_2^4+x_2^4x_3^2+x_2^2x_3^4+x_3^4x_1^2+x_3^2x_1^4$;

c) $(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_2x_1)$;

d) $(x_1+x_2)^4(x_1+x_3)^4(x_2+x_3)^4$;

e) $\frac{x_1^2}{(x_2+1)(x_3+1)}+\frac{x_2^2}{(x_1+1)(x_3+1)}+\frac{x_3^2}{(x_1+1)(x_2+1)}$;

f) $\frac{x_1^2}{(x_1+1)^2}+\frac{x_2^2}{(x_2+1)^2}+\frac{x_3^2}{(x_3+1)^2}$.

769. ¿Qué relación existe entre los coeficientes de la ecuación cúbica

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

si el cuadrado de una de las raíces es igual a la suma de los cuadrados de las otras dos?

770. Demostrar el teorema: para que todas las raíces de la ecuación cúbica $x^3+ax^2+bx+c=0$ tengan las partes reales negativas, es necesario y suficiente el cumplimiento de las condiciones:

$$a>0,\quad ab-c>0,\quad c>0.$$

771. Hallar el área y el radio del círculo circunscrito del triángulo cuyos lados son iguales a las raíces de la ecuación cúbica

$$x^3-ax^2+bx-c=0.$$

*772. Hallar la relación entre los coeficientes de la ecuación cuyas raíces son iguales a los senos de los ángulos de un triángulo.

773. Calcular el valor de la función simétrica de las raíces de la ecuación $f(x)=0$:

a) $x_1^4x_2+\ldots$, $f(x)=3x^3-5x^2+1$;

b) $x_1^3x_2^2+\dots,\quad f(x)=3x^4-2x^3+2x^2+x-1;$

c) $(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)(x_3^2+x_3x_1+x_1^2),$

$$f(x)=5x^3-6x^2+7x-8.$$

774. Expresar mediante los coeficientes de la ecuación

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

las funciones simétricas siguientes:

a) $a_0^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2;$

b) $a_0^4(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2);$

c) $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}+\frac{(x_1-x_3)^2}{x_1x_3}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_2x_3};$

d) $a_0^4(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)(x_3^2+x_3x_1+x_1^2).$

775. Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ las raíces del polinomio

$$x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n.$$

Demostrar que todo polinomio simétrico en $x_2, x_3, \dots, x_n$, se puede expresar en forma de un polinomio en x_1.

776. Aplicando el resultado del problema 775, resolver los problemas 755 e), 755 g), 774 b), 774 d).

777. Hallar $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$, donde f_k es la k-ésima función simétrica fundamental de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

778. Supongamos que se conoce la expresión de la función simétrica $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mediante las fundamentales. Hallar la expresión de $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}$ mediante las funciones simétricas fundamentales.

Demostrar los teoremas:

779. Si $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función simétrica que posee la propiedad

$$F(x_1+a, x_2+a, \dots, x_n+a)=F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

y si $\Phi(f_1, f_2, \dots, f_n)$ es su expresión mediante las fundamentales, entonces

$$n\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}+(n-1)f_1\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}+\dots+f_{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial f_n}=0,$$

y recíprocamente.

780. Todo polinomio simétrico homogéneo de segundo grado que posea las propiedades del problema 779 es igual a $\alpha\sum_{i<k}(x_i-x_k)^2$, donde α es una constante.

781. Hallar la forma general de los polinomios simétricos homogéneos de tercer grado que posean la propiedad del problema 779.

782. Expresar mediante los polinomios simétricos fundamentales

$$\sum_{i<j<k} (x_i-x_j)^2 (x_i-x_k)^2 (x_j-x_k)^2,$$

empleando el resultado del problema 779.

783. Demostrar que entre los polinomios simétricos $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que poseen la propiedad

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=F(x_1+a, x_2+a, \ldots, x_n+a),$$

existen $n-1$ "polinomios principales" $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, o sea, tales que todo polinomio de la clase considerada puede expresarse en forma de un polinomio en $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$.

784. Expresar mediante los polinomios φ_2, φ_3 del problema 783 las funciones simétricas siguientes:

a) $(x_1-x_2)^2 (x_1-x_3)^2 (x_2-x_3)^2$;

b) $(x_1-x_2)^4+(x_1-x_3)^4+(x_2-x_3)^4$.

785. Expresar mediante los polinomios φ_2, φ_3, φ_4 del problema 783 las funciones simétricas siguientes:

a) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$;

b) $(x_1-x_2)^2 (x_1-x_3)^2 (x_1-x_4)^2 (x_2-x_3)^2 (x_2-x_4)^2 (x_3-x_4)^2$.

§ 2. Sumas de potencias

786. Hallar las expresiones de s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 mediante los polinomios simétricos fundamentales empleando las fórmulas de Newton *.

787. Expresar f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 * mediante las sumas de potencias $s_1, s_2, \ldots$, empleando las fórmulas de Newton.

788. Hallar la suma de las quintas potencias de las raíces de la ecuación

$$x^6-4x^5+3x^3-4x^2+x+1=0.$$

789. Hallar la suma de las octavas potencias de las raíces de la ecuación

$$x^4-x^3-1=0.$$

790. Hallar la suma de las décimas potencias de las raíces de la ecuación

$$x^3-3x+1=0.$$

---

* Véase A. G. Kurosch, Curso de álgebra superior, Ed. Mir, Moscú 1968, pág. 340. En este libro, en lugar de f se emplea la notación σ (*Nota del T*).

791. Hallar las sumas de potencias $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de las raíces de la ecuación

$$x^n+\frac{x^{n-1}}{1}+\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n!}=0.$$

792. Demostrar que

$$a^k(x_1^k+x_2^k)=(-1)^k\left[b^k-\frac{k}{1}b^{k-2}ac+\frac{k(k-3)}{1\cdot 2}b^{k-4}a^2c^2-\right.$$
$$\left.-\frac{k(k-4)(k-5)}{1\cdot 2\cdot 3}b^{k-6}a^3c^3+\ldots\right],$$

si x_1, x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$.

793. Demostrar que para cualquier ecuación de tercer grado se tiene:

$$\frac{s_1^5-s_5}{s_1^3-s_3}=\frac{5}{3}(f_1^2-f_2).$$

794. Demostrar que si la suma de las raíces de una ecuación de cuarto grado es igual a cero, entonces

$$\frac{s_5}{5}=\frac{s_3}{3}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

795. Demostrar que si para una ecuación de sexto grado $s_1=s_3=0$, entonces

$$\frac{s_7}{7}=\frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

796. Hallar las ecuaciones de n-ésimo grado para las cuales

$$s_1=s_2=\ldots=s_{n-1}=0.$$

797. Hallar las ecuaciones de n-ésimo grado para las cuales

$$s_2=s_3=\ldots=s_n=0.$$

798. Hallar la ecuación de n-ésimo grado para la cual

$$s_2=1,\ s_3=s_4=\ldots=s_n=s_{n+1}=0.$$

799. Expresar $\sum\limits_{i<j}x_i^kx_j^k$ mediante las sumas de potencias.

***800.** Expresar $\sum\limits_{i<j}(x_i+x_j)^k$ mediante las sumas de potencias.

***801.** Expresar $\sum\limits_{i<j}(x_i-x_j)^{2k}$ mediante las sumas de potencias.

802. Demostrar que $s_k=\begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 2f_2 & f_1 & 1 & \ldots & 0\\ 3f_3 & f_2 & f_1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ kf_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \ldots & f_1\end{vmatrix}.$

803. Demostrar que $f_k=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}$.

804. Calcular el determinante $\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \\ s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & n \end{vmatrix}$.

***805.** Hallar la suma s_m de las raíces de la ecuación

$$X_n(x)=0.$$

***806.** Demostrar que f_2, f_3 y f_4 de las raíces de la ecuación $X_n(x)=0$ sólo pueden tomar los valores 0 y ± 1.

***807.** Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\dots+x_n&=a, \\ x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2&=a, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^n+x_2^n+\dots+x_n^n&=a \end{aligned}$$

y calcular $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+\dots+x_n^{n+1}$.

***808.** Calcular las sumas de potencias $s_1, s_2, \dots, s_n$ de las raíces de la ecuación

$$x^n+(a+b)x^{n-1}+(a^2+ab+b^2)x^{n-2}+\dots$$
$$\dots+(a^n+a^{n-1}b+\dots+b^n)=0.$$

***809.** Calcular las sumas de potencias $s_1, s_2, \dots, s_n$ de las raíces de la ecuación

$$x^n+(a+b)x^{n-1}+(a^2+b^2)x^{n-2}+\dots+(a^n+b^n)=0.$$

§ 3. Transformación de ecuaciones

810. Hallar las ecuaciones cuyas raíces son:

a) $x_1+x_2,\ x_2+x_3,\ x_3+x_1$;

b) $(x_1-x_2)^2,\ (x_2-x_3)^2,\ (x_3-x_1)^2$;

c) $x_1^2-x_2x_3,\ x_2^2-x_3x_1,\ x_3^2-x_1x_2$;

d) $(x_1-x_2)(x_1-x_3),\ (x_2-x_1)(x_2-x_3),\ (x_3-x_1)(x_3-x_2)$;

e) $x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2$; f) $x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^3$,

donde x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación $x^3+ax^2+bx+c=0$.

811. Hallar la ecuación cuyas raíces son:

$$(x_1+x_2\varepsilon+x_3\varepsilon^2)^3 \text{ y } (x_1+x_2\varepsilon^2+x_3\varepsilon)^3,$$

donde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

812. Hallar la ecuación de menor grado, si una de sus raíces es: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}$, donde x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación cúbica $x^3+ax^2+bx+c=0$, y los coeficientes se expresan racionalmente mediante los coeficientes de la ecuación dada.

813. Hallar la ecuación de menor grado, si una de las raíces es $\frac{x_1}{x_2}$, donde x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación x^3+ax^2+ $+bx+c=0$, y sus coeficientes se expresan racionalmente mediante los coeficientes de la ecuación dada.

814. Hallar la ecuación de menor grado, cuyos coeficientes se expresan racionalmente mediante los coeficientes de la ecuación dada $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, tomando como una de las raíces de la ecuación buscada:

a) $x_1x_2+x_3x_4$; b) $(x_1+x_2-x_3-x_4)^2$; c) x_1x_2;

d) x_1+x_2; e) $(x_1-x_2)^2$.

815. Aplicando los resultados de los problemas 814 a) y 814 b), expresar las raíces de la ecuación de cuarto grado mediante las raíces de la ecuación auxiliar cúbica del problema 814 a).

816. Escribir la fórmula de resolución de la ecuación

$$x^4-6ax^2+bx-3a^2=0.$$

817. Formar la ecuación, si una de las raíces es:

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)(x_1x_3+x_3x_5+x_5x_2+x_2x_4+x_4x_1),$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 son las raíces de la ecuación

$$x^5+ax+b=0.$$

§ 4. Resultante y discriminante

***818.** Demostrar que la resultante de los polinomios

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \text{ y } \varphi(x)=b_0x^m+\ldots+b_m$$

es igual al determinante formado por los coeficientes de los residuos de la división de $\varphi(x)$, $x\varphi(x)$, $\ldots$, $x^{n-1}\varphi(x)$ por $f(x)$. Se supone que los residuos están dispuestos en el orden de crecimiento de las potencias de x (método de Hermite).

Observación. El residuo $r_k(x)$ de la división de $x^{k-1}\varphi(x)$ por $f(x)$ es igual al residuo de la división de $xr_{k-1}(x)$ por $f(x)$.

*819. Demostrar que la resultante de los polinomios

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

y

$$\varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

es igual al determinante formado por los coeficientes de los polinomios de $(n-1)$-ésimo grado (o inferior)

$$\psi_k(x)=(a_0x^{k-1}+a_1x^{k-2}+\ldots+a_{k-1})\varphi(x)-$$
$$-(b_0x^{k-1}+b_1x^{k-2}+\ldots+b_{k-1})f(x),$$

$k=1, 2, \ldots, n$ (método de Bézout).

Observación. $\psi_1=a_0\varphi-b_0f$, $\psi_k=x\psi_{k-1}+a_{k-1}\varphi-b_{k-1}f$.

*820. Demostrar que la resultante de los polinomios

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \quad \text{y} \quad \varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$$

para $n>m$, es igual al determinante formado por los coeficientes de los polinomios $\chi_k(x)$, de grado no superior a $n-1$, determinados por las fórmulas

$$\chi_k(x)=x^{k-1}\varphi(x) \text{ si } 1\leqslant k\leqslant n-m;$$
$$\chi_k(x)=(a_0x^{k-n+m-1}+a_1x^{k-n+m-2}+\ldots+a_{k-n+m-1})x^{n-m}\varphi(x)-$$
$$-(b_0x^{k-n+m-1}+b_1x^{k-n+m-2}+\ldots+b_{k-n+m-1})f(x)$$

(los polinomios χ_k se disponen en el orden de crecimiento de las potencias de x).

Observación. $\chi_{n-m+1}=a_0x^{n-m}\varphi(x)-b_0f(x)$,

$$\chi_k=x\chi_{k-1}+a_{k-n+m-1}x^{n-m}\varphi(x)-b_{k-n+m-1}f(x)$$

para $k>n-m+1$.

821. Calcular la resultante de los polinomios:

a) x^3-3x^2+2x+1 y $2x^2-x-1$;

b) $2x^3-3x^2+2x+1$ y x^2+x+3;

c) $2x^3-3x^2-x+2$ y x^4-2x^2-3x+4;

d) $3x^3+2x^2+x+1$ y $2x^3+x^2-x-1$;

e) $2x^3-x^2+3$ y $3x^3-x^2+4$;

f) $a_0x^2+a_1x+a_2$ y $b_0x^2+b_1x+b_2$.

822. ¿Para qué valor de λ los polinomios

a) $x^3-\lambda x+2$ y $x^2+\lambda x+2$;

b) $x^3-2\lambda x+\lambda^3$ y $x^2+\lambda^2-2$;

c) $x^3+\lambda x^2-9$ y $x^3+\lambda x-3$,

tienen una raíz común?

823. Eliminar x entre el sistema de ecuaciones

a) $x^2-xy+y^2=3$, $\quad x^2y+xy^2=6$;

b) $x^3-xy-y^3+y=0$, $\quad x^2+x-y^2-1=0$;

c) $y=x^3-2x^2-6x+8$, $\quad y=2x^3-8x^2+5x+2$.

824. Resolver los sistemas

a) $y^2-7xy+4x^2+13x-2y-3=0$,
$y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0$;

b) $y^2+x^2-y-3x=0$, $\quad y^2-6xy-x^2+11y+7x-12=0$;

c) $5y^2-6xy+5x^2-16=0$, $\quad y^2-xy+2x^2-y-x-4=0$;

d) $y^2+(x-4)y+x^2-2x+3=0$,
$y^3-5y^2+(x+7)y+x^3-x^2-5x-3=0$;

e) $2y^3-4xy^2-(2x^2-12x+8)y+x^3+6x^2-16x=0$,
$4y^3-(3x+10)y^2-(4x^2-24x+16)y-3x^3+2x^2-12x+40=0$.

825. Determinar la resultante de los polinomios

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ y $a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$.

826. Demostrar que $\mathfrak{R}(f,\ \varphi_1\cdot\varphi_2)=\mathfrak{R}(f,\ \varphi_1)\cdot\mathfrak{R}(f,\ \varphi_2)$.

***827.** Hallar la resultante de los polinomios

$$X_n \text{ y } x^m-1.$$

***828.** Hallar la resultante de los polinomios X_m y X_n.

829. Calcular el discriminante del polinomio:

a) x^3-x^2-2x+1; $\quad$ b) x^3+2x^2+4x+1;

c) $3x^3+3x^2+5x+2$; $\quad$ d) $x^4-x^3-3x^2+x+1$;

e) $2x^4-x^3-4x^2+x+1$.

830. Calcular el discriminante del polinomio:

a) $x^5-5ax^3+5a^2x-b$; $\quad$ b) $(x^2-x+1)^3-\lambda(x^2-x)^2$,

c) $ax^3-bx^2+(b-3a)x+a$;

d) $x^4-\lambda x^3+3(\lambda-4)x^2-2(\lambda-8)x-4$.

831. ¿Para qué valor de λ el polinomio

a) $x^3-3x+\lambda$; b) $x^4-4x+\lambda$; c) $x^3-8x^2+(13-\lambda)x-(6+2\lambda)$;

d) $x^4-4x^3+(2-\lambda)x^2+2x-2$,

tiene raíces múltiples?

832. Dar una característica del número de raíces reales del polinomio de coeficientes reales según el signo del discriminante:

a) para un polinomio de tercer grado;

b) para un polinomio de cuarto grado;
c) en el caso general.

833. Calcular el discriminante del polinomio x^n+a.

*834. Calcular el discriminante del polinomio x^n+px+q.

*835. Calcular el discriminante del polinomio

$$a_0x^{m+n}+a_1x^m+a_2.$$

836. Conociendo el discriminante del polinomio

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

hallar el discriminante del polinomio

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0.$$

837. Demostrar que el discriminante de un polinomio de cuarto grado es igual al discriminante de su resolvente de Ferrari [problema 814 a) y problema 80].

838. Demostrar que

$$D((x-a)f(x))=D(f(x))[f(a)]^2.$$

*839. Calcular el discriminante del polinomio

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1.$$

*840. Calcular el discriminante del polinomio

$$x^n+ax^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a.$$

841. Demostrar que el discriminante del producto de dos polinomios es igual al producto de los discriminantes multiplicado por el cuadrado de su resultante.

842. Hallar el discriminante del polinomio

$$X_{p^m}=\frac{x^{p^m}-1}{x^{p^{m-1}}-1}.$$

*843. Hallar el discriminante del polinomio circular X_n.

*844. Calcular el discriminante del polinomio

$$E_n=n!\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right).$$

*845. Calcular el discriminante del polinomio

$$F_n=x^n+\frac{a}{1}x^{n-1}+\frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

*846. Calcular el discriminante del polinomio de Hermite

$$P_n(x)=(-1)^ne^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^ne^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}.$$

*847. Calcular el determinante del polinomio de Laguerre

$$P_n(x)=(-1)^n \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}.$$

*848. Calcular el discriminante del polinomio de Chébichev

$$2\cos\left(n \arccos \frac{x}{2}\right).$$

*849. Calcular el discriminante del polinomio

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}(1+x^2)^{n+1}\frac{d^n\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{dx^n}.$$

*850. Calcular el discriminante del polinomio

$$P_n(x)=(-1)^n(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{dx^n}.$$

*851. Calcular el discriminante del polinomio

$$P_n(x)=(-1)^n x^{2n+2}e^{-\frac{1}{x}}\frac{d^n\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^n}.$$

*852. Hallar el máximo del discriminante del polinomio

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

cuyas raíces son todas reales y están ligadas por la relación

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=n(n-1)R^2.$$

853. Conociendo el discriminante de $f(x)$, hallar el discriminante de $f(x^2)$.

854. Conociendo el discriminante de $f(x)$, hallar el discriminante de $f(x^m)$.

855. Demostrar que el discriminante de $F(x)=f(\varphi(x))$ es igual a

$$[D(f)]^m\prod_{i=1}^{n}D(\varphi(x)-x_i),$$

donde m es el grado de $\varphi(x)$; $x_1, x_2, \ldots x_n$ son las raíces de $f(x)$. Los coeficientes superiores de f y φ se suponen iguales a la unidad.

§ 5. Transformación de Tschirnhausen y racionalización del denominador

856. Transformar la ecuación $(x-1)(x-3)(x+4)=0$ mediante la sustitución $y=x^2-x-1$.

857. Transformar las ecuaciones:

a) $x^3-3x-4=0$ mediante la sustitución $y=x^2+x+1$;

b) $x^3+2x^2+2=0$ mediante la sustitución $y=x^2+1$;

c) $x^4-x-2=0$ mediante la sustitución $y=x^3-2$;

d) $x^4-x^3-x^2+1=0$ mediante la sustitución $y=x^3+x^2+x+1$.

858. Transformar las ecuaciones según Tschirnhausen y hallar las transformaciones inversas:

a) $x^3-x+2=0$, $\qquad y=x^2+x$;

b) $x^4-3x+1=0$, $\qquad y=x^3+x$;

c) $x^4+5x^3+6x^2-1=0$, $\qquad y=x^3+4x^2+3x-1$.

859. Transformar la ecuación $x^4-x^3-2x+1=0$ mediante la sustitución $y=2-x^2$ e interpretar el resultado obtenido.

860. Para que las raíces de una ecuación cúbica de coeficientes racionales se expresen entre sí racionalmente con coeficientes racionales, es necesario y suficiente que el discriminante sea el cuadrado de un número racional. Demostrarlo.

861. Racionalizar los denominadores de las expresiones:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$; c) $\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$.

862. Racionalizar los denominadores de las expresiones:

a) $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, $\qquad \alpha^3-3\alpha+1=0$;

b) $\dfrac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\qquad \alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0$;

c) $\dfrac{1}{3\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1}$, $\qquad \alpha^4-\alpha^3+2\alpha+1=0$;

d) $\dfrac{1}{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2}$, $\qquad \alpha^4+\alpha^3-4\alpha^2-3\alpha+2=0$.

863. Demostrar que toda función racional de la raíz x_1 de la ecuación cúbica $x^3+ax^2+bx+c=0$ puede expresarse en la forma $\dfrac{Ax_1+B}{Cx_1+D}$ con coeficientes A, B, C, D, que se expresan racionalmente mediante los coeficientes de la expresión inicial, y mediante los coeficientes a, b, c.

864. Supongamos que el discriminante de una ecuación cúbica de coeficientes racionales, siendo irreducible en el campo de los números racionales, es el cuadrado de un número racional. Entonces, se puede establecer entre las raíces la relación $x_2=\dfrac{\alpha x_1+\beta}{\gamma x_1+\delta}$. ¿A qué condición deben satisfacer los coeficientes α, β, γ, δ?

865. Hacer la transformación $y=x^2$ en la ecuación

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

866. Hacer la transformación $y=x^3$ en la ecuación

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

*867. Demostrar que si todas las raíces x_i del polinomio

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n, \quad a_n\neq 0,$$

de coeficientes enteros, satisfacen a la condición $|x_i|\leqslant 1$, entonces todas son raíces de la unidad.

§ 6. Polinomios que no varían en las permutaciones pares de las variables. Polinomios que no varían en las permutaciones circulares de las variables

868. Demostrar que si un polinomio no varía en las permutaciones pares y cambia de signo en las impares, entonces es divisible por el determinante de Vandermonde formado por las variables y el cociente de la división es un polinomio simétrico.

869. Demostrar que todo polinomio que no varía en las permutaciones pares de las variables, puede expresarse en la forma

$$F_1+F_2\Delta,$$

donde F_1 y F_2 son polinomios simétricos y Δ es el determinante de Vandermonde de las variables.

870. Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n+1} \end{vmatrix}.$$

871. Formar la ecuación cuyas raíces son

$$\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3, \quad \alpha x_2+\beta x_3+\gamma x_1 \text{ y } \alpha x_3+\beta x_1+\gamma x_2,$$

donde x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación $x^3+ax^2+bx+c=0$.

872. Formar la ecuación cuyas raíces son:

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3, \; x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1, \; x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2,$$

donde x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación $x^3+px+q=0$; y_1, y_2, y_3 son las raíces de la ecuación $y^3+p'y+q'=0$.

873. Para que las ecuaciones de coeficientes racionales

$$x^3+px+q=0,$$
$$y^3+p'x+q'=0$$

estén relacionadas por una transformación racional de Tschirnhausen, es necesario y suficiente que la razón de sus discriminantes Δ y Δ' sea el cuadrado de un número racional y que una de las ecuaciones

$$u^3 = 3pp'u + \frac{27qq' \pm \sqrt{\Delta\Delta'}}{2}$$

tenga una raíz racional. Demostrarlo.

874. Demostrar que todo polinomio en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que no varía en las permutaciones circulares de las variables, se puede expresar en la forma

$$\sum A f_1^{\alpha_0} \eta_1^{\alpha_1} \eta_2^{\alpha_2} \ldots \eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

donde $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ son las formas lineales:

$$\eta_1 = x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots + x_n,$$
$$\eta_2 = x_1\varepsilon^2 + x_2\varepsilon^4 + \ldots + x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_{n-1} = x_1\varepsilon^{n-1} + x_2\varepsilon^{2n-2} + \ldots + x_n;$$
$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n},$$

y los exponentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ satisfacen a la condición: $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1}$ es divisible por n.

875. Para las funciones racionales que no varían en las permutaciones circulares de las variables, indicar n fundamentales (fraccionarias y con coeficientes no racionales) mediante las cuales se expresan todas racionalmente.

876. Para las funciones racionales de tres variables que no varían en las permutaciones circulares, indicar tres funciones fundamentales de coeficientes racionales.

877. Para las funciones racionales de cuatro variables que no varían en las permutaciones circulares, indicar cuatro funciones fundamentales de coeficientes racionales.

878. Para las funciones racionales de cinco variables que no varían en las permutaciones circulares, indicar cinco funciones fundamentales de coeficientes racionales.

C A P I T U L O 7

ALGEBRA LINEAL

En este capítulo se ha admitido la siguiente terminología y notaciones. Si no hay alguna restricción especial, el vocablo *espacio* significa un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. Se emplea este vocablo independientemente de que se considere el espacio de por sí o como una parte de otro espacio más amplio. No obstante, cuando hay que subrayar esta última circunstancia, se emplea el vocablo *subespacio*. Se llama *variedad lineal* el conjunto de los vectores de la forma X_0+X, donde X_0 es un vector fijo y X recorre el conjunto de todos los vectores de cierto subespacio.

La igualdad $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denota que X tiene las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en una base fijada del espacio; además, cuando se trata del espacio euclídeo, se supone que la base es ortonormal.

A veces, los vectores se llaman puntos; las variedades unidimensionales, rectas y las bidimensionales, planos.

§ 1. Subespacios y variedades lineales. Transformación de coordenadas

879. Se da un espacio vectorial engendrado por los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Determinar su base y dimensión:

a) $X_1=(2, 1, 3, 1)$, $X_2=(1, 2, 0, 1)$, $X_3=(-1, 1, -3, 0)$;

b) $X_1=(2, 0, 1, 3, -1)$, $X_2=(1, 1, 0, -1, 1)$,
$X_3=(0, -2, 1, 5, -3)$, $X_4=(1, -3, 2, 9, -5)$;

c) $X_1=(2, 1, 3, -1)$, $X_2=(-1, 1, -3, 1)$,
$X_3=(4, 5, 3, -1)$, $X_4=(1, 5, -3, 1)$.

880. Determinar la base y la dimensión de la unión e intersección de los espacios engendrados por los vectores $X_1, \ldots, X_k$ e $Y_1, \ldots, Y_m$:

a) $X_1=(1, 2, 1, 0)$, $Y_1=(2, -1, 0, 1)$,
$X_2=(-1, 1, 1, 1)$, $Y_2=(1, -1, 3, 7)$;

b) $X_1=(1, 2, -1, -2)$, $Y_1=(2, 5, -6, -5)$,

$X_2=(3,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\qquad Y_2=(-1,\ 2,\ -7,\ -3)$,

$X_3=(-1,\ 0,\ 1,\ -1)$;

c) $X_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\qquad Y_1=(0,\ 0,\ 1,\ 1)$,

$X_2=(1,\ 0,\ 1,\ 1)$, $\qquad Y_2=(0,\ 1,\ 1,\ 0)$.

881. Hallar las coordenadas del vector X en la base E_1, E_2, E_3, E_4:

a) $X=(1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $E_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $E_2=(1,\ 1,\ -1,\ -1)$, $E_3=(1,\ -1,\ 1,\ -1)$, $E_4=(1,\ -1,\ -1,\ 1)$;

b) $X=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$, $E_1=(1,\ 1,\ 0,\ 1)$, $E_2=(2,\ 1,\ 3,\ 1)$, $E_3=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $E_4=(0,\ 1,\ -1,\ -1)$.

882. Escribir las fórmulas de transformación de las coordenadas al pasar de la base E_1, E_2, E_3, E_4 a la base E'_1, E'_2, E'_3, E'_4:

a) $E_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $E_2=(0,\ 1,\ 0,\ 0)$, $E_3=(0,\ 0,\ 1,\ 0)$,
$E_4=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$, $E'_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $E'_2=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$,
$E'_3=(1,\ 0,\ 0,\ 1)$, $E'_4=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$;

b) $E_1=(1,\ 2,\ -1,\ 0)$, $E_2=(1,\ -1,\ 1,\ 1)$,
$E_3=(-1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $E_4=(-1,\ -1,\ 0,\ 1)$,
$E'_1=(2,\ 1,\ 0,\ 1)$, $E'_2=(0,\ 1,\ 2,\ 2)$,
$E'_3=(-2,\ 1,\ 1,\ 2)$, $E'_4=(1,\ 3,\ 1,\ 2)$.

883. La ecuación de una "superficie" respecto de cierta base $E_1, \ldots, E_4$ tiene la forma $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=1$. Hallar la ecuación de esta misma superficie respecto de la base

$$E'_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1); \qquad E'_3=(1,\ -1,\ 1,\ -1);$$
$$E'_2=(1,\ 1,\ -1,\ -1); \qquad E'_4=(1,\ -1,\ -1,\ 1)$$

(las coordenadas se dan en la misma base $E_1, \ldots, E_4$).

***884.** En el espacio de los polinomios de grado no superior a n en $\cos x$, escribir las fórmulas de transformación de las coordenadas para pasar de la base 1, $\cos x, \ldots, \cos^n x$ a la base 1, $\cos x, \ldots, \cos nx$ y recíprocamente.

885. En el espacio de cuatro dimensiones, hallar una recta que pase por el origen de coordenadas y se corte con las rectas:

$$x_1=2+3t,\ x_2=1-t,\ x_3=-1+2t,\ x_4=3-2t$$

y

$$x_1=7t,\ x_2=1,\ x_3=1+t,\ x_4=-1+2t.$$

Hallar los puntos de intersección de esta recta con las dadas.

886. Demostrar que dos rectas cualesquiera en el espacio n-dimensional pueden introducirse en una variedad lineal tridimensional.

887. Estudiar en el caso general la condición de resolubilidad del problema 885 para dos rectas en el espacio n-dimensional.

888. Demostrar que dos planos cualesquiera en el espacio n-dimensional pueden introducirse en una variedad lineal de cinco dimensiones.

889. Describir todos los casos posibles de la posición relativa de dos planos en el espacio n-dimensional.

890. Demostrar que una variedad lineal puede caracterizarse como el conjunto de los vectores que, junto con dos vectores cualesquiera X_1, X_2, contiene también su combinación lineal $\alpha X_1+(1-\alpha)X_2$ para cualesquiera α.

§ 2. Geometría elemental del espacio euclídeo n-dimensional

891. Determinar el producto escalar de los vectores X e Y:

a) $X=(2,\ 1,\ -1,\ 2)$, $Y=(3,\ -1,\ -2,\ 1)$;

b) $X=(1,\ 2,\ 1,\ -1)$, $Y=(-2,\ 3,\ -5,\ -1)$.

892. Calcular el ángulo formado por los vectores X e Y:

a) $X=(2,\ 1,\ 3,\ 2)$, $Y=(1,\ 2,\ -2,\ 1)$;

b) $X=(1,\ 2,\ 2,\ 3)$, $Y=(3,\ 1,\ 5,\ 1)$;

c) $X=(1,\ 1,\ 1,\ 2)$, $Y=(3,\ 1,\ -1,\ 0)$.

893. Calcular los cosenos de los ángulos que forma la recta $x_1=x_2=\ldots=x_n$ con los ejes de coordenadas.

894. Calcular los cosenos de los ángulos internos del triángulo ABC, dado por las coordenadas de sus vértices:

$$A=(1,\ 2,\ 1,\ 2),\ B=(3,\ 1,\ -1,\ 0),\ C=(1,\ 1,\ 0,\ 1).$$

895. Hallar las longitudes de las diagonales de un cubo n-dimensional de lado 1.

896. Hallar el número de diagonales de un cubo n-dimensional que son ortogonales a una diagonal dada.

897. Hallar en el espacio n-dimensional n puntos de coordenadas no negativas, de modo que las distancias entre sí y hasta el origen de coordenadas sean iguales a 1. Colocar el primero de estos puntos en el primer eje coordenado, el segundo punto en el plano engendrado por los ejes primeros, etc. (Estos puntos, junto con el origen de coordenadas, son los vértices de un simplex regular de arista 1.)

898. Determinar las coordenadas del centro y el radio de la esfera circunscrita en el simplex del problema 897.

899. Normalizar el vector $(3,\ 1,\ 2,\ 1)$.

900. Hallar un vector normalizado que sea ortogonal a los vectores $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, -1, 1)$, $(2, 1, 1, 3)$.

901. Construir una base ortonormal del espacio, tomando como vectores de la base los vectores

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$$

902. Mediante el proceso de ortogonalización, hallar una base ortogonal del espacio engendrado por los vectores $(1, 2, 1, 3)$, $(4, 1, 1, 1)$, $(3, 1, 1, 0)$.

903. Agregar a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dos filas más, que sean ortogonales entre sí y ortogonales a las primeras tres filas.

904. Interpretar el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

y su sistema fundamental de soluciones en el espacio de n dimensiones, considerando los coeficientes de cada ecuación como las coordenadas de un vector.

905. Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{gathered}$$

hallar un sistema fundamental ortonormal de soluciones.

906. Descomponer el vector X en una suma de dos vectores, uno de los cuales esté situado en el espacio engendrado por los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_m$ y el otro sea ortogonal a este espacio (proyección ortogonal y componente ortogonal del vector X):

a) $X = (5, 2, -2, 2)$, $A_1 = (2, 1, 1, -1)$, $A_2 = (1, 1, 3, 0)$;

b) $X = (-3, 5, 9, 3)$, $A_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$A_2 = (2, -1, 1, 1)$, $A_3 = (2, -7, -1, -1)$.

907. Suponiendo que los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son linealmente independientes, escribir las fórmulas para el cálculo de las longitudes de los vectores componentes del problema 906, planteado de forma general.

908. Demostrar que, entre todos los vectores de un espacio dado P, forma el ángulo mínimo con un vector dado X la proyección ortogonal del vector X sobre el espacio P.

909. Hallar el ángulo mínimo entre los vectores del espacio P, engendrado por los vectores $A_1, \ldots, A_m$, y el vector X:

a) $X=(1, 3, -1, 3)$, $A_1=(1, -1, 1, 1)$, $A_2=(5, 1, -3, 3)$;

b) $X=(2, 2, -1, 1)$, $A_1=(1, -1, 1, 1)$,
$A_2=(-1, 2, 3, 1)$, $A_3=(1, 0, 5, 3)$.

910. Hallar el ángulo mínimo formado por el vector $(1, 1, \ldots, 1)$ con los vectores de algún espacio de coordenadas m-dimensional.

911. Demostrar que entre todos los vectores $X-Y$, donde X es un vector dado e Y recorre el espacio dado P, tiene la longitud mínima el vector $X-X'$, donde X' es la proyección ortogonal de X sobre P. (Esta longitud mínima se llama distancia del punto X al espacio P.)

912. Calcular la distancia del punto X hasta la variedad lineal $A_0+t_1A_1+\ldots+t_mA_m$:

a) $X=(1, 2, -1, 1)$, $A_0=(0, -1, 1, 1)$,
$A_1=(0, -3, -1, 5)$, $A_2=(4, -1, -3, 3)$;

b) $X=(0, 0, 0, 0)$, $A_0=(1, 1, 1, 1)$, $A_1=(1, 2, 3, 4)$.

913. Se considera el espacio de los polinomios de grado no superior a n. El producto escalar de dos polinomios f_1, f_2 se define como $\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx$. Hallar la distancia del origen de coordenadas hasta la variedad lineal formada por los polinomios $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$.

914. Señalar un método para determinar la distancia mínima entre los puntos de dos variedades lineales X_0+P y Y_0+Q.

915. Los vértices de un simplex regular n-dimensional (véase el problema 897), cuya arista es de longitud 1, se han dividido en dos conjuntos de $m+1$ y $n-m$ vértices. Por estos conjuntos de vértices se han trazado variedades lineales de dimensión mínima. Calcular la distancia mínima entre los puntos de estas variedades y determinar los puntos para los cuales ésta se realiza.

***916.** En el espacio de cuatro dimensiones se dan dos planos, engendrados por los vectores A_1, A_2 y B_1, B_2. Entre los ángulos formados por los vectores del primer plano con los vectores del segundo plano, hallar el mínimo:

a) $A_1=(1, 0, 0, 0)$, $A_2=(0, 1, 0, 0)$, $B_1=(1, 1, 1, 1)$,
$B_2=(2, -2, 5, 2)$;

b) $A_1=(1, 0, 0, 0)$, $A_2=(0, 1, 0, 0)$, $B_1=(1, 1, 1, 1)$,
$B_2=(1, -1, 1, -1)$.

***917.** Un cubo de cuatro dimensiones se corta por un "plano tridimensional" que pasa por el centro del cubo y es ortogonal a una diagonal. Determinar la forma del cuerpo que resulta en la intersección.

***918.** Se da un sistema de vectores linealmente independientes $B_1, B_2, \ldots, B_m$. El conjunto de puntos que son los extremos de los vectores $t_1B_1+t_2B_2+\ldots+t_mB_m$, $0\leqslant t_1\leqslant 1, \ldots, 0\leqslant t_m\leqslant 1$, se llama paralelepípedo construido sobre los vectores $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Hallar el volumen del paralelepípedo por inducción, como el volumen de la "base" $[B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}]$ multiplicada por la "altura", igual a la distancia del extremo del vector B_m hasta el espacio engendrado por la base. El "volumen del paralelepípedo" unidimensional $[B_1]$ se toma igual a la longitud del vector B_1.

a) Escribir la fórmula para calcular el cuadrado del volumen y convencerse de que el volumen no depende de la numeración de los vértices.

b) Demostrar que $V[cB_1, B_2, \ldots, B_m]=|c|V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$

c) Demostrar que $V[B_1'+B_1'', B_2, \ldots, B_m]\leqslant V[B_1', B_2, \ldots, B_m]+V[B_1'', B_2, \ldots, B_m]$, y averiguar cuándo se verifica la igualdad.

919. Demostrar que el volumen de un paralelepipedo n-dimensional en el espacio n-dimensional es igual al valor absoluto del determinante formado por las coordenadas de los vectores que lo engendran.

***920.** Sean $C_1, C_2, \ldots, C_m$ las proyecciones ortogonales de los vectores $B_1, B_2, \ldots, B_m$ sobre cierto espacio. Demostrar que

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m]\leqslant V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

***921.** Demostrar que

$$V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k]\leqslant V[A_1, \ldots, A_m]\times V[B_1, \ldots, B_k]$$

(comparar con el problema 518).

922. Demostrar que

$$V[A_1, A_2, \ldots, A_m]\leqslant|A_1|\cdot|A_2|\ldots|A_m|$$

(comparar con el problema 519).

923. Hallar el volumen de una esfera n-dimensional aplicando el principio de Cavalieri.

924. Se considera el espacio de los polinomios de grado no superior a n. Por producto escalar se toma $\int_0^1 f_1(x)f_2(x)dx$. Hallar el volumen del paralelepípedo formado por los vectores de la base, respecto de la cual las coordenadas del polinomio son sus coeficientes.

§ 3. Números característicos y vectores propios de una matriz

925. Hallar los números característicos y los vectores propios de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$.

926. Conociendo los números característicos de la matriz A, hallar los números característicos de la matriz A^{-1}.

927. Conociendo los números característicos de la matriz A, hallar los números característicos de la matriz A^2.

928. Conociendo los números característicos de la matriz A, hallar los números característicos de la matriz A^m.

929. Conociendo el polinomio característico $F(\lambda)$ de la matriz A (de orden n), hallar el determinante de la matriz $f(A)$, donde $f(x)=b_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ \dots\ (x-\xi_m)$.

930. Conociendo los números característicos de la matriz A, hallar el determinante de la matriz $f(A)$, donde $f(x)$ es un polinomio.

931. Conociendo los números característicos de la matriz A, hallar los números característicos de la matriz $f(A)$.

932. Demostrar que todos los vectores propios de la matriz A son vectores propios de la matriz $f(A)$.

***933.** Hallar los números característicos de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

donde $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$, n es un número impar.

*934. Hallar la suma

$$1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}.$$

935. Hallar los números característicos de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & x & x & \ldots & x \\ y & 0 & x & \ldots & x \\ y & y & 0 & \ldots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y & y & y & \ldots & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

*936. Conociendo los números característicos de las matrices A y B, hallar los números característicos de su producto de Kronecker.

937. Demostrar que los polinomios característicos de las matrices AB y BA coinciden para cualesquiera matrices cuadradas A y B.

938. Demostrar que los polinomios característicos de las matrices AB y BA sólo se diferencian en el factor $(-\lambda)^{n-m}$. Aquí A es una matriz rectangular que tiene m filas y n columnas, B tiene n filas y m columnas, $n > m$.

§ 4. Formas cuadráticas y matrices simétricas

939. Transformar las formas cuadráticas:

a) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$;

b) $x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+x_3^2$;

c) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$;

d) $x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+x_2^2+2x_2x_3-4x_2x_4+x_3^2-2x_4^2$;

e) $x_1^2+x_1x_2+x_3x_4$

a la suma de cuadrados.

940. Transformar la forma cuadrática

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{i<k} x_ix_k$$

a la forma diagonal.

941. Transformar a la forma diagonal la forma cuadrática

$$\sum_{i<k} x_i x_k.$$

942. Demostrar que todos los menores principales de una forma cuadrática positiva, son positivos.

***943.** Supongamos que la forma cuadrática

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

puede reducirse a la forma diagonal $\alpha_1 x_1'^2 + \alpha_2 x_2'^2 + \ldots + \alpha_n x_n'^2$ mediante la transformación "triangular":

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n \\ x_2' &= \qquad\quad x_2 + \ldots + b_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= \qquad\qquad\qquad\qquad x_n. \end{aligned}$$

Se pide:

a) expresar los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ mediante los coeficientes a_{ik};

b) expresar los discriminantes de las formas

$$f_k(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f - \alpha_1 x_1'^2 - \ldots - \alpha_k x_k'^2$$

mediante los coeficientes a_{ik}.

Hallar la condición según la cual es posible la transformación triangular del tipo indicado.

944. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una forma cuadrática

$$\begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

sea positiva, es el cumplimiento de las desigualdades:

$$a_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \ldots; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

(condiciones de Sylvester).

***945.** Demostrar que si a una forma cuadrática positiva se le agrega el cuadrado de una forma lineal, su discriminante aumenta.

*946. Sea $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \ldots$ una forma cuadrática positiva, hagamos

$$\varphi(x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n),$$

y sean D_f y D_φ sus discriminantes. Demostrar que

$$D_f \leqslant a_{11}D_\varphi.$$

947. Sea

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - l_{p+2}^2 - \ldots - l_{p+q}^2,$$

donde $l_1, l_2, \ldots, l_p, l_{p+1}, l_{p+2}, \ldots, l_{p+q}$ son formas reales lineales en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Demostrar que el número de cuadrados positivos en la expresión canónica de la forma f no es superior a p y el número de cuadrados negativos no es superior a q.

*948. Sean $s_0, s_1, \ldots$ las sumas de potencias de las raíces de la ecuación $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ de coeficientes reales. Demostrar que el número de cuadrados negativos en la expresión canónica de la forma cuadrática $\sum_{i, k=1}^{n} s_{i+k+2}x_ix_k$ es igual al número de pares de raíces imaginarias conjugadas de la ecuación dada.

Demostrar los teoremas:

949. Para que todas las raíces de una ecuación de coeficientes reales sean reales y distintas, es necesario y suficiente el cumplimiento de las desigualdades:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0; \quad \ldots; \quad \Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} > 0.$$

*950. Si las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} f = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi = {} & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \ldots + b_{1n}x_1x_n + \\ & + b_{21}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 + \ldots + b_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots \\ & + b_{n1}x_nx_1 + b_{n2}x_nx_2 + \ldots + b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

son no negativas, la forma

$$\begin{aligned} (f, \varphi) = {} & a_{11}b_{11}x_1^2 + a_{12}b_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}b_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}b_{21}x_2x_1 + a_{22}b_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}b_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots \\ & + a_{n1}b_{n1}x_nx_1 + a_{n2}b_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

es no negativa.

951. Transformar las formas cuadráticas:

a) $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

b) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

c) $3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$;

d) $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

e) $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$;

f) $5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$;

g) $3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;

h) $7x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-8x_1x_2+8x_2x_3$;

i) $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2-4x_1x_2+2x_1x_4+2x_2x_3-4x_3x_4$;

j) $2x_1x_2+2x_3x_4$;

k) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$;

l) $2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$;

m) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+6x_1x_3-4x_1x_4-4x_2x_3+6x_2x_4-2x_3x_4$;

n) $8x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$

a la forma canónica mediante transformaciones ortogonales.

952. Transformar las formas cuadráticas:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{i<k} x_ix_k; \quad \text{b) } \sum_{i<k} x_ix_k$$

a la forma canónica mediante transformaciones ortogonales.

953. Transformar la forma

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$$

a la forma canónica mediante una transformación ortogonal.

954. Demostrar que si todos los números característicos de una matriz simétrica real A están comprendidos en el segmento $[a, b]$, la forma cuadrática de matriz $A-\lambda E$ es negativa para $\lambda>b$ y es positiva para $\lambda<a$. También subsiste el teorema recíproco.

955. Demostrar que si todos los números característicos de una matriz simétrica real A están comprendidos en el segmento $[a, c]$ y todos los números característicos de una matriz simétrica real B están comprendidos en el segmento $[b, d]$, entonces todos los números característicos de la matriz $A+B$ están comprendidos en el segmento $[a+b, c+d]$.

956. Llamemos norma de una matriz A y representémosla por $\|A\|$ (A es una matriz cuadrada real, $\bar{A}$ es su transpuesta), al valor aritmético de la raíz cuadrada del número característico máximo de la matriz $\bar{A}A$. Demostrar que

a) $\|A\|=\|\bar{A}\|$;

b) $|AX|\leqslant\|A\|\cdot|X|$, además, se cumple la igualdad para cierto vector X_0;

c) $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$;

d) $\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$;

e) los módulos de todos los números característicos de la matriz A no son superiores a $\|A\|$.

957. Demostrar que toda matriz real no singular puede expresarse en forma de un producto de una matriz ortogonal y de una matriz triangular de la forma

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

con los elementos diagonales b_{ii} positivos, y que tal expresión es única.

958. Demostrar que toda matriz real no singular puede expresarse en forma de un producto de una matriz ortogonal y de una matriz simétrica, correspondiente a cierta forma cuadrática positiva.

959. Sea dada una superficie de segundo orden en el espacio n-dimensional mediante la ecuación

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \\ + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + \dots + 2b_nx_n + c = 0, \end{aligned}$$

o escribiendo abreviadamente, $AX \cdot X + 2B \cdot X + c = 0$. Demostrar que para la existencia de un centro de la superficie es necesario y suficiente que el rango de la matriz A sea igual al rango de la matriz (A, B).

960. Demostrar que la ecuación de una superficie central de segundo orden puede reducirse a la forma canónica

$$\alpha_1x_1^2 + \dots + \alpha_rx_r^2 + \gamma = 0$$

mediante un traslado del origen y una transformación ortogonal.

961. Demostrar que la ecuación de una superficie de segundo orden no central puede reducirse a la forma canónica

$$\alpha_1x_1^2 + \dots + \alpha_rx_r^2 = 2x_{r+1}$$

mediante un traslado del origen y una transformación ortogonal.

§ 5. Transformaciones lineales. Forma canónica de Jordan

962. Demostrar que la dimensión del subespacio, en el cual se transforma todo el espacio al realizar una transformación lineal, es igual al rango de la matriz de esta transformación lineal.

963. Sea Q un subespacio de dimensión q de un espacio R de dimensión n, y sea Q' la imagen de Q en una transformación lineal de rango r del espacio R. Demostrar que la dimensión q' del espacio Q' satisface a las desigualdades:

$$q+r-n \leqslant q' \leqslant \min(q, r).$$

964. Empleando el resultado del problema 963, demostrar que el rango ρ de producto de dos matrices de rangos r_1 y r_2 satisface a las desigualdades:

$$r_1+r_2-n \leqslant \rho \leqslant \min(r_1, r_2).$$

***965.** Sean P y Q algunos subespacios complementarios entre sí del espacio R. Entonces cualquier vector $X \in R$ se descompone unívocamente en una suma de vectores $Y \in P$ y $Z \in Q$. La transformación que consiste en pasar del vector X a su componente Y, se llama proyección sobre P paralela a Q. Demostrar que la proyección es una transformación lineal y que su matriz A (en cualquier base) satisface a la condición $A^2=A$. Recíprocamente, toda transformación lineal cuya matriz satisface a la condición $A^2=A$, es una proyección.

***966.** La proyección se llama ortogonal, si $P \perp Q$. Demostrar que en cualquier base ortonormal la matriz de la proyección ortogonal es simétrica. Recíprocamente, toda matriz simétrica de potencias iguales es la matriz de una proyección ortogonal.

***967.** Demostrar que todos los números característicos, distintos de cero, de una matriz hemisimétrica son imaginarios puros, y las partes reales e imaginarias de los vectores propios correspondientes tienen igual longitud y son ortogonales.

***968.** Demostrar que para una matriz hemisimétrica A se puede hallar una matriz ortogonal P tal que

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & 0 & a_2 & & & & & & & \\ & & -a_2 & 0 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & 0 & a_k & & & & \\ & & & & & -a_k & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(todos los elementos no indicados son iguales a cero; $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son números reales).

969. Demostrar el teorema: si A es una matriz hemisimétrica, entonces la matriz $(E-A)(E+A)^{-1}$ es ortogonal y -1 no es un número característico de ella. Recíprocamente, toda matriz ortogonal, para la cual -1 no es un número característico, puede representarse en esta forma.

***970.** Demostrar que los módulos de todos los números característicos de una matriz ortogonal son iguales a 1.

***971.** Demostrar que los vectores propios de una matriz ortogonal, pertenecientes a un número característico imaginario, tienen la forma $X+iY$, donde X, Y son vectores reales, iguales de longitud y ortogonales.

***972.** Demostrar que toda matriz ortogonal puede representarse en la forma

$$Q^{-1}TQ,$$

donde Q es una matriz ortogonal y T tiene la forma

$$\begin{pmatrix}
\cos\varphi_1 & -\operatorname{sen}\varphi_1 & & & & & & & & & & & & & \\
\operatorname{sen}\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & & & & & & & & & & \\
& & \cos\varphi_2 & -\operatorname{sen}\varphi_2 & & & & & & & & & & & \\
& & \operatorname{sen}\varphi_2 & \cos\varphi_2 & & & & & & & & & & & \\
& & & & \cdot & & & & & & & & & & \\
& & & & & \cdot & & & & & & & & & \\
& & & & & & \cdot & & & & & & & & \\
& & & & & & & 1 & & & & & & & \\
& & & & & & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & & & & & \cdot & & & & & \\
& & & & & & & & & & \cdot & & & & \\
& & & & & & & & & & & 1 & & & \\
& & & & & & & & & & & & -1 & & \\
& & & & & & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & & & & & -1 \\
& & & & & & & & & & & & & & & -1
\end{pmatrix}$$

(todos los elementos no indicados son iguales a cero).

973. Reducir las matrices que siguen a la forma normal de Jordan:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; o) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

974. Reducir las matrices que siguen a la forma normal de Jordan:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$.

***975.** Demostrar que toda matriz periódica A (que satisface a la condición $A^m = E$ para cierto m natural) se reduce a la forma canónica diagonal.

***976.** Conociendo los números característicos de la matriz A, hallar los números característicos de la matriz A'_m, formada por los menores de m-ésimo orden de la matriz A dispuestos de un modo adecuado (véase el problema 531).

977. Demostrar que cualquier matriz A se puede transformar a la transpuesta.

***978.** Demostrar que cualquier matriz se puede representar en forma del producto de dos matrices simétricas, una de las cuales es no singular.

979. Partiendo de una matriz dada A de orden n, construimos una serie de matrices mediante el proceso siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
A_1 = A; & \operatorname{Sp} A_1 = p_1; & A_1 - p_1E = B_1, \\
B_1A = A_2; & \frac{1}{2}\operatorname{Sp} A_2 = p_2; & A_2 - p_2E = B_2, \\
B_2A = A_3; & \frac{1}{3}\operatorname{Sp} A_3 = p_3; & A_3 - p_3E = B_3, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
B_{n-1}A = A_n; & \frac{1}{n}\operatorname{Sp} A_n = p_n; & A_n - p_nE = B_n,
\end{array}
$$

donde $\operatorname{Sp} A_i$ es la huella de la matriz A_i (la suma de los elementos diagonales). Demostrar que: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son los coeficientes del polinomio característico de la matriz A, escrito en la forma $(-1)^n[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n]$; B_n es la matriz nula; finalmente, si A no es singular, $\frac{1}{p_n}B_{n-1} = A^{-1}$.

***980.** Para que la ecuación $XY - YX = C$ sea resoluble en matrices cuadradas X, Y, es necesario y suficiente que la huella de la matriz C sea igual a cero. Demostrarlo.

SEGUNDA PARTE

INDICACIONES

Capítulo I

LOS NUMEROS COMPLEJOS

11. Véase el problema 10.
13. Mostrar que el teorema es válido para cada una de las cuatro operaciones con dos números y emplear el método de inducción matemática.
18. Emplear el hecho de que los primeros miembros se expresan fácilmente en forma de una suma de dos cuadrados.
27. Hacer $x=a+bi$, $y=c+di$.
28. Hacer $z=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi$.
31. Hacer $z=t^3$, $z'=t'^3$. Emplear el problema 27.
37. Pasar a la forma trigonométrica.
38. $1+\omega=-\omega^2$.
40. Pasar al ángulo mitad.

41. Convencerse de que $z=\cos\theta\pm i\operatorname{sen}\theta$, $\frac{1}{z}=\cos\theta\mp i\operatorname{sen}\theta$. Aplicar la fórmula de Moivre.

51. Hacer $\alpha=\cos x+i\operatorname{sen}x$. Entonces $\cos^{2m}x=\left(\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}\right)^{2m}$, etc.

52. Demostrar que el coeficiente de $(2\cos x)^{m-2p}$ es igual a $(-1)^p(C^p_{m-p}+C^{p-1}_{m-p-1})$. Emplear el método de inducción matemática.
53. El problema es similar al anterior.
54. Emplear el desarrollo según la fórmula del binomio de Newton de $(1+i)^n$.
55. Servirse del problema precedente.

56. Desarrollar $\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$ por la fórmula del binomio de Newton.

68. Mostrar que el problema se reduce al cálculo del límite de la suma $1+\alpha+\alpha^2+\ldots$, donde $\alpha=\frac{-1+i}{2}$.

69. Aplicar la fórmula $\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\alpha}{2}$.

71. Aplicar las fórmulas

$$\cos^3\alpha=\frac{\cos 3\alpha}{4}+\frac{3\cos\alpha}{4};\quad \operatorname{sen}^3\alpha=\frac{3\operatorname{sen}\alpha}{4}-\frac{\operatorname{sen}3\alpha}{4}.$$

72. Para calcular las sumas de las formas $1+2a+3a^2+\ldots+na^{n-1}$ y $1+2^2a+3^2a^2+\ldots+n^2a^{n-1}$, es conveniente multiplicarlas previamente por $1-a$.
76. $x_1=\alpha+\beta$; $x_2=\alpha\omega+\beta\omega^2$; $x_3=\alpha\omega^2+\beta\omega$; $\alpha^3+\beta^3=-q$, $3\alpha\beta=-p$.

77. Multiplicar por -27 y considerar el primer miembro como el discriminante de una ecuación cúbica.

78. Hacer $x=\alpha+\beta$.

87. Mostrar que $\varepsilon^n=-1$.

88. Si $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$, entonces la suma pedida puede escribirse así: $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}$.

89. Considerar dos casos: 1) k es divisible por n; 2) k no es divisible por n.

91, 92. Multiplicar por $1-\varepsilon$.

94. a) Restar la suma de las raíces pertenecientes a los exponentes 1, 3, 5 de la suma de todas las raíces de 1 de orden 15.

97. La longitud del lado de un polígono regular de 14 lados, de radio 1, es igual a $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}$. Emplear el hecho de que $\cos\frac{4\pi}{7}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}$ satisface a la ecuación $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

98. 1) Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las raíces de la ecuación $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n=0$, entonces $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

2) Si ε es una raíz n-ésima de 1, entonces $\bar{\varepsilon}$, conjugado con ε, también es una raíz n-ésima de 1.

99. Poner $x=1$ en las identidades obtenidas en el resultado del problema 98.

100. Utilizar el desarrollo de x^n-1 en factores de primer grado.

101. En el desarrollo de x^n-1 en factores lineales, poner: 1) $x=\cos\theta+ i\operatorname{sen}\theta$; 2) $x=\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta$.

103. Emplear el hecho de que los módulos de los números complejos conjugados son iguales.

105. a) Transformar la ecuación a la forma $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m=1$.

107. Sea

$$S=\cos\varphi+C_n^1\cos(\varphi+\alpha)\,x+\ldots+\cos(\varphi+n\alpha)\,x^n,$$
$$T=\operatorname{sen}\varphi+C_n^1\operatorname{sen}(\varphi+\alpha)\,x+\ldots+\operatorname{sen}(\varphi+n\alpha)\,x^n.$$

Calcular $S+Ti$ y $S-Ti$ y determinar S de las igualdades obtenidas.

113. Demostrar primero que $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)$, si p es un número primo. Calcular, con este fin, la cantidad de números no superiores a p^α y divisibles por p.

116. Demostrar que todas las raíces de $x^{p^{m-1}}-1$, y sólo ellas, no son raíces primitivas de $x^{p^m}-1$.

117. Mostrar que si n es impar, entonces para obtener todas las raíces primitivas de 1, de orden $2n$, es suficiente multiplicar todas las raíces primitivas de orden n por -1.

119. Aplicar el problema 118.

120. Aplicar los problemas 115, 116, 111 y mostrar que: 1) $\mu(p)=-1$ si p es primo; 2) $\mu(p^\alpha)=0$ si p es primo, $\alpha>1$; 3) $\mu(ab)=\mu(a)\mu(b)$, si a y b son primos entre sí.

122. Mostrar que si $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$ pertenece al exponente n_1, entonces $x-\varepsilon_k$ figurará en el segundo miembro de la igualdad que se demuestra, elevado a la potencia $\sum\mu(d_1)$, donde d_1 recorre todos los divisores de $\frac{n}{n_1}$.

123. Examinar los casos: 1) n es una potencia de un número primo; 2) n es un producto de potencias de distintos números primos. Para el caso 1), emplear el problema 116, para el caso 2), los problemas 119 y 122.

124. Examinar los casos: 1) n es impar mayor que 1; 2) $n=2^k$; 3) $n=2n_1$, n_1 es impar mayor que 1; 4) $n=2^kn_1$, donde $k>1$, n_1 es impar mayor que 1.

