PROBLEMAS DE GEOMETRIA

GEOMETRIA

PROF. OMER CANO

EJERCICIOS DE APLICACION

a) Demostrar las siguientes proposiciones:

* 1. En el arco CDB de una ⊙, D es el punto medio. Unanse los tres puntos y demuéstrese que los ángulos en C y en B son iguales.

2. Tres puntos A, B, C, están situados sobre una semicircunferencia, encontrándose B entre A y C. Si se trazan las bisectrices OM y ON de los ∢s AOB y BOC, demostrar que arc. MN $= \frac{1}{2}$ arc. AC.

3. Dos arcos consecutivos suman una semicircunferencia. ¿Qué ángulo forman las rectas que unen el centro con los puntos medios de esos arcos? Pruébese.

4. Demostrar que si desde un punto P situado en una ⊙ se trazan las perpendiculares a dos radios, siendo dichas perpendiculares iguales, el punto P dimidia el arco comprendido entre los dos radios.

5. Desde un punto A situado en una ⊙ se trazan dos cuerdas cualesquiera AM y AN. Desde otro punto B, también, situado sobre la ⊙, se trazan BM' $\parallel$ AM y BN' $\parallel$ AN. Demostrar que MN' $\parallel$ M'N. (Teorema VI).

6. Demuéstrese que todo trapecio inscrito en una circunferencia es un trapecio isósceles. (Teorema V).

* 7. Demostrar que dos cuerdas que están a igual distancia del centro de una ⊙, son iguales. (Proposición recíproca del Teorema III).

* 8. **Demostrar que: Si dos cuerdas distan desigualmente del** centro de una ⊙, la que dista menos, es la mayor. (Recíproco del Teorema IV).

9. En dos puntos de un diámetro, equidistantes del centro de una ⊙, constrúyanse las ⊥s. Probar que las partes de las ⊥s comprendidas entre el diámetro y la ⊙, son iguales.

10. En una $\odot$ constrúyanse las cuerdas MN y EF sin que tengan ningún punto común. Unir los puntos M, E y N con F de modo que las rectas de unión se crucen. Demostrar que ME=NF.

* 11. Demostrar que: si en dos puntos equidistantes del punto medio de una cuerda se levantan $\perp$s a ella, las partes de las $\perp$s comprendidas entre la cuerda y la $\odot$, son iguales.

* 12. Demostrar que dos cuerdas $\|$s trazadas por los extremos de un diámetro de una $\odot$, son iguales.

13. Si por los extremos de una cuerda se trazan a ella las cuerdas perpendiculares y se unen sus extremos, resulta un rectángulo.

14. En una $\odot$, siguiendo el sentido del movimiento de los punteros de un reloj, se marcan sucesivamente los puntos A, B, C y D, de modo que: arc. AB = arc. CD. Probar que los puntos de intersección de AC con BD y de AB con DC prolongados, están en línea recta con los puntos medios de las cuerdas AD y BC.

* 15. Desde un punto C de una $\odot$ parten las cuerdas CA y CB y el diámetro CO, siendo el $\sphericalangle$CAB que forman las cuerdas, bisectado por el diámetro. Demostrar: a) que el arco ADB resulta dimidiado por el diámetro; b) que la cuerda CA=CB.

* 16. Si dos $\odot$s concéntricas se cortan por una recta **MN**, demostrar que las $\odot$s interceptan segmentos iguales sobre la recta.

17. En una $\odot$ una cuerda **AB** subtiende un arco de un cuadrante. Construir un arco AC doble del arco AB y probar que

$\overline{AC} < 2\overline{AB}$.

* 18. Desde un punto A situado fuera de una $\odot$ se traza una secante ABC de modo que su parte exterior AB sea igual al radio de la $\odot$. También se traza la secante AOD que pasa por el centro O. Probar que el $\sphericalangle$ COD = 3$\sphericalangle$CAD.

b) PROBLEMAS GRAFICOS

* 19. Describir una $\odot$ de radio **r** que pase por dos puntos dados A y B, siendo AB=**a**. ¿Es siempre posible el problema? Examinar el caso particular en que **a=2r**.

* 20. Determinar el centro: a) de una $\odot$ dada; b) de un arco de circunferencia dado.

* 21. Construir el L. G. de los puntos medios de todas las cuerdas de una $\odot$, paralelas a una recta dada **L**.

* 22. Por un punto dado P, situado en el interior de una $\odot$ trazar la mayor y menor cuerda posibles.

¿Qué posición tienen entre sí dichas cuerdas al cortarse en P?

¿Cuál es el método para trazar por un punto cualquiera situado en el interior de una $\odot$, una cuerda que resulta dimidiada por dicho punto?

* 23. Construir una $\odot$ que pase por dos puntos dados **A** y **B** y cuyo centro se halle sobre una recta dada **L**.

* 24. Describir una $\odot$ con radio dado, tangente a una recta dada en un punto **A** de ella.

* 25. Dadas una $\odot$ y una recta **L**, trazar una paralela a la recta de modo que sea tangente a la $\odot$.

* 26. Dadas una $\odot$ y una recta L, construir la perpendicular a la recta, de manera que sea tangente a la $\odot$ dada.

* **27. Dadas una $\odot$ y una recta L, trazar una recta que sea tangente a la $\odot$ dada y forme un ángulo dado α con L.**

* 28. Describir una $\odot$ que sea tangente a una recta dada **L** en un punto **A** y que pase por un punto dado **B**.

* 29. Dada una recta **L** y un punto **A**, sobre ella, construir una $\odot$ tangente a la recta **L** en **A** y que intercepte sobre otra recta dada **L'**, un diámetro.

* 30. Dado un $\triangle$ ABC, márquese sobre la base AB un punto **P**, construir una $\odot$ tangente a AB en **P** y que pase por el vértice **C**.

* 31. Dado un $\triangle$ ABC, construir una $\odot$ que pase por los vértices **C** y **B** y que intercepte un diámetro sobre AB.

* 32. Construir una circunferencia de radio dado que pase por los extremos de un trazo dado AB. ¡Discusión!

* 33 Dadas dos rectas **L** y **L'** construir una ⊙ de radio dado tangente a dichas rectas. **(Discusión del problema).**

* 34. Dados un punto **P** y una recta **L**, describir una ⊙ de radio dado **r** que pase por **P** y sea tangente a **L**.

* 35. Dados un punto **P** y una recta **L**, describir una ⊙ de radio dado **r** que intercepte sobre esta recta un diámetro y que pase por **P**.

* 36. Describir una ⊙ de radio **r**, que intercepte sobre dos rectas dadas **L** y **L'**, cuerdas que tengan, respectivamente, por longitud **l** y **l'**, también dadas.

37. Idem que las cuerdas interceptadas por la circunferencia sobre las rectas, tengan una misma longitud dada **c**.

38. Dados una circunferencia O, un punto P y una recta L, trazar entre L y la ⊙ un segmento rectilíneo que quede dimidiado en P.

* 39. Dada una ⊙ y una cuerda MN, sobre ella, construir en la circunferencia una cuerda de longitud **l** de tal modo que su punto medio quede situado sobre MN. ¡Discusión!

* 40. Dadas dos rectas L y L' construir una ⊙ con radio dado **r** que intercepte sobre **L** una cuerda de longitud dada **l** y sea tangente a la otra recta dada, L'.

* 41. Dado un punto **P** en el interior de una circunferencia, trazar por él una cuerda APB tal que la diferencia entre los segmentos BP y AP sea igual a una longitud dada **l**.

* 42. Se da una ⊙ y una recta L, trazar una secante || L de modo que la cuerda interceptada en ella por la ⊙ tenga una longitud dada **c**.

* 43. Una cuerda CD de una ⊙ de radio r=12 cm, une los extremos de un arco equivalente a los dos tercios de la semi-circunferencia. a) Calcúlese la distancia del centro a la cuerda. b) si esta distancia se prolonga hasta cortar la semi-⊙ en B, Cuánto mide la cuerda CB?

Indicación: Geom. de Omer Cano 3.er Año ejercicio Nº 125.

EJERCICIOS DE APLICACION

44. Si desde un punto A exterior a una circunferencia O se trazan las tangentes AB y AC, se verifica que el ∢ CAB = 2∢ OCB.

45. Desde un punto A exterior a una ⨀ de centro O, trácese a ella una tangente AB y sobre AO a partir de A, aplíquese AB=AC.

Unase B con C y prolónguese hasta cortar la ⨀ en E. Probar que EO⊥OA.

46. Dos ⨀s O y O' se cortan en A y en B. Por A se traza una secante variable que corta las circunferencias en C y D respectivamente. Demostrar que el ∢ CBD es constante.

47. En una ⨀ O construya un ángulo inscrito cualquiera CAB; dibújese la bisectriz de este ángulo de modo que corte el arco interceptado por los lados en P. Demostrar que, si por este punto se traza una paralela a uno de los lados, la parte de esta paralela interceptada por la ⨀, es igual al otro lado del ángulo.

* 48. Partiendo de las propiedades del ángulo inscrito, demostrar:

1º Que en un △ rectángulo la transversal de gravedad que sale del vértice del ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa.

2º Que si en un △ la transversal de gravedad correspondiente a un lado es igual a la mitad de este lado, el △ es rectángulo.

49. Dada una ⨀ O y un punto P exterior a ella, trazar desde P, una tangente PA y una secante PB. Unase el punto de tangencia A con los extremos B y C de la cuerda interceptada por la ⨀ sobre la secante. Trazando la bisectriz del ∢ CAB hasta que corte la secante en D, se obtiene PD=PA

50. Dada una cuerda AB en una ⨀, se traza una tangente en A. Demostrar que el punto medio del arco comprendido por la cuerda, es equidistante de ésta y de la tangente.

51. Se da un ∢ inscrito BAC, en una ⊙; MN que une los puntos medios de los arcos subtendidos por cada uno de los lados del ángulo, corta a dichos lados en D y en E, respectivamente. Demostrar que el △ DEA es isósceles.

52. Demostrar que en un △ rectángulo en C, el pie de la altura CH, el vértice C y los puntos medios de los tres lados, pertenecen a la misma ⊙. Determinar el centro y el radio de la ⊙.

53. Desde un punto M situado sobre una ⊙, parten una cuerda MN y una tangente MT=MN. Se une T con N cuya prolongación corta la ⊙ en A. Demostrar que el △ MTA es isósceles.

* 54. Demostrar que el ángulo formado por una tangente y una secante que parten de un mismo punto, tiene por medida la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

55. Demostrar que una ⊙ que tiene por diámetro uno de los lados de un △ isósceles pasa por el punto medio de la base.

* 56. En una ⊙ hay inscrito un trapecio tal que la base mayor es igual al diámetro y los otros tres lados iguales al radio. Calcular los ángulos de este trapecio y los ángulos formados por las diagonales.

57. El ∢ que forman dos tangentes que parten de un mismo punto a una ⊙ es igual a 60°. Probar que el △ formado por las tangente y la cuerda que une los puntos de tangencia es equilátero.

* 58. Desde un punto exterior P a una ⊙ dada, trazar una secante de modo que la cuerda interceptada por la ⊙ sea igual a su radio.

59. El ∢ que forman dos tangentes que parten de un mismo punto a una ⊙ vale 47° ¿Cuántos grados mide el arco menor comprendido entre las tangentes?

* 60. Sobre un trazo de 4 cm construir el arco capaz de un ángulo que mide: a) 60°; b) 120°.

• **61.** En un △ ABC inscrito en una ⊙, $\alpha=60^\circ$; $\beta=50^\circ$. Dibujar las tres bisectrices de los ángulos del triángulo hasta que corten la circunferencia en los puntos M, N y P. Calcular los ángulos internos del △ MNP que resulta al unir estos puntos, (Averiguar la relación que existe entre los ángulos **M, N** y **P** con los ángulos α, β y γ).

• **62.** Dados tres puntos **A, B** y **C** en un mismo plano, determinar un cuarto punto **Q** tal que unido con los tres anteriores, las rectas **QA, QB** y **QC** formen dos ángulos dados α y β.

(Este problema es conocido con el nombre de problema de la **Carta** o de **Pathenot**).

• **63.** Dados dos trazos a y b, determinar un punto que unido con sus extremos, las rectas de unión formen dos ∢s de 90°.

* **64.** Dado un △ **ABC**, determinar en su interior un punto **Q** de modo que unido con sus tres vértices, las rectas de unión formen tres ángulos iguales en torno de **Q**.

65. Dado un △ **ABC**, hallar en su interior un punto **Q**, tal que unido con los vértices del triángulo, los ángulos **QAB, QBC** y **QCA** sean iguales (**Problema de Brocard**).

• **66.** Se dan dos puntos fijos **A** y **B**. Desde **A** parte un rayo **AX** de dirección variable y desde **B** se traza la perpendicular **BC** a dicho rayo **AX**. ¿Cuál es el L. G. de C.?

67. La hipotenusa de un △ rectángulo se mueve de modo que sus extremos están siempre sobre los dos lados del ángulo recto, el cual permanece fijo. ¿Cuál es el L. G. del punto medio **M** de la hipotenusa

68. Determinar el L. G. de los puntos medios de los lados de un △ **ABC**, cuya base **AB** es fija y el ángulo γ opuesto a esta base, constante.

69. Una ⊙ de radio variable es tangente a un trazo **AB** en **B**. Desde **A** se traza la segunda tangente **AM** a la ⊙ de radio variable; determinar el L. G. del punto de contacto **M**.

70. Determinar el L. G. de los puntos de contacto de dos ⊙s tangentes entre sí y de radios variables, de modo que cada una permanezca respectivamente tangente a una recta dada, la primera en un punto fijo A de la recta y la segunda en otro punto fijo B de la misma.

Construir un △ rectángulo dados:

* 71. a, h_c	* 72. c, q	* 73. p, q
* 74. u, v	75. t_c, h_c	* 76. $\alpha - \beta = \delta$ $a - b = d$

Construir un △ dados uno de los lados y las dos alturas que parten de sus extremos:

* 77. a, h_b, h_c	78. b, h_a, h_c	* 79.- c, h_a, h_b

Construir un △ dados:

80. c, t_c, γ	81. c, h_c, γ	82. p, q, γ
83. b, h_b, β	84. c, γ, $a+b=s$	85. c, $a - \beta = \delta$, $a - b = d$
86. u, v, γ,	87. c, $a - b$, γ	88. $a+c$, b, β
89. $a+b+c$, h_b, β	90. $a - b$, h_a, $\alpha - \beta$	91. $a+b+c$, h_a, α
92. $a+c$, $\alpha - \gamma$, h_a	93. γ, t_c, $a+b=s$	

* 94. Desde un punto **A** situado sobre una circunferencia **O**, trazar una cuerda de modo que su punto medio se halle: 1° sobre una cuerda dada **BC**; 2° sobre una circunferencia que corta a la circunferencia **O**.

* 95. Problema anterior, hallándose el punto A, situado: 1° fuera de la circunferencia **O**; 2° en el interior de la misma circunferencia.

Construir un paralelógramo dados:

* 96. a, h_a, ε	100. f, $\sphericalangle(a,e)$, $\sphericalangle(a,d)$
97. b, h_b, ε	101. f, h_a, h_b
* 98. f, α, ε	102. $e+f$, b, ε
* 99. e, f, β	103. $a+b$, γ, h_a

* 104. Construir un △ rectángulo de hipotenusa c, de modo que el vértice del ángulo recto esté situado: 1° sobre una recta dada; 2° sobre una ⨀ dada.

* 105. Construir una ⨀ dada de radio **r** que sea tangente a los lados de un ángulo dado. (**Inscribir una ⨀ de radio dado r en un ángulo**).

* 106. Construir una ⊙ que sea tangente a tres rectas dadas **L, L', L"**, si: 1° las rectas son convergentes o se cortan; 2° dos de ellas son ∥s y la tercera secante; 3° las tres rectas son ∥s; 4° las tres concurren en un mismo punto. (**Discútase la posibilidad del problema y el número de soluciones**).

* 107. Dadas dos rectas ∥s **L** y **L'**, construir una ⊙ que sea tangente a dichas rectas y que intercepte un diámetro sobre una tercera que corta a **L** y **L'**.

* 108. Se da una ⊙ **O** y dentro de ella un punto **P**. Trazar por **P** una cuerda de longitud dada **l**.

* 109. Construir una ⊙ tangente a dos rectas dadas **L** y **L'** que toque a una de ellas en un punto dado **P**.

* 110. Se da una ⊙ **O** y un punto **P** exterior a ella; trazar desde **P**, una secante a la circunferencia de modo que la cuerda interceptada, tenga una longitud dada **l**.

* 111. Dadas dos ⊙s **O** y **O'**, determinar un punto desde el cual partan tangentes de igual longitud dada l a las dos ⊙s. dadas.

* 112. Dada una ⊙, encontrar en la prolongación de uno de sus diámetros un punto **P**, de modo que las tangentes trazadas desde él a la ⊙ tengan una longitud dada **t**.

* 113. Determinar un punto **P** del cual se pueda trazar una tangente de longitud **l** a una ⊙ **O** y desde el cual, además, dos tangentes a otra ⊙ **O'**, formen en **P** un ángulo recto.

* 114. Determinar un punto **P** de donde se pueda trazar una tangente de longitud **l** a una ⊙ **O** y una tangente de magnitud **t** a otra ⊙ dada **O'**.

* 115. Se dan tres puntos **A, B** y **C**. Trazar una recta de modo que las distancias de **A** y **B** a ella, sean iguales y que la distancia de **C** a la misma recta, sea igual a una longitud dada **l**.

* 116. Se da una ⊙ **O**; determinar en la prolongación de uno de sus diámetros un punto **P**, de modo que las tangentes trazadas desde él, formen un ángulo dado α.

EJERCICIOS DE APLICACION

a) DEMUESTRENSE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES

117. Dos $\odot$s **O** y **O'** se cortan en **A** y en **B**. Por **A** se trazan los diámetros **AOC** y **AO'D**. Unase **C** con **D**. Probar que los puntos C, B y D están en línea recta.

118. Por el punto de tangencia de dos $\odot$s tangentes exteriormente se traza una secante común. Demostrar: a) que los radios trazados en los extremos de esta secante son paralelos; b) que las tangentes trazadas en los extremos de la secante son paralelas. (Hacer la demostración cuando las $\odot$s son tangentes interiormente).

119. Dos $\odot$s **O** y **O'** se cortan en **A** y en **B**; trazar una paralela a **AB** de manera que corte las dos circunferencias. Demostrar que los segmentos interceptados por las dos $\odot$s son iguales.

120. Dos $\odot$s **O** y **O'** de igual radio **r**, se cortan en **A** y en **B**; por **A** se traza una recta que corta a la $\odot$ **O** en **C**, y a la circunferencia **O'** en **D**. Se une **B** con **C** y **D**. Demostrar que el $\triangle$ **BCD** es isósceles.

121. Dos $\odot$s son tangentes interiormente en A. Trazar en la $\odot$ de radio mayor una cuerda BC, de modo que sea tangente a la circunferencia interior en D. Se une A con D. Probar que la recta AD es bisectriz del ángulo CAB.

122. Se dan dos $\odot$s tangentes exteriormente, siendo C el punto de contacto. Trácese a las $\odot$s una tangente común exterior AB y únase C con los puntos de tangencia A y B; probar que el $\triangle$ ABC es rectángulo en C

123. Se dan dos $\odot$s tangentes exteriormente. Desde un punto cualquiera de la tangente común interior, trazar las tangentes a las dos $\odot$s; probar que estas dos tangentes son iguales.

124. Se dan dos $\odot$s O y O' que se cortan en A y en B, por A se traza una recta que corta a la circunferencia O en M y a la circunferencia O' en N. Demostrar que el ángulo que forman las tangentes trazadas en M y N a las $\odot$s es igual al que forman las tangentes trazadas en A.

b) PROBLEMAS

125. ¿Qué posiciones relativas pueden ocupar dos $\odot$s de igual radio r, al variar su distancia de los centros?

* 126. Determinar el L. G. de los centros de todas las $\odot$s. de radio r que son cortadas bajo un diámetro (que resultan dimidiadas) por una $\odot$ dada de radio R.

Observación: Comparar este L. G. con el L. G. 7, pág. 23.

* 127. Se dan un punto P y una $\odot$ O; construir otra circunferencia de radio dado que pase por P y sea tangente a la $\odot$ dada O.