125. Aplicar la identidad

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}{2}.$$

Examinar los casos: 1) n es impar; $n=2n_1$, n_1 es impar; 3) $n=2^kn_1$, donde $k>1$, n_1 es impar.

126. Multiplicar la suma S por la conjugada y tener en cuenta que ε^{x^2} no varía al sustituir x por $x+n$.

Capítulo 2

CALCULO DE DETERMINANTES

132. Tener en cuenta que cada par de elementos de la permutación forma una inversión.

133. El número de inversiones en la segunda permutación es igual al número de órdenes en la primera.

145. Mostrar que en cada sumando figura el factor 0.

149, 150. Sustituir las filas por columnas.

153. Averiguar cómo se altera el determinante si se permutan de algún modo sus columnas.

154. a) Observar que para $x=a_i$ el determinante tiene dos filas iguales.

155. Agregar a la última columna la primera, multiplicada por 100, y la segunda, multiplicada por 10.

156. Restar primero de cada columna la primera.

163. Restar la primera columna de la segunda.

179. Agregar la primera fila a las demás.

180—182. Restar la primera fila de todas las demás.

183. Restar la segunda fila de todas las demás.

184. Agregar la primera fila a la segunda.

185. Agregar todas las columnas a la primera.

186, 187. De la primera columna restar la segunda, agregar la tercera, etc.

188. Desarrollar por los elementos de la primera columna o agregar a la última fila la primera, multiplicada por x^n, la segunda, multiplicada por x^{n-1}, etc.

189. Agregar a la última columna la primera, multiplicada por x^{n-1}, la segunda, multiplicada por x^{n-2}, etc.

190. Formar un determinante igual a $f(x+1)-f(x)$. En el determinante obtenido, de la última columna restar la primera, la segunda, multiplicada por x, la tercera, multiplicada por x^2, etc.

191. Multiplicar la última columna por $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y restar de la 1ª, 2ª, …, nª columna, respectivamente.

192. Agregar todas las columnas a la primera.

194. Agregar todas las columnas a la última.

195. De la primera columna sacar el factor a_1, de la segunda a_2, etc. Agregar a la última columna todas las anteriores.

196. De la primera columna sacar el factor h; agregar la primera columna a la segunda.

197. Multiplicar la primera fila y la primera columna por x.

198. De cada fila restar la primera, multiplicada sucesivamente por $a_1, a_2, \ldots, a_n$. De cada columna restar la primera, multiplicada sucesivamente por $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

199. Agregar todas las columnas a la primera.

200. Agregar a la primera columna todas las demás.

201. De cada columna, comenzando desde la última, restar la columna anterior multiplicada por a.

202. De cada fila, comenzando desde la última, restar la anterior. Después, agregar a cada columna la primera.

203. Multiplicar la primera fila por b_0, la segunda por b_1, etc. Agregar a la primera fila todas las demás.

204. De la primera fila sacar el factor a y restar la primera de la segunda.

205. Desarrollar por los elementos de la primera fila.

206. Representar en forma de una suma de dos determinantes.

208. A cada elemento que no figura en la diagonal principal añadir como sumando un cero y representar el determinante en forma de una suma de 2^n determinantes. Aplicar el problema 206 ó 207.

211. Multiplicar la primera columna por x^{n-1}, la segunda por x^{n-2}, etc.

212. Desarrollar por los elementos de la última columna y mostrar que $\Delta_n=x_n\Delta_{n-1}+a_nx_1x_2\ldots x_{n-1}$ (Δ_n denota un determinante de orden n). Para calcular el determinante, emplear el método de inducción matemática.

213. Desarrollar por los elementos de la última columna y mostrar que $\Delta_{n+1}=x_n\Delta_n+a_ny_1y_2\ldots y_n$.

214. De la segunda columna sacar el factor a_1, de la tercera a_2, ..., de la $(n+1)$—ésima a_n. Cambiar el signo de la primera columna por el contrario y agregar todas las columnas a la primera.

215. Desarrollar por los elementos de la primera fila.

216. Desarrollar por los elementos de la primera fila y mostrar que $\Delta_n=a_1a_2\ldots a_{n-1}-\Delta_{n-1}$.

219. Aplicar el resultado del problema 217.

221. Desarrollar por los elementos de la primera fila y mostrar que $\Delta_n=$ $=x\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}$.

222. De la última fila restar la anterior, multiplicada por $\frac{y_n}{y_{n-1}}$. Mostrar que $\Delta_n=\frac{y_n}{y_{n-1}}(x_ny_{n-1}-x_{n-1}y_n)\Delta_{n-1}$.

223. Representar en forma de una suma de dos determinantes y mostrar que $\Delta_n=a_n\Delta_{n-1}+a_1a_2\ldots a_{n-1}$.

225. Representar en forma de una suma de dos determinantes y mostrar que $\Delta_n=(a_n-x)\Delta_{n-1}+x(a_1-x)\ldots(a_{n-1}-x)$.

226. Haciendo $x_n=(x_n-a_n)+a_n$, representar el determinante en forma de una suma de dos determinantes y mostrar que

$$\Delta_n=(x_n-a_n)\Delta_{n-1}+a_n(x_1-a_1)(x_2-a_2)\ldots(x_{n-1}-a_{n-1}).$$

227. Representar en forma de una suma de dos determinantes y mostrar que

$$\Delta_n=(x_n-a_nb_n)\Delta_{n-1}+a_nb_n(x_1-a_1b_1)\ldots(x_{n-1}-a_{n-1}b_{n-1}).$$

228. Representar en forma de una suma de dos determinantes y mostrar que

$$\Delta_n=-m\Delta_{n-1}+(-1)^{n-1}m^{n-1}x_n.$$

230. Desarrollar por los elementos de la primera fila y mostrar que

$$\Delta_{2n}=(a^2-b^2)\Delta_{2n-2}.$$

231. De cada fila restar la anterior y a la segunda fila agregar todas las siguientes. Luego, desarrollando el determinante por los elementos de la última fila, mostrar que

$$\Delta_n=[a+(n-1)b]\Delta_{n-1}+a(a+b)\ldots[a+(n-2)b].$$

232. Representar en forma de una suma de dos determinantes y mostrar que

$$\Delta_n=x(x-2a_n)\Delta_{n-1}+a_n^2x^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(x-2a_i).$$

233. Haciendo $(x-a_n)^2=x(x-2a_n)+a_n^2$, representar el determinante en forma de una suma de dos determinantes y mostrar que

$$\Delta_n=x(x-2a_n)\Delta_{n-1}+a_n^2x^{n-1}(x-2a_1)\ldots(x-2a_{n-1}).$$

234. Representar en forma de una suma de dos determinantes y demostrar que

$$\Delta_n=\Delta_{n-1}+(-1)^n b_1b_2\ldots b_n$$

235. Representar el último elemento de la última fila en la forma a_n-a_n. Demostrar que

$$\Delta_n=(-1)^{n-1}b_1b_2\ldots b_{n-1}a_n-a_n\Delta_{n-1}.$$

236. De cada fila restar la siguiente.

237. En el ángulo superior de la izquierda hacer $1=x-(1-x)$. Representar el determinante en forma de una suma de dos determinantes. Emplear el resultado del problema 236.

238. Multiplicar la segunda fila por x^{n-1}, la tercera por x^{n-2}, ..., la n-ésima por x. De la primera columna sacar el factor x^n, de la segunda x^{n-1}, ..., de la n-ésima x.

239. Emplear la indicación dada al problema anterior.

240. De cada columna, comenzando desde la última, restar la anterior. Después, de cada fila restar la anterior. Demostrar que $\Delta_n=\Delta_{n-1}$. Al hacer el cálculo, tener en cuenta que $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$.

241. De cada columna restar la anterior.

242. De cada fila restar la anterior. Demostrar que $\Delta_n=\Delta_{n-1}$.

243. Sacar de la 1ª fila el factor m, de la 2ª $m+1$, ..., de la última $m+n$. Sacar de la 1ª columna el factor $\frac{1}{k}$, de la 2ª $\frac{1}{k+1}$, etc. Repetir esta operación hasta que todos los elementos de la 1ª columna se hagan iguales a 1.

244. De cada columna restar la anterior. En el determinante obtenido, de cada columna restar la anterior, conservando invariables las primeras dos. De nuevo de cada columna restar la anterior, conservando invariables las primeras tres columnas, etc. Después de m operaciones de éstas resulta un determinante, en el cual todos los elementos de la última columna son iguales a 1. El cálculo de este determinante no presenta dificultades especiales.

245. De cada fila restar la anterior y mostrar que $\Delta_{n+1}=(x-1)\Delta_n$.

246. De cada fila restar la anterior y mostrar que $\Delta_{n+1}=(n-1)!\,(x-1)\Delta_n$.

247. De cada fila restar la anterior; de cada columna restar la anterior. Demostrar que $\Delta_n=\alpha\Delta_{n-1}$.

248. Representar el último elemento de la última fila en la forma $z-(x-z)$. Representar el determinante en forma de una suma de dos determinantes. Emplear el hecho de que el determinante es simétrico respecto de y y z.

249. Véase la indicación al problema 248.

252. De cada fila restar la primera, multiplicada por $\frac{\beta}{a}$. En el determinante obtenido, de la primera columna sacar el factor $\frac{ab-\lambda\beta}{a(\alpha-\beta)}$ y de la primera columna restar todas las demás.

253. Agregar todas las columnas a la primera y de cada fila restar la anterior. Véase el problema 199.

254. Emplear la indicación al problema anterior.

256. Considerar el determinante como un polinomio en a de cuarto grado. Mostrar que el polinomio buscado es divisible por los siguientes polinomios en a de primer grado:

$$a+b+c+d;\quad a+b-c-d;\quad a-b+c-d;\quad a-b-c+d.$$

258. Agregar todas las columnas a la primera, sacar el factor $x+a_1+\ldots+a_n$. Hacer después $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$, y convencerse de que el determinante es divisible por $x-a_1, x-a_2, \ldots, x-a_n$.

259. Determinante de Vandermonde.

264. Desarrollar por los elementos de la primera columna.

265. De la segunda fila restar la primera. En el determinante obtenido, de la tercera fila restar la segunda, etc.

269. De la tercera fila sacar el factor $\frac{1}{2!}$, de la cuarta $\frac{1}{3!}$, etc.

270. Emplear el resultado del problema 269.

271. De la segunda columna sacar el factor 2, de la tercera 3, etc. Al calcular $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(i^2-k^2)$ conviene representar

$$\prod(i^2-k^2)=\prod(i-k)\cdot\prod(i+k).$$

272. De la primera columna sacar el factor $\frac{x_1}{x_1-1}$; de la segunda $\frac{x_2}{x_2-1}$, etc.

273. De la primera fila sacar el factor a_1^n, de la segunda a_2^n, etc.

275. Agregar a la primera columna la segunda multiplicada por C_{2n}^1, la tercera multiplicada por C_{2n}^2, etc.

276. Emplear el resultado del problema 51.

277. Emplear el problema 53.

278. Añadir la fila $1, x_1, x_2, \ldots, x_n$ y la columna $1, 0, 0, \ldots, 0$.

279. Examinar el determinante

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & z\\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 & z^2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n & z^n \end{vmatrix}.$$

Comparar el desarrollo de D por los elementos de la última columna con la expresión $D=\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}(z-x_i)$.

280. Emplear la indicación al problema anterior.

282. Añadir la primera fila $1, 0, \ldots, 0$ y la primera columna $1, 1, 1, \ldots, 1$. Restar la primera columna de todas las siguientes.

285. Desarrollar por los elementos de la última fila.

286. Primero, de cada columna, comenzando de la última, se resta la anterior multiplicada por x. Después, una vez rebajado el orden y sacados los factores evidentes, se transforman las primeras dos filas (dependientes de x) aplicando la relación

$$(m+1)^s-m^s=sm^{s-1}+\frac{s(s-1)}{2}m^{s-2}+\ldots+1.$$

287. De cada columna, comenzando de la última, restar la anterior multiplicada por x.

288. m) Agregar a la primera columna la sexta y la onceava, a la segunda columna la séptima y la doceava, ..., a la quinta columna la décima y la quinceava. Agregar a la sexta columna la onceava, a la séptima columna la doceava, ..., a la décima columna la quinceava.

De la quinceava fila restar la décima, de la catorceava restar la novena, ..., de la sexta fila restar la primera.

293. Examinar

$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^1 a_n & C_n^2 a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0^n & b_1^n & \dots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

294. Examinar

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sen}\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \dots & \cos\alpha_n \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \operatorname{sen}\alpha_2 & \dots & \operatorname{sen}\alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

295. Examinar

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

296. Elevar al cuadrado.

297. Restar de la tercera columna la primera, de la cuarta restar la segunda. Multiplicar después por

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\varphi & -\operatorname{sen} 2\varphi \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} 2\varphi & \cos 2\varphi \end{vmatrix}.$$

298. Restar de la segunda columna n veces la primera, de la cuarta restar n veces la segunda. Permutar la segunda y tercera columnas. Multiplicar por

$$\begin{vmatrix} \cos n\varphi & -\operatorname{sen} n\varphi & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} n\varphi & \cos n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n+1)\varphi & -\operatorname{sen}(n+1)\varphi \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(n+1)\varphi & \cos(n+1)\varphi \end{vmatrix}.$$

299. Elevar al cuadrado. Transformar como un determinante de Vandermonde y cada diferencia transformar al seno de cierto ángulo. De este modo se determina el signo.

300. Estudiar el producto

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

donde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$.

308. Introducir $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$. Entonces

$$\Delta = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\varepsilon_1^l + \varepsilon_1^{-l}}{2}\, \varepsilon_1^{2k(l-1)}\right).$$

311. Emplear el problema 92.

314. $$\prod_{k=0}^{2n-1}(a_0+a_1\varepsilon_k+a_2\varepsilon_k^2+\ldots+a_{2n-1}\varepsilon_k^{2n-1})=$$
$$=\prod_{r=0}^{n-1}\left[(a_0+a_n)+(a_1+a_{n+1})\,\alpha_r+\ldots+(a_{n-1}+a_{2n-1})\,\alpha_r^{n-1}\right]\times$$
$$\times\prod_{s=0}^{n-1}\left[(a_0-a_n)+(a_1-a_{n+1})\,\beta_s+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(a_{n-1}-a_{2n-1})\,\beta_s^{n-1}\right],$$
donde $\varepsilon_k=\cos\frac{k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}$; $\alpha_r=\cos\frac{2r\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2r\pi}{n}$;
$$\beta_s=\cos\frac{(2s+1)\,\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{(2s+1)\,\pi}{n}.$$

323. De cada fila restar la primera, de cada columna restar la primera.

325. Emplear el problema 217.

327. Representar en forma de una suma de determinantes o hacer $x=0$ en el determinante y en sus derivadas.

328. 1) De la $(2n-1)$-ésima fila restar la $(2n-2)$-ésima, de $(2n-2)$-ésima fila restar la $(2n-3)$-ésima, ..., de la $(n+1)$-ésima fila restar la n-ésima, de la n-ésima fila restar la suma de todas las anteriores.

2) Agregar a la $(n+i)$-ésima fila la i-ésima, $i=1, 2, \ldots, n-1$.

329. Agregar a cada fila todas las siguientes, de cada columna restar la anterior. Demostrar que
$$\Delta_{n+1}(x)=(x-n)\,\Delta_n(x-1).$$

Capítulo 4

MATRICES

466. Emplear el resultado del problema 465 e).

473. Examinar la suma de los elementos diagonales.

491. Emplear los resultados de los problemas 489, 490.

492. Emplear el resultado del problema 490.

494, 495. Emplear los resultados de los problemas 492, 493.

496. Efectuar la demostración por inducción sobre el número de columnas de la matriz B, demostrando previamente que si al agregar una columna no varía el rango de la matriz B, entonces tampoco varía el rango de la matriz (A, B).

También se puede hacer la demostración sin emplear el método de inducción, aplicando el teorema de Laplace.

497. Emplear los resultados de los problemas 496, 492.

498. Elegir de la matriz $(E-A,\ E+A)$ una matriz cuadrada no singular P y considerar los productos $(E-A)\,P$ y $(E+A)\,P$.

500. Emplear el resultado del problema 489.

501. Demostrar la unicidad de la expresión en el problema 500 y, por lo tanto, reducir el problema al cálculo del número de matrices triangulares R que tienen un determinante dado k. Representando el número buscado mediante $F_n(k)$, demostrar que si $k=a\cdot b$ para a y b primos entre sí, entonces $F_n(k)=F_n(a)\,F_n(b)$. Finalmente, realizar la construcción inductiva de la fórmula para $F_n(p^m)$, donde p es un número primo.

505. Emplear los resultados de los problemas 495, 498. Hallar una matriz P con el menor determinante posible, de modo que $P^{-1}AP$ sea diagonal, y emplear después el resultado del problema 500.

517. Emplear el teorema de Laplace y la desigualdad de Buniakovski.

518. Establecer la igualdad $|\bar{A}A| = |\bar{B}B| \cdot |\bar{C}C|$ suponiendo que la suma de los productos de los elementos de cualquier columna de la matriz B por los elementos correspondientes de cualquier columna de la matriz C, es igual a cero. Completar después adecuadamente la matriz (B, C) hasta que sea cuadrada y emplear el resultado del problema 517.

523. Añadir al determinante, a la izquierda, una columna cuyos elementos sean todos iguales a $\frac{M}{2}$, y arriba, una fila cuyos elementos (a excepción del que está en el ángulo) sean todos iguales a 0; restar después la primera columna de todas las demás.

527. Emplear los resultados de los problemas 522, 526.

528. Establecer una relación entre la matriz recíproca y la inversa.

529. Establecer el resultado para el menor formado por los elementos de las primeras m filas y las primeras m columnas, examinando el producto de las matrices:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{m+1,1} & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{m+1,2} & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & \dots & A_{m+1,m} & A_{nm} \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde A_{ik} son los complementos algebraicos de los elementos a_{ik}.

Obrar de un modo similar en el caso general.

535. Representar $A \times B$ como $(A \times E_m) \cdot (E_n \times B)$.

537. Efectuar la demostración por inducción, examinando primero el caso en que A_{11} es una matriz no singular. Reducir el caso general a éste, añadiendo a la matriz λE.

Capítulo 6

POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES DE UNA VARIABLE

547. a) Desarrollar $f(x)$ según las potencias de $x-3$, sustituir después x por $x+3$.

553. Derivar inmediatamente y poner $x=1$, elegir después la potencia máxima de x y continuar la derivación.

555. Examinar los polinomios

$$f_1(x) = nf(x) - xf'(x); \quad f_2(x) = nf_1(x) - xf_1'(x),$$

etc.

561. Demostrar por el método de inducción matemática.

562. Una raíz distinta de cero, de orden $k-1$, del polinomio $f(x)$, es una raíz de orden $k-2$ del polinomio $xf'(x)$, es una raíz de orden $k-3$ del polinomio $x[xf'(x)]'$, etc.

Recíprocamente, una raíz común, distinta de cero, de los polinomios $f(x)$, $xf'(x)$, $x[xf'(x)]'$, ... (en total $k-1$ polinomios), es una raíz de $f(x)$, de orden no inferior a $k-1$.

563. Derivar la igualdad que muestra que el polinomio es divisible por su derivada.

567. Considerar la función $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ o $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

568. Ligar el problema al examen de las raíces de

$$\varphi(x)=f(x)f'(x)_0-f'(x)f(x_0),$$

donde x_0 es una raíz de $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$.

569. Emplear la solución del problema precedente y desarrollar $f(x)$ según las potencias de $x-x_0$.

576. Demostrar como el lema de D'Alembert.

580, 581. Representar la función en la misma forma que en la demostración del lema de D'Alembert:

$$f(z)=f(a)+\frac{f^k(a)}{k!}(z-a)^k[1+\varphi(z)]; \qquad \varphi(a)=0.$$

583. Hallar las raíces de los polinomios y tener en cuenta los coeficientes superiores [en los problemas a) y b)]. En el problema c), para buscar las raíces, es conveniente hacer $x=\operatorname{tg}^2\theta$.

589. Hallar las raíces comunes.

608. Demostrar previamente que $f(x)$ no tiene raíces reales de orden de multiplicidad impar.

623. Emplear el resultado del problema 622.

626. Utilizar el hecho de que la ecuación no tiene que variar al sustituir x por $-x$ y x por $\frac{1}{x}$.

627. La ecuación no tiene que variar al sustituir x por $\frac{1}{x}$ y x por $1-x$.

637. Dividir por $(1-x)^n$ y derivar $m-1$ veces, haciendo después de cada derivación $x=0$. Utilizar el hecho de que el grado de $N(x)$ es menor que m y el grado de $M(x)$ es menor que n.

642. Servirse de la fórmula de Lagrange. Efectuar la división en cada sumando del resultado y reducir los términos semejantes, empleando para ello el resultado del problema 100.

644. Expresar $f(x_0)$ mediante $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, utilizando la fórmula de interpolación de Lagrange, y comparar el resultado con la condición del problema, teniendo en cuenta que $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ son independientes. Estudiar después $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, desarrollándole según las potencias de $x-x_0$.

645. Representar el polinomio x^s mediante sus valores, empleando la fórmula de interpolación de Lagrange.

648, 649. Formar el polinomio de interpolación según el método de Newton.

650. Hallar los valores del polinomio buscado para $x=0, 1, 2, 3, \ldots, 2n$.

651. Se puede resolver el problema empleando el método de Newton. Más abreviadamente, considerar el polinomio $F(x)=xf(x)-1$, donde $f(x)$ es el polinomio buscado.

652. Considerar el polinomio $(x-a)f(x)-1$.

653. Formar el polinomio según el método de Newton, y para comodidad en los cálculos, introducir en el denominador de cada sumando el factorial.

654. Examinar el polinomio $f(x^2)$, donde $f(x)$ es el polinomio buscado.

655. Lo más fácil es por la fórmula de Lagrange

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ son las raíces del denominador}).$$

656. Desarrollar primero según la fórmula de Lagrange, reunir después los sumandos complejos conjugados.

657. e) Emplear el problema 631. f) Hacer $\frac{a+x}{2a}=y$. d), h) Buscar el desarrollo por el método de los coeficientes indeterminados. Una parte se halla mediante la sustitución $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$ después de multiplicar por el común denominador. Después hay que derivar y de nuevo hacer $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$.

660. Emplear el problema 659. En el ejercicio b), desarrollar $\frac{1}{x^2-3x+2}$ en fracciones simples.

665, 666. Utilizar el problema 663.

667. En el ejercicio c), desarrollar el polinomio según las potencias de $x-1$.

668. Desarrollar según las potencias de $x-1$ (o hacer $x=y+1$).

669. Hacer $x=y+1$ y por el método de inducción matemática demostrar que todos los coeficientes del dividendo y del divisor, a excepción de los coeficientes superiores, son divisibles por p.

670, 671. Se demuestra igual que el teorema de Eisenstein.

679, 680. Suponiendo que $f(x)$ es reducible, hacer $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$ y sacar la conclusión respecto de los valores de los divisores.

681. Calcular el número de valores iguales de los divisores supuestos.

682. Servirse del hecho de que $f(x)$ no tiene raíces reales.

683. Demostrar que un polinomio que posee más de tres raíces enteras, no puede tomar un valor igual a un número primo para un valor entero de la variable independiente, y aplicar esto al polinomio $f(x)-1$.

684, 685. Emplear el resultado del problema 683.

702. Formar la serie de Sturm y examinar separadamente los casos en que n es par o impar.

707 — 712. Deducir las relaciones de recurrencia entre los polinomios de potencias consecutivas y sus derivadas, y construir con ellos la serie de Sturm. En el problema 708 formar la serie de Sturm solamente para valores positivos de x y, por otros razonamientos, comprobar que no hay raíces negativas. En el problema 709 formar la serie de Sturm para valores negativos de x.

713. Servirse del hecho de que $F'(x)=2f(x)f'''(x)$ y de que $f'''(x)$ es constante.

717. Desarrollar $g(x)$ en factores y aplicar unas cuantas veces el resultado del problema 716.

718. Aplicar el resultado del problema 717 al polinomio x^m.

719. Emplear el hecho de que si todas las raíces del polinomio $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ son reales, entonces todas las raíces del polinomio $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ también son reales.

721. Multiplicar por $x-1$.

727. Demostrar por el método de reducción a lo absurdo, aplicando el teorema de Rolle y el resultado del problema 581.

728. Construir la gráfica de $\psi(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ y demostrar que toda raíz de $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$ proporciona un punto de extremo para $\psi(x)$ y, recíprocamente. Demostrar que $\psi(x)$ no posee puntos de extremo en los intervalos, entre las raíces de $f'(x)$, que contienen una raíz de $f(x)$, y posee exactamente un punto de extremo en los intervalos que no contienen raíces de $f(x)$.

729. Emplear el resultado de los problemas 727 y 726.

730. Estudiar el comportamiento de la función

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}+\frac{x+\lambda}{\gamma}.$$

731. Se resuelve basándose en el problema anterior para $\lambda=0$.

732. Demostrar por inducción sobre el grado de $f(x)$, haciendo $f(x)=(x+\lambda)f_1(x)$, donde $f_1(x)$ es un polinomio de grado $n-1$.

733. Se demuestra aplicando dos veces el resultado del problema 732.

734. Si todas las raíces de $f(x)$ son positivas, la demostración se lleva a cabo por métodos elementales, precisamente por inducción sobre el grado de $f(x)$. En las hipótesis de inducción se debe incluir que las raíces $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ del polinomio $b_0+b_1\omega x+\ldots+b_{n-1}\omega^{(n-1)^2}x^{n-1}$ satisfacen a la condición

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \quad \text{y} \quad x_i > x_{i-1}\omega^{-2}.$$

Para demostrar el teorema en el caso general, se debe expresar ω^{x^2} como el límite de un polinomio en x, cuyas raíces no estén comprendidas en el intervalo $(0, n)$, y emplear el resultado del problema 731.

735. Examinar $\left|\frac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}\right|$, donde

$$\varphi(x)=a_0\cos\varphi+\ldots+a_n\cos(\varphi+n\theta)x^n,$$
$$\psi(x)=b_0\operatorname{sen}\varphi+\ldots+b_n\operatorname{sen}(\varphi+n\theta)x^n.$$

736. Examinar el módulo de $\frac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}$, donde

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$
$$\psi(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n.$$

Habiendo demostrado que las raíces son reales, multiplicar $\varphi(x)+i\psi(x)$ por $\alpha-\beta i$ y examinar la parte real. Emplear el resultado del problema 727.

737. Desarrollar $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ en fracciones simples, averiguar los signos de los coeficientes en este desarrollo y estudiar la parte imaginaria de

$$\frac{-i[\varphi(x)+i\psi(x)]}{\varphi(x)}=\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}-i.$$

738. Estudiar la parte imaginaria de $\frac{f'(x)}{f(x)}$, desarrollando esta fracción en fracciones simples.

739. Hacer la sustitución de la variable de tal modo que el semiplano dado se transforme en el semiplano $\operatorname{Im}(x)>0$.

740. Ligar con el problema 739.

741. Desarrollar $\frac{f'(x)}{f(x)}$ en fracciones simples y acotar la parte imaginaria.

743. Hacer $x=yi$ y utilizar los resultados de los problemas 736 y 737.

744, 745. Emplear el resultado del problema 743.

746. Hacer $x=\frac{1+y}{1-y}$ y emplear el resultado del problema 744.

747. Multiplicar el polinomio por $1-x$ y, haciendo $|x|=\rho>1$, acotar el módulo de $(1-x)f(x)$.

Capítulo 6

FUNCIONES SIMETRICAS

772. Los lados del triángulo semejante al dado e inscrito en un círculo de radio 1/2, son iguales a los senos de los ángulos del triángulo dado.

800. Calcular primero la suma

$$\sum_{i=1}^{n}(x+x_i)^k,$$

poner después $x=x_j$ y sumar respecto de j desde 1 hasta n. Finalmente, quitar los sumandos que sobran y dividir por 2.

801. Se resuelve como el problema 800.

805. Cada raíz primitiva de la unidad de orden n, al elevarla a la m-ésima potencia, da una raíz primitiva de orden $\frac{n}{d}$, donde d es el máximo común divisor de m y n. Como resultado de esta operación, efectuada sobre todas las raíces primitivas de 1 de orden n, se obtienen una misma cantidad de veces todas las raíces primitivas de orden $\frac{n}{d}$.

806. Emplear los resultados de los problemas 805, 117 y 119.

807. Hay que hallar la ecuación cuyas raíces sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para esto hay que emplear las fórmulas de Newton o las expresiones de los coeficientes mediante las sumas de potencias en forma de determinantes (problema 803).

808. El problema se resuelve fácilmente mediante las fórmulas de Newton o expresando las sumas de potencias mediante las funciones simétricas fundamentales en forma de determinantes (problema 802). Sin embargo, es más fácil multiplicar la ecuación por $(x-a)\cdot(x-b)$ y calcular las sumas de potencias para la ecuación nueva.

809. Lo más fácil es multiplicar la ecuación por $(x-a)\cdot(x-b)$.

818. Considerar que las raíces del polinomio $f(x)$ son variables independientes. Multiplicar el determinante de los coeficientes de los residuos por el determinante de Vandermonde.

819. Ante todo, demostrar que todos los polinomios ψ_k son de grado $n-1$. Multiplicar después el determinante de los coeficientes de ψ_k por el determinante de Vandermonde.

820. Se resuelve como el problema 819.

827. Emplear el hecho de que las m-ésimas potencias de las raíces primitivas de 1 de n-ésimo orden recorren todas las raíces primitivas de 1 de orden $\frac{n}{d}$, donde d es el máximo común divisor de m y n.

828. Emplear el resultado del problema 827 y el hecho de que $R(X_m, X_n)$ es divisor de $R(X_m, x^n-1)$ y $R(X_n, x^m-1)$.

834, 835. Calcular $R(f', f)$.

839. Multiplicar por $x-1$.

840. Multiplicar por $x-1$ y emplear el resultado del problema 835.

843. Calcular $R(X_n, X_n')$. Al calcular los valores de X_n' en las raíces de X_n, expresar X_n en la forma

$$(x^n-1)\prod(x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)},$$

considerando que d recorre los divisores propios de n.

844. Emplear la relación $E_n'=E_n-x^n$.

845. Emplear la relación

$$(nx-x-a)F_n-x(x+1)F_n'+\frac{(a-1)\ldots(a-n)}{n!}=0.$$

846. Emplear las relaciones:

$$P_n=xP_{n-1}-(n-1)P_{n-2}; \qquad P_n'=nP_{n-1}.$$

847. Emplear las relaciones:

$$xP_n'=nP_n+n^2P_{n-1}; \qquad P_n=(x-2n+1)P_{n-1}-(n-1)^2P_{n-2}.$$

848. Emplear las relaciones:

$$(4-x^2)P_n'+nxP_n=2nP_{n-1}; \qquad P_n-xP_{n-1}+P_{n-2}=0.$$

849. Emplear las relaciones:

$$P_n - 2xP_{n-1} + (x^2+1)\,P_{n-2} = 0; \qquad P_n' = (n+1)\,P_{n-1}.$$

850. Emplear las relaciones:

$$P_n - (2n-1)\,xP_{n-1} + (n-1)^2\,(x^2+1)\,P_{n-2} = 0; \qquad P_n' = n^2 P_{n-1}.$$

851. Emplear las relaciones:

$$P_n - (2nx+1)\,P_{n-1} + n\,(n-1)\,x^2 P_{n-2} = 0; \qquad P_n' = (n+1)\,nP_{n-1}.$$

852. Resolver el problema por el método de los multiplicadores de Lagrange. Escribir el resultado de igualar a cero las derivadas en forma de una ecuación diferencial respecto del polinomio que da el máximo, y resolver la ecuación por el método de los coeficientes indeterminados.

867. Mostrar, ante todo, que para un n dado sólo existe una cantidad finita de ecuaciones con la propiedad indicada. Mostrar después que no dejan de subsistir las propiedades al hacer la transformación $y=x^m$.

Capítulo 7

ALGEBRA LINEAL

884. Emplear los resultados de los problemas 51, 52.

916. Se debe buscar el ángulo mínimo entre los ángulos formados por los vectores del segundo plano con sus proyecciones ortogonales sobre el primer plano.

917. Tomar un cubo en el sistema de coordenadas con el origen en el centro y con los ejes paralelos a las aristas. Admitir después por ejes cuatro diagonales ortogonales entre sí.

918. Emplear el resultado del problema 907.

920. Demostrar por inducción.

921. Emplear el hecho de que $V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k] = V[A_1, \ldots, A_m] \times$ $\times V[B_1, \ldots, B_k]$, si $A_i \perp B_j$, y el resultado del problema anterior.

933. Primeramente, hallar los números característicos para el cuadrado de la matriz. Después, para determinar los signos al extraer la raíz cuadrada, emplear el hecho de que la suma de los números característicos es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal y que el producto de los números característicos es igual al determinante. Aplicar los resultados de los problemas 126 y 299.

934. Emplear el resultado del problema 933

936. Emplear los resultados de los problemas 537 y 930.

943. 1) Emplear el hecho de que el determinante de la transformación triangular es igual a la unidad.

2) Hacer

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0.$$

945. Tomar por nueva variable independiente la forma lineal cuyo cuadrado se añade a la forma cuadrática.

946. Separar un cuadrado de la forma f y emplear el resultado del problema 945.

948. Examinar la forma cuadrática en las indeterminadas $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$f = \sum_{k=1}^{n} (u_1 + u_2 x_k + \ldots + u_n x_k^{n-1})^2,$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las raíces de la ecuación dada.

950. Descomponer f y φ en sumas de cuadrados y emplear el hecho de que la operación (f, φ) es distributiva.

965. En la demostración del teorema inverso emplear el desarrollo $X=AX+(E-A)X$.

966. Escribir la matriz de la proyección en la base que se obtiene al reunir las bases ortonormales de P y Q.

967. Convencerse de que $AX \cdot X=0$ para cualquier vector real X. Descomponer el número característico y el vector propio en las partes real e imaginaria.

968. Multiplicar la matriz A a la derecha por P, a la izquierda por P^{-1}, donde P es una matriz ortogonal cuyas dos primeras columnas están formadas por las partes real e imaginaria normalizadas del vector propio.

970, 971. Emplear el hecho de que para una matriz ortogonal A, $AX \cdot AY=X \cdot Y$ para cualesquiera vectores reales X e Y.

972. Se demuestra basándose en los resultados de los problemas 970, 971 y del mismo modo que el problema 968, basándose en el resultado del problema 967.

975, 976. Pasar a la forma canónica de Jordan.

978. Ligar con la solución del problema anterior.

980. La condición necesaria, véase en el problema 473.

Para demostrar que es suficiente, considerar primero el caso en que todos los elementos diagonales de la matriz C son iguales a cero. Emplear luego el hecho de que, si $C=XY-YX$, entonces

$$S^{-1}CS=(S^{-1}XS)(S^{-1}YS)-(S^{-1}YS)(S^{-1}XS).$$

TERCERA PARTE

RESPUESTAS Y RESOLUCIONES

Capítulo 1

NUMEROS COMPLEJOS

1. $x=-\frac{4}{11}$; $y=\frac{5}{11}$.

2. $x=-2$; $y=\frac{3}{2}$; $z=2$; $t=-\frac{1}{2}$.

3. 1, si $n=4k$; i, si $n=4k+1$; -1, si $n=4k+2$; $-i$, si $n=4k+3$; k es un número entero.

5. a) $117+44i$; b) -556; c) $-76i$.

6. En el caso, y sólo en el caso, en que:
1) ninguno de los factores es igual a cero;
2) los factores tienen la forma $(a+bi)$ y $\lambda(b+ai)$, donde λ es un número real.

7. a) $\cos 2\alpha+i\operatorname{sen}2\alpha$; b) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+i\frac{2ab}{a^2+b^2}$; c) $\frac{44-5i}{318}$; d) $\frac{-1-32i}{25}$; e) 2.

8. $2i^{n-1}$.

9. a) $x=1+i$, $y=i$; b) $x=2+i$, $y=2-i$;
c) $x=3-11i$, $y=-3-9i$, $z=1-7i$.

10. a) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) 1.

11. a) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)$; b) a^3+b^3;
c) $2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+12abc$;
d) a^2-ab+b^2.

12. a) $0,\ 1,\ -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; b) $0,\ 1,\ i,\ -1,\ -i$.

15. a) $\pm(1+i)$; b) $\pm(2-2i)$; c) $\pm(2-i)$; d) $\pm(1+4i)$;
e) $\pm(1-2i)$; f) $\pm(5+6i)$; g) $\pm(1+3i)$; h) $\pm(1-3i)$;
i) $\pm(3-i)$; j) $\pm(3+i)$; k) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$;
l) $\pm\sqrt{8+2\sqrt{17}}\pm i\sqrt{-8+2\sqrt{17}}$; m) $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$;
n) $\frac{\sqrt{2}(\pm 1\pm i)}{2}$; o) $i^{\alpha}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)$, $\alpha=0,1,2,3$.

16. $\pm(\beta-\alpha i)$.

17. a) $x_1=3-i$; $x_2=-1+2i$; b) $x_1=2+i$; $x_2=1-3i$;

c) $x_1=1-i;\quad x_2=\dfrac{4-2i}{5}$.

18. a) $1\pm 2i;\quad -4\pm 2i;\quad (x^2-2x+5)(x^2+8x+20)$;

b) $2\pm i\sqrt{2};\quad -2\pm 2i\sqrt{2};\quad (x^2-4x+6)(x^2+4x+12)$.

19. a) $x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}\pm\dfrac{i}{2}$; b) $\pm 4\pm i$.

20. $\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{q}}{2}-\dfrac{p}{4}}\pm i\sqrt{\dfrac{\sqrt{q}}{2}+\dfrac{p}{4}}$.

22. a) $\cos 0+i\operatorname{sen}0$; b) $\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi$; c) $\cos\dfrac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$;

d) $\cos\dfrac{3\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}$; e) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$;

f) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$; g) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

h) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$; i) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$;

j) $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right)$; k) $2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right)$;

l) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{3}\right)$; m) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$;

n) $3(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)$; o) $2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$;

p) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Observación. Aquí se expone uno de los valores posibles del argumento.

23. a) $\sqrt{10}\,(\cos 18^\circ 26'+i\operatorname{sen}18^\circ 26')$;

b) $\sqrt{17}\,(\cos 345^\circ 57'48''+i\operatorname{sen}345^\circ 57'48'')$;

c) $\sqrt{5}\,(\cos 153^\circ 26'6''+i\operatorname{sen}153^\circ 26'6'')$;

d) $\sqrt{5}\,(\cos 243^\circ 26'6''+i\operatorname{sen}243^\circ 26'6'')$.

24. a) Una circunferencia de radio 1 con el centro en el origen de coordenadas.

b) Un rayo que parte del origen de coordenadas formando un ángulo $\dfrac{\pi}{6}$ con la dirección positiva del eje real.

25. a) El interior del círculo de radio 2 con el centro en el origen de coordenadas.

b) El interior y el contorno del círculo de radio 1 con el centro en el punto (0, 1).

c) El interior del círculo de radio 1 con el centro en el punto (1, 1).

26. a) $x=\dfrac{3}{2}-2i$; b) $x=\dfrac{3}{4}+i$.

27. La identidad expresa el conocido teorema de geometría: la suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

29. Si la diferencia de los argumentos de estos números es igual a $\pi+2k\pi$, donde k es un número entero.

30. Si la diferencia de los argumentos de estos números es igual a $2k\pi$, donde k es un número entero.

34. $\cos(\varphi+\psi)+i\operatorname{sen}(\varphi+\psi)$.

35. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\operatorname{sen}\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

36. a) $2^{12}(1+i)$; b) $2^{9}(1-i\sqrt{3})$; c) $(2-\sqrt{3})^{12}$; d) -64.

38. $\cos\frac{n\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$.

39. $2\cos\frac{2n\pi}{3}$.

40. Solución. $1+\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+$

$$+2i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$(1+\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)^n=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\frac{n\alpha}{2}\right).$$

43. a) $-i$; $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$;

b) $-1+i$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$; $\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$;

c) $1+i$; $1-i$; $-1+i$; $-1-i$;

d) 1; -1; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $i\sqrt{3}$; $-i\sqrt{3}$; $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.

44. a) $\sqrt[6]{5}\,(\cos 8°5'18''+i\operatorname{sen}8°5'18'')\,\varepsilon_k$, donde $\varepsilon_k=\cos 120°k+i\operatorname{sen}120°k$, $k=0, 1, 2$;

b) $\sqrt[6]{10}\,(\cos 113°51'20''+i\operatorname{sen}113°51'20'')\,\varepsilon_k$, donde $\varepsilon_k=\cos 120°k+$ $+i\operatorname{sen}120°k$, $k=0, 1, 2$;

c) $\sqrt[10]{13}\,(\cos 11°15'29''+i\operatorname{sen}11°15'29'')\,\varepsilon_k$, donde $\varepsilon_k=\cos 72°k+i\operatorname{sen}72°k$, $k=0, 1, 2, 3, 4$.

45. a) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+19}{72}\pi+i\operatorname{sen}\frac{24k+19}{72}\pi\right)$, donde $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$;

b) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{96}\pi+i\operatorname{sen}\frac{24k+5}{96}\pi\right)$, donde $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

c) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+17}{72}\pi+i\operatorname{sen}\frac{24k+17}{72}\pi\right)$; donde $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

46. $\beta\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$, donde $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

47. a) Solución. Consideremos $(\cos x+i\operatorname{sen}x)^5$. Según la fórmula de Moivre

$$(\cos x+i\operatorname{sen}x)^5=\cos 5x+i\operatorname{sen}5x.$$

Por otra parte,

$$(\cos x+i\operatorname{sen}x)^5=\cos^5 x+5i\cos^4 x\operatorname{sen}x-10\cos^3 x\operatorname{sen}^2 x-10i\cos^2 x\operatorname{sen}^3 x+$$
$$+5\cos x\operatorname{sen}^4 x+i\operatorname{sen}^5 x=(\cos^5 x-10\cos^3 x\operatorname{sen}^2 x+5\cos x\operatorname{sen}^4 x)+$$
$$+i\,(5\cos^4 x\operatorname{sen}x-10\cos^2 x\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen}^5 x).$$

Comparando los resultados, se tiene:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos x \operatorname{sen}^4 x;$$

b) $\cos^8 x - 28 \cos^6 x \operatorname{sen}^2 x + 70 \cos^4 x \operatorname{sen}^4 x - 28 \cos^2 x \operatorname{sen}^6 x + \operatorname{sen}^8 x;$

c) $6 \cos^5 x \operatorname{sen} x - 20 \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x + 6 \cos x \operatorname{sen}^5 x;$

d) $7 \cos^6 x \operatorname{sen} x - 35 \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x + 21 \cos^2 x \operatorname{sen}^5 x - \operatorname{sen}^7 x.$

48. $\dfrac{2(3 \operatorname{tg} \varphi - 10 \operatorname{tg}^3 \varphi + 3 \operatorname{tg}^5 \varphi)}{1 - 15 \operatorname{tg}^2 \varphi + 15 \operatorname{tg}^4 \varphi - \operatorname{tg}^6 \varphi}.$

49. $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \operatorname{sen}^4 x - \ldots + M,$

donde $M = (-1)^{\frac{n}{2}} \operatorname{sen}^n x$, si n es par, y

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x, \text{ si } n \text{ es impar.}$$

$$\operatorname{sen} nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x - C_n^3 \cos^{n-3} x \operatorname{sen}^3 x + \ldots + M,$$

donde $M = (-1)^{\frac{n-2}{2}} n \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x$, si n es par, y

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen}^n x, \text{ si } n \text{ es impar.}$$

50. a) Solución. Sea $\alpha = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Entonces

$$\alpha^{-1} = \cos x - i \operatorname{sen} x;$$

$$\alpha^k = \cos kx + i \operatorname{sen} kx; \quad \alpha^{-k} = \cos kx - i \operatorname{sen} kx.$$

De aquí se tiene $\cos kx = \dfrac{\alpha^k + \alpha^{-k}}{2}$; $\operatorname{sen} kx = \dfrac{\alpha^k - \alpha^{-k}}{2i}$.

En particular, $\cos x = \dfrac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}$; $\operatorname{sen} x = \dfrac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}$;

$$\operatorname{sen}^3 x = \left(\frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}\right)^3 = \frac{\alpha^3 - 3\alpha + 3\alpha^{-1} - \alpha^{-3}}{-8i} = \frac{(\alpha^3 - \alpha^{-3}) - 3(\alpha - \alpha^{-1})}{-8i};$$

$$\operatorname{sen}^3 x = \frac{2i \operatorname{sen} 3x - 6i \operatorname{sen} x}{-8i} = \frac{3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{4};$$

b) $\dfrac{\cos 4x - 4 \cos 2x + 3}{8}$; c) $\dfrac{\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x}{16}$;

d) $\dfrac{\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10}{32}$.

52. Solución.

$$C_{m-p}^p + C_{m-p-1}^{p-1} = \frac{(m-p)(m-p-1)\ldots(m-2p+1)}{p!} +$$

$$+ \frac{(m-p-1)\ldots(m-2p+1)}{(p-1)!} = \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{p!}.$$

Hagamos las notaciones $2 \cos mx = S_m$; $2 \cos x = a$. Entonces la igualdad que nos interesa puede escribirse así:

$$S_m = a^m - ma^{m-2} + (C_{m-2}^2 + C_{m-3}^1) a^{m-4} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^p (C_{m-p}^p + C_{m-p-1}^{p-1}) a^{m-2p} + \ldots$$

Fácilmente se demuestra que

$$2\cos mx = 2\cos x \cdot 2\cos(m-1)x - 2\cos(m-2)x,$$

o, en las notaciones admitidas, $S_m = aS_{m-1} - S_{m-2}$.

Es fácil comprobar que para $m=1$ y $m=2$ es cierta la igualdad en cuestión. Supongamos que

$$S_{m-1} = a^{m-1} - (m-1)\,a^{m-3} + (C_{m-3}^{2} + C_{m-4}^{1})\,a^{m-5} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^p\,(C_{m-p-1}^{p} + C_{m-p-2}^{p-1})\,a^{m-2p-1} + \ldots;$$

$$S_{m-2} = a^{m-2} - (m-2)\,a^{m-4} + (C_{m-4}^{2} + C_{m-5}^{1})\,a^{m-6} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{p-1}\,(C_{m-p-1}^{p-1} + C_{m-p-2}^{p-2})\,a^{m-2p} + \ldots$$

Entonces $S_m = a^m - ma^{m-2} + \ldots$

$$\ldots + (-1)^p\,(C_{m-p-1}^{p} + C_{m-p-2}^{p-1} + C_{m-p-1}^{p-1} + C_{m-p-2}^{p-2})\,a^{m-2p} + \ldots$$

Teniendo en cuenta que $C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}$, se obtiene el resultado pedido.

53. $\dfrac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = (2\cos x)^{m-1} - C_{m-2}^{1}\,(2\cos x)^{m-3} +$

$+ C_{m-3}^{2}\,(2\cos x)^{m-5} - \ldots + (-1)^p\,C_{m-p-1}^{p}\,(2\cos x)^{m-2p-1} + \ldots$

54. a) $2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}$; b) $2^{\frac{n}{2}}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}$.

56. $\dfrac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{6}$.

59. a) Solución.

$$S = 1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^k\cos k\varphi.$$

Formemos $T = a\operatorname{sen}\varphi + a^2\operatorname{sen} 2\varphi + \ldots + a^k\operatorname{sen} k\varphi$;

$$S + Ti = 1 + a(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) + a^2(\cos 2\varphi + i\operatorname{sen} 2\varphi) + \ldots$$
$$\ldots + a^k(\cos k\varphi + i\operatorname{sen} k\varphi).$$

Haciendo $\alpha = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi$, se tiene

$$S + Ti = 1 + a\alpha + a^2\alpha^2 + \ldots + a^k\alpha^k = \frac{a^{k+1}\alpha^{k+1} - 1}{a\alpha - 1}.$$

S es igual a la parte real de la suma obtenida. Se tiene

$$S + Ti = \frac{a^{k+1}\alpha^{k+1} - 1}{a\alpha - 1}\cdot\frac{a\alpha^{-1} - 1}{a\alpha^{-1} - 1} = \frac{a^{k+2}\alpha^{k} - a^{k+1}\alpha^{k+1} - a\alpha^{-1} + 1}{a^2 - a(\alpha + \alpha^{-1}) + 1}.$$

De aquí

$$S = \frac{a^{k+2}\cos k\varphi - a^{k+1}\cos(k+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}.$$

b) $\dfrac{a^{k+2}\operatorname{sen}(\varphi + kh) - a^{k+1}\operatorname{sen}[\varphi + (k+1)h] - a\operatorname{sen}(\varphi - h) + \operatorname{sen}\varphi}{a^2 - 2a\cos h + 1}$.

c) $\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{2n+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}$.

60. Solución.

$$T=\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} nx;$$
$$S=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx.$$

Sea $\alpha=\cos\frac{x}{2}+i\operatorname{sen}\frac{x}{2}$. Entonces $S+Ti=\alpha^2+\alpha^4+\cdots+\alpha^{2n}$,

$$S+Ti=\alpha^2\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}=\alpha^2\frac{\alpha^n(\alpha^n-\alpha^{-n})}{\alpha(\alpha-\alpha^{-1})}=\left(\cos\frac{n+1}{2}x+i\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{n}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

De aquí $T=\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\frac{\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$.

61. $\frac{2(2-\cos x)}{5-4\cos x}$.

64. a) $\frac{\operatorname{sen}\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, si n es par,

$\frac{\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\cos\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, si n es impar;

b) $\frac{\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\operatorname{sen}-\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, si n es par,

$\frac{\operatorname{sen}\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\cos\frac{nh}{2}}{\cos\frac{h}{2}}$, si n es impar.

66. a) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{n+2}{2}x$; b) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x$.

67. a) $2^n\operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi-(n+2)x}{2}$; b) $2^n\operatorname{sen}^n\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{(n+2)x-n\pi}{2}$.

68. El límite de la suma es igual al vector que se representa por el número $\frac{3+i}{5}$.

69. $\frac{n}{2}-\frac{\operatorname{sen} 4nx}{4\operatorname{sen} 2x}$.

71. a) $\frac{3\cos\frac{n+1}{2}x\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{4\operatorname{sen}\frac{x}{2}}+\frac{\cos\frac{3(n+1)}{2}x\operatorname{sen}\frac{3nx}{2}}{4\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}$;

b) $\dfrac{3\operatorname{sen}\dfrac{n+1}{2}x\operatorname{sen}\dfrac{nx}{3}}{4\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}-\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{3(n+1)}{2}x\operatorname{sen}\dfrac{3nx}{2}}{4\operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}}$.

72. a) $\dfrac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}}$;

b) $\dfrac{(n+1)\operatorname{sen} nx-n\operatorname{sen}(n+1)x}{4\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}}$.

73. $e^a(\cos b+i\operatorname{sen} b)$.

75. a) -3; $\dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$; b) -3; $\dfrac{3\pm 5i\sqrt{3}}{2}$;

c) -7; $-1\pm i\sqrt{3}$; d) -1; $\dfrac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{2}$; e) 2; $-1\pm\sqrt{3}$;

f) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})$;

g) $\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}$; $\dfrac{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3})$;

h) $1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; $\dfrac{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})$;

i) $-(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$; $\dfrac{-2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})$;

j) 2; $-1\pm 2i\sqrt{3}$; k) 2; $-1\pm 3i\sqrt{3}$; l) 2; $-1\pm 4i\sqrt{3}$;
m) 1; $-2\pm\sqrt{3}$; n) 4; $-1\pm 4i\sqrt{3}$; o) $-2i$; i; i;

p) $-1-i$; $-1-i$; $2+2i$; q) $-(a+b)$; $\dfrac{a+b}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(a-b)$;

r) $-(a\sqrt[3]{f^2g}+b\sqrt[3]{fg^2})$; $\dfrac{a\sqrt[3]{f^2g}+b\sqrt[3]{fg^2}}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}(a\sqrt[3]{f^2g}-b\sqrt[3]{fg^2})$;

s) $2{,}1149$; $-0{,}2541$; $-1{,}8608$; t) $1{,}5981$; $0{,}5115$; $-2{,}1007$.

76. Solución.

$$x_1-x_2=\alpha(1-\omega)+\beta(1-\omega^2)=(1-\omega)(\alpha-\beta\omega^2);$$
$$x_1-x_3=\alpha(1-\omega^2)+\beta(1-\omega)=(1-\omega^2)(\alpha-\beta\omega);$$
$$x_2-x_3=\alpha(\omega-\omega^2)+\beta(\omega^2-\omega)=(\omega-\omega^2)(\alpha-\beta);$$
$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)=3(\omega-\omega^2)(\alpha^3-\beta^3);$$
$$(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-27[(\alpha^3+\beta^3)^2-4\alpha^3\beta^3]=-27q^2-4p^3.$$

77. Solución.

La ecuación cúbica que se mencionaba en la indicación es $z^3-3(px+q)z+x^3+p^3-3qx-3pq+0$, la cual tiene la raíz trivial $z=-(x+p)$. Las demás raíces de esta ecuación son $z_{2,3}=\dfrac{x+p\pm\sqrt{-3(x-p)^2+12q}}{2}$. En virtud del problema 76, el primer miembro de la ecuación en cuestión puede expresarse en la forma

$$-\frac{1}{27}(z_2-z_3)^2(z_3-z_1)^2(z_1-z_2)^2=$$

$$=-\frac{1}{27}[-3(x-p)^2+12q]\left[\frac{3(x+p)+\sqrt{-3(x-p)^2+12q}}{2}\right]^2\times$$

$$\times\left[\frac{3(x+p)-\sqrt{-3(x-p)^2+12q}}{2}\right]^2=[(x-p)^2-4q](x^2+px+p^2-q)^2,$$

de donde fácilmente se hallan las raíces:

$$x_{1,2}=p\pm 2\sqrt{q};\quad x_3=x_4=\frac{-p+\sqrt{4q-3p^2}}{2};$$

$$x_5=x_6=\frac{-p-\sqrt{4q-3p^2}}{2}.$$

78. El primer miembro se expresa en la forma

$$\alpha^5+\beta^5+5(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-a)(\alpha\beta-a)-2b=0.$$

Respuesta. $x=\alpha+\beta$, donde

$$\alpha=\sqrt[5]{b+\sqrt{b^2-a^5}};\quad \beta=\sqrt[5]{b-\sqrt{b^2-a^5}};\quad \alpha\beta=a.$$

79. a) $\pm\sqrt{2}$; $1\pm i\sqrt{3}$; b) $-1\pm\sqrt{6}$; $\pm i\sqrt{3}$;

c) $\pm\sqrt{2}$; $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$;

e) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$; $1\pm i$ f) $\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$; $\frac{5\pm i\sqrt{7}}{2}$;

g) $\pm i$; $1\pm i\sqrt{2}$; h) $\pm\sqrt{5}$; $\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$;

i) $\pm i$; $-1\pm i\sqrt{6}$; j) $-2\pm 2\sqrt{2}$; $-1\pm i$;

k) 1; 3; $1\pm\sqrt{2}$; l) 1; -1; $1\pm 2i$;

m) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{22+2\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{22-2\sqrt{5}}}{4}$;

n) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}$;

o) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1-2\sqrt{2}}$; $\frac{1-\sqrt{2}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1+2\sqrt{2}}$;

p) $1+\sqrt{7}\pm\sqrt{6+2\sqrt{7}}$; $1-\sqrt{7}\pm\sqrt{6-2\sqrt{7}}$;

q) $\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$; $\frac{1\pm\sqrt{-4\sqrt{3}-3}}{2}$;

r) $\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-2-6\sqrt{5}}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{-2+6\sqrt{5}}}{4}$;

s) $\frac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{-5+2\sqrt{2}}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{-5-2\sqrt{2}}}{4}$;

t) $\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{3}\pm\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{4}$.

80. Solución.

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}+mx+n\right)\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}-mx-n\right);$$

$$x_1x_2=\frac{\lambda}{2}+n;\quad x_3x_4=\frac{\lambda}{2}-n;\quad \lambda=x_1x_2+x_3x_4.$$

81. a) ± 1; b) 1; $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) ± 1; $\pm i$;

d) ± 1; $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) ± 1; $\pm i$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$;

f) ± 1; $\pm i$; $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$;

g) ± 1; $\pm i$; $\pm\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$;

$\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

82. a) -1; b) $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\pm i$; d) $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$; f) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$;

g) $\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

83. a) 20; 20; 180; b) 72; 144; 12.

84. $\cos\frac{2k\pi}{7}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{7}$, donde $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$.

85. a) Haciendo la notación $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{16}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{16}$, resulta que:

al exponente 1 pertenece ε_0;
al exponente 2 pertenece ε_8;
al exponente 4 pertenecen ε_4, ε_{12};
al exponente 8 pertenecen ε_2, ε_6, ε_{10}, ε_{14};

las raíces primitivas de 16-ésimo orden son ε_1, ε_3, ε_5, ε_7, ε_9, ε_{11}, ε_{13}, ε_{15}.

b) Haciendo la notación $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{20}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{20}$, resulta que:

al exponente 1 pertenece ε_0;
al exponente 2 pertenece ε_{10};
al exponente 4 pertenecen ε_5, ε_{15};
al exponente 5 pertenecen ε_4, ε_8, ε_{12}, ε_{16};
al exponente 10 pertenecen ε_2, ε_6, ε_{14}, ε_{18};

las raíces primitivas de 20-ésimo orden son ε_1, ε_3, ε_7, ε_9, ε_{11}, ε_{13}, ε_{17}, ε_{19}.

c) Haciendo la notación $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{24}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{24}$, resulta que:

al exponente 1 pertenece ε_0;
al exponente 2 pertenece ε_{12};

al exponente 3 pertenecen ε_8, ε_{16};
al exponente 4 pertenecen ε_6, ε_{18};
al exponente 6 pertenecen ε_4, ε_{20};
al exponente 8 pertenecen ε_3, ε_9, ε_{15}, ε_{21};
al exponente 12 pertenecen ε_2, ε_{10}, ε_{14}, ε_{22};
las raices primitivas de 24-ésimo orden son ε_1, ε_5, ε_7, ε_{11}, ε_{13}, ε_{17}, ε_{19}, ε_{23}.

86. a) $X_1(x)=x-1$; b) $X_2(x)=x+1$;
c) $X_3(x)=x^2+x+1$; d) $X_4(x)=x^2+1$;
e) $X_5(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$; f) $X_6(x)=x^2-x+1$;
g) $X_7(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$;
h) $X_8(x)=x^4+1$; i) $X_9(x)=x^6+x^3+1$;
j) $X_{10}(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$;
k) $X_{11}(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$;
l) $X_{12}(x)=x^4-x^2+1$;
m) $X_{15}(x)=x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$;
n) $X_{105}(x)=x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+$
$+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-$
$-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1.$

87. $\frac{2}{1-\varepsilon}$.

88. 0, si $n>1$.

89. n, si k es divisible por n; 0, si k no es divisible por n.

90. $m(x^m+1)$.

91. $-\frac{n}{1-\varepsilon}$, si $\varepsilon\neq 1$; $\frac{n(n+1)}{2}$, si $\varepsilon=1$.

92. $-\frac{n^2(1-\varepsilon)-2n}{(1-\varepsilon)^2}$, si $\varepsilon\neq 1$; $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, si $\varepsilon=1$.

93. a) $-\frac{n}{2}$; b) $-\frac{n}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.

94. a) 1; b) 0; c) -1.

95. $x_0=1$;

$$x_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$x_2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$x_3=\cos\frac{6\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{6\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};$$

$$x_4=\cos\frac{8\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{8\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

96. $\operatorname{sen}18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

97. Solución. Dividimos ambos miembros de la ecuación $x^6+x^5+x^4+$ $+x^3+x^2+x+1=0$ por x^3. Después de cierta transformación obtenemos:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

A la ecuación $z^3+z^2-2z-1=0$ satisface $z=2\cos\frac{4\pi}{7}=-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}$. De aquí que $t=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}$ satisface a la ecuación $t^3-t^2-2t+1=0$. La ecuación obtenida es la más sencilla, en el sentido de que cualquier otra ecuación con coeficientes racionales que tenga una raíz común con ella, tiene un grado superior. La demostración de esto requiere ciertos conocimientos de las secciones ulteriores del libro.

98. Solución. Sea $n=2m$, entonces la ecuación $x^n-1=0$ tiene dos raíces reales 1 y -1 y $2m-2$ imaginarias. Además, $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2m}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{2m}$ está conjugado con $\varepsilon_{2m-k}=\cos\frac{2(2m-k)\pi}{2m}+i\operatorname{sen}\frac{2(2m-k)\pi}{2m}$. Por lo tanto, se tiene:

$$x^{2m}-1=(x^2-1)(x-\varepsilon_1)(x-\bar{\varepsilon}_1)(x-\varepsilon_2)(x-\bar{\varepsilon}_2)\ldots(x-\varepsilon_{m-1})(x-\bar{\varepsilon}_{m-1});$$

$$x^{2m}-1=(x^2-1)[x^2-(\varepsilon_1+\bar{\varepsilon}_1)x+1]\ldots[x^2-(\varepsilon_{m-1}+\bar{\varepsilon}_{m-1})x+1];$$

$x^{2m}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m}+1\right)$. Si $n=2m+1$, de un modo análogo obtenemos:

$$x^{2m+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{m}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+1\right).$$

99. Solución. a) Se tiene

$$\frac{x^{2m}-1}{x^2-1}=\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{m}+1\right).$$

Haciendo $x=1$, obtenemos: $m=2^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{m}\right)$,

o $m=2^{2(m-1)}\prod_{k=1}^{m-1}\sin^2\frac{k\pi}{2m}$, y, finalmente,

$$\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}=\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{2m}.$$

La fórmula b) se obtiene de un modo análogo.

100. Solución. En la identidad $x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\varepsilon_k)$, donde $\varepsilon_k=$ $=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$, hacemos $x=-\frac{a}{b}$. Resulta

$$(-1)^n\frac{a^n}{b^n}-1=(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{b}+\varepsilon_k\right),$$

etc.

101. Obrando según la indicación, se tiene

$$\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta - \varepsilon_k),$$

$$\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta - \varepsilon_k).$$

Multiplicando las últimas igualdades, obtenemos el resultado pedido.

102. Solución.

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(t+\varepsilon_k)^n - 1}{t} = \frac{1}{t^n} \prod_{k=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1} (t+\varepsilon_k - \varepsilon_s) =$$

$$= \frac{1}{t^n} \prod_{k=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1} \left[t - \varepsilon_k\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_k} - 1\right)\right] = \frac{1}{t^n} \prod_{k=0}^{n-1}\prod_{s=0}^{n-1} [t - \varepsilon_k(\varepsilon_s - 1)] =$$

$$= \frac{1}{t^n} \prod_{s=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1} [t - \varepsilon_k(\varepsilon_s - 1)] = \frac{1}{t^n} \prod_{s=0}^{n-1} [t^n - (\varepsilon_s - 1)^n] = \prod_{k=1}^{n-1} [t^n - (\varepsilon_k - 1)^n].$$

103. Se tiene $|x| = |x|^{n-1}$, por consiguiente, $|x| = 0$ ó $|x| = 1$. Si $|x| = 0$, entonces $x = 0$. Si $|x| = 1$, entonces $x\bar{x} = 1$.

Por otra parte, $x\bar{x} = x^n$. Por consiguiente, $x^n = 1$. Por lo tanto,

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Lo recíproco se comprueba fácilmente.

104. Solución. Si z satisface a la ecuación dada, entonces $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \sqrt[n]{\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|}$.

El lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos dados están en una razón dada, es una circunferencia (en el caso particular, una recta).

105. a) Se tiene $\frac{x+1}{x-1} = \varepsilon_k$, donde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1$. De aquí que $x = \frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1}$. Transformando la última expresión, se obtiene, $x_k = i \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$;

b) $x_k = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$; c) $x_k = \frac{a}{\varepsilon_k \sqrt[n]{2} - 1}$,

donde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

106. Solución. Sea $A = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$. Entonces $\frac{1+ix}{1-ix} = \eta_k^2$, donde $\eta_k = \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{2m} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi + 2k\pi}{2m}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. De aquí que

$$x = \frac{\eta_k^2 - 1}{i(\eta_k^2 + 1)} = \frac{\eta_k - \eta_k^{-1}}{i(\eta_k + \eta_k^{-1})} = \operatorname{tg}\frac{\varphi + 2k\pi}{2m}.$$

107. Solución. Obrando según la indicación, se tiene:

$$S+Ti=\mu(1+\lambda x)^n \quad S-Ti=\bar{\mu}(1+\bar{\lambda} x)^n,$$

donde $\lambda=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$, $\mu=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi$. De aquí que

$$2S=\mu(1+\lambda x)^n+\bar{\mu}(1+\bar{\lambda}x)^n.$$

La ecuación toma la forma $\mu(1+\lambda x)^n+\bar{\mu}(1+\bar{\lambda}x)^n=0$;

$$x_k=-\frac{\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi-2\varphi}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi-2\varphi-2n\alpha}{2n}};\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

108. Solución. Sea $\alpha^a=1$, $\beta^b=1$. Entonces $(\alpha\beta)^{ab}=(\alpha^a)^b\cdot(\beta^b)^a=1$.

109. Solución. Sea ε la raíz común de x^a-1 y x^b-1; y sea s el exponente a que pertenece ε. Entonces s es un común divisor de a y b; s puede ser por ello solamente igual a 1 y $\varepsilon=1$. Lo recíproco es evidente.

110. Solución. Sean α_k y β_s las raíces de a-ésimo y b-ésimo grados de 1; $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ a-1$; $s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ b-1$. Según el problema 108, es suficiente mostrar que todos los $\alpha_k\beta_s$ son distintos. Supongamos que $\alpha_{k_1}\beta_{s_1}=\alpha_{k_2}\beta_{s_2}$. Entonces $\frac{\alpha_{k_1}}{\alpha_{k_2}}=\frac{\beta_{s_2}}{\beta_{s_1}}$, es decir, $\alpha_i=\beta_j$. Según el problema 109, $\alpha_i=\beta_j=1$, es decir, $k_1=k_2$, $s_1=s_2$.

111. Solución. Sean α y β raíces primitivas de 1, de órdenes a y b. Supongamos que $(\alpha\beta)^s=1$. Entonces $\alpha^{bs}=1$; $\beta^{as}=1$. Resulta que bs es divisible por a y as es divisible por b. Por consiguiente, s es divisible por ab.

Sea λ una raíz primitiva de 1, de orden ab. Entonces $\lambda=\alpha^k\beta^s$ (problema 110). Supongamos que α^k pertenece al exponente $a_1<a$. Entonces $\lambda^{a_1b}=(\alpha^k)^{a_1b}(\beta^s)^{a_1b}=1$, lo cual es imposible. Del mismo modo se puede demostrar que β^s es una raíz primitiva de 1, de orden b.

112. Se deduce directamente del problema 111.

113. Obrando según la indicación, escribamos todos los números que son múltiplos de p y no son superiores a p^α. A saber: $1\cdot p,\ 2\cdot p,\ 3\cdot p,\ \ldots,\ p^{\alpha-1}p$. Inmediatamente se ve que hay $p^{\alpha-1}$ números tales. De aquí que $\varphi(p^\alpha)=$ $=p^\alpha-p^{\alpha-1}=p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)$. Basándose en el problema 112,

$$\varphi(n)=\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right)\ldots\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

114. Solución. Si ε es una raíz primitiva de 1, de orden n, entonces $\bar{\varepsilon}$, que es el conjugado de ε, también es una raíz primitiva de 1, de orden n. Además, $\varepsilon\neq\pm 1$, puesto que $n>2$.

115. $X_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$.

116. $X_{p^m}(x)=x^{(p-1)p^{m-1}}+x^{(p-2)p^{m-1}}+\ldots+x^{p^{m-1}}+1$.

117. La indicación puede cumplirse inmediatamente según el problema 111. Sean $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{\varphi(n)}$ las raíces primitivas de 1, de orden n. Entonces $-\alpha_1,\ -\alpha_2,\ \ldots,\ -\alpha_{\varphi(n)}$ son raíces primitivas de 1, de orden $2n$. Se tiene $X_{2n}(x)=(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_{\varphi(n)})=(-1)^{\varphi(n)}(-x-\alpha_1)\ldots(-x-\alpha_{\varphi(n)})$, o (problema 114) $X_{2n}(x)=X_n(-x)$.

118. Solución. Sea $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{nd}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{nd}$ una raíz primitiva de 1, de orden nd, de modo que k y n son primos entre sí. Dividamos k por n, obtenemos $k=nq+r$, donde $0<r<n$. De aquí que $\varepsilon_k=\cos\frac{2q\pi+\frac{2r\pi}{n}}{d}+$

$+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2q\pi+\dfrac{2r\pi}{n}}{d}$, es decir, ε_k es uno de los valores de la raíz de grado d de $\eta_r=\cos\dfrac{2r\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2r\pi}{n}$; η_r es una raíz primitiva de 1 de orden n, puesto que todo divisor común de r y n es un divisor común de k y n.

Supongamos ahora que $\eta_r=\cos\dfrac{2r\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2r\pi}{n}$ es una raíz primitiva de 1, de orden n, de modo que r y n son primos entre sí.

Formemos $\varepsilon_q=\cos\dfrac{2q\pi+\dfrac{2r\pi}{n}}{d}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2q\pi+\dfrac{2r\pi}{n}}{d}=\cos\dfrac{2\pi(r+nq)}{nd}+$

$+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi(r+nq)}{nd}$, donde $q=0, 1, 2, \ldots, d-1$. ε_q es una raíz primitiva de 1, de orden nd. En efecto, si $r+nq$ y nd fuesen divisibles ambos por cierto número primo p, entonces serían divisibles por p los números n y r, lo cual es imposible.

119. Solución. Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n')}$ las raíces primitivas de 1, de orden n'. Entonces $X_{n'}(x^{n''})=\prod\limits_{k=1}^{\varphi(n')}(x^{n''}-\varepsilon_k)$. Supongamos luego que $(x-\varepsilon_{k,1})(x-\varepsilon_{k,2})\ldots(x-\varepsilon_{k,n''})$ es la descomposición de $x^{n''}-\varepsilon_k$ en factores lineales. Entonces $X'_n(x^{n''})=\prod\limits_{\substack{k=1\\ i=1}}^{\substack{k=\varphi(n')\\ i=n''}}(x-\varepsilon_{k,i})$. Según el problema 118, cada factor lineal $x-\varepsilon_{k,i}$ figura en la descomposición de $X_n(x)$, y recíprocamente. Como, además, $\varphi(n)=n''\varphi(n')$, los grados de $X_n(x)$ y $X_{n'}(x^{n''})$ son iguales.

121. Solución. La suma de todas las raíces de 1 de grado n es igual a 0. Como cada raíz de 1 de n-ésimo grado pertenece al exponente d, el cual es un divisor de n, y recíprocamente, se tiene $\sum\limits_{d|n}\mu(d)=0$.

122. Solución. Supongamos que $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2k\pi}{n}$ pertenece al exponente n_1. Entonces el factor $x-\varepsilon_k$ figurará en tales, y sólo en tales binomios x^d-1, en los que d es divisible por n_1. Además, si d recorre todos los divisores de n que son múltiplos de n_1, $\dfrac{n}{d}$ recorre todos los divisores de $\dfrac{n}{n_1}$.

Por lo tanto, $x-\varepsilon_k$ figurará en el segundo miembro con el exponente $\sum\limits_{d\,\big/\frac{n}{n_1}}\mu(d_1)$.

La suma esta es igual a 0 si $\dfrac{n}{n_1}\neq 1$, y es igual a 1 si $n=n_1$.

123. Solución. Si $n=p^\alpha$, donde p es primo, entonces $X_n(1)=p$. Si $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son primos distintos, entonces (problema 119) $X_n(1)=X_{n'}(1)$, donde $n'=p_1p_2\ldots p_k$.

Supongamos ahora que $n=p_1p_2 \ldots p_k$, $k\geqslant 2$, $n_1=\frac{n}{p_k}$. Obsérvese que para obtener todos los divisores de n es suficiente añadir a todos los divisores de n_1 sus productos por p_k. Por esto

$$X_n(x)=\prod_{d/n}(x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}=\prod_{d/n_1}(x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}\cdot\prod_{d/n_1}(x^{dp_k}-1)^{\mu\left(\frac{n}{dp_k}\right)}=$$

$=[X_{n_1}(x)]^{-1}\cdot X_{n_1}(x^{p_k})$.

De aquí que $X_n(1)=1$.

124. Solución. 1) Supongamos que n es impar, mayor que la unidad. Entonces (problema 117) $X_n(-1)=X_{2n}(1)=1$.

2) Supongamos que $n=2^k$, entonces $X_n=\dfrac{x^n-1}{x^{\frac{n}{2}}-1}=x^{\frac{n}{2}}+1$

y $X_n(-1)$ es igual a 0 si $k=1$, e igual a 2 si $k>1$.

3) Supongamos que $n=2n_1$, donde n_1 es impar, mayor que la unidad. Entonces (problema 117) $X_n(-1)=X_{n_1}(1)$ y, por consiguiente, $X_n(-1)$ es igual a p si $n_1=p^\alpha$ (p es primo) y es igual a 1 si $n_1\neq p^\alpha$.

4) Supongamos que $n=2^kn_1$, donde $k>1$, y que $n_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_s$ son números primos impares distintos). En este caso (problema 119)

$$X_n(x)=X_{2p_1p_2\ldots p_s}(x^\lambda), \text{ donde } \lambda=2^{k-1}p_{p_1}^{\alpha_1-1}\ldots p_s^{\alpha_s-1}.$$

De aquí se deduce que $X_n(-1)=X_n(1)=1$.

125. Solución. Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ las raíces primitivas de 1, de orden n:

$$s=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)-1}\cdot\varepsilon_{\varphi(n)}=\frac{[\mu(n)]^2-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)}^2)}{2}.$$

1) Supongamos que n es impar, entonces ε_i^2 es una raíz primitiva de 1, de orden n, y $\varepsilon_i^2=\varepsilon_j^2$ solamente para $i=j$. Por ello

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)}^2=\mu(n) \quad \text{y} \quad s=\frac{[\mu(n)]^2-\mu(n)}{2}.$$

2) Supongamos que $n=2n_1$; n_1 es impar. En este caso, $-\varepsilon_i$ (problema 111) es una raíz primitiva de la unidad, de orden n_1, y por esto (véase 1) $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots$ $\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)}^2=\mu(n_1)=-\mu(n)$.

Por lo tanto, en este caso

$$s=\frac{[\mu(n)]^2+\mu(n)}{2}.$$

3) Supongamos que $n=2^kn_1$, donde $k>1$, n_1 es impar. En este caso ε_1^2 pertenece al exponente $\frac{n}{2}$. Según el problema 118, sacamos la conclusión de que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ son las raíces cuadradas de $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$, donde $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}$ son las raíces primitivas de 1, de orden $\frac{n}{2}$. De aquí se deduce

que

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_{\varphi(n)}^2=2\left(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{\varphi\left(\frac{n}{2}\right)}\right)=2\mu\left(\frac{n}{2}\right);$$

$$s=-\mu\left(\frac{n}{2}\right).$$

126. Solución. $S=\sum_{x=0}^{n-1}\varepsilon^{x^2}=\sum_{x=y}^{y+n-1}\varepsilon^{x^2}=\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{(y+s)^2}$ para cualquier entero y:

$$S'=\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{-y^2},\quad S'S=\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{-y^2}S=\sum_{y=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{-y^2}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{(y+s)^2}\right)=$$

$$=\sum_{y=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1}\varepsilon^{2ys+s^2}=\sum_{s=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{s^2}\cdot\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{2ys}\right)=n+\sum_{s=1}^{n-1}\varepsilon^{s^2}\cdot\sum_{y=0}^{n-1}(\varepsilon^{2s})^y=n$$

para n impar;

$$SS'=n+n\varepsilon^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}=n\left[1+(-1)^{\frac{n}{2}}\right]$$

para n par (puesto que $\sum_{y=0}^{n-1}\varepsilon^{2sy}=0$ para $2s$ no divisible por n).

En resumen, $|S|=\sqrt{n}$ si n es impar, y $|S|=\sqrt{n\left[1+(-1)^{\frac{n}{2}}\right]}$, si n es par.

Capítulo 2

CALCULO DE DETERMINANTES

127. a) 5; b) 5; c) 1; d) $ab-c^2-d^2$; e) $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$; f) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$; g) $\cos(\alpha+\beta)$; h) $\sec^2\alpha$; i) -2; j) 0; k) $(b-c)(d-a)$; l) $4ab$; m) -1; n) -1; o) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

128. a) 1; b) 2; c) $2a^2(a+x)$; d) 1; e) -2; f) $-2-\sqrt{2}$; g) $-3i\sqrt{3}$; h) -3.

129. El número de transposiciones es impar.

130. a) 10; b) 18; c) 36. **131.** a) $i=8$; $k=3$; b) $i=3$; $k=6$.

132. C_n^2. **133.** C_n^2-l. **134.** a) $\frac{n(n-1)}{2}$; b) $\frac{n(n+1)}{2}$.

135. a) $\frac{n(3n+1)}{2}$; b) $\frac{3n(n-1)}{2}$.

136. Consideremos un par de elementos a_i y a_k, donde $i<k$. Si estos elementos no forman una inversión, entonces, después de reducir la permutación a la disposición inicial, a_i precederá a a_k y, por consiguiente, los números i y k no formarán inversión.

Si los elementos a_i y a_k forman inversión, entonces, después de reducir la permutación a la disposición inicial, a_k precederá a a_i y, por consiguiente, los números i y k formarán una inversión.

137. La sustitución es impar en ambos casos. La explicación estriba en que una disposición inicial se obtiene de otra mediante un número par de transposiciones.

138. a) con el signo $+$; b) con el signo $+$.

139. a) no figura; b) figura. 140. $i=1$, $k=4$.

141. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$, $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ y $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

142. $-a_{14}a_{23}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix}$.

143. Con el signo $+$. 144. Con el signo $(-1)^{C_n^2}$.

146. 2; -1. 147. a) $n!$; b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; c) $n!$.

148. a) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n!)^{n+1}$; b) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n!)^{n+1}$.

149. Solución. Al cambiar las filas por columnas, el determinante: 1) no varía; 2) se convierte en el número complejo conjugado.

150. Solución. Al cambiar las filas por columnas, el determinante: 1) no varía; 2) se multiplica por -1.

151. $(-1)^{n-1}\Delta$. 152. Se multiplica por $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

153. 0, puesto que el número de permutaciones pares de n elementos es igual al número de sus permutaciones impares.

154. a) $x_1=a_1$; $x_2=a_2$; ...; $x_{n-1}=a_{n-1}$;

b) $x_1=0$; $x_2=1$; ...; $x_{n-1}=n-2$;

c) $x_1=a_1$; $x_2=a_2$; ...; $x_{n-1}=a_{n-1}$.

156. 0. 158. $(mq-np)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

159. a) $a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

160. $3a-b+2c+d$. 161. $4t-x-y-z$. 162. $2a-b-c-d$.

163. $-1\ 487\ 600$. 164. $-29\ 400\ 000$. 165. 48. 166. 1.

167. 160. 168. 12. 169. 900. 170. 394. 171. 665.

172. $a^2+b^2+c^2-2(bc+ca+ab)$. 173. $-2(x^3+y^3)$.

174. $(x+1)(x^2-x+1)^2$. 175. x^2z^2. 176. $-3(x^2-1)(x^2-4)$.

177. $\operatorname{sen}(c-a)\operatorname{sen}(c-b)\operatorname{sen}(a-b)$. 178. $(af-be+cd)^2$.

179. $n!$. 180. $b_1b_2\ldots b_n$. 181. $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

182. $(n-1)!$. 183. $-2(n-2)!$. 184. 1.

185. $\frac{na^{n-1}}{2}[2a+(n-1)h]$. 186. $\frac{na^{n-1}}{2}[2a+(n-1)h]$.

187. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}[a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^n a_n]$.

188. $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. 189. $\frac{nx^n}{x-1}-\frac{x^n-1}{(x-1)^2}$.

190. $(n+1)!\,x^n$. 191. $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

192. $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$. 193. $\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$.

194. $(-1)^n (n+1) a_1a_2\ldots a_n$.

195. $a_1a_2\ldots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

196. $h(x+h)^n$. 197. $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$.

198. $(-1)^n 2^{n-1} a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

199. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$. 200. $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$.

201. $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-ax_{k,k})$. 202. $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1)$.

203. $(-1)^n(a_0b_0+a_1b_1+\ldots+a_nb_n)\,b_1b_2\ldots b_{n-1}$.

204. $a(a+b)(a+2b)\ldots[a+(n+1)b]$.

205. $x^n+(-1)^{n-1}y^n$. 206. 0, si $n>2$. 207. 0, si $n>2$.

208. Sea $n=2$. Obrando según la indicación, se tiene:

$$\begin{vmatrix}1+a_1+x_1 & a_1+x_2\\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & a_1+x_2\\ 0 & a_2+x_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1+x_1 & 0\\ a_2+x_1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1+x_1 & a_1+x_2\\ a_2+x_1 & a_2+x_2\end{vmatrix}=$$

$$=1+[(a_1+x_1)+(a_2+x_2)]+(a_2-a_1)(x_1-x_2).$$

Expresando del mismo modo el determinante de n-ésimo orden en forma de una suma de 2^n determinantes, resulta que uno de los sumandos es igual a la unidad, n sumandos son iguales a a_i+x_i, donde $i=1, 2, \ldots, n$ y $\frac{n(n-1)}{2}$ sumandos son iguales a $(a_i-a_k)(x_k-x_i)$, donde $i>k$.

Los demás sumandos son iguales a cero. Por lo tanto, se tiene la respuesta

$$1+\sum_{i=1}^{n}(a_i+x_i)+\sum_{i>k}(a_i-a_k)(x_k-x_i).$$

Este resultado se puede transformar a la forma

$$(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)-n(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n).$$

209. 0, si $p>2$. 211. $\frac{n+1}{1-x}+\frac{x^{n+1}-1}{(1-x)^2}$.

212. S o l u c i ó n. Fácilmente se observa que $\Delta_2=x_1x_2\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}\right)$. Supongamos que

$$\Delta_{n-1}=x_1x_2\ldots x_{n-1}\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}\right).$$

Entonces $\Delta_n=x_1x_2\ldots x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}\right)+a_nx_1x_2\ldots x_{n-1}=x_1x_2\ldots x_n\times$ $\times\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n}{x_n}\right)$.

213. $a_0x_1x_2\ldots x_n+a_1y_1x_2\ldots x_n+a_2y_1y_2x_3\ldots x_n+\ldots+a_ny_1y_2\ldots y_n$.

214. $-a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

215. $n!\,(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)$.

216. $a_1a_2\ldots a_{n-1}-a_1a_2\ldots a_{n-2}+\ldots+(-1)^n a_1+(-1)^{n+1}$.

217. Solución. Desarrollemos el determinante por los elementos de la primera columna; obtenemos: $\Delta_n=(\alpha+\beta)\Delta_{n-1}-\alpha\beta\Delta_{n-2}$. Fácilmente se comprueba que $\Delta_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$; $\Delta_3=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}$. Supongamos que $\Delta_{n-2}=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$; $\Delta_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$.

Entonces

$$\Delta_n=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

Segundo método de resolución.

Representemos Δ_n en forma de una suma $d_n+\delta_n$, donde

$$d_n=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix},$$

$$\delta_n=\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

De la primera fila de d_n sacamos el factor α y después de la segunda fila restamos la primera. Resulta $d_n=\alpha d_{n-1}$. Fácilmente se observa que $d_2=\alpha^2$. Sea $d_{n-1}=\alpha^{n-1}$, entonces $d_n=\alpha^n$.

Desarrollando δ_n por los elementos de la primera fila, vemos que

$$\delta_n=\beta\Delta_{n-1}.$$

De lo dicho se deduce que $\Delta_n=\alpha^n+\beta\Delta_{n-1}$. Fácilmente se comprueba que $\Delta_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$. Supongamos que $\Delta_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$. Entonces $\Delta_n=\alpha^n+\beta\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=$ $=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

218. $n+1$. 219. $\frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}$. 220. $\cos n\theta$.

221. $x^n-C_{n-1}^1x^{n-2}+C_{n-2}^2x^{n-4}-\ldots$ Comparar con el problema 53.

222. $x_1y_n\prod_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})$.

223. $a_1a_2\ldots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

224. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\ldots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

225. $x(a_1-x)\ldots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\ldots+\frac{1}{a_n-x}\right)$.

226. $(x_1-a_1)(x_2-a_2)\ldots(x_n-a_n)\left(1+\frac{a_1}{x_1-a_1}+\ldots+\frac{a_n}{x_n-a_n}\right)$.

227. $\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_ib_i)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i-a_ib_i}\right)$. 228. $(-1)^n m^n\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m}\right)$.

229. $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0;\ x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\alpha_i}$. 230. $(a^2-b^2)^n$.

231. $a(a+b)\ldots[a+(n-1)b]\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\ldots+\frac{1}{a+(n-1)b}\right)$.

232. $x^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x-2a_i)\left(x+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x-2a_i}\right)$.

233. $x^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x-2a_i)\left(x+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x-2a_i}\right)$.

234. $1-b_1+b_1b_2-b_1b_2b_3+\ldots+(-1)^nb_1b_2\ldots b_n$.

235. $(-1)^{n-1}(b_1a_2a_3\ldots a_n+b_1b_2a_3\ldots a_n+\ldots+b_1b_2\ldots b_{n-1}a_n)$.

236. $(-1)^{n-1}x^{n-2}$. 237. $(-1)^n[(x-1)^n-x^n]$.

238. $a_0x^n\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$. 240. 1. 241. 1. 242. 1.

243. $\dfrac{C_{m+n}^{n+1}C_{m+n-1}^{n+1}\ldots C_{m+n-k+1}^{n+1}}{C_{k+n}^{n+1}C_{k+n-1}^{n+1}\ldots C_{n+1}^{n+1}}$.

244. $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

245. $(x-1)^n$. 246. $(n-1)!\,(n-2)!\ldots 1!\,(x-1)^n$. 247. α^n.

248. Obrando según la indicación, se tiene:

$$\Delta_n=(x-z)\,\Delta_{n-1}+z\,(x-y)^{n-1},$$
$$\Delta_n=(x-y)\,\Delta_{n-1}+y\,(x-z)^{n-1}.$$

Del sistema obtenido de ecuaciones, hallamos:

$$\Delta_n=\frac{z\,(x-y)^n-y\,(x-z)^n}{z-y}.$$

249. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{ab\,(b^{n-1}-a^{n-1})}{a-b}$.

250. $\dfrac{xf(y)-yf(x)}{x-y}$, donde $f(x)=\prod_{k=1}^{n}(a_k-x)$.

251. $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$, donde $f(x)=\prod_{k=1}^{n}(c_k-x)$.

252. $(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab]$.

253. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

254. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(nh)^{n-1}\left[a+\dfrac{h(n-1)}{2}\right]$.

255. $(1-x^n)^{n-1}$.

256. Si se agregan todas las columnas a la primera, entonces se puede sacar del determinante el factor $a+b+c+d$, y todos los elementos que quedan del determinante son expresiones enteras respecto de a.

Esto muestra que el determinante es divisible por $a+b+c+d$. Si a la primera columna se agrega la segunda, se resta la tercera y la cuarta, se observa que el determinante es divisible por $a+b-c-d$. Razonando así, se muestra que el determinante es divisible por $a-b+c-d$ y por $a-b-c+d$. De lo dicho se deduce que el determinante es igual a $\lambda(a+b+c+d)(a+b-c-d)\times\times(a-b+c-d)(a-b-c+d)$. Para determinar λ se observa que el coeficiente de a^4 tiene que ser igual a 1, por lo cual, $\lambda=1$.

257. $(a+b+c+d+e+f+g+h)(a+b+c+d-e-f-g-h)(a+b-c-d+e+f-g-h)(a+b-c-d-e-f+g+h)(a-b+c-d+e-f+g-h)\times\times(a-b+c-d-e+f-g+h)(a-b-c+d+e-f-g+h)(a-b-c+d-e+f+g-h)$.

258. $(x+a_1+a_2+\ldots+a_n)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

259. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}\operatorname{sen}\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}\operatorname{sen}\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}$.

260. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}\cos\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}\operatorname{sen}\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

261. $1!\,2!\,\ldots\,n!$. 262. $\prod\limits_{n+1\geqslant k>i\geqslant 1}(a_i-a_k)$.

263. $(-1)^n\,1!\,2!\,\ldots\,n!$.

264. $(-1)^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(a_i-a_k)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{a_if'(a_i)}\right)$,

donde $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

265. $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

266. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}\cos\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}\operatorname{sen}\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

267. $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

268. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{01}a_{02}\ldots a_{0,\,n-1}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}\operatorname{sen}\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}\operatorname{sen}\frac{\varphi_k+\varphi_i}{2}$.

269. $\frac{1}{1!\,2!\ldots(n-1)!}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

271. $1!\,3!\,5!\ldots(2n-1)!$ 272. $\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i-1}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

273. $\prod\limits_{n+1\geqslant k>i\geqslant 1}(b_ka_i-a_kb_i)$. 274. $\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n}\operatorname{sen}(\alpha_i-\alpha_k)$.

275. $\prod\limits_{1\leqslant i<k\leqslant n+1}(a_i-a_k)(a_ia_k-1)$.

276. $2^{(n-1)^2}\prod\limits_{n-1\geqslant i>k\geqslant 0}\operatorname{sen}\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\prod\limits_{n-1\geqslant i>k\geqslant 0}\operatorname{sen}\frac{\varphi_k-\varphi_i}{2}$.

277. $2^{n(n+1)}\operatorname{sen}\alpha_0\operatorname{sen}\alpha_1\ldots$

$$\ldots\operatorname{sen}\alpha_n\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 0}\operatorname{sen}\frac{\alpha_i+\alpha_k}{2}\prod_{n\geqslant i>k\geqslant 0}\operatorname{sen}\frac{\alpha_i-\alpha_k}{2}.$$

278. $[x_1x_2\ldots x_n-(x_1-1)\ldots(x_n-1)]\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

279. $x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

280. $(x_1+x_2+\ldots+x_n)\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

281. $\sigma_{n-s}\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$, donde σ_p denota la suma de todos los productos posibles de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tomados cada vez p factores.

282. $[2x_1x_2\ldots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\ldots(x_n-1)]\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

283. $x^2(x^2-1)^4$. 284. $2x^3y(x-y)^6$.

285. $1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!\,x^{\frac{n(n-1)}{2}}(y-x)^n$.

286. $1!\,2!\,3!\ldots(k-1)!\,x^{\frac{k(k-1)}{2}}(y_1-x)^k(y_2-x)^k\ldots$

$$\ldots(y_{n-k}-x)^k\prod_{n-k\geqslant i>j\geqslant 1}(y_i-y_j).$$

287. $(y-x)^{k(n-k)}$.

288. b) 9; c) 5; e) 128; f) $(a_1a_2-b_1b_2)(c_1c_2-d_1d_2)$;
g) $(x_3-x_2)^2(x_3-x_1)^2(x_2-x_1)^2$;
h) $(\lambda^2-a^2)(\alpha-\beta)^{n-1}[\alpha+(n-1)\beta]$;
k) $(x_4-x_3)[(x_3-x_2)(x_4-x_2)-2(x_3-x_1)(x_4-x_1)]$;
m) $27(a+2)^3(a-1)^6[3(a+2)^2-4x^2][3(a-1)^2-4x^2]^2$.

Observación. Este problema es un caso particular del problema 537.

289.

$$\text{a)}\begin{vmatrix}-5 & -2\\ -8 & 4\end{vmatrix};\quad \text{b)}\begin{vmatrix}2 & 8 & 17\\ 11 & -6 & 5\\ 3 & 8 & -3\end{vmatrix};\quad \text{c)}\begin{vmatrix}7 & 5 & -3 & 3\\ -1 & 5 & -3 & 3\\ -4 & -4 & -5 & 4\\ -4 & -4 & 0 & 3\end{vmatrix}.$$

290. a) 24; b) 18;

c) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

291. a) 256; b) 78 400; c) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$.

292. $D\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

293. a) $C_n^1C_n^2\ldots C_n^n\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 0}(a_i-a_k)(b_k-b_i)$;

b) $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_k)(\beta_i-\beta_k)$.

294. 0, si $n\geqslant 2$. 295. $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)^2$.

296. $-(a^2+b^2+c^2+d^2+l^2+m^2+n^2+p^2)^4$.

297. $4\operatorname{sen}^4\varphi$. 298. $4\operatorname{sen}^4\varphi$.

299. Designemos con Δ el determinante buscado. Elevando al cuadrado se obtiene que $|\Delta|=n^{\frac{n}{2}}$. Por otra parte, $\Delta=\prod\limits_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0}(\varepsilon^k-\varepsilon^s)$. Hacemos $\varepsilon_1=\cos\frac{\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$. Entonces $\varepsilon=\varepsilon_1^2$ y $\Delta=\prod\limits_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0}(\varepsilon^k-\varepsilon^s)=$

$\prod\varepsilon_1^{k+s}\prod(\varepsilon_1^{k-s}-\varepsilon_1^{-k+s})=\prod\varepsilon_1^{k+s}\cdot i^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod 2\operatorname{sen}\frac{(k-s)\pi}{n}$. Luego, $\operatorname{sen}\frac{(k-s)\pi}{n}>0$ para todos los k, s. Por consiguiente, $n^{\frac{n}{2}}=|\Delta|=$ $=\left|\prod 2\operatorname{sen}\frac{(k-s)\pi}{n}\right|=\prod 2\operatorname{sen}\frac{(k-s)\pi}{n}$. Por esto $\Delta=n^{\frac{n}{2}}i^{\frac{n(n-1)}{2}}\times$ $\times\prod\limits_{n-1\geqslant k>s\geqslant 0}\varepsilon_1^{k+s}=n^{\frac{n}{2}}i^{\frac{n(n-1)}{2}}\varepsilon_1^{\frac{n(n-1)^2}{2}}=n^{\frac{n}{2}}i^{\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)^2}=n^{\frac{n}{2}}i^{-\frac{(n-1)(n+1)}{2}}$.

300. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a_0+a_1\varepsilon_k+a_2\varepsilon_k^2+\ldots+a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1})$, donde $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$.

301. $x^4-y^4+z^4-u^4+4xy^2z+4xzu^2-4x^2yu-4yz^2u-2x^2z^2+2y^2u^2$.

303. 2^{n-1} si n es impar; 0 si n es par.

304. $(-1)^n\frac{[(n+1)a^n-1]^n-n^na^{n(n+1)}}{(1-a^n)^2}$.

305. $(-1)^{n-1}(n-1)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_k+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1})$, donde $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+$ $+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$.

306. $\varphi_0(t)\varphi_1(t)\ldots\varphi_{n-1}(t)$, donde $\varphi_k(t)=\frac{(t+\varepsilon_k)^n-1}{t}$; $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+$ $+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$. Según el resultado del problema 102, la respuesta puede expresarse en la forma $\prod\limits_{k=1}^{n-1}[t^n-(\varepsilon_k-1)^n]$.

307. $(-2)^{n-1}(n-2p)$, si $(n,p)=1$; 0, si $(n,p)\neq 1$.

308. $2^{n-2}\left(\cos^n\frac{\pi}{n}-1\right)$.

309. $2^{n-2}\operatorname{sen}^{n-2}\frac{n\theta}{2}\left[\operatorname{sen}^n\frac{(n+2)\theta}{2}-\operatorname{sen}^n\frac{n\theta}{2}\right]$.

310. $(-1)^n2^{n-2}\operatorname{sen}^{n-2}\frac{nh}{2}\left[\cos^n\left(a+\frac{nh}{2}\right)-\cos^n\left(a+\frac{(n-2)h}{2}\right)\right]$.

311. $(-1)^{n-1}\frac{(n+1)(2n+1)}{12}n^{n-2}[(n+2)^n-n^n]$.

313. $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1})$, donde $\varepsilon_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+$ $+i\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{n}$.

315. $\prod_{i=1}^{n}(a_1+a_2\rho_i+a_3\rho_i^2+\ldots+a_n\rho_i^{n-1})$, donde $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ son las raíces de n-ésimo grado de μ.

318. Resolución del problema 223. Agregando una unidad a cada elemento del determinante $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a^n \end{vmatrix}$, obtenemos el determinante Δ.

Se tiene $\Delta=a_1a_2\ldots a_n+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}$;

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}=a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Solución del problema 250. Designemos con Δ el determinante calculado. Se tiene:

$$\Delta=(a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x)+x\sum A_{ik};$$
$$\Delta=(a_1-y)(a_2-y)\ldots(a_n-y)+y\sum A_{ik},$$

donde $\sum A_{ik}$ es la suma de los complementos algebraicos de todos los elementos de Δ.

Δ se determina fácilmente del sistema de ecuaciones.

323. $\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_i-a_k)\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}(b_i-b_k)\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n}f(a_i)}$,

donde $f(x)=(x+b_1)\ldots(x+b_n)$.

325. $\dfrac{[c+\sqrt{c^2-4ab}]^{n+1}-[c-\sqrt{c^2-4ab}]^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{c^2-4ab}}$.

326. $\dfrac{[p+\sqrt{p^2-4q}]^n+[p-\sqrt{p^2-4q}]^n}{2^n}$.

327. $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$, donde a_k es la suma de todos los menores de k-ésimo orden del determinante

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, obtenidos del mismo eliminando las $n-k$ filas de índices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$ y las columnas de los mismos índices.

328. $(n+1)^{n-1}$. 329. $(x-n)^{n+1}$.

330. $(x^2-1^2)(x^2-3^2)\ldots[x^2-(2m-1)^2]$, si $n=2m$; $x(x^2-2^2)(x^2-4^2)\ldots$ $\ldots(x^2-4m^2)$, si $n=2m+1$;

331. $(x+na-n)[x+(n-2)a-n+1]\cdot[x+(n-4)a-n+2]\ldots(x-na)$.

332. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!]^n$ 333. $\dfrac{[1!2!\ldots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!\ldots 2(n-1)!}$.

334. $\dfrac{\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)\Delta(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{\Delta(1, 2, \ldots, n)}$, donde Δ es el determinante de Vandermonde.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

335. $x_1=3;\ x_2=x_3=1.$

336. $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=-2.$

337. $x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=3.$

338. $x_1=3;\ x_2=4;\ x_3=5.$

339. $x_1=x_2=-1;\ x_3=0;\ x_4=1.$

340. $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=-1;\ x_4=-2.$

341. $x_1=-2;\ x_2=2;\ x_3=-3;\ x_4=3.$

342. $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=1;\ x_4=-1.$

343. $x_1=2;\ x_2=x_3=x_4=0.$

344. $x_1=x_2=x_3=x_4=0.$

345. $x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=0;\ x_4=2.$

346. $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0.$

347. $x_1=x_2=x_3=x_4=0.$

348. $x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=1;\ x_4=-1;\ x_5=1.$

349. $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0.$

350. $x_1=1;\ x_2=-1;\ x_3=1;\ x_4=-1;\ x_5=1.$

351. $x_1=0;\ x_2=2;\ x_3=-2;\ x_4=0;\ x_5=3.$

352. $x_1=2;\ x_2=0;\ x_3=-2;\ x_4=-2;\ x_5=1.$

353. El determinante del sistema es igual a 0, puesto que el sistema posee solución no nula.

354. El determinante del sistema es igual a $-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

355. $$x_i=\frac{a\sum_{k=1}^{n}a_k-a_i\,[(n-1)\,\alpha+\beta]}{(\alpha-\beta)\,[(n-1)\,\alpha+\beta]}.$$

356. $x_i=-\dfrac{f(\beta_i)}{\varphi'(\beta_i)}$, donde $f(x)=(x-b_1)(x-b_2)\ \dots\ (x-b_n)$,

$$\varphi(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ \dots\ (x-\beta_n).$$

357. $x_i=\dfrac{f(t)}{(t-\alpha_i)\,f'(\alpha_i)}$, donde $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \dots\ (x-\alpha_n)$.

358. $x_s=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n+s}u_i}{f'(\alpha_i)}\,\varphi_{s,i}$, donde $f(x)=(x-\alpha_1)\ \dots\ (x-\alpha_n)$;

$\varphi_{s,i}=\sum\alpha_{t_1},\ \alpha_{t_2}\ \cdots\ \alpha_{t_{n-s}}$ donde la suma se extiende a todas las combinaciones $t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_{n-s}$ de $1,\ 2,\ \dots,\ i-1,\ i+1,\ \dots,\ n$.

359. $x_s=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n+i}u_i}{f'(\alpha_s)}\,\varphi_{i,s}$, donde $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \dots\ (x-\alpha_n)$;

$\varphi_{i,s}=\sum\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}\ \dots\ \alpha_{t_{n-i}}$; donde la suma se extiende a todas las combinaciones $t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_{n-i}$ de $1,\ 2,\ \dots,\ s-1,\ s+1,\ \dots,\ n$.

360. $x_i=\frac{(-1)^n a_{n-i}}{n!}$, donde $x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_n=(x-1)(x-2)\ \dots$
$\dots\ (x-n)$.

361. $C_m^k \cdot C_n^k$.

365. a) No varía o aumenta en una unidad;
b) No varía, o aumenta en una unidad, o en dos unidades.

366. 2. 367. 3. 368. 2. 369. 2. 370. 3. 371. 3. 372. 4. 373. 3.
374. 2. 375. 3. 376. 5. 377. 6. 378. 5. 379. 3. 380. 4.

383. Las formas son independientes. 384. $2y_1-y_2-y_3=0$.

385. $y_1+3y_2-y_3=0$; $2y_1-y_2-y_4=0$.

386. Las formas son independientes.

387. $y_1+y_2-y_3-y_4=0$.

388. $y_1-y_2+y_3=0$; $5y_1-4y_2+y_4=0$.

389. Las formas son independientes.

390. Las formas son independientes.

391. $y_1+y_2-y_3-y_4=0$. 392. $2y_1-y_2-y_3=0$.

393. $3y_1-y_2-y_3=0$; $y_1-y_2-y_4=0$.

394. Las formas son independientes. 395. $y_1-y_2-y_3-y_4=0$.

396. $3y_1-2y_2-y_3+y_4=0$; $y_1-y_2+2y_3-y_5=0$.

397. $\lambda=10$; $3y_1+2y_2-5y_3-y_4=0$.

398. $x_3=2x_2-x_1$; $x_4=1$. 399. $\lambda=5$.

400. El sistema no tiene soluciones. 401. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-2$.

402. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=1$. 403. $x_1=-\frac{11x_3}{7}$, $x_2=-\frac{x_3}{7}$.

404. El sistema no tiene soluciones.

405. $x_1=0$; $x_2=2$; $x_3=\frac{5}{3}$; $x_4=-\frac{4}{3}$.

406. $x_1=-8$; $x_2=3+x_4$; $x_3=6+2x_4$.

407. $x_1=2$; $x_2=x_3=x_4=1$. 408. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

409. $x_1=\frac{3x_3-13x_4}{17}$; $x_2=\frac{19x_3-20x_4}{17}$.

410. $x_1=\frac{7}{6}x_5-x_3$; $x_2=\frac{5}{6}x_5+x_3$, $x_4=\frac{x_5}{3}$.

411. $x_1=-16+x_3+x_4+5x_5$; $x_2=23-2x_3-2x_4-6x_5$.

412. $x_1=\frac{-4x_4+7x_5}{8}$; $x_2=\frac{-4x_4+5x_5}{8}$, $x_3=\frac{4x_4-5x_5}{8}$.

413. $x_1=x_2=x_3=0$; $x_4=x_5$.

414. $x_1=\frac{1+x_5}{3}$; $x_2=\frac{1+3x_3+3x_4-5x_5}{3}$.

415. $x_1=\frac{2+x_5}{3}$; $x_2=\frac{1+3x_3-3x_4+5x_5}{6}$.

416. El sistema no tiene soluciones.
417. El sistema no tiene soluciones.

418. $x_1=-\frac{x_5}{2}$; $x_2=-1-\frac{x_5}{2}$; $x_3=0$; $x_4=-1-\frac{x_5}{2}$.

419. $x_1=\frac{1+5x_4}{6}$; $x_2=\frac{1-7x_4}{6}$; $x_3=\frac{1+5x_4}{6}$.

420. El sistema no tiene soluciones.

421. $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

422. Si $(\lambda-1)(\lambda+2)\neq 0$, $x=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$; $y=\frac{1}{\lambda+2}$; $z=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$.

Si $\lambda=1$, el sistema tiene soluciones que dependen de dos parámetros.
Si $\lambda=-2$, el sistema no tiene soluciones.

423. Si $(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0$, $x=-\frac{\lambda^2+2\lambda+2}{\lambda+3}$; $y=-\frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda+3}$;

$$z=\frac{2\lambda+1}{\lambda+3};\quad t=-\frac{\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+3}.$$

Si $\lambda=1$, el sistema tiene soluciones que dependen de tres parámetros.
Si $\lambda=-3$, el sistema no tiene soluciones.

424. Si a, b, c son todos distintos,

$$x=abc;\quad y=-(ab+ac+bc);\quad z=a+b+c.$$

Si entre a, b, c hay dos iguales, las soluciones dependen de un parámetro.
Si $a=b=c$, las soluciones dependen de dos parámetros.

425. Si a, b, c son distintos,

$$x=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)};\quad y=\frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)};\quad z=\frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}.$$

Si $a=b$; $a\neq c$; $d=a$ o $d=c$, las soluciones dependen de un parámetro.
Si $b=c$; $a\neq b$; $d=a$ o $d=b$, las soluciones dependen de un parámetro.
Si $a=c$; $a\neq b$; $d=a$ $d=b$, las soluciones dependen de un parámetro.
Si $a=b=c=d$, las soluciones dependen de dos parámetros.
En todos los demás casos el sistema no tiene soluciones.

426. Si

$$b(a-1)\neq 0,\quad x=\frac{2b-1}{b(a-1)};\quad y=\frac{1}{b};\quad z=\frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}.$$

Si $a=1$; $b=\frac{1}{2}$, las soluciones dependen de un parámetro.

En todos los demás casos el sistema no tiene soluciones.

427. Si $b(a-1)(a+2)\neq 0$, $x=z=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$; $y=\frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$.

Si $a=-2$; $b=-2$, las soluciones dependen de un parámetro.
Si $a=1$; $b=1$, las soluciones dependen de dos parámetros.
En todos los demás casos el sistema no tiene soluciones.

428. Si

$$(\alpha-1)(\alpha+2)\neq 0,\quad x=\frac{m\alpha+m-n-p}{(\alpha+2)(\alpha-1)};$$

$$y=\frac{n\alpha+n-m-p}{(\alpha+2)(\alpha-1)};\quad z=\frac{p\alpha+p-m-n}{(\alpha+2)(\alpha-1)}.$$

Si $\alpha=-2$ y $m+n+p=0$, las soluciones dependen de un parámetro.
Si $a=1$ y $m=n=p$, las soluciones dependen de dos parámetros.
En todos los demás casos el sistema no tiene soluciones.

429. Si

$$a(a-b)\neq 0, \quad x=\frac{a^2(b-1)}{b-a}; \quad y=\frac{b(a^2-1)}{a(a-b)}; \quad z=\frac{a-1}{a(b-a)}.$$

Si $a=b=1$, las soluciones dependen de dos parámetros.
En todos los demás casos el sistema no tiene soluciones.

430. $\Delta=\lambda^2(\lambda-1)$. Para $\lambda=0$; $\lambda=1$ el sistema es incompatible.

431. $\Delta=-2\lambda$. Si $\lambda\neq 0$, $x=1-\lambda$; $y=\lambda$; $z=0$. Si $\lambda=0$, $x=1$; $z=0$; y es arbitrario.

432. $\Delta=(k-1)^2(k+1)$. Si $k=1$, la solución depende de un parámetro. Si $k=-1$, el sistema es incompatible.

433. $\Delta=a(b-1)(b+1)$.

Si $a=0$; $b=5$, $y=-\frac{1}{3}$; $z=\frac{4}{3}$; x es arbitrario.
Si $a=0$; $b\neq 1$ y $b\neq 5$, el sistema es incompatible.
Si $b=1$, $z=0$; $y=1-ax$; x es arbitrario.
Si $b=-1$. el sistema es incompatible.

434. a) $\Delta=-m(m+2)$. Para $m=0$ y $m=-2$ el sistema en incompatible.

b) $\Delta=m(m^2-1)$. Si $m=0$; $m=1$, el sistema es incompatible. Si $m=-1$, la solución depende de un parámetro.

c) $\Delta=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$. Si $\lambda=1$, $\lambda=-1$, el sistema es incompatible. Si $\lambda=0$, la solución depende de un parámetro.

435. a) $\Delta=3(c+1)(c-1)^2$. Si $c=-1$, el sistema es incompatible.
Si $c=1$, la solución depende de dos parámetros.

b) $\Delta=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. Si $\lambda=2$; $\lambda=3$, el sistema es incompatible. Si $\lambda=1$, la solución depende de un parámetro.

c) $\Delta=d(d-1)(d+2)$. Si $d=1$; $d=-2$, el sistema es incompatible. Si $d=0$, la solución depende de un parámetro.

d) $\Delta=(a-1)^3(a+1)$. Si $a=-1$, el sistema es incompatible. Si $a=1$, la solución depende de dos parámetros.

436. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$

437. Cuando, y sólo cuando,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

438. Solamente cuando,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

439. Solamente cuando $\begin{vmatrix} x_0^2+y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

440. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. 441. $y^2-y=0$.

442. $y=x^3-1$.

443. $$\begin{vmatrix} y & x^n & x^{n-1} & \dots & x^2 & x & 1 \\ y_0 & x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

444. Cuando, y sólo cuando,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

445. $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0.$

446. Cuando, y sólo cuando, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}$$

es menor que tres.

447. Cuando, y sólo cuando, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

es menor que tres.

448. En un plano cuando, y sólo cuando, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{pmatrix}$$

es menor que cuatro; en una recta cuando, y sólo cuando, el rango de esta matriz es menor que tres.

449. Todos los planos pasan por un punto cuando, y sólo cuando, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & B_n & C_n & D_n \end{pmatrix}$$

es menor que cuatro; por una recta, solamente cuando el rango de esta matriz es menor que tres.

450. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

453. No. 454. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

455. Sí.

456. Solución. Sea

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn}\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1r}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2r}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \dots & \lambda_{rr}\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}\sum_{s=1}^{r}\lambda_{1s}\alpha_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{r}\lambda_{1s}\alpha_{sn}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \sum_{s=1}^{r}\lambda_{rs}\alpha_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{r}\lambda_{rs}\alpha_{sn}\end{pmatrix}.$$

Inmediatamente se ve que las filas de la matriz BA son las soluciones del sistema. Además, como $|B|\neq 0$, $A=B^{-1}(BA)$, es decir, las soluciones escritas por la matriz A son combinaciones lineales de las soluciones escritas por la matriz BA.

457. Solución. Sea

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rn}\end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \gamma_{r1} & \gamma_{r2} & \dots & \gamma_{rn}\end{pmatrix}.$$

Como C representa el sistema fundamental de soluciones, $\alpha_{11}=\lambda_{11}\gamma_{11}+\lambda_{12}\gamma_{21}+ + \dots +\lambda_{1r}\gamma_{r1}$, etc., es decir, $A=BC$, donde

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1r}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \dots & \lambda_{rr}\end{pmatrix}.$$

Por otra parte, A también representa un sistema fundamental de soluciones, por lo cual, $|B|\neq 0$.

459. Por ejemplo,

$$x_1=c_1+c_2+5c_3;\quad x_2=-2c_1-2c_2-6c_3;\quad x_3=c_1;\quad x_4=c_2;\quad x_5=c_3$$

(véase la respuesta del problema 454).

460. $x_1=11c$; $x_2=c$; $x_3=-7c$.

461. № 408. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

№ 409. $x_1=3c_1+13c_2$; $x_2=19c_1+20c_2$; $x_3=17c_1$; $x_4=-17c_2$.

№ 410. $x_1=c_1+7c_2$; $x_2=-c_1+5c_2$; $x_3=-c_1$; $x_4=2c_2$; $x_5=6c_2$.

№ 412. $x_1=c_1+7c_2$; $x_2=c_1+5c_2$; $x_3=-c_1-5c_2$; $x_4=-2c_1$; $x_5=8c_2$.

№ 413. $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$; $x_4=c$; $x_5=c$.

462. $x_1=-16+c_1+c_2+5c_3$;

$x_2=23-2c_1-2c_2-6c_3$;

$x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=c_3$.

463. № 406. $x_1=-8$; $x_2=3+c$; $x_3=6+2c$; $x_4=c$.

№ 414. $x_1=c_3$; $x_2=2+c_1+c_2-5c_3$; $x_3=c_1$; $x_4=c_2$; $x_5=-1+3c_3$.

№ 415. $x_1=1+2c_3$; $x_2=1+c_1-c_2+5c_3$; $x_3=2c_1$; $x_4=2c_2$; $x_5=1+6c_3$

MATRICES

464. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$;

$$\text{f)} \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}.$$

465. a) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\operatorname{sen} n\varphi \\ \operatorname{sen} n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

$$\textbf{466.}\quad \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{n} \\ -\dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

donde $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\alpha}{n}$. Por consiguiente,

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{n} \\ -\dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \operatorname{sen} n\varphi \\ -\operatorname{sen} n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

El límite del primer factor es igual a 1.

$$\lim_{n\to\infty} n\varphi = \alpha \lim_{\varphi\to 0} \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} = \alpha.$$

Por esto

$$\lim \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{n} \\ -\dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

467. a) $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 = A^2+2AB+B^2$;

b) $(A+B)(A-B) = A^2-AB+BA-B^2 = A^2-B^2$.

c) Se demuestra por inducción.

468. a) $\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

469. a) $\begin{pmatrix} x & 2y \\ -y & x-2y \end{pmatrix} = (x-y)E + yA$;

b) $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = (x-y)E + yA$; c) $\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ u & v & 0 \\ 3t-3x-u & t-3y-v & t \end{pmatrix}$.

470. a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

471. Se comprueba mediante un cálculo directo.

472. Polinomios $F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, tales que $F(A) = 0$, existen, puesto que la igualdad $F(A) = a_0 E + a_1 A + \ldots + a_m A^m = 0$ es equivalente a un sistema de n^2 ecuaciones lineales homogéneas con $m+1$ incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_m$, el cual, siendo $m \geqslant n^2$, siempre tiene soluciones no triviales. Sea $F(x)$ algún polinomio para el cual $F(A) = 0$, y sea $f(x)$ el polinomio de menor grado entre los polinomios que poseen esta propiedad. Entonces $F(x) = f(x)\, q(x) + r(x)$, donde $r(x)$ es un polinomio cuyo grado es menor que el grado de $f(x)$. Se tiene $r(A) = F(A) - f(A)\, q(A) = 0$, por consiguiente, $r(x) = 0$, pues en caso contrario se obtendría una contradicción con la elección de $f(x)$. Así, pues, $F(x) = f(x)\, q(x)$.

473. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces la suma de los elementos diagonales de la matriz AB es igual a $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$. Es exactamente igual la suma de los elementos diagonales para la matriz BA. Por consiguiente, la suma de los elementos diagonales de la matriz $AB - BA$ es igual a cero, y la igualdad $AB - BA = E$ es imposible.

O b s e r v a c i ó n. El resultado no subsiste para las matrices de elementos de un campo de característica $p \neq 0$. En efecto, en un campo de característica p, para las matrices de p-ésimo orden:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p-1 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene $AB - BA = E$.

474. $(E - A)(E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}) = E - A^k = E$.

475. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $bc = -a^2$.

476. Si $A^3 = 0$, entonces también $A^2 = 0$. En efecto, si $A^3 = 0$, entonces $|A| = 0$. Por consiguiente, (véase 471), $A^2 = (a+d)A$, $0 = A^3 = (a+d)A^2 = (a+d)^2 A$, de donde $a + d = 0$ y $A^2 = 0$.

477. $\pm E$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a^2 = 1 - bc$.

478. Si $A = 0$, entonces X es cualquier matriz. Si $|A| \neq 0$, entonces $X = 0$. Finalmente, si $|A| = 0$, pero $A \neq 0$, entonces las filas de la matriz A son proporcionales. Sea $\alpha : \beta$ la razón de los elementos correspondientes de la primera y segunda filas de la matriz A. Entonces $X = \begin{pmatrix} -\beta x & \alpha x \\ -\beta y & \alpha y \end{pmatrix}$ para cualesquiera x e y.

479. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Si $A \neq 0$, pero $a+d=0$, $ad-bc=0$, entonces no existen soluciones; 2) si $a+d \neq 0$, $(a-d)^2+4bc=0$, $(a-d)$, b, c, no son simultáneamente iguales a cero, entonces existen dos soluciones:

$$X=\pm\frac{1}{2\sqrt{2(a+d)}}\begin{pmatrix} 3a+d & 2b \\ 2c & a+3d \end{pmatrix};$$

3) si $a+d \neq 0$, $ad-bc=0$, entonces existen dos soluciones:

$$X=\pm\frac{1}{\sqrt{a+d}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

4) si $ad-bc \neq 0$, $(a-d)^2+4bc \neq 0$, entonces existen cuatro soluciones:

$$X=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+a-d}{2} & b \\ c & \frac{\lambda^2-a+d}{2} \end{pmatrix},$$

donde $\lambda=\pm\sqrt{a+d\pm 2\sqrt{ad-bc}}$;

5) si $a-d=b=c=0$, entonces existen infinitas soluciones: $X=\pm\sqrt{a}\,E$ y $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, donde x, y, z están ligados por la relación $x^2+yz=a$.