* 128. Se dan una $\odot$ O y un punto A. Describir una circunferencia tangente a la $\odot$ dada desde A como centro.

(Hágase variar la posición del punto A y averígüese la posición relativa de las $\odot$s en los diversos casos y el número de soluciones).

* 129. Se dan una $\odot$ O y una recta L. Construir una circunferencia de radio dado r que sea tangente a la $\odot$ y a la recta.

* 130. Construir una $\odot$ de radio dado, tangente a otras dos circunferencias dadas.

* 131. Construir una $\odot$ tangente a una circunferencia dada O en un punto A y que pase: a) por un punto dado situado en el

interior de la ⊙ dada; b) por un punto situado al exterior de la circunferencia dada.

* **132.** Se dan una circunferencia O y una recta L; construir una ⊙ tangente a la circunferencia O y que lo sea también a la recta L, en un punto dado de ella.

* **133.** Se dan una ⊙ O y una recta L. Construir una circunferencia que sea tangente a la recta L y que lo sea también a la ⊙ en un punto dado de ella.

134. Se dan dos ⊙s O y O' situadas a un mismo lado de una recta L. Determinar sobre la recta L un punto P tal que las tangentes trazadas desde ese punto a las ⊙s dadas, formen con L ángulos iguales.

* **135.** Se dan dos ⊙s O y O'; construir otra ⊙ tangente a las ⊙s dadas conocido el punto de contacto en una de ellas.

134. Dados los centros O y O' de los ⊙s tangentes interiormente, describir esas ⊙s sabiendo que la suma de sus radios es igual a una longitud dada l. ¡Discusión!

* **137.** Dos ⊙s son tangentes interiormente, la distancia de sus centros es 4 cm y la suma de sus radios 10 cm. Calcular los radios.

* **138.** Trazar una recta que corte a dos ⊙s exteriores y de tal modo que las cuerdas interceptadas sobre aquélla, por las ⊙s, sean respectivamente iguales a dos trazos dados.

* **139.** Dadas dos ⊙s O y O', trazar una recta que sea tangente a la ⊙ O y que corte a O' formando una cuerda de longitud dada c.

* **140.** Dadas dos ⊙s O y O' construir otra circunferencia de radio dado de modo que corte a una de las ⊙s dadas bajo una cuerda de longitud c y a la otra bajo diámetro.

* **141.** Dados una ⊙ O y un punto P, construir una circun-

ferencia de radio dado que pase por P y que tenga con la $\odot$ O una cuerda común de dimensión dada.

* 142. Dadas dos $\odot$s O y O' construir otra circunferencia de radio dado tangente a una de las $\odot$s dadas y que corte a la segunda bajo diámetro.

* 143. Construir una $\odot$ de radio dado que tenga con una circunferencia dada una cuerda común de longitud dada y que sea tangente a una recta dada.

* 144. Construir una $\odot$ de radio dado que corte a una circunferencia dada bajo una cuerda de longitud **c** y que intercepte sobre una recta dada L la misma cuerda **c**.

* 145. Construir una $\odot$ de radio dado **m** que resulte dimidiada (cortada bajo diámetro) por una $\odot$ dada O y que: 1° sea tangente a una recta dada L; 2° sea tangente a otra $\odot$ dada O'; 3° que pase por un punto dado **P**.

* 146. Construir una $\odot$ de radio dado que corte ortogonalmente a una $\odot$ dada O y que sea tangente a una segunda $\odot$ dada O'.

147. Trazar una recta a una distancia **d** de un punto dado **P** y que una circunferencia dada O intercepte sobre ella una cuerda de longitud dada **c**.

148. Construir una $\odot$ que pase por dos puntos dados y cuya cuerda común con una $\odot$ dada, sea paralela a una recta dada.

EJERCICIOS DE APLICACION

a) DEMUESTRENSE LAS PROPOSICIONES SIGUIENTES:

149. Demostrar que el △ que tiene dos simetrales iguales es isósceles.

150. En un △ las tres simetrales forman tres ángulos iguales en el punto de concurrencia. Demostrar que el △ es equilátero.

* **151.** Demostrar que las tres simetrales de un △ ABC, son las alturas del nuevo △ que se obtiene al unir sus puntos medios.

* **152.** Si desde un punto cualquiera P situado en el interior de un △ equilátero se trazan perpendiculares a los lados, demostrar que la suma de estas perpendiculares es igual a la altura del triángulo.

153. Una altura de un △ es menor que la semi suma de los lados adyacentes.

154. Dado un △ ABC, únase el punto medio M de AB con los pies D y E de las alturas h_a y h_b. 1º Probar que el △ MDE es isósceles; 2º Calcular sus ∢s en función de los ∢s interiores del △ ABC.

* **155.** Uniendo los pies de las tres alturas de un △ ABC se forma un nuevo triángulo que tiene por bisectrices las alturas del primero.

* **156.** Las bisectrices de dos ∢s interiores de un △ se cortan formando un ángulo obtuso igual a 90º más la mitad del tercer ángulo del triángulo: $\sphericalangle(b_\alpha, b_\beta) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$; $\sphericalangle(b_\alpha, b_\gamma) = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$;

$$\sphericalangle(b_\beta, b_\gamma) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

157. Un △ ABC que tiene dos transversales de gravedad iguales, es isósceles.

158. En un △ rectángulo ABC cuyo ∢ recto está en C y el ∢ en $A = 36^\circ$, se trazan h_c y t_c. Desde el pie H de la altura h_c, se trazan las ⊥s a los catetos CA y CB, las cuales cortan a éstos, respectivamente, en D y E. Unir D con E y demostrar que $DE \perp t_c$.

* **159.** Dado un $\triangle ABC$, trazar la bisectriz de β hasta su intersección en E con la bisectriz del ángulo exterior adyacente a α.

Demostrar que el $\sphericalangle E = \dfrac{\gamma}{2}$.

• **160.** Las bisectrices de los ángulos interiores de un $\triangle$ se cortan en I. Se bajan las perpendiculares ID sobre BC, IE sobre AC, IF sobre AB.

Demostrar que: AE=AF; CE=CD; BF=BD.

* **161.** Si se unen los puntos medios de los lados de un $\triangle$ se obtiene un nuevo triángulo que tiene con el primero el centro de gravedad común.

162. Dado un paralelógramo ABCD, se une el vértice A con el punto medio M del lado DC. La recta AM corta la diagonal BD en E.

Probar que $ED = \dfrac{1}{3} BD$.

b) PROBLEMAS

• **163.** Calcular los ángulos formados por las simetrales de un $\triangle$ en función de los ángulos interiores α, β, γ del $\triangle$.

* **164.**—Determinar un punto equidistante de tres vértices de un cuadrilátero.

* **165.**—Bajar desde el vértice inaccesible de un ángulo la perpendicular a una recta que corta los dos lados de este ángulo.

* **166.**—Construir un $\triangle$ conociendo los puntos medios de sus tres lados.

Construir un $\triangle$ rectángulo dados:

167. b, s_b	**168.** c, s_a	**169.** s_b, α
170. c, s_b	**171.** s_b, β	**172.** s_a, s_h
173. a, s_a	**174.** s_a, α	**175.** s_a, β

176. Construir un $\triangle$ equilátero dados s_a y el punto de intersección de las simetrales.

* **177.** La hipotenusa c de un △ rectángulo mide 20 [cm] y el radio de la ⊙ inscrita es igual a 4 [cm.] ¿Cuánto vale el perímetro del △?

* **178.** Trazar la bisectriz de un ángulo formado por dos rectas concurrentes cuyo punto de intersección es inaccesible.

* **179.** Las bisectrices de los ángulos exteriores de un △ ABC forman un △ EFG; calcular los ∢s en **E, F, G,** en función de los ángulos α, β, γ.

180. En un △**ABC** se tiene: $\alpha=83^\circ 30'$; $\beta=56^\circ 30'$; calcular: 1º el ángulo formado por dos alturas; 2º el ángulo formado por dos bisectrices de ∢s interiores; 3º el ángulo formado por una altura y una bisectriz de un ∢ interior.

181. Dados un △**AOB** y un punto **P**, trazar por **P** una recta de modo que determine sobre los lados **OA** y **OB** dos longitudes iguales entre si, a partir del vértice **O.**

182. Construir un △ conociendo los vértices **A** y **B** y el punto de concurrencia **H** de las tres alturas.

183. La altura de un △ equilátero mide 45 cm. Calcular los radios de las ⊙s inscritas y circunscritas.

184. Se dan tres puntos **M, N** y **H** como pies de las alturas de un triángulo, construir dicho triángulo.

185. En un △ ABC el ∢ en A=60° y el ∢ en B=80°. Calcular todos los ∢s que se forman en el punto de concurrencia de las tres alturas.

195. Construir un △ conociendo los vértices **B** y **C** y el punto de concurrencia de las bisectrices interiores.

Construir un △ dados

* **186.** t_α, t_b, c	**187.** t_α, t_b, t_c	**188.** t_a, t_b, t_c
189. t_a, t_c, c	**190.** a, t_b, t_c	**191.** c, α, t_a
* **192.** b, c, t_α	**193.** b, t_a, t_c	**194.** a, t_α, t_c

195. Construir un △ conociendo los vértices **B** y **C** y el punto de concurrencia de las bisectrices interiores.

196. Trazar por un punto **A** una recta equidistante de dos puntos dados **B** y **C.**

197. Trazar una recta equidistante de tres puntos dados.

* 198. Hallar sobre una recta, un punto equidistante de dos puntos dados.

199. Hallar un punto que sea el vértice común de dos triángulos isósceles cuyas bases sean dos segmento dados.

200. Hallar un punto que unido con los extremos de dos segmentos iguales dados, resulten dos triángulos congruentes.

CAPITULO V

§1.—FIGURAS RECTILINEAS INSCRITAS

Llamase *figura inscrita,* en una ⊙, aquella cuyos lados son cuerdas y sus vértices están sobre la ⊙.

La ⊙ se dice que es, en este caso, circunscrita a la figura. Su radio se designa por **r**.

Para que se pueda *circunscribir* una ⊙ *a una figura rectilínea,* ha de existir un punto que equidiste de todos sus vértices.

En virtud del teorema XIX, pág. 85, el punto de concurrencia de las simetrales de un triángulo, es equidistante de los tres vértices. *Siempre,* pues, *será posible circunscribir* una ⊙ *a un triángulo.*

2.º) **Nunca** *se podrá inscribir una ⊙ en un rectángulo ni en un romboide.*

3.º) **Algunas veces** *se podrá inscribir una ⊙ en un trapecio y trapezoide.*

EJERCICIOS DE APLICACION

a) DEMUESTRENSE LAS PROPOSICIONES SIGUIENTES:

* **201.** Demostrar que un trapecio isósceles es inscriptible en una ⊙ y que el punto de intersección de las diagonales está situado sobre el diámetro perpendicular a las bases.

202. Desde un punto **P** se trazan las perpendiculares **PB** y **PC** a los lados de un ángulo dado **A.** Probar que los puntos P, **B, C, A,** están situados sobre una misma circunferencia. ¿Cuál es el diámetro de esta ⊙?

203. En una ⊙ dada, desde el punto medio **A** de un arco **BAC** parten dos cuerdas **AD** y **AE** que cortan la cuerda **BC** en los puntos **F** y **G.** Demuéstrese que el cuadrilátero **DEGF** es inscriptible.

204. Las bisectrices de los ∢s interiores de un cuadrilátero convexo se cortan en los puntos **E, F, G, H.** Probar que el cuadrilátero **EFGH** es inscriptible.

205. Se da un △ equilátero **ABC** inscrito en una circunferencia **O;** por los vértices **A** y **B** se trazan tangentes a la ⊙ que se cortan en **E.** Probar que el cuadrilátero **AOBE** es inscriptible. ¿Cuál es el valor del ∢ **E?**

* **206.** Demostrar que la suma de los diámetros de las ⊙ inscrita y circunscrita a un △ rectángulo es igual a la suma de los catetos.

207. En un cuadrilátero inscriptible ABCD, sus diagonales se cortan perpendicularmente en el punto O. Desde O se baja OE ⊥ AB. Se prolonga EO hasta cortar el lado DC en F. Demuéstrese que F es el punto medio de DC.

208. En un punto D del diámetro AB de una semi ⊙ se levanta la ⊥DM al diámetro. En un punto C de la ⊙ se construye la tangente CN que corta a DM en G. AC y BC cortan a DM en

E y F, respectivamente. Demostrar: 1º que los cuadriláteros BCED y ADCF son inscriptibles; 2º que los △s EGC y FGC son isósceles; 3º que G es el centro de la ⊙ circunscrita al △ FEC.

209. Demostrar que las bisectrices de los ∢ interiores de un cuadrilátero circunscrito concurren en el centro de la ⊙ inscrita.

210. Demostrar que en un cuadrilátero inscrito que tiene dos lados paralelos, los otros dos son iguales.

* 211. En un cuadrilátero inscrito se tiene la relación: $\alpha:\beta:\gamma = 5:6:7$: ¿Cuánto mide cada ángulo del cuadrilátero?

212. Probar que en los △s inscritos en una ⊙ que tienen un lado c común y fijo, e iguales a un ∢ dado γ los ∢s de los vértices opuestos al lado fijo, las bisectrices de dichos ∢s son concurrentes. ¿Cuál es su punto de concurrencia?

Determínese, en esos mismos △s el L. G.: 1º de sus centros de gravedad; 2º de sus ortocentros. Indíquese cuál es el L. G. de los terceros vértices de todos los △s que en el mismo plano cumplen las condiciones susodichas.

b) PROBLEMAS DE CONSTRUCCION

Construir un △ dados: r, γ, t_c. (Fig. 95).

Análisis.—

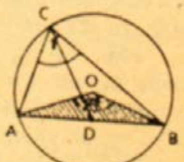

Fig. 95

Sea **ABC** el △ pedido.
En el se conoce:
OA = OB = r
DC = t$_c$
∢**ACB** = γ

S.p.c. (1) el △ aux. isósc. **ABO** (∢AOB = 2γ, OA = OB = r)
Por el △ aux. se conocen los vértices A y B y **O**, centro de la ⊙ circunscrita.
AB = c.

(1) **S. p. c.** es la abreviatura de **"Se puede construir"**

Trazando **CF**$\|$**AB**, **FE** y **FB**, se tiene:

$\sphericalangle$**FCB**$=\beta$ (alt. int. $\|$s).

$\sphericalangle$**CFE**$=90°$ (Teor. Thales, pág. 37) $\therefore$ FG$\perp$AB.

arc. **FB**$=$arc. **CA** (Teor. V, pág. 18).

$\therefore$ **FB**$=$**CA**$=$b

$\sphericalangle$**BFG**$=\sphericalangle$**ACH**$=90°-\alpha$

$\therefore$ $\triangle$FGB$\cong\triangle$CHA y BG$=$AH$=$q

$\therefore$ **CF**$=$**HB**—**BG**$=$p—q

$\sphericalangle$**CFB**$=\sphericalangle$**CFG**$+\sphericalangle$**BFG**$=90°+90°-\alpha=180°-\alpha$

$\sphericalangle$**FBA**$=\sphericalangle$**CAB**$=\alpha$ ($\sphericalangle$s insc. que subtienden arcos $=$s)

$\sphericalangle$FCB$=\sphericalangle$CBA$=\beta$

$\sphericalangle$**CBF**$=\sphericalangle$**CEF**$=\alpha-\beta$ (¿Por qué?).

De lo anterior se desprende que, constituyen un datum: **h_c**, **b_γ** y $\alpha-\beta$; también **r**, **p—q** y $\alpha-\beta$.

Construir un $\triangle$ rectángulo inscrito, dados:

* 213. r, h_c	* 214. r, p	215. c+r, α
216. r+h_c, α	* 217. c, h_c	* 218. p, q
219. a, c+r	220. r—h_c, α	* 221. r, β

Construir un $\triangle$ isósceles, inscrito, dados:

* 222. r, a	* 223. r, h_c	* 224. r, c
* 225. r, γ	226. r, α	* 227. γ, c
228. a+r, γ	229. r, h_b	230. c+r, γ
231. a—r, γ	230. b+r, β	

Construir un $\triangle$ equilátero inscrito, dados:

233. a+r	234. h+r	235. r+ρ
236. a—r	237. h—r	238. r—ρ

Construir un △ inscrito en una ⊙, dados:

* **239.** r, a, b	* **240.** r, a, c	* **241.** r, c, α
* **242.** r, t_c, γ	* **243.** r, α, β	* **244.** r, a, h_a
* **245.** r, c, t_c	* **246.** r, c, t_a	* **247.** r, γ, t_a
* **248.** r, a, h_c	* **249.** r, p, c	* **250.** r, h_c, t_c
* **251.** r, p, q	* **252.** r, a, γ	* **253.** r, h_c, γ
254. $r, b-c, \gamma$	**255.** $r, b-c, \alpha$	**256.** $r, a, b+c$
* **257.** r, h_b, a	**258.** $r, a, \alpha-\beta$	**259.** $r, h_c, \alpha-\beta$
* **260.** r, c, h_a	* **261.** $r, a+b+c = s, \gamma$	**262.** $r, b+c, \beta$
263. $r, a+b-c = d, \gamma$	**264.** $r, b+c, c$	**265.** $r, a.b=d, c$
* **266.** r, a, t_b	**267.** $r, a+b, \gamma$	**268.** $r, a+b+c = s, \alpha$
* **269.** $r, a\ t_a$	**270.** $r, a+b, \alpha$	**271.** $r, b, \alpha-\beta$
* **272.** r, α, h_c	**273.** $r, b_\gamma, \alpha-\beta$	**274.** $r, p-q, a$
275. $r, a+b, c$	**276.** $r, h_a\ \alpha-\beta$	**277.** $r, h_c, p-q$
278. $r, a+b, p-q$	* **279.** $r, h_c\ b_\gamma$	**280.** $r, t_c, \alpha-\beta$
281. r, h_a+h_b, γ	* **282.** r, ρ_a, α	

Construir un cuadrilátero inscriptible, dados:

* **283.** r, a, b, c	* **284.** r, a, c, e	* **285.** r, a, b, ε
* **286.** r, a, b, α	* **287.** r, a, b, f	* **288.** r, a, e, ε
* **289.** r, a, α, β	* **290.** r, a, e, f	* **291.** $r, e, \alpha, \varepsilon$
292. r, a, c, α	**293.** r, a, γ, δ	**294.** r, e, f, ε
* **295.** $a, b, e, f,$	**296.** a, b, e, ι	* **297.** $e, f, \sphericalangle(ae), \sphericalangle(b,e)$
* **298.** a, b, e, α	**299.** $a, c, e, \beta = d, \gamma$	**300.** $a, c, \sphericalangle(ea), \sphericalangle(af)$
* **301.** a, b, f, β	**302.** $a, b, e, \sphericalangle(ce)$	**303.** $e, f, \alpha, \varepsilon$

* **304.** Construir un △ ABC tal, que **AB**=7 cm., **BC**=8 cm., **AC**=10 cm. e inscríbasele la circunferencia. Calcular los segmentos determinados sobre los lados por los puntos de tangencia.

* **305.** En un △ ABC, AB=6 cm, AC=5 cm, BC=4 cm. Construir la ⊙ inscrita y la circunferencia ex inscrita tangente

al lado a. Calcular los segmentos determinados sobre cada uno de los lados por los vértices y los puntos de tangencia.

306. En un cuadrilátero inscrito ABCD, al trazar sus diagonales, se tiene que los ∢s BAC=41°, ∢ CAD=33°, ∢ ACD=63°. Se pide calcular: 1º los arcos subtendidos por los lados; 2º los ∢s interiores del cuadrilátero; 3º los ∢s formados por la diagonal BD con los lados; 4º El ∢ opuesto BC que forman las diagonales al cortarse; 5º El ∢ bajo el cual la tangente en A corta a CD prolongado.

307. Se dan en magnitud y posición la ⊙ inscrita y una de las ⊙s ex-inscritas de un △ABC. Construir el triángulo.
Contruir un △, dados: ρ, c β. (Fig. 98).

Análisis:

Sea **ABC** el △ pedido.
En él se conoce:
OD$=\rho$
AB$=$c
∢ABC$=\beta$

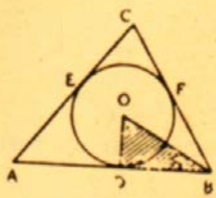

Fig. 98

S. p. c. el △ aux. **ODB** (**OD**$=\rho$, ∢**D**$=90°$, ∢**OBD**$=\frac{1}{2}\beta$)

Por el △ aux. se conoce el vértice **B** y el centro **O** de la ⊙ inscrita.

Se describe ⊙ (O, ρ).

Ls. Gs. para **A** $\left\{\begin{array}{l}\text{1.º Prolongación de } \mathbf{BD \rightarrow D}.\\ \text{2.º } \odot\ \mathbf{(B, c)}.\end{array}\right.$

Ls. Gs. para **C** $\left\{\begin{array}{l}\text{1.º Tangente } \mathbf{AEC}\text{, trazada desde } \mathbf{A};\\ \text{2.º Tangente } \mathbf{BFC}\text{, trazada desde } \mathbf{B}.\end{array}\right.$

Construir un $\triangle$ rectángulo circunscrito, dados:

308. ρ, a
309. ρ, h_c
310. ρ, β
311. ρ, $a+b=s$
312. ρ, $a-b=d$
313. ρ, ρ_c

Construir un $\triangle$ equilátero circunscrito, dados:

314. ρ
315. h
316. $p+\rho$
317. $p-\rho$
318. $h-\rho$
319. $h+\rho$

Construir un $\triangle$ isosceles circunscrito, dados:

* 320. ρ, c
* 321. ρ, γ
* 322. ρ, h_c
* 323. ρ, α

324. α, $h_c-\rho$
325. α, $p+\rho$

Construir un $\triangle$ circunscrito, dados:

* 326. p, c, α
* 327. ρ, α, β
* 328. ρ, a, h_c
* 329. ρ, b, α
* 330. p, h_c, β
* 331. ρ, p, β
* 332. ρ, p, h_c
* 333. ρ, a, h_b
* 334. ρ, h_c, b_γ
* 335. ρ, c, γ
* 336. ρ, $s-c$, α
* 337. ρ, $s-b$, α

338. ρ, $a-b$, γ
339. ρ, s, γ
340. ρ, a, $s-b$
341. ρ, b_γ, $\alpha-\beta$
342. ρ, $b+c\text{-}a$, β

* 343. ρ, $a+b.c$, γ

Construir un $\triangle$ circunscrito, dados:

* 344. c, h_a, $s-b$
* 345. c, $s-b$ β
* 346. h_c, $s-c$, γ
* 347. α, β, $s-a$
* 348. ρ, $s-a$, $s\text{-}b$
* 349. ρ, a, $s-b$

350. $s-b$, $s-c$, β
351. $s-a$, $s\text{-}b$, γ

* 352. γ, $s-c$, h_c

Construir un $\triangle$ dados:

* 353. ρ_a, $s-b$, $s.c$
* 354. ρ_b, $s-b$, b
* 355. ρ_a, s, b
* 356. ρ_a, c, β
* 357. ρ_c, h_a, β
* 358. ρ_a, s, c

359. ρ_b, a, $s-a$
360. ρ_a, α, β
361. ρ_b, s, a

* 362. ρ_b, s, γ
* 363. ρ_c, s, h_a

364. ρ_c, s, h_b

* 365. ρ, ρ_a, α
* 366. ρ_a, ρ_b, α
* 367. ρ_a, ρ_b, s

368. ρ_a, ρ_b, $s-c$
369. ρ_a, ρ_c, $s-c$

* 370. ρ, ρ_c, c

371. ρ_a, ρ_b, c

* 372. ρ, b, ρ_b
* 373. ρ_b, ρ_c, a

374. ρ_a, ρ_b, $a+b$
375. c, ρ_a, $a+b$
376. α, β, $\rho_b-\rho$
377. c, $\rho_c-\rho$, $a-b$
378. $\rho_c+\rho$, c, $\alpha-\beta$

En torno del vértice B, están todos los datos del trapecio.

Construir un trapecio circunscriptible, dados

* **379.** ρ, a, b,	**380.** ρ, b, d	* **381.** a, b, β
* **382.** a, b, e	**383.** a—c, α, β	**384.** b, α, β

Construir un trapecio isósceles circunscriptible, dados:

* **385.** ρ, b	**386.** a, α	* **387.** a, c
388. ρ, a+c	* **389.** d, a—c	**390.** γ, a—c
391. b, c	**392.** b, α	**393.** c, γ

INDICACIONES PARA LA CONSTRUCCION DEL TRAPEZOIDE

Cuando se conocen las diagonales y el ángulo que forman, se pueden trasladar estas diagonales paralelamente hasta los vértices **B** y **C** respectivamente.

Haciendo **CE**$\#$**DB** y uniendo **A** con **E**, se tiene en el **$\triangle$ACE:**

$\sphericalangle$**ACE**$=\varepsilon$

AC $=$ **e**

CE $=$ **f**

En el $\triangle$ **ABE** se tiene:

AB$=$**a**

BE$=$**c**

$\sphericalangle$**ABE**$=$**4R—(**$\sphericalangle$**ABC** $+\sphericalangle$**EBC)**$=$**4R—** $(\beta+\gamma)=\alpha+\delta$, porque $\sphericalangle$EBC$=\sphericalangle$BCD$=\gamma$.

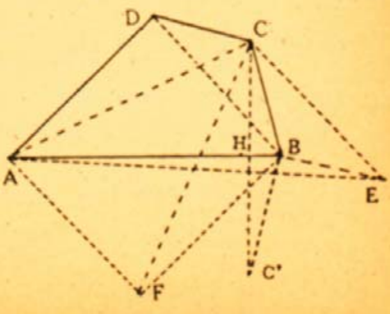

Fig. 102

Haciendo **BF**$\#$**DA**, se tiene en torno del vértice **B**,
BA$=$**a**; **BC**$=$**b**; **BE**$=$**c**; **BF**$=$**d**
$\measuredangle$**ABC**$=\beta$; $\measuredangle$**CBE**$=\gamma$
$\measuredangle$**ABF**$=\alpha$; $\measuredangle$**EBF**$=\delta$

Trazando **CF**, se forma el $\triangle$**CBF** en el cual:
CB$=$**b**; **BF**$=$**d**; $\measuredangle$**CBF**$=\alpha+\beta$

Prolongando la altura **CH** en **HC'**$=$**HC** y trazando **C'B**, el triángulo **CBC'** es isósceles; se tiene $\measuredangle$**HBC'**$=$ $\measuredangle$**HBC**$=\beta$; y, por lo tanto, $\measuredangle$**FBC'**$=\measuredangle$**HBC'**$-\measuredangle$**HBF**$=$ $\beta-\alpha$.

Construir un cuadrilátero circunscriptible, dados:

* **394.** a, b, c, α	* **395.** a, b, c, e	* **396.** a, α, β, γ
397. ρ, a, f, α	* **398.** a, b, e, γ	**399.** a, b, β, γ
* **400.** ρ, a, e, α	**401.** ρ, a, β, γ	**402.** ρ, a, b, β
403. ρ, a, α, γ	**404.** ρ, e, α, β	**405.** ρ, a, b, α
* **405.** ρ, b, c, β	**407.** ρ, a$+$d, α, β	**408.** ρ, a$-$b, γ, δ

Construir un cuadrilátero inscriptible y circunscriptible, dados:

* **409.** a, α, β	* **410.** ρ, a, γ	**411.** ρ, α, β

EJERCICIOS DE APLICACION

a) DEMOSTRAR LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

• 412.—Unanse los vértices de un △**ABC** con el punto de concurrencia de las transversales de gravedad. Probar que los tres △s formados por las rectas de unión y los lados, son equivalentes.

413.—Se da un trapecio **ABCD**; unir los extremos de uno de los lados no paralelos con el punto medio del otro. Demostrar que el △ que se forma es equivalente a la mitad del trapecio.

• 414.—Demostrar que las tres transversales de gravedad de un △ lo dividen en seis triángulos equivalentes.

415.—Dado un paralelógramo **ABCD**, únanse los cuatro vértices con un punto de una de las diagonales. Probar que los cuatro △s que se forman son equivalentes dos a dos.

416.—En un trapezoide **ABCD**, unir los dos extremos de uno de sus lados con el punto medio del lado opuesto y los extremos de éste, con el punto medio del primero. Probar que la suma de los dos △s que forman las rectas de unión, es equivalente al cuadrilátero dado.

417.— Un cuadrilátero **ABCD** es equivalente a un triángulo en que dos de sus lados son las diagonales del cuadrilátero, siendo el ∢ comprendido entre ellos, el mismo que forman las diagonales en el cuadrilátero.

418.—Si se une un punto situado en el interior de un paralelógramo con cada uno de sus vértices, la suma de las áreas de los △s que tienen por bases dos lados opuestos, es equivalente a la suma de los otros dos.

419.—Probar que en un △ rectángulo, el rectángulo que tiene por lados la hipotenusa y la altura correspondiente a ella, es equivalente al rectángulo formado por los catetos.

420.—Probar que un triángulo cuyos vértices están situados en los puntos medios de tres lados de un cuadrilátero, es equivalente a la cuarta parte de este cuadrilátero.

421.—Un triángulo rectángulo es equivalente al rectángulo formado por los segmentos determinados por el punto de contacto de la circunferencia inscrita, sobre la hipotenusa.

422.—El producto de los radios de la circunferencia inscrita y de las 3 ex-inscritas a un triángulo, es equivalente al cuadrado del área del triángulo. NO.

423.—En un $\triangle$ rectángulo **ABC** probar la relación:
$c^2=(a-b)^2+2ab$.

424.—En un rectángulo la suma de los cuadrados de los 4 lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

425.—Demostrar que las distancias de un punto cualquiera de una transversal de gravedad de un $\triangle$ a los lados que parten del mismo vértice que ella, son inversamente proporcionales a esos lados.

b) PROBLEMAS

• **426.**—Transformar un rectángulo de lados **a** y **b**, en un triángulo de lado **c**.

• **427.**—Dividir un triángulo **ABC** en tres partes equivalentes, por medio de transversales que partan de un punto **P** situado sobre el lado **AB**.

428.—Dado un paralelógramo **ABCD**, dividirlo en dos partes equivalentes, por una perpendicular a una de las bases.

429.—Dado un paralelógramo **ABCD**, dividirlo en dos partes equivalentes por una transversal que tenga una dirección dada.

430.—Dado un trapecio **ABCD**, dividirlo en dos partes equivalentes por una recta que parta del punto medio de uno de los lados no paralelos.

431.—Dado un cuadrado **ABCD**, determinar sobre la diagonal **AC** un punto **P** tal que, uniéndolo con los vértices **A**, **D** y **B**, el cuadrado resulte dividido en tres partes equivalentes.

* **432.**—Añadiendo 5 m. al lado de un cuadrado, el área aumenta en 225 m^2. Calcular el lado del cuadrado.

433.—El área de un sitio rectangular es 500 m^2. Si el largo es el quíntuplo del ancho. Calcular las dos dimensiones.

***434.**—Calcular el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 50 metros y uno de los catetos 40 metros.

435.—Idem de un $\triangle$ isósceles cuya altura $h_c = 16$ m. y uno de los lados iguales 20 m.

436.—La diferencia de las bases de un trapecio es 8 metros. ¿Cuánto mide cada base si la altura es de 20 m. y el área 500 m^2?

* **437.**—El perímetro de un rombo es 40 m., una de las diagonales mide 16 m. ¿Cuál es el área?

438.—El perímetro de un rombo es 96 m.; su área es 216 m^2. Si uno de sus ángulos mide 60° ¿cuánto mide cada una de las diagonales?

Indicación: Ver ejercicio 125 de Geom. de Omer Cano, 3.er A.

439.—La diagonal de un patio rectangular mide 20 metros y uno de los lados es igual a 16 m. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm. por lado se necesitan para embaldosarlo?

440.—En un punto A dos muchachos actúan sobre un cuerpo, respectivamente, en dirección vertical y horizontal con las fuerzas de 36 y 48 Kg-p. ¿Qué fuerza debe ejercer un hombre para anular a los muchachos, si se suponen las fuerzas en un mismo plano?

441.—Calcular el área de: a) un $\triangle$ isósceles dados $c = 6$ cm. y uno de los lados iguales $= 5$ cm.; b) de un # oblicuo cuyos lados contiguos miden 12 y 8 m. respectivamente y el $\sphericalangle$ comprendido entre ellos $= 30°$.

442.—En un rectángulo $a = 60$ m; $b = 50$ m. Si el lado a se disminuye en 20 m. ¿En cuánto habrá que aumentar el lado b para que el área no varíe?

443.—En un rectángulo el lado menor $= 6$m; el mayor $= 8$m; sobre su diagonal se construye un $\triangle$ equivalente. Averíguese la altura de este $\triangle$ correspondiente a la diagonal.

* **444.**—Dos $\odot$s tangentes exteriormente tienen, respectivamente, por radios: $r_1 = 12$ cm. y $r_2 = 3$ cm. Calcular lo que mide la tangente común exterior de las $\odot$s.

445.—En un plano inclinado se encuentra una esfera de 50 kg. ¿Cuál es la fuerza mínima que deberá ejercer una persona para sostener la esfera evitando que resbale, si el plano ofrece una resistencia de 40 kg. y sin tomar en cuenta el roce? Hágase una figura.

446.—En cada uno de los lados de un hexágono regular cuyo lado mide $4\sqrt{3}$ cm., se construye un $\triangle$ equilátero. Unanse los vértices exteriores de estos $\triangle$s y calcúlese el área del nuevo hexágono regular que así se obtiene.

ALGUNOS PROBLEMAS SOLUCIONABLES POR LA MATERIA DE 4º AÑO DE HUMANIDADES PROPUESTOS EN EL BACHILLERATO, EN DIVERSOS AÑOS Y CIUDADES DEL PAIS.

1.—Demostrar que al prolongar en el mismo sentido los lados de un hexágono regular en una magnitud **r** el nuevo hexágono que se obtiene uniendo los extremos, tiene el área triple que el primero.

Punta Arenas 1952.

2.—Demuestre que la superficie de un triángulo se obtiene por cualquiera de estas fórmulas:

$$S = s \cdot \rho; \quad S = (s - a) \cdot \rho_a = (s - b) \cdot \rho_b = (s - c) \cdot \rho_c$$

y deduzca que: $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\rho_a} + \dfrac{1}{\rho_b} + \dfrac{1}{\rho_c}$

Temuco.

3.—Se pide demostrar que en cualquier triángulo

si $a > b$

$a - b < p - q$

Talca.

4.—Dividir un $\triangle$ **ABC** en tres partes equivalentes por rectas que partan de un punto **P** situado sobre **AB**.

5.—Construir un $\triangle$ dados: $a + b = s$, ρ, c.

Valparaíso.

6.—Construir un rombo dados: el lado y la suma de las diagonales.

Temuco 1955.

7.—Se da un ángulo y entre sus lados, una $\odot$ tangente a ellos. Trazar una recta tangente a esta circunferencia, de modo que la parte de ella comprendida entre los lados del ángulo, tenga una longitud dada.

8.—Construir un triángulo isósceles dados: h_c, t_a.

Temuco 1955.

9.—En un rectángulo ABCD se baja la $\perp$ **CE** a la diagonal **BD;** se traza **CF** bisectriz del ángulo ACE. Calcular el $\sphericalangle$**BFC** en función de epsilon.

Santiago 1951.

10.—Construir un triángulo dados: h_a, h_b, $\sphericalangle$ (t_α, b)

Talca 1951.

11.—Demuestre que si un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia tiene dos lados paralelos, cada uno de los otros dos lados se ve desde el centro de la circunferencia bajo ángulo recto.

Temuco.

12.— En un triángulo $2s = 50$ cm y se ha trazado la circunferencia inscrita. ¿Qué longitud tienen los lados del triángulo si el punto de tangencia en el mayor de ellos lo divide en segmentos de 8 y 12 cm?

13.—Dado un punto **A.** Se pide establecer el L. G. de los puntos **A'** simétricos de **A** con respecto a todas las rectas que pasan por otro punto dado: **M.**

Temuco.

14.—Demuestre que si dos ángulos opuestos de un cuadrilátero son rectos, las bisectrices de los otros dos, son paralelas.

Temuco, 1956.

15.—Construir un $\triangle$ dados: c, h_c, $\sphericalangle$ (t_a, t_b)

16.—En una circunferencia dada, dibujar tres circunferencias congruentes que sean tangentes interiores con la circunferencia dada y tangentes entre sí.

17.—Demuéstrese que la suma de los cuadrados de 3 números impares consecutivos, aumentada en una unidad, es divisible por 12 y no por 24.

18.—¿Qué ángulo forman el horario y el minutero, cuando marcan la 1 horas 20 minutos?

19.—Se da un punto P en el interior de un triángulo **NOM**.
Se dibuja el punto **P'** simétrico de **P** respecto a OM.
el punto **P''** simétrico de **P'** respecto a **ON**.
el punto **P'''** simétrico de **P''** respecto a **OM**.
y así sucesivamente... Demostrar que los puntos P, P', P'', P''', P''''... pertenecen a un circunferencia, que se pide determinar.

Talca, 1955

20.—Construir un △ dados: vértice **A**, centro de gravedad **G**, ortocentro **H**; y sabiendo que en todo triángulo, el ortocentro, el centro de gravedad y el centro de la circunferencia circunscrita son colineales.

21.—En un △ **ABC** inscrito en una circunferencia se trazan las alturas, prolongándolas hasta cortar la circunferencia. Determine el valor de los ángulos del △ que resulta uniendo los puntos de intersección de las alturas con la ⊙.

22.—Dados dos puntos **A** y **B** y una circunferencia, trazar una tangente a la circunferencia de modo que equidiste de **A** y de **B**.

23.—Construir un triángulo dados: $s-c$, γ, h_a.

24.—Sobre la prolongación del diámetro **AB** de un círculo, hallar un punto **P**, tal que las tangentes trazadas desde él al círculo, formen un ángulo dado: δ.

25.—Construir un cuadrilátero circunscriptible dados: b, c β, ρ.

26.—Construir un pentágono, dados los puntos medios de los lados.

27.—Inscriba en una circunferencia dada, un triángulo del cual conocemos el lado c y de modo que t_c tenga dirección dada y pase por un punto dado.

Temuco, 1956.

28.—En una circunferencia se da un diámetro **AB** y un radio cualquiera **OC**. Se traza **CD** $\perp$ **AB** y sobre **OC** se aplica **OE=CD**.

Determinar el L. G. de los puntos "**E**" cuando **OC** gira en torno al centro **O.**

Santiago, 1955.

29.—Demuestre que si un # admite una $\odot$ circunscrita, dicho # es un rectángulo; y que el cuadrilátero que resulta de trazar las tangentes a la $\odot$ en los vértices de dicho #, es un rombo.

Talca, 1955.

30.—En un triángulo **ABC**, $\alpha - \beta = 90^\circ$. Demostrar que un ángulo formado por la bisectriz **CD** del ángulo γ con el lado **AB**, vale 45°.

31.—Construir un triángulo rectángulo de hipotenusa dada **AB** y en ella el punto de intersección de b_γ.

32.—Construir un $\triangle$ dados: γ, ρ, c.

33.—Construir un trapezoide dados: b, d, e, f, ε.

34.—Dos $\odot$s son tangentes exteriormente en **C**; una tangente común exterior las toca en **A** y en **B**, respectivamente. Unase **C** con **A** y **B**. Probar que el $\measuredangle$**ACB**=90°.

Santiago, 1950.

35.—Demostrar que si por los puntos de intersección **A, B,** de dos circunferencias se trazan dos secantes cualesquiera: **CAC'** y **DBD'**, las cuerdas **CD** y **C'D'** son paralelas.

36.—Circunscriba a un triángulo dado, un triángulo equilátero. ¿Cuántas soluciones?

37.—Se da una $\odot$ y dos puntos **A** y **B** que no pertenecen a ella. Se pide encontrar dos puntos **P** y **P'** en la $\odot$, de modo que el triángulo **ABP** tenga superficie máxima, y $\triangle$ **ABP'** superficie mínima con respecto a los demás triángulos de base **AB** y vértice sobre la circunferencia.

38.—Construir un trapecio, dados: e, f, ε, a+b.

39.—Demuestre que si un cuadrilátero tiene sus diagonales perpendiculares,, las sumas de los cuadrados de los lados opuestos, son iguales entre sí,

40.—Las bisectrices de γ y γ' (γ' exterior adyacente a γ) de un $\triangle$ **ABC**, encuentran a la $\odot$ circunscrita en **M** y **M'**. Se pide probar que **MM'** es la simetral de **AB**.