480. a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

f) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

h) $$\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix};$$

i) $$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \dots & \varepsilon^{-n+1} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \dots & \varepsilon^{-2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{-n+1} & \varepsilon^{-2n+2} & \dots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix};$$

j) $$\frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 1\cdot n & 1\cdot(n-1) & 1\cdot(n-2) & \dots & 1\cdot 1 \\ 1\cdot(n-1) & 2\cdot(n-1) & 2\cdot(n-2) & \dots & 2\cdot 1 \\ 1\cdot(n-2) & 2\cdot(n-2) & 3\cdot(n-2) & \dots & 3\cdot 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1\cdot 1 & 2\cdot 1 & 3\cdot 1 & \dots & n\cdot 1 \end{pmatrix};$$

k) $\frac{1}{2n^3}\begin{pmatrix} 2-n^2 & 2+n^2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2-n^2 & 2+n^2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2+n^2 & 2 & 2 & \dots & 2-n^2 \end{pmatrix}$;

l) $\frac{1}{d}\begin{pmatrix} b_1c_1+d & b_2c_1 & \dots & b_nc_1 & -c_1 \\ b_1c_2 & b_2c_2+d & \dots & b_nc_2 & -c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1c_n & b_2c_n & \dots & b_nc_n+d & -c_n \\ -b_1 & -b_2 & \dots & -b_n & 1 \end{pmatrix}$,

donde $d=a-b_1c_1-b_2c_2-\dots-b_nc_n$;

m) $\frac{1}{f}\begin{pmatrix} f-f_0x^n & xf-f_1x^n & \dots & x^{n-1}f-f_{n-1}x^n & x^n \\ -f_0x^{n-1} & f-f_1x^{n-1} & \dots & x^{n-2}f-f_{n-1}x^{n-1} & x^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f_0x & -f_1x & \dots & f-f_{n-1}x & x \\ -f_0 & -f_1 & \dots & -f_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$,

donde $f_0=a_0$, $f_1=a_0x+a_1$, $\dots$, $f_{n-1}=a_0x^{n-1}+\dots+a_{n-1}$, $f=a_0x^n+$ $+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$;

n) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}-\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \dots & \lambda_1\lambda_n \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2\lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n\lambda_1 & \lambda_n\lambda_2 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$,

$$\mu=1+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n;$$

o) $\begin{pmatrix} B^{-1}+\lambda B^{-1}UVB^{-1} & -\lambda B^{-1}U \\ -\lambda VB^{-1} & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda=\frac{1}{a-VB^{-1}U}$.

481. a) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$; e) $X=E-\frac{n-1}{n^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

f) $X=\begin{pmatrix} 1+a & b \\ -2a & 1-2b \end{pmatrix}$; g) X no existe.

482. Es suficiente multiplicar la igualdad $AB=BA$ a la derecha y a la izquierda por A^{-1}.

483. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

484. Si $A^3=E$, entonces $|A|^3=1$ y, por ser real, $|A|=1$. Hagamos $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces, igualando A^{-1} y A^2, fácilmente se obtiene que $A=E$ o $a+d=-1$, $ad-bc=1$.

485. $A=\pm E$ o $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, siendo $a^2+bc=\pm 1$.

486. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=aE+bI$, donde $I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, $I^2=-E$ y, por consiguiente, la correspondencia $aE+bI \longrightarrow a+bi$ es un isomorfismo.

487. Hagamos $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}=aE+bI+cJ+dK$, donde $I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $I^2=J^2=K^2=-E$, $IJ=-JI=K$, $JK=-KJ=I$, $KI=-IK=J$. De aquí se deduce que el producto de dos matrices de la forma $a+bI+cJ+dK$ es una matriz de la misma forma. Lo mismo se verifica para la suma y la diferencia, de modo que el conjunto considerado de matrices es un anillo. Por otra parte, $|A|=\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$, siempre que sea $A \neq 0$. Por consiguiente, toda matriz distinta de 0 posee matriz inversa, y de la igualdad $A_1A_2=0$ (o $A_2A_1=0$) siendo $A_1 \neq 0$, se deduce que $A_2=0$. El anillo considerado de matrices realiza la llamada álgebra de cuaterniones.

488. $(a_1E+b_1I+c_1J+d_1K)(a_2E+b_2I+c_2J+d_2K)=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)E+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)I+(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)J+(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)K$.

Pasando a determinantes, obtenemos $(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)^2+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)^2+(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)^2+(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)^2$.

489. La permutación de dos filas de la matriz se realiza multiplicando a la izquierda por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \dots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & \dots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

La operación b se realiza multiplicando a la izquierda por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & \alpha & \dots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

La operación c se realiza multiplicando a la izquierda por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Las operaciones a, b, c sobre las columnas se realizan multiplicando a la derecha por las mismas matrices.

490. Como es sabido, cualquier matriz A puede reducirse a la forma diagonal R mediante las transformaciones elementales a, b, c sobre las filas y las columnas. Por esto, para la matriz dada A, existe una matriz de la forma R tal que $R=U_1U_2 \dots U_mAV_1V_2 \dots V_k$, donde $U_1, \dots, U_m$, $V_1, \dots, V_k$ son las matrices de las transformaciones elementales. Todas ellas son no singulares y poseen inversas.

Por consiguiente, $A=PRQ$, donde P y Q son matrices no singulares.

491. En virtud de los resultados de los problemas 489, 490, es suficiente demostrar el teorema para las matrices diagonales y para las matrices que corresponden a la operación a, puesto que las matrices que corresponden a la operación b tienen la forma pedida. Fácilmente se observa que la operación a se reduce a las operaciones b y c. En efecto, para permutar dos filas se puede agregar la primera de ellas a la segunda, después, de la primera restar la segunda, después agregar a la segunda la primera y, finalmente, multiplicar la primera por -1. Esto equivale a la identidad matricial $E-e_{ii}-e_{kk}+e_{ik}+e_{ki}= =(E-2e_{kk})(E+e_{ik})(E-e_{ki})(E+e_{ik})$. Para las matrices diagonales el teorema es evidente:

$$a_1e_{11}+a_2e_{22}+\dots+a_ne_{nn}=(E+(a_1-1)e_{11})(E+(a_2-1)e_{22})\dots(E+(a_n-1)e_{nn}).$$

492. Sea $A=P_1R_1Q_1$, $B=P_2R_2Q_2$, donde P_1, Q_1, P_2, Q_2 son matrices no singulares y R_1, R_2 son matrices que tienen r_1 y r_2 unidades en la diagonal principal, respectivamente, y los demás elementos son iguales a 0. Entonces $AB=P_1R_1Q_1P_2R_2Q_2$ y el rango de AB es igual al rango de R_1CR_2, donde $C=Q_1P_2$ es una matriz no singular. La matriz R_1CR_2 se obtiene de la matriz C sustituyendo todos los elementos de las últimas $n-r_1$ filas y $n-r_2$ columnas por ceros. Como la eliminación de una fila o una columna rebaja el rango de la matriz no más que en una unidad, el rango de R_1CR_2 no es menor que $n- -(n-r_1)-(n-r_2)=r_1+r_2-n$.

493. Se deduce inmediatamente de la proporcionalidad de todas las filas de una matriz de rango 1.

494. Según el resultado del problema 492, el rango de la matriz buscada A es igual a 1 o a 0. Por consiguiente,

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3\\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3\\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3\end{pmatrix}.$$

La multiplicación directa da

$$0=A^2=(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3)\,A,$$

de donde se deduce que $\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=0$.

495. Supongamos que A da una solución del problema, distinta de la trivial $A=\pm E$. Entonces una de las matrices $A-E$ o $A+E$ es de rango 1. Sea

$$A+E=\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3\\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3\\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3\end{pmatrix}=B.$$

Entonces $A^2=E-2B+B^2=E+(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3-2)\,B$, de donde se deduce que para que sea $A^2=E$, es necesario y suficiente el cumplimiento de la condición $\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=2$. Análogamente se considera el segundo caso.

496. Supongamos que a la matriz $(A,\ B)$, donde

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1k}\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ a_{m1} & \dots & a_{mk}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & \dots & b_{1s}\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ b_{m1} & \dots & b_{ms}\end{pmatrix},$$

se le agrega la columna $C=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ c_m\end{pmatrix}$, la cual, al agregarla a la matriz B no aumenta su rango. Entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}b_{11}y_1+\dots+b_{1s}y_s&=c_1,\\ &\dots\dots\\ b_{m1}y_1+\dots+b_{ms}y_s&=c_m\end{aligned}$$

es compatible. Pero conjuntamente con él, es compatible también el sistema

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+\dots+a_{1k}x_k+b_{11}y_1+\dots+b_{1s}y_s&=c_1,\\ &\dots\dots\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mk}x_k+b_{m1}y_1+\dots+b_{ms}y_s&=c_m.\end{aligned}$$

Por consiguiente, el rango de la matriz $(A,\ B)$ es igual al rango de la matriz $(A,\ B,\ C)$.

Supongamos ahora que las columnas de la matriz B se agregan a la matriz A sucesivamente, una a una. En este caso, debido a lo que acabamos de demostrar, el rango puede aumentar en 1 solamente cuando aumenta el rango de B. Por consiguiente, rango $(A,\ B)\leqslant$ rango $A+$rango B.

497. Sea rango $(E+A)=r_1$, rango $(E-A)=r_2$. Como $(E+A)+(E-A)=2E$, se tiene $r_1+r_2\geqslant n$. Por otra parte, $(E+A)(E-A)=0$, por lo cual $0\geqslant r_1+r_2-n$. Por consiguiente, $r_1+r_2=n$.

498. El rango de la matriz $(E+A,\ E-A)$ es igual a n. Elijamos de esta matriz una matriz cuadrada no singular P de orden n, y supongamos que sus primeras r columnas pertenecen a la matriz $E+A$ y las demás $n-r$ columnas pertenecen a la matriz $E-A$. Entonces, como $(E+A)(E-A)=0$, se tiene

$$(E+A)P=\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & \dots & q_{nr} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$(E-A)P=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & q_{1,r+1} & \dots & q_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & q_{n,r+1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sumando estas igualdades, resulta

$$2P=\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} & q_{1,r+1} & \dots & q_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & \dots & q_{nr} & q_{n,r+1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Restando, se obtiene

$$2AP=\begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1r} & -q_{1,r+1} & \dots & -q_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & \dots & q_{nr} & -q_{n,r+1} & \dots & -q_{nn} \end{pmatrix}=2P\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

De aquí se deduce inmediatamente lo que se quería demostrar.

499. Si $AA^{-1}=E$ y ambas matrices son de elementos numéricos enteros, entonces $|A|\cdot|A^{-1}|=1$, de donde se deduce que $|A|=\pm 1$, puesto que $|A|$ y $|A|^{-1}$ son números enteros. Es obvio que la condición $|A|=\pm 1$ también es suficiente para que la matriz A^{-1} sea de elementos numéricos enteros.

500. Sea A una matriz no singular de elementos numéricos enteros. Entre los elementos de la primera columna siempre hay alguno distinto de cero. Multiplicando ciertas filas de la matriz A por -1 se puede conseguir que todos los elementos de la primera columna sean no negativos. Elijamos entre ellos el menor positivo y restemos su respectiva fila de alguna otra que contenga un elemento positivo en la primera columna. Obtenemos de nuevo una matriz con elementos no negativos en la primera columna, pero uno de ellos será menor que en la matriz inicial. Continuamos este proceso siempre que esto sea posible. Después de una cantidad finita de pasos del proceso obtendremos una matriz cuyos elementos de la primera columna serán iguales a cero, a excepción de uno positivo. Entonces, permutando dos filas llevamos el elemento distinto de 0 de la primera columna a la primera fila. Después, sin tocar la primera fila, mediante las mismas operaciones conseguimos que en la segunda columna, en la diagonal, resulte un elemento positivo, y que los situados debajo sean ceros. Después pasamos a la tercera columna, etc. Al fin y al cabo la matriz quedará reducida a la forma triangular. Entonces, agregando (o restando) cada fila una cantidad adecuada de veces a las situadas por encima, conseguimos que los elementos situados encima de la diagonal principal satisfagan a las condiciones propuestas.

Todas las operaciones mencionadas equivalen a multiplicar a la izquierda por ciertas matrices unimodulares, de donde se deduce inmediatamente el resultado pedido.

501. Sea $A=P_1R_1=P_2R_2$, donde las matrices P_1, R_1 y P_2, R_2 satisfacen a las condiciones del problema 500. Entonces de la igualdad $P_2^{-1}P_1=R_2R_2^{-1}$ se deduce que la matriz unimodular de elementos numéricos enteros $C=P_2^{-1}P_1$ también tiene la forma triangular. Supongamos que

$$R_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad R_2=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces de la igualdad $R_2=CR_1$ sacamos la conclusión ante todo de que $b_{11}=c_{11}a_{11}, \dots, b_{nn}=c_{nn}a_{nn}$, de donde se deduce que todos los c_{ii} son positivos. Pero $c_{11}c_{22} \dots c_{nn}=|c|=\pm 1$, por consiguiente, $c_{11}=c_{22}=\dots=c_{nn}=1$ y $a_{ii}=b_{ii}$.

Por otra parte, $b_{12}=c_{11}a_{12}+c_{12}a_{22}=a_{12}+c_{12}a_{22}$, de donde $c_{12}=\dfrac{b_{12}-a_{12}}{a_{22}}$. Pero $0 \leqslant b_{12} < b_{22}=a_{22}$, $0 \leqslant a_{12} < a_{22}$, por consiguiente, $|c_{12}| < 1$, por lo cual, $c_{12}=0$. Del mismo modo, comparando sucesivamente (por columnas) los demás elementos en la igualdad matricial $CR_1=R_2$, sacamos la conclusión de que todos los $c_{ik}=0$ para $k > i$, es decir, $C=E$, y, por consiguiente, $R_1=R_2$, $P_1=P_2$. Por lo tanto, en cada clase siempre hay una y sólo una matriz de la forma R.

El número de matrices R con los elementos diagonales dados $d_1, d_2, \dots, d_n$, es igual, evidentemente, a $d_2d_3^2 \dots d_n^{n-1}$, y por consiguiente, el número de matrices R con el determinante dado k, es igual a $F_n(k)=\sum d_2d_3^2 \dots d_n^{n-1}$, donde el signo $\sum$ se extiende a todos los números enteros positivos $d_1, d_2, \dots, d_n$ que satisfacen a la condición $d_1d_2 \dots d_n=k$. Si $k=ab$, $(a, b)=1$, entonces cada factor d_i en la igualdad $k=d_1d_2 \dots d_n$ se descompone de un modo único en dos factores α_i, β_i, de modo que $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n=a$, $\beta_1\beta_2 \dots \beta_n=b$. Por consiguiente,

$$F_n(k)=\sum_{d_1d_2 \dots d_n=k} d_2d_3^2 \dots d_n^{n-1}=\sum_{\substack{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n=a \\ \beta_1\beta_2 \dots \beta_n=b}} \alpha_2\alpha_3^2 \dots \alpha_n^{n-1}\beta_2\beta_3^2 \dots \beta_n^{n-1}=$$

$$=\sum_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n=a} \alpha_2\alpha_3^2 \dots \alpha_n^{n-1} \cdot \sum_{\beta_1\beta_2 \dots \beta_n=b} \beta_2\beta_3^2 \dots \beta_n^{n-1}=F_n(a)\cdot F_n(b).$$

De aquí que, si $k=p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$ es la descomposición canónica de k en factores primos, se tiene $F_n(k)=F_n\left(p_1^{m_1}\right) \dots F_n\left(p_s^{m_s}\right)$.

No queda más que calcular $F_n(p^m)$. Con este fin, descomponemos la suma para calcular $F_n(p^m)$ en dos partes, donde en la primera $d_n=1$ y en la segunda d_n es divisible por p, $d_n=pd_n'$. Esto proporciona la fórmula $F_n(p^m)=F_{n-1}(p^m)+$ $+p^{n-1}F_n(p^{m-1})$, de la cual fácilmente se establece por el método de inducción matemática que

$$F_n(p^m)=\frac{(p^{m+1}-1)(p^{m+2}-1)\dots(p^{m+n-1}-1)}{(p-1)(p^2-1)\dots(p^{n-1}-1)}.$$

502. Tomando el elemento de la matriz, distinto de cero, que es menor en valor absoluto, lo trasladamos al ángulo superior de la izquierda permutando las filas y columnas. Después agregamos la primera fila y la primera columna a todas las demás filas y columnas o las restamos de ellas varias veces, hasta que todos los elementos de la primera fila y de la primera columna resulten menores en valor absoluto que el elemento angular. Luego repetimos este proceso, el cual se terminará después de una cantidad finita de pasos, puesto que después de cada paso en el ángulo superior de la izquierda aparecerá un elemento menor en valor absoluto que el anterior. Pero el proceso puede terminarse solamente cuando todos los elementos de la primera fila y de la primera columna, a excepción del elemento angular, sean iguales a 0. Después de esto transformamos por el mismo método la matriz formada por las 2^{as}, ..., n-ésimas filas y columnas. Al fin y al cabo la matriz se transforma a la forma diagonal. En virtud del resultado del problema 489, todas las transformaciones descritas equivalen a multiplicar a la derecha y a la izquierda por matrices unimodulares.

503. Multiplicar a la izquierda por la matriz A^m es equivalente a agregar a la primera fila la segunda, multiplicada por m. Multiplicar a la izquierda por B^m es equivalente a agregar a la segunda fila la primera, multiplicada por m.

Sea $U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz dada de elementos numéricos enteros con el determinante igual a 1. Efectuemos la división con resto de a por c: $a=mc+a_1$, $0\leqslant a_1<|c|$; después dividimos c por a_1: $c=m_1a_1+c_2$, $0\leqslant c_2<a_1$, etc., hasta que la división se efectúe sin resto. Entonces $A^{-m}U=U_1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix}$, $B^{-m}U_1=$ $=U_2=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, etc. Al fin y al cabo obtendremos una matriz U_{k+1} de la forma $\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ 0 & d_{k+1} \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 0 & b_{k+1} \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$. Además, como todos los elementos a_k y c_k son positivos y la matriz U_{k+1} es unimodular, se tiene $a_k=d_{k+1}=1$ en el primer caso, y $c_k=-b_{k+1}=1$ en el segundo. Por lo tanto, $U_{k+1}=\begin{pmatrix} 1 & b_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^{b_k}$ en el primer caso, y $U_{k+1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d_k \end{pmatrix}=A^{-1}BA^{d_k-1}$ en el segundo. Con esto, el teorema queda demostrado.

504. Una matriz de determinante igual a -1, al multiplicarla por C, se transforma en una matriz de determinante igual a 1. Cada matriz de éstas es el producto de potencias de A y B. Pero $B=CAC$.

505. Sea $|A|=1$, $A^2=E$, $A\neq E$. Entonces (problema 498)

$$A=P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

para cierta matriz no singular P. Determinemos la matriz P de tal modo que sea de elementos numéricos enteros y que su determinante sea lo más pequeño posible. Como $A+E=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, la matriz $A+E$ es de rango 1 y, por consiguiente,

$$A+E=\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\mu_2 & \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_2\mu_1 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\mu_3 \\ \lambda_3\mu_1 & \lambda_3\mu_2 & \lambda_3\mu_3 \end{pmatrix}$$

siendo $\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=2$ (problema 495). Como la matriz $A+E$ es de elementos numéricos enteros, los números λ_1, λ_2, λ_3, y los números μ_1, μ_2, μ_3, se pueden considerar enteros.

Formemos un sistema de ecuaciones para los componentes de la matriz P; es fácil comprobar que se puede tomar por P la matriz

$$P=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & -\delta \\ \lambda_2 & \frac{\mu_3}{\delta} & u\mu_1 \\ \lambda_3 & -\frac{\mu_2}{\delta} & v\mu_1 \end{pmatrix},$$

donde δ es el máximo común divisor de μ_2, μ_3, y u, v son unos números enteros tales que $u\mu_2+v\mu_3=\delta$.

El determinante de la matriz P es igual a 2.

Basándose en el resultado del problema 500, $P=QR$, donde Q es unimodular, R es una de las siete matrices triangulares posibles de determinante igual a 2.

Por lo tanto, $Q^{-1}AQ$ es igual a una de las siete matrices $R\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}R^{-1}$.

Resulta que entre estas matrices sólo hay tres distintas, y dos de ellas se convierten una en otra mediante una transformación de matriz unimodular. Quedan dos, indicadas en las condiciones del problema.

506. a) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; d) 13.

507. 45.

508. Como resultado se obtiene la identidad de Euler:

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)=(aa_1+bb_1+cc_1)^2+$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1c_2-a_2c_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2.$$

509. El menor formado por los elementos de las filas de índices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ y de las columnas de índices $k_1, k_2, \ldots, k_m$, es el determinante del producto de la matriz formada por las filas $i_1, i_2, \ldots, i_m$ del primer factor, por la matriz formada por las columnas $k_1, k_2, \ldots, k_m$ del segundo. Por ello, éste es igual a la suma de todos los menores posibles de m-ésimo orden formados por las filas de la primer matriz de índices $i_1, i_2, \ldots, i_m$, multiplicados por los menores correspondientes formados por las columnas de la segunda matriz de índices $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

510. El menor diagonal de la matriz $\overline{A}A$ es igual a la suma de los cuadrados de todos los menores de la matriz A del mismo orden, formados por los elementos de las columnas que tienen iguales índices que las columnas de la matriz $\overline{A}A$ que contienen al menor tomado. Por consiguiente, éste es no negativo.

511. Si todos los menores principales de k-ésimo orden de la matriz $\overline{A}A$ son iguales a 0, entonces, en virtud del resultado del problema 510, todos los menores de orden k de la matriz A son iguales a 0. Por consiguiente, el rango de la matriz A, y junto con él también el rango de la matriz $\overline{A}A$, es menor que k.

512. La suma de todos los menores diagonales de orden k de la matriz $\overline{A}A$ es igual a la suma de los cuadrados de todos los menores de orden k de la matriz A. También es igual a este mismo número la suma de todos los menores diagonales de orden k de la matriz $A\overline{A}$.

513. Se obtiene como resultado de aplicar el teorema del determinante del producto de dos matrices al producto de la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$ por su transpuesta.

514. Se obtiene como resultado de aplicar el teorema del determinante del producto a

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \\ \dots & \dots \\ a_n' & b_n' \end{pmatrix}.$$

515. Se deduce inmediatamente de la identidad del problema 513. El signo de igualdad es posible solamente si el rango de la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ es menor que dos, es decir, si los números $a_1, a_2, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_n$ son proporcionales.

516. Se deduce inmediatamente de la identidad del problema 514. El signo de igualdad es posible solamente si los números $a_1, a_2, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_n$ son proporcionales.

517. Supongamos que la matriz B tiene m columnas y que la matriz C tiene k columnas. Según el teorema de Laplace $|A| = \sum B_i C_i$, donde B_i son todos los determinantes posibles de orden m, formados de la matriz B, y C_i son sus complementos algebraicos, iguales salvo los signos, a los determinantes de orden k formados de la matriz C. En virtud de la desigualdad de Buniakovski (problema 515), $|A|^2 \leqslant \sum B_i^2 \sum C_i^2$. Pero $\sum B_i^2 = |\bar{B}B|$, $\sum C_i^2 = |\bar{C}C|$.

518. Sea

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} \end{pmatrix};\quad A = (B,\ C).$$

La desigualdad que se demuestra es trivial si $m+k > n$; para el caso $m+k=n$ fue establecida en el problema 517. No queda más que considerar el caso $m+k < n$. Supongamos primero que $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} c_{is} = 0$ para cualesquiera j, s. Entonces

$$\bar{A}A = \begin{pmatrix} \bar{B}B & 0 \\ 0 & \bar{C}C \end{pmatrix} \text{ y, por consiguiente, } |\bar{A}A| = |\bar{B}B| \cdot |\bar{C}C|.$$

En el caso general es suficiente resolver el problema suponiendo que el rango de la matriz A es igual a $m+k$, puesto que en caso contrario la desigualdad es trivial.

Completemos la matriz A hasta obtener la matriz cuadrada (A, D), de modo que el rango de la matriz D sea igual a $n-m-k$ y las sumas de los productos de los elementos de cualquier columna de la matriz D por los elementos de cualquer columna de la matriz A sean iguales a 0. Por ejemplo, esto se puede hacer así. Primero se completa la matriz A hasta obtener una matriz cuadrada no singular $\varepsilon' = (A,\ D')$, lo cual, evidentemente, es posible, y después se sustituyen todos los elementos de la matriz D' por sus complementos algebraicos en ε'. El rango de la matriz D, construida de este modo, será igual al número de sus columnas $n-m-k$, puesto que ésta es la parte de la matriz formada por los complementos algebraicos de la matriz ε', la cual se diferencia de la matriz no singular $(\bar{\varepsilon}')^{-1}$ solamente en el factor $|\varepsilon'|$.

Designemos $(A,\ D)$ con P y $(C,\ D)$ con Q. Entonces, en virtud del resultado del problema 517, $|\bar{P}P| \leqslant |\bar{B}B| \cdot |\bar{Q}Q|$. Pero $|\bar{P}P| = |\bar{A}A| \cdot |\bar{D}D|$ y $|\bar{Q}Q| = |\bar{C}C| \cdot |\bar{D}D|$. De aquí se deduce que

$$|AA| \leqslant |\bar{B}B| \cdot |\bar{C}C|,$$

puesto que $|\bar{D}D| > 0$.

519. Se deduce inmediatamente del resultado del problema 518, al aplicarlo a la matriz $\overline{A}$.

520. El determinante de A^*A es igual a la suma de los cuadrados de los módulos de todos los menores de orden m de la matriz A, donde m es el número de columnas de la matriz A.

521. La resolución es semejante a la resolución de los problemas 517, 518. Para una matriz cuadrada el problema se resuelve aplicando el teorema de Laplace y la desigualdad de Buniakovski. La matriz rectangular se debe completar hasta obtener una cuadrada, de modo que la suma de los productos de los elementos de cualquier columna de la matriz A por los números conjugados con los elementos de cualquier columna de la matriz que la completa, sea igual a 0.

522. Aplicando unas cuantas veces el resultado del problema 521 a la matriz A, tomando por B una matriz formada por una columna, obtenemos:

$$|A^*A| = \| A \|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|^2 \dots \sum_{i=1}^{n} |a_{in}|^2 \leqslant n^n M^{2n},$$

de donde se deduce que

$$\| A \| \leqslant n^{\frac{n}{2}} M^n.$$

523. Completemos el determinante dado Δ hasta obtener un determinante Δ_1 de orden $n+1$, añadiendo a la izquierda una columna cuyos elementos sean todos iguales a $\frac{M}{2}$, y arriba una fila de ceros. Entonces $\Delta = \frac{2}{M}\Delta_1$. Restemos de todas las columnas del determinante Δ_1 la primera. Resulta un determinante, cuyos elementos no superan a $\frac{M}{2}$. Aplicando el resultado del problema 522, se obtiene lo que se quería demostrar.

524. El extremo $n^{\frac{n}{2}} M^n$ se alcanza, por ejemplo, para el módulo del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}, \text{ donde } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

525. Construyamos una matriz de orden $n = 2^m$ del modo siguiente. Ante todo construimos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Después cada uno de sus elementos iguales a 1 lo sustituimos por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, y cada elemento igual a -1 lo sustituimos por la matriz $-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Obtenemos la matriz de 4° orden

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con ésta obramos del mismo modo, obteniendo una matriz de 8° orden, etc.

Fácilmente se observa que para las matrices así construidas las sumas de los productos de los elementos correspondientes de dos columnas distintas son iguales a 0. Por consiguiente,

$$\overline{A}A=\begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix},\quad |\overline{A}A|=n^n,\quad \|A\|=n^{\frac{n}{2}}.$$

Para la matriz MA se cumple la igualdad:

$$\|MA\|=M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

526. Demostremos que todos los elementos de la matriz, para la cual el valor absoluto de su determinante alcanza el valor máximo, son iguales a ± 1. En efecto, si $-1 < a_{ik} < 1$, $\Delta \geqslant 0$ y $A_{ik} > 0$, entonces, al sustituir a_{ik} por 1, el determinante aumenta, y si $\Delta \geqslant 0$ y $A_{ik} < 0$, al sustituir a_{ik} por -1, el determinante aumenta. Si $\Delta < 0$, el valor absoluto del determinante aumentará al sustituir a_{ik} por la unidad con el signo contrario al de A_{ik}. Finalmente, si $A_{ik}=0$, el valor del determinante no se altera al sustituir a_{ik} por 1 o -1. Sin restringir generalidad se puede considerar que todos los elementos de la primera fila y de la primera columna del determinante máximo son iguales a 1; esto puede conseguirse multiplicando por -1 las filas y columnas. Restemos ahora la primera fila del determinante máximo de todas las demás. Entonces el determinante se reducirá a un determinante de orden $n-1$ cuyos elementos son todos iguales a 0 ó a -2. Este último es igual a $2^{n-1}N$, donde N es un número entero.

527. 4 para $n=3$; 48 para $n=5$.

528. Para una matriz singular A el resultado es trivial. Supongamos que A es no singular y sea $\overline{A}$ su transpuesta, Δ su determinante y A' la recíproca de A. Entonces $A'=\Delta C\overline{A}^{-1}C$, donde $C=\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & +1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{pmatrix}$; esto se deduce inmediatamente de la regla de la formación de la matriz inversa. Por esto

$$|A'|=\Delta^{n-1} \text{ y } (A')'=\Delta^{n-1}\cdot C(\overline{A}')^{-1}C=\Delta^{n-1}\cdot\Delta^{-1}A=\Delta^{n-2}A.$$

529. Supongamos que el menor de la matriz A', que es la recíproca de la matriz no singular A, está formado por las filas de índices $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ y las columnas de índices $k_1 < k_2 < \dots < k_m$. Sean $i_{m+1} < i_{m+2} < \dots < i_n$ los índices de las filas que no figuran en el menor, y $k_{m+1} < k_{m+2} < \dots < k_n$ los índices de las columnas que no figuran en el menor. Multipliquemos el menor considerado por el determinante Δ de la matriz A:

$$\Delta\cdot\begin{vmatrix} \Delta_{i_1k_1} & \dots & \Delta_{i_1k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{i_mk_1} & \dots & \Delta_{i_mk_m} \end{vmatrix}=(-1)^{i_1+\dots+i_m+k_1+\dots+k_m}\Delta\cdot\begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & \dots & A_{i_mk_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i_1k_m} & \dots & A_{i_mk_m} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & \dots & A_{i_mk_1} & A_{i_{m+1}k_1} & \dots & A_{i_nk_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i_1k_m} & \dots & A_{i_mk_m} & A_{i_{m+1}k_m} & \dots & A_{i_nk_m} \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_m} & \dots & a_{i_1k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_mk_1} & \dots & a_{i_mk_m} & \dots & a_{i_mk_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_nk_1} & \dots & a_{i_nk_m} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix}=$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \Delta & & \\ a_{i_{m+1}k_1} & \dots & a_{i_{m+1}k_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}k_n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i_nk_1} & \dots & a_{i_nk_{m+1}} & \dots & a_{i_nk_n} & \end{vmatrix} = \Delta^m \cdot \begin{vmatrix} a_{i_{m+1}k_{m+1}} & \dots & a_{i_{m+1}k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_nk_{m+1}} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix},$$

de donde se deduce lo que se quería demostrar.

530, 531. Se deduce inmediatamente del teorema del determinante del producto de dos matrices rectangulares.

532. Hay que establecer una numeración lexicográfica de las combinaciones, es decir, hay que considerar que la combinación $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ precede a la combinación $j_1 < j_2 < \dots < j_m$, si la primera diferencia distinta de 0 en la serie $i_1 - j_1$, $i_2 - j_2$, ..., es negativa. Entonces cada menor de la matriz triangular, cuyos índices de las columnas forman una combinación que precede a la combinación de los índices de las filas, es igual a 0.

533. En virtud de los resultados de los problemas 531, 491, es suficiente demostrar el teorema para las matrices triangulares. En virtud del resultado del problema 532, para una matriz triangular A, tenemos:

$$|A'_m| = \prod_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} a_{i_1i_1}a_{i_2i_2} \dots a_{i_mi_m} = |A|^{C_{n-1}^{m-1}}.$$

534. Las propiedades a) y b) se deducen inmediatamente de la definición. Para establecer la propiedad c) conviene designar los elementos del producto de Kronecker, tomando como índices de ellos, no los índices de los pares, sino los pares mismos. Supongamos que

$$C = (A' \cdot A'') \times (B' - B''), \quad A' \times B' = G, \quad A'' \times B'' = H.$$

Entonces

$$c_{i_1k_1,\, i_2k_2} = \sum_{i=1}^{n} a'_{i_1i}a''_{ii_2} \sum_{k=1}^{m} b'_{k_1k}b''_{kk_2} = \sum_{i,\,k} a'_{i_1i}b'_{k_1k}a''_{ii_2}b''_{kk_2} = \sum_{i,\,k} g_{i_1k_1,\, ik}h_{ik,\, i_2k_2},$$

de donde $C = G \cdot H$, como se quería demostrar.

535. El determinante de la matriz $A \times B$ no depende del método de numeración de los pares, puesto que un cambio de la numeración da lugar a las mismas permutaciones de las filas y columnas. Por otra parte,

$$A \times B = (A \times E_m) \cdot (E_n \times B).$$

Para una numeración adecuada de los pares, la matriz $A \times E_m$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A & & & & \\ & A & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & A \end{pmatrix}$$

donde la matriz A se repite m veces. Por consiguiente, el determinante de $A \times E_m$ es igual a $|A|^m$. Del mismo modo (pero para otra numeración de los pares), nos convencemos de que el determinante de $E_n \times B$ es igual a $|B|^n$. Por lo tanto, $|A \times B| = |A|^m \cdot |B|^n$.

536. El elemento de la fila de índice α y de la columna de índice β de la matriz C_{jk} es igual a

$$c_{(j-1)m+\alpha,\,(k-1)m+\beta} = \sum_{s=1}^{mn} a_{(j-1)m+\alpha,\, s}b_{s,\,(k-1)m+\beta} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{v=1}^{m} a_{(j-1)m+\alpha,\,(j-1)m+v}b_{(j-1)m+v,\,(k-1)m+\beta}.$$

Pero la suma interior en la última expresión es el elemento de la matriz $A_{ij}B_{jk}$, tomado de la fila de índice α y de la columna de índice β. Por lo tanto, $C_{ik}=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}$.

537. Para $n=1$ el teorema es trivial. Supongamos que el teorema ya está demostrado para las matrices de "orden" $n-1$ y con esta hipótesis demostremos el teorema para las matrices de "orden" n.

Consideremos primero el caso en que A_{11} es una matriz no singular:

$$C=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Multipliquemos la matriz C a la derecha por D, donde

$$D=\begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} & \dots & -A_{11}^{-1}A_{1n} \\ & E & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{pmatrix}.$$

Entonces $C'=CD$ tendrá la forma

$$C'=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $A'_{ik}=A_{ik}-A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1k}$.

Todas las matrices que figuran en las mallas de las matrices C, D y C' son conmutables entre sí. Es fácil verificar que, cumpliéndose esta condición, el teorema del determinante del producto de dos matrices subsiste también para los determinantes formales.

La matriz D posee el determinante formal E, el determinante verdadero D es igual a 1.

Por consiguiente, $|C|=|C'|=|A_{11}|\cdot\begin{vmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{vmatrix}$, y para el determinante formal B se tiene: $B=A_{11}\cdot B'$, donde B' es el determinante formal de la matriz

$$\begin{pmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{pmatrix}.$$

En virtud de la hipótesis inductiva

$$|B'|=\begin{vmatrix} A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{vmatrix}$$

y, por consiguiente, $|B|=|A_{11}|\cdot|B'|=|C|$, como se quería demostrar.

Para librarse de la restricción $|A_{11}|\neq 0$, se puede obrar del modo siguiente. Consideremos la matriz

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix} A_{11}+\lambda E_m & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

y designemos con $B(\lambda)$ su determinante formal.

Como $|A_{11}+\lambda E_m|=\lambda^m+\ldots\neq 0$, $|C(\lambda)|=|B(\lambda)|$. Estos determinantes son ambos polinomios en λ. Comparando sus términos independientes obtenemos $|C|=|B|$. Con esto se termina la demostración.

Capítulo 5

POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES DE UNA VARIABLE

538. a) $2x^6-7x^5+6x^4-3x^3-x^2-2x+1$; b) $x^5-x^4-4x^3+3x+1$.

539. a) El cociente es $2x^2+3x+11$, el residuo es $25x-5$.
b) El cociente es $\frac{3x-7}{9}$, el residuo es $\frac{-26x-2}{9}$.

540. $p=-q^2-1$, $m=q$.

541. 1) $q=p-1$, $m=0$; 2) $q=1$, $m=\pm\sqrt{2-p}$.

542. $(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$.

543. a) $(x-1)(x^3-x^2+3x-3)+5$;
b) $(x+3)(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109)-327$;
c) $(x+1+i)\{4x^2-(3+4i)x+(-1+7i)\}+8-6i$;
d) $(x-1+2i)[x^2-2ix-5-2i]-9+8i$.

544. a) 136; b) $-1-44i$.

545. a) $(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$;
b) $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$;
c) $(x-2)^4-18(x-2)+38$;
d) $(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$;
e) $(x+1-2i)^4-(x+1-2i)^3+2(x+1-2i)+1$.

546. a) $\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{6}{(x-2)^3}+\frac{11}{(x-2)^4}+\frac{7}{(x-2)^5}$;
b) $\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{4}{(x+1)^3}+\frac{2}{(x+1)^5}$.

547. a) $x^4+11x^3+45x^2+81x+55$;
b) $x^4-4x^3+6x^2+2x+8$.

548. a) $f(2)=18$, $f'(2)=48$, $f''(2)=124$, $f'''(2)=216$, $f^{IV}(2)=240$, $f^{V}(2)=120$;
b) $f(1+2i)=-12-2i$, $f'(1+2i)=-16+8i$, $f''(1+2i)=-8+30i$, $f'''(1+2i)=24+30i$, $f^{IV}(1+2i)=24$.

549. a) 3; b) 4.

550. $a=-5$.

551. $A=3$, $B=-4$.

552. $A=n$, $B=-(n+1)$.

555. Para que $f(x)$ sea divisible por $(x-1)^{k+1}$ es necesario y suficiente que sea $f(1)=a_0+a_1+\ldots+a_n=0$ y que $f'(x)$ sea divisible por $(x-1)^k$, para lo cual, a su vez, cumpliéndose la condición $f(1)=0$, es necesario y suficiente que $f_1(x)=nf(x)-xf'(x)$ sea divisible por $(x-1)^k$. Considerando formalmente $f_1(x)$ como un polinomio de n-ésimo grado, repetimos este razonamiento k veces.

556. a es una raíz de orden $k+3$, donde k es el orden de multiplicidad de a como raíz de $f'''(x)$.

557. $3125b^2+108a^5=0,\quad a\neq 0$.

558. $b=9a^2,\quad 1728a^5+c^2=0$.

559. La derivada $x^{n-m-1}[nx^m+(n-m)a]$ no tiene raíces múltiples, a excepción de 0.

560. Designando con d el máximo común divisor de m y n, $m=dm_1$, $n=dn_1$, obtenemos la condición en la forma

$$(-1)^{n_1}(n_1-m_1)^{n_1-m_1}m_1^{m_1}a^{n_1}=b^{m_1}n_1^{n_1}.$$

562. Toda raíz, distinta de cero, de orden $k-1$ del polinomio

$$a_1x^{p_1}+a_2x^{p_2}+\ldots+a_kx^{p_k}$$

satisface a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a_1x^{p_1}+\quad a_2x^{p_2}+\ldots+\quad a_kx^{p_k}&=0,\\
p_1a_1x^{p_1}+\quad p_2a_2x^{p_2}+\ldots+\quad p_ka_kx^{p_k}&=0,\\
p_1^2a_1x^{p_1}+\quad p_2^2a_2x^{p_2}+\ldots+\quad p_k^2a_kx^{p_k}&=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
p_1^{k-2}a_1x^{p_1}+p_2^{k-2}a_2x^{p_2}+\ldots+p_k^{k-2}a_kx^{p_k}&=0,
\end{aligned}$$

de donde se deduce que los números $a_1x^{p_1}$, $a_2x^{p_2}$, $\ldots$, $a_kx^{p_k}$ son proporcionales a los complementos algebraicos de los elementos de la última fila del determinante de Vandermonde

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1\\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots p_k\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ p_1^{k-1} & p_2^{k-1} & p_3^{k-1} & \ldots p_k^{k-1}\end{vmatrix}.$$

Fácilmente se comprueba que

$$\frac{\Delta}{\Delta_i}=\prod_{s\neq i}(p_i-p_s)=\varphi'(p_i).$$

De aquí se deduce que los números $a_ix^{p_i}$ son inversamente proporcionales a $\varphi'(p_i)$, es decir,

$$a_1x^{p_1}\varphi'(p_1)=a_2x^{p_2}\varphi'(p_2)=\ldots=a_kx^{p_k}\varphi'(p_k).$$

Todos los razonamientos expuestos pueden invertirse.

563. Si $f(x)$ es divisible por $f'(x)$, entonces el cociente es un polinomio de primer grado con el coeficiente superior $\frac{1}{n}$, donde n es el grado de $f(x)$. Por esto $nf(x)=(x-x_0)f'(x)$ Derivando resulta $(n-1)f'(x)=(x-x_0)\ f''(x)$, etc., de donde

$$f(x)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x)=a_0(x-x_0)^n.$$

Lo recíproco es evidente.

564. La raíz múltiple del polinomio $f(x)=1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ tiene que ser también raíz de su derivada

$$f'(x)=1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)-\frac{x^n}{n!}.$$

Por consiguiente, si $f(x_0)=f'(x_0)=0$, se tiene $x_0=0$, pero 0 no es raíz de $f(x)$.

565. Si $f(x)=(x-x_0)^k f_1(x)$, donde $f_1(x)$ es una función racional fraccionaria que no se anula para $x=x_0$, entonces la derivación directa da:

$$f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0, \quad f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

Recíprocamente, si $f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0$ y $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, se tiene $f(x)=(x-x_0)^k f_1(x)$, $f_1(x_0)\neq 0$, puesto que si fuese $f(x)=(x-x_0)^m q(x)$, $q(x_0)\neq 0$ para $m\neq k$, la serie de derivadas sucesivas que se anulan para $x=x_0$ sería más corta o más larga.

566. La función

$$g(x)=\frac{\psi(x)}{w(x)}=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

satisface a la condición

$$g(x_0)=g'(x_0)=\ldots=g^{(n)}(x_0)=0.$$

Por consiguiente, $\psi(x)=(x-x_0)^{n+1}F(x)$, donde $F(x)$ es un polinomio, como se quería demostrar.

567. Si $f_1(x)f_2(x_0)-f_2(x)f_1(x_0)$ no es idénticamente igual a 0, se puede considerar que $f_1(x_0)\neq 0$. Examinemos la función racional fraccionaria $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}-\frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}$. Esta no es idénticamente nula y tiene la raíz x_0. El orden de multiplicidad de esta raíz es una unidad mayor que el orden de x_0, como raíz de la derivada, igual a $\frac{f_1(x)f_2'(x)-f_2(x)f_1'(x)}{[f_1(x)]^2}$, de donde se deduce inmediatamente lo que se demuestra.

568. Sea x_0 una raíz de orden k para $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)$. Entonces $f(x_0)\neq 0$, pues en caso contrario x_0 sería una raíz común de $f(x)$ y $f'(x)$. Según el problema anterior, x_0 es una raíz de orden $k+1$ para el polinomio $f(x)f'(x_0)-f(x_0)f'(x)$, cuyo grado no es superior a n. Por consiguiente, $k+1\leqslant n$, $k\leqslant n-1$.

569. El polinomio $f(x)f'(x_0)-f(x_0)f'(x)$ tiene que tener la raíz x_0 de n—ésimo orden, es decir, tiene que ser igual a $A(x-x_0)^n$, donde A es una constante. El desarrollo según las potencias de $x-x_0$, después de hacer la sustitución $x-x_0=z$, da

$$(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n)a_1-(a_1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots+na_nz^{n-1})a_0=Az^n,$$

siendo

$$a_0=f(x_0)\neq 0.$$

De aquí que $a_2=\frac{a_1^2}{2a_0}$, $a_3=\frac{a_1^3}{a_0^2 3!}$, ..., $a_n=\frac{a_1^n}{a_0^{n-1}n!}$.

Haciendo la sustitución $\frac{a_1}{a_0}=\alpha$, obtenemos

$$f(x)=a_0\left[1+\frac{\alpha(x-x_0)}{1}+\frac{\alpha^2(x-x_0)^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{\alpha^n(x-x_0)^n}{n!}\right].$$

570. Por ejemplo, $\delta=\frac{1}{21}\left(\frac{1}{20}\text{ ya no vale}\right)$.

571. Por ejemplo, $\delta=\frac{1}{25}\left(\frac{1}{24}\text{ ya no vale}\right)$.

572. Por ejemplo, $M=6$.

573. Por ejemplo,

a) $x=\rho i$, $0<\rho<\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$; b) $x=\rho$, $0<\rho<\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

574. Por ejemplo,

a) $x=1-\rho, \quad 0<\rho<\frac{1}{8}$;

b) $x=1+\rho\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{4}\right), \quad \rho<\sqrt[4]{8}$;

c) $x=1+\rho i, \ \rho<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

575. El desarrollo del polinomio $f(z)$ según las potencias de $z-i=h$ da

$$f(z)=(2-i)\left[1+(1-i)h^3-\frac{4+2i}{5}h^4+\frac{1+3i}{5}h^5\right].$$

Haciendo $h=a(1-i)$, obtenemos

$$f(z)=(2-i)\left[1-4a^3+4a^3\left(\frac{4+2i}{5}a-\frac{4+2i}{5}a^2\right)\right],$$

de donde

$$|f(z)|\leqslant\sqrt{5}\left(|1-4a^3|+4a^3\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}\right)<\sqrt{5}$$

para $0<a<\frac{1}{2}$.

576. Representando el polinomio en la forma

$$f(z)=f(z_0)\{1+r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)(z-z_0)^k[1+(z-z_0)\psi(z)]\},$$

hacer $z-z_0=\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$, tomar $\theta=\frac{2m\pi-\varphi}{k}$ y hacer ρ tan pequeño, que sea $|(z-z_0)\psi(z)|<1$. Entonces

$$|f(z)|=|f(z_0)||1+r\rho^k+r\rho^k(z-z_0)\psi(z)|>f(z_0).$$

577. Se demuestra igual que para un polinomio, aplicando la fórmula de Taylor para la función racional fraccionaria (problema 566), la cual se debe truncar después del primer término de coeficiente distinto de cero, sin contar $f(x_0)$.

578. Designemos con M el extremo inferior de $|f(z)|$ al variar z en el recinto considerado.

Dividiendo el recinto en partes, demostremos la existencia de un punto z_0 en cualquier entorno del cual el extremo inferior de $|f(z)|$ es igual a M. En caso de necesidad simplificamos la fracción por $z-z_0$ elevado a la potencia más alta posible. Sea $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ después de esta simplificación. Entonces $\psi(z_0)\neq 0$, pues en caso contrario en un entorno suficientemente pequeño de z_0 $|f(z)|$ sería arbitrariamente grande y en un entorno suficientemente pequeño de z_0 el extremo inferior de $|f(z)|$ no podría ser igual a M. Por consiguiente, $f(z)$ es continua para $z=z_0$ y, debido a la continuidad, $|f(z_0)|=M$, como se quería demostrar.

579. Falta el lema referente al crecimiento del módulo.

580. Según la hipótesis

$$f(a)\neq 0,\ f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0, \quad f^{(k)}(a)\neq 0$$

y según la fórmula de Taylor

$$f(z)=f(a)+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k[1+\varphi(z)], \quad \varphi(a)=0.$$

Hagamos

$$\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi), \quad z-a=\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta).$$

Tomemos ρ tan pequeño que sea $|\varphi(z)| < 1$, $r\rho^k < 1$. Entonces $|f(z)| = |f(a)| \times$ $\times |1 + r\rho^k [\cos(\varphi + k\theta) + i \operatorname{sen}(\varphi + k\theta)] + r\rho^k \lambda|$, donde $|\lambda| < 1$.

Para $\theta = \dfrac{(2m-1)\pi - \varphi}{k}$, $m = 1, 2, \ldots, k$, $|f(z)| < |f(a)|$.

Para $\theta = \dfrac{2m\pi - \varphi}{k}$, $m = 1, 2, \ldots, k$, $|f(z)| > |f(a)|$.

Por lo tanto, al variar θ desde $\dfrac{\pi - \varphi}{k}$ hasta $\dfrac{\pi - \varphi}{k} + 2\pi$ la función $|f(z)| -$ $- |f(a)|$ cambia el signo $2k$ veces. Debido a la continuidad de $|f(z)| - |f(a)|$ como función de θ, $|f(z)| - |f(a)|$ se anula $2k$ veces, como se quería demostrar.

581. Igual que en el problema anterior, demostremos que $\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(a))$ e $\operatorname{Im}(f(z)) - \operatorname{Im}(f(a))$ para $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ cambia $2k$ veces el signo al variar θ en 2π, si ρ es suficientemente pequeño. Según la fórmula de Taylor, haciendo $\dfrac{1}{k!} f^{(k)}(a) = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, obtenemos $f(z) - f(a) = r\rho^k [\cos(\varphi + k\theta) +$ $+ i \operatorname{sen}(\varphi + k\theta)] [1 + \varphi(z)]$, $\varphi(a) = 0$. Tomando ρ de tal modo que sea $|\varphi(z)| < 1$, y haciendo $\varphi(z) = \varphi_1(z) + i\varphi_2(z)$, obtenemos:

$$\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(a)) = r\rho^k [\cos(\varphi + k\theta)(1 + \varphi_1(z)) - \operatorname{sen}(\varphi + k\theta)\varphi_2(z)];$$
$$\operatorname{Im}(f(z)) - \operatorname{Im}(f(a)) = r\rho^k [\operatorname{sen}(\varphi + k\theta)(1 + \varphi_1(z)) + \cos(\varphi + k\theta)\varphi_2(z)].$$

Haciendo $\varphi + k\theta = m\pi$, $m = 0, 1, 2, \ldots, 2k$, obtenemos

$$\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(a)) = r\rho^k (-1)^m (1 + \varepsilon_m),$$

donde ε_m es el valor correspondiente de $\varphi_1(z)$, $|\varepsilon_m| < 1$.

De aquí se deduce que $\operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(a))$ cambia el signo $2m$ veces al recorrer z la circunferencia $|z - a| = \rho$. Haciendo $\varphi + k\theta = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, $m = 0, 1, \ldots, 2k$, se obtiene un resultado similar para $\operatorname{Im}(f(z)) - \operatorname{Im}(f(a))$.

582. a) $(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$;

c) $$\left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times \left(x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times \left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\times \left(x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right);$$

d) $(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

583. a) $2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x - \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$;

b) $2\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x + \dfrac{\operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\operatorname{sen}\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}}\right)$; c) $\prod\limits_{k=1}^{m}\left(x - \operatorname{tg}^2\dfrac{(2k-1)\pi}{4m}\right)$.

584. a) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$;

b) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$;

c) $\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}-2(x+1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)\times$

$$\times\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}+2(x+1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right);$$

d) $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2\sqrt[2n]{2}\,x\cos\frac{(8k+1)\pi}{4n}+\sqrt[n]{2}\right)$;

e) $(x^2-x\sqrt{a+2}+1)(x^2+x\sqrt{a+2}+1)$;

f) $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(3k+1)2\pi}{3n}+1\right)$.

585. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)=$
$=x^5-(8+i)x^4+(24+7i)x^3-(34+17i)x^2+(23+17i)x-(6+6i)$;

b) $(x+1)^3(x-3)(x-4)=x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12$;

c) $(x-i)^2(x+1+i)=x^3+(1-i)x^2+(1-2i)x-1-i$.

586. $\prod_{k=1}^{n} X_k(x)$.

587. a) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)=x^6-9x^5+33x^4-$
$-65x^3+74x^2-46x+12$;

b) $(x^2-4x+13)^3=x^6-12x^5+87x^4-376x^3+1131x^2-2028x+2197$;

c) $(x^2+1)^2(x^2+2x+2)=x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x+2$.

588. a) $(x-1)^2(x+2)$; b) $(x+1)^2(x^2+1)$; c) $(x-1)^3$.

589. x^d-1, donde d es el máximo común divisor de los números m y n.

590. x^d+a^d, si los números $\frac{m}{d}$ y $\frac{n}{d}$ son impares; 1, si al menos uno de estos es par; d es el máximo común divisor de los números m y n.

591. a) $(x-1)^2(x+1)$; b) $(x-1)^3(x+1)$; c) x^d-1 (d es el máximo común divisor de m y n).

592. Hagamos la notación $\lambda_0=\frac{u(x_0)}{v(x_0)}$ y descompongamos $f(x)$ en factores lineales $f(x)=(x-\lambda_0)(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_{k-1})$. Entonces $\lambda_j\neq\lambda_0$ para $j\neq 0$. Por otra parte,

$$f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{1}{[v(x)]^k}(u(x)-\lambda_0 v(x))\ldots(u(x)-\lambda_{k-1}v(x)).$$

En virtud de las hipótesis del teorema y de que $u(x_0)-\lambda_j v(x_0)=v(x_0)(\lambda_0-\lambda_j)\neq 0$, el polinomio $u(x)-\lambda_0 v(x)$ tiene la raíz x_0 de orden $k>1$. Por consiguiente, $u'(x)-\lambda_0 v'(x)$ tiene la raíz x_0 de orden $k-1$. Por otra parte,

$$f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)=\frac{1}{[v'(x)]^k}(u'(x)-\lambda_0 v'(x))\ldots(u'(x)-\lambda_{k-1}v'(x)).$$

Evidentemente, ninguna función $u'(x)-\lambda_j v'(x)$, $j\neq 0$, se anula para $x=x_0$. Por consiguiente, $f\left(\frac{u'(x)}{v'(x)}\right)$ tiene la raíz x_0 de orden $k-1$, como se quería demostrar.

593. Si w es una raíz del polinomio x^2+x+1, entonces $w^3=1$. Por consiguiente, $w^{3m}+w^{3n+1}+w^{3p+2}=1+w+w^2=0$.

594. La raíz λ del polinomio x^2-x+1 satisface a la ecuación $\lambda^3=-1$. Por consiguiente,

$$\lambda^{3m}-\lambda^{3n+1}+\lambda^{3p+2}=(-1)^m-(-1)^n\lambda+(-1)^p\lambda^2=$$
$$=(-1)^m-(-1)^p+\lambda[(-1)^p-(-1)^n].$$

La última expresión puede anularse solamente si $(-1)^m=(-1)^p=(-1)^n$, es decir, si m, n, p son simultáneamente pares o impares.

595. $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Estos factores son primos entre sí, x^2+x+1 siempre es divisor de $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ (problema 593). No queda más que averiguar cuándo éste es divisible por x^2-x+1. La sustitución de una raíz λ de este polinomio da $(-1)^m+(-1)^n\lambda+(-1)^p\lambda^2=(-1)^m-(-1)^p+$ $+\lambda[(-1)^n+(-1)^p]$. Como resultado se obtiene 0 solamente cuando $(-1)^m=$ $=(-1)^p=-(-1)^n$, es decir, cuando los números m, p y $n+1$ son simultáneamente pares o impares.

596. Si m no es divisible por 3.

597. Todas las raíces del polinomio $x^{k-1}+x^{k-2}+\ldots+1$ son raíces k-ésimas de 1. Por consiguiente,

$$\xi^{ka_1}+\xi^{ka_2+1}+\ldots+\xi^{ka_k+k-1}=1+\xi+\ldots+\xi^{k-1}=0.$$

De aquí se deduce la divisibilidad, puesto que todas las raíces de $x^{k-1}+\ldots+1$ son simples.

598. La sustitución de la raíz ω del polinomio x^2+x+1 en $f(x)=(1+x)^m-$ $-x^m-1$ da $(1+\omega)^m-\omega^m-1$. Pero $1+\omega=-\omega^2=\lambda$ es una raíz primitiva de 6° orden de 1. Por otra parte, $\omega=\lambda^2$, de donde $f(\omega)=\lambda^m-\lambda^{2m}-1$.

Para

$m=6n$	$f(\omega)=-1\neq 0;$
$m=6n+1$	$f(\omega)=\lambda-\lambda^2-1=0;$
$m=6n+2$	$f(\omega)=\lambda^2+\lambda-1\neq 0;$
$m=6n+3$	$f(\omega)=-3\neq 0;$
$m=6n+4$	$f(\omega)=-\lambda+\lambda^2-1\neq 0;$
$m=6n+5$	$f(\omega)=-\lambda^2+\lambda-1=0.$

Por lo tanto, $f(x)$ es divisible por x^2+x+1 si $m=6n+1$ y $m=6n+5$.

599. Para $m=6n+2$ y $m=6n+4$.

600. $f(\omega)=m(1+\omega)^{m-1}-m\omega^{m-1}=m[\lambda^{m-1}-\lambda^{2(m-1)}]$. $f'(\omega)=0$ solamente para $m=6n+1$.

601. Para $m=6n+4$.

602. No, puesto que las derivadas primera y segunda no se anulan simultáneamente.

603. Para $x=k$, $1\leqslant k\leqslant n$,

$$f(k)=1-\frac{k}{1}+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}-\ldots+(-1)^k\frac{k(k-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots k}=(1-1)^k=0.$$

Por consiguiente, el polinomio es divisible por $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$. Comparando los coeficientes superiores obtenemos:

$$f(x)=\frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

604. Para los valores de m que son primos con n.

605. Si $f(x^n)$ es divisible por $x-1$, entonces $f(1)=0$ y, por consiguiente, $f(x)$ es divisible por $x-1$, de donde se deduce que $f(x^n)$ es divisible por x^n-1.

606. Si $F(x)=f(x^n)$ es divisible por $(x-a)^k$, entonces $F'(x)=f'(x^n)nx^{n-1}$ es divisible por $(x-a)^{k-1}$, de donde se deduce que $f'(x^n)$ es divisible por $(x-a)^{k-1}$. Del mismo modo, $f''(x^n)$ es divisible por $(x-a)^{k-2}$, $\ldots$, $f^{(k-1)}(x^n)$ es divisible por $x-a$. De aquí sacamos la conclusión de que $f(a^n)=f'(a^n)=$ $=\ldots=f^{(k-1)}(a^n)=0$ y, por consiguiente, $f(x)$ es divisible por $(x-a^n)^k$, $f(x^n)$ es divisible por $(x^n-a^n)^k$.

607. Si $F(x)=f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ es divisible por x^2+x+1, entonces $F(w)=$ $=f_1(1)+wf_2(1)=0$ (w es una raíz de x^2+x+1) y $F(w^2)=f_1(1)+w^2f_2(1)=0$, de donde $f_1(1)=0$, $f_2(1)=0$.