41.—Construir un $\triangle$ isósceles dados: h_c; t_a.

42.—En los lados **AD** y **DC** de un cuadrado **ABCD**, se aplican trazos iguales **AE**$=$**DF**. Demuestre que **BE**$\perp$**AF**.

Temuco, 1954.

43.—Dados dos trazos iguales, en posición cualquiera, determinar un punto que, unido con los extremos de cada trazo, determine dos triángulos congruentes.

44.—La secante que pasa por los puntos de contacto de la $\odot$ inscrita, en un triángulo rectángulo, determinados en la hipotenusa y en un cateto, determina sobre el otro cateto un segmento igual a la distancia de un vértice del triángulo a cada uno de los puntos de tangencia.

45.—Construir un paralelógramo dados: a, b, ε.

46.—Demostrar que un triángulo, y el que resulta uniendo los puntos medios de sus lados, tienen el centro de gravedad común.

47.—Demostrar que si dos $\odot$s son tangentes entre sí, su punto de contacto y los puntos de contacto de dos tangentes paralelas uña a cada una de las $\odot$s están en línea recta.

48.—En una $\odot$ dada se construye sobre las cuerdas que parten de un punto fijo de ella, triángulos equiláteros.

¿Cuál es el L. G. de los terceros vértices de estos triángulos?

49.—Construir un triángulo dados el centro de la circunferencia inscrita y los centros de dos $\odot$s ex inscritas.

50.—Construir una circunferencia de radio dado, que sea tangente a una recta dada y a una circunferencia dada.

51.—Construir un triángulo, dados los centros de las 3 circunferencias ex inscritas.

52.—Un trazo de magnitud dada **m** se mueve entre los lados de un ∢ recto, deslizándose sus extremos por los lados del ángulo. Encontrar el L. G. del punto medio del trazo **m.**

53.—Dados un triángulo **ABC** y una recta **L,** se pide encontrar un punto **M** sobre **L** tal que los triángulos **ABM** y **ACM** sean equivalentes.

54.—Dados dos puntos **A** y **B** y dos trazos **"a"** y **"b"**, trazar una recta de modo que las distancias de **A** y **B** a ella, sean respectivamente **a** y **b.**

Discusión.

55.—Inscribir un # en un cuadrilátero, de modo que su centro sea un punto dado **M.**

56.—Demuestre que si las bisectrices de los ángulos interiores de un cuadrilátero cualquiera forman otro cuadrilátero, éste es inscriptible.

57.—Dadas dos ⊙s concéntricas y un punto **P** situado fuera de ellas, se pide trazar desde este punto una secante, de modo que la cuerda determinada en la circunferencia mayor, tenga longitud triple de la determinada en la circunferencia menor.

58.—En una circunferencia se traza una cuerda fija **AB** y una variable **AC**; sobre estas dos cuerdas se contruyen #s. Determinar el L. G. de los centros de estos #s.

59.—Deduzca el L. G. de los puntos cuyas distancias a dos rectas ||s dadas tienen una suma dada **s.**

60.—En una ⊙ se da la cuerda AB; en uno de los arcos que le corresponden se sitúa un punto **P** que se une con **A** y **B** mediante rectas a las cuales se levantan en **A** y **B** perpendiculares que se cortan en **Q**. ¿Cuál es el L. G. de **Q** cuando **P** recorre su arco? ¿Cuál es el L. G. del punto medio de **PQ** y el del punto medio de la recta que une los puntos medios de **AP** y **BP?**

61.—Inscribir en un cuadrilátero un # que tenga una diagonal de magnitud dada. Critique, y si falta algún dato, agréguelo.

62.—En un triángulo, las alturas $\mathbf{h}_a$ y $\mathbf{h}_b$ se cortan formando un ángulo ε: si AB es constante y fijo, determinar el L. G. del vértice **C**; y el L. G. del centro de gravedad del triángulo.

Talca, 1950.

63.—Los lados contiguos de un cuadrilátero circunscriptible miden 6 y 9 cm. y la suma de los otros dos 23 cm. ¿Cuánto miden los lados? ¿Cuál es el valor máximo de las diagonales para que el cuadrilátero exista?

64.—Sobre **AB**=**c**, se construye el arco capaz de 135°. Por un punto **P** del arco se traza una recta perpendicular a **AB**; y en ella a partir de **P**, se aplican **PQ**=**PQ'**=**c**. ¿Cuáles son los Ls. Gs. de **Q**. y de **Q'**?

65.—Se conocen dos circunferencias y una recta **L**. Trazar **L'**‖**L** de modo que **L'** determine en las dos circunferencias, cuerdas a y b tales que **a**+**b**=**s** (s=trazo dado).

Discusión.

66.—Sobre los catetos **BC** de los triángulos rectángulos de hipotenusa **AB** determinada en magnitud y posición, se construyen triángulos isósceles cuya base es el cateto **BC** y que tienen igual ángulo basal δ, dado.

¿Cuál es el L. G. del vértice de dichos triángulos isósceles, cuando **C** recorre la semicircunferencia de diámetro **AB**?

67.—Construir un cuadrilátero que sea inscriptible y circunscriptible, conociendo la distancia del centro de la ⨀ circunscrita a los vértices.

Santiago, 1952.

68.—Determinar el L. G. de los centros de las circunferencias tangentes a una ⊙ (O, r) si el radio de dichas circunferencias es $\frac{4}{5}$ r.

69.—Se da una ⊙ y un punto fuera de ella. Se pide trazar, con centro en este punto, una ⊙ secante con respecto a la circunferencia dada, de modo que determine en ella una cuerda de longitud dada.

Discusión.

70.—En un △ isósceles dado, determinar el L. G. de los puntos cuyas distancias a la base sea igual a la suma de sus distancias a los lados iguales.

Temuco, 1954.

71.—De los cuadriláteros con simetría axial, ¿cuáles son inscriptibles y cuáles circunscriptibles? Justifique sus opiniones y enumere las propiedades más interesantes de tales cuadriláteros.

Talca, 1953.

72.—Una circunferencia se divide en **n** partes (n impar); se une punto por medio. ¿Cuánto suman los ángulos cóncavos del polígono estrellado?

73.—Dividir un triángulo **ABC** en tres partes equivalentes mediante dos rectas que partan de un punto **P**, situado sobre **AB**.

74.—Dado un △ ABC se unen los puntos medios D y F de los lados AC y BC; se traza la altura $CH = h_c$ y se une D con H. Por último se traza la ∥ FE al lado AC. Demuestre que el cuadrilátero DHEF es un trapecio isósceles.

75.—Construir un triángulo isósceles dados γ, t_a.

76.—En un triángulo, el ángulo α es $< 45^\circ$ y $90^\circ > \beta > 45^\circ$ Demuestre que: $p < h_c < q$.

77.—Demostrar que las diagonales de un paralelógramo son concurrentes con las de otro # inscrito en él.

78.—Dado un triángulo **ABC**, cuyo lado **AB** está en una recta dada **L**, se pide ubicar otro $\triangle$ **A'B'C'** congruente con el primero y de modo que **A'B'** homólogo de **AB** esté situado en la recta **L'** el vértice **C'** a distinto lado de **L** que el vértice **C** y **CC'** igual a un trazo dado.

Discusión.

79.—Calcule la superficie de una tabla de 3,5 m por 4,5 pulgadas. ¿Cuántas varas cuadradas son?

80.—Construir un triángulo, dados: c, ρ_a, ρ_b.

81.—Construir un triángulo, dados ρ_a, a, b—c.

82.—Construir un paralelógramo, dados e, h_a, h_b.

83.—Desde un punto P situado en el interior de un triángulo se trazan las distancias a los lados: d_a, d_b, d_c.

Demostrar que: $\dfrac{d_a}{h_a}+\dfrac{d_b}{h_b}+\dfrac{d_c}{h_c}=1$

84.—Demuestre que al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, se forma un paralelógramo.

85.—Construir un rombo dados: α, ρ.

86.—En un cuadrilátero **ABCD** inscrito en una circunferencia la diagonal **AC** forma con los lados **AB** y **AD**, ángulos iguales de magnitud **u**, y con la diagonal **BD**, un ángulo **v** opuesto al lado **AD**. Se pide determinar los ángulos del cuadrilátero en función de **u** y **v**. Ej.: $u=45^o$ y $v=70^o$.

87.—Demostrar que en un triángulo rectángulo $t_a+t_b>3t_c$.

88.—Construir un cuadrilátero, conociendo los cuatro lados y sabiendo que la diagonal "**e**" bisecta el ángulo α.

89.—Construir un triángulo isósceles dados: h_a, t_a.

90.—Construir un triángulo dados: c, h_c, t_a.

91.—Construir un triángulo dados: ρ, $s-b$, ρ_a, ó b, ó c.

92.—Construir un triángulo conociendo dos segmentos de altura adyacentes al vértice y el tercer segmento de altura, adyacente al lado.

93.—Sobre el lado **AB** de un triángulo equilátero, como diámetro, se dibuja hacia adentro una semicircunferencia que corta a **AC** en **D** y a **BC** en **E**. Y las rectas **AE** y **BD** se cortan en **K**. ¿Qué se puede decir de **AK** con respecto a **KD**? ¿De qué naturaleza son los $\triangle$s **ADK, DEK, CDE**?

94.—Construya un trapecio dados: e, f, α y la mediana. ¿Qué condiciones deben cumplir las diagonales y la mediana para que el problema tenga solución?

95.—Demuestre que en un cuadrilátero, los centros de las circunferencias circunscritas a los 4 triángulos determinados por las diagonales son los vértices de un #. Determinar el valor de los ángulos del # si ε, del cuadrilátero, vale 80°.

96.—Construir un triángulo dados: t_a, t_b $\sphericalangle (t_a, b)$.

97.—Construir un triángulo dados: $p-q$, h_c, t_b.

98.—Demostrar que en todo triángulo: $\frac{2}{h_c} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b}$

99.—Demuestre que en todo triángulo rectángulo se verifica la relación: $(c+h_c)^2=(a+b)^2+h_c^2$ y utilícela para construir un $\triangle$ rectángulo dados: $c+h_c$, $a+b$.

Valparaíso, 1952.

100.—Demuestre que si en un cuadrilátero, la suma de dos ángulos opuestos, es igual a la suma de los otros dos, se le puede circunscribir una circunferencia.

Valparaíso, 1952.

101.—Dada una circunferencia y un punto exterior **P**, desde **P** trazar una secante que quede dimidiada por la circunferencia.

102.—Construir un # dados: h_a, h_b, c.

103.—Demostrar que el punto medio del arco menor **AB** de la ⊙ circunscrita a un △ **ABC**, equidista de **A, B** y del centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

Aplíquese esta propiedad para construir un △ isósceles, dados: r, y la distancia entre los centros de las ⊙s inscrita y circunscrita.

104.—Dado un ángulo **A** se hace **AB=AC** y **AB'=AC'**. Las rectas que unen **B** con **C'** y **B'** con **C** se cortan en **M**. Demostrar que **AM** es bisectriz del ∢**A**.

105.—Construir un △ dados: a+b, c, ρ.

106.—Construir un △ dados: c, p—q, t_c. Discusión.

107.—Construya un trapecio, dados: α, la mediana y las longitudes de las perpendiculares **DE=n** y **CF=m** bajadas desde **C** y **D** a los lados no paralelos **AD** y **BC**. Talca, 1955.

108.—Construir un trapecio dados: a, c, d, ∢ (e, f).
Santiago, 1955.

109.—Dados un círculo y un punto **P** fuera de él, trazar una secante que corte la ⊙ en dos puntos **X** e **Y** de modo que **PX** y **XY** sean catetos de un △ rectángulo de hipotenusa **2r**.

110.—Se da un # indeterminado que tiene fijos el ángulo α y la base **AB**. Buscar el L. G. de la intersección de las diagonales.

111.—Construya un triángulo isósceles del que se conocen el punto medio de la base y los centros de las circunferencias ex-inscritas correspondientes a la base y a un lado.
Temuco, 1954.

112.—Enumere todos los triángulos y todos los cuadriláteros de simetría central o axial indicando en cada caso cuántas y cuáles son esas simetrías. Talca, 1943.

113.—Se da un triángulo **ABC** y se completa en el # **ACBD** de manera que **AB** sea diagonal. Demuestre que las rectas que

unen C con los puntos medios de AD y BD trisectan el lado AB del triángulo dado.

114.—Construir un trapecio dados: a, b, c, ε.

115.—Evaluar la expresión:

$$\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}-\frac{4\,ab}{4b^2-x^2}$$

si $x=\dfrac{ab}{a+b}$ +

(Respuesta: O) Temuco, 1956.

116.—Resuelva:

$$\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}=\frac{a(x-b^2)+b(a^2-x)}{a(x-b^2)-b(a^2-x)}$$

(Respuesta: $x = a^2+b^2$)

Temuco, 1956.

117.—Definir m y n de modo que el polinomio $(x^2-3x+mx+n)$ sea divisible por (x^2-2x+4). Respuesta: $m=-1$; $n=4$.

118.—Resuelva y verifique:

$$\frac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=\frac{\dfrac{2}{x}}{2-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x}}}$$

(R. $x=-1$). Talca, 1953.

119.—Se supone una yarda = 914 mm. ¿Cuál es la menor distancia que puede expresarse mediante un número entero de metros y un número entero de yardas, simultáneamente?

Santiago, 1937.

120.—Resolver:

$$\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}-1=abc-x\,(a+b+c)$$

Sabiendo que: $a=b+c$.

121.—40 litros de agua salada contienen 3,4 Kg de sal; ¿cuántos litros de agua dulce hay que mezclar para que 40 litros contengan 2 Kg de sal?

122.—Resuelva:

$a(1-x)-b(1-x)=-c(1-x)$ Rta.: $x=1$).

123.—Reducir a la expresión más simple:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)-\left(\frac{2}{abc}+\frac{b+c}{a^2bc}+\frac{c+a}{ab^2c}+\frac{a+b}{abc^2}\right)$$

Resp.: 0

124.—Resuelva:

$$\frac{a}{x-b^2}+\frac{b}{x+a^2}=\frac{a+b}{x-2ab}$$

Respuesta: $x=\dfrac{2b^3+ab^2+a^2b-2a^3}{3a+b}$

125.—Si $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{6}$, ¿Cuál es el valor de la expresión:

$$\frac{a-2b}{3b}+\frac{2a}{a+b}\ ?$$

126.—Un comerciante aumenta el precio del metro de un género en un 20 por ciento; pero en una realización posterior lo rebaja en un 30 por ciento, resultando así a \$ 51,40.

¿Cuál era el precio primitivo?

Temuco.

127.—Vendiendo una mercadería en E° 154.700, se ha perdido 9 por ciento. ¿En cuánto habría que venderla para ganar 12%?

Respuesta: E° 190.400.

Temuco. 1956

128.—Una mercadería se vende a un precio determinado que rige hasta los 1000 Kg; el exceso sobre 1000 Kg se vende con 11% de descuento. Si 25 Kg valen E° 80 ¿Cuánto valen 1350 Kg?

129.—Dividir $[(a-b)^4-x^4] : [(a-b+x)]$ y ordenar el cociente.

Santiago, 1937.

130.—Dividir: $\dfrac{a^2+ab}{a^2+b^2} : \dfrac{ab(a+b)^2}{a^4-b^4}$

131.—Un rentista divide su capital en dos partes que son entre sí como 3 : 4, la primera colocada al 5% y la segunda al 4,5% dan, en conjunto un interés anual de E° 165.000.

¿Cuál es el capital?

Respuesta: E°3.500.000

Talca, 1956.

132.—Para medir "l" se emplean 3 unidades diferentes y se obtiene: 7,2; 7,5; 7,8. ¿Cuáles eran dichas unidades medidas en cm, si la longitud "l" vale 2,34 m?

133.—De $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{6}$ y $\dfrac{b}{c} = \dfrac{8}{9}$ deduzca una serie de proporciones y también el valor de **b** y **c** cuando **a** vale 3.

Temuco.

134.—Demuestre que si $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a-b}{b-c}$ también:

$\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}$ y el recíproco.

Punta Arenas, 1952.

135.—Resolver:

$$\frac{x(a+b)^3 + (a^2+b^2)x + 2b\,x}{a^3-b^3} = \frac{a+b+1}{a-b}$$

136.—Dos capitales son entre sí como 2 : 5. **El primer** capital produce en 8 meses lo mismo que el otro en seis meses. ¿Cómo son entre sí los % de interés?

137.—De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ deduzca $(a+b) : \frac{a^2}{a+b} = (c+d) : \frac{c^2}{c+d}$

138.—Se miden 220 m con una unidad que es $\frac{1}{5}$ m y con otra que es de 25 cm.

¿Qué diferencia hay entre las medidas?

Respuesta: 220.

Talca, 1950.

139.—Resolver $$\frac{(x-a)\ \ (x-b)}{(x-c)\ \ (x-d)} = 1$$

Respuesta: $$x = \frac{ab - cd}{(a+b)-(c+d)}$$

140.—¿Qué número hay que agregar a cada término de una fracción para que resulte su valor recíproco disminuído de 1?

141.—Resolver:

$$\frac{\dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} - \dfrac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}}{\dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{4}{2+x}$$

Respuesta: $x = \frac{1}{4}$

142.—Repartir E° 801.000 entre cuatro personas, en razón inversa a sus edades, que son 20, 25, 30 y 40 años.

Talca, 1953.

143.—La suma de la longitud de una circunferencia y de su diámetro es igual a 2 cm. ¿Cuál es el diámetro aproximado en cm?

Valdivia, 1951.

144.—h' obreros hacen un trabajo en **d'** días y **h"** obreros hacen el mismo trabajo en **d"** días. ¿En cuántos días lo harán 2 obreros, uno de cada grupo?

$$\left(x = \frac{h'\,h'' \times d'\,d''}{h'\,d' + h''\,d''}\right)$$

145.—Cinco niños hacen un trabajo en 9 días; seis hombres lo hacen en 3 días. Calcular el tiempo que tardará en hacer ese trabajo un equipo formado por 7 niños y 5 hombres. Los días son de 6 y media horas de trabajo.

146.—Demostrar que:

$(a-b)\,c^2 + (b-c))\,a^2 + (c-a)\,b^2 = -(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$

Aplique dicha identidad para demostrar que:

$ab\,(a-b) + bc\,(b-c) + ca\,(c-a > 0$ si $a > b > c$

147.—Exprese en Kg/cm^2 la unidad inglesa de presión llamada libra/pulg.^{2}.

1 libra = 453.59 grs., 1 pulgada = 25.4 mm.

148.—Mi hijo tiene actualmente 30 años menos que yo; si yo viviera hasta verlo de mi edad actual, alcanzaría a cinco veces la edad que él tiene ahora.

¿Cuál es mi edad actual?

Respuesta: 45 años.

149.—Resolver:

$$5[4[3[2\,(x+1)+1]+1]+1] = 12$$

Respuesta: $x = -\dfrac{193}{120}$

150.—Cierta lámina de metal mide 5 pies 2 pulgadas de largo 2 pies 6 pulgadas de ancho y 0,1 pulgada de grosor, su densidad es $6{,}4 \frac{gr.}{cm^3}$. Un Kg de este metal vale E° 380; calcule el valor de la lámina y el de 1 dm^3 de ella.

1 pie = 12 pulgadas = 30,48 cm.

Talca, 1953.

Respuesta: E° 7412.72; E° 2432.

151.—Un hombre que está en la ciudad, dispone de 9 horas libres. ¿Qué distancia podrá recorrer hacia el campo en un auto que va a $65 \frac{Km.}{h}$, si el viaje de vuelta lo tiene que hacer a caballo a razón de $10 \frac{Km.}{h}$?

Respuesta: 78 Km.

Talca, 1955.

152.—Resolver:

$$\frac{x - \dfrac{x-c}{2}}{x + \dfrac{x-c}{3}} = 1$$

Respuesta: $x = c$

153.—Resolver:

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{x^2-ab}$$

Respuesta: $x = \dfrac{2ab}{a+b}$

154.—Resolver:

$2x(3a+2b)+5x(2a-7b)+3x(a-b) = 19a-34b.$

Respuesta: $x = 1$

155.—Para recorrer s, "A" da saltos de 2,5 m.
"B" de " 1,4 m. y
"C" de " 1 m.