608. El polinomio $f(x)$ no tiene raíces reales de orden impar, pues en caso contrario cambiaría de signo. Por consiguiente, $f(x)=[f_1(x)]^2 f_2(x)$, donde $f_2(x)$ es un polinomio que carece de raíces reales. Las raíces imaginarias del polinomio $f_2(x)$ las dividimos en dos grupos, llevando las raíces conjugadas a distintos grupos. Los productos de los factores lineales que corresponden a las raíces de cada grupo forman polinomios de coeficientes conjugados $\psi_1(x)+i\psi_2(x)$ y $\psi_1(x)-$ $-i\psi_2(x)$. Por lo tanto,

$$f_2(x)=\psi_1^2(x)+\psi_2^2(x) \quad \text{y} \quad f(x)=(f_1\psi_1)^2+(f_1\psi_2)^2.$$

609. a) $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$; b) $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$;

c) $x_1-a, x_2-a, \ldots, x_n-a$. d) $bx_1, bx_2, \ldots, bx_n$.

610. Una de las raíces tiene que ser igual a $-\frac{p}{2}$. La relación buscada es: $8r=4pq-p^3$.

611. $x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{1}{3}$.

612. $a^3-4ab+8c=0$.

613. Para cualquier α se conserva la relación entre las raíces. Tomando $\alpha=-\frac{a}{4}$, obtenemos para la ecuación transformada $y^4+a'y^3+b'y^2+c'y+d'=0$, $a'=0$, $a'^3-4a'b'+8c'=0$, de donde $c'=0$.

614. $a^2d=c^2$.

615. Dividiendo por x^2 se obtiene $x^2+\frac{d}{x^2}+a\left(x+\frac{c}{ax}\right)+b=0$. Haciendo la sustitución $x+\frac{c}{ax}=z$, obtenemos $x^2+\frac{d}{x^2}=x^2+\frac{c}{a^2x^2}=z^2-2\frac{c}{a}$, de donde para z obtenemos la ecuación cuadrática $z^2+az+b-2\frac{c}{a}=0$. Una vez hallado z, fácilmente se halla x (ecuaciones recíprocas generalizadas).

616. a) $x=1\pm\sqrt{3}$, $1\pm i\sqrt{2}$; b) $x=1\pm 2i$, $-2\pm i$;

c) $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}$; d) $x=1\pm\sqrt{3}$; $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

617. $\lambda=\pm 6$.

618. 1) $b=c=0$, a es arbitrario; 2) $a=-1$, $b=-1$, $c=1$.

619. 1) $a=b=c=0$; 2) $a=1$, $b=-2$, $c=0$; 3) $a=1$, $b=-1$, $c=-1$; 4) $b=\lambda$, $a=-\frac{1}{\lambda}$, $c=\frac{2-\lambda^2}{\lambda}$, donde $\lambda^3-2\lambda+2=0$.

620. $\lambda=-3$.

621. $q^3+pq+q=0$. 622. $a_1^2-2a_2$.

623. $x_i=-\frac{a_1}{n}+\frac{2i-n-1}{2}h$, $i=1, 2, \ldots, n$, donde

$$h=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{12(n-1)a_1^2-24na_2}{n^2-1}}.$$

624. Si las raíces formasen una progresión aritmética entonces según la fórmula del problema anterior éstas serían iguales a:

a) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$; estos números verdaderamente satisfacen a la ecuación;

b) $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; estos números no satisfacen a la ecuación.

625. Sea $y=Ax+B$ la ecuación de la recta buscada. Entonces las raíces de la ecuación $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=Ax+B$ forman una progresión aritmética. Hallamos éstas según el problema 623:

$$x_i=-\frac{a}{4}+\frac{2i-5}{2}h, \quad i=1, 2, 3, 4,$$

donde

$$h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9a^2-24b}{15}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-8b}{5}}.$$

De aquí que

$$A-c=x_1x_4(x_2+x_3)+x_2x_3(x_1+x_4)=$$

$$=-\left(\frac{a^2}{16}-\frac{9}{4}h^2\right)\frac{a}{2}-\left(\frac{a^2}{16}-\frac{1}{4}h^2\right)\frac{a}{2}=\frac{a^3-4ab}{8},$$

$$d-B=x_1x_2x_3x_4=\frac{1}{1\,600}(36b-11a^2)(4b+a^2).$$

Por consiguiente,

$$A=\frac{a^3-4ab+8c}{8}, \quad B=d-\frac{1}{1\,600}(36b-11a^2)(4b+a^2).$$

Los puntos de intersección serán reales y no coincidirán, si $3a^2-8b>0$, es decir, si la derivada segunda $2(6x^2+3ax+b)$ cambia el signo al variar x a lo largo del eje real.

626. $x^4-ax^2+1=0$, donde $a=\frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}$.

627. $(x^2-x+1)^3-a(x^2-x)^2=0$, $\quad a=\frac{(\alpha^2-\alpha+1)^3}{(\alpha^2-\alpha)^2}$.

628. $f'(x_i)=(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)$;
$f''(x_i)=2[(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)+$
$+(x_i-x_1)(x_i-x_3)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)+\ldots$
$\ldots+(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots$

$$\ldots(x_i-x_{n-1})]=2f'(x_i)\sum_{\substack{s=1\\(s\neq i)}}^{n}\frac{1}{x_i-x_s} \text{ (si } x_s\neq x_i).$$

629. Se deduce inmediatamente del problema 628.
630. Sea $x_i=x_1+(i-1)h$. Entonces

$$f'(x_i)=(-1)^{n-i}(i-1)!\,(n-i)!\,h^{n-1}.$$

631. a) $x+1$; b) x^2+1; c) x^3+1; d) x^2-2x+2;
e) x^3-x+1; f) $x+3$; g) x^2+x+1; h) $x^2-2x\sqrt{2}-1$; i) $x+2$;
j) 1; k) $2x^2+x-1$; l) x^2+x+1.
632. a) $(-x-1)f_1(x)+(x+2)f_2(x)=x^2-2$;
b) $-f_1(x)+(x+1)f_2(x)=x^3+1$;
c) $(3-x)f_1(x)+(x^2-4x+4)f_2(x)=x^2+5$;
d) $(1-x^2)f_1(x)+(x^3+2x^2-x-1)f_2(x)=x^3+2$;

e) $(-x^2+x+1)f_1(x)+(x^3+2x^2-5x-4)f_2(x)=3x+2$;

f) $-\frac{x-1}{3}f_1(x)+\frac{2x^2-2x-3}{3}f_2(x)=x-1$.

633. a) $M_2(x)=x$, $M_1(x)=-3x^2-x+1$;

b) $M_2(x)=-x-1$, $M_1(x)=x^3+x^2-3x-2$;

c) $M_2(x)=\frac{-x^2+3}{2}$, $M_1(x)=\frac{x^4-2x^2-2}{2}$;

d) $M_2(x)=-\frac{2x^2+3x}{6}$, $M_1(x)=\frac{2x^3+5x^2-6}{6}$;

e) $M_2(x)=3x^2+x-1$, $M_1(x)=-3x^3+2x^2+x-2$;

f) $M_2(x)=-x^3-3x^2-4x-2$,
$M_1(x)=x^4+6x^3+14x^2+15x+7$.

634. a) $M_2(x)=\frac{-16x^2+37x+26}{3}$, $M_1(x)=\frac{16x^3-53x^2-37x-23}{3}$;

b) $M_2(x)=4-3x$, $M_1(x)=1+2x+3x^2$;

c) $M_2(x)=35-84x+70x^2-20x^3$,
$M_1(x)=1+4x+10x^2+20x^3$.

635. a) $M_1(x)=9x^2-26x-21$,
$M_2(x)=-9x^3+44x^2-39x-7$;

b) $M_1(x)=3x^3+3x^2-7x+2$,
$M_2(x)=-3x^3-6x^2+x+2$.

636. a) $4x^4-27x^3+66x^2-65x+24$;

b) $-5x^7+13x^6+27x^5-130x^4+75x^3+266x^2-440x+197$.

637. $N(x)=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}x^{m-1}$;

$$M(x)=1+\frac{m}{1}(1-x)+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}(1-x)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}(1-x)^{n-1}=$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-1)!}-\frac{m}{1}\,\frac{(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-2)!}x+$$

$$+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\,\frac{(m+3)\ldots(m+n-1)}{(n-3)!}x^2-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$

638. 1.

639. a) $(x+1)^4(x-2)^2$; b) $(x+1)^4(x-4)$;

c) $(x-1)^3(x+3)^2(x-3)$; d) $(x-2)(x^2-2x+2)^2$;

e) $(x^3-x^2-x-2)^2$; f) $(x^2+1)^2(x-1)^3$;

g) $(x^4+x^3+2x^2+x+1)^2$.

640. a) $f(x)=x+1+\frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$;

b) $f(x)=-x^4+4x^3-x^2-7x+5$;

c) $f(x)=1+\frac{2}{5}(x-1)-\frac{1}{105}(x-1)(4x-9)+\frac{1}{945}(x-1)(4x-9)(x-4)$,

$f(2)=1\frac{389}{945}=1,4116\ldots$ $(\sqrt{2}=1,4142\ldots)$; d) $f(x)=x^3-9x^2+21x-8$.

641. a) $y=-\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4)+$

$+\frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4)-2(x-1)(x-2)(x-4)+$

$+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)=-\frac{4}{3}x^3+10x^2-\frac{65}{3}x+15$;

b) $y=\frac{1}{2}[5-(1-i)x-x^2-(1+i)x^3]$.

642. $f(x)=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right)x^k$.

Solución. $f(x)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(s+1)(x^n-1)}{(x-\varepsilon_s)n\varepsilon_s^{n-1}}=$

$$=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(s+1)(1-x^n)}{1-x\varepsilon_s^{-1}}=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(s+1)x^k\varepsilon_1^{-ks}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x^k\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\varepsilon_1^{-ks}=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}x^k\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\varepsilon_k^{-s}=\frac{n+1}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{1-\varepsilon_k^{-1}}=$$

$$=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right)x^k.$$

643. $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(x^n-1)}{(x-\varepsilon_k)n\varepsilon_k^{n-1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k(1-x^n)}{1-x\varepsilon_k^{-1}}$, $\quad f(0)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k$.

644. Hagamos $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.
Sea $f(x)$ un polinomio arbitrario de grado no superior a $n-1$, y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sus valores para $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces

$$f(x_0)=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\varphi(x_0)}{\varphi'(x_i)(x_0-x_i)}.$$

Como $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son arbitrarios,

$$\frac{\varphi(x_0)}{\varphi'(x_k)(x_0-x_k)}=\frac{1}{n}.$$

Consideremos el polinomio

$$F(x)=n[\varphi(x_0)-\varphi(x)]-(x_0-x)\varphi'(x).$$

Este es de grado menor que n y se anula para $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$. Por lo tanto, $F(x)=0$. Desarrollemos $\varphi(x)$ según las potencias de $(x-x_0)$:

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k.$$

Se tiene $\sum_{k=1}^{n}(n-k)c_k(x-x_0)^k=0$. Por consiguiente, $c_1=c_2=\ldots=c_{n-1}=0$;

$$\varphi(x)=(x-x_0)^n+c_0, \quad x_i=x_0+\sqrt[n]{-c_0}.$$

645. $x^s=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$. Comparando los coeficientes de x^{n-1} se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^s}{\varphi'(x_i)}=0.$$

646. $x^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}$. Comparando los coeficientes de x^{n-1} se obtiene: $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}}{\varphi'(x_i)}=1$.

647. $a_i=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}y_k\Delta_{ki}$, donde $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$, Δ_{ki} es el complemento algebraico del elemento de la k-ésima fila e $(i+1)$-ésima columna del determinante Δ.

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}y_k\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_{ki}x^i=\sum_{k=1}^{n}y_k\frac{\Delta_k}{\Delta},$$

donde Δ_k es el determinante que se obtiene de Δ al sustituir los elementos de la k-ésima fila por $1, x, \ldots, x^{n-1}$.

Calculando los determinantes Δ_k y Δ como determinantes de Vandermonde, se obtiene

$$\frac{\Delta_k}{\Delta}=\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}=\frac{\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)},$$

donde $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

De aquí que $f(x)=\sum\frac{y_k\varphi(x)}{(x-x_k)\varphi'(x_k)}$, como se quería demostrar.

648. $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$.

649. $f(x)=1+\frac{(a-1)x}{1}+\frac{(a-1)^2x(x-1)}{1\cdot 2}+\ldots$

$$\ldots+\frac{(a-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

650. $f(x)=1-\frac{2x}{1}+\frac{2x(2x-2)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{2x(2x-2)\ldots(2x-4n+2)}{(2n)!}$.

651. $f(x)=1-\frac{x-1}{2!}+\frac{(x-1)(x-2)}{3!}-\ldots$

$$\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}=\frac{n!-(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{n!x}.$$

652. $f(x)=\frac{\varphi(a)-\varphi(x)}{\varphi(a)(x-a)}$, donde $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

653. Buscamos $f(x)$ en la forma

$$f(x)=A_0+A_1\frac{x-m}{1}+A_2\frac{(x-m)(x-m-1)}{1\cdot 2}+\ldots$$
$$\ldots+A_n\frac{(x-m)(x-m-1)\ldots(x-m-n+1)}{n!},$$

donde m, $m+1$, ..., $m+n$ son los valores enteros de x en los cuales, según la condición, $f(x)$ toma valores enteros.

Haciendo sucesivamente $x=m$, $m+1$, ..., $m+n$, obtenemos las igualdades para hallar A_0, A_1, ..., A_n:

$$A_0=f(m),$$
$$A_k=f(m+k)-A_0-\frac{k}{1}A_1-\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}A_2-\ldots-kA_{k-1},$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

de las cuales se deduce que todos los coeficientes A_k son enteros. Para valores enteros de x todos los sumandos de $f(x)$ se convierten en los coeficientes binomiales con los factores enteros A_k, por lo cual son números enteros. Por consiguiente, $f(x)$ toma valores enteros para valores enteros de x, como se quería demostrar.

654. El polinomio $F(x)=f(x^2)$ de grado $2n$ toma valores enteros para $2n+1$ valores $x=-n,\ -(n-1),\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ y, según el problema anterior, toma valores enteros para todos los valores enteros de x.

655. a) $\frac{1}{12(x-1)}-\frac{4}{3(x+2)}+\frac{9}{4(x+3)}$;

b) $-\frac{1}{6(x-1)}+\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x-3)}+\frac{1}{6(x-4)}$;

c) $\frac{2}{x-1}+\frac{-2+i}{2(x-i)}+\frac{-2-i}{2(x+i)}$;

d) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{i}{4(x-i)}+\frac{i}{4(x+i)}$;

e) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\varepsilon}{x-\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{x-\varepsilon^2}\right)$, $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

f) $-\frac{1}{16}\left(\frac{1+i}{x-1-i}+\frac{1-i}{x-1+i}+\frac{-1+i}{x+1-i}+\frac{-1-i}{x+1+i}\right)$;

g) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$;

h) $-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{x-\eta_k}$, $\eta_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{n}$;

i) $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k(-1)^{n-k}}{x-k}$; j) $\sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^{n-k} C_{2n}^{n+k}}{x-k}$;

k) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \operatorname{sen} \frac{2k-1}{2n}\pi}{x-\cos \frac{2k-1}{2n}\pi}$.

656. a) $\frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$;

b) $\frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}$;

c) $\frac{1}{8} \frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{8} \frac{x-2}{x^2-2x+2}$;

d) $\frac{1}{18}\left(\frac{1}{x^2+3x+3} + \frac{1}{x^2-3x+3} - \frac{2}{x^2+3}\right)$;

e) $\frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{x-1} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1} - \cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right]$;

f) $\frac{(-1)^m}{2n+1}\left[\frac{1}{x+1} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{x\cos\frac{2k(m+1)\pi}{2n+1} + \cos\frac{2km\pi}{2n+1}}{x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1}\right]$;

g) $\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x\cos\frac{k\pi}{n} - 1}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}\right]$;

h) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n} - x\cos\frac{(2k-1)(2m+1)\pi}{2n}}{x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+1}$;

i) $\frac{1}{(n!)^2 x} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x}{(n+k)!\,(n-k)!\,(x^2+k^2)}$.

657. a) $\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2}$;

b) $\frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^2}$;

c) $\frac{3}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}$;

d) $\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_k^2}{(x-\varepsilon_k)^2} - (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}\right]$, $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$;

e) $$\frac{1}{x^m}+\frac{\frac{n}{1}}{x^{m-1}}+\frac{\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}}{x^{m-2}}+\ldots+\frac{\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}}{x}+$$
$$+\frac{1}{(1-x)^n}+\frac{\frac{m}{1}}{(1-x)^{n-1}}+\frac{\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}}{(1-x)^{n-2}}+\ldots+\frac{\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}}{1-x};$$

f) $$\frac{1}{(-4a^2)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}\cdot\left[\frac{1}{(a-x)^{n-k}}+\frac{1}{(a+x)^{n-k}}\right];$$

g) $$\frac{1}{(4a^2)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(2a)^{n-k}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}\cdot\left[\frac{1}{(a-ix)^{n-k}}+\frac{1}{(a+ix)^{n-k}}\right];$$

h) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{g(x_k)}{[f'(x_k)]^2(x-x_k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{g'(x_k)f'(x_k)-g(x_k)f''(x_k)}{[f'(x_k)]^3(x-x_k)}.$$

658. a) $$-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{x-1}{4(x^2+1)}+\frac{x+1}{2(x^2+1)^2};$$

b) $$-\frac{1}{x}+\frac{7}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{6x+2}{x^2+x+1}-\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2};$$

c) $$\frac{1}{16(x-1)^2}-\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{16(x+1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}+\frac{1}{4(x^2+1)}+\frac{1}{4(x^2+1)^2};$$

d) $$\frac{1}{4n^2}\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2n-1}{x-1}+\frac{2n-1}{x+1}\right]+$$
$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{n}\left(1-2x\cos\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)^2}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{n}-\left(n-\frac{1}{2}\right)x\cos\frac{k\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1}.$$

659. a) $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$; b) $\dfrac{x\varphi'(x)-n\varphi(x)}{\varphi(x)}$; c) $\dfrac{[\varphi'(x)]^2-\varphi(x)\varphi''(x)}{[\varphi(x)]^2}$.

660. a) 9; b) $-\dfrac{\varphi'(2)}{\varphi(2)}+\dfrac{\varphi'(1)}{\varphi(1)}=-\dfrac{17}{5}$; c) 17.

661. $0{,}51x+2{,}04$. **662.** $y=\frac{1}{7}[0{,}55x^2+2{,}35x+6{,}98]$.

663. Poniendo $\frac{p}{q}$ en $f(x)$, obtenemos después de multiplicar por q^n:
$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0,$$
de donde
$$\frac{a_0p^n}{q}=-(a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}),$$
$$\frac{a_nq^n}{p}=-(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+\ldots+a_{n-1}q^{n-1}).$$

En los segundos miembros de las últimas igualdades figuran números enteros. Los números p y q son primos entre sí. Por consiguiente, a_0 es divisible por q, a_n es divisible por p.

Desarrollemos ahora $f(x)$ según las potencias de $x-m$:

$$f(x)=a_0(x-m)^n+c_1(x-m)^{n-1}+\ldots+c_{n-1}(x-m)+c_n.$$

Los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números enteros, puesto que m es entero. $c_n=f(m)$. Haciendo $x=\frac{p}{q}$, obtenemos:

$$a_0(p-mq)^n+c_1(p-mq)^{n-1}q+\ldots+c_{n-1}(p-mq)q^{n-1}+c_nq^n=0,$$

de donde sacamos la conclusión de que $\frac{c_nq^n}{p-mq}$ es entero.

Como la fracción $\frac{p-mq}{q}=\frac{p}{q}-m$ es irreducible, los números $p-mq$ y q son primos entre sí. Por consiguiente, $c_n=f(m)$ es divisible por $p-mq$, como se quería demostrar.

664. Para el ejercicio a) damos una resolución detallada.

Los valores posibles de p son: $1, -1, 2, -2, 7, -7, 14, -14$. El único valor posible de q es 1 (consideramos que el signo se le atribuye al numerador). $f(1)=-4$. Por consiguiente, $p-1$ tiene que ser divisor de 4. Se desprecian las posibilidades $p=1, -2, 7, -7, 14, -14$. No queda más que ensayar -1, 2. $f(-1)\neq 0$; $f(2)=0$. La única raíz racional es $x_1=2$.

b) $x_1=-3$; c) $x_1=-2$, $x_2=3$; d) $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$;

e) $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{4}$; f) $1, -2, 3$; g) $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$;

h) no hay raíces racionales; i) $-1, -2, -3, +4$;

k) $\frac{1}{2}$; l) $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$ m) $x_1=x_2=1$, $x_3=x_4=-3$;

n) $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=x_5=-1$; o) $x_1=x_2=x_3=2$.

665. Según el problema 663, p y $p-q$ son simultáneamente números impares. Por consiguiente, q es un número par y no puede ser igual a la unidad.

666. Según el problema 663, $p-x_1q=\pm 1$, $p-x_2q=\pm 1$, de donde $(x_2-x_1)q=\pm 2$ o a 0. El valor 0 no se cuenta, pues $q>0$, $x_2\neq x_1$. Haciendo, para especificar, $x_2>x_1$, obtenemos $(x_2-x_1)q=2$. Esta igualdad es imposible para $x_2-x_1>2$. Supongamos ahora que $x_2-x_1=1$ o a 2. Los únicos valores posibles para p y q, para los cuales es posible la igualdad $(x_2-x_1)q=2$, son: $p=x_1q+1$, $q=\frac{2}{x_2-x_1}$, de donde la única posibilidad para la raíz racional es $\frac{p}{q}=x_1+\frac{1}{q}=\frac{x_1+x_2}{2}$, como se quería demostrar.

667. Se cumple el criterio de Eisenstein:

a) para $p=2$; b) para $p=3$; c) para $p=3$, después de desarrollar el polinomio según las potencias de $x-1$.

668. $$X_p(x)=(x-1)^{p-1}+\frac{p}{1}(x-1)^{p-2}+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(x-1)^{p-3}+\ldots+p.$$

Todos los coeficientes $C_k=\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$, $k\leqslant p-1$, son divisibles por p, puesto que $k!\,C_k=p(p-1)\ldots(p-k+1)$ es divisible por p y $k!$ es primo con p. Por lo tanto, para $X_p(x)$, después de desarrollar según las potencias de $x-1$, se cumple el criterio de Eisenstein para el número primo p.

669. Apliquemos el criterio de Eisenstein para el número p, haciendo $x=y+1$:

$$X_{p^k}(x)=\varphi(y)=\frac{(y+1)^{p^k}-1}{(y+1)^{p^{k-1}}-1}.$$

El coeficiente superior del polinomio φ es igual a 1. El término independiente de $\varphi(y)$, igual a $\varphi(0)=X_{p^k}(1)=p$, es divisible por p y no es divisible por p^2. No queda más que demostrar que todos los demás coeficientes son divisibles por p. Para esto, demostremos por inducción que todos los coeficientes del polinomio $(y+1)^{p^n}-1$, a excepción del coeficiente superior, son divisibles por p. Para $n=1$ esto es cierto. Supongamos que esto es cierto para el exponente p^{n-1}, es decir, que $(y+1)^{p^{n-1}}=y^{p^{n-1}}+1+p\omega_{n-1}(y)$, donde $\omega_{n-1}(y)$ es un polinomio de coeficientes enteros. Entonces $(y+1)^{p^n}=(y^{p^{n-1}}+1+p\omega_{n-1}(y))^p=(y^{p^{n-1}}+1)^p+p\psi(y)=y^{p^n}+1+p\omega_n(y)$; $\psi(y)$ y $\omega_n(y)$ son polinomios de coeficientes enteros. Así, pues,

$$\varphi(y)=\frac{y^{p^k}+p\omega_k(y)}{y^{p^{k-1}}+p\omega_{k-1}(y)}=$$

$$=y^{p^k-p^{k-1}}+p\,\frac{\omega_k(y)-y^{p^k-p^{k-1}}\omega_{k-1}(y)}{y^{p^{k-1}}+p\omega_{k-1}(y)}=y^{p^k-p^{k-1}}+p\chi(y).$$

Los cueficientes del polinomio $\chi(y)$ son enteros, puesto que $\chi(y)$ es el cociente de la división de polinomios de coeficientes enteros y el coeficiente superior del divisor es igual a la unidad. Por consiguiente, todos los coeficientes del polinomio $\varphi(y)$, a excepción del coeficiente superior, son divisibles por p. Las condiciones del teorema de Eisenstein quedan cumplidas.

670. Supongamos que el polinomio es reducible: $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$. Entonces ambos factores tienen coeficientes enteros y sus grados son mayores que 1, puesto que $f(x)$, según la condición, no tiene raíces racionales.

Supongamos que

$$\varphi(x)=b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k,$$
$$\psi(x)=c_0x^m+c_1x^{m-1}+\ldots+c_m,$$

$k\geqslant 2$, $m\geqslant 2$, $k+m=n$. Como $b_kc_m=a_n$ es divisible por p y no es divisible por p^2, se puede admitir que b_k es divisible por p, y c_m no es divisible por p.

Sea b_i el primer coeficiente de $\varphi(x)$, comenzando desde el final, que no es divisible por p, $i\geqslant 0$. Tal coeficiente existe, puesto que $a_0=b_0c_0$ no es divisible por p. Entonces $a_{m+i}=b_ic_m+b_{i+1}c_{m-1}+\ldots$ no es divisible por p, puesto que b_ic_m no es divisible por p y b_{i+1}, b_{i+2}, ... son divisibles por p. Esto contradice a la condición, puesto que $m+i\geqslant 2$.

671. Descomponiendo $f(x)$ en factores irreducibles de coeficientes enteros, examinemos el factor irreducible $\varphi(x)$ cuyo término independiente es divisible por p. Tal factor existe, puesto que a_n es divisible por p. Designemos con $\psi(x)$ el cociente de la división de $f(x)$ por $\varphi(x)$. Supongamos que

$$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m,$$
$$\psi(x)=c_0x^h+c_1x^{h-1}+\ldots+c_h$$

y sea b_i el primer coeficiente de $\varphi(x)$, comenzando desde el final, que no es divisible por p; c_h no es divisible por p, puesto que $a_n=b_mc_h$ no es divisible por p^2.

Por ello $a_{h+i}=b_ic_h+b_{i+1}c_{h-1}+\ldots$ no es divisible por p, de donde se deduce que $h+i\leqslant k$. Por consiguiente, $m\geqslant m+h+i-k=n+i-k\geqslant n-k$.

672. a) $f(0)=1$, $f(1)=-1$, $f(-1)=-1$.

Si $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ y el grado de $\varphi(x)$ es $\leqslant 2$, entonces $\varphi(0)=\pm 1$, $\varphi(1)=\pm 1$, $\varphi(-1)=\pm 1$, es decir, $\varphi(x)$ se determina por una de las tablas:

x	$\varphi(x)$							
-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
0	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1

Las últimas 5 tablas se pueden despreciar, puesto que las últimas 4 determinan polinomios que se diferencian sólo en el signo de los polinomios dados por las primeras cuatro tablas, y la cuarta determina un polinomio idénticamente igual a la unidad. Las primeras tres dan las siguientes posibilidades:

$$\varphi(x)=-(x^2+x-1);\ \varphi(x)=x^2-x-1;\ \varphi(x)=2x^2-1.$$

Los ensayos mediante la división dan:

$$f(x)=(x^2+x-1)(x^2-x-1).$$

b) Es irreducible; c) es irreducible; d) $(x^2-x-1)(x^2-2)$.

673. Un polinomio reducible de tercer grado tiene un factor de primer grado de coeficientes racionales, por lo cual tiene una raíz racional.

674. Un polinomio $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, que no posee raíces racionales, si es reducible, sólo puede descomponerse en factores de segundo grado de coeficientes enteros:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+\lambda x+m)(x^2+\mu x+n).$$

Evidentemente, el número m tiene que ser divisor de d; $mn=d$. Identificando los coeficientes de x^3 y x obtenemos:

$$\lambda+\mu=a,\ n\lambda+m\mu=c.$$

Este sistema es indeterminado solamente si $m=n$, $c=am$, es decir, si $c^2=a^2d$ (véase el problema 614).

Si $m\neq n$, entonces $\lambda=\dfrac{c-am}{n-m}=\dfrac{cm-am^2}{d-m^2}$, como se quería demostrar.

675. Si es reducible, es necesario que

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(x^2+\lambda x+m)(x^3+\lambda' x^2+\lambda'' x+n).$$

Los coeficientes de los factores tienen que ser enteros.

Identificando los coeficientes se tiene $mn=e$, de donde se deduce que m es un divisor de e. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\lambda+\lambda'&=a,\\ n\lambda+m\lambda''&=d,\\ m+\lambda\lambda'+\lambda''&=b,\\ n+\lambda\lambda''+m\lambda'&=c,\end{aligned}$$

de donde

$$m\lambda''-n\lambda'=d-an,$$
$$\lambda(m\lambda''-n\lambda')+m^2\lambda'-n\lambda''=cm-bn$$

y, por lo tanto, $(d-an)\lambda+m^2\lambda'-n\lambda''=cm-bn$. Resolviendo esta ecuación conjuntamente con $\lambda+\lambda'=a$, $n\lambda+m\lambda''=d$, obtenemos:

$$\lambda=\frac{am^3-cm^2-dn+be}{m^3-n^2+ae-dm},$$

como se quería demostrar.

676. a) $(x^2-2x+3)(x^2-x-3)$; b) es irreducible; c) $(x^2-x-4)(x^2+5x+3)$; d) $(x^2-2x+2)(x^3+3x+3)$.

677. Sin restringir generalidad se pueden buscar las condiciones para que el polinomio x^4+px^2+q se descomponga en factores de segundo grado con coeficientes racionales, puesto que si el polinomio tiene una raíz racional x_1, entonces $-x_1$ también es una raíz racional y los factores lineales que les corresponden se pueden unir.

Sea $x^4+px^2+q=(x^2+\lambda_1 x+\mu_1)(x^2+\lambda_2 x+\mu_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2&=0,\\ \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1&=0,\\ \mu_1+\lambda_1\lambda_2+\mu_2&=p,\\ \mu_1\mu_2&=q. \end{aligned}$$

Si $\lambda_1=0$, entonces también $\lambda_2=0$. En este caso, para la existencia de racionales μ_1 y μ_2, es necesario y suficiente que el discriminante p^2-4q sea el cuadrado de un número racional.

Supongamos que $\lambda_1\neq 0$. Entonces $\lambda_2=-\lambda_1$, $\mu_2=\mu_1$ y se tiene

$$q=\mu_1^2,\quad 2\mu_1-p=\lambda_1^2.$$

En resumen, para que el polinomio x^4+px^2+q sea reducible, es necesario y suficiente que se cumpla una de las dos condiciones:

a) p^2-4q es el cuadrado de un número racional;

b) q es el cuadrado del número racional μ_1, $2\mu_1-p$ es el cuadrado del número racional λ_1.

678. Si $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)$, entonces, como $p_1+p_2=a$, se puede escribir:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left(\frac{p_1-p_2}{2}x+\frac{q_1-q_2}{2}\right)^2,$$

donde $\lambda=q_1+q_2$. De aquí se deduce que la ecuación cúbica auxiliar tiene la raíz racional $\lambda=q_1+q_2$.

679. Sea $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ tienen coeficientes enteros. Como $f(a_i)=-1$, tiene que ser $\varphi(a_i)=1$, $\psi(a_i)=-1$, o $\varphi(a_i)=-1$, $\psi(a_i)=1$ y, por consiguiente, $\varphi(a_i)+\psi(a_i)=0$, $i=1, 2, \ldots, n$.
Si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ no son ambas constantes, entonces el grado de $\varphi(x)+\psi(x)$ es menor que n, de donde se deduce que $\varphi(x)+\psi(x)=0$ idénticamente. Así, pues, tiene que ser $f(x)=-[\varphi(x)]^2$. Esto es imposible, puesto que el coeficiente superior de $f(x)$ es positivo.

680. Si $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, entonces $\varphi(a_i)=\psi(a_i)=\pm 1$, puesto que $f(a_i)=1$. Por consiguiente, si φ y ψ no son constantes, resulta que $\varphi(x)=\psi(x)$ idénticamente y

$$f(x)=[\varphi(x)]^2.$$

Esto sólo es posible para n par.

Así, pues, la única descomposición posible es

$$(x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_n)+1=[\varphi(x)]^2.$$

De aquí deducimos, suponiendo que el coeficiente superior de $\varphi(x)$ es positivo, que

$$\varphi(x)+1=(x-a_1)(x-a_3)\ \ldots\ (x-a_{n-1}).$$

$$\varphi(x)-1=(x-a_2)(x-a_4)\ \ldots\ (x-a_n).$$

(Para tener derecho de escribir estas igualdades, es necesario cambiar la numeración de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$.) Y, finalmente,

$$(x-a_1)(x-a_3)\ \ldots\ (x-a_{n-1})-(x-a_2)(x-a_4)\ \ldots\ (x-a_n)=2.$$

Supongamos que $a_1>a_3>\ldots>a_{n-1}$. Poniendo en la última igualdad $x=a_{2k}$, $k=1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, obtenemos

$$(a_{2k}-a_1)(a_{2k}-a_3)\ \ldots\ (a_{2k}-a_{n-1})=2,$$

es decir, el número 2 tiene que descomponerse de $\frac{n}{2}$ modos en $\frac{n}{2}$ factores enteros, dispuestos en orden de crecimiento. Esto es posible solamente si $\frac{n}{2}=2$, $2=-2\cdot(-1)=1\cdot 2$, y si $\frac{n}{2}=1$. Estas dos posibilidades dan lugar a los dos casos de reductibilidad del polinomio $f(x)$, mencionados en las condiciones del problema.

681. Si el polinomio de n-ésimo grado $f(x)$, siendo $n=2m$ o $n=2m+1$, es reducible, entonces el grado de uno de sus factores $\varphi(x)$ no es superior a m. Si $f(x)$ toma los valores ± 1 para más de $2m$ valores enteros de la variable, entonces $\varphi(x)$ también toma los valores ± 1 para los mismos valores de la variable. Entre estos valores para $\varphi(x)$ habrá más de m iguales a $+1$ ó a -1. Pero en tal caso $\varphi(x)=+1$ ó a -1 idénticamente.

682. El polinomio $f(x)$ carece de raíces reales. Por consiguiente, si es reducible, sus factores $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ no tienen raíces reales, por lo cual no cambian de signo para valores reales de x. Se puede suponer que $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$ para todos los valores reales de x. Como $f(a_k)=1$, se tiene $\varphi(a_k)=\psi(a_k)=1$, $k=1, 2, \ldots, n$. Si el grado de $\varphi(x)$ [o de $\psi(x)$] es menor que n, entonces $\varphi(x)=1$ [o $\psi(x)=1$] idénticamente. Por consiguiente, los grados de $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son iguales a n. Entonces $\varphi(x)=1+\alpha(x-a_1)\ldots(x-a_n)$, $\psi(x)=1+\beta(x-a_1)\ldots(x-a_n)$, donde α y β son números enteros. Pero entonces

$$f(x)=(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2+1=1+(\alpha+\beta)(x-a_1)\ldots(x-a_n)+ \\ +\alpha\beta(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2.$$

Identificando los coeficientes de x^{2n} y de x^n obtenemos el sistema de ecuaciones $\alpha\beta=1$, $\alpha+\beta=0$, que carece de soluciones enteras. Por lo tanto, $f(x)$ es irreducible.

683. Supongamos que $f(x)$ toma el valor 1 más de tres veces. Entonces $f(x)-1$ tiene al menos cuatro raíces enteras, es decir,

$$f(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)h(x),$$

donde a_1, a_2, a_3, a_4 y los coeficientes del polinomio $h(x)$ son números enteros. Para valores enteros de x la expresión $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$ es el producto de números enteros distintos entre sí. Dos de ellos pueden ser iguales a $+1$ y -1, los otros dos son distintos de ± 1. Por consiguiente, su producto no puede ser igual a un número primo y, en particular, a -2. Así, pues, $f(x)-1\neq -2$ para valores enteros de x y, por lo tanto, $f(x)\neq -1$.

684. Supongamos que $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$. Uno de los factores de $\varphi(x)$ es de grado $\leqslant\frac{n}{2}$ y toma los valores ± 1 para más de $\frac{n}{2}$ valores enteros de x. Como $\frac{n}{2}\geqslant 6$, resulta que $+\varphi(x)$ o $-\varphi(x)$ toma el valor 1 más de tres veces y, en virtud del resultado del problema 683, no puede tomar el valor -1. Así, pues, $\varphi(x)$ o $-\varphi(x)$ toma el valor $+1$ más de $\frac{n}{2}$ veces y, por consiguiente, $\varphi(x)$ o $-\varphi(x)$ es igual a 1 idénticamente. Por consiguiente, $f(x)$ es irreducible.

Precisando el razonamiento, se puede demostrar que el resultado es justo para $n\geqslant 8$.

685. Supongamos que

$$a[\varphi(x)]^2+b\varphi(x)+1=\psi(x)w(x).$$

Uno de los factores es de grado $\leqslant n$; $\psi(x)$ toma los valores ± 1 para $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$ y, como $n\geqslant 7$, todos estos valores de $\psi(x)$ tienen que ser de un mismo signo. Por lo tanto,

$$\psi(x)=\pm 1+\alpha(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=\pm 1+\alpha\varphi(x).$$

Si $\alpha \neq 0$, entonces $w(x)$ también es de grado n y $w(x) = \pm 1 + \beta\varphi(x)$. Pero la igualdad

$$a[\varphi(x)]^2 + b\varphi(x) + 1 = [\pm 1 + \alpha\varphi(x)][\pm 1 + \beta\varphi(x)]$$

es imposible, puesto que según la condición el polinomio $ax^2 + bx + 1$ es irreducible.

686. a) $f(x) = a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \ldots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right)$.

Supongamos que $\max\left|\frac{a_k}{a_0}\right| = A$. Entonces, para $|x| > 1$, se tiene

$$|f(x)| \geqslant |a_0x^n|\left[1 - \frac{A}{|x|-1}\right] = |a_0x^n|\frac{|x|-1-A}{|x|-1} > 0$$

si $|x| > 1 + A$.

b) $\frac{1}{\rho^n}f(x) = a_0\left(\frac{x}{\rho}\right)^n + \frac{a_1}{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-1} + \frac{a_2}{\rho^2}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{a_n}{\rho^n}$.

En virtud de a), para todas las raíces se tiene

$$\frac{|x|}{\rho} \leqslant 1 + \max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^k}\right|, \quad \text{de donde} \quad |x| \leqslant \rho + \max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|.$$

c) Hagamos $\rho = \max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$. Entonces

$$\left|\frac{a_k}{a_0}\right| \leqslant \rho^k, \qquad \left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right| \leqslant \rho, \qquad \max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right| \leqslant \rho.$$

Por consiguiente, los módulos de todas las raíces no son superiores a

$$\rho + \rho = 2\rho = 2\max\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}.$$

d) Hagamos $\rho = \max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$. Entonces $|a_k| \leqslant |a_1|\rho^{k-1}$, $\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right| \leqslant \left|\frac{a_1}{a_0}\right|$. Por consiguiente, los módulos de las raíces no son superiores a $\rho + \left|\frac{a_1}{a_0}\right| = \left|\frac{a_1}{a_0}\right| + \max\sqrt[k-1]{\left|\frac{a_k}{a_1}\right|}$.

687. Sea $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

$$\varphi(x) = b_0x^n - b_1x^{n-1} - \ldots - b_n;$$

$0 < b_0 \leqslant |a_0|$, $b_1 \geqslant |a_1|$, $\ldots$, $b_n \geqslant |a_n|$. Evidentemente, $|f(x)| \geqslant \varphi(|x|)$. Por otra parte, $\varphi(x) = b_0x^n\left(1 - \frac{b_1}{b_0x} - \frac{b_2}{b_0x^2} - \ldots - \frac{b_n}{b_0x^n}\right)$.

La expresión que figura entre paréntesis crece desde $-\infty$ hasta 1 cuando x varía desde 0 hasta $+\infty$.

Por lo tanto, $\varphi(x)$ tiene una raíz positiva única ξ y $\varphi(x) > 0$ para $x > \xi$. Debido a esto, para $|x| > \xi$ se tiene $|f(x)| \geqslant \varphi(|x|) > 0$, de donde se deduce que los módulos de todas las raíces de $f(x)$ no son superiores a ξ.

688. a) Sea $A = \max\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$. Está claro que

$$|f(x)| \geqslant |a_0x^n|\left(1 - \frac{A}{|x|^r} - \frac{A}{|x|^{r+1}} - \ldots - \frac{A}{|x|^n}\right),$$

de donde, para $|x|>1$,

$$|f(x)|>|a_0x^n|\left(1-\frac{A}{|x|^{r-1}(|x|-1)}\right)=$$
$$=\frac{|a_0x^{n-r+1}|}{|x|-1}[|x|^{r-1}(|x|-1)-A]>\frac{|a_0x|^{n-r+1}}{|x|-1}[(|x|-1)^r-A].$$

Para $|x|>1+\sqrt[r]{A}$ se tiene $|f(x)|>0$.

b) $\frac{1}{\rho^n}f(x)=a_0\left(\frac{x}{\rho}\right)^n+\frac{a_r}{\rho^r}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-r}+\ldots+\frac{a_n}{\rho^n}$.

En virtud de a), para todas las raíces de $f(x)$ se tiene

$$\left|\frac{x}{\rho}\right|<1+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^k}\right|},\ \text{de donde}\ |x|<\rho+\sqrt[r]{\max\left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-r}}\right|}.$$

c) Hagamos $\rho=\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}$. Entonces $|a_k|\leqslant|a_r|\rho^{k-r}$, y los módulos de todas las raíces del polinomio no son superiores a

$$\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|}+\rho=\sqrt[r]{\left|\frac{a_r}{a_0}\right|}+\max\sqrt[k-r]{\left|\frac{a_k}{a_r}\right|}.$$

689. Para las raíces negativas del polinomio, lo que se afirma es evidente. Supongamos para precisar que $a_0>0$ y hagamos la notación $\varphi(x)=a_0x^n-b_1x^{n-1}-b_2x^{n-2}-\ldots-b_n$, donde $b_k=0$ para $a_k>0$, $b_k=-a_k$ para $a_k<0$. Entonces, para x positivo, se tiene:

$$f(x)\geqslant\varphi(x).$$

Por otra parte, $\varphi(x)$ tiene una raíz no negativa única ξ (véase el problema 687) y $\varphi(x)>0$ para $x>\xi$. Por consiguiente, para $x>\xi$ $f(x)\geqslant\varphi(x)>0$.

690. Se deduce inmediatamente de 688, 689, 686 c).

692. Desarrollando $f(x)$ según las potencias de $x-a$, obtenemos para $x\geqslant a$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n>0.$$

693. Hallamos una cota superior de las raíces, aplicando resultados de los problemas 690, 692. Para obtener una cota inferior, sustituimos x por $-x$:
a) $0<x_i<3$; b) $0<x_i<1$; c) $-11<x_i<11$; d) $-6<x_i<2$.

694. a) $f=x^3-3x-1$, $f_1=x^2-1$, $f_2=2x+1$, $f_3=+1$.
Hay tres raíces reales en los intervalos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$.

b) $f=x^3+x^2-2x-1$, $f_1=3x^2+2x-2$, $f_2=2x+1$, $f_3=+1$. Hay tres raíces reales en los intervalos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$.

c) $f=x^3-7x+7$, $f_1=3x^2-7$, $f_2=2x-3$, $f_3=+1$. Hay tres raíces reales en los intervalos $(-4, -3)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

d) $f=x^3-x+5$, $f_1=3x^2-1$, $f_2=2x-15$, $f_3=-1$. Hay una raíz real en el intervalo $(-2, -1)$.

e) $f=x^3+3x-5$, $f_1=x^2+1$. Hay una raíz real en el intervalo $(1, 2)$.

695. a) $f=x^4-12x^2-16x-4$, $f_1=x^3-6x-4$, $f_2=3x^2+6x+2$, $f_3=x+1$, $f_4=1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(4, 5)$.

b) $f=x^4-x-1$, $f_1=4x^3-1$, $f_2=3x+4$, $f_3=+1$. Hay dos raíces reales en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, 2)$.

c) $f=2x^4-8x^3+8x^2-1$, $f_1=x^3-3x^2+2x$, $f_2=2x^2-4x+1$, $f_3=x-1$, $f_4=1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

d) $f=x^4+x^2-1$, $f_1=2x^3+x$, $f_2=-x^2+2$, $f_3=-x$, $f_4=-1$. Hay dos raíces reales en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

e) $f=x^4+4x^3-12x+9$, $f_1=x^3+3x^2-3$, $f_2=x^2+3x-4$, $f_3=-4x+3$, $f_4=1$. No hay raíces reales.

696. a) $f=x^4-2x^3-4x^2+5x+5$, $f_1=4x^3-6x^2-8x+5$, $f_2=22x^2-22x-45$, $f_3=2x-1$, $f_4=1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$, $(-2, -1)$.

b) $f=x^4-2x^3+x^2-2x+1$, $f_1=2x^3-3x^2+x-1$, $f_2=x^2+5x-3$, $f_3=-9x+5$, $f_4=-1$. Hay dos raíces reales en los intervalos $(0, 1)$, $(1, 2)$.

c) $f=x^4-2x^3-3x^2+2x+1$, $f_1=2x^3-3x^2-3x+1$, $f_2=9x^2-3x-5$, $f_3=9x+1$, $f_4=+1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

d) $f=x^4-x^3+x^2-x-1$, $f_1=4x^3-3x^2+2x-1$, $f_2=-5x^2+10x+17$, $f_3=-8x-5$, $f_4=-1$. Hay dos raíces reales en los intervalos $(1, 2)$, $(-1, 0)$.

e) $f=x^4-4x^3-4x^2+4x+1$, $f_1=x^3-3x^2-2x+1$, $f_2=5x^2-x-2$, $f_3=18x+1$, $f_4=+1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(4, 5)$.

697. a) $f=x^4-2x^3-7x^2+8x+1$, $f_1=2x^3-3x^2-7x+4$, $f_2=17x^2-17x-8$, $f_3=2x-1$, $f_4=1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$.

b) $f=x^4-4x^2+x+1$, $f_1=4x^3-8x+1$, $f_2=8x^2-3x-4$, $f_3=87x-28$, $f_4=+1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

c) $f=x^4-x^3-x^2-x+1$, $f_1=4x^3-3x^2-2x-1$, $f_2=11x^2+14x-15$, $f_3=-8x+7$, $f_4=-1$. Hay dos raíces reales en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

d) $f=x^4-4x^3+8x^2-12x+8$, $f_1=x^3-3x^2+4x-3$, $f_2=-x^2+5x-5$, $f_3=-9x+13$, $f_4=-1$. Hay dos raíces reales $x_1=2$, $1 < x_2 < 2$.

e) $f=x^4-x^3-2x+1$, $f_1=4x^3-3x^2-2$, $f_2=3x^2+24x-14$, $f_3=-56x+31$, $f_4=-1$. Hay dos raíces reales en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

698. a) $f=x^4-5x^2-4x+2$, $f_1=x^3-3x-1$, $f_2=3x^2+3x-2$, $f_3=4x+5$, $f_4=1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

b) $f=4x^4-12x^2+8x-1$, $f_1=2x^3-3x+1$, $f_2=6x^2-6x+1$, $f_3=2x-1$, $f_4=1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $(-3, -2)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $(1, 2)$.

c) $f=3x^4+12x^3+9x^2-1$, $f_1=2x^3+6x^2+3x$, $f_2=9x^2+9x+2$, $f_3=13x+8$, $f_4=1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $(-4, -3)$, $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $(0, 1)$.

d) $f=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $f_1=4x^3-3x^2-8x+4$, $f_2=7x^2-8x-4$, $f_3=4x-5$, $f_4=1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$.

e) $f=9x^4-126x^2-252x-140$, $f_1=x^3-7x-7$, $f_2=9x^2+27x+20$, $f_3=2x+3$, $f_4=1$. Hay cuatro raíces reales en los intervalos $(4, 5)$, $\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$, $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$.

699. a) $f=2x^5-10x^3+10x-3$, $f_1=x^4-3x^2+1$, $f_2=4x^3-8x+3$, $f_3=4x^2+3x-4$, $f_4=x$, $f_5=1$. Hay cinco raíces reales en los intervalos $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(1, 2)$.

b) $f=x^6-3x^5-3x^4+11x^3-3x^2-3x+1$, $f_1=2x^5-5x^4-4x^3+11x^2-2x-1$, $f_2=3x^4-6x^3-x^2+4x-1$, $f_3=4x^3-6x^2+1$, $f_4=26x^2-26x+5$, $f_5=2x-1$, $f_6=1$. Hay seis raíces reales en los intervalos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

c) $f=x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$, $f_1=5x^4+4x^3-12x^2-6x+3$, $f_2=4x^3+3x^2-6x-2$, $f_3=3x^2+2x-2$, $f_4=2x-1$, $f_5=1$. Hay cinco raíces reales en los intervalos $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, $(-1, 0)$ $(0, 1)$, $(1, 2)$.

d) $f=x^5-5x^3-10x^2+2$, $f_1=x^4-3x^2-4x$, $f_2=x^3+3x^2-1$, $f_3=-2x^2+x+1$, $f_4=-3x-1$, $f_5=-1$. Hay tres raíces reales en los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$.

700. a) $f=x^4+4x^2-1$, $f_1=x$, $f_2=1$. Hay dos raíces reales en los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

b) $f=x^4-2x^3+3x^2-9x+1$, $f_1=2x-3$, $f_2=1$. Hay dos raíces reales en los intervalos $(0, 1)$ y $(2, 3)$.

c) $f=x^4-2x^3+2x^2-6x+1$, $f_1=2x-3$, $f_2=1$. Hay dos raíces reales en los intervalos $(0, 1)$ y $(2, 3)$.

d) $f=x^5+5x^4+10x^2-5x-3$, $f_1=x^2+4x-1$, $f_2=5x-1$, $f_3=1$. Hay tres raíces reales en los intervalos $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-6, -5)$.

701. La serie de Sturm está formada por los polinomios x^3+px+q, $3x^2+p$, $-2px-3q$, $-4p^3-27q^2$. Si $-4p^3-27q^2>0$, entonces $p<0$. Todos los coeficientes superiores de los polinomios de Sturm son positivos, por lo cual todas las raíces de x^3+px+q son reales. Si $-4p^3-27q^2<0$, entonces, independientemente del signo de p, la serie de Sturm presenta dos variaciones de signo para $-\infty$ y una variación para $+\infty$. En este caso x^3+px+q tiene una raiz real.

702. La serie de Sturm está formada por los polinomios x^n+px+q, $nx^{n-1}+p$, $-(n-1)px-nq$, $-p-n\left(\frac{-nq}{(n-1)p}\right)^{n-1}$.

Para n impar el signo de la última expresión coincide con el signo de $\Delta=-(n-1)^{n-1}p^n-n^nq^{n-1}$. Si $\Delta>0$, entonces es necesario que sea $p<0$. En este caso el polinomio tiene tres raíces reales. Si $\Delta<0$, entonces independientemente del signo de p el polinomio tiene una raiz real.

Para n par el signo de la última expresión en la serie de Sturm coincide con el signo de $-p\Delta$, donde $\Delta=(n-1)^{n-1}p^n-n^nq^{n-1}$. La distribución de los signos en la serie de Sturm para combinaciones distintas de los signos p y Δ viene dada en la tabla:

			f	f_1	f_2	f_3
1. $p>0$,	$\Delta>0$	$-\infty$	+	−	+	−
		$+\infty$	+	+	−	−
2. $p<0$,	$\Delta>0$	$-\infty$	+	−	−	+
		$+\infty$	+	+	+	+
3. $p>0$,	$\Delta<0$	$-\infty$	+	−	+	+
		$+\infty$	+	+	−	+
4. $p<0$,	$\Delta<0$	$-\infty$	+	−	−	−
		$+\infty$	+	+	+	−

Examinando esta tabla, sacamos la conclusión de que para $\Delta>0$ el polinomio tiene dos raíces reales, para $\Delta<0$ no hay raíces reales.

703. La serie de Sturm está formada por los polinomios $f=x^5-5ax^3+5a^2x+2b$, $f_1=x^4-3ax^2+a^3$, $f_2=ax^3-2a^2x-b$, $f_3=a(a^2x^2-bx-a^3)$, $f_4=a(a^5-b^2)x$, $f_5=1$.

Si $\Delta=a^5-b^2>0$, entonces $a>0$ y todos los coeficientes superiores de los polinomios de Sturm son positivos. En este caso todas las cinco raíces del polinomio f son reales. Si $\Delta<0$, entonces, según el signo de a, la distribución de los signos es:

		f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$a>0$	$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
$a<0$	$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
	$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Por consiguiente, para $\Delta < 0$ el polinomio f tiene una raíz real.

704. Sean f_λ y $f_{\lambda-1}$ dos polinomios consecutivos de la serie "completa" de Sturm. Si sus coeficientes superiores tienen signos iguales, sus valores para $+\infty$ no presentan variación de signo mientras que los valores para $-\infty$ presentan una variación, puesto que el grado de uno de los polinomios es par y el del otro es impar. Si los coeficientes superiores tienen signos contrarios, los valores f_λ y $f_{\lambda+1}$ para $+\infty$ presentan una variación de signo mientras que para $-\infty$ no presentan variación. Por esta razón, designando con ν_1 y ν_2 los números de variaciones de signo que presenta la serie de Sturm para $-\infty$ y $+\infty$, tenemos que $\nu_1+\nu_2=n$. Por otra parte, $\nu_1-\nu_2$ es igual al número N de raíces reales del polinomio. Por consiguiente, $\nu_2=\frac{n-N}{2}$, como se quería demostrar.

705. Se demuestra igual que el teorema de Sturm, con la única diferencia de que hay que estar atento al aumento (y no a la disminución) del número de variaciones de signo en una unidad al pasar por una raíz del polinomio inicial.

706. La serie construida de polinomios es una serie de Sturm para el intervalo $x_0 \leqslant x < +\infty$ y satisface a las condiciones del problema 705 para el intervalo $-\infty < x \leqslant x_0$. Por consiguiente, el número de raíces de f en el intervalo (x_0, ∞) es igual a $\nu(x_0)-\nu(+\infty)$, el número de raíces de f en el intervalo $(-\infty, x_0)$ es igual a $\nu(x_0)-\nu(-\infty)$, donde ν es el número de variaciones de signo que presentan los valores correspondientes de los polinomios.

El número total de raíces reales es igual a

$$2\nu(x_0)-\nu(+\infty)-\nu(-\infty).$$

707. La aplicación del teorema de Euler a

$$P_n=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^{n-1}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^{n-1}}$$

da

$$P_n=(-1)^{n-1}e^{\frac{x^2}{2}}\left(x\frac{d^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-1}}+(n-1)\frac{d^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-2}}\right),$$

de donde

$$P_n=xP_{n-1}-(n-1)P_{n-2}.$$

Por otra parte, derivando la igualdad que define P_{n-1}, obtenemos:

$$P'_{n-1}=(-1)^{n-1}xe^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-1}}+(-1)^{n-1}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n},$$

de donde

$$P'_{n-1}=xP_{n-1}-P_n.$$

Comparando con la fórmula anterior obtenemos $P'_{n-1}=(n-1)P_{n-2}$ y, por consiguiente, $P'_n=nP_{n-1}$.

De las fórmulas expuestas se deduce que la sucesión $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1, P_0=1$ es una serie de Sturm para los polinomios P_n, puesto que P_{n-1} sólo se diferencia en el factor n de P'_n y $P_{\lambda-1}$ es, salvo un factor positivo, el residuo de la división de $P_{\lambda+1}$ por P_λ tomado con signo contrario.

Todos los coeficientes superiores de los polinomios P_n son iguales a $+1$. Por lo tanto, todas las raíces de P_n son reales.

708. Derivando la igualdad que define P_n, obtenemos

$$P'_n=(-1)^n e^x \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}+(-1)^n e^x \frac{d^n (nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x})}{dx^n},$$

de donde

$$P'_n=(-1)^n n e^x \frac{d^n (x^{n-1}e^{-x})}{dx^n}.$$

También se tiene

$$P_n=(-1)^n e^x \frac{d^n (x\cdot x^{n-1}e^{-x})}{dx^n}=$$
$$=(-1)^n e^x \left[x\frac{d^n (x^{n-1}e^{-x})}{dx^n}+n\frac{d^{n-1} (x^{n-1}e^{-x})}{dx^{n-1}}\right]=\frac{x}{n}P'_n-nP_{n-1},$$

de donde $xP'_n=nP_n+n^2P_{n-1}$.

Por otra parte,

$$P'_n=(-1)^n n e^x \frac{d^{n-1} [(n-1)\, x^{n-2}e^{-x}-x^{n-1}e^{-x}]}{dx^{n-1}},$$

de donde $P'_n=-nP'_{n-1}+nP_{n-1}$. Multiplicando por x y poniendo en lugar de xP'_n y xP'_{n-1} sus expresiones mediante P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, obtenemos:

$$P_n=(x-2n+1)\,P_{n-1}-(n-1)^2\,P_{n-2}.$$

De estas relaciones vemos que los polinomios consecutivos P_n no se anulan simultáneamente, y si $P_{n-1}=0$, entonces P_n y P_{n-2} tienen signos contrarios. Por otra parte, de $\frac{P_{n-1}}{P_n}=-\frac{1}{n}+\frac{xP'_n}{n^2P_n}$ se deduce que $\frac{P_{n-1}}{P_n}$ cambia el signo de menos a más al pasar por una raíz positiva de P_n. Por lo tanto, la serie P_n, P_{n-1}, ..., P_1, $P_0=1$ es una serie de Sturm para P_n en el intervalo $(0, \infty)$. Los coeficientes superiores de todos los P_n son iguales a la unidad. $P_n(0)=$ $=(-1)^n n!$. Por consiguiente, $\nu(0)-\nu(+\infty)=n$, es decir, P_n tiene n raíces positivas.

709. $E'_n=E_{n-1}$. Por otra parte, $E_n=E_{n-1}-\left(-\frac{x^n}{n!}\right)$. Por esto, los polinomios E_n, E_{n-1} y $-\frac{x^n}{n!}$ forman una serie de Sturm para E_n en el intervalo $(-\infty, -\varepsilon)$ para ε arbitrariamente pequeño. La distribución de los signos viene dada en la tabla siguiente:

$-\infty$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$(-1)^{n-1}$
$-\varepsilon$	$+$	$+$	$(-1)^{n-1}$

Por consiguiente, para n par el polinomio E_n no tiene raíces negativas, para n impar el polinomio E_n tiene una raíz negativa. Por otra parte, para $x\geqslant 0$ el polinomio $E_n(x)>0$.

710. Transformemos la identidad

$$\frac{d^{n+1}\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^{n+1}}=\frac{d^n\left[(2x-1)\, e^{\frac{1}{x}}\right]}{dx^n}.$$

mediante la fórmula de Euler. Obtenemos:

$$x^2\frac{d^{n+1}e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n+1}}+2(n+1)x\frac{d^ne^{\frac{1}{x}}}{dx^n}+(n+1)n\frac{d^{n-1}e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n-1}}=(2x-1)\frac{d^ne^{\frac{1}{x}}}{dx^n}+2n\frac{d^{n-1}e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n-1}},$$

de donde $P_n=(2nx+1)P_{n-1}-n(n-1)P_{n-2}x^2$. Por otra parte, derivando la igualdad que define P_{n-1}, obtenemos:

$$P_n=(2nx+1)P_{n-1}-x^2P'_{n-1}.$$

Comparando los resultados, vemos que $P'_{n-1}=n(n-1)P_{n-2}$ y, por consiguiente, $P'_n=(n+1)nP_{n-1}$. En virtud de las relaciones establecidas, la serie de polinomios P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, ..., $P_0=1$ forma una serie de Sturm para P_n. Los coeficientes superiores de todos los P_n son positivos. Por consiguiente, todas las raíces de P_n son reales.

711. Calculando de dos modos

$$\frac{d^n\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)}{dx^n}=-\frac{d^n\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}{dx^n},$$

obtenemos

$$P_n-2xP_{n-1}+(x^2+1)P_{n-2}=0.$$

Derivando la igualdad que define P_{n-1}, se obtiene $P_n=2xP_{n-1}-\frac{x^2+1}{n}P'_{n-1}$, de donde $P'_{n-1}=nP_{n-2}$ y, por consiguiente, $P'_n=(n+1)P_{n-1}$.

De las últimas relaciones se deduce que P_n, P_{n-1}, ..., $P_0=1$ forman una serie de Sturm para P_n. Todos los coeficientes superiores de la serie son positivos, por consiguiente, todas las raíces de P_n son reales.

Este problema se resuelve con facilidad inmediatamente. Precisando,

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}+\frac{1}{x+i}\right),$$

de donde resulta que

$$P_n(x)=\frac{1}{2i}[(x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1}].$$

Es fácil calcular que las raíces de P_n son $\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n+1}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

712. Desarrollando según la fórmula de Euler la identidad

$$\frac{d^n\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}}{dx^n}=\frac{d^{n-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{dx^{n-1}},$$

obtenemos

$$P_n-(2n-1)xP_{n-1}+(n-1)^2(x^2+1)P_{n-2}=0.$$

Derivando la igualdad que define P_{n-1}, obtenemos

$$P_n-(2n-1)xP_{n-1}+(x^2+1)P'_{n-1}=0,$$

de donde

$$P'_{n-1}=(n-1)^2P_{n-2}\quad\text{y}\quad P'_n=n^2P_{n-1}.$$

De las relaciones halladas se deduce que P_n, P_{n-1}, ..., $P_0=1$ forman una serie de Sturm.

Como los coeficientes superiores son positivos, todas las raíces de P_n son reales.

713. Las funciones $F(x)$, $F'(x)$ y $[f'(x)]^2$ forman una serie de Sturm para F. Los coeficientes superiores de la serie $3a_0^2$, $12a_0^2$ y $9a_0^2$ son positivos. Por consiguiente, el número de pérdidas de variaciones de signo al pasar x de $-\infty$ a $+\infty$ es igual a 2.

Si f tiene una raíz doble, entonces F tiene una raíz triple y una simple. Si f tiene una raíz triple, entonces F tiene una raíz cuádruple.

714. Si alguno de los polinomios de la serie de Sturm tiene una raíz múltiple x_0 o una raíz imaginaria α, este polinomio se puede sustituir por un polinomio de menor grado, dividiéndolo por el valor positivo $(x-x_0)^2$ o por $(x-\alpha)(x-\alpha')$. Los polinomios siguientes se pueden sustituir por los residuos, que resultan en el algoritmo de Euclides para el polinomio sustituido y su precedente, tomados con signos contrarios. Después de esto, el número de variaciones de signo para $x=-\infty$ resultará $\leqslant n-2$, donde n es el grado del polinomio. Por consiguiente, también el número de raíces reales será $\leqslant n-2$.

715. Sea $F(x)=(x^2-1)^n$. Los números -1 y $+1$ son raíces de $F(x)$ de n-ésimo orden. Estos números son raíces de $F'(x)$ de $(n-1)$-ésimo orden y, según el teorema de Rolle, $F'(x)$ tiene una raíz más en el intervalo $(-1, +1)$. Los números -1 y $+1$ son raíces de $F''(x)$ de $(n-2)$-ésimo orden, y en el intervalo abierto $(-1, +1)$ $F''(x)$ tiene dos raíces más, etc. $F^{(n)}(x)=P_n(x)$ tiene n raíces en el intervalo abierto $(-1, +1)$.

716. Sean $x_1, \ldots, x_k$ raíces distintas de $f(x)$ de órdenes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_k$. La función $\varphi(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ es continua en los intervalos abiertos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{k-1}, x_k) y $(x_k, +\infty)$ y varía desde 0 hasta $-\infty$ en el intervalo $(-\infty, x_1)$, desde $+\infty$ hasta $-\infty$ en cada uno de los intervalos (x_{i-1}, x_i) y desde $+\infty$ hasta 0 en el intervalo (x_k, ∞), puesto que $\varphi(x)\to\infty$ para $x\to x_i$ y al pasar por x_i cambia el signo $-$por $+$.

Por consiguiente, $\varphi(x)+\lambda$ tiene una raíz en cada uno de los intervalos (x_{i-1}, x_i) y, además, para $\lambda>0$ tiene una raíz en el intervalo $(-\infty, x_1)$ y para $\lambda<0$ tiene una raíz en el intervalo $(x_k, +\infty)$.

De este modo, $\varphi(x)+\lambda$, y por lo tanto $f(x)[\varphi(x)+\lambda]=\lambda f(x)+f'(x)$ tiene k raíces distintas de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ para $\lambda\neq 0$ ó $k-1$ raíces distintas de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ para $\lambda=0$. Además, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son raíces de $\lambda f(x)+f'(x)$, de órdenes α_1-1, α_2-1, $\ldots$, α_k-1. Así, pues, el número total de raíces reales (teniendo en cuenta los órdenes de multiplicidad) del polinomio $\lambda f(x)+$ $+f'(x)$ es igual a $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$ si $\lambda\neq 0$ y es igual a $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k-1$ si $\lambda=0$, es decir, es igual al grado del polinomio $\lambda f(x)+f'(x)$.

717. Sea

$g(x)=a_0(x+\lambda_1)(x+\lambda_2)\ldots(x+\lambda_n)$, $F_0(x)=a_0 f(x)$, $F_1(x)=F_0(x)+$ $+\lambda_1 F_0'(x)=a_0 f(x)+a_0\lambda_1 f'(x)$, $F_2(x)=F_1(x)+\lambda_2 F_1'(x)=a_0 f(x)+a_0(\lambda_1+\lambda_2)\times$ $\times f'(x)+a_0\lambda_1\lambda_2 f''(x)$, etc. Entonces $F_n(x)=F_{n-1}(x)+\lambda_n F_{n-1}'(x)=a_0 f(x)+$ $+a_1 f'(x)+\ldots+a_n f^{(n)}(x)$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son los coeficientes de g. En virtud del resultado del problema 715, todas las raíces de todos los polinomios $F_0, F_1, \ldots, F_n$ son reales.

718. Se tiene el polinomio

$$a_0x^n+a_1mx^{n-1}+\ldots+m(m-1)\ldots(m-n+1)a_n=$$
$$=[a_0x^m+a_1(x^m)'+\ldots+a_n(x^m)^{(n)}]\,x^{n-m},$$

y todas las raíces de x^m son reales.

719. El polinomio $a_nx^n+na_{n-1}x^{n-1}+n(n-1)a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0n!$ sólo tiene raíces reales. Por consiguiente, todas las raíces de $a_0n!x^n+a_1n(n-1)\ldots$ $\ldots 2x^{n-1}+\ldots+na_{n-1}x+a_n$ son reales. Aplicando otra vez el resultado del problema 718, obtenemos que todas las raíces del polinomio $a_0n!x^n+a_1n\cdot n\times$ $\times(n-1)\ldots 2x^{n-1}+a_2n(n-1)\cdot n(n-1)\ldots 3x^{n-2}+\ldots+a_nn!$ son reales. No queda más que dividir por $n!$.

720. Todas las raíces del polinomio $(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\dots$ $\dots+x^n$ son reales. No queda más que aplicar el resultado del problema 719.

721. El polinomio $f(x)=nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\dots-1$ tiene la raíz real 1. Sea ahora $F(x)=(x-1)f(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$. Entonces $F'(x)=$ $=n(n+1)(x-1)x^{n-1}$. Si n es impar, el polinomio $F(x)$ tiene un mínimo único para $x=1$ y, por lo tanto, no tiene raíces, a excepción de la raíz doble $x=1$. Si n es par, el polinomio $F(x)$ crece desde $-\infty$ hasta 1 cuando $-\infty<x\leqslant 0$, decrece desde 1 hasta 0 cuando $0\leqslant x\leqslant 1$ y crece desde 0 hasta ∞ cuando $1\leqslant x<\infty$. Por esto, $F(x)$ tiene en este caso una raíz única, a excepción de la raíz $x=1$.

722. La derivada del polinomio considerado es positiva para todos los valores reales de x. Por consiguiente, el polinomio sólo tiene una raíz real.

723. Supongamos que $a<b<c$; $f(-\infty)<0$; $f(a)=B^2(b-a)+C^2(c-a)>$ >0; $f(c)=-A^2(c-a)-B^2(c-b)<0$; $f(+\infty)>0$. Por lo tanto, f tiene raíces reales en los intervalos $(-\infty, a)$; (a, c); $(c, +\infty)$.

724. $$\varphi(a+bi)=B+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k^2}{a+bi-a_k}=B+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k^2(a-a_k-bi)}{(a-a_k)^2+b^2};$$

$\operatorname{Im}(\varphi(a+bi))=-b\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k^2}{(a-a_k)^2+b^2}\neq 0$ si $b\neq 0$, puesto que todos los sumandos que figuran bajo el signo de sumación son positivos. Por consiguiente, $\varphi(a+bi)\neq 0$ si $b\neq 0$. También se puede obtener el mismo resultado basándose en que $\varphi(x)$ varía desde $+\infty$ hasta $-\infty$ cuando x varía desde a_i hasta a_{i+1}, $\varphi(x)$ varía desde 0 hasta $-\infty$ cuando $-\infty<x<a_1$, $\varphi(x)$ varía desde $+\infty$ hasta 0 cuando $a_n<x<\infty$. Aquí se supone que

$$a_1<a_2<\dots<a_n.$$

725. $\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}$, donde x_k son las raíces del polinomio $f(x)$. Por lo tanto,

$$[f'(x)]^2-f(x)f''(x)=[f(x)]^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}>0$$

para todos los valores reales de x.

726. Sean $x_1<x_2<\dots<x_n$ las raíces del polinomio $f(x)$ e $y_1<y_2<\dots$ $\dots<y_m$ las raíces del polinomio $\varphi(x)$.

Si se cumplen las condiciones del problema $m=n$, $n-1$ o $n+1$. Sin restringir generalidad se puede suponer que $x_1<y_1<x_2<y_2<\dots<y_{n-1}<x_n$ o $x_1<y_1<x_2<y_2<\dots<y_{n-1}<x_n<y_n$. Supongamos que $\lambda\neq 0$. Escribamos la ecuación en la forma

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=-\frac{\mu}{\lambda}.$$

Si $m=n$, $\psi(x)$ varía:

desde $\frac{a_0}{b_0}$ hasta $-\infty$ cuando $-\infty<x<y_1$, anulándose para $x=x_1$;

desde $+\infty$ hasta $-\infty$ cuando $y_k<x<y_{k+1}$, anulándose para $x=x_{k+1}$;

desde $+\infty$ hasta $\frac{a_0}{b_0}$ cuando $y_n<x<+\infty$.

Aquí a_0 y b_0 son los coeficientes superiores de $f(x)$ y $\varphi(x)$, los cuales los consideramos positivos.

Como $\psi(x)$ es continua en cada uno de los intervalos considerados, la ecuación $\psi(x)=-\frac{\mu}{\lambda}$ tiene n raíces reales si $-\frac{\mu}{\lambda}\neq\frac{a_0}{b_0}$, y $n-1$ raíces reales si $-\frac{\mu}{\lambda}=\frac{a_0}{b_0}$. Por lo tanto, el número de raíces reales de la ecuación $\lambda f(x)+\mu\varphi(x)$ es igual a su grado.

Similarmente se estudia el caso en que $m=n-1$.

727. Las raíces de $f(x)$ y $\varphi(x)$ son necesariamente reales, puesto que $f(x)$ y $\varphi(x)$ se obtienen de $F(x)$ para $\lambda=1$, $\mu=0$, y para $\mu=1$, $\lambda=0$.

Supongamos que las raíces de $f(x)$ y $\varphi(x)$ no se separan. Sin restringir generalidad se puede suponer que entre dos raíces consecutivas x_1 y x_2 del polinomio $f(x)$ no hay raíces de $\varphi(x)$. Entonces $\psi(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ es continua para $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ y se anula en los extremos de este intervalo. Según el teorema de Rolle, en el interior de (x_1, x_2) existe un punto x_0 tal que $\psi'(x_0)=0$. Entonces x_0 es una raíz de $\psi(x)-\psi(x_0)$ de orden $k\geqslant 2$. Según el resultado del problema 581, si ρ es suficientemente pequeño, en la circunferencia $|z-x_0|=\rho$ existen al menos cuatro puntos en los cuales $\operatorname{Im}(\psi(z))=\operatorname{Im}(\psi(x_0))=0$.

Entre estos puntos al menos uno, z_0, no es real. El número $\mu=\psi(z_0)$ es real. El polinomio $F(x)=-f(x)+\mu\varphi(x)$ tiene una raíz no real, lo cual contradice a la condición.

728. Las raíces $\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_{n-1}$ del polinomio $f'(x)$ dividen el eje real en n intervalos:

$$(-\infty, \xi_1),\ (\xi_1, \xi_2),\ \ldots,\ (\xi_{n-2}, \xi_{n-1}),\quad (\xi_{n-1}, \infty).$$

En virtud del teorema de Rolle, en cada uno de estos intervalos el polinomio $f(x)$ no tiene más de una raíz. Por otra parte, el polinomio $f'(x)+\lambda f''(x)$ para cualquier λ real no tiene más de una raíz en cada uno de los intervalos señalados anteriormente. Por consiguiente, según el teorema de Rolle, $f(x)+\lambda f'(x)$ no tiene más de dos raíces en cada uno de los intervalos, teniendo en cuenta la multiplicidad.

Dividamos ahora todos los intervalos en dos clases. Incluimos en la primera aquellos intervalos que contienen alguna raíz de $f(x)$. En la segunda, incluimos aquellos que no contienen raíces de $f(x)$. Consideremos la función $\psi(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$. En los intervalos de la primera clase $\psi(x)$ tiene una raíz simple, por lo cual cambia el signo. En los intervalos de la segunda clase $\psi(x)$ no cambia el signo. En los intervalos de la primera clase $\psi(x)+\lambda$ tiene un número impar de raíces, teniendo en cuenta la multiplicidad. Por consiguiente, en virtud de lo expuesto anteriormente, $\psi(x)+\lambda$ en un intervalo de la primera clase sólo tiene una raíz simple y no tiene raíces múltiples. Por ello $\psi'(x)$ no tiene raíces en los intervalos de la primera clase. Examinemos ahora los intervalos de la segunda clase. Sea ξ_0 un punto de algún intervalo de la segunda clase, en el cual el valor absoluto de $\psi(x)$ alcanza el mínimo, y sea $\lambda_0=\psi(\xi_0)$. Para precisar, supondremos que $\psi(x)$ es positiva en este intervalo. Entonces la función $\psi(x)-\lambda$ no tiene raíces en el intervalo considerado si $\lambda<\lambda_0$ y tiene al menos dos raíces si $\lambda>\lambda_0$.

En virtud de lo expuesto anteriormente, el número de raíces de $\psi(x)-\lambda$ es exactamente igual a dos si $\lambda>\lambda_0$ y ambas raíces son simples. Por otra parte, ξ_0 es una raíz múltiple de $\psi(x)-\lambda_0$, es precisamente una raíz doble.

Resumiendo, $\psi(x)-\lambda$ no tiene raíces múltiples en los intervalos de la primera clase y sólo tiene una raíz múltiple para un valor de λ en cada intervalo de la segunda clase. Por otra parte, cada raíz η del polinomio $f'^2(x)-f(x)\times\times f''(x)$ es una raíz múltiple para $\psi(x)-\psi(\eta)$, puesto que

$$[\psi(x)]'=\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Por lo tanto, el número de raíces reales de $f'^2(x)-f(x)f''(x)$ es igual al número de intervalos de la segunda clase, el cual evidentemente, es igual al número de raíces imaginarias de $f(x)$.

729. $\lambda f_1(x)+\mu f_2(x)$ tiene todas las raíces reales para cualesquiera constantes λ y μ (problema 726). Por consiguiente, en virtud del teorema de Rolle, $\lambda f'_1(x)+\mu f'_2(x)$ tiene todas las raíces reales. De aquí se deduce (problema 727) que las raíces de $f'_1(x)$ y $f'_2(x)$ se separan.

730. Supongamos que $f(x)$ no tiene raíces múltiples y sean $\xi_1<\xi_2<\ldots$ $\ldots<\xi_{n-1}$ las raíces de $f'(x)$. Consideremos la función $\psi(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}+\frac{x+\lambda}{\gamma}$.

Es obvio que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=\frac{1}{n}+\frac{1}{\gamma}>0$ si $\gamma>0$ o si $\gamma<-n$. De aquí se deduce que $\psi(x)\to+\infty$ cuando $x\to+\infty$ y $\psi(x)\to-\infty$ cuando $x\to-\infty$. Además, $\psi(x)\to-\infty$ cuando $x\to\xi_i$ por la derecha y $\psi(x)\to+\infty$ cuando $x\to\xi_i$ por la izquierda. Por lo tanto, $\psi(x)$ varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$ en cada uno de los intervalos $(-\infty, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2), $\ldots$, (ξ_{n-1}, ∞), manteniéndose continua dentro de estos intervalos.

Por consiguiente, $\psi(x)$, y junto con ella también su numerador $\gamma f(x)+$ $+(x+\lambda)f'(x)$, tiene no menos de n raíces distintas si $\gamma>0$ o si $\gamma<-n$. Pero el número de raíces de $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$ no es superior a n, puesto que $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$ es un polinomio de grado n. Si $f(x)$ tiene raíces múltiples y $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son raíces distintas de $f(x)$, entonces $f'(x)$ tiene $k-1$ raíces $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}$, distintas de $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Mediante un razonamiento similar al anterior nos convencemos de la existencia de k raíces de $\psi(x)$. Todas ellas, a excepción de $-\lambda$, si $-\lambda$ es una de las raíces de $f(x)$, son distintas de las raíces de $f(x)$.

Además de estas raíces, $\gamma f(x)+(x+\lambda)f'(x)$ tiene las raíces $x_1, x_2, \ldots, x_k$ con la suma de los órdenes de multiplicidad $n-k$ (si $-\lambda$ no es raíz de $f(x)$) o $n-k+1$ (si $-\lambda$ es una raíz de $f(x)$).

El número total de raíces reales de $\gamma f(x)+(\lambda+x)f'(x)$ teniendo en cuenta los órdenes de multiplicidad, resulta igual a n.

731. Sea $\varphi(x)=b_k(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\ldots(x+\gamma_k)$. Cada γ_i es mayor que cero o menor que $-n$.

Está claro que los coeficientes del polinomio

$$F_1(x)=\gamma_1 f(x)+xf'(x)$$

son $a_i(\gamma_1+i)$.

Los coeficientes del polinomio

$$F_2(x)=\gamma_2 F_1(x)+xF'_1(x)$$

son $a_i(\gamma_1+i)(\gamma_2+i)$, etc., los coeficientes del polinomio

$$F_k(x)=\gamma_k F_{k-1}(x)+xF'_{k-1}(x)$$

son

$$a_i(\gamma_1+i)(\gamma_2+i)\ldots(\gamma_k+i), \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

En virtud del resultado del problema 730, todas las raíces de todos los polinomios $F_1, F_2, \ldots, F_k$ son reales. Pero

$$a_0\varphi(0)+a_1\varphi(1)x+\ldots+a_n\varphi(n)x^n=b_kF_k(x).$$

732. Sea $f(x)=f_1(x)(x+\lambda)$, donde λ es un número real y $f_1(x)$ es un polinomio de $(n-1)$-ésimo grado cuyas raíces son todas reales. Supongamos que el teorema es cierto para los polinomios de $(n-1)$-ésimo grado y demostrémoslo para los polinomios de grado n.

Sea

$$f_1(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}$$
$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n.$$

Entonces

$$a_0=\lambda b_0,$$
$$a_1=\lambda b_1+b_0,$$
$$a_2=\lambda b_2+b_1,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{n-1}=\lambda b_{n-1}+b_{n-2},$$
$$a_n=\qquad b_{n-1}$$

y

$$a_0+a_1\gamma x+a_2\gamma(\gamma-1)x^2+\dots+a_n\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-n+1)x^n=$$
$$=\lambda[b_0+b_1\gamma x+b_2\gamma(\gamma-1)x^2+\dots+b_{n-1}\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-n+2)x^{n-1}]+$$
$$+x\gamma[b_0+b_1(\gamma-1)x+b_2(\gamma-1)(\gamma-2)x^2+\dots+b_{n-1}(\gamma-1)(\gamma-2)\dots$$
$$\dots(\gamma-n+1)x^{n-1}]=\lambda\varphi(x)+x[\gamma\varphi(x)-x\varphi'(x)],$$

donde se ha designado con $\varphi(x)$ el polinomio

$$b_0+b_1\gamma x+b_2\gamma(\gamma-1)x^2+\dots+b_{n-1}\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-n+2)x^{n-1}.$$

En virtud de la hipótesis hecha, todas las raíces del polinomio $\varphi(x)$ son reales. No queda más que demostrar el lema siguiente.

Lema. Si $\varphi(x)$ es un polinomio de $(n-1)$-ésimo grado que sólo tiene raíces reales, entonces todas las raíces del polinomio $\psi(x)=\lambda\varphi+\gamma x\varphi-x^2\varphi'$ son reales para $\gamma>n-1$ y cualquier λ real.

Demostración. Sin restringir generalidad se puede suponer que 0 no es raíz de $\varphi(x)$, puesto que si $\varphi=x^k\varphi_1$, $\varphi_1(0)\neq 0$, entonces

$$\psi(x)=x^k(\lambda\varphi_1+(\gamma-k)x\varphi_1-x^2\varphi_1')=x^k\psi_1$$

y $\gamma_1=\gamma-k$ es superior al grado de φ_1.

Supongamos que $x_1, x_2, \dots, x_m$ son raíces distintas de φ. El polinomio ψ tiene entre sus raíces a $x_1, x_2, \dots, x_m$ con la suma de los órdenes de miltiplicidad $n-1-m$ Examinemos ahora

$$w(x)=\lambda+\gamma x-\frac{x^2\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Es evidente que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{w(x)}{x}=\gamma-(n-1)>0.$$

Por consiguiente, $w(x)\to-\infty$ cuando $x\to-\infty$ y $w(x)\to+\infty$ cuando $x\to+\infty$. Además, $w(x)\to+\infty$ cuando $x\to x_i$ por la izquierda y $w(x)\to-\infty$ cuando $x\to x_i$ por la derecha. Debido a esto, $w(x)$ tiene raíces en cada uno de los intervalos

$$(-\infty, x_1),\ (x_1, x_2),\ \dots,\ (x_{m-1}, x_m),\quad (x_m, +\infty).$$

El número total de raíces reales de $\psi(x)$, teniendo en cuenta los órdenes de multiplicidad, resulta igual a $n-1-m+m+1=n$, es decir, es igual al grado de $\psi(x)$, como se quería demostrar.

733. Si todas las raíces del polinomio $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ son reales, entonces todas las raíces del polinomio $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ son reales. También son reales todas las raíces de los polinomios

$$a_0\gamma_1(\gamma_1-1)\dots(\gamma_1-n+1)x^n+a_1\gamma_1(\gamma_1-1)\dots(\gamma_1-n+2)x^{n-1}+\dots+a_{n-1}\gamma_1x+a_n$$

y
$$a_0\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+1)+a_1\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-n+2)x+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}\gamma_1x^{n-1}+a_nx^n=\left[a_0+\frac{a_1}{\gamma_1-n+1}x+\ldots\right.$$
$$\ldots+\frac{a_{n-1}}{(\gamma_1-n+1)(\gamma_1-n+2)\ldots(\gamma_1-1)}x^{n-1}+$$
$$\left.+\frac{a_n}{(\gamma_1-n+1)(\gamma_1-n+2)\ldots\gamma_1}x^n\right]\gamma_1(\gamma_1+1)\ldots(\gamma_1-n+1)$$

si $\gamma_1>n-1$. Haciendo $\gamma_1-n+1=\alpha>0$, obtenemos que todas las raíces del polinomio

$$a_0+\frac{a_1}{\alpha}x+\frac{a_2}{\alpha(\alpha+1)}x^2+\ldots+\frac{a_n}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}x^n$$

son reales. Aplicando por segunda vez el resultado del problema 732, se obtiene el resultado buscado.

734. 1. Supongamos que todas las raíces de $f(x)$ son positivas. Entonces el polinomio $a_0+a_1wx+\ldots+a_nw^{n^2}x^n$ no puede tener raíces negativas. Supongamos que el teorema es cierto para los polinomios de grado $n-1$. Hagamos la notación

$$\varphi(x)=b_0+b_1wx+b_2w^4x^2+\ldots+b_{n-1}w^{(n-1)^2}x^{n-1}.$$

Sea $0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ son las raíces de $\varphi(x)$, y supongamos que $\frac{x_i}{x_{i-1}}>w^{-2}$.

Sea $f(x)=(\lambda-x)(b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1})$. Los coeficientes del polinomio $f(x)$ son iguales a

$$\begin{aligned}a_0&=\lambda b_0,\\ a_1&=\lambda b_1-b_0,\\ a_2&=\lambda b_2-b_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a_{n-1}&=\lambda b_{n-1}-b_{n-2},\\ a_n&=-b_{n-1}.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\psi(x)=a_0+a_1wx+a_2w^4x^2+\ldots+a_nw^{n^2}x^n=\lambda(b_0+b_1wx+\ldots$$
$$\ldots+b_{n-1}w^{(n-1)^2}x^{n-1})-x(b_0w+b_1w^4x+\ldots+b_{n-1}w^{n^2}x^{n-1})=$$
$$=\lambda\varphi(x)-xw\varphi(xw^2).$$

Las raíces de los polinomios $\varphi(x)$ y $x\varphi(xw^2)$ se separan, debido a la hipótesis inductiva. Por consiguiente, todas las raíces del polinomio en cuestión $\lambda\varphi(x)+xw\varphi(xw^2)$ son reales. No queda más que comprobar que la ley de su distribución es la misma que para el polinomio $\varphi(x)$.

Designemos las raíces de $\psi(x)$ mediante $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Fácilmente se observa que

$$0<z_1<x_1<x_1w^{-2}<z_2<x_2<x_2w^{-2}<z_3<\ldots$$
$$\ldots<z_{n-1}<x_{n-1}<x_{n-1}w^{-2}<z_n.$$

De aquí se deduce que $\frac{z_i}{z_{i-1}}>\frac{x_{i-1}w^{-2}}{x_{i-1}}=w^{-2}$, como se quería demostrar.

2. Consideremos

$$\varphi_m(x)=\left(1-\frac{x^2\lg\frac{1}{w}}{m}\right)^m.$$

Para m suficientemente grande, las raíces del polinomio $\varphi_m(x)$, iguales a $\pm\sqrt{\dfrac{m}{\lg\frac{1}{w}}}$, no están comprendidas en el intervalo $(0, n)$. Por consiguiente, (problema 731), todas las raíces del polinomio $a_0\varphi_m(0)+a_1\varphi_m(1)x+\ldots$ $\ldots+a_n\varphi_m(n)x^n$ son reales. Pero $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x)=w^{x^2}$. Por consiguiente, como las raíces son funciones continuas de los coeficientes, todas las raíces de $a_0+a_1wx+\ldots+a_nw^{n^2}x^n$ son reales.

735. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las raíces del polinomio $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$. Sin restringir generalidad se puede considerar que éstas son positivas. Sean también

$$\varphi(x)=a_0\cos\varphi+a_1\cos(\varphi+\theta)x+\ldots+a_n\cos(\varphi+n\theta)x^n,$$
$$\psi(x)=a_0\operatorname{sen}\varphi+a_1\operatorname{sen}(\varphi+\theta)x+\ldots+a_n\operatorname{sen}(\varphi+n\theta)x^n.$$

Entonces

$$\varphi(x)+i\psi(x)=(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)\,a_n\prod_{i=1}^{n}(\alpha x-x_i),$$

$$\varphi(x)-i\psi(x)=(\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi)\,a_n\prod_{i=1}^{n}(\alpha' x-x_i),$$

donde

$$\alpha=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta,\quad \alpha'=\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta.$$

Por lo tanto,

$$\Phi(x)=\frac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}=\frac{\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi}\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha x-x_i}{\alpha' x-x_i}.$$

Sea $x=\rho\beta$ una raíz del polinomio $\varphi(x)$. Aquí $\rho=|x|$; $\beta=\cos\lambda+i\operatorname{sen}\lambda$. Entonces $|\Phi(x)|=1$ y, por consiguiente,

$$\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{\rho\alpha\beta-x_i}{\rho\alpha'\beta-x_i}\right|=1,$$

pero

$$\left|\frac{\rho\alpha\beta-x_i}{\rho\alpha'\beta-x_i}\right|^2=\frac{(\rho\alpha\beta-x_i)(\rho\alpha'\beta'-x_i)}{(\rho\alpha'\beta-x_i)(\rho\alpha\beta'-x_i)}=$$
$$=1+\frac{\rho x_i(\alpha-\alpha')(\beta'-\beta)}{|\rho\alpha'\beta-x_i|^2}=1+\frac{4\rho x_i\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\lambda}{|\rho\alpha'\beta-x_i|^2}.$$

Dejemos de un lado el caso que carece de interés $\operatorname{sen}\theta=0$.

Si $\operatorname{sen}\lambda\neq 0$, entonces todos los valores $\left|\dfrac{\rho\alpha\beta-x_i}{\rho\alpha'\beta-x_i}\right|^2$ son simultáneamente mayores que la unidad o menores que la unidad y su producto no puede ser igual a 1. Por lo tanto $\operatorname{sen}\lambda=0$, es decir, x es real.

736. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las raíces del polinomio

$$f(x)=a_0+ib_0+(a_1+ib_1)x+\ldots+(a_n+ib_n)x^n=\varphi(x)+i\psi(x).$$

Las partes imaginarias de estas raíces son positivas. Examinemos el polinomio $\overline{f}(x)=\varphi(x)-i\psi(x)$. Está claro que sus raíces $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ son conjugadas con $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces

$$\Phi(x)=\frac{\varphi(x)+i\psi(x)}{\varphi(x)-i\psi(x)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{x-x_i'}\cdot\frac{a_n+ib_n}{a_n-ib_n}.$$

Si x_0 es una raíz de $\varphi(x)$, se tiene

$$|\Phi(x_0)|=\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|=1.$$

Pero

$$\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|^2=\frac{(x_0-x_i)(x_0'-x_i')}{(x_0-x_i')(x_0'-x_i)}=1+\frac{(x_i-x_i')(x_0-x_0')}{|x_0-x_i'|^2}=1-\frac{4\,\mathrm{Im}(x_0)\,\mathrm{Im}(x_i)}{|x_0-x_i'|^2}.$$

De aquí, si $\mathrm{Im}(x_0)>0$, $\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|<1$ para todos los valores de i; si $\mathrm{Im}(x_0)<0$, $\left|\frac{x_0-x_i}{x_0-x_i'}\right|>1$ para todos los valores de i. (Esto mismo es fácil obtener geométricamente, sin cálculos.) Por consiguiente, la igualdad $|\Phi(x_0)|=1$ sólo es posible si x_0 es real, por lo cual, todas las raíces de $\varphi(x)$ son reales.

Examinemos ahora el polinomio

$$(\alpha-\beta i)[\varphi(x)+i\psi(x)]=\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)+i[\alpha\psi(x)-\beta\varphi(x)].$$

Sus raíces no se diferencian de las raíces del polinomio inicial y, por lo tanto, su parte real $\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)$ sólo tiene raíces reales para cualesquiera α y β reales. Pero en tal caso las raíces de $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ se separan (problema 727).

737. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las raíces de $\varphi(x)$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$, las raíces de $\psi(x)$. Sin restringir generalidad se puede suponer que los coeficientes superiores de φ y ψ son positivos y que

$$x_1>y_1>x_2>y_2\ldots>y_{n-1}>x_n>y_n$$

(puede no estar y_n).

Descompongamos $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ en fracciones simples

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=A+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{x-x_k};\quad A_k=\frac{\psi(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

Fácilmente se observa que todos los números $A_k>0$. Hagamos $x=a+ib$ y hallemos la parte imaginaria para

$$\frac{-i(\varphi(x)+i\psi(x))}{\varphi(x)}=\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}-i;$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}-i\right)=-1+\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{a+bi-x_k}\right)=-1-b\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{(a-x_k)^2+b^2}.$$

Si $b\geqslant 0$, entonces $\mathrm{Im}\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}-i\right)<0$ y, por consiguiente, $\varphi(x)+i\psi(x)\neq 0$.

Así, pues, en el caso considerado todas las raíces de $\varphi(x)+i\psi(x)$ están situadas en el semiplano inferior. De un modo análogo se estudian otros casos de disposición de las raíces.

738. $\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}$; x_k son las raíces de $f(x)$. Sea $x=a-bi$, $b>0$.

Entonces

$$\mathrm{Im}\left(\frac{f'(a-bi)}{f(a-bi)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b+\mathrm{Im}(x_k)}{|x-x_k|^2}>0.$$

Por consiguiente,

$$f'(a-bi) \neq 0.$$

739. Supongamos que el semiplano está dado por la desigualdad

$$r \cos(\theta-\varphi) > p, \text{ donde } x=r(\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi).$$

Hagamos $x=(x'+pi)(\text{sen}\,\theta-i\cos\theta)$. Entonces

$$x'=-pi+x(\text{sen}\,\theta+i\cos\theta)=r\,\text{sen}(\theta-\varphi)+i[r\cos(\theta-\varphi)-p].$$

De aquí se deduce que si x está situado en el semiplano dado, entonces x' está situado en el semiplano $\text{Im}(x')>0$, y recíprocamente. Por lo tanto, las raíces del polinomio $f[(x'+pi)(\text{sen}\,\theta-i\cos\theta)]$ están situadas en el semiplano superior. Según el problema 738, las raíces de su derivada, igual a $[\text{sen}\,\theta-i\cos\theta]\,f'[(x'+pi)\times$ $\times(\text{sen}\,\theta-i\cos\theta)]$, también están situadas en el semiplano superior.

Por consiguiente, las raíces del polinomio $f'(x)$ están situadas en el semiplano dado

740. Se deduce inmediatamente del resultado del problema 739.

741. La ecuación se descompone en dos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{ki}=0 \text{ y } \frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{ki}=0.$$

La descomposición en fracciones simples da:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\pm\frac{1}{ki}=0;$$

según la hipótesis, las raíces x_k del polinomio $f(x)$ son reales. Sea $x=a+bi$; entonces

$$\left|\text{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\right)\right|=|b|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a-x_k)^2+b^2}<\frac{n}{|b|}.$$

Para las raíces de cada una de las ecuaciones tiene que ser $\frac{1}{k}<\frac{n}{|b|}$, de donde $|b|<kn$.

742. Evidentemente, todas las raíces de $f'(x)$ son reales. Designémoslas con $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$. Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ las raíces del polinomio $f(x)-b$ y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las raíces del polinomio $f(x)-a$. Entonces

$$y_1<\xi_1<y_2<\xi_2<\ldots<y_{n-1}<\xi_{n-1}<y_n.$$
$$x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<\ldots<x_{n-1}<\xi_{n-1}<x_n.$$

De estas desigualdades se deduce que los intervalos limitados por los puntos x_i, y_i no son rampantes (o sea, no tienen puntos interiores comunes), puesto que están comprendidos en intervalos no rampantes

$$(-\infty, \xi_1);\quad (\xi_1, \xi_2);\ \ldots;\quad (\xi_{n-1}, +\infty).$$

El polinomio $f(x)$ toma en los extremos de cada uno de los intervalos considerados los valores a y b y pasa dentro de cada intervalo por todos los valores intermedios. Por consiguiente, $f(x)-\lambda$ se anula en el eje real n veces, como se quería demostrar.

743. Si las partes reales de las raíces del polinomio $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_n$ tienen signos iguales, entonces las partes imaginarias de las raíces del polinomio

$$i^nf(-ix)=x^n+ia_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-ia_3x^{n-3}+\ldots$$

también tienen signos iguales, y recíprocamente.

En virtud de los resultados de los problemas 736, 737, para esto es necesario y suficiente que las raíces de los polinomios $x^n - a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} - \ldots$ y $a_1x^{n-1} - a_3x^{n-3} + a_5x^{n-5} - \ldots$ sean reales y se separen.

744. Es necesario que sea $a > 0$ y que las raíces de los polinomios $x^3 - bx$ y $ax^2 - c$ sean reales y se separen. Para esto es necesaria y suficiente la condición $0 < \frac{c}{a} < b$ o $c > 0$, $ab - c > 0$.

Así, pues, para que las partes reales de todas las raíces de la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

sean negativas, es necesario y suficiente que se cumplan las desigualdades $a > 0$, $c > 0$, $ab - c > 0$.

745. $a > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $abc - c^2 - a^2d > 0$.

746. Hagamos $x = \frac{1+y}{1-y}$. Fácilmente se observa que si $|x| < 1$, entonces la parte real de y es negativa, y viceversa.

Por consiguiente, para que todas las raíces x_1, x_2, x_3 de la ecuación $f(x) = 0$ sean en valor absoluto menores que 1, es necesario y suficiente que sean negativas las partes reales de todas las raíces de la ecuación $f\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 0$. Esta ecuación tiene la forma

$$y^3(1 - a + b - c) + y^2(3 - a - b + 3c) + y(3 + a - b - 3c) + (1 + a + b + c) = 0.$$

Además, es fácil observar que la condición

$$1 - a + b - c = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) > 0.$$

es necesaria. Basándose en el resultado del problema 744 obtenemos las condiciones necesarias y suficientes:

$$1 - a + b - c > 0; \quad 1 + a + b + c > 0; \quad 3 - a - b + 3c > 0; \quad 1 - b + ac - c^2 > 0.$$

747. $$f(x)(1-x) = a_n + (a_{n-1} - a_n)x + (a_{n-2} - a_{n-1})x^2 + \ldots + (a_0 - a_1)x^n - a_0x^{n+1}.$$

Sea $|x| = \rho > 1$. Entonces

$$|f(x)(1-x)| \geqslant a_0\rho^{n+1} - |a_n + (a_{n-1} - a_n)x + \ldots + (a_0 - a_1)x^n| \geqslant a_0\rho^{n+1} - \rho^n(a_n + a_{n-1} - a_n + \ldots + a_0 - a_1) = a_0(\rho^{n+1} - \rho^n) > 0.$$

Por consiguiente, $f(x) \neq 0$ si $|x| > 1$.

748. $-0{,}6618$. **749.** $2{,}094551$.

750. a) 3,3876, —0,5136, —2,8741; b) 2,8931;
c) 3,9489, 0,2172, —1,1660; d) 3,1149, 0,7459, —0,8608.

751. El problema se reduce al cálculo de la raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ que está comprendida en el intervalo $(0, 1)$.

R e s p u e s t a: $x = 0{,}347$ (con una exactitud de 0,001).

752. 2,4908.

753. a) 1,7320; b) —0,7321; c) 0,6180; d) 0,2679;
e) —3,1623; f) 1,2361, g) —2,3028; h) 2,6457; i) 1,6180.

754. a) 1,0953, —0,2624, —1,4773, —2,3556;
b) 0,8270, 0,3383, —1,2090, —2,9563;
c) 1,4689, 0,1168;
d) 8,0060, 1,2855, 0,1960, —1,4875;
e) 1,5357, —0,1537;
f) 3,3322, 1,0947, —0,6002, —1,8268;
g) 0,4910, —1,4910;
h) 2,1462, —0,6821, —1,3178, —4,1463.

Capítulo 6

FUNCIONES SIMETRICAS

755. He aquí la resolución detallada del ejercicio f):

$$F(x_1, x_2, x_3)=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2).$$

El término superior del polinomio F es igual a $x_1^4 \cdot x_2^2$.

Escribamos los exponentes de los términos superiores de los polinomios que quedarán después de la eliminación sucesiva de los términos superiores mediante la resta de combinaciones adecuadas de los polinomios simétricos fundamentales. He aquí estos exponentes:

$$(4,\ 2,\ 0);\ (4,\ 1,\ 1);\ (3,\ 3,\ 0);\ (3,\ 2,\ 1)\ \text{y}\ (2,\ 2,\ 2).$$

Por consiguiente, $F=f_1^2 f_2^2+Af_1^3 f_3+Bf_2^3+Cf_1f_2f_3+Df_3^2$, donde A, B, C, D son coeficientes numéricos. Los determinamos asignando a x_1, x_2, x_3 valores particulares:

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	F
1	1	0	2	1	0	2
2	−1	−1	0	−3	2	50
1	−2	−2	−3	0	4	200
1	−1	−1	−1	−1	1	8

Para determinar A, B, C, D resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2&=4+B,\\ 50&=-27B+4D,\\ 200&=-108A+16D,\\ 8&=1-A-B+C+D, \end{aligned}$$

de donde $B=-2$, $D=-1$, $A=-2$, $C=4$.

Asi, pues,

$$(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)=f_1^2 f_2^2-2f_1^3f_3-2f_2^3+4f_1f_2f_3-f_3^2.$$

He aquí las respuestas de los demás ejercicios:

a) $f_1^3-3f_1f_2$; b) $f_1f_2-3f_3$; c) $f_1^4-4f_1^2f_2+8f_1f_3$;

d) $f_1^3 f_2^2-2f_1^4f_3-3f_1f_2^3+6f_1^2f_2f_3+3f_2^2f_3-7f_1f_3^2$.

e) $f_1f_2-f_3$; g) $2f_1^3-9f_1f_2+27f_3$;

h) $f_1^2 f_2^2-4f_1^3f_3-4f_2^3+18f_1f_2f_3-27f_3^2$.

756 a) $f_1f_2f_3-f_1^2f_4-f_3^2$; b) $f_1^2f_4+f_3^2-4f_2f_4$;

c) $f_1^3-4f_1f_2+8f_3$.

757. a) $f_1^2-2f_2$; b) $f_1^3-3f_1f_2+3f_3$;

c) $f_1f_3-4f_4$; d) $f_2^2-2f_1f_3+2f_4$;

e) $f_1^2f_2-f_1f_3-2f_2^2+4f_4$; f) $f_1^4-4f_1^2f_2+2f_2^2+4f_1f_3-4f_4$;

g) $f_2f_3-3f_1f_4+5f_5$; h) $f_1^2f_3-2f_2f_3-f_1f_4+5f_5$;

i) $f_1f_2^2-2f_1^2f_3-f_2f_3+5f_1f_4-5f_5$;

j) $f_1^3f_2-3f_1f_2^2-f_1^2f_3+5f_2f_3+f_1f_4-5f_5$;

k) $f_1^5-5f_1^3f_2+5f_1f_2^2+5f_1^2f_3-5f_2f_3-5f_1f_4+5f_5$;

l) $f_2f_4-4f_1f_5+9f_6$; m) $f_3^2-2f_2f_4+2f_1f_5-2f_6$;

n) $f_1^2f_4-2f_2f_4-f_1f_5+6f_6$;

o) $f_1f_2f_3-3f_1^2f_4-3f_3^2+4f_2f_4+7f_1f_5-12f_6$;

p) $f_2^3-3f_1f_2f_3+3f_1^2f_4+3f_3^2-3f_2f_4-3f_1f_5+3f_6$;

q) $f_1^3f_3-3f_1f_2f_3-f_1^2f_4+3f_3^2+2f_2f_4+f_1f_5-6f_6$;

r) $f_1^2f_2^2-2f_1^3f_3-2f_2^3+4f_1f_2f_3+2f_1^2f_4-3f_3^2+2f_2f_4-6f_1f_5+6f_6$;

s) $f_1^4f_2-4f_1^2f_2^2-f_1^3f_3+2f_2^3+7f_1f_2f_3+f_1^2f_4-3f_3^2-6f_2f_4-f_1f_5+6f_6$;

t) $f_1^6-6f_1^4f_2+9f_1^2f_2^2+6f_1^3f_3-2f_2^3-12f_1f_2f_3-6f_1^2f_4+3f_3^2+6f_2f_4+6f_1f_5-6f_6$.

758. a) $nf_1^2-8f_2$;

b) $-f_1^n+4f_1^{n-2}f_2-8f_1^{n-3}f_3+\ldots+(-2)^nf_n$.

759. a) $(n-1)f_1^2-2nf_2$; b) $(n-1)f_1^3-3(n-2)f_1f_2+3(n-4)f_3$;

c) $(n-1)f_1^4-4nf_1^2f_2+2(n+6)f_2^2+4(n-3)f_1f_3-4nf_4$;

d) $\dfrac{3(n-1)(n-2)}{2}f_1^2-(3n-1)(n-2)f_2$.

760. $f_k^2-2f_{k-1}f_{k+1}+2f_{k-2}f_{k+2}-2f_{k-3}f_{k+3}+\ldots$

761. $$(n-1)!\sum_{i=1}^{n} a_i^2f_1^2-2(n-2)!\left[n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\right]f_2=$$
$$=(n-1)!\,S_2s_2+4(n-2)!\,F_2f_2,$$

donde

$$S_2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2;\quad s_2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2;\quad F_2=\sum_{i<k}a_ia_k;\quad f_2=\sum_{i<k}x_ix_k.$$

762. a) $\dfrac{f_1f_2-3f_3}{f_3}$; b) $\dfrac{2(f_1^2f_2-3f_1f_3-2f_2^2)}{f_1f_2-f_3}$; c) $\dfrac{f_2^3+f_1^3f_3-6f_1f_2f_3+9f_3^2}{f_3^2}$.

763. a) $\dfrac{f_2^2-2f_1f_3+2f_4}{f_4}$; b) $\dfrac{f_1^2f_2^2+f_1^3f_3-6f_1f_2f_3+6f_3^2+2f_1^2f_4}{f_1f_2f_3-f_1^2f_4-f_3^2}$.

764. a) $\dfrac{f_{n-1}}{f_n}$; b) $\dfrac{f_{n-1}^2-2f_{n-2}f_n}{f_n^2}$; c) $\dfrac{f_1f_{n-1}-nf_n}{f_n}$;

d) $\dfrac{f_1^2f_{n-1}^2-2f_2f_{n-1}^2-2f_1^2f_{n-2}f_n+4f_2f_{n-2}f_n-nf_n^2}{f_n^2}$;

e) $\dfrac{f_1^2f_{n-1}-2f_2f_{n-1}-f_1f_n}{f_n}$; f) $\dfrac{f_2f_{n-1}-(n-1)f_1f_n}{f_n}$.

765. -4. 766. -35. 767. 16.

768. a) -3; b) $-2p^3-3q^2$; c) $-p^3\ (x_1^2-x_2x_3=-p)$;

d) q^4; e) $\dfrac{-2p-3q}{1+p-q}$; f) $\dfrac{2p^2-4p-4pq+3q^2+6q}{(1+p-q)^2}$.

769. Sea $x_1^2=x_2^2+x_3^2$. Entonces $2x_1^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2b$.

Por consiguiente, $\sqrt{\dfrac{a^2-2b}{2}}$ o $-\sqrt{\dfrac{a^2-2b}{2}}$ se encuentra entre las raíces de la ecuación dada. Para esto es necesario y suficiente el cumplimiento de la condición

$$a^4(a^2-2b)=2(a^3-2ab+2c)^2.$$

770.
$$a=-x_1-x_2-x_3,$$
$$ab-c=-(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3),$$
$$c=-x_1x_2x_3.$$
Si todas las raices son reales y negativas, entonces
$$a>0, \qquad b>0, \qquad c>0.$$
Si una raiz x_1 es real, mientras que x_2 y x_3 son imaginarias conjugadas pero con la parte real negativa, entonces $x_2+x_3<0$, $x_2x_3>0$, $(x_1+x_2)(x_1+x_3)>0$ y, por consiguiente, también $a>0$, $b>0$ y $c>0$. Queda demostrado que las condiciones son necesarias.

Supongamos ahora que $a>0$, $b>0$, $c>0$. Si x_1 es real mientras que x_2 y x_3 son imaginarias conjugadas, entonces $x_2x_3>0$, $(x_1+x_2)(x_1+x_3)>0$ y de $c>0$, $b>0$ se deduce que $x_1<0$, $2\,\mathrm{Re}\,(x_2)=x_2+x_3<0$.

Si x_1, x_2, x_3 son reales, entonces de $c>0$ se deduce que una raiz x_1 es negativa; las demás son de un mismo signo. Si $x_2>0$, $x_3>0$, entonces
$$-x_1-x_2>x_3>0, \quad -x_1-x_3>x_2>0,$$
por lo cual $-(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)<0$, y esto contradice a la condición. Por lo tanto, $x_2<0$, $x_3<0$.

Otra solución se da en el problema 744.

771. $s=\frac{1}{4}\sqrt{a(4ab-a^3-bc)}$, $\quad R=\dfrac{c}{\sqrt{a(4ab-a^3-bc)}}$.

772. $a(4ab-a^3-8c)=4c^2$.

773. *a*) $\dfrac{25}{27}$; b) $\dfrac{35}{27}$; c) $-\dfrac{1679}{625}$

774. a) $a_1^2a_2^2-4a_1^3a_3-4a_2^3a_0+18a_0a_1a_2a_3-27a_0^2a_3^2$;

b) $a_1^3a_3-a_2^3a_0$; c) $\dfrac{a_1a_2}{a_0a_3}-9$; d) $a_1^2a_2^2-a_1^3a_3-a_2^3a_0$.

775. Es suficiente efectuar la demostración para los polinomios simétricos fundamentales. Sea φ_k un polinomio simétrico fundamental de grado k en x_2, x_3, ..., x_n y sea f_k un polinomio simétrico fundamental en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Está claro que $\varphi_k=f_k-x_1\varphi_{k-1}$, de donde se deduce que:
$$\varphi_k=f_k-x_1f_{k-1}+x_1^2f_{k-2}-\ldots+(-x_1)^{k-1}f_1+(-1)^kx_1^k,$$
$$(-1)^k\varphi_k=a_k+a_{k-1}x_1+\ldots+a_1x_1^{k-1}+x_1^k.$$

776. $x_1+x_2=f_1-x_3$;

$(f_1-x_1)(f_1-x_2)(f_1-x_3)=f_1^3-f_1^3+f_1f_2-f_3=f_1f_2-f_3$;
$$2x_1-x_2-x_3=3x_1-f_1;$$
$$(3x_1-f_1)(3x_2-f_1)(3x_3-f_1)=27f_3-9f_1f_2+2f_1^3;$$
$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=f_1^2-f_2-f_1x_3,$$
$$x_1^2-x_2x_3=f_1x_1-f_2.$$

777. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=(n-k)f_{k-1}$.

778. Sea $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Entonces
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}=n\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}+(n-1)f_1\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}+\ldots+f_{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial f_n}.$$

779. Sea $\varphi(a)=F(x_1+a,\ x_2+a,\ \ldots,\ x_n+a)$. Entonces

$$\varphi'(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(x_1+a,\ x_2+a,\ \ldots,\ x_n+a)}{\partial x_i}.$$

Como $\varphi(a)$ no depende de a, se tiene que $\varphi'_{(a)}=0$ idénticamente, de donde se deduce que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}=0.$$

Recíprocamente, si

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{\partial x_i}=0$$

idénticamente, entonces

$$\varphi'(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(x_1+a,\ \ldots,\ x_n+a)}{\partial x_i}=0,$$

de donde se deduce que $\varphi(a)$ no depende de a y $\varphi(a)=\varphi(0)$, es decir,

$$F(x_1+a,\ x_2+a,\ \ldots,\ x_n+a)=F(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n).$$

En virtud del problema anterior, la condición $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}=0$ es equivalente a la condición

$$n\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}+(n-1)f_1\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}+\ldots+f_{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial f_n}=0.$$

780. Sea $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polinomio simétrico homogéneo de segundo grado. Entonces su expresión mediante los polinomios simétricos fundamentales tiene la forma $\Phi=Af_1^2+Bf_2$. En virtud del resultado del problema 779, tiene que ser $n\cdot 2Af_1+(n-1)Bf_1=0$, de donde $A=(n-1)\alpha$, $B=-2n\alpha$ y

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\alpha\left[(n-1)f_1^2-2nf_2\right]=\alpha\sum_{i<k}(x_i-x_k)^2.$$

781. La expresión de un polinomio simétrico homogéneo de tercer grado mediante los fundamentales tiene la forma $Af_1^3+Bf_1f_2+Cf_3$. En virtud del resultado del problema 779, tiene que ser $3Anf_1^2+nBf_2+(n-1)Bf_1^2+(n-2)Cf_2=0$, de donde

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\alpha\left[(n-1)(n-2)f_1^3-3n(n-2)f_1f_2+3n^2f_3\right].$$

782. $(n-2)f_1^2f_2^2-2(n-1)f_1^3f_3-4(n-2)f_2^3+(10n-12)f_1f_2f_3-$
$-4(n-1)f_1^2f_4-9nf_3^2+8nf_2f_4.$

783. Se puede tomar

$$\varphi_k=f_k\left(x_1-\frac{f_1}{n},\ x_2-\frac{f_1}{n},\ \ldots,\ x_n-\frac{f_1}{n}\right).$$

Cada función φ_k posee la propiedad pedida. Por otra parte, si $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1+a, x_2+a, \ldots, x_n+a)$ y $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, entonces

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(0, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n).$$

784. a) $-4\varphi_2^3 - 27\varphi_3^2$; b) $18\varphi_2^3$.

785. a) $8\varphi_3$;

b) $-4\varphi_2^3\varphi_3^2 + 16\varphi_2^4\varphi_4 - 27\varphi_3^4 + 144\varphi_2\varphi_3^2\varphi_4 - 128\varphi_2^2\varphi_4^2 + 256\varphi_4^3$.

786. $s_2 = f_1^2 - 2f_2$; $\quad s_3 = f_1^3 - 3f_1f_2 + 3f_3$; $\quad s_4 = f_1^4 - 4f_1^2f_2 + 2f_2^2 + 4f_1f_3 - 4f_4$;

$s_5 = f_1^5 - 5f_1^3f_2 + 5f_1f_2^2 + 5f_1^2f_3 - 5f_2f_3 - 5f_1f_4 + 5f_5$;

$$s_6 = f_1^6 - 6f_1^4f_2 + 9f_1^2f_2^2 + 6f_1^3f_3 - 2f_2^3 - 12f_1f_2f_3 - 6f_1^2f_4 + 3f_3^2 + \\ + 6f_2f_4 + 6f_1f_5 - 6f_6.$$

787. $2f_2 = s_1^2 - s_2$; $\quad 6f_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3$; $\quad 24f_4 = s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_4$;

$120f_5 = s_1^5 - 10s_1^3s_2 + 20s_1^2s_3 + 15s_1s_2^2 - 20s_2s_3 - 30s_1s_4 + 24s_5$;

$$720f_6 = s_1^6 - 15s_1^4s_2 + 40s_1^3s_3 + 45s_1^2s_2^2 - 120s_1s_2s_3 - 15s_2^3 - \\ - 90s_1^2s_4 + 40s_3^2 + 90s_2s_4 + 144s_1s_5 - 120s_6.$$

788. $s_5 = 859$. 789. $s_8 = 13$. 790. $s_{10} = 621$.

791. $s_1 = -1$, $s_2 = s_3 = \ldots = s_n = 0$.

792. Se demuestra fácilmente por el método de inducción matemática mediante la relación

$$as_k + bs_{k-1} + cs_{k-2} = 0,$$

donde $s_k = x_1^k + x_2^k$.

793. $s_5 - s_1^5 = 5(f_1^2 - f_2)(f_3 - f_1f_2)$; $s_3 - s_1^3 = 3(f_3 - f_1f_2)$.

794. $s_5 = -5f_2f_3$; $s_3 = 3f_3$; $s_2 = -2f_2$.

795. $s_7 = -7f_2f_5$; $s_2 = -2f_2$; $s_5 = 5f_5$.

796. $x^n - a = 0$.

797. $x^n - \frac{a}{1}x^{n-1} + \frac{a^2}{1\cdot 2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \frac{a^n}{n!} = 0$.

798. $x^n + \frac{P_1(\alpha)}{1}x^{n-1} + \frac{P_2(\alpha)}{2!}x^{n-2} + \ldots + \frac{P_n(\alpha)}{n!} = 0$,

donde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son los polinomios de Hermite:

$P_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^k}$, α es una raíz del polinomio de Hermite $P_{n+1}(x)$.

Solución. Supongamos que la ecuación buscada tiene la forma

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

En virtud de las fórmulas de Newton

$$\begin{gathered} a_1 = \alpha, \\ 2a_2 = \alpha a_1 - 1, \\ 3a_3 = \alpha a_2 - a_1, \\ \dots\dots\dots \\ ka_k = \alpha a_{k-1} - a_{k-2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ na_n = \alpha a_{n-1} - a_{n-2}, \\ 0 = \alpha a_n - a_{n-1}. \end{gathered}$$

De estas relaciones se deduce que a_k es un polinomio en α de grado k. Hagamos la notación $k!\ a_k=P_k(\alpha)$. Entonces, haciendo $P_0=1$, obtenemos:

$$P_1=\alpha \text{ y } P_k-\alpha P_{k-1}+(k-1)P_{k-2}=0;$$
$$-\alpha P_n+nP_{n-1}=0.$$

Las primeras relaciones muestran que P_k es un polinomio de Hermite en α (véase el problema 707). La última muestra que $P_{n+1}(\alpha)=0$.

799. $\frac{1}{2}(s_k^2-s_{2k})$.

800.
$$\sum_{i=1}^{n}(x+x_i)^k=\sum_{m=0}^{k}C_k^m s_{k-m}x^m;$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j+x_i)^k=\sum_{m=0}^{k}C_k^m s_{k-m}s_m;$$
$$\sum_{i<j}(x_i+x_j)^k=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{k}C_k^m s_{k-m}s_m-2^k s_k\right).$$

801. $\sum_{i<j}(x_i-x_j)^{2k}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2k}C_{2k}^m(-1)^m s_m s_{2k-m}$.

802. Multiplicar la segunda columna por $-s_1$, la tercera por s_2, ..., la k-ésima por $(-1)^{k-1}s_{k-1}$ y agregar el resultado a la primera. Según las fórmulas de Newton obtenemos:

$$\begin{vmatrix} & f_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & f_2 & f_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (k-1) & f_{k-1} & f_{k-2} & & \dots & f_1 1 \\ & kf_k & f_{k-1} & & \dots & f_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & f_{k-2} & f_{k-3} & \dots & 1 \\ (-1)^{k-1}s_k & f_{k-1} & f_{k-2} & \dots & f_1 \end{vmatrix}=s_k.$$

803. La segunda columna se multiplica por $-f_1$, la tercera por f_2, ..., la k-ésima por $(-1)^{k-1}f_{k-1}$ y los resultados se agregan a la primera columna. En virtud de las fórmulas de Newton se obtiene el resultado pedido.