¿Qué largo tiene s si **C** partió a las 12 h. y llegó a las 12.42 a la meta, con 40 saltos por minuto?

Si parten y llegan juntos, ¿cuántos saltos dio cada uno por minuto?

Respuesta: (1,680 m.) **A**... 16 saltos
B... 25 "
C... 40 "

156.—Sea $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ¿Qué relación debe existir entre a, b, c y d para que la expresión sea independiente de **x**?

Respuesta: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

157.—Resolver:

$$\frac{2\ x}{0{,}000625} - \frac{0{,}075\ x-2}{1{,}024} = 0{,}04$$

158.—Un camino de 126 Km de largo, se recorre en 3 horas en automóvil; a 60 $\dfrac{Km}{h}$ al principio, y a 35 $\dfrac{Km}{h}$ después.

¿A qué distancia del punto de partida se redujo la velocidad?

Respuesta: 50 Km 400 m.

159.—Si una persona destina su capital a pagar una deuda, le quedan E° 5600; si paga sólo el 15% de la deuda, le quedan E° 82100. ¿Cuál es su deuda, y cuál su capital.

Respuesta: E° 90000 y E° 95600.

160.—Una persona viaja en un tren y cuenta 29 golpes en el riel en 21 segundos.

¿Cuál es la velocidad del tren en $\dfrac{Km}{h}$ si el riel tiene 12 m de largo?

161.—Si **A** puede hacer un trabajo en 2 m días, **B** y **A** juntos en n días.

¿En cuánto tiempo hará solo el trabajo **B**? y si **A, B** y **C** lo hacen juntos en $\frac{2mn\,(2m+n)}{4m^2+4mn-n^2}$ días. ¿En cuánto tiempo hará el trabajo **C**?

Respuesta B: $\frac{2\,m\,n}{2\,m-n}$

C: $\frac{2\,m\,(2m+n)}{2\,m-n}$

162.—Calcule el valor de la expresión: si $x = \frac{1}{2}(a+b)$

$$\frac{(x-a)^2}{x-b} - \frac{x-2a+b}{x+a-2b}$$

Respuesta: $\frac{a-b+2}{2}$

163.—Dos personas **A** y **B**, parten simultáneamente desde dos puntos distanciados de **c** Km y caminan en el mismo sentido **AB**$\rightarrow$.

A camina con velocidad **p** $[\frac{Km.}{h}]$ y **B** con velocidad **q** $[\frac{Km.}{h}]$.

¿Cuántos Km ha recorrido **A** cuando alcanza a **B**?

Discusión.

Respuesta: $\frac{pc}{p-q}$

164.—Un depósito tiene 900 m^3 4 Hl de capacidad y tiene 3 llaves que le suministran 300 m^3 5 Dl; 225 m^3 3 Hl; 150 m^3 4 Hl. 2 Dl, si se dejan abiertas durante una hora.

Una cuarta llave es capaz de desocuparlo en 2 horas.

Se dejan abiertas las 4 llaves durante 1 h. 45 min., al fin de lo cual se cierra la 2ª llave.

¿Cuánto tiempo más, tarda el estanque en llenarse?

1.ª céd. Santiago, 1955.

165.—Transformar en un producto:

$$1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2\ bc}$$

166.—Demostrar que:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \equiv 2(a+b+c)^2-6(ab+ac+bc)$$

167.—Resolver:

$$\frac{1}{7x - \dfrac{2x-3}{2 - \dfrac{2x-5}{3x-2}}} = \frac{2}{11\ x}$$

168.—¿Qué valor debe darse a m para que $x^3-6x^2+2m\ x-1$, sea divisible por $(x-3)$?

169.—Las diagonales de un cuadrado **ABCD** se cortan en **O.** Entre **O** y **C** se elige un punto **P** en la diagonal **AC.** Desde **D** se baja la $\perp$ a la recta **BP.** Demostrar que **DC** es bisectriz del $\measuredangle$ **EDP.**

Valparaíso, 1956.

170.—En un $\triangle$ isósceles ABC el $\measuredangle$ del vértice **C** es igual a 47°. Calcular en grados lo que miden los $\measuredangle$s interiores del $\triangle$ determinado por los pies de las alturas del $\triangle$ **ABC.**

Santiago, 1957.

171.—Demuestre que en un cuadrilátero los centros de las $\odot$s circunscritas a los 4 $\triangle$s determinados por las diagonales, son los vértices de un $\#$. Calcular los $\measuredangle$s de este $\#$ si $_{\varepsilon}=80°$.

Santiago, 1955.

DEFINICION.—*Dividir un trazo armónicamente es dividirlo interior y exteriormente en una razón dada.*

Para dejar establecido que un trazo **AB** queda dividido armónicamente por dos puntos **C** y **D**, (Fig. 184), basta probar la exactitud de la proporción: CB : CA = DB : DA.

La proporción resultante es una *proporción armónica.*

Los puntos **C** y **D** son puntos *conjugados armónicos* con relación a **A** y **B**, y recíprocamente.

Entre los dos pares de puntos, se forma un *juego armónico.*

OBSERVACION: Más adelante, pág. 246, se indica el procedimiento para dividir un trazo armónicamente, en una razón cualquiera, dada.

EJERCICIOS DE APLICACION

1. Trazar un eje orientado X'X y representar en él los puntos A, B, C, D, cuyas abscisas son, respectivamente, +3, +5, —2, —6. Enseguida expresar la medida algébrica de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DO}$. (Unidad: 1 cm.).

2. En un eje orientado, a partir de un origen O, colocar 4 puntos A, B, C, D, cuyas abscisas son: $a=-4$; $b=+5$; $c=-6$; $d=+1$. Encontrar el valor algébrico de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

3. En un eje orientado se dan los puntos A, B, C, cuyas abscisas son: $a=-1$; $b=-5$; $c=+5$. Calcular: 1º la abscisa x del punto medio M de AB; 2º la abscisa x' del punto medio N de MC.

4. Tres puntos A, B, C, de un eje X'X tienen por abscisas respectivamente, a, b, c. Calcular la abscisa de un cuarto punto D de modo que se cumpla la relación: $\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC}=0$.

5. Un punto D, situado en la prolongación del trazo AB=36 cm. es tal que DA : DB=7 : 3. Determinar **DA** y **DB.**

6. Un punto C divide interiormente al trazo AB = 42 cm en la razón CA : CB=2 : 5. Calcular **CA** y **CB.**

7. Un punto N divide interiormente al trazo AB en la razón NA : NB = 5 : 9. Su distancia al punto medio de AB es 28 cm. Calcular **NA, NB** y **AB.**

8. Un punto M divide exteriormente al trazo CD en la razón MC : MD = 5 : 9. Su distancia al punto medio de CD es 28 cm. Calcular **MC** y **MD.**

9. Divida un trazo de 15 cm en la razón 2 : 3, interior y exteriormente. Otro de 6 cm como 1 : 2. Otro de 35 cm como 2 : 5. Verifique las proporciones en sus dibujos.

CAPITULO IX

TEOREMA GENERAL DE THALES — SUS CONSECUENCIAS Y APLICACIONES

§ 1.—DIVISION DE UN SEGMENTO RECTILINEO EN PARTES IGUALES — TEOREMA PREPARATORIO (O LEMA)

TEOREMA XL.—**Las ||s que determinan partes iguales sobre una recta dada, determinan también, partes iguales sobre cualquier otra recta secante.** (Fig. 185 a).

Hip.) $\begin{cases} AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH \\ AC = CE = EG \end{cases}$

Tes.) $BD = DF = FH.$

o sea: $$\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BF}$$ (Q. E. D.)

EJERCICIOS DE APLICACION

* **10.** Dividir un trazo dado AB en partes proporcionales a 1, 4, 5.

* **11.** Se da la razón m : n entre dos trazos y uno de ellos. Construir el otro trazo.

* **12.** Construir el trazo que indica la expresión: $x = \frac{ab}{d}$, si **a**, **b** y **d**, son trazos dados.

* **13.** Construir el valor de x, en la expresión: $x = \frac{a^2}{c}$, siendo **a** y **c** trazos dados.

* **14.** La suma de dos trazos es s. Si están en la razón de 3 : 4, construir dichos trazos. Id si los trazos están en la razón **m : n**.

* **15.** Dado un trazo **a**, prolongarlo en una magnitud **x** de modo que se cumpla la siguiente relación: a : x = m : n, siendo **m** y **n** trazos dados. Id si los trazos están en la razón de **5 : 3**.

* **16.** Dado un trazo **a**, prolongarlo en una magnitud **x** de modo que se verifiquen las relaciones siguientes: 1º $\frac{a+x}{a} = \frac{m}{n}$; 2º $\frac{a+x}{x} = \frac{m}{n}$, (m y n son trazos conocidos).

* **17.** Cuatro paralelas determinan sobre una recta segmentos de 3 cm., 5 cm., 8 cm. ¿Qué longitudes determinarán sobre un trazo de 64 cm. que tiene un extremo en la primera de ellos y el otro en la cuarta?

* **18.** Una recta paralela a un lado de un triángulo determina en un segundo lado segmentos de 27 cm y 18 cm.; ¿cuáles son los segmentos determinados en el tercer lado que mide 60 cm?

• **19.** Dos lados de un triángulo miden AB=24 cm y AC=32 cm. Sobre AB se toma AD=13 cm. ¿Qué longitud AE hay que tomar sobre AC para que DE sea paralela a BC?

• **20.** Dado un ángulo XOY se aplican sobre el rayo OX las longitudes OA=4 cm; OA'=6 cm; sobre OY se toman OB=6 cm y OB'=9 cm. ¿Qué se puede decir de las rectas AB y A'B'? Si AB =10 cm, calcular A'B'.

• **21.** En un trapecio ABCD de base mayor AB, se da sobre AD un punto M tal que AM $= \frac{2}{3}$ AD y sobre BC un punto N tal que NB=2NC.

¿Qué se puede decir de MN? Si AD=12 cm y BC=15 cm, calcular AM y BN.

• **22.** Un trazo de 40 cm se divide en tres segmentos m, n, q, que son entre sí como 2 : 3 : 5. ¿Cuánto mide cada uno de los segmentos?

• **23.** Se da la diferencia **d** de dos trazos y su razón 2 : 3. Construir dichos trazos.

• **24.** Dos trazos están en la razón de **m** : **n** y su diferencia es igual a un trazo dado **d.** Construir dichos trazos. (m y n son trazos conocidos).

• **25.** En un △ ABC trazar una paralela al lado AB de modo que la parte de ella interceptada por los otros dos lados sea igual: a) a los $\frac{4}{5}$ del lado paralelo; b) a los $\frac{3}{4}$ del lado paralelo.

• **26.** En un △ ABC (Fig. 202). DE ∥ AC; calcular:

1.º AD, sabiendo que: BD=8, BE=6 y EC=3

2.º AC, sabiendo que: BE=6, EC=3 y ED=8

3.º AD, sabiendo que:

$$AB=15 \text{ y } \frac{CE}{EB} = \frac{2}{4}$$

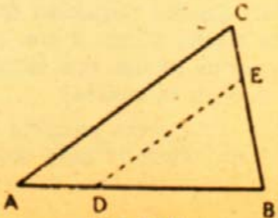

Fig. 202

4.º Sabiendo que: AC=12, ED=8 y BE=6, calcular los segmentos BC y EC.

5º Calcular BE, si BE=2DA, BD=9 y EC=2.

• **27.** Por un punto **P** situado entre los lados de un ángulo A, trazar una recta que corte los lados en B y C, de manera que se verifique: 1º) **AB : AC=m : n**; 2º) **PB : PC=m; n**; 3º) **BC : PC=m : n.**

• **28.** Determinar el **L. G.** de los puntos cuyas distancias a los lados de un ángulo dado sean entre sí como **m : n** (m y n son trazos conocidos).

SOLUCION: Se trazan las $\parallel$s. a los lados del ángulo a las distancias m y n, respectivamente. La recta que une el vértice del ángulo con el punto de intersección de las $\parallel$s. es el L. G. pedido. ¡Demuéstrelo!

29. Se da un ángulo A y un punto P situado fuera de él; trazar por P una recta **PBC** que corte los lados del ángulo en **B** y en **C** de tal modo que se pueda verificar la proporción siguiente: **PB : PC=2 : 5.**

30. Demostrar que si por el punto de intersección de las diagonales de un trapecio se traza una $\parallel$ a las bases, los segmentos de la $\parallel$ comprendidos entre dicho punto y los lados no $\parallel$s, son iguales.

PROBLEMAS DE CONSTRUCCION

(Aplicación de la 4ª proporcional geométrica)

Construir un $\triangle$ dados $a : b = m : n$, p, h_c

3º Si $m > n$, resultará siempre $a > b$
pero puede dar lugar a 3 casos con relación de b con h_c:

a) puede resultar: $b > h_c$, habrá 2 soluciones, caso de la Fig. 204.

b) puede resultar: $b = h_c$, habrá una solución. El △ será rectángulo.

c) puede resultar: $b < h_c$, habrá 0 solución.

Construir un △ dados:

• **31.** $a : b = 4 : 3,\ a,\ h_a$

• **32.** $a : b = m : n,\ h_c,\ p$

• **33.** $a : b = m : n,\ q,\ a$

• **34.** $p : q = m : n,\ a,\ h_c$

• **35.** $a : b = m : n,\ r,\ \alpha$

• **36.** $c : t_c = m : n,\ r,\ \gamma$

• **37.** $a : b = 3 : 2,\ a,\ h_c$

• **38.** $a : c = m : n,\ h_b,\ \gamma$

39. $(a+b) : c = m : n,\ c,\ r$

• **40.** $h_c : c = m : n,\ c, t_c$

• **41.** $c : t_a = m : n,\ r,\ \gamma$

42. $c : t_c = 3 : 2,\ c,\ t_a$

• **43.** $(a+b+c) : h_c = m : n,\ p\ \beta$

44. $c : t_c = m : n,\ c,\ t_b$

Construir un # dados:

• **45.** $a : e = m : n,\ a,\ \varepsilon$

46. $a : b = 4 : 3,\ b,\ h_a$

47. $b : h_c = m : n,\ \varepsilon,\ h_b$

48. $e : b = 5 : 3,\ b,\ \sphericalangle\ (a, f)$

49. Construir un rombo dados: $e : f = m : n,\ e$.

• **50.** Dado un rectángulo de lados a y b, transformarlo: a) en otro que tenga un lado **c**; b) en un △ rectángulo de hipotenusa c.

51. Por un punto P situado dentro de una circunferencia, trazar una cuerda APB tal que, se verifique la siguiente proporción: **PA : PB = m : n** (m y n son trazos conocidos).

52. Resolver gráficamente la siguiente ecuación: $4x = 12$. (Construir x y medirlo).

• **53.** Dado un △ ABC, determinar un punto P sobre AB, cuyas distancias a los otros lados, sean entre sí como **m : n**. (m y n son trazos conocidos).

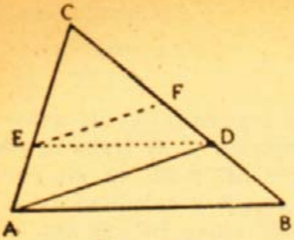

Fig. 205

54. Dado un △ ABC, (Figura 205), únanse el vértice A con un punto arbitrario D, sobre CB. Trazar DE ∥ AB y EF ∥ AD. Probar que se verifica la siguiente relación:

$$CB : CD = CD : CF$$

¿Qué nombre recibe el trazo CD en la proporción anterior?

55. Dado un △ ABC, márquese punto medio M de BC y trácese las bisectrices de los ∢s AMB y AMC que cortan los lados AB y BC en D y E, respectivamente.

Demostrar que: 1º) DA : DB = EA : EC; 2º) DE ∥ BC.

• **56.** Si desde dos puntos B y C de un rayo AX se trazan dos segmentos paralelos de modo que sus longitudes sean procionales a las distancias de B y C al extremo A del rayo, la recta que une los extremos de los segmentos, pasa por el extremo del rayo. (Teorema recíproco del teor. XLIV).

57. Se da una recta L y un punto B sobre ella. Fuera de la recta se halla situado un punto P; sobre el segmento PB se encuentra otro punto C tal que PC : PB = m : n. El punto B se mueve sobre la recta L de modo que en cada posición se verifica la misma proporción: PC : PB = m : n.

¿Cuál es el L. G. del punto C?

58. Se dan dos △s ABC y ABC' que están construídos a distintos lados de la base común AB. Sobre AB se marca un punto cualquiera D y se hace DM ∥ AC y DN ∥ AC', siendo M y N los puntos de intersección de las ∥s con los lados BC y BC', respectivamente. Uniendo C con C' y M con N, demuéstrese que CC' ∥ MN.

59. Sabiendo que E y F dividen armónicamente un trazo dado AB (E interiormente y F exteriormente) y que M es el punto medio de **AB**. Demostrar las relaciones siguientes:

1º $MA^2 = ME \cdot MF$;

2º $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$

60. En un △ ABC se trazan las transversales de gravedad AM y BN; por su punto de intersección G se traza la paralela al lado AB que corta a los lados AC y BC en los puntos D y F, respectivamente. Unase M con N y calcúlese los lados del # DFMN, si AB=40 cm, AC=60 cm y BC=90 cm.

CAPITULO X

CIRCUNFERENCIA DE APOLONIO

TEOREMA XLV.—**La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide interiormente al lado opuesto en la razón de los otros dos lados.**

Hip.) En △ ABC, $CX = b_\gamma$.

$\measuredangle s = \measuredangle t$

Tes.) $\frac{XA}{XB} = \frac{CA}{CB}$.

Dem.) (Fig.206).

AC→C

Trazar BD ∥ CX

$\measuredangle s = \measuredangle r$ (Corresp. ∥s)

$\measuredangle t = \measuredangle i$ (alt. int. ∥s)

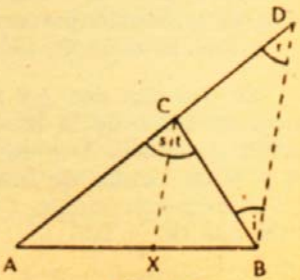

Fig. 206

EJERCICIOS DE APLICACION

• **61.** Un triángulo tiene por lados BC = 12 cm, AC = 15 cm, AB = 24 cm. Calcular los segmentos determinados en AC por la bisectriz del ángulo β.

• **62.** Los lados de un triángulo miden respectivamente 18, 30 y 36 cm. Calcular los segmentos determinados en los lados por las tres bisectrices interiores.

PROBLEMAS DE CONSTRUCCION

(Ejercicios basados en la circunferencia de Apolonio)

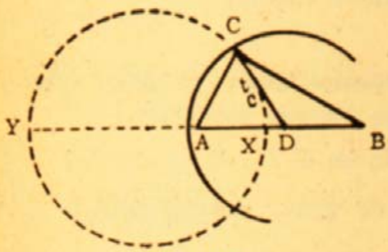

Fig. 210

Construir un △ dados: $a : b = m : n$, c, t_c.

Análisis.—Sea ABC el △ pedido (Fig. 210).

En el: $AB = c$
$DC = t_c$

Por el lado c quedan determinados los vért. A y B.

Ls Gs de C:
- 1º La circunferencia de Apolonio determinada por la división armónica de $AB = c$, según la razón de $m : n$.
- 2º ⊙ (D = punto medio de AB, t_c).

Construcción.—$AB = c$. (Fig. 211).
Se divide AB armónicamente en la razón $m : n$. Se hace para ello: Rayo BE arbitrario.

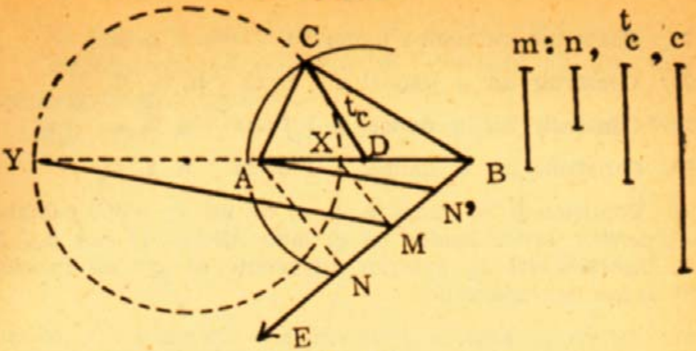

Fig. 211

BM=m
MN=n
N(↔)A
MX||NA, resulta X.
MN'=n
N'(↔)A
MY||N'A, resulta Y
⊙ de Apol. de diám. XY
AD=DB
⊙ (D, t_c) corta en C y C' a la ⊙ de Apol.
A(↔) C(↔)B
Los △s ABC y ABC' cumplen con las condiciones del probl.
Hacer la demostración y la discusión.