804. $n!\,(x^n-f_1x^{n-1}+f_2x^{n-2}+\dots+(-1)^n f_n)$.

805. $\dfrac{\varphi(n)}{\varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)}\mu\left(\dfrac{n}{d}\right)$, donde d es el máximo común divisor de m y n.

806. En virtud de los resultados de los problemas 117, 119 es suficiente considerar el caso $n=p_1p_2\dots p_k$, donde $p_1, p_2, \dots, p_k$ son números primos impares distintos entre sí. En este caso $s_1=s_2=s_4=(-1)^k$; $s_3=2(-1)^{k-1}$, si n es divisible por 3, y $s_3=(-1)^k$ si n no es divisible por 3. Los cálculos según las fórmulas de Newton dan:

$$f_2=\frac{1-(-1)^k}{2};$$

$$f_3=\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}, \text{ si } n \text{ es divisible por 3;}$$

$$f_3=\frac{(-1)^{k}-1}{2}, \text{ si } n \text{ no es divisible por 3;}$$

$$f_4=\frac{(-1)^{k-1}-1}{2}, \text{ si } n \text{ es divisible por 3;}$$

$$f_4=\frac{(-1)^{k-1}+1}{2}, \text{ si } n \text{ no es divisible por 3.}$$

807. $s_1=s_2=s_3=\ldots=s_n=a$. Por consiguiente, para $k\leqslant n$

$$kf_k=af_{k-1}-af_{k-2}+\ldots+(-1)^{k-1}f_1,$$
$$(k-1)f_{k-1}=\qquad af_{k-2}+\ldots+(-1)^{k-2}f_1,$$

de donde

$$kf_k=(a-k+1)f_{k-1},\quad f_k=\frac{a-k+1}{k}f_{k-1}.$$

Evidentemente, $f_1=a$; por consiguiente,

$$f_2=\frac{a(a-1)}{1\cdot 2},\ \ldots,\quad f_k=\frac{a(a-1)\ \ldots\ (a-k+1)}{1\cdot 2\ \ldots\ k},$$

por lo cual $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son raíces de la ecuación

$$x^n-\frac{a}{1}x^{n-1}+\frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}-\ \ldots+(-1)^n\frac{a(a-1)\ \ldots\ (a-n+1)}{n!}=0;$$

$$s_{n+1}=a-\frac{a(1-a)(2-a)\ \ldots\ (n-a)}{n!}.$$

808. $(x-a)(x-b)[x^n+(a+b)x^{n-1}+\ldots+(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)]=$
$=(x-a)[x^{n+1}+ax^n+a^2x^{n-1}+\ldots+a^nx-b(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)]=$
$=x^{n+2}-(a^{n+1}+a^nb+\ldots+b^{n+1})x+ab(a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n)$.

Es obvio que las sumas de potencias $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ para el nuevo polinomio son iguales a cero. Pero $\sigma_k=s_k+a^k+b^k$. Por consiguiente, $s_k=-(a^k+b^k)$ para $1\leqslant k\leqslant n$.

809. $s_k=-a^k-b^k$ si k es impar,

$$s_k=-\left(a^{\frac{k}{2}}-b^{\frac{k}{2}}\right)^2 \text{ si } k \text{ es par.}$$

810. a) $(x+a)(x^2+ax+b)-c=0$;
b) $x(x-a^2+3b)^2-(a^2b^2-4a^3c-4b^3+18abc-27c^2)=0$;
c) $x^3+(3b-a^2)x^2+b(3b-a^2)x+b^3-a^3c=0$;
d) $x^2(x-a^2+3b)+(a^2b^2-4a^3c-4b^3+18abc-27c^2)=0$;
e) $x^3-(a^2-2b)x^2+(b^2-2ac)x-c^2=0$;
f) $x^3+(a^3-3ab+3c)x^2+(b^3-3abc+3c^2)x+c^3=0$.

811. $y^2+(2a^3-9ab+27c)y+(a^2-3b)^3=0$.

812. $y^2-\frac{ab-3c}{c}y+\frac{b^3+a^3c-6abc+9c^2}{c^2}=0$.

813. $y^6-\frac{ab-3c}{c}y^5+\frac{b^3-5abc+6c^2}{c^2}y^4-$

$$-\frac{a^2b^2-2b^3-2a^3b+6abc-7c^2}{c^2}y^3+\frac{b^3-5abc+6c^2}{c^2}y^2-\frac{ab-3c}{c}y+1=0.$$

814. a) $y^3-by^2+(ac-4d)\,y-(a^2d+c^2-4bd)=0$
(resolvente de Ferrari);

b) $y^3-(3a^2-8b)\,y^2+(3a^4-16a^2b+16b^2+16ac-64d)\,y-(a^3-4ab+8c)^2=0$

(resolvente de Euler);

c) $y^6-by^5+(ac-d)\,y^4-(a^2d+c^2-2bd)\,y^3+d\,(ac-d)\,y^2-bd^2y+d^3=0;$

d) $y^6+3ay^5+(3a^2+2b)\,y^4+(a^3+4ab)\,y^3+$
$+(2a^2b+b^2+ac-4d)\,y^2+(ab^2+a^2c-4ad)\,y+(abc-a^2d-c^2)=0.$

815. $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b+4y_1}\pm\sqrt{a^2-4b+4y_2}\pm\sqrt{a^2-4b+4y_3}}{4}.$

Los signos de las raíces cuadradas deben elegirse de tal modo que su producto sea igual a $-a^3+4ab-8c$.

816.

$$x=\frac{\pm\sqrt{4a+\sqrt[3]{b^2-64a^3}}\pm\sqrt{4a+\varepsilon\sqrt[3]{b^2-64a^3}}\pm\sqrt{4a+\varepsilon^2\sqrt[3]{b^2-64a^3}}}{2},$$

$$\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Los signos de las raíces cuadradas deben elegirse de tal modo que su producto sea igual a $-b$.

817. $(y+a)^4\,(y^2+6ay+25a^2)+3125b^4y=0.$

Solución. Las raíces de la ecuación buscada son:

$$y_1=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)\,(x_1x_3+x_3x_5+x_5x_2+x_2x_4+x_4x_1);$$
$$y_2=(x_1x_3+x_3x_2+x_2x_5+x_5x_4+x_4x_1)\,(x_1x_2+x_2x_4+x_4x_3+x_3x_5+x_5x_1);$$
$$y_3=(x_5x_2+x_2x_4+x_4x_3+x_3x_1+x_1x_5)\,(x_5x_4+x_4x_1+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_5);$$
$$y_4=(x_2x_1+x_1x_3+x_3x_5+x_5x_4+x_4x_2)\,(x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1+x_1x_5+x_5x_2);$$
$$y_5=(x_5x_3+x_3x_2+x_2x_4+x_4x_1+x_1x_5)\,(x_5x_2+x_2x_1+x_1x_3+x_3x_4+x_4x_5);$$
$$y_6=(x_2x_1+x_1x_4+x_4x_3+x_3x_5+x_5x_2)\,(x_2x_4+x_4x_5+x_5x_1+x_1x_3+x_3x_2).$$

Evidentemente, la ecuación buscada tiene la forma:

$$y^6+c_1ay^5+c_2a^2y^4+c_3a^3y^3+c_4a^4y^2+(c_5a^5+c_6b^4)\,y+(c_7a^6+c_8ab^4)=0,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_8$ son constantes absolutas. Para determinarlas, hacemos $a=-1$, $b=0$ y $a=0$, $b=-1$. Resulta

a	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
-1	0	1	i	-1	$-i$	0	1	$3-4i$	1	1	$3+4i$	1
0	-1	1	ε	ε^2	ε^3	ε^4	0	-5	$-5\varepsilon^4$	$-5\varepsilon^3$	$-5\varepsilon^2$	-5ε

En el primer caso la ecuación buscada tiene la forma:

$$(y-1)^4\,(y^2-6y+25)=0.$$

En el segundo caso $y^6+3125y=0$. De aquí determinamos todos los coeficientes, a excepción de c_8. Fácilmente se comprueba que $c_8=0$. Para esto se puede tomar, por ejemplo, $a=-5$, $b=4$. En este caso, $x_1=x_2=1$, mientras que las demás raíces satisfacen a la ecuación $x^3+2x^2+3x+4=0$, y todos los cálculos necesarios se efectúan sin dificultad alguna.

818. Sea $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son variables independientes. Supongamos que

$$x^{k-1}\varphi(x)=f(x)\,q_k(x)+r_k(x) \text{ y } r_k(x)=c_{k1}+c_{k2}x+\dots+c_{kn}x^{n-1}.$$

Evidentemente, los coeficientes $c_{k,s}$ son ciertos polinomios en $x_1, x_2, \dots, x_n$. Se tiene

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r_1(x_1) & r_1(x_2) & \dots & r_1(x_n) \\ r_2(x_1) & r_2(x_2) & \dots & r_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n(x_1) & r_n(x_2) & \dots & r_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \dots & \varphi(x_n) \\ x_1\varphi(x_1) & x_2\varphi(x_2) & \dots & x_n\varphi(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}\varphi(x_1) & x_2^{n-1}\varphi(x_2) & \dots & x_n^{n-1}\varphi(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

de donde se deduce que

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) = R(f, \varphi).$$

La última igualdad es una identidad entre polinomios en las variables independientes $x_1, x_2, \dots, x_n$, por lo cual se mantiene válida para todos los valores particulares de estas variables.

819. Cerciorémonos primero de que todos los polinomios $\psi_k(x)$ son de grado $n-1$. Introduzcamos las siguientes notaciones:

$$f_k(x)=a_0x^{k-1}+\dots+a_{k-1};$$
$$\overline{f}_k(x)=a_kx^{n-k}+\dots+a_n;$$
$$\varphi_k(x)=b_0x^{k-1}+\dots+b_{k-1};$$
$$\overline{\varphi}_k(x)=b_kx^{n-k}+\dots+b_n.$$

Entonces

$$f(x)=x^{n-k+1}f_k(x)+\overline{f}_k(x);$$

$$\varphi(x)=x^{n-k+1}\varphi_k(x)+\overline{\varphi}_k(x);$$

$$\psi_k(x)=f_k(x)\,[x^{n-k+1}\varphi_k(x)+\overline{\varphi}_k(x)]-$$

$$-\varphi_k(x)\,[x^{n-k+1}f_k(x)+\overline{f}_k(x)]=f_k(x)\,\overline{\varphi}_k-\varphi_k\overline{f}_k(x)=(a_0b_k-b_0a_k)\,x^{n-1}+\dots$$

Sea $\psi_k(x)=c_{k1}+c_{k2}x+\ldots+c_{kn}x^{n-1}$ y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las raíces del polinomio $f(x)$. Entonces

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \ldots & \psi_1(x_n) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \ldots & \psi_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_n(x_1) & \psi_n(x_2) & \ldots & \psi_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x_1)\varphi(x_1) & f_1(x_2)\varphi(x_2) & \ldots & f_1(x_n)\varphi(x_n) \\ f_2(x_1)\varphi(x_1) & f_2(x_2)\varphi(x_2) & \ldots & f_2(x_n)\varphi(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_1)\varphi(x_1) & f_n(x_2)\varphi(x_2) & \ldots & f_n(x_n)\varphi(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) \cdot \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \ldots & f_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\, a_0^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n} \end{vmatrix} .$$

de donde se deduce que

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = a_0^n \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) = R(f, \varphi).$$

820. Los polinomios χ_k son de grado no superior a $n-1$. Esto es evidente para $1 \leqslant k \leqslant n-m$, y para $k > n-m$ esto se deduce de que χ_k son los polinomios de Bézout ψ_{k-n+m} para $f(x)$ y $x^{n-m}\psi(x)$. Sea $\chi_k(x)=c_{k1}+c_{k2}x+\ldots$ $\ldots+c_{kn}x^{n-1}$ y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Entonces

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \Delta = \begin{vmatrix} \chi_1(x_1) & \chi_1(x_2) & \dots & \chi_1(x_n) \\ \chi_2(x_1) & \chi_2(x_2) & \dots & \chi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n(x_1) & \chi_n(x_2) & \dots & \chi_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-m-1} & x_2^{n-m-1} & \dots & x_n^{n-m-1} \\ x_1^{n-m} f_0(x_1) & x_2^{n-m} f_0(x_2) & \dots & x_n^{n-m} f_0(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-m} f_{m-1}(x_1) & x_2^{n-m} f_{m-1}(x_2) & \dots & x_n^{n-m} f_{m-1}(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)\,\Delta \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & a_0 & & & \\ & & & & a_1 & a_0 & & \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_0^m \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)\,\Delta,$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado pedido.

821. a) -7; b) 243; c) 0; d) -59; e) 4854; f) $(b_0a_2-b_2a_0)^2-$ $-(b_0a_1-b_1a_0)(b_1a_2-b_2a_1)$.

822. a) Para $\lambda=3$ y $\lambda=-1$;

b) $\lambda=1$, $\lambda=\dfrac{-2+\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$,

$\lambda=\dfrac{-2-\sqrt{2}\pm i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}$;

c) $\lambda=\pm\sqrt{-2}$, $\lambda=\pm\sqrt{-12}$.

823. a) $y^6-4y^4+3y^2-12y+12=0$;

b) $5y^5-7y^4+6y^3-2y^2-y-1=0$;

c) $y^3+4y^2-y-4=0$.

824. a) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_4=-2$,

$y_1=2$; $y_2=3$; $y_3=-1$; $y_4=1$.

b) $x_1=0$, $x_2=3$; $x_3=2$, $x_4=2$,

$y_1=1$; $y_2=0$; $y_3=2$; $y_4=-1$.

c) $x_1=$ $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=2$.
$y_1=$ $y_2=-1$; $y_3=1$; $y_4=2$.
d) $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$; $x_4=1$, $x_{5,6}=2$,
$y_1=1$; $y_2=3$; $y_3=2$; $y_4=3$; $y_{5,6}=1\pm i\sqrt{2}$.
e) $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=$ $x_5=2$, $x_6=-4$,
$y_1=2$; $y_2=-2$; $y_3=0$; $y_4=$ $y_5=2$; $y_6=2$;
$x_7=4$, $x_8=-6$, $x_9=-{}^2/_3$.
$y_7=6$; $y_8=4$; $y_9={}^4/_3$.

825. $a_0^n a_n^{n-1}$.

826. Sea

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n);$$
$$\varphi_1(x)=b_0x^k+\ldots+b_k;\quad \varphi_2(x)=c_0x^m+\ldots+c_m.$$

Entonces

$$R(f,\ \varphi_1\cdot\varphi_2)=a_0^{m+k}\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\,\varphi_2(x_i)=$$
$$=\left[a_0^m\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\right]\left[a_0^k\prod_{i=1}^{n}\varphi_2(x_i)\right]=R(f,\ \varphi_1)\cdot R(f,\ \varphi_2).$$

827. Es de interés solamente el caso $n>2$. Sea d el máximo común divisor de m y n; sean $\xi_1, \xi_2, \ldots$ las raíces primitivas de la unidad de orden n y $\eta_1, \eta_2, \ldots$, las raíces primitivas de la unidad de orden $\frac{n}{d}=n_1$. Entonces

$$R(X_n,\ x^m-1)=\prod(\xi_i^m-1)=\prod(1-\xi_i^m)=$$
$$=\left[\prod(1-\eta_i)\right]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}}\left[X_{n_1}(1)\right]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}}.$$

Si m es divisible por n, entonces $R(X_n,\ x^m-1)=0$. Si m no es divisible por n, entonces $n_1\neq 1$ y, en virtud del problema 123, $X_{n_1}(1)=1$ si $n_1\neq p^\lambda$, $X_{n_1}(1)=p$ si $n_1=p^\lambda$ (p es un número primo). Así, pues,

$$R(X_n,\ x^m-1)=0 \text{ si } n_1=\frac{n}{d}=1;$$
$$R(X_n,\ x^m-1)=p^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n_1)}} \text{ si } n_1=\frac{n}{d}=p^\lambda;$$
$$R(X_n,\ x^m-1)=1 \text{ en todos los demás casos.}$$

828. Evidentemente, $R(X_n,\ X_m)$ es un número entero positivo, divisor de $R(X_n,\ x^m-1)$ y $R(X_m,\ x^n-1)$. Designemos con d el máximo común divisor de m y n. Si m no es divisible por n y n no es divisible por m, entonces $\frac{m}{d}$ y $\frac{n}{d}$ son distintos de 1 y son primos entre sí. En virtud del resultado del problema anterior, $R(X_n,\ x^m-1)$ y $R(X_m,\ x^n-1)$ son en este caso primos entre sí, por lo cual $R(X_n,\ X_m)=1$.

No queda más que estudiar el caso en que uno de los números m, n es divisible por el otro. Supongamos, para precisar, que m es divisible por n.

Si $m=n$, entonces $R(X_m, X_n)=0$. Si $\frac{m}{n}$ no es una potencia de un número primo, entonces $R(X_m, x^n-1)=1$ y, por consiguiente, $R(X_m, X_n)=1$. Supongamos, finalmente, que $m=np^{\lambda}$. Entonces

$$R(X_m, X_n)=\prod_{\delta/n} R(X_m, x^{\delta}-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

Todos los factores del segundo miembro son iguales a la unidad, a excepción de aquellos, para los cuales $\frac{m}{\delta}$ es una potencia del número p.

Si n no es divisible por p, entonces sólo quedará un factor distinto de la unidad, correspondiente a $\delta=n$, y

$$R(X_m, X_n)=R(X_m, x^n-1)=p^{\frac{\varphi(m)}{\varphi(m/n)}}=p^{\varphi(n)}.$$

Si n es divisible por p, entonces quedarán dos factores distintos de la unidad, correspondientes a $\delta=n$ y $\delta=\frac{n}{p}$. En este caso

$$R(X_m, X_n)=\frac{R(X_m, x^n-1)}{R(X_m, x^{n/p}-1)}=p^{\frac{\varphi(m)}{\varphi(m/n)}-\frac{\varphi(m)}{\varphi(mp/n)}}=$$

$$=p^{\varphi(m)\left[\frac{1}{p^{\lambda-1}(p-1)}-\frac{1}{p^{\lambda}(p-1)}\right]}=p^{\frac{\varphi(m)}{p^{\lambda}}}=p^{\varphi(n)}.$$

Así pues,

$$R(X_m, X_n)=0 \text{ si } m=n;$$
$$R(X_m, X_n)=p^{\varphi(n)} \text{ si } m=np^{\lambda};$$
$$R(X_m, X_n)=1 \text{ en todos los demás casos.}$$

829. a) 49; b) -107; c) -843; d) 725; e) 2777.

830. a) $3125(b^2-4a^5)^2$; b) $\lambda^4(4\lambda-27)^3$;
c) $(b^2-3ab+9a^2)^2$; d) $4(\lambda^2-8\lambda+32)^3$.

831. a) $\lambda=\pm 2$; b) $\lambda_1=3$, $\lambda_{2,3}=3\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$;
c) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=125$;
d) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-\frac{3}{2}$, $\lambda_{3,4}=\frac{7}{2}\pm\frac{9}{2}i\sqrt{3}$.

832. En el caso general, si el discriminante es positivo, el número de pares de raíces imaginarias conjugadas es par, si el discriminante es negativo, es impar.

En particular, para un polinomio de tercer grado, si $D>0$, todas las raíces son reales, si $D<0$, dos raíces son imaginarias conjugadas.

Para un polinomio de cuarto grado, si $D>0$, o todas las raíces son reales, o todas son imaginarias. Si $D<0$ hay dos raíces reales y un par de raíces imaginarias conjugadas

833. $f=x^n+a$; $f'=nx^{n-1}$;

$$R(f', f)=n^na^{n-1};\quad D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^na^{n-1}.$$

834. $f=x^n+px+q$; $f'=nx^{n-1}+p$;

$$R(f', f)=n^n\prod_{k=0}^{n-2}\left(q+\frac{n-1}{n}p\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\,\varepsilon^k\right),$$

donde $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n-1}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n-1}$.

$$R(f', f)=n^n\left[q^{n-1}+\frac{(n-1)^{n-1}p^{n-1}}{n^{n-1}}\cdot\left(-\frac{p}{n}\right)(-1)^{n-2}\right]=$$
$$=n^nq^{n-1}+(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}p^n;$$
$$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^nq^{n-1}+(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)^{n-1}p^n.$$

835. Sea d el máximo común divisor de m y n. Hagamos las notaciones: $m_1=\frac{m}{d}$, $n_1=\frac{n}{d}$, ε es una raíz primitiva de 1 de orden n, η es una raíz primitiva de 1 de orden n_1, $a_0x^{m+n}+a_1x^m+a_2=f(x)$. Entonces $f'(x)=$ $=(m+n)a_0x^{m+n-1}+ma_1x^{m-1}$. Las raíces de la derivada son: $\xi_1=\xi_2=\ldots=$ $=\xi_{m-1}=0$,

$$\xi_{m+k}=\sqrt[n]{-\frac{ma_1}{(m+n)a_0}}\,\varepsilon^k=\xi_m\varepsilon^k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Se tiene

$$R(f', f)=(m+n)^{m+n}a_0^{m+n}a_2^{m-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[a_2+\frac{na_1}{m+n}\xi_m^m\varepsilon^{km}\right]=$$
$$=(m+n)^{m+n}a_0^{m+n}a_2^{m-1}\left[\prod_{k=0}^{n_1-1}\left(a_2+\frac{na_1}{m+n}\right)\xi_m\eta^k\right]^d=$$
$$=(m+n)^{m+n}a_0^{m+n}a_2^{m-1}\left[a_2^{n_1}+(-1)^{m_1+n_1-1}\frac{n^{n_1}m^{m_1}a_1^{m_1+n_1}}{(m+n)^{m_1+n_1}a_0^{m_1}}\right]^d=$$
$$=a_0^n a_2^{m-1}\left[(m+n)^{m_1+n_1}a_0^{m_1}a_2^{n_1}+(-1)^{m_1+n_1-1}n^{n_1}m^{m_1}a_1^{m_1+n_1}\right]^d$$

y, por consiguiente,

$$D(f)=(-1)^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}}a_0^{n-1}a_2^{m-1}[(m+n)^{m_1+n_1}a_0^{m_1}a_2^{n_1}+$$
$$+(-1)^{m_1+n_1-1}n^{n_1}m^{m_1}a_1^{m_1+n_1}]^d.$$

836. Los discriminantes son iguales.

837. $x_1x_2+x_3x_4-x_1x_3-x_2x_4=(x_1-x_4)(x_2-x_3)$;

$x_1x_3+x_2x_4-x_1x_4-x_2x_3=(x_1-x_2)(x_3-x_4)$;

$x_1x_4+x_2x_3-x_1x_2-x_3x_4=(x_1-x_3)(x_4-x_2)$.

Elevando al cuadrado estas igualdades y multiplicándolas se obtiene el resultado buscado.

838. Sea $f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n)$. Entonces

$$D(f(x)(x-a))=a_0^{2n}(a-x_1)^2(a-x_2)^2\ \ldots\ (a-x_n)^2\prod_{i<k}(x_i-x_k)^2=D(f(x))[f(a)]^2.$$

839. Hagamos la notación $\varphi(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$. Entonces $(x-1)\varphi(x)=x^n-1$, de donde se deduce que

$$D(\varphi)[\varphi(1)]^2=D(x^n-1)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^n.$$

Por lo tanto,

$$D(\varphi)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^{n-2}.$$

840. Sea $\varphi(x)=x^n+ax^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a$. Entonces $\varphi(x)(x-1)=$ $=x^{n+1}+(a-1)x^n-a$. Por consiguiente,

$$(na+1)^2D(\varphi)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}[(n+1)^{n+1}a+n^n(1-a)^{n+1}].$$

Así, pues,

$$D(\varphi)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^{n-1}\frac{(n+1)^{n+1}a+n^n(1-a)^{n+1}}{(1+na)^2}.$$

841. Sean

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n),$$
$$\varphi(x)=b_0(x-y_1)(x-y_2)\ \dots\ (x-y_m).$$

Entonces

$$D(f\varphi)=(a_0b_0)^{2m+2n-2}\prod_{i<k}(x_i-x_k)^2\prod_{i<k}(y_i-y_k)^2\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(x_i-y_k)^2=a_0^{2n-2}\prod_{i<k}(x_i-x_k)^2 b_0^{2m-2}\times$$
$$\times\prod_{i<k}(y_i-y_k)^2\left[a_0^m b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(x_i-y_k)\right]^2=D(f)\,D(\varphi)\,[R(f,\varphi)]^2.$$

842. $X_{p^m}(x^{p^{m-1}}-1)=x^{p^m}-1$. Por consiguiente,

$$D(X_{p^m})\,D(x^{p^{m-1}}-1)\,[R(x^{p^{m-1}}-1, X_{p^m})]^2=D(x^{p^m}-1).$$

Poniendo los valores de las cantidades conocidas, obtenemos:

$$D(X_{p^m})=p^{mp^m-(m+1)p^{m-1}}(-1)^{\frac{1}{2}p^{m-1}(p-1)}.$$

843. $X_n\prod\limits_{\delta/n}(x^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}=(x^n-1)\prod\limits_{\substack{\delta/n\\ \delta\neq n}}(x^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}$. Sea ε una raíz de X_n. Entonces

$$X_n'(\varepsilon)=n\varepsilon^{n-1}\prod_{\substack{\delta/n\\ \delta\neq n}}(\varepsilon^\delta-1)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

Para simplificar los cálculos, hallemos primero el valor absoluto del discriminante de X_n:

$$|D(X_n)|=\prod_{\varepsilon}|X_n'(\varepsilon)|=n^{\varphi(n)}\prod_{\substack{\delta/n\\ \delta\neq n}}\prod_{\varepsilon}(1-\varepsilon^\delta)^{\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}=$$

$$=n^{\varphi(n)}\prod_{\substack{\delta/n\\ \delta\neq n}}\left[X_{\frac{n}{\delta}}(1)\right]^{\frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{\delta}\right)}\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)}.$$

$X_{\frac{n}{\delta}}(1)$ es distinto de 1 solamente si $\frac{n}{\delta}$ es una potencia de un número primo. Por otra parte, $\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)$ es distinto de 0 solamente si $\frac{n}{\delta}$ no es divisible por el cuadrado de un número primo. Por consiguiente, en el último producto sólo hay que conservar los factores que corresponden a $\frac{n}{\delta}=p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_k$, donde $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_k$ son los divisores primos distintos del número n.

Así, pues,

$$|D(X_n)|=\frac{n^{\varphi(n)}}{\prod\limits_{p/n}p^{\varphi(n)/p-1}}.$$

Como todas las raíces de X_n son imaginarias, el signo del discriminante es igual a $(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}$. Definitivamente

$$D(X_n)=(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}}\frac{n^{\varphi(n)}}{\prod\limits_{p/n} p^{\varphi(n)/p-1}}.$$

844. $E_n=n!\left(1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$,

$$E_n'=n!\left(1+\frac{x}{1}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Por consiguiente,

$$E_n'=E_n-x^n;$$

$$R(E_n,\ E_n')=\prod_{i=1}^{n}(-x_i)^n=(-1)^n[(-1)^n n!]^n=(n!)^n;$$

$$D(E_n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n!)^n.$$

845. Es fácil establecer que

$$(nx+n-a)F_n-x(x+1)F_n'+\frac{a(a-1)\ \ldots\ (a-n)}{n!}=0.$$

Sean $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ las raíces de F_n. Entonces

$$F_n'(x_i)=\frac{c}{x_i(x_i+1)},\quad \text{donde}\quad c=\frac{a(a-1)\ \ldots\ (a-n)}{n!}.$$

Por consiguiente,

$$R(F_n,\ F_n')=\frac{c^n}{\Pi x_i \Pi (x_i+1)}=\frac{c^n}{\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}\cdot\frac{(a-1)\ldots(a-n)}{n!}}=$$

$$=\frac{a^{n-1}(a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2}\ \ldots\ (a-n+1)^{n-2}(a-n)^{n-1}}{(n!)^{n-2}};$$

$$D(F_n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{a^{n-1}(a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2}\ldots(a-n+1)^{n-2}(a-n)^{n-1}}{(n!)^{n-2}}.$$

846. $P_n'=nP_{n-1}$. Por lo tanto,

$$R(P_n,\ P_n')=n^nR(P_n,\ P_{n-1}).$$

Se tiene,

$$P_n-xP_{n-1}+(n-1)P_{n-2}=0.$$

Por consiguiente, $P_n(\xi)=-(n-1)P_{n-2}(\xi)$, si ξ es una raíz de P_{n-1}, por lo cual

$$R(P_n,\ P_{n-1})=(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}R(P_{n-2},\ P_{n-1})=$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}R(P_{n-1},\ P_{n-2}).$$

Ahora es fácil establecer que

$$R(P_n,\ P_{n-1})=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)^{n-1}(n-2)^{n-2}\ \ldots\ 2^2\cdot 1.$$

Definitivamente

$$D(P_n)=1\cdot 2^2\cdot 3^3\ \ldots\ (n-1)^{n-1}n^n.$$

847. $D(P_n)=1\cdot 2^3\cdot 3^5 \ldots n^{2n-1}$.

848. $D(P_n)=2^{n-1}n^n$.

849. $D(P_n)=(n+1)^{n-1}\cdot 2^{n(n-1)}$.

850. $D(P_n)=1\cdot 2^3\cdot 3^5 \ldots n^{2n-1}\cdot 1^{2(n-1)}\cdot 3^{2(n-2)} \ldots (2n-3)^2$.

851. $D(P_n)=2^2\cdot 3^4 \ldots n^{2n-2}\cdot (n+1)^{n-1}$.

852. Sea $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. $D(f)=\Pi(x_i-x_k)^2$. Buscamos el máximo de $D(f)$ por la regla con la que se busca el máximo relativo, resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=n(n-1)R^2,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(D-\lambda(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2))=0.$$

Fácilmente se observa que

$$\frac{\partial D}{\partial x_i}=\frac{Df''(x_i)}{f'(x_i)}.$$

De este modo, se tiene:

$$f''(x)D-2\lambda x_i f'(x_i)=0 \quad \text{para} \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Por consiguiente, el polinomio $f(x)$ que proporciona el máximo del discriminante tiene que satisfacer a la ecuación diferencial

$$cf(x)-2\lambda xf'(x)+Df''(x)=0,$$

donde c es una constante. Dividiendo por $\frac{c}{n}$ e identificando los coeficientes de x^n, obtenemos que la ecuación diferencial tiene que tener la forma

$$nf(x)-xf'(x)+c'f''(x)=0,$$

donde c' es una constante nueva.

Identificando los coeficientes de x^{n-1} y x^{n-2}, hallamos que $a_1=0$, $a_2=-\frac{n(n-1)}{2}c'$. Ahora podemos determinar c'. En efecto, $n(n-1)R^2=$ $=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=a_1^2-2a_2=n(n-1)c'$, de donde $c'=R^2$.

Continuando la identificación de los coeficientes, hallamos que $f(x)$ tiene la forma

$$f(x)=x^n-\frac{n(n-1)}{2}R^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4}R^4x^{n-4}-\ldots$$

Fácilmente se observa que

$$f(x)=R^nP_n\left(\frac{x}{R}\right),$$

donde P_n es el polinomio de Hermite.

$$D(f)=R^{n(n-1)}\cdot 1\cdot 2^2\cdot 3^3 \ldots n^n.$$

Este es el máximo buscado del discriminante.

853. $2^{2n}(-1)^n a_0a_n[D(f)]^2$.

854. $m^{mn}(-1)^{\frac{m(m-1)n}{2}} a_0^{m-1}a_n^{m-1}[D(f)]^m$

855. $F(x)=\prod_{i=1}^{n}(\varphi(x)-x_i)$.

Por consiguiente,

$$D(F)=\prod_{i=1}^{n}D(\varphi(x)-x_i)\left[\prod_{i<k}R(\varphi(x)-x_i,\ \varphi(x)-x_k)\right]^2.$$

Es evidente que

$$R(\varphi(x)-x_i,\ \varphi(x)-x_k)=(x_i-x_k)^m.$$

Por esto

$$D(F)=\prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x)-x_i)\prod_{i<k}(x_i-x_k)^{2m}=[D(f)]^m\prod_{i=1}^{n} D(\varphi(x)-x_i),$$

como se quería demostrar.

856. $(y+1)(y-5)(y-19)=0$.

857. a) Solución. $x^3=3x+4$. Sea $y=1+x+x^2$, donde x es una raíz de la ecuación dada. Entonces

$$yx=x+x^2+x^3=x+x^2+3x+4=4+4x+x^2;$$
$$yx^2=4x+4x^2+x^3=4x+4x^2+3x+4=4+7x+4x^2.$$

Eliminando x obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1-y & 1 & 1\\ 4 & 4-y & 1\\ 4 & 7 & 4-y\end{vmatrix}=0,$$

$$y^3-9y^2+9y-9=0;$$

b) $y^3-7y^2+3y-1=0$;

c) $y^4+5y^3+9y^2+7y-6=0$;

d) $y^4-12y^3+43y^2-49y+20=0$.

858. a) $y^3-2y^2+6y-4=0,\quad x=-\dfrac{y^2-2y+4}{2}$;

b) $y^4-9y^3+31y^2-45y+13=0,\quad x=\dfrac{y^2-3y+2}{3}$;

c) $y^4+2y^3-y^2-2y+1=0$, la transformación inversa no existe.

859. $y^3-y^2-2y+1=0$.

La ecuación transformada coincide con la inicial. Esto significa que entre las raíces de la ecuación inicial existen unas raíces x_1 y x_2 que están ligadas por la relación $x_2=2-x_1^2$.

860. Sea $x_2=\varphi(x_1)$, donde $\varphi(x_1)$ es una función racional de coeficientes racionales. Sin restringir generalidad se puede suponer que $x_2=ax_1^2+bx_1+c$. Los números $ax_1^2+bx_1+c$, $ax_2^2+bx_2+c$, $ax_3^2+bx_3+c$ son raíces de una ecuación cúbica de coeficientes racionales, una de cuyas raíces coincide con la raíz $x_2=ax_1^2+bx_1+c$ de la ecuación dada. Como la ecuación dada es irreducible, también tienen que coincidir las demás raíces. Por consiguiente, o $ax_2^2+bx_2+c=x_3$, $ax_3^2+bx_3+c=x_1$, o $ax_2^2+bx_2+c=x_1$, $ax_3^2+bx_3+c=x_3$. La última igualdad es imposible, puesto que x_3 no puede ser raíz de una ecuación cuadrática de coeficientes racionales. Así, pues, en las condiciones consideradas, las raíces de la ecuación dada están ligadas por las relaciones:

$$x_2=ax_1^2+bx_1+c;$$
$$x_3=ax_2^2+bx_2+c;$$
$$x_1=ax_3^2+bx_3+c.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{D}=(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_3)=$$
$$=\left[ax_1^2+(b-1)x_1+c\right]\left[ax_2^2+(b-1)x_2+c\right]\left[ax_3^2+(b-1)x_3+c\right]$$

es un número racional, como función simétrica de coeficientes racionales de x_1, x_2, x_3. Queda demostrada la condición necesaria.

Supongamos ahora que el discriminante D es el cuadrado de un número racional d. Entonces

$$x_2-x_3=\frac{d}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{d}{3x_1^2+2ax_1+b}.$$

Por otra parte,

$$x_2+x_3=-a-x_1.$$

De aquí se deduce que x_2 y x_3 son funciones racionales de x_1. Queda demostrada la condición suficiente.

861. a) $\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; b) $\dfrac{-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{23}$;

c) $1+3\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}$.

862. a) $\dfrac{\alpha^2-\alpha+1}{3}$; b) $17\alpha^2-3\alpha+55$; c) $3-10\alpha+8\alpha^2-3\alpha^3$;

d) el denominador se anula para una de las raíces de la ecuación.

863. $mx_1^2+nx_1+p=\dfrac{(pm-bm^2+amn-n^2)\,x_1+(amp-np-cm^2)}{mx_1+ma-n}$.

864. Si

$$x_2=\frac{\alpha x_1+\beta}{\gamma x_1+\delta},$$

se tiene

$$x_3=\frac{\alpha x_2+\beta}{\gamma x_2+\delta}$$

$$x_1=\frac{\alpha x_3+\beta}{\gamma x_3+\gamma}=\frac{(\alpha^2+\beta\gamma)\,x_2+(\alpha+\delta)\,\beta}{(\alpha+\delta)\,\gamma x_2+(\beta\gamma+\delta^2)}.$$

Por otra parte, $x_1=\dfrac{-\delta x_2+\beta}{\gamma x_2-\alpha}$, de donde se deduce que la relación

$$\alpha\delta-\beta\gamma=(\alpha+\delta)^2$$

es necesaria.

865. Sea

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0\,(x-x_1)\,(x-x_2)\;\ldots\;(x-x_n).$$

Entonces

$$a_0x^n-a_1x^{n-1}+\ldots+(-1)^n a_n=a_0\,(x+x_1)\,(x+x_2)\;\ldots\;(x+x_n).$$

Multiplicado estas igualdades, obtenemos:

$$a_0^2\,(x^2-x_1^2)\,(x^2-x_2^2)\;\ldots\;(x^2-x_n^2)=$$
$$=(a_0x^n+a_2x^{n-2}+\ldots)^2-(a_1x^{n-1}+a_3x^{n-3}+\ldots)^2.$$

De aquí sacamos la conclusión de que, para que se cumpla la transformación $y=x^2$, hay que sustituir x^2 por y en la ecuación

$$(a_0x^n+a_2x^{n-2}+\ldots)^2-(a_1x^{n-1}+a_3x^{n-3}+\ldots)^2=0.$$

866. Resulta la ecuación buscada sustituyendo x^3 por y en la ecuación

$$(a_0x^n+x_3x^{n-3}+\ldots)^3+(a_1x^{n-1}+a_4x^{n-4}+\ldots)^3+$$
$$+(a_2x^{n-2}+a_5x^{n-5}+\ldots)^3-3\,(a_0x^n+a_3x^{n-3}+\ldots)\times$$
$$\times\,(a_1x^{n-1}+a_4x^{n-4}+\ldots)\,(a_2x^{n-2}+a_5x^{n-5}+\ldots)=0.$$

887. Existe solamente una cantidad finita de polinomios $x^n+a_1x^{n-1}+\dots$ de coeficientes enteros para los cuales los módulos de sus raíces no son superiores a 1, puesto que los coeficientes de tales polinomios están acotados:

$$|a_k| \leqslant \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Sea $f=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$, $a_n\neq 0$, uno de tales polinomios y sean $x_1, x_2, \dots x_n$, sus raíces. Hagamos la notación $f_m=(x-x_1^m)(x-x_2^m)\dots$ $\dots(x-x_n^m)$. Todos los polinomios f_m tienen coeficientes enteros y todas sus raíces no son superiores a 1 en valor absoluto. Por lo tanto, sólo hay una cantidad finita de ellas distintas. Elijamos una sucesión indefinida de números enteros $m_0<m_1<m_2\ \dots$, tales que $f_{m_0}=f_{m_1}=f_{m_2}=\dots$ Esto significa que

$$x_1^{m_i}=x_{\alpha_1}^{m_0},$$
$$x_2^{m_i}=x_{\alpha_2}^{m_0},$$
$$\dots\dots$$
$$x_n^{m_i}=x_{\alpha_n}^{m_0},$$

donde $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es una permutación de los números $1, 2, \dots, n$. Como hay una cantidad infinita de exponentes m_i y sólo hay una cantidad finita de permutaciones, habrá dos exponentes m_{i_1} y m_{i_2} (y una cantidad infinita) a los cuales les corresponde una misma permutación $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Para tales exponentes se cumplen las igualdades:

$$x_1^{m_{i_1}}=x_1^{m_{i_2}};$$
$$x_2^{m_{i_1}}=x_2^{m_{i_2}};$$
$$\dots\dots$$
$$x_n^{m_{i_1}}=x_n^{m_{i_2}},$$

las cuales muestran que $x_1, x_2, \dots, x_n$ son raíces de la unidad de orden $m_{i_2}-m_{i_1}$, puesto que $x_1, x_2, \dots, x_n$ son distintos de cero debido a la condición $a_n\neq 0$.

868. Sea $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un polinomio que cambia el signo para las permutaciones impares de las variables. Como $F(x_2, x_2, x_3, \dots, x_n)=$ $=-F(x_2, x_2, \dots, x_n)=0$, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es divisible por x_1-x_2. De un modo similar se demuestra que $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es divisible por todas las diferencias x_i-x_k. Por consiguiente, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es divisible por $\Delta=\prod_{i>k}(x_i-x_k)$, igual al determinante de Vandermonde. Como el determinante Δ cambia el signo para las permutaciones impares de las variables, $\frac{F}{\Delta}$ es un polinomio simétrico.

869. Sea $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un polinomio que no varía para las permutaciones pares de las variables. Designemos con $\bar\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ el polinomio que se obtiene de $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mediante alguna permutación impar determinada.

Fácilmente se comprueba que, para cada permutación impar, φ se transforma en $\bar\varphi$ y $\bar\varphi$ en φ. Por consiguiente, $\varphi+\bar\varphi$ no varía para todas las permutaciones, $\varphi-\bar\varphi$ cambia el signo para las permutaciones impares. Por otra parte,

$$\varphi=\frac{\varphi+\bar\varphi}{2}+\frac{\varphi-\bar\varphi}{2}=F_1+F_2\Delta,$$

donde Δ es el determinante de Vandermonde. Basándose en el resultado del problema 868, sacamos la conclusión de que F_2 es un polinomio simétrico; F_1 también es un polinomio simétrico, puesto que no varía para todas las permutaciones de las variables.

870. $(f_1^2-f_2)\Delta$, donde f_1, f_2 son polinomios simétricos en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

871. $u^3+a(\alpha+\beta+\gamma)u^2+[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)b+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)(a^2-b)]u+$

$$+c(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+\frac{ab-3c}{2}(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)+$$

$$+\alpha\beta\gamma(a^3-3ab+6c)+\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{2}\sqrt{\Delta}=0,$$

donde Δ es el discriminante de la ecuación dada.

872. $u^3-3pp'u-\frac{27qq'+\sqrt{\Delta\Delta'}}{2}=0$, donde Δ y Δ' son los discriminantes de las ecuaciones dadas.

873. Sea $y=ax^2+bx+c$ la transformación de Tschirnhausen que liga a las ecuaciones dadas. Entonces, para cierta elección de la numeración

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=a(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+b(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+c(x_1+x_2+x_3)$$

será un número racional. Por consiguiente, una de las ecuaciones

$$u^3-3pp'u-\frac{27qq'\pm\sqrt{\Delta\Delta'}}{2}=0$$

(problema 872) tiene una raíz racional. De aquí se deduce que $\sqrt{\Delta\Delta'}$ es un número racional. Queda demostrada la condición necesaria.

Recíprocamente, supongamos que la ecuación

$$u^3-3pp'u-\frac{27qq'\pm\sqrt{\Delta\Delta'}}{2}=0 \qquad (*)$$

tiene una raíz racional u.

Fácilmente se comprueba que es discriminante de la ecuación (*) es igual a $\frac{27^2}{4}(q\sqrt{\Delta'}-\sqrt{\Delta}q')^2$ y, por lo tanto, se diferencia de $\sqrt{\Delta}$ en un factor que es igual al cuadrado de un número racional. Por consiguiente, la diferencia $u'-u''$ de la segunda y tercera raíces de la ecuación se diferencia de $\sqrt{\Delta}$ en un factor racional.

Para y_1, y_2, y_3 se tiene el sistema de ecuaciones:

$$y_1+y_2+y_3=0,$$
$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=u,$$
$$(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3=u'-u''=r\sqrt{\Delta}.$$

De este sistema hallamos:

$$y_1=\frac{-3ux_1+(x_2-x_3)r\sqrt{\Delta}}{6p}.$$

Pero $(x_2-x_3)\sqrt{\Delta}$ se expresa racionalmente mediante x_1. Quedan demostradas las condiciones suficientes.

874. Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se pueden expresar linealmente mediante f_1, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$. Por lo tanto, cada polinomio en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se puede expresar en forma de un polinomio en $f_1, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum Af_1^{\alpha_0}\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots\eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

Al hacer una permutación circular de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ el monomio $Af_1^{\alpha_0}\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots\eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ adquiere el factor $\varepsilon^{-(\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(n-1)\alpha_{n-1})}$. Por consiguiente, para que $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no varíe en las permutaciones circulares de las variables, es necesario y suficiente que $\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(n-1)\alpha_{n-1}$ sea divisible por n.

875. Se puede tomar f_1, η_1^n, $\eta_2\eta_1^{-2}$, $\ldots$, $\eta_{n-1}\eta_1^{-(n-1)}$.

876. Sean $\eta_1=x_1+x_2\varepsilon+x_3\varepsilon^2$; $\eta_2=x_1+x_2\varepsilon^2+x_3\varepsilon$, donde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Entonces $\frac{\eta_1^2}{\eta_2}=\varphi_1+i\sqrt{3}\,\varphi_2$, donde φ_1 y φ_2 son ciertas funciones racionales de x_1, x_2, x_3 de coeficientes racionales que no varían en las permutaciones circulares de x_1, x_2, x_3. Fácilmente se observa que toda función racional de x_1, x_2, x_3 que no varía en las permutaciones circulares de las variables, se expresa racionalmente mediante $f_1=x_1+x_2+x_3$, φ_1 y φ_2.

Es suficiente demostrar esto para $\eta_2\eta_1^{-2}$ y η_1^3. Pero

$$\eta_2\eta_1^{-2}=\frac{1}{\varphi_1+i\varphi_2\sqrt{3}};$$

$$\eta_1^3=\left(\frac{\eta_1^2}{\eta_2}\right)^2\cdot\frac{\eta_2^2}{\eta_1}=(\varphi_1+i\varphi_2\sqrt{3})^2(\varphi_1-i\varphi_2\sqrt{3}).$$

877. Para $n=4$

$$\eta_1=x_1+ix_2-x_3-ix_4,$$
$$\eta_2=x_1-x_2+x_3-x_4,$$
$$\eta_3=x_1-ix_2-x_3+ix_4.$$

Hagamos $\theta_1=\eta_1\eta_3$; $\theta_2+i\theta_3=\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}$; $\theta_2-i\theta_3=\frac{\eta_3\eta_2}{\eta_1}$.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ son funciones racionales de x_1, x_2, x_3, x_4, de coeficientes racionales, que no varían en las permutaciones circulares. Fácilmente se observa que éstas, junto con $f=x_1+x_2+x_3+x_4$, forman un sistema de funciones fundamentales. En efecto,

$$\eta_2\eta_1^{-2}=\frac{\theta_2-i\theta_3}{\theta_1};\qquad \eta_3\eta_1^{-3}=\frac{\theta_2-i\theta_3}{\theta_1(\theta_2+i\theta_3)};\qquad \eta_1^4=\frac{\theta_1^4(\theta_2+i\theta_3)}{\theta_2-i\theta_3}.$$

878. Sean

$$\eta_1=x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+x_3\varepsilon^3+x_4\varepsilon^4+x_5,$$
$$\eta_2=x_1\varepsilon^2+x_2\varepsilon^4+x_3\varepsilon+x_4\varepsilon^3+x_5,$$
$$\eta_3=x_1\varepsilon^3+x_2\varepsilon+x_3\varepsilon^4+x_4\varepsilon^2+x_5,$$
$$\eta_4=x_1\varepsilon^4+x_2\varepsilon^3+x_3\varepsilon^2+x_4\varepsilon+x_5.$$

Consideremos la función racional $\lambda_1=\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}$ y dispongámosla según las potencias de ε, sustituyendo 1 por $-\varepsilon-\varepsilon^2-\varepsilon^3-\varepsilon^4$;

$$\lambda_1=\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\varepsilon^3\varphi_3+\varepsilon^4\varphi_4.$$

Los coeficientes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ son números racionales. Sustituyendo ε por ε^2, ε^3 y ε^4, obtenemos:

$$\lambda_2=\frac{\eta_2\eta_4}{\eta_1}=\varepsilon^2\varphi_1+\varepsilon^4\varphi_2+\varepsilon\varphi_3+\varepsilon^3\varphi_4,$$
$$\lambda_3=\frac{\eta_3\eta_1}{\eta_4}=\varepsilon^3\varphi_1+\varepsilon\varphi_2+\varepsilon^4\varphi_3+\varepsilon^2\varphi_4,$$

$$\lambda_4=\frac{\eta_4\eta_3}{\eta_2}=\varepsilon^4\varphi_1+\varepsilon^3\varphi_2+\varepsilon^2\varphi_3+\varepsilon\varphi_4.$$

Se pueden tomar por "funciones fundamentales" f, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. En efecto, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, se expresan racionalmente mediante éstas. Se tiene

$$\eta_2\eta_1^{-2}=\lambda_1^{-1}\lambda_2\lambda_4^{-1},\quad \eta_4\eta_1^{-4}=\lambda_1^{-2}\lambda_2\lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1},$$
$$\eta_3\eta_1^{-3}=\lambda_1^{-2}\lambda_2\lambda_4^{-1},\quad \eta_1^5=\lambda_1^3\lambda_2^{-1}\lambda_3\lambda_4^2.$$

Capítulo 7

ALGEBRA LINEAL

879. a) La dimensión es $r=2$; forman una base, por ejemplo, X_1 y X_2;
b) $r=2$; forman una base, por ejemplo, X_1 y X_2;
c) $r=2$; forman una base, por ejemplo, X_1 y X_2.

880. a) La dimensión de la intersección es igual a 1; un vector de la base es

$$Z=(5,\ -2,\ -3,\ -4)=X_1-4X_2=3Y_1-Y_2.$$

La dimensión de la suma es igual a 3; forman una base, por ejemplo, los vectores Z, X_1, Y_1.

b) La suma coincide con el primer espacio, la intersección con el segundo.

c) La suma es todo el espacio tetradimensional, la intersección consta sólo del vector cero.

881. a) $\left(\frac{5}{4},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$; b) $(1,\ 0,\ -1,\ 0)$.

882. a) $x_1'=\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{2},\quad x_2'=\frac{x_1-x_2+x_3-x_4}{2},$

$$x_3'=\frac{x_1-x_2-x_3+x_4}{2},\quad x_4'=\frac{-x_1+x_2+x_3+x_4}{2};$$

b) $x_1'=x_2-x_3+x_4;\quad x_2'=-x_1+x_2,\ x_3'=x_4,\quad x_4'=x_1-x_2+x_3-x_4.$

883. $x_1'x_2'+x_3'x_4'=\frac{1}{8}$.

884. Sea $a_0+a_1\cos x+a_2\cos^2 x+\ldots+a_n\cos^n x=$
$=b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\ldots+b_n\cos nx.$

Entonces

$$a_0=b_0-b_2+b_4-\ldots,$$

$$a_k=2^{k-1}\left[b_k+\sum_{1\leqslant p\leqslant\frac{n-k}{2}}(-1)^p\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(k+2p)(k+p-1)(k+p-2)\ \ldots\ (k+1)}{p!}\,b_{k+2p}\right],$$

$$b_0=a_0+\sum_{1\leqslant p\leqslant\frac{n}{2}}2^{-2p}C_2^p a_{2p},$$

$$b_k=2^{1-k}\left(a_k+\sum_{1\leqslant p\leqslant\frac{n-k}{2}}2^{-2p}C_{k+2p}^p a_{k+2p}\right).$$

885. El punto de intersección con la primera recta tiene las coordenadas $\left(\frac{14}{3}, \frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{11}{9}\right)$, con la segunda, $(42, 1, 7, 11)$.

886. Las rectas X_0+tX_1, Y_0+tY_1 están contenidas en la variedad $X_0+t(Y_0-X_0)+t_1X_1+t_2Y_1$.

887. Para que el problema sea resoluble para las rectas X_0+tX_1, Y_0+tY_1 es necesario y suficiente que los vectores X_0, Y_0, X_1, Y_1 sean linealmente dependientes. Esto equivale a que las rectas se puedan incluir en un subespacio tridimensional que contenga al origen de coordenadas.

888. Los planos $X_0+t_1X_1+t_2X_2$ e $Y_0+t_1Y_1+t_2Y_2$ pueden sumergirse en la variedad $X_0+t(Y_0-X_0)+t_1X_1+t_2X_2+t_3Y_1+t_4Y_2$.

889. Pueden presentarse 6 casos:

1) los planos no tienen puntos comunes y no pueden incluirse en una variedad lineal tetradimensional (los planos se cruzan absolutamente);

2) los planos no tienen puntos comunes, están contenidos en una variedad tetradimensional, pero no se sumergen en una variedad tridimensional (se cruzan paralelamente a una recta);

3) los planos no tienen puntos comunes y se sumergen en una variedad tridimensional (los planos son paralelos);

4) los planos tienen un punto común. En este caso se sumergen en una variedad tetradimensional, pero no se sumergen en una variedad tridimensional;

5) los planos se cortan por una recta);

6) los planos coinciden.

En el espacio tridimensional solamente se realizan los casos 3, 5, 6.

890. Sea $Q=X_0+P$ una variedad lineal, donde P es un espacio lineal. Si $X_1 \in Q$ y $X_2 \in Q$, entonces $X_1=X_0+Y_1$, $X_2=X_0+Y_2$, donde Y_1 e Y_2 pertenecen a P. Por lo tanto, $\alpha X_1+(1-\alpha)X_2=X_0+\alpha Y_1+(1-\alpha)Y_2 \in Q$ para cualquier α. Recíprocamente, sea Q el conjunto de vectores que, junto con los vectores X_1, X_2, contiene también a su combinación lineal $\alpha X_1+(1-\alpha)X_2$ para cualquier α. Sea X_0 un vector fijo de Q y designemos con P el conjunto de todos los vectores $Y=X-X_0$. Si $Y \in P$, entonces $cY \in P$ para cualquier c, puesto que $cY=cX+(1-c)X_0-X_0$. Por otra parte, si $Y_1=X_1-X_0 \in P$ y $Y_2=X_2-X_0 \in P$, entonces $\alpha Y_1+(1-\alpha)Y_2=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2-X_0 \in P$ para cualquier α. Tomemos ahora un número fijo α, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, y unos números arbitrarios c_1, c_2. Entonces $\frac{c_1}{\alpha}Y_1 \in P$, $\frac{c_2}{1-\alpha}Y_2 \in P$ para cualesquiera $Y_1, Y_2 \in P$, y, por lo tanto, también

$$c_1Y_1+c_2Y_2=\alpha\frac{c_1}{\alpha}Y_1+(1-\alpha)\frac{c_2}{1-\alpha}Y_2 \in P.$$

Por consiguiente, P es un espacio lineal y Q es una variedad lineal.

O b s e r v a c i ó n. El resultado no es válido si el campo fundamental es el campo de residuos respecto del módulo 2.

891. a) 9; b) 0.

892. a) 90°; b) 45°; c) $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{77}}$.

893. $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

894. $\cos A=\frac{5}{\sqrt{39}}$, $\cos B=\frac{8}{\sqrt{78}}$, $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

895. $\sqrt{n}$.

896. Para n impar no hay diagonales ortogonales. Para $n=2m$ el número de diagonales que son ortogonales a una dada es igual a C_{2m-1}^{m-1}.

897. Las coordenadas de los puntos vienen dadas por las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \sqrt{\frac{4}{6}} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}} & \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \end{pmatrix}.$$

898. $R=\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$.

Las coordenadas del centro son:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n(n-1)}}, \frac{1}{\sqrt{2(n+1)n}}\right).$$

899. $\left(\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$.

900. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

901. Los otros dos vectores se pueden tomar, por ejemplo, así:

$$\frac{1}{\sqrt{26}}(0, -4, 3, 1) \text{ y } \frac{1}{3\sqrt{26}}(-13, 5, 6, 2).$$

902. $(1, 2, 1, 3)$, $(10, -1, 1, -3)$, $(19, -87, -61, 72)$.

903. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & -4 & -2 \\ 39 & -37 & 51 & -29 & 5 \end{pmatrix}.$$

904. El sistema se interpreta como el problema de la averiguación de los vectores que son ortogonales al sistema de vectores que representan a los coeficientes de las ecuaciones. El conjunto de los vectores buscados es un espacio que es ortogonal y complementario al espacio engendrado por los vectores dados. El sistema fundamental de soluciones es una base del espacio de los vectores buscados.

905. Por ejemplo, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 2, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{498}}(1, 12, 8, 17)$.

906. a) $X'=(3, 1, -1, -2) \in P$, b) $X'=(1, 7, 3, 3) \in P$,

$X''=(2, 1, -1, 4) \perp P$, $X''=(-4, -2, 6, 0) \perp P$.

907. Supongamos que $A_1, A_2, \dots, A_m$ son linealmente independientes y sea P el espacio engendrado por ellos. Sea $X=Y+Z$, $Y \in P$, $Z \perp P$.

Hagamos

$$Y=c_1A_1+c_2A_2+\dots+c_mA_m.$$

Formemos un sistema de ecuaciones para determinar $c_1, c_2, \dots, c_m$, multiplicando escalarmente la última igualdad por A_i, $i=1, 2, \dots, m$, y teniendo en cuenta que $YA_i=XA_i$.

Resulta

$$\begin{aligned}
c_1A_1^2 \; + c_2A_1A_2 + \ldots + c_mA_1A_m &= XA_1,\\
c_1A_2A_1 + c_2A_2^2 \; + \ldots + c_mA_2A_m &= XA_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\\
c_1A_mA_1 + c_2A_mA_2 + \ldots + c_mA_m^2 &= XA_m.
\end{aligned}$$

Como $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son linealmente independientes, el determinante Δ de este sistema es distinto de 0.

Hallemos $c_1, c_2, \ldots, c_m$ y pongámoslos en la expresión de Y. Obtenemos

$$Y=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -A_1 & -A_2 & \ldots & -A_m \\ XA_1 & A_1^2 & A_1A_2 & \ldots & A_1A_m \\ XA_2 & A_2A_1 & A_2^2 & \ldots & A_2A_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ XA_m & A_mA_1 & A_mA_2 & \ldots & A_m^2 \end{vmatrix}$$

y

$$Z=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X & A_1 & A_2 & \ldots & A_m \\ A_1X & A_1^2 & A_1A_2 & \ldots & A_1A_m \\ A_2X & A_2A_1 & A_2^2 & \ldots & A_2A_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_mX & A_mA_1 & A_mA_2 & \ldots & A_m^2 \end{vmatrix}.$$

Estas igualdades se deben entender en el sentido de que los vectores Y y Z son combinaciones lineales de los vectores que figuran en la primera fila con los coeficientes iguales a los correspondientes complementos algebraicos.

De aquí obtenemos, finalmente, que

$$Y^2=Y(X-Z)=YX=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & -XA_1 & -XA_2 & \ldots & -XA_m \\ A_1X & A_1^2 & A_1A_2 & \ldots & A_1A_m \\ A_2X & A_2A_1 & A_2^2 & \ldots & A_2A_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_mX & A_mA_1 & A_mA_2 & \ldots & A_m^2 \end{vmatrix}$$

y

$$Z^2=Z(X-Y)=ZX=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X^2 & XA_1 & XA_2 & \ldots & XA_m \\ A_1X & A_1^2 & A_1A_2 & \ldots & A_1A_m \\ A_2X & A_2A_1 & A_2^2 & \ldots & A_2A_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_mX & A_mA_1 & A_mA_2 & \ldots & A_m^2 \end{vmatrix}.$$

908. Sea Y una vector cualquiera del espacio P, y sea X' la proyección ortogonal del vector X sobre P.

Entonces

$$\cos(X, Y)=\frac{XY}{|X|\,|Y|}=\frac{X'Y}{|X|\,|Y|}=\frac{|X'|\cdot|Y|\cdot\cos(X', Y)}{|X|\cdot|Y|}=$$
$$=\frac{|X'|}{|X|}\cos(X', Y),$$

de donde se deduce que $\cos(X, Y)$ alcanza el valor máximo para aquellos Y que cumplen la condición $\cos(X', Y)=1$, es decir, para $Y=\alpha X'$ siendo $\alpha > 0$.

909. a) 45°; b) 90°.

910. $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$.

911. $|X-Y|^2=|(X-X')+(X'-Y)|^2=|X-X'|^2+|X'-Y|^2 \geqslant$
$\geqslant |X-X'|^2$, donde la igualdad es posible sólo para $Y=X'$.

912. a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

913. $\dfrac{n!}{(n+1)(n+2)\ \dots\ 2n\sqrt{2n+1}}$.

914. La distancia mínima buscada es igual a la distancia mínima del punto X_0-Y_0 al espacio $P+Q$.

915. Supongamos que uno de los vértices está situado en el origen de coordenadas y sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ los vectores que parten del origen de coordenadas hacia los demás vértices. Fácilmente se observa que $X_i^2=1$, $X_iX_j=\dfrac{1}{2}$.
La variedad que pasa por los primeros $m+1$ vértices es el espacio $t_1X_1+\dots+t_mX_m$. La variedad que pasa por los demás $n-m$ vértices es $X_n+t_{m+1}(X_{m+1}-X_n)+\dots+t_{n-1}(X_{n-1}-X_n)$. La distancia mínima buscada es la distancia de X_n al espacio P engendrado por los vectores $X_1, X_2, \dots, X_m$, $X_n-X_{m+1}, \dots, X_n-X_{n-1}$.
Supongamos que

$$X_n=t_1X_1+\dots+t_mX_m+t_{m+1}(X_n-X_{m+1})+\dots+t_{n-1}(X_n-X_{n-1})+Y,$$

donde $Y\perp P$. Formando el producto escalar de X_n con $X_1, \dots, X_m$, $X_n-X_{m+1}, \dots, X_n-X_{n-1}$, para determinar $t_1, \dots, t_{n-1}$ obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$t_1+\frac{1}{2}t_2+\dots+\frac{1}{2}t_m=\frac{1}{2},\quad t_{m+1}+\frac{1}{2}t_{m+2}+\dots+\frac{1}{2}t_{n-1}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}t_1+t_2+\dots+\frac{1}{2}t_m=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}t_{m+1}+t_{m+2}+\dots+\frac{1}{2}t_{n-1}=\frac{1}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2+\dots+t_m=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}t_{m+1}+\frac{1}{2}t_{m+2}+\dots+t_{n-1}=\frac{1}{2},$$

de donde $t_1=t_2=\dots=t_m=\dfrac{1}{m+1}$, $t_{m+1}=t_{m+2}=\dots=t_{n-1}=\dfrac{1}{n-m}$.
Por consiguiente,

$$Y=\frac{X_{m+1}+X_{m+2}+\dots+X_n}{n-m}-\frac{X_1+X_2+\dots+X_m}{m+1}.$$

Por lo tanto, la perpendicular común es el vector que une los centros de las caras elegidas. La distancia mínima es igual a la longitud de este vector

$$|Y|=\sqrt{\frac{n+1}{2(n-m)(m+1)}}.$$

916. a) La proyección del vector $(t_1+2t_2,\ t_1-2t_2,\ t_1+5t_2,\ t_1+2t_2)$ sobre el primer plano es $(t_1+2t_2,\ t_1-2t_2,\ 0,\ 0)$. Por consiguiente, $\cos^2\varphi=$ $=\dfrac{2t_1^2+8t_2^2}{4t_1^2+14t_1t_2+37t_2^2}=\dfrac{2\lambda^2+8}{4\lambda^2+14\lambda+37}$, donde $\lambda=\dfrac{t_1}{t_2}$. Esta expresión alcanza el máximo, igual a $\dfrac{8}{9}$, para $\lambda=-4$.

b) El ángulo formado por cualquier vector del segundo plano con su proyección ortogonal sobre el primer plano queda invariable y es igual a $\frac{\pi}{4}$.

917. El cubo es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen a las desigualdades $-\frac{a}{2} \leqslant x_i \leqslant \frac{a}{2}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Aquí a es la longitud del arista del cubo. Pasemos a ejes nuevos, tomando por vectores de coordenadas

$$e_1' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad e_2' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$
$$e_3' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ y } e_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Estos vectores son ortogonales y están normalizados, y sus direcciones coinciden con las direcciones de ciertas diagonales del cubo. Las coordenadas de los puntos del cubo en estos ejes satisfacen a las desigualdades

$$-a \leqslant x_1' + x_2' + x_3' + x_4' \leqslant a, \quad -a \leqslant x_1' + x_2' - x_3' - x_4' \leqslant a,$$
$$-a \leqslant x_1' - x_2' + x_3' - x_4' \leqslant a, \quad -a \leqslant x_1' - x_2' - x_3' + x_4' \leqslant a.$$

Haciendo $x_1' = 0$, obtenemos la intersección considerada. Esta representa un cuerpo situado en el espacio engendrado por e_2', e_3', e_4', y las coordenadas de sus puntos satisfacen a las desigualdades $\pm x_2' \pm x_3' \pm x_4' \leqslant a$. Es un octaedro regular, limitado por planos que cortan en los ejes segmentos de longitud a.

$$\text{918. } V^2[B_1, B_2, \ldots, B_m] = \begin{vmatrix} B_1^2 & B_1B_2 & \ldots & B_1B_m \\ B_2B_1 & B_2^2 & \ldots & B_2B_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_mB_1 & B_mB_2 & \ldots & B_m^2 \end{vmatrix}.$$

Esta fórmula se establece fácilmente por inducción, teniendo en cuenta el resultado del problema 907. De la fórmula se deduce inmediatamente que el volumen no depende de la numeración de los vértices y que

$$V[cB_1, B_2, \ldots, B_m] = |c| \cdot V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

Sean ahora $B_1 = B_1' + B_1''$, C_1, C_1', C_1'' las proyecciones ortogonales de los vectores B_1, B_1' y B_1'' sobre el espacio que es el complemento ortogonal de $(B_2, \ldots, B_m)$. Está claro que $C_1 = C_1' + C_1''$. Según la definición,

$$V[B_1, B_2, \ldots, B_m] = |C_1| \cdot V[B_2, \ldots, B_m], \quad V[B_1', B_2, \ldots, B_m] =$$
$$= |C_1'| \cdot V[B_2, \ldots, B_m], \quad V[B_1'', B_2, \ldots, B_m] = |C_1''| \cdot V[B_2, \ldots, B_m].$$

Como $|C_1| \leqslant |C_1'| + |C_1''|$, se tiene $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] \leqslant V[B_1', B_2, \ldots, B_m] + V[B_1'', B_2, \ldots, B_m]$. El signo de igualdad es posible solamente si C_1' y C_1'' son colineales y llevan igual dirección, lo cual, a su vez, se cumple cuando, y sólo cuando, B_1', B_1'' están situados en el espacio engendrado por $B_1, B_2, \ldots, B_m$ y los coeficientes de B_1 en las expresiones de B_1', B_1'' mediante $B_1, B_2, \ldots, B_m$ tienen signos iguales, es decir, B_1', B_1'' están situados "hacia un mismo lado" del espacio $(B_2, \ldots, B_m)$ en el espacio $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$.

$$\text{919. } V^2[B_1, B_2, \ldots, B_n] = \begin{vmatrix} B_1^2 & B_1B_2 & \ldots & B_1B_n \\ B_2B_1 & B_2^2 & \ldots & B_2B_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_nB_1 & B_nB_2 & \ldots & B_n^2 \end{vmatrix} = |\bar{B}B| = |B|^2,$$

donde B es la matriz cuyas columnas están formadas por las coordenadas de los vectores $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

920. De la definición resultan inmediatamente además las siguientes dos propiedades del volumen:

d) $V[B_1+X, B_2, \ldots, B_m]=V[B_1, B_2, \ldots, B_m]$

para cualquier X perteneciente al espacio $(B_2, \ldots, B_m)$, puesto que los puntos B_1, B_1+X están a iguales distancias de $(B_2, \ldots, B_m)$.

e) $V[B_1, B_2, \ldots, B_m] \leqslant |B_1| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]$.

Esto es consecuencia de que la "altura", o sea, la longitud de la componente del vector B_1 que es ortogonal a $(B_2, \ldots, B_m)$, no es mayor que la longitud del mismo vector B_1.

Sean ahora $C_1, C_2, \ldots, C_m$ las proyecciones ortogonales de los vectores $B_1, B_2, \ldots, B_m$ sobre el espacio P. Supongamos que ya se ha demostrado la desigualdad $V[C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_2, \ldots, B_m]$. Designemos con B_1' la componente del vector B_1 que es ortogonal a $(B_2, \ldots, B_m)$, y con C_1', su proyección sobre P. Como $B_1'-B_1 \in (B_2, \ldots, B_m)$, sacamos la conclusión de que $C_1'-C \in (C_2, \ldots, C_m)$ y, por consiguiente, se tiene

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m]=V[C_1', C_2, \ldots, C_m] \leqslant |C_1'| \cdot V[C_2, \ldots, C_m].$$

Pero, evidentemente, $|C_1| \leqslant |B_1'|$ y, por la hipótesis de inducción, $V[C_2, \ldots, C_m] \leqslant V[B_2, \ldots, B_m]$. Por lo tanto,

$$V[C_1, C_2, \ldots, C_m] \leqslant |B_1'| \cdot V[B_2, \ldots, B_m]=V[B_1, B_2, \ldots, B_m].$$

Ya puede emplearse el método de inducción, puesto que para los paralelepípedos unidimensionales el teorema es evidente.

921. De las fórmulas para el cálculo del cuadrado del volumen se deduce que $V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k]=V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k]$, si cada vector A_i es ortogonal a cada vector B_j. En el caso general, sustituimos los vectores $B_1, \ldots, B_k$ por sus proyecciones $C_1, \ldots, C_k$ sobre el espacio que es el complemento ortogonal de $(A_1, \ldots, A_m)$. En virtud del resultado del problema precedente, $V[C_1, \ldots, C_k] \leqslant V[B_1, \ldots, B_k]$, de donde

$$\begin{aligned}V[A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_k]&=V[A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_k]=\\&=V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[C_1, \ldots, C_k] \leqslant V[A_1, \ldots, A_m] \cdot V[B_1, \ldots, B_k].\end{aligned}$$

El contenido de este problema coincide con el contenido del problema 518.

922. Se deduce inmediatamente de la desigualdad $V[A_1, \ldots, A_m] \leqslant |A_1| \times \times V[A_2, \ldots, A_m]$, la cual, a su vez, se deduce inmediatamente de la definición de volumen.

El contenido de este problema coincide con el del problema 519.

923. La transformación homotética de un cuerpo en el espacio n-dimensional da lugar a una variación del volumen que es proporcional a la n-ésima potencia del coeficiente de homotecia. Para un paralelepípedo esto se deduce inmediatamente de la fórmula del volumen, y para cualquier otro cuerpo, el volumen es el límite de la suma de los volúmenes de paralelepípedos. Por lo tanto, el volumen $V_n(R)$ de una esfera n-dimensional de radio R es igual a $V_n(1)R^n$.

Para calcular $V_n(1)$, dividimos la esfera mediante un sistema de "planos" $(n-1)$-dimensionales paralelos y aplicamos el principio de Cavalieri.

Sea x la distancia del "plano" secante al centro. La sección es una esfera $(n-1)$-dimensional de radio $\sqrt{1-x^2}$.

Por consiguiente,

$$V_n(1)=2\int_0^1 V_{n-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx=2V_{n-1}(1)\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx=$$

$$=V_{n-1}(1)\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt=V_{n-1}(1)\,B\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=$$

$$=V_{n-1}(1)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

De aquí se deduce que

$$V_n(1)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

924. Forman una base los polinomios $1,\ x,\ \ldots,\ x^n$. El cuadrado del volumen del paralelepípedo correspondiente es igual a

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix}=\frac{[1!\ 2!\ \ldots\ n!]^3}{(n+1)!\,(n+2)!\ \ldots\ (2n+1)!}.$$

925. a) $\lambda_1=1,\ X_1=c(1,\ -1);\ \lambda_2=3,\ X_2=c(1,\ 1)$;

b) $\lambda_1=7,\ X_1=c(1,\ 1);\ \lambda_2=-2,\ X_2=c(4,\ -5)$;

c) $\lambda_1=ai,\ X_1=c(1,\ i);\ \lambda_2=-ai,\ X_2=c(1,\ -i)$;

d) $\lambda_1=2,\ X_1=c_1(1,\ 1,\ 0,\ 0)+c_2(1,\ 0,\ 1,\ 0)+c_3(1,\ 0,\ 0,\ 1)$;
$\lambda_2=-2,\ X_2=c(1,\ -1,\ -1,\ -1)$;

e) $\lambda=2,\ X=c_1(-2,\ 1,\ 0)+c_2(1,\ 0,\ 1)$;

f) $\lambda=-1,\ X=c(1,\ 1,\ -1)$;

g) $\lambda_1=1,\ X_1=c_1(1,\ 0,\ 1)+c_2(0,\ 1,\ 0);\ \lambda_2=-1,\ X_2=c(1,\ 0,\ -1)$;

h) $\lambda_1=0,\ X_1=c(3,\ -1,\ 2);\ \ \lambda_{2,3}=\pm\sqrt{-14}$,
$X_{2,3}=c(3\pm 2\sqrt{-14},\ 13,\ 2\mp 3\sqrt{-14})$;

i) $\lambda_1=1,\ X_1=c(3,\ -6,\ 20);\ \lambda_2=-2,\ X_2=c(0,\ 0,\ 1)$;

j) $\lambda_1=1,\ X_1=c(1,\ 1,\ 1);\ \ \lambda_2=\varepsilon,\ X_2=c(3+2\varepsilon,\ 2+3\varepsilon,\ 3+3\varepsilon)$;
$\lambda_3=\varepsilon^2,\ X_3=c(3+2\varepsilon^2,\ 2+3\varepsilon^2,\ 3+3\varepsilon^2)$,

donde

$$\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

926. Los números característicos de A^{-1} son recíprocos a los números característicos de A. En efecto, de $|A^{-1}-\lambda E|=0$ se deduce que $|E-\lambda A|=0$, $\left|A-\frac{1}{\lambda}E\right|=0$.

927. Los números característicos de la matriz A^2 son iguales a los cuadrados de los números característicos de A. En efecto, sea

$$|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ \ldots\ (\lambda_n-\lambda).$$

Entonces

$$|A+\lambda E|=(\lambda_1+\lambda)(\lambda_2+\lambda)\ \ldots\ (\lambda_n+\lambda).$$

Multiplicando estas igualdades y sustituyendo λ^2 por λ, obtenemos

$$|A^2-\lambda E|=(\lambda_1^2-\lambda)(\lambda_2^2-\lambda)\ \ldots\ (\lambda_n^2-\lambda).$$

928. Los números característicos de A^m son iguales a las m-ésimas potencias de los números característicos de A.

Para cerciorarse de esto, lo más fácil es sustituir en la igualdad

$$|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ \ldots\ (\lambda_n-\lambda)$$

λ por $\lambda\varepsilon$, $\lambda\varepsilon^2$, $\ldots$, $\lambda\varepsilon^{n-1}$, donde

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\ \mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n},$$

multiplicar las igualdades y sustituir λ^n por λ.

929. $f(A)=b_0(A-\xi_1E)\ \ldots\ (A-\xi_mE)$, por consiguiente,

$$|f(A)|=b_0^n\,|A-\xi_1E|\ \ldots\ |A-\xi_mE|=b_0^nF(\xi_1)\ \ldots\ F(\xi_m).$$

930. Sea

$$F(\lambda)=|A-\lambda E|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ \ldots\ (\lambda_n-\lambda)$$

y

$$f(x)=b_0(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ \ldots\ (x-\xi_m).$$

Entonces

$$|f(A)|=b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(\lambda_i-\xi_k)=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ \ldots\ f(\lambda_n).$$

931. Hagamos

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda$$

y apliquemos el resultado del problema anterior.

Obtenemos

$$|f(A)-\lambda E|=(f(\lambda_1)-\lambda)(f(\lambda_2)-\lambda)\ \ldots\ (f(\lambda_n)-\lambda),$$

de donde se deduce que los números característicos de la matriz $f(A)$ son $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, $\ldots$, $f(\lambda_n)$.

932. Sea X un vector propio de la matriz A, correspondiente al número característico λ.

Entonces

$$EX=X,$$
$$AX=\lambda X,$$
$$A^2X=\lambda^2X,$$
$$\cdots\cdots$$
$$A^mX=\lambda^mX.$$

Multiplicando estas igualdades vectoriales por coeficientes arbitrarios y sumándolas, obtenemos para cualquier polinomio f que

$$f(A)X=f(\lambda)X,$$

es decir, X es un vector propio de $f(A)$, correspondiente al número característico $f(\lambda)$.

933. Los números característicos de A^2 son n y $-n$, de órdenes de multiplicidad $\frac{n+1}{2}$ y $\frac{n-1}{2}$, respectivamente. Por consiguiente, los números característicos de A son $+\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $+\sqrt{ni}$ y $-\sqrt{ni}$. Designemos sus órdenes de multiplicidad mediante a, b, c, d. Entonces $a+b=\frac{n+1}{2}$, $c+d=\frac{n-1}{2}$. La suma de los números característicos de la matriz es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal.

Por lo tanto,

$$[a-b+(c-d)i]\sqrt{n}=1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}.$$

El módulo del segundo miembro de esta igualdad es igual a $\sqrt{n}$ (problema 126). Por consiguiente,

$$(a-b)^2+(c-d)^2=1.$$

Como los números $c-d$ y $c+d$ son de igual paridad, sacamos la conclusión de que

$$a-b=0, \quad c-d=\pm 1, \text{ si } \frac{n-1}{2} \text{ es impar,}$$

y

$$a-b=\pm 1, \quad c-d=0, \quad \text{si } \frac{n-1}{2} \text{ es par.}$$

Por lo tanto, si $n=1+4k$

$$c=d=k; \; a=k+1, \; b=k \text{ ó } a=k, \; b=k+1, \text{ si } n=3+4k$$
$$a=b=k+1; \quad c=k+1, \; d=k \quad \text{ó} \quad c=k, \; d=k+1.$$

De este modo, los números característicos quedan determinados salvo el signo. Para determinar el signo, empleamos el hecho de que el producto de los números característicos es igual al determinante de la matriz. Mediante el resultado del problema 299, obtenemos fácilmente que si $n=1+4k$

$$a=k+1, \quad b=k,$$

si $n=3+4k$

$$c=k+1, \; d=k.$$

Por lo tanto, los números característicos quedan completamente determinados.

934. $1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}=+\sqrt{n}$ si $n=4k+1$,

$$1+\varepsilon+\varepsilon^4+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}=+i\sqrt{n} \text{ si } n=4k+3.$$

935. a) Hagamos $\frac{x}{y}=\alpha^n$. Entonces

$$\lambda_k=y\frac{\alpha\varepsilon_k-\alpha^n}{1-\alpha\varepsilon_k},$$

donde $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$.

b) $\lambda_k=a_1+a_2\varepsilon_k+a_3\varepsilon_k^2+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1}$.

c) $\lambda_k=2i\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

936.

$$A\times B-\lambda E_{mn}=\begin{pmatrix} a_{11}B-\lambda E_m & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B-\lambda E_m & \ldots & a_{2n}B \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \ldots & a_{nn}B-\lambda E_m \end{pmatrix},$$

de donde, en virtud del resultado del problema 537, se deduce que

$$|A\times B-\lambda E_{mn}|=|\varphi(B)|,$$

donde

$$\varphi(x)=|Ax-\lambda E_n|=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i x-\lambda).$$

En virtud del resultado del problema 930,

$$|\varphi(B)|=\prod_{k=1}^{m}\varphi(\beta_k)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(\alpha_i\beta_k-\lambda).$$

Por lo tanto, los números característicos de $A\times B$ son $\alpha_i\beta_k$, donde α_i son los números característicos de A y β_k son los números característicos de B.

937. Si A es una matriz no singular, se tiene

$$|BA-\lambda E|=|A^{-1}(AB-\lambda E)A|=|A^{-1}|\cdot|AB-\lambda E|\cdot|A|=|AB-\lambda E|.$$

Para librarse de la suposición de que A sea no singular, hay que pasar a límites o aplicar el teorema de la identidad de los polinomios de varias variables.

También se pueden calcular directamente los coeficientes de los polinomios

$$|AB-\lambda E| \text{ y } |BA-\lambda E|,$$

empleando para ello el teorema del producto de las matrices rectangulares, y convencerse luego de su igualdad.

938. Completemos las matrices A y B hasta que resulten unas matrices cuadradas A' y B' de orden n, añadiendo a A $n-m$ filas y a B $n-m$ columnas formadas por ceros. Entonces $BA=B'A'$, y $A'B'$ se obtiene de AB orlando con ceros. La aplicación del resultado del problema precedente da lo que se quería demostrar.

Las soluciones de los problemas 939, 940, 941 no son unívocas. Las respuestas expuestas a continuación corresponden a una transformación que se desvía lo menos posible de una "triangular".

939. a) $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1+x_2, \\ x_2' &= \phantom{x_1+{}} x_2+2x_3, \\ x_3' &= x_3; \end{aligned}$$

b) $-x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1-2x_2, \\ x_3' &= x_1 +x_3; \end{aligned}$$

c) $x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2$,

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+x_3, \\ x_2' &= \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2, \\ x_3' &= x_3; \end{aligned}$$

d) $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2$,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1-x_2+x_3-x_4, \\ x_2' &= x_2+x_3+x_4, \\ x_3' &= x_2-x_3+2x_4, \\ x_4' &= x_4; \end{aligned}$$

e) $x_1'^2-x_2'^2+x_3'^2-x_4'^2$,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1+\frac{1}{2}x_2, \\ x_2' &= \frac{1}{2}x_2, \\ x_3' &= \frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4, \\ x_4' &= \frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4. \end{aligned}$$

940. $x_1'^2+\frac{3}{4}x_2'^2+\frac{4}{6}x_3'^2+\ldots+\frac{n+1}{2n}x_n'^2$.

Las variables $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ se expresan linealmente mediante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & ^1/_2 & ^1/_2 & & \ldots & ^1/_2 \\ 0 & 1 & ^1/_3 & & \ldots & ^1/_3 \\ 0 & 0 & 1 & ^1/_4 & \ldots & ^1/_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

941. $\left(\frac{x_1+x_2}{2}+x_3+x_4+\ldots+x_n\right)^2-\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2-$
$-\left(x_3+\frac{1}{2}x_4+\ldots+\frac{1}{2}x_n\right)^2-\frac{3}{4}\left(x_4+\frac{1}{3}x_5+\ldots+\frac{1}{3}x_n\right)^2-\ldots-\frac{n-1}{2(n-2)}x_n^2.$

942. La matriz de una forma cuadrática positiva es igual a $\overline{A}A$, donde A es una matriz real no singular, la cual realiza el paso de la suma de cuadrados a la forma dada.

Del resultado del problema 510 se deduce que los menores son positivos.

943. Sea

$$\begin{array}{c} f=a_{11}x_1^2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+ \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +a_{n1}x_nx_1+\ldots+a_{nn}x_n^2 \end{array}$$

una forma cuadrática. Hagamos las notaciones

$$\begin{array}{c} f^{(k)}=a_{11}x_1^2+\ldots+a_{1k}x_1x_k+ \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +a_{k1}x_kx_1+\ldots+a_{kk}x_k^2, \end{array}$$

$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$, r es el rango de la forma f.

Supongamos que

$$f=\alpha_1x_1'^2+\alpha_2x_2'^2+\ldots+\alpha_nx_n'^2,$$

donde

$$\begin{array}{l} x_1'=x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n, \\ x_2'=\qquad\quad x_2+\ldots+b_{2n}x_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n'=\qquad\qquad\qquad\quad x_n. \end{array}$$

Como el determinante de la transformación triangular es igual a 1, $D_f=\Delta_n=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Haciendo

$$x_{k+1}=\ldots=x_n=0,$$

obtenemos

$$f^{(k)}=\alpha_1x_1^{(k)^2}+\alpha_2x_2^{(k)^2}+\ldots+\alpha_kx_k^{(k)^2},$$

donde

$$\begin{array}{l} x_1^{(k)}=x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1k}x_k, \\ x_2^{(k)}=\qquad\quad x_2+\ldots+b_{2k}x_k, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_k^{(k)}=\qquad\qquad\qquad\quad x_k. \end{array}$$

De aquí se deduce que $\Delta_k=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ y que la condición necesaria para que sea posible la transformación triangular a la forma diagonal, es

$$\Delta_1\neq 0,\quad \Delta_2\neq 0,\quad \ldots,\quad \Delta_r\neq 0.$$

Fácilmente se comprueba que esta condición es suficiente.

Por otra parte, $\alpha_k=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ si $k\leqslant r$, $\alpha_k=0$ si $k>r$.

El discriminante de la forma

$$f_k(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n)=f-\alpha_1x_1'^2-\ldots-\alpha_kx_k'^2=\alpha_{k+1}x_{k+1}'^2+\ldots+\alpha_nx_n'^2$$

es igual a $\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_n=\frac{\Delta_n}{\Delta_k}$.

944. En el problema 942 se demostró que las condiciones de Sylvester son necesarias. Del resultado del problema 943 se deduce que son suficientes.

945. Sea l una forma lineal en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Transformemos la forma f mediante una transformación con determinante igual a 1, tomando la forma l por la última de las nuevas variables. Hagamos después una transformación triangular de la forma f a la forma canónica. Esta toma la forma

$$f=\alpha_1 x_1'^2+\alpha_2 x_2'^2+\ldots+\alpha_n x_n'^2,$$

siendo $x_n'=l$.

El discriminante de la forma f es igual a $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

El discriminante de la forma $f+l^2$ es igual a $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n+1)$. Este es mayor que el discriminante de la forma f, puesto que todos los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ son positivos.

946. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$

$$=a_{11}x_1^2+2a_{21}x_1x_2+\ldots+2a_{n1}x_1x_n+\varphi=$$
$$=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{21}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}x_n\right)^2+f_1(x_2, \ldots, x_n),$$

donde

$$f_1=\varphi-a_{11}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}x_n\right)^2.$$

La forma f_1 es positiva y su discriminante es igual a $\frac{D_f}{a_{11}}$, donde D_f es el discriminante de f. Basándose en el resultado del problema 945, $D_{f_1}\geqslant\frac{D_f}{a_{11}}$, como se quería demostrar.

947. Se demuestra del mismo modo que la ley de inercia.

948. Examinemos las formas lineales

$$l_k=u_1+u_2x_k+\ldots+u_nx_k^{n-1},\ k=1, 2, \ldots, n,$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las raíces de la ecuación dada.

A raíces iguales les corresponderán formas iguales, a raíces distintas, formas linealmente independientes, a raíces reales, formas reales, a raíces imaginarias conjugadas, formas imaginarias conjugadas.

Las partes real e imaginaria de la forma compleja $l_k=\lambda_k+\mu_k i$ son linealmente independientes entre sí y con todas las formas que corresponden a raíces distintas de x_k y $\bar{x}_k$.

Examinemos la forma cuadrática

$$f(u_1, \ldots, u_n)=\sum_{k=1}^{n}(u_1+u_2x_i+\ldots+u_nx_i^{n-1})^2.$$

El rango de esta forma es igual al número de raíces distintas de la ecuación dada. La matriz de sus coeficientes es

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

La suma de los cuadrados de las formas lineales complejas conjugadas $l_k=\lambda_k+i\mu_k$ y $\bar{l}_k=\lambda_k-i\mu_k$ es igual a $2\lambda_k^2-2\mu_k^2$. Por consiguiente, el número de cuadrados negativos en cualquier representación canónica de la forma f (según la ley de inercia) es igual al número de pares distintos de raíces imaginarias conjugadas de la ecuación dada.

949. Se deduce de los resultados de los problemas 948, 944.

950. Es evidente que la operación (f, φ) es distributiva. Por esto, es suficiente efectuar la demostración para los cuadrados de las formas lineales.

Sean

$$f=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n)^2,$$
$$\varphi=(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_nx_n)^2.$$

Fácilmente se observa que entonces

$$(f\varphi)=(\alpha_1\beta_1x_1+\alpha_2\beta_2x_2+\ldots+\alpha_n\beta_nx_n)^2\geqslant 0.$$

951. a) $4x_1'^2+x_2'^2-2x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3;$$

b) $2x_1'^2-x_2'^2+5x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3,$$
$$x_3'=\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3;$$

c) $7x_1'^2+4x_2'^2+x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3'=-\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3;$$

d) $10x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1-\frac{\sqrt{5}}{5}x_2,$$
$$x_3'=\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3;$$

e) $-7x_1'^2+2x_2'^2+2x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1-\frac{\sqrt{5}}{5}x_2,$$
$$x_3'=\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3;$$

f) $2x_1'^2+5x_2'^2+8x_3'^2$,
$$x_1'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3;$$

g) $7x_1'^2-2x_2'^2+7x_3'^2,$

$$x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3'=\frac{\sqrt{2}}{6}x_1-\frac{2\sqrt{2}}{3}x_2+\frac{\sqrt{2}}{6}x_3.$$

h) $11x_1'^2+5x_2'^2-x_3'^2,$

$$x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3,$$
$$x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,$$
$$x_3'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3;$$

i) $x_1'^2-x_2'^2+3_3'^2+5x_4'^2,$

$$x_1'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4$$
$$x_2'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;$$

j) $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2,$

$$x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,$$
$$x_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_3+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,$$
$$x_3'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,$$
$$x_4'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_3-\frac{\sqrt{2}}{2}x_4;$$

k) $x_1'^2+x_2'^2+3x_3'^2-x_4'^2,$

$$x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,$$
$$x_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_4'=-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4;$$

l) $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-3x_4'^2.$ $x_i'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,$

$$x_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^4,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x^4;$$

m) $x_1'^2-x_2'^2+7x_3'^2-3x_4'^2,\quad x_1'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,$

$$x_2'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;$$

n) $5x_1'^2-5x_2'^2+3x_3'^2-3x_4'^2,\quad x_1'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,$

$$x_2'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$

$$x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4.$$

952. a) $\frac{n+1}{2}x_1'^2+\frac{1}{2}(x_2'^2+x_3'^2+\ldots+x_n'^2);$

b) $\frac{n-1}{2}x_1'^2-\frac{1}{2}(x_2'^2+x_3'^2+\ldots+x_n'^2),$

donde

$$x_1'=\frac{1}{\sqrt{n}}(x_1+x_2+\ldots+x_n);$$

$$x_i'=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\ldots+\alpha_{in}x_n,\quad i=2,\ \ldots,\ n.$$

donde $(\alpha_{i1},\ \alpha_{i2},\ \ldots,\ \alpha_{in})$ es cualquier sistema fundamental y ortonormal de soluciones de la ecuación

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0.$$

953. $x_1'^2\cos\frac{\pi}{n+1}+x_2'^2\cos\frac{2\pi}{n+1}+\ldots+x_n'^2\cos\frac{n\pi}{n+1}.$

954. Si todos los números característicos de la matriz A están situados en el segmento $[a,\ b]$, entonces todos los números característicos de la matriz $A-\lambda E$ son negativos para $\lambda>b$ y son positivos para $\lambda<a$. Por consiguiente, la forma cuadrática de matriz $A-\lambda E$ es negativa para $\lambda>b$ y es positiva para $\lambda<a$. Recíprocamente, si la forma cuadrática $(A-\lambda E)X\cdot X$ es negativa para $\lambda>b$ y es positiva para $\lambda<a$, entonces todos los números característicos de la matriz $A-\lambda E$ son positivos para $\lambda<a$ y son negativos para $\lambda>b$.

Por lo tanto, todos los números característicos de la matriz A están comprendidos en el segmento $[a,\ b]$.

955. Para cualquier vector X subsisten las desigualdades

$$aX\cdot X\leqslant AX\cdot X\leqslant cX\cdot X,\quad bX\cdot X\leqslant BX\cdot X\leqslant dX\cdot X,$$

de donde $(a+b)\,X\cdot X\leqslant(A+B)\,X\cdot X\leqslant(c+d)\,X\cdot X$. Por consiguiente, todos los números característicos de la matriz $A+B$ están comprendidos en el segmento $[a+c,\ b+d]$.

956. a) Es consecuencia del resultado del problema 937.

b) $|AX|^2=AX\cdot AX=X\cdot\bar{A}AX\leqslant|X|^2\cdot\|A\|^2.$

Se verifica el signo de igualdad para el vector propio de la matriz $\tilde{A}A$ que pertenece al número característico $\| A \|^2$.

c) $|(A+B)X| \leq |AX| + |BX| \leq (\| A \| + \| B \|) |X|$ para cualquier vector X. Mas, para cierto vector X_0

$$|(A+B)X_0| = (\|A+B\|) \cdot |X_0|.$$

Por lo tanto,

$$\| A+B \| \leq \| A \| + \| B \|.$$

d) $|ABX| \leq \| A \| \cdot |BX| \leq \| A \| \cdot \| B \| \cdot |X|$.

Aplicando esta desigualdad al vector X_0, para el cual

$$\| AB \| \cdot |X_0| = |ABX_0|,$$

obtenemos

$$\| AB \| \leq \| A \| \cdot \| B \|.$$

e) Sea $\lambda = p + qi$ un número característico de la matriz A, y sea $X = Y + iZ$ su vector propio correspondiente.

Entonces

$$AY = pY - qZ, \quad AZ = qY + pZ,$$

de donde

$$|pY - qZ|^2 \leq \| A \|^2 |Y|^2,$$
$$|qY + pZ|^2 \leq \| A \|^2 |Z|^2.$$

Sumando estas desigualdades, obtenemos

$$|\lambda|^2 (|Y|^2 + |Z|^2) = (p^2 + q^2)(|Y|^2 + |Z|^2) \leq \| A \|^2 (|Y|^2 + |Z|^2)$$

y, por consiguiente,

$$|\lambda| \leq \| A \|.$$

957. Sea A una matriz real no singular; entonces $\tilde{A}AX \cdot X = |AX|^2$ es una forma cuadrática positiva, la cual puede reducirse a la forma canónica mediante una transformación de las variables con una matriz triangular B que tenga los elementos diagonales positivos. Por lo tanto, $\tilde{A}A = \tilde{B}B$, de donde se deduce que $\widetilde{AB^{-1}} \cdot AB^{-1} = E$, es decir, $AB^{-1} = P$ es una matriz ortogonal. De aquí que $A = PB$. La unicidad se deduce de la unicidad de la transformación triangular de la forma cuadrática a la forma canónica.

958. $\tilde{A}A$ es una matriz simétrica con los números característicos positivos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Por consiguiente,

$$\tilde{A}A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P.$$

Construyamos la matriz

$$B = P^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix} P,$$

donde μ_i es el valor aritmético de la raíz cuadrada de λ_i. Evidentemente, B es de nuevo una matriz simétrica con los números característicos positivos y $B^2 = \tilde{A}A$. De aquí se deduce que $AB^{-1} = Q$ es una matriz ortogonal, $A = QB$.

959. Después de trasladar el origen de coordenadas al centro de la superficie, ésta tiene que contener junto con el punto X también el punto $-X$ y, por consiguiente, la ecuación no tiene que contener las primeras potencias de las coordenadas variables. Después de efectuar un traslado paralelo de los ejes $X=X_0+X'$, donde X_0 es el vector de traslación, la ecuación de la superficie se transforma en

$$AX'\cdot X'+2(AX_0+B)X'+AX_0\cdot X_0+2BX_0+C=0.$$

Por esta razón, para la existencia de centro es necesario y suficiente que la ecuación $AX_0+B=0$ sea resoluble respecto del vector X_0, para lo cual, a su vez, es necesario y suficiente que el rango de la matriz A sea igual al rango de la matriz (A, B).

960. Después de trasladar el origen de coordenadas al centro, la ecuación de la superficie adquiere la forma

$$AX\cdot X+\gamma=0.$$

Si r es el rango de la matriz A y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son los números característicos distintos de 0, entonces, después de una transformación ortogonal adecuada de las coordenadas, la ecuación toma la forma canónica

$$\alpha_1x_1^2+\ldots+\alpha_rx_r^2+\gamma=0.$$

961. La superficie carece de centro si el rango de (A, B) es mayor que el rango de A, lo cual es posible solamente si $r=\text{rango } A<n$. Designemos con R todo el espacio, con P el espacio AR, con Q el complemento ortogonal de P. Entonces, para cualquier $Y\in Q$ tendremos $AY=0$, puesto que

$$|AY|^2=AY\cdot AY=Y\cdot AAY=0,$$

ya que $AAY\in P$. Sea

$$B=B_1+B_2,\quad B_1\in P,\quad B_2\in Q.$$

Entonces $B_2\neq 0$, pues en caso contrario B perteneceria a P y el rango de (A, B) sería igual a r. Sea $B_1=AX_0$. Después del traslado $X=X_0+X'$ la ecuación de la superficie se transforma a la forma

$$AX'\cdot X'+2B_2X'+c'=0.$$

Hagamos una traslación más $X'=aB_2+X''$. Entonces

$$AX'\cdot X'=a^2AB_2\cdot B_2+2aAB_2\cdot X''+AX''\cdot X''=AX''\cdot X'',$$

puesto que $AB_2=0$, y, por lo tanto, la ecuación se transforma a la forma

$$AX''\cdot X''+2B_2X''+2a|B_2|^2+c'=0.$$

Tomemos

$$a=-\frac{c'}{2|B_2|^2}.$$

Entonces la ecuación se convierte en

$$AX''\cdot X''+2B_2X''=0.$$

Hagamos ahora una transformación ortogonal de las coordenadas, tomando por base del espacio los vectores unitarios propios, ortogonales dos a dos, de la matriz A, incluyendo el vector unitario que es colineal al vector B_2 y lleva la dirección opuesta. Esto se puede hacer, puesto que B_2 es un vector propio de A. En esta base la ecuación toma la forma

$$\lambda_1x_1^2+\ldots+\lambda_rx_r^2-2\beta_2x_{r+1}=0,$$

donde $\beta_2=|B_2|$. No queda más que dividir por β_2.

962. En una transformación lineal de matriz A el espacio se transforma en el subespacio engendrado por los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_n$, cuyas coordenadas forman las columnas de la matriz A. De aquí se deduce inmediatamente el resultado pedido.

963. Sea $e_1, e_2, \ldots, e_q$ una base de Q. Entonces Q' es un espacio engendrado por los vectores $e'_1, e'_2, \ldots, e'_q$, donde $e'_1, e'_2, \ldots, e'_q$ son las imágenes de $e_1, e_2, \ldots, e_q$ en la transformación lineal realizada. Por lo tanto, $q' \leqslant q$. Además, evidentemente, $q' \leqslant r$, puesto que Q' está contenido en R'. Sea ahora P el espacio complementario a Q, de dimensión $p = n - q$, y sea P' su imagen en la transformación lineal. Su dimensión p' no es superior a $n - q$. Pero $P' + Q' = R'$, por consiguiente, $p' + q' \geqslant r$. De aquí que

$$q' \geqslant r - p' \geqslant r + q - n.$$

964. Supongamos que el rango de A es igual a r_1 y el de B, igual a r_2. Sea $BR = Q$. La dimensión de Q es igual a r_2. Entonces p, que es igual al rango de AB, es la dimensión de $ABR = AQ$. En virtud del resultado del problema anterior, $r_1 + r_2 - n \leqslant p \leqslant \min(r_1, r_2)$.

965. La realización doble de la operación de proyección es equivalente a una realización simple. En efecto, al proyectar la primera vez, todos los vectores del espacio R se transportan a vectores del subespacio P, los cuales, al proyectar la segunda vez, permanecen invariables. Por consiguiente, $A^2 = A$. Recíprocamente, sea $A^2 = A$. Designemos con P el conjunto de todos los vectores $Y = AX$, con Q, el conjunto de los vectores Z tales que $AZ = 0$. Está claro que P y Q son espacios lineales. Su intersección es el vector cero, puesto que si $AX = Z$, se tiene $AX = A^2X = AZ = 0$. Por otra parte, para cualquier vector X se verifica la descomposición $X = AX + (E - A)X$. Es obvio que $(E - A)X \in Q$, pues $A(E - A)X = (A - A^2)X = 0$. Por esto, $P + Q$ es todo el espacio, es decir, P y Q son subespacios complementarios entre sí. La operación AX es el paso del vector X a su componente en P, es decir, es la operación de proyectar sobre P paralelamente a Q.

966. Sea $P \perp Q$. Elijamos una base ortonormal de todo el espacio, reuniendo las bases ortonormales de P y Q. En esta base la matriz de la proyección tendrá la forma diagonal

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

En cualquier otra base ortonormal la matriz de proyección es igual a $A = B^{-1}A'B$, donde B es una matriz ortogonal. Es evidente que A es simétrica.

Recíprocamente, si A es una matriz simétrica y $A^2 = A$, los espacios $P = AR$ y $Q = (E - A)R$ son ortogonales, puesto que $AX(E - A)Y = X \cdot \overline{A}(E - A)Y = X(A - A^2)Y = 0$.

967. Sea A una matriz hemisimétrica. Fácilmente se ve que $AX \cdot X = 0$ para cualquier vector real X, pues

$$AX \cdot X = X \cdot \overline{A}X = X \cdot (-AX) = -AX \cdot X.$$

Sea $\lambda = \alpha + \beta i$ un número característico de la matriz A y $U = X + Yi$ el vector propio correspondiente. Entonces

$$AX = \alpha X - \beta Y, \quad AY = \beta X + \alpha Y.$$

De aquí se deduce que $\alpha(|X|^2 + |Y|)^2 = AX \cdot X + AY \cdot Y = 0$ y $\alpha = 0$. También se tiene $\beta X \cdot Y + \alpha |Y|^2 = AY \cdot Y = 0$, de donde $X \cdot Y = 0$ si $\beta \neq 0$; finalmente, de la igualdad $\beta(|X|^2-|Y|^2)=AY\cdot X+AX\cdot Y=AY\cdot X-X\cdot AY=0$ se deduce que $|X|=|Y|$.

968. Sea

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots 0 \end{pmatrix}$$

una matriz hemisimétrica. Si todos sus números característicos son iguales a cero, entonces $A=0$. En efecto, la suma de los productos de todos los números característicos, tomados dos a dos, es igual a la suma de todos los menores principales de segundo orden $\sum_{i<k} a_{ik}^2$, y la igualdad a cero de esta suma implica que $a_{ik}=0$ para cualesquiera i, k, es decir, $A=0$.

Supongamos que A tiene un número característico distinto de cero, $\lambda_1=a_1i$. Normalicemos las partes real e imaginaria de su vector propio correspondiente. Como sus longitudes son iguales, el factor normalizador será el mismo, y para los vectores obtenidos se cumplen las igualdades

$$AX=-a_1Y; \quad AY=a_1X.$$

Formemos una matriz ortogonal, colocando en sus primeras dos columnas los vectores X e Y. Entonces

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots \\ -a_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Como la matriz $P^{-1}AP$ es hemisimétrica, todos los elementos no indicados de las dos primeras filas son iguales a cero y la matriz formada por los elementos de la 3^a, 4^a, ..., n^a filas y 3^a, 4^a, ..., n^a columnas, es hemisimétrica. Aplicando a ella los mismos razonamientos, elegimos una "malla" más $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}$. Continuamos el proceso hasta que en el ángulo inferior de la izquierda quede una matriz cuyos números característicos sean todos iguales a cero. Pero todos los elementos de tal matriz son iguales a cero. El problema queda resuelto.

969. Sea

$$B=(E-A)(E+A)^{-1}.$$

Entonces

$$\overline{B}=\overline{(E+A)}^{-1}\overline{(E-A)}=(E-A)^{-1}(E+A)=B^{-1}.$$

También se tiene

$$B+E=(E-A)(E+A)^{-1}+(E+A)(E+A)^{-1}=2(E+A)^{-1}$$

y, por consiguiente,

$$|B+E|\neq 0.$$

Recíprocamente, si

$$\overline{B}=B^{-1} \text{ y } |B+E|\neq 0,$$

se puede tomar por A la matriz $(E+B)^{-1}(E-B)$. Fácilmente se observa que A es una matriz hemisimétrica.

970. Sea A una matriz ortogonal. Entonces

$$AX\cdot AY=X\cdot\overline{A}AY=X\cdot Y$$

para cualesquiera vectores reales X e Y. Supongamos que

$$\lambda=\alpha+\beta i$$

es un número característico de la matriz A y que

$$U=X+Yi$$

es su vector propio correspondiente. Entonces

$$AX=\alpha X-\beta Y, \quad AY=\alpha Y+\beta X,$$

de donde

$$|X|^2=X\cdot X=AX\cdot AX=\alpha^2|X|^2+\beta^2|Y|^2-2\alpha\beta X\cdot Y,$$
$$|Y|^2=Y\cdot Y=AY\cdot AY=\alpha^2|Y|^2+\beta^2|X|^2+2\alpha\beta X\cdot Y.$$

Sumando estas igualdades, obtenemos $\alpha^2+\beta^2=1$.

971. Para $\beta\neq 0$, de las últimas igualdades del problema anterior obtenemos

$$\beta(|X|^2-|Y|^2)+2\alpha X\cdot Y=0.$$

Por otra parte,

$$X\cdot Y=AX\cdot AY=(\alpha^2-\beta^2)X\cdot Y+\alpha\beta(|X|^2-|Y|^2),$$

de donde

$$\alpha(|X|^2-|Y|^2)-2\beta X\cdot Y=0.$$

Por consiguiente,

$$X\cdot Y=|X|^2-|Y|^2=0.$$

972. 1. Sea $\lambda=\alpha+\beta i=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi$ un número característico imaginario de la matriz. Formemos una matriz ortogonal A, cuyas primeras dos columnas formen las partes real e imaginaria del vector propio perteneciente a λ. Entonces

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & \dots \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Como la matriz $Q^{-1}AQ$ es ortogonal, la suma de los cuadrados de los elementos de cada fila es igual a 1 y, por lo tanto, todos los elementos no indicados de las dos primeras filas son iguales a 0.

2. Sea $\lambda=\pm 1$ un número característico real de la matriz A y sea X el vector propio normalizado perteneciente a λ.

Formemos una matriz ortogonal, cuya primera columna sea el vector X. Entonces

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \pm 1 & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Todos los elementos no indicados de la primera fila son iguales a 0, puesto que la suma de los cuadrados de los elementos de cada fila de la matriz ortogonal $Q^{-1}AQ$ son iguales a la unidad.

Aplicando los razonamientos expuestos a las matrices ortogonales que quedan en el ángulo inferior de la izquierda, obtenemos el resultado pedido.

973. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$;

m) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; n) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; o) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

974. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & \\ & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \varepsilon & & & & \\ & \varepsilon^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$,

donde $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}$.

975. El "bloque" $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ no puede ser periódico.

Observación. El resultado no es válido en un campo de característica distinta de 0. Por ejemplo, en el campo de característica 2 se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = E.$$

976. Sea A la matriz dada y $B = C^{-1}AC$ su reducción a la forma canónica de Jordan. La matriz canónica B es de forma triangular y sus elementos diagonales son iguales a los números característicos de la matriz A; además, cada uno de ellos se repite tantas veces cual sea su orden de multiplicidad en la ecuación característica. También se tiene, $B'_m = (C'_m)^{-1}A'_mC'_m$ (problema 531). Por consiguiente, los polinomios característicos de las matrices A'_m y B'_m coinciden. Para una numeración adecuada de las combinaciones la matriz B'_m tiene la forma triangular y, por consiguiente, sus números característicos son iguales a los elementos diagonales. Estos, a su vez, son iguales a todos los productos posibles de los números característicos de la matriz A, tomados m a m.

977. Evidentemente, las matrices $A - \lambda E$ y $\overline{A} - \lambda E$ tienen iguales divisores elementales. Por consiguiente, A y $\overline{A}$ se transforman a una misma matriz canónica y, por lo tanto, se transforman una en la otra.

978. Si $A = CD$, donde C, D son matrices simétricas y la matriz C es no singular, entonces $\overline{A} = DC$ y, por consiguiente, $\overline{A} = C^{-1}AC$. Por lo tanto, se debe buscar la matriz C entre las que transforman A en $\overline{A}$.

Sea $A=SBS^{-1}$, donde B es la matriz canónica:

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad B_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Entonces $\overline{A}=\overline{S}^{-1}\overline{B}\overline{S}$. Designemos con H_i la matriz

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Se ve fácilmente que $\overline{B}_i=H_i^{-1}\cdot B_i\cdot H_i$ y, por consiguiente,

$$\overline{B}=H^{-1}BH, \quad \text{donde} \quad H=\begin{pmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_k \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\overline{A}=\overline{S}^{-1}H^{-1}BH\overline{S}=\overline{S}^{-1}H^{-1}S^{-1}ASH\overline{S}=C^{-1}AC$, donde $C=SH\overline{S}$. Evidentemente, la matriz C es simétrica. Hagamos $D=C^{-1}A$. Entonces $\overline{D}=\overline{A}C^{-1}=C^{-1}ACC^{-1}=D$. Por consiguiente, la matriz D también es simétrica y $A=CD$.

979. Sea $|A-\lambda E|=(-1)^n(\lambda^n-c_1\lambda^{n-1}-c_2\lambda^{n-2}-\ldots-c_n)$. Evidentemente, $p_1=SpA=c_1$. Supongamos que ya se ha demostrado que $p_1=c_1$, $p_2=c_2$, $\ldots$, $p_{k-1}=c_{k-1}$, y demostremos que $p_k=c_k$. Según la construcción, $A_k=A^k-p_1A^{k-1}-p_2A^{k-2}-\ldots-p_{k-1}A=A^k-c_1A^{k-1}-c^2A^{k-2}-\ldots-c_{k-1}A$. Por consiguiente,

$$\mathrm{Sp}\,A_k=kp_k=\mathrm{Sp}\,A^k-c_1\mathrm{Sp}\,A^{k-1}-\ldots-c_{k-1}\mathrm{Sp}\,A=S_k-c_1S_{k-1}-\ldots-c_{k-1}S_1,$$

donde S_1, S_2, $\ldots$, S_k son las sumas de potencias de los números característicos de la matriz A. Pero, según las fórmulas de Newton, $S_k-c_1S_{k-1}-\ldots-c_{k-1}S_1=kc_k$. Por lo tanto,

$$p_k=c_k.$$

En virtud de la relación de Hamilton-Cayley, se tiene $B_n=A^n-c_1A^{n-1}-\ldots-c_{n-1}A-c_nE=0$. Finalmente,

$$AB_{n-1}=A_n=c_nE,$$

de donde

$$B_{n-1}=c_nA^{-1}.$$

980. Sea

$$C=\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la matriz diagonal

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & & & 0\\ & \alpha_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \alpha_n\end{pmatrix},$$

cuyos elementos diagonales son arbitrarios, pero distintos dos a dos. Tomemos

$$Y=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix}.$$

Entonces

$$XY-YX=\begin{pmatrix}0 & b_{12}(\alpha_2-\alpha_1) & \dots & b_{1n}(\alpha_n-\alpha_1)\\ b_{21}(\alpha_1-\alpha_2) & 0 & \dots & b_{2n}(\alpha_n-\alpha_2)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{n1}(\alpha_1-\alpha_n) & b_{n2}(\alpha_2-\alpha_n) & \dots & 0\end{pmatrix}$$

y, por consiguiente, es suficiente tomar $b_{ik}=\frac{c_{ik}}{\alpha_k-\alpha_i}$ para $i\neq k$. Empleando el método de inducción matemática, demostremos ahora que toda matriz cuya huella sea igual a cero, es semejante a una matriz cuyos elementos diagonales son todos iguales a cero. Como $\operatorname{Sp}C=0$, $C\neq\mu E$ para $\mu\neq 0$ y, por consiguiente, existe un vector U tal que CU y U son linealmente independientes. Incluyendo en la base los vectores U y CU, obtenemos que C es semejante a la matriz

$$C'=\begin{pmatrix}0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n}\\ 1 & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nn}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O & P\\ Q & \Gamma\end{pmatrix}.$$

Evidentemente, $\operatorname{Sp}\Gamma=\operatorname{Sp}C=0$.

Por consiguiente, según la hipótesis de inducción, $\Gamma=S^{-1}\Gamma'S$, donde Γ' es una matriz con los elementos diagonales nulos. Entonces la matriz

$$C''=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & S\end{pmatrix}^{-1}C'\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & PS\\ S^{-1}Q & S^{-1}\Gamma S\end{pmatrix}$$

tiene todos los elementos diagonales iguales a cero.

En 1971 la Editorial MIR publicará:

I. M. VINOGRADOV

"FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE LOS NUMEROS"

El manual del académico Iván Vinográdov expone los fundamentos de la teoría de los números. En esta obra el autor no trata de abarcar todos los problemas de la teoría clásica de los números, sino que orienta al estudiante a dominar la asignatura de un modo creador.

El fundador de una escuela soviética de matemáticas Iván Vinográdov cumple esta tarea de una manera brillante, atrayendo la atención del lector a los problemas más palpitantes, más interesantes desde el punto de vista de la matemática moderna.

El libro se divide en dos partes. La primera expone: teoria de divisibilidad, funciones más importantes que aparecen en la teoria de los números, congruencias, congruencias con una incógnita, congruencias de segundo grado, raíces primitivas e índices, y contribuye al mejor entendimiento del material teórico. La segunda parte, "Problemas" ayudará al estudiante a resolver por sí mismo diversos problemas no examinados en este manual.

Los ejercicios numéricos tienen respuestas y se dan las resoluciones más o menos detalladas de los problemas.

Este libro, a pesar de ser un manual para las universidades, abre nuevos horizontes en la teoría de los números y da la posibilidad de pasar al estudio de temas aún no resueltos en matemáticas, los cuales esperan todavía a sus investigadores.

A. KOLMOGOROV, S. FOMIN

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES Y DEL ANALISIS FUNCIONAL

A finales de la década del 40 en el programa de la Facultad de Mecánicas y Matemáticas de la Universidad de Moscú fue incluido el curso de Análisis-III que contenía elementos de la teoría de conjuntos y de la teoría de funciones, ecuaciones integrales y nociones del análisis funcional.

El académico Andrei Kolmogórov, gran matemático soviético fue el iniciador de este curso. Más tarde este curso estuvo a cargo de otros científicos y, en particular, del profesor Serguei Fomín, Doctor en ciencias Físico-Matemáticas.

A base de este curso Andrei Kolmogórov y Serguei Fomín escribieron el libro "Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional", compuesto de dos fascículos que salieron en la Unión Soviética en 1954 y 1960 respectivamente y después fueron traducidos en el extranjero. Este libro, escrito como un manual para los estudiantes de las facultades de matemáticas y mecánicas y de las facultades físico-matemáticas de las Universidades de la URSS, se convirtió, sin embargo, en el libro de cabecera no sólo de los estudiantes, sino de los aspirantes, matemáticos e ingenieros de las más diversas especialidades. Fue acogido también con gran interés en el extranjero.

La primera edición muy pronto se agotó y surgió la necesidad de la segunda. Durante la preparación de ésta los autores realizaron un enorme trabajo para rehacer, mejorar y complementar su libro. La nueva, segunda edición salió en la Unión Soviética en 1968.

La segunda versión tiene mucho más material que la primera. Por ejemplo, en el primer capítulo (Elementos de la Teoría de conjuntos) ha sido añadido el teorema de Cantor-Bernstein sobre la equivalencia de dos conjuntos cada uno de los cuales posee un subconjunto equivalente al otro, se han incluido nuevos temas sobre los números ordinales y transfinitos con la exposición, en particular, del axioma de selección, el teorema de Cermelo y otras proposiciones equivalentes. El segundo capítulo, además de los espacios métricos, contiene ahora los espacios topológicos. Fueron considerablemente modificados y ampliados los capítulos dedicados a los espacios lineales y funcionales y operadores lineales en ellos. Lo mismo se refiere a la parte del libro donde se expone la teoría de medida, funciones medibles y la Integral de Lebesgue: se da, por ejemplo, la demostración del teorema de Radon-Nicodim, que no aparecía en la primera edición, se explican las funciones con variación acotada y el integral de Stiltjes. Las series y el integral de Fourier, así como la teoría de ecuaciones integrales lineales forman ahora capítulos especiales y se exponen mucho más ampliamente.

El libro se compone de 10 capítulos. En el primero se exponen los elementos de la teoría de conjuntos en un volumen muy superior al que corrientemente aparece en los textos de Análisis Funcional. El segundo capítulo está dedicado a los espacios métricos y topológicos y a sus aplicaciones continuas. En el tercer y cuarto capítulos se exponen los espacios lineales (normados y topológicos) y los funcionales y operadores lineales en ellos. En el capítulo cinco se estudian espacios con medida (sin topología) y la integración en ellos; aquí se expone la teoría general de la medida y de la integral de Lebesgue. Los espacios de funciones sumables se consideran en el capítulo siete y los resultados de los capítulos 5 y 7 se aplican en los capítulos 6 y 8, a la teoría de funciones de variable real, dedicados a las teorías de la integral indefinida de Lebesgue y de la diferenciación y a la integral de Fourier. El capítulo nueve se refiere a las ecuaciones integrales lineales y el capítulo diez a los elementos del cálculo diferencial en los espacios lineales. El último capítulo, así como el segundo, tercero y cuarto, no exigen conocimiento de la teoría de medida y de la teoría de integración de Lebesgue.

En el prefacio los autoras subrayan que dan "preferencia a la línea abstracta de elaboración del curso", tratando que el lector pueda "seguir la lógica interior del desarrollo de la teoría de conjuntos, la teoría general de las aplicaciones continuas de los espacios métricos y topológicos, la teoría de los espacios lineales y funcionales y operadores lineales en ellos, la teoría pura de la medida y la teoría de integración en los espacios generales con medida". Sin embargo, la nitidez y claridad de la exposición, la atención que dedican los autores a los problemas clásicos, relacionados con el material que se expone, así como la inclusión de temas como la teoría de diferenciación, series e integral de Fourier y ecuaciones integrales lineales, hacen el libro extremadamente útil e interesante para un amplio círculo de científicos e ingenieros.