Construir un △ dados:

- • **63.** a : b=m : n, c, h_c
- • **65.** a : b=m : n, c, b_γ
- **66'.** a : b=m : n, c, t_c
- **67.** t_a : t_b=m : n, p, q
- **69.** a : b=m : n, p—q=d, α—β=δ
- • **71.** c : b=m : n, a, b_α
- • **73.** a : b=m : n, c, γ
- **75.** b : c=2 : 3, a, b+c=s
- • **64.** c : a=5 : 3, b, h_b
- • **66.** a : c=m : n, b, β
- **66".** u, v, t_c
- • **68.** a : b=m : n, c, r
- • **70.** u, v, β
- **72.** a : c=m : n, b_β, b
- **74.** c : a=m : n, b, β
- **76.** c, a : b=m : n, t_a : t_b=m' : n'

• **77.** Construir un rombo dados: e : f=m : n, a.

• **78.** Construir un # dados: e : f=m : n, h_b, d.

• **79.** Construir un # dados: e : f=m : n, d, ε.

80. Construir un # dados: a : d=m : n, f, β

• **81.** Conociendo los lados a, b, c, de un △ ABC, calcular los segmentos determinados en el lado AB=c: 1º por b_γ; 2º por la bisectriz del ∢ exterior adyacente al ∢γ en función de los lados del triángulo.

82. En un △ ABC, a = 24 cm, b = 20 cm y c = 40 cm. Calcular los segmentos v, u y el radio de la ⊙ de Apolonio que pasa por el vértice C.

83. Dado un △ **ABC** determinar dentro de él un punto **P** tal que, sus distancias a los vértices del △ sean entre sí como tres trazos dados **m, n y p.**

83'. En un △ ABC en el cual a : b = m : n, demostrar la relación: $r = \dfrac{mnc}{m^2-n^2}$, siendo r el radio de la ⊙ de Apolonio que divide el lado c armónicamente en la razón en que están los otros dos lados.

CAPITULO XI

TRIANGULOS SEMEJANTES

§ *1.—DEFINICIONES Y GENERALIDADES*

Triángulos semejantes y en general, *polígonos semejantes,* son los que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos, proporcionales.

Dos polígonos semejantes tienen misma forma sin ser necesario que tengan igual área.

EJERCICIOS DE APLICACION

• **84.** Los lados de un triángulo miden respectivamente: $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 6$ cm.

Se traza una paralela al lado c y esta paralela mide 4 cm. Calcular los segmentos determinados por ella en **a** y **b**.

85. En un triángulo ABC, AB = 5 cm, BC = 8 cm, AC = 7 cm. Por un punto D de BC, tal que BD = 2 cm, se trazan paralelas a los otros lados. Calcular el perímetro del paralelógramo así formado.

• **86.** Los lados de un triángulo ABC miden: AB = 12 cm. BC = 11 cm, AC = 9 cm. Paralelamente a AB se traza MN = 10 cm. Calcular las longitudes de los trazos AM, MC, NC, NB.

• **87.** Las bases de un trapecio miden 8 m y 12 m y los lados 3 m y 5 m. Calcular los lados del triángulo menor que se forma al prolongar los lados.

88. ¿Cuál es la altura del triángulo mayor obtenido al prolongar los lados no paralelos de un trapecio cuyas bases miden 27 m y 36 m y la altura 15 m.?

• **89.** Dado un ángulo O, en uno de los lados se lleva OA = 4 cm.; y en el otro, OB = 2 cm.; OC = 8 cm. Demostrar que: $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCA$.

90. La bisectriz AD del ángulo A de un triángulo ABC, prolongada, encuentra en E la circunferencia circunscrita. Demostrar que $BE^2 = AE \cdot DE$.

91. En el rectángulo ABCD, AB es el doble de AD. Se une el vértice D con un punto E de AB, tal que $AE = \frac{1}{4} AB$.

La recta DE corta en F a la diagonal AC. Demostrar que cuadrilátero BCFE es inscriptible.

• **92.** Demostrar que en un paralelógramo, las distancias de un punto de una diagonal a dos lados adyacentes, son inversamente proporcionales a estos lados.

92'. Se da un △ isósceles ABC y con centro en el punto medio D de la base AB, se describe una O tangente a los otros dos lados; por un punto F de la ⊙ se traza una tangente que corta a los lados CA y CB en M y en N, respectivamente. Demostrar que $AD^2 = AM \cdot BN$.

93. En un △ ABC se trazan sus tres alturas $AA' = h_a$, $BB' = h_b$ y $CC' = h_c$. Demostrar las igualdades: a) $h_a \cdot A'H = A'C \cdot A'B$; b) $h_b \cdot B'H = B'C \cdot B'A$; c) $h_c \cdot C'H = C'A \cdot C'B$; siendo H el ortocentro del △ ABC.

93'. Dado un trapecio ABCD, determinar y construir una paralela a las bases, que sea dividida en tres segmentos iguales por los lados no paralelos y las diagonales.

• **94.** Demostrar que en un △ ABC dos alturas son inversamente proporcionales a los lados correspondientes.

• **95.** Demostrar que en △s semejantes los perímetros son entre sí como dos lados homólogos o dos líneas homólogas cualesquiera.

• **96.** Dos △s ABC y ABC' construídos sobre una misma base hacia un mismo lado, y que tienen igual altura, se cortan por una ∥ a la base común; probar que los segmentos de la ∥ interceptados por los lados de cada △, son iguales.

97. En un △ ABC las alturas AD y BE se cortan en H. Pruébese que △AHE∼△BHD.

x • **98.** En un △ las tres medianas forman un △ semejante al total.

99. Si se unen los 3 vértices de un △ ABC con un punto P situado fuera de él, y se marcan los puntos medios A', B' y C' de las rectas de unión, resulta que △ABC∼△A'B'C'.

100. Los lados de un △ABC son: $a=15$; $b=10$; $c=20$; $h_c=8$. Calcular h_a y h_b.

• **101.** Los lados de un $\triangle$ABC son a, b y c. Calcular los de otro $\triangle$ semejante al primero y construirlo, si el lado homólogo de a es p.

102. Construir un $\triangle$ cuyos lados sean, respectivamente, el duplo de los de otro $\triangle$ABC dado. ¿Serán o no semejantes estos dos $\triangle$s? ¿Por qué?

• **103.** Se da un $\triangle$ ABC circunscrito a una $\odot$ y se une el vértice C con el centro O de la $\odot$, hasta cortar el lado AB en D. Probar que: $(a+b) : c = CO : OD$.

104. En un $\triangle$ABC se aplican sucesivamente sobre AB a partir de A, los trazos $AE = EF = 1/5\ AB$ y se unen C con E y con F. Si se traza la transversal de gravedad t_b, probar que esta transversal dividirá una de las rectas de unión en la razón de 3 : 5 y la otra en la razón de 4 : 5.

104'. Por el vértice de un $\triangle$ABC se traza una $\parallel$ CX al lado AB y por el punto medio M de AB se traza una recta cualquiera que corta a AX en un punto N, al lado CB en un punto Q y a la prolongación de CA en un punto P. Demostrar que: $PN : PM = QN : QM$.

105. Se da un $\triangle$ABC inscrito en una $\odot$ de radio r; probar la siguiente relación: $S = \dfrac{abc}{4r}$. Generalice dicha relación, formulando o enunciando una proposición.

106. Se da un # ABCD y una transversal trazada desde A divide al lado DC en la razón de 1 : n. Probar que la misma recta divide a la diagonal BD en la razón de $\dfrac{1}{n+1}$. (Ejemplo $n = 5$).

• **107.** Dado un $\triangle$ ABC trazar una $\parallel$ a uno de sus lados de modo que el $\triangle$ determinado por dicha paralela tenga un perímetro dado 2s'.

• **108.** Dado un $\triangle$ ABC, trazar al lado AC una paralela MN de manera que: a) $AM+CN=s$; b) $AM—CN=d$ (s y d son trazos dados).

Construcciones basadas en la semejanza de $\triangle$s

Construir un $\triangle$ dados:

• **109.** $a : b = m : n, \gamma, h_a$

• **110.** $a : b = m : n, \gamma, c$

• **111.** $a : b = m : n, \gamma, t_c$

• **112.** $a : b = 4 : 3, \gamma, h_c$

113. $a : b = 3 : 2, \gamma, r$

114. $a : b = 3 : 2, \gamma, \rho$

• **115.** $a : b = m : n, \gamma, p_c$

• **116.** $a : b = m : n, \gamma, u$

• **117.** $a : b : c = 4 : 3 : 5, t_a$

118. $a : b : c = m : n : q, b_\gamma$

119. $a : b : c = m : n : q, h_b$

• **120.** $a : b : c = 3 : 4 : 5, b_\alpha$

• **121.** $a : b_\gamma = 3 : 2, \gamma, \rho_c$

122. $b : h_c = m : h, c, \gamma$

123. $p : h_c = m : n, \gamma, h_a$

• **124.** $b : c = m : n, \beta, t_b$

• **125.** $c : t_c = 3 : 2, r, \gamma$

126. $r : h_c = 3 : 2, b_\gamma, \gamma$

127. $c + h_c, \alpha, p : q = m : n$

• **128.** $h_c : t_c = m : n, \alpha, v$

129. $(a+b+c) : h_c = m : n, \gamma, \rho_c$

130. $b : t_c = m : n, t_a + t_b, \gamma$

131. $b : b_\gamma = m : n, \alpha, a + b - c = d.$

132. $c : \rho = m : n. \beta, b$

CAPITULO XII

POLIGONOS SEMEJANTES

§ 1.—DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Polígonos semejantes *son polígonos que de igual número de lados tienen los ángulos respectivamente iguales y los lados homólogos proporcionales.*

Dos polígonos de más de tres lados pueden tener todos sus ángulos respectivamente iguales y no tener sus lados respectivamente proporcionales. En efecto, si se traza una paralela a un lado del polígono, todos los ángulos del nuevo polígono son iguales a los del primero, pero alguno de sus lados son iguales a los del primero y otros no.

EJERCICIOS

133. En un triángulo dado, inscribir un cuadrado.

134. En un triángulo, inscribir otro triángulo cuyos lados sean paralelos a tres rectas dadas.

135. Desde un **P** exterior a una $\odot$ trazar una secante tal, que la parte exterior sea igual a la parte interior.

* **136.** En una $\odot$ dada inscribir un triángulo semejante a otro triángulo dado.

* **137.** Circunscribir a una $\odot$ dada un triángulo que sea semejante a otro triángulo lado.

138. En un semicírculo inscribir un cuadrilátero semejante a otro cuadrilátero dado y que tenga dos vértices en el diámetro y los otros dos en la circunferencia.

139. ¿Cuál es la razón de los perímetros de dos triángulos equiláteros que tienen por lado 10 m y 18 m respectivamente?

140. Un triángulo tiene por lados 12, 25 y 32 m; ¿cuánto miden los lados de un triángulo semejante y de perímetro triple?

141. En un rectángulo ABCD, AB = 6 cm y BC = 9 cm. Trazar EF paralela a AB de modo que los rectángulos ABFE y ABCD sean semejantes.

142. Dado un rectángulo ABCD, se baja desde cada vértice una perpendicular a la diagonal opuesta. Demostrar que los pies de estas perpendiculares son los vértices de un rectángulo semejante al dado.

* **143.** Describir una circunferencia que pase por un punto dado P y sea tangente a dos rectas dadas L y L'.

Fórmula de la superficie de un triángulo ABC en función de los radios de las circunferencias inscritas y ex-inscritas.

$$S = s\,\rho$$
$$S = \rho_a\,(s-a)$$
$$S = \rho_b\,(s-b)$$
$$S = \rho_c\,(s-c)$$

Multiplicando m. a m. las 4 igualdades

$$S^4 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,\rho\rho_a\,\rho_b\,\rho_c$$
$$S^4 = S^2 \cdot \rho \cdot \rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c$$
$$S^2 = \rho\rho_a\rho_b\rho_c$$
$$S = \sqrt{\rho\,\rho_a\,\rho_b\,\rho_c}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

• **144.** Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 20 m y 21 m.

• **145.** Calcular la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son 15 m y 8 m.

• **146.** Calcular los dados de un rombo, cuyas diagonales miden 6 m y 8 m.

147. ¿Por qué es rectángulo todo triángulo cuyos lados son entre sí como 3 : 4 : 5?

148. Colocado verticalmente a 4 m de la orilla de un río, un palo sobresale 3 m; inclinado, su extremo toca la ribera. ¿Cuál es la profundidad del río?

• **149.** En un $\triangle$ rectángulo ABC, $h_c = 9{,}6$ y la hipotenusa $c = 20$. Calcúlense los dos catetos.

• **150.** En un triángulo rectángulo un cateto vale la mitad de la hipotenusa, y el cuadrado de ésta es 256 m^2. ¿Cuál será la longitud de los catetos?

• **151.** En un triángulo rectángulo ($\triangle$ R.) calcular: a, b, h_c, p, q, si $a+b=35$ m y $c=25$ m.

152. En un $\triangle$ R., calcular h_c si $a = 8$ m y $b = 6$ m.

• **153.** En un $\triangle$ R., calcular a, b, si $p = 32$ m y $q = 18$ m.

• **154.** En un $\triangle$ R., calcular a y b si $p : q = 9 : 16$ y $h_c = 12$ m.

• **155.** En un $\triangle$ R., calcular a, p, q, si $b=15$ m y $h_c=12$ m.

• **156.** En un $\triangle$ R., calcular a, b, p, q, si $h_c=9$; $p-q=5{,}25$ m.

157. En un $\triangle$ R. se tiene $c = 100$ m, $a = 60$ m. Calcular el perímetro de cada uno de los triángulos parciales determinados por la altura.

158. Demostrar que para todo punto situado dentro de un rectángulo, se verifica que la suma de los cuadrados de las distancias a dos vertices opuestos, es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos.

• **159.** Demuestre que si en un cuadrilátero las diagonales se cortan perpendicularmente, la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

• **160.** En un triángulo ABC la altura $CH = 6$ cm divide la base en dos segmentos $HA = 3$ cm y $HB = 2$ cm. Calcular los lados CA y CB y el radio **r** del círculo circunscrito al triángulo.

161. En un círculo de 4 cm de radio, se inscribe un triángulo ABC, tal que $AB=4{,}8$ cm y $AC=6$ cm. Determinar la longitud del lado BC.

• **162.** En un $\triangle$ ABC, $CA = CB$. La altura h_c vale 8 m y el radio de la circunferencia circunscrita es de 5 m. Calcular los lados del triángulo.

• 163. Calcular el radio del círculo circunscrito a un triángulo de lados $a = 39$ mm. $b = 60$ mm, $c = 63$ mm.

• 164. Demostrar que en un $\triangle$ rectángulo los cuadrados de los catetos son entre sí como sus proyecciones sobre la hipotenusa.

• 165. Se da un $\triangle$ equilátero cuyo lado mide 10 cm. ¿Cuánto mide su altura?

• 166. Si el lado de un $\triangle$ equilátero vale l, calcular la altura en función de l. **Retenga ese valor.**

• 167. Si en un $\triangle$ equilátero $h = 5\sqrt{3}$ cm. ¿Cuánto mide el lado?

168. En un $\triangle$ rectángulo isósceles, $c = 6$ m. Calcular a y b.

169. En un $\triangle$ ABC, $a=15$; $b=20$; $c=7$. Calcular p.

170. En un $\triangle$ isósceles ABC, $h_c = 20$; $a = 24$ cm. Calcular el área.

• 171. El área de un $\triangle$ equilátero es $25\sqrt{3}$. Calcular 1º su altura; 2º calcular su base.

• 172. Demostrar que si sobre un mismo trazo AB, como hipotenusa, se construyen varios $\triangle$s rectángulos: ABC, ABC', ABC'' . . . etc. se verifican las siguientes relaciones:

$$a^2 : a'^2 : a''^2 \ldots = p : p' : p'' \ldots \text{ etc.}$$

173. Demostrar que en un $\triangle$ ABC se cumplen las siguientes relaciones:

1) $a^2+b^2 = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2t_c^2$

2) $a^2+4t_a^2 = 2b^2+2c^2$

Formular estos resultados por medio de una proposición.

3) En el mismo $\triangle$, calcular p y q en función de sus lados a, b y c.

174. En un $\triangle$ ABC rectángulo en C, el ángulo α mide 60° Determinar en qué razón la bisectriz de este ángulo divide al lado BC y a la altura CH.

* **175.** En un trapecio isósceles ABCD, los lados no paralelos son iguales a la base menor CD = 10 cm. Los ángulos en A y en B, miden 60º.

Calcular la base mayor, la altura y la diagonal del trapecio.

176. En un trapecio ABCD, rectángulo en A y D, el ángulo B vale 60º y la diagonal AC es perpendicular a BC. Calcular los lados y la diagonal del trapecio sabiendo que la base menor vale 10 cm.

177. Calcular el radio del círculo inscrito en un triángulo rectángulo cuyos catetos son a = 7 m y b = 24 m.

* **178.** Un triángulo rectángulo está inscrito en un círculo de 37 m de diámetro y circunscrito a un círculo de 5 m de radio.

Calcular los catetos.

179. Demostrar que si dos triángulos rectángulos son semejantes, $cc' = aa' + bb'$.

180. En un triángulo ABC la base AB=36 mm queda fija y el vértice C es variable. Se da la relación $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = 2960$. Calcular la transversal de gravedad CM. Hallar el lugar geométrico del vértice C. (Se hará ver que es una circunferencia cuyo centro es el punto medio de AB).

181. Dado un segmento fijo AB=a, determinar y construir el lugar geométrico de los puntos P tales que $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2a^2$. ¿Cuál es la altura máxima de los triángulos PAB?

182. Dado un segmento fijo de longitud AB=a, determinar el lugar geométrico de los puntos P tales que $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k^2$ (siendo k una longitud dada). (Se determinará primero la longitud de la proyección de la transversal de gravedad relativa a AB y de ello se deducirá que el lugar buscado es una circunferencia). Discutir.

183. En un triángulo ABC de base fija $AB=8$ cm de vértice C variable, se tiene $CA^2-CB^2=12$. Determinar la longitud de la proyección de la transversal de gravedad CM sobre AB. Deducir de ello que el lugar geométrico del vértice C es una perpendicular a AB. Situar el pie H de esta perpendicular con respecto al punto medio M de AB.

184. Siendo AB un segmento dado de longitud a, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos P tales $PA^2-PB^2=k^2$ siendo k una longitud dada? Construir el lugar en los casos particulares siguientes: 1º $k^2=2a^2$; 2º $k^2=a^2$; 3º $k^2=o$. Interpretar este último caso particular recordando proposiciones generales conocidas.

CAPITULO XIV

RELACIONES METRICAS EN EL CIRCULO

TEOREMA LXIV.—**Si dos cuerdas de un círculo se cortan, el producto de los segmentos de una de ellas, es igual al producto de los segmentos de la otra.** (Fig. 243).

Hip). Las cuerdas AB y CD se cortan en E.

Tes.) $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Dem.) $\measuredangle u = \measuredangle v$ ($\measuredangle$s inscritos que comprenden = arco)

$\measuredangle i = \measuredangle r$. (op. vértice)

luego,

$\triangle CEA \sim \triangle BED$ (1.er caso)

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{EB}{ED}$$

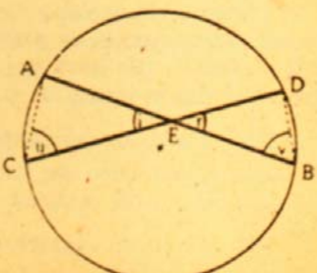

Fig. 243

Haciendo el producto de los medios, igual al producto de los extremos, resulta: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

EJERCICIOS DE APLICACION

* **185.** En un círculo de centro O y diámetro AB=27 cm se traza una cuerda AM=9 cm. Calcular su proyección sobre AB.

* **186.** Dos cuerdas se cortan en un círculo cuyo radio mide 17 cm. El producto de los dos segmentos de una de ellas es 145. Calcular la distancia entre el punto de intersección y el centro.

* **187.** En un círculo de radio r=5 cm, una cuerda está dividida en dos segmentos $AI=\frac{1}{4}r$ e $IB=\frac{4}{3}r$. ¿Cuál es la longitud de una cuerda CD que pasa por I y tal que IC : ID = 4 : 3?

188. Una cuerda CD encuentra un diámetro AB en el punto medio O del radio; los segmentos OC y OD son entre sí como 1 : 2.

Determinar estos dos segmentos en función del radio r de la circunferencia.

* **189.** Una cuerda de un círculo mide 50 mm y la sagita correspondiente a esta cuerda mide 15 mm. ¿Cuánto mide el radio?

190. En un círculo de 1,5 m de radio, una secante que pasa por el centro mide en total 15 m. ¿Cuánto vale la tangente que sale del mismo punto?

* **191.** El diámetro de un círculo mide 32 m y se prolonga en 4 m. Calcular la tg. trazada por el punto obtenido.

* **192.** En la prolongación del radio OA de un círculo O, hallar un punto P tal que la tangente PB=2 PA.

* **193.** A una circunferencia de radio **r** se traza una tangente AB=2r, y una secante BD=3r. Calcular la parte interior de la secante.

* **194.** A una circunferencia de diámetro BOD=40 cm se traza en B una tangente BA=30 cm y se traza DA que corta en C la circunferencia. Determinar AD, AC, BC y la proyección de DC sobre el diámetro BD.

* **195.** Dos círculos son tangentes exteriormente; la distancia de los centros es 36 cm y la tangente común exterior mide 28 cm. Calcular los radios de los círculos.

* **196.** Construir una cuarta proporcional entre tres longitudes dadas, considerando estas longitudes:

1º Como segmentos de dos cuerdas que se cortan.

2º Como secantes que salen de un mismo punto.

* **197.** Demuéstrese que en un △ ABC el producto de dos lados es igual al cuadrado de la bisectriz del ∢ comprendido entre ellos, más el producto de los segmentos que dicha bisectriz determinada sobre el tercer lado.

INDICACION: Construir la ⊙ circunscrita al △ ABC.

* **198.** En una ⊙ dada se traza un diámetro AB y en su extremo A se levanta la tangente AC. La secante CB corta la ⊙ en M. Demostrar las siguientes relaciones: 1º) $AB^2 = BM.BC$; 2º) $AM^2 = BM \cdot MC$. ¿Qué teoremas le recuerdan estas relaciones?

* **199.** En un △ ABC, $a = 14$; $b = 21$; $c = 15$ ¿cuánto mide b_a? Idem $a = 44$; $b = 22$; $c = 42$. ¿Cuánto mide b_γ?

* **200.** En un △ ABC dado, expresar en función de sus lados a, b, y c. 1º las bisectrices b_α, b_β, b_γ; 2º las transversales de gravedad.

* **201.** Construir una ⊙ O que sea tangente a una recta dada L y que pase por dos puntos dados P y Q.

* **202.** Idem que sea tangente a una ⊙ dada y que pase por dos puntos dadas P y Q.

203. En una ⊙ de radio r, probar que éste es M. p. g. entre los segmentos de una tangente determinados por su punto de tangencia y otras 2 tangentes ||s que cortan las primera tangente.

204. Probar que en un cuadrilátero inscrito el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de sus lados opuestos. (Teor. de Ptolomeo).

205. Calcular h_a en un △ ABC inscrito en una ⊙ de radio $r = 5$ cm, si $b = 12$ cm y $c = 16$ cm.

206. Dado un punto M fuera del círculo O, trazar una secante MCD tal que la circunferencia de diámetro CD sea tangente al diámetro ABM.

207. Dado un punto P dentro de un círculo (O, r) y dada una cuerda APB, demostrar que PA . PB se mantiene constante cuando la cuerda gira alrededor de P.

208. En un círculo O, el diámetro AB y la cuerda DE son perpendiculares.

Por A, se traza cualquier cuerda que corta a DE en F y la circunferencia en C.

Probar que AF . AC = Cte.

209. Dado un $\triangle$ rectángulo ABC, describir: 1ª la $\odot$ (A, c) y prolongar los catetos hasta su intersección con la $\odot$; 2º la $\odot$ (A, b). Demostrar mediante ambas figuras el teorema particular de Pitágoras.

CAPITULO XV

COMPARACION DE LAS AREAS DE DOS POLIGONOS SEMEJANTES

TEOREMA LXVII.—**Las áreas de dos $\triangle$s de bases y alturas diferentes, son entre sí como los productos de sus bases por las alturas correspondientes.** (Fig. 258).

Tes.) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{c \cdot h_c}{c' \cdot h'_c}$

Dem.) $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} c\, h_c$

$\triangle A'B'C' = \dfrac{1}{2} c'\, h'_c$

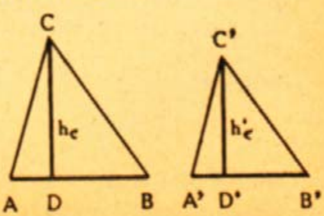

Fig. 258

$$\text{Pero: } \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1 \quad (c^2 = a^2+b^2 \text{ Teor. Pitág.})$$

$$\text{También: } \frac{A+B}{C} = 1$$

$$\text{Luego: } C = A+B$$

(Q. E. D.)

EJERCICIOS DE APLICACION

• **210.** Construir un cuadrado que guarde con otro la razón **m : n.**

• **211.** Construir un polígono semejante a un polígono dado de modo que la razón de sus áreas sea m : n.

212. Un triángulo tiene 48 m de base y 16 m de altura. ¿A qué distancia del vértice se ha de trazar una paralela a la base para obtener un triángulo de 54 m^2 de área?

213. Un triángulo tiene 20 m de base y 15 m su altura correspondiente. Calcular la longitud de la paralela a la base que lo divide en dos partes equivalentes y su distancia a la base.

214. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 144 m y 108 m. ¿A qué distancia del vértice hay que trazar una paralela a la hipotenusa para que el área del trapecio obtenido sea 972 m^2?

215. Un trapecio cuyas bases miden 12 m y 7 m y la altura 6 m queda dividido en dos partes equivalentes por una paralela a la base. Calcular la longitud de esta paralela.

• **216.** En una circunferencia dada inscribir un rectángulo cuyos lados sean entre sí como m : n.

• **217.** En un triángulo ABC, trazar entre los lados AB y BC, una recta DE tal que AD=DE=EC.

• **218.** Transformar un triángulo ABC en un triángulo isósceles que tenga: 1º un ángulo común; 2º un lado común con el triángulo dado.

• **219.** Transformar un triángulo ABC en triángulo equilátero.

• **220.** Transformar un triángulo dado ABC en otro tal que tenga el ángulo α común con él, y el lado opuesto a este ángulo tenga una dirección dada.

• **221.** Transformar un triángulo dado ABC en otro semejante a un triángulo dado DEF.

• **222.** Dividir un triángulo ABC en partes que sean entre sí como m : n : p : 1º por medio de transversales que salgan de un mismo vértice; 2º por medio de transversales que salgan de un punto dado en uno de los lados; 3º por medio de paralelas a un lado.

• **223.** Construir un triángulo semejante a otro dado ABC, de modo que su área sea 9 veces mayor que la del $\triangle$ dado ABC. Id, 16 veces mayor.

• **224.** Construir un polígono semejante a otro dado de modo que su área sea el cuádruplo del polígono dado.

• **225.** Construir un polígono cuya área sea equivalente a la suma de dos polígonos semejantes dados, y que además, sea semejante con estos últimos.

• **226.** Idem que sea equivalente a la diferencia de los dos polígonos semejantes dados y semejante a ellos.

227. Construir un $\triangle$ semejante a otro dado ABC y de modo que su área sea equivalente a los $\frac{2}{3}$ del $\triangle$ dado.

• **228.** Construir un cuadrado que esté con otro dado en la razón de m : n (m y n son trazos o números).

229. Dividir un cuadrado en tres partes equivalentes por dos cuadrados concéntricos.

230. Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por rectas perpendiculares a uno de los lados.

• **231.** Dividir un triángulo dado en dos partes equivalentes por medio de una || a una recta dada.

• **232.** Transformar un cuadrado en un triángulo equilátero equivalente.

CAPITULO XVI

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y AREA DEL CIRCULO

§ 1.—*LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA*

Experimentalmente se puede obtener la longitud de una circunferencia arrollando un hilo o cinta alrededor de la circunferencia o llanta de una rueda o disco, lo más perfectos posibles, que después se rectifica.

Pero este concepto carece de *precisión matemática.* Para obtener la longitud de la circunferencia por un procedimiento matemático, se asimila la ⊙ a una *línea poligonal regular* de lados muy pequeños. Así se consigue obtener una longitud tanto más aproximada cuanto mayor sea el número de lados de dicha línea poligonal regular.

En este caso se despeja la incógnita α.

$$\alpha = \frac{\text{arc. p} \cdot 360^\circ}{2 \pi r} = \frac{\text{arc. p} \cdot 180^\circ}{\pi r}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

* **233.** ¿Cuál es la longitud de un arco de 72º en una circunferencia de 17,5 m de radio?

* **234.** Calcular el radio de una circunferencia en la cual un arco de 45º tiene 14,1372 m de longitud.

* **235.** Dos arcos de 22º y 35º pertenecen a la misma circunferencia. El primero mide 2,7 m. Calcular la longitud del segundo y el radio de la circunferencia.

* **236.** Calcular en grados y minutos un arco cuya longitud es igual a su radio.

237. Calcular la longitud de la circunferencia circunscrita a un cuadrado de 16 cm. de lado.

* **238.** En el diámetro AB de una circunferencia de centro O, se marca el punto C entre A y O, y el punto D entre O y B, y se describen las circunferencias de diámetros AC, CO, OD, DB. Mostrar que la suma de las longitudes de estas cuatro circunferencias es igual a la circunferencia mayor.

239. En un círculo O de radio r, se inscribe un hexágono regular y se circunscribe un cuadrado al círculo. Expresar, en función de r, el perímetro de estos polígonos. Deducir que el valor de π está comprendido entre 3 y 4.

240. De cada vértice de un cuadrado ABCD como centro, se describe, con radio igual al lado, un cuadrante de circunferencia limitado a los lados. Expresar, en función del lado a, el perímetro de cuadrilátero curvilíneo EFGH determinado por los arcos.

241. Dos circunferencias son tangentes interiormente en A y la menor pasa por el centro O de la mayor. Un radio OC de la mayor encuentra la menor en B. Mostrar que los arcos AB y AC tienen la misma longitud.

242. Dos ruedas cuyos diámetros respectivos miden 3,6 m y 0,9 m y cuya distancia de los centros es 2,7 m están unidas por una correa no cruzada. Calcular la longitud de esta correa.

243. Dos circunferencias tienen por radios respectivos 100 m y 25 m. La distancia de los centros es 150 m. Se trazan las dos tangentes comunes exteriores AB y CD. ¿Cuál es la longitud del circuito convexo formado por las dos circunferencias y sus tangentes?

§ 3.—AREA DE UN CIRCULO

TEOREMA LXXVIII.—**El área de un círculo es igual al semi producto de su circunferencia por su radio.**

Tes.) $S_c = \dfrac{C}{2} \cdot r.$

Dem.) Se considera el círculo como un polígono regular de una infinidad de lados, en el cual la circunferencia **C** es su perímetro y su radio **r** se confunde con la apotema.

Pero la fórmula para calcular el área de un polígono es: $\mathbf{S} = \mathbf{s} \cdot \rho$ (s=semi perímetro; ρ=apot.).

EJERCICIOS DE APLICACION

• **244.** Calcular el área de un sector de 75º en un círculo de 30 cm de diámetro.

• **245.** Cálcular el área de la base de una columna circular de 1,20 m de circunferencia.

246. En un triángulo ABC de base AB=72 m, la altura y la transversal correspondientes miden respectivamente 45 y 60 m. Calcular la longitud de los lados CA y CB. ¿Cuál sería el radio del círculo equivalente al triángulo ABC?

• **247.** Calcular en función de r el área de los segmentos de 60º, 90º y 120º.

• **248.** Calcular el radio de un círculo sabiendo que el área del segmento correspondiente a un arco de 45º es a^2. (Aplicación: $a^2 = 1$ cm²).

• **249.** Calcular el área de un círculo inscrito en un sector de 60º de radio **r**.

250. Demostrar que el área de una corona circular tiene por medida el producto de su anchura (r—r') por la semisuma ($\pi r + \pi r'$) de las dos circunferencias que la limitan.

251. Demostrar que el área de una corona circular es equivalente al área del círculo que tiene por diámetro la cuerda de la circunferencia exterior tangente a la circunferencia interior.

• **252.** El área de una corona circular es 120 m² y el diámetro menor mide 12 m. Calcular el radio del círculo mayor.

• **253.** Una corona circular de 1 m² de área tiene 0,5 m. de anchura. Calcular el área del círculo menor.

254. Dividir un círculo en dos partes: 1º equivalentes; 2º proporcionales a 2 y 3, por un segundo círculo concéntrico.

255. Dos circunferencias concéntricas dejan entre sí una corona circular de 25,328 m². Siendo la anchura de esta corona 2 m; calcular el radio de cada circunferencia.

* **256** Sobre un diámetro AOB y sobre los dos radios OA y OB, se describen, a un mismo lado de AB, tres semi circunferencias. El área comprendida entre las tres semi circunferencias es 2464 cm.² Calcular r.

257. Un arco AB mide 80 cm y las tangentes en A y B, forman un ángulo de 144º. Calcular el área del círculo entero y la del sector AOB.

* **258.** Calcular la longitud de las circunferencias inscrita, circunscrita y ex inscrita a un triángulo equilátero de lado $a=1$ m. y el área comprendida entre las dos primeras.

259. Un rombo que tiene un ángulo de 60º está circunscrito a un círculo de 10 cm. de radio. Calcular el área comprendida entre el rombo y la circunferencia.

260. En un círculo de diámetro AB se traza la tangente AD y una secante $BCD=4r$. Calcular el área de los triángulos ABC y ADC y de la superficie mixtilínea AMCD.

261. El área comprendida entre el perímetro de un hexágono regular y la circunferencia circunscrita a este polígono es 13 cm². Calcular el radio de esta circunferencia. (Tomar $\pi=22/7$).

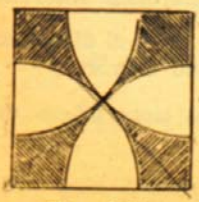

Fig. 275

* **262.** Siendo a el lado del cuadrado, buscar el área de la cruz de Malta, que se obtiene trazando arcos tangentes, de dos en dos, en el punto medio de las diagonales. (Fig. 275).

263. En un cuadrado de lado m, se describen, desde dos vértices opuestos y con radio m, arcos que por su intersección determinan una naveta; calcúlese el área de ésta. (Fig. 276).

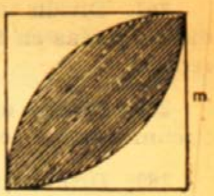

Fig. 276

* 264. Sobre los tres lados de un triángulo rectángulo se describen semicircunferencias de modo que el vértice del ángulo recto sea punto común de los tres arcos. Calcular el área comprendida entre los arcos secantes y compararla con la del triángulo. (Fig. 277).

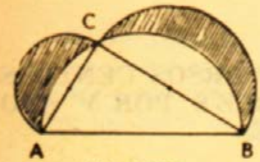

Fig. 277

265. En los extremos A y B de un trazo AB se aplican segmentos iguales AC=BD y se describen semi circunferencias sobre AB, AC, DB hacia un lado y sobre CD hacia el otro. Mostrar que el área limitada por las cuatro semi circunferencias es equivalente al círculo cuyo diámetro es igual a la suma de los radios de las dos circunferencias concéntricas. (Fig. 278).

Fig. 278

* 266. El diámetro AB de un círculo se divide en tres segmentos AC=a, CD =b y DB=c y se describen semi circunferencias sobre AC y AD hacia un lado y sobre CB y DB hacia el otro lado. Mostrar que el círculo dado queda dividido en partes proporcionales a a, b, c. (Fig. 279).

Fig. 279

267. Dividir un círculo en tres partes equivalentes, por medio de curvas en forma de S, compuestas de dos semi circunferencias.

268. Dividir un círculo en tres partes equivalentes por dos circunferencias concéntricas.

269. Dividir una corona en dos partes equivalentes por una circunferencia concéntrica.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN DIVERSOS CENTROS DE BACHILLERATO SOLUCIONABLES POR 5º AÑO DE HUMANIDADES

1. En un cuadrilátero cualquiera ABCD, determinar M sobre CD de modo que $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$.

2. En un cuadrado ABCD se traza una recta desde A que corta el lado BC en M y la prolongación de DC en I.

Demuestre que:

$$\frac{1}{\overline{AM}^2} + \frac{1}{\overline{AI}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2}$$

(Temuco, 1956)

3. En un cuadrilátero ABCD en donde AB=AD y BC=CD se prolongan sus lados opuestos hasta sus puntos de intersección M y N.

Demuestre que MN $\parallel$ BD.

(Temuco, 1956)

4. Dada una circunferencia de diámetro dado y una secante que forma con él un ángulo oblicuo, se pide trazar una cuerda paralela a la secante y que quede dividida por el diámetro en la razón de 3 : 1.

5. Construir un $\triangle$ dados: $a+b+c=s$, y $\rho : c = m : n$.
Talca, 1954)

6. Si AA', BB', CC' y DD' son las distancias de los vértices de un cuadrado ABCD a una recta cualquiera, demuestre que:
$\overline{AA'}^2 + \overline{CC'}^2 - 2\overline{BB'} \cdot \overline{DD'} = \overline{AB}^2$

7. Se pide inscribir un rombo EFGH en un triángulo cualquiera ABC; con el lado EF en el lado AB del triángulo y siendo E un punto dado en el lado AB.

(Talca, 1954)

8. Los lados de un triángulo miden $a=6$ dm 3 cm ; $b=0,84$ m; $c=1$ m 5 cm. Calcule el valor de cada uno de los seis segmentos determinados por las bisectrices de los ángulos interiores sobre los lados opuestos.

(Temuco, 1954)

9. Determine en la altura CD de un triángulo isósceles de base AB, un punto P tal que

$$CP = AP + PB.$$

(Santiago, 1955)

10. Construir un triángulo dados:

$$b : h_a = m : n, \; b : h_c = m' : n', \; t_c$$

(Santiago, 1955)

11. Construir un triángulo dados: la razón en que la bisectriz de α divide el lado BC, la razón en que la bisectriz de β divide al lado AC y h_c.

(Santiago, 1955)

12. ¿Es verdad que las bisectrices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo dividen a los lados, respectivamente opuestos, en la misma razón en que dividen a la altura?
Explique las distintas situaciones.

(Santiago, 1955)

13. En un triángulo rectángulo CD es bisectriz; DM y DN son perpendiculares a BC y AC; CN=d. Demostrar que:

a) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a+b+c)^2-6(ab+bc+ac)$.

b) Calcular $CD=m$, en función de a y b.

(Valparaíso, 1955)

14. Dados tres puntos A, B, C y un trazo k.
Encontrar P sobre AC y Q sobre BC, de modo que

$$CA \cdot CP=CB \cdot CQ=k^2$$

(Valparaíso, 1955)

15. El área de un triángulo equilátero se ha medido en unidades de superficie que son triángulos equiláteros de $a=1$ [cm] y el área de un cuadrado, con unidades que son cuadrados de lado $a=1$ [cm].

Resultan, los valores 17 y 22. ¿Qué valores resultarán si se intercambian las unidades?

16. Construir un # dados: $a, e : f = m : n, \varepsilon$

17. Construir un triángulo rectángulo, dados:

$$c,\ 3a+b=s$$

18. Construir un $\triangle$ rectángulo dados en una recta los pies H, D y M de la altura, de la bisectriz y de la transversal de gravedad que parten del vértice del ángulo recto.

19. En un triángulo dado, inscribir un triángulo equilátero. ¿Está determinado dicho problema? Si no es así ¿qué condición agregaría usted para determinarlo?

20. Trazar por el vértice A de un triángulo, una recta tal que las distancias de A a las proyecciones de B y C en esta recta, estén en una razón dada m : n.

21. Construir un rombo, dados: $h, a : f = m : n$.

22. Las bases de un trapecio miden 12 m y 5 m. ¿Qué longitud tiene el segmento de una paralela a las bases, limitado por los lados no paralelos, si dicho segmento queda dimidiado por el punto de intersección de las diagonales?

23. Construir un cuadrilátero, dados: un ángulo, una diagonal y sabiendo que: $a : b : c : d = 5 : 6 : 3 : 4$.

24. Demostrar que si el centro de gravedad de un triángulo se une con los vértices, el triángulo queda dividido en tres partes equivalentes.

Trate de establecer si éste es el único, o si hay otros puntos en el interior del triángulo, que gozan de la misma propiedad.

25. Dadas dos circunferencias y un punto P, se pide trazar por P un segmento rectilíneo AB, cuyo extremo A esté en una de las dos circunferencias, el extremo B en la otra, y de modo que resulte dividido por P en la razón $2 : 3$.

Discusión.

26. En el triángulo ABC se ha trazado $CD = t_c$, y en ésta un punto M tal que $CM = \frac{1}{3} CD$.

Se une B con M y se prolonga BM hasta su intersección E con el lado AC. ¿En qué razón queda dividido BE por el punto M.

27. Demuéstrese que dos circunferencias tienen dos centros de homotecia. ¡Discuta!

(Talca, 1950).

28. Dada una cuerda en una circunferencia dada, trazar otra cuerda paralela, de modo que ambas cuerdas sean entre sí como $m : n$.

(Santiago, 1952).

29. Inscribir un trapecio isósceles en una circunferencia, dada la razón entre una base y el lado, y un ángulo.

(Santiago, 1952).

30. Inscribir, en un triángulo dado, un triángulo semejante a otro dado, y de modo que $c \parallel c'$.

31. Demostrar que las distancias de un punto de una transversal de gravedad de un triángulo a los lados no dimidiados por ella, son inversamente proporcionales a esos lados

32. Construir un triángulo, dados **c**, $\mathbf{h_c}$, $\mathbf{t_a : t_b = 5 : 6}$.

33. Encontrar un punto en el interior de un triángulo, de modo que los pies de las perpendiculares trazadas desde él a los tres lados, sean los vértices de un triángulo equilátero.

34. Inscriba en un triángulo dado, otro que sea semejante a un segundo triángulo dado y de modo que un lado del triángulo pedido sea perpendicular a uno de los lados del triángulo primitivo.

¿Cuántas soluciones tiene el problema?

35. En un triángulo rectángulo isósceles ABC, CD es la altura y $DE \perp BC$. Demostrar que $\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{DE}$

¿Se cumple esta relación en cualquier $\triangle$ rectángulo?

36. En el $\triangle$ ABC, rectángulo en C, se trazan $CD \perp AB$.
Sean O, O_1 y O_2 centros de las circunferencias inscritas a los triángulos ABC, ADC y BDC.

Demostrar que $\triangle AOO_1 \sim \triangle ABO \sim \triangle CBO_2 \sim O_2O_1O$.

37. Por los dos extremos de un diámetro se trazan tangentes AF y BH, y por un punto **I** de la circunferencia, se traza la tangente que corta AF en C, y BH en D.
Demostrar que el $\triangle$COD es rect. y que $CI \cdot ID =$ constante

38. Demostrar que la siguiente relación se cumple en un $\triangle$ rectángulo: $h_c^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$

Santiago, 1946.

39. En el hexágono ABCDEF, la diagonal AC mide 15 cm.
Calcular el área del hexágono.

40. Construir un triángulo, dados:

$$t_a : t_b = m : n,\ c,\ \sphericalangle(t_a\ t_c).$$

41. Por el punto de intersección E de las diagonales de un trapecio, se traza la paralela a las bases.

Denótese por x la parte de esta paralela comprendida entre los lados del trapecio.

Demuéstrese que $x = \dfrac{2ac}{a+c}$

(Valparaíso, 1953)

42. Dado un triángulo ABC se pide trazar por C una transversal de modo que uno de los triángulos parciales resultantes sea semejante al $\triangle$ ABC.

Discutir y generalizar.

43. En el $\triangle$ ABC trazar la línea poligonal APQRS de modo que P esté en AB, Q en AC, R sea un punto dado, S esté en BC y que se verifique:

$$PQ : QR : RS = m : n : o, \text{ y}$$
$$AQ : QR = p : q.$$

44. Dado un ángulo CAB y un punto P, determine un punto X en el lado AC de modo que PX : XY = m : n.

Teniendo en cuenta que XY es $\perp$ a AB y que en **m** y **n** son trazos dados.

Emplee homotecia. ¡Discuta!

45. Buscar el L. G. de los puntos que dividen a las distancias de un punto dado a los puntos de una circunferencia dada, en la razón de m : n.

46. En un $\triangle$ inscrito a una $\odot$, la bisectriz de uno de sus ángulos interiores corta a la circunferencia en un punto D. Demuestre que la posición del punto D no depende de la situación del vértice opuesto en la circunferencia.

47. En una $\odot$ se da un punto P y una cuerda AB. Trazar la cuerda HPE que corte a AB en D, de modo que:

HD : PB = m : n.

48. Demostrar que si en un trapecio se traza una paralela a las bases de modo que sea 1/2 p. g. entre éstas, las diagonales de los nuevos trapecios que se forman, son paralelas entre sí.

49. Demostrar que si en un rectángulo se bajan las perpendiculares de los vértices a las diagonales que no parten de ellos, los pies de dichas perpendiculares son los vértices de un nuevo rectángulo semejante al dado.

50.—Se pide construir un $\triangle$, dados: un lado, (en posición y magnitud) y dos puntos de la bisectriz del ángulo opuesto.

51. La base de un $\triangle$ queda fija, mientras que el vértice se mueve sobre una circunferencia de modo que el ángulo opuesto a la base permanezca constante.

¿Cuál es el L. G. de su centro de gravedad?

52. AB y CD son dos cuerdas de una circunferencia que se cortan en el punto P.

Demostrar que si se hace PB'=PB en la prolongación CP más allá de P y PD'=PD en la prolongación AP más allá de P. se tiene B'D' $\parallel$ AC.

53. El lado AB de un triángulo es fijo y su área p^2 es constante. ¿Cuál es el L. G. del centro de gravedad?

54. En una $\odot$ dada dibuje un diámetro AB. En un punto D de AB levante DE $\perp$ AB. Por A trace una cuerda cualquiera AM que corte a DE en el punto N. Demuestre que AD. AB = AN. AM. ¿Puede estar D en alguna prolongación de AB?

Justifique su opinión.

55. En el $\triangle$ ABC trace MN $\parallel$ AB, y las rectas que unen A con N y B con M que se cortan en S. Demuestre que en el trazo PSQ paralelo a AB y limitado por AC y BC, se verifica que SP =SQ.

56. En un triángulo isósceles trace las alturas y busque y mencione todos los triángulos congruentes o semejantes que se forman y diga cuál magnitud tiene el valor $\dfrac{c^2}{2a}$

(Talca, 1953).

57. Hay dos ⊙s tangentes exteriormente de radios R y r Demostrar que la tangente común exterior es igual a $2\sqrt{Rr}$.

58. Demostrar que en un triángulo rectángulo se tiene: $(a+b-c)^2=2(c-a)\ (c-b)$. Explique en qué teorema funda su conclusión.

59. Construir un triángulo dados: $a : b = m : n$, c, t_a.

60. Dado un triángulo ABC, trazar una recta DE que corte los lados AC y BC, de modo que $AD=DE=EB$.

Santiago, 1957.

61. La mediana de un trapecio mide 19 cm y el trazo que une los puntos medios de sus diagonales 7 cm.

¿Cuánto miden las bases?

62. Demostrar que si se une el vértice de un triángulo isósceles con un punto H cualquiera de la base, se verifica:

$$\overline{AC}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}\ .\ \overline{HB}.$$

63. Dadas dos rectas no paralelas, en un plano, y un punto P entre ellas. Trazar la recta que pasa por el vértice y por el punto P, sin prolongar las dos rectas dadas.

64. Resuelva la ecuación.

$$\sqrt{A+\sqrt{x}}+\sqrt{A-\sqrt{x}}=B$$

Valparaíso, 1957

65. En un trapecio isósceles ABCD, la base mayor es el duplo del lado no paralelo y uno de los ángulos basales inferiores vale 60º. Determine el valor de $BD : AB = CD : AC$.

Talca, 1957.

66. En un triángulo rectángulo, el ángulo β es igual a 60º. Calcule los catetos, sus proyecciones sobre la hipotenusa y la altura, en función de c.

67. Se pide inscribir un cuadrado en otro, de modo que sus áreas estén en una razón dada: k. Discuta.

68. ¿Está determinado el problema que pide construir un trapecio, dados: $a : b : c = m : n : o$ y la altura ¿Qué dato elegiría para determinarlo?

En seguida haga la construcción.

Talca, 1950.

69. Demuestre que en un triángulo rectángulo, $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$.

70. Sea una semi ⊙ de diámetro AB. Si AD y BC son dos cuerdas cualesquiera que se cortan en P, demuestre que: $AB^2 = AD \cdot AP + BC \cdot BP$.

Indicación: Baje desde P la ⊥ al diámetro AB.

71. En un △ ABC trazar una paralela MN de modo que $CM - CN = d$.

Santiago, 1952.

72. Construya un triángulo, dados: $h_c : b_\gamma = m : n$, β, q.

Talca, 1956.

73. En un triángulo ABC se da la altura h_c correspondiente al lado c, y los segmentos **u** y **v** determinados sobre ese lado por la bisectriz b_γ. Constrúyalo.

Talca, 1956.

74. Demuestre que en todo △ rectángulo, $c^2 = s^2 - 4r_\rho - \rho^2$.

Santiago, 1955.

75. Construir un △ dados: $a : b : c = 1 : 2^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{1}{2}}$ y $h_a + h_b - h_c = 4$ cm.

76. En el triángulo ABC se traza la bisectriz AD del ángulo α y la simetral de AD que corta a la bisectriz del ángulo exterior adyacente a γ, en E.

Demostrar que el cuadrilátero ADCE es inscriptible.

77. En un triángulo se verifica: $a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2$. Se pide demostrar que dicho triángulo es rectángulo.

78. Construir un triángulo, dados: h_a, h_b, h_c.

Santiago, 1951.

79. Construir un triángulo, dados el vértice A, el pie de la altura, el pie de la transversal y el pie de la bisectriz correspondiente al lado **c**.

Talca, 1954.

80. Demostrar que en todo triángulo: $p^2-q^2=a^2-b^2$.
Aplique esto al problema de construir un triángulo, dados:

$$c,\ a^2-b^2,\ h_c.$$

Valparaíso, 1952.

81. Dos lados de un triángulo inscrito en una circunferencia son, respectivamente, el radio y el lado del triángulo equilátero inscrito. Calcule el área del triángulo en función del radio **r** de la circunferencia.

Temuco, 1956.

82. Determine el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo, de catetos **a** y **b**, en función de ellos.

Temuco, 1954.

83. Inscribir un cuadrado en un rombo.
¿Podría ex inscribir otro?

84. Construya una circunferencia que pase por dos puntos dados y que intercepte en una recta dada un segmento de longitud dada. Discuta.

Talca, 1953.

85. Se pide construir un rombo, dados: el perímetro y sabiendo que $e : f = 5 : 4$.

86. Dados 4 puntos, se pide determinar un rectángulo de modo que cada uno de sus lados pase por uno de dichos puntos, dándose, además, la razón m : n en que uno de esos puntos divide al lado que pasa por él.

Talca, 1955.

87. Un sector circular tiene α° y radio **r.** Otro sector circular tiene $2\alpha^\circ$ y **2r.** ¿Cómo son las superficies entre sí?

88. Inscribir en una circunferencia dada un cuadrilátero conociendo dos lados y la razón de los otros dos.

89. Determinar el centro de una circunferencia que sea tangente a dos rectas dadas L_1 y L_2 y a una circunferencia dada. Discusión.

Valdivia, 1951.

90. Los rectángulos que tienen por lados los segmentos determinados por el ortocentro en cada altura de un triángulo, son equivalentes. Demuéstrelo para el triángulo obtusángulo y para el triángulo acutángulo. ¿Se verifica para el triángulo rectángulo?

Punta Arenas, 1952.

91. Determinar los límites entre los cuales puede variar n para que la siguiente ecuación tenga raíces reales.

$$2ax(ax+nc)+(n^2-2)c^2=0.$$

92. Calcule el valor numérico de:

$$\left(a-\frac{b}{c}\right):\left(\frac{d}{4}+\sqrt{e}\right)$$

si $a=12{,}4$ $\quad b=4\frac{1}{2}$

$c=b^{\frac{1}{2}}$ $\quad d=a.$ $\quad e=c^4$

Temuco, 1954.

93. Resuelva:

$$\frac{2}{z+(2-z^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{z-(2-z^2)^{\frac{1}{2}}}=z$$

Temuco, 1954.

94. Resuelva:

$$\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}+\frac{a-b}{x-1}\right]^{-1}=\frac{1-x}{x-a+b}+2$$

Santiago, 1955.

95. Simplifique: $\dfrac{1-a^2}{(1-x)^2-(a+x)^2}$

96. Dividа $(x-y)$ por $\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}$ utilice el resultado para hacer racional el denominador de la fracción.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$$

Talca, 1956.

97. Resuelva:

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-x}{d^2-x}}=\frac{c}{d}\sqrt{\frac{a^2-x}{b^2-x}}$$

98. El medio aritmético y el medio geométrico de dos números que se diferencian en 32 unidades, están en la razón de $\frac{5}{3}$

Halle los números. Temuco, 1956.

99. Determine la raíz cuadrada de:

$$9^n-2\cdot 6^n+4^n$$

¿Cuál es el valor de dicha raíz si $n=5$?

100. Calcular la raíz cuadrada de:

$$x^{-4}-4x^{-3}+8x^{-1}+4$$

101. Reduzca a su forma más simple:

$$\frac{2m}{a}\cdot\sqrt[\sqrt{2}]{a^{\frac{m}{\sqrt{8}}}\cdot b^{\frac{m}{\sqrt{50}}}\cdot c^{\frac{r}{\sqrt{2}}}} : a^{\frac{m}{5}}\cdot b^{-2n}\cdot c^{\frac{r}{2}}$$

102. Resolver:

$$x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$$

103. Determinar a, b, c, d, sabiendo que se tiene:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c};\ \frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

$a+b+c=15$ y $b+c+d=5$.

104. Si a y β son las raíces de

$$x^2+px+q=o,$$

formar la ecuación cuyas raíces sean:

$$\alpha + \frac{2}{\beta} \text{ y } \beta + \frac{2}{\alpha}$$

105. Resolver:

$$3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} = 2$$

106. Racionalizar y reducir:

$$\frac{1}{2}\, t\, \left(2at-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\left(a-t\right) - \sqrt{2at-t^2}$$

Punta Arenas, 1952.

107. Calcular las 3 raíces de la ecuación

$$(x-1)^3 = (3-x)^3$$

Punta Arenas, 1952

108. Resolver $x^3+27=0$. Y verifique si las 3 raíces satisfacen la ecuación.

Valparaíso, 1952.

109. Obtener el valor más simple de:

$$\sqrt[n]{\frac{5^{n+2}-5^n}{24}}$$

110. Dada la igualdad:

$$\frac{a^2b\sqrt{ac}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{ab^2}{c}}$$

expresar cada una de las cantidades **a**, **b**, **c**, en función de **las** otras dos.

Talca 1955.

111. Si $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$

y $a+b+c=2s$ demostrar que:

$$b^2-x^2=\frac{4}{c^2}s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)$$

Talca 1950.

112. Calcular aproximadamente el valor de $a^{-c} \cdot b^{-c}$ si
$a=0{,}65$
$b=\ 2$
$c=0{,}25$

Aprovechando este resultado, calcular $(16a)^{-c} \cdot b^{-c}$

Santiago, 1952.

113. Resolver:

$$2^x \cdot 5^{x+1} = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$$

114. Inscribir en un triángulo, un rectángulo cuyos lados sean entre sí como m : n.

115. Construir un triángulo rectángulo, dados: $b+h_c$, $a+c$.

116. Dada la ecuación $mx^2-2mx+m=2x-2$ se pregunta:
a) ¿Cuánto debe valer m para que las raíces de la ecuación sean dos números enteros consecutivos? ¿Cuáles son dichas soluciones?

b) ¿Qué sucede con la diferencia de las raíces si m es un número grande y sigue creciendo?

Talca, 1955.

117. Si a y b son las raíces de $x^2+px+1=0$, y c, d, las raíces de $x^2+qx+1=$ o verifique que se cumple la relación:

$$(a-c)\ (b-c)\ (a+d)\ (b+d) = q^2-p^2.$$

118. ¿Qué valor toma la expresión?

$$N = \frac{\dfrac{1}{x} - b}{\dfrac{1}{x} + b}\sqrt{\frac{1+ax}{1-ax}} \qquad \text{si } x = \sqrt{\frac{2}{ab} - \frac{1}{b^2}}$$

119. Exprese en forma más sencilla:

$$5\sqrt{\sqrt{1024}} - \sqrt{3+\sqrt{5}-13}\sqrt{\sqrt{8\frac{1}{4}} + 7\sqrt{\frac{2}{5}}}$$

120. Resolver: $2^{2x+3} - 57 = 65\ (2^x - 1)$

121. Resuelva:

$$\frac{1}{(1+b+b^2)^{1/2} + \sqrt{1-b+b^2}} = \frac{1}{4}$$

122. Reducir a la fórmula más sencilla:

$$\left[\frac{3(-1 \pm i\sqrt{3})}{5}\right]^3$$

123. Simplificar la fracción e indicar si es independiente de x o de y.

$$\frac{\sqrt{48\ y^3} - \sqrt{75\ y^3} + \sqrt{12x^2\ y}}{2x - y}$$

124. Demuestre que en $ax^2+bx+c=o$, si $a=c$, una de las raíces es el valor recíproco de la otra. En tal caso, ¿cuál es el valor $x'^2+x''^2$ expresado en función de la razón k entre a y b?

125. Resolver:

$$(y^2-7by+10b^2)^{\frac{1}{3}} - (y^2+by-5b^2)^{\frac{1}{3}} = y-2b$$

126. Calcular el valor de $A = \dfrac{(2x'-5)\ (2x''-5)}{x'^2+3x'x''+x''^2}$ siendo x' y x" las raíces de $x^2-15x+11=0$.

127. Determine las constantes a y b de la ecuación $3x^2-2ax+b=0$ de modo que la suma de sus raíces sea igual a 3 y su diferencia igual a uno.

128. Resolver:

$$\sqrt{x^2-3x-6} + \sqrt{x^2-3x+15} = 7.$$

129. En $x^3-1=0$, $x' = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ¿cuánto valen x'' y x'''?

130. Demuestre que 4^{-1} es el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{2^{x+1}}{(2^x)^{x-1}} : \frac{4^{x+1}}{(2^x)^{x-1}}$$

131. Formar la ecuación de segundo grado cuyas raíces x' y x'' satisfagan a:

$$x'x''+x'+x''-a=0$$
$$x'x''-a\ (x'+x'')+1=0$$

132. Demostrar la identidad:

$$(1+\sqrt{3})^3(5-3\sqrt{3})=[(1+\sqrt{3})+(3+3\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})]\cdot\frac{-2(7\sqrt{3}+11)}{13}$$

133. Resolver: $x^{1/2} + x^{-1/2} = -\dfrac{13}{6}$

$$\text{y} \quad x^{1/2} + \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{13}{6}$$

134. Dadas las ecuaciones:

$$z^2 = 7z - 12$$
$$z^2 = 3z - p$$

determine "p" de modo que ambas ecuaciones tengan una raíz común.

Temuco, 1954.

135. Determine m de manera que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2+(m-2)\ x-(m+3)=0$ sea igual a 25.

Santiago, 1955.

136. Encontrar la ecuación de segundo grado, cuyas raíces excedan en 5 unidades a las de la ecuación: $x^2-6x+a=0$.
¡Discusión!

137. Se pide resolver:

$$\frac{x^3+a^3}{x+a}=a^2$$

138. Obtenga la ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

$$\frac{a\pm\sqrt{a^2-16(a-1)}}{4\,(a-1)}$$

139. Exprese en la forma más simple:

$$\frac{x^n}{(x+y)^n}+\frac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}}-\frac{x^{n-2}}{(x+y)^{n-2}}$$

140. Dada la ecuación

$$x^2-mx+m^2-3m+2=0$$

a) Determinar para qué valores de m las raíces de la ecuación son iguales.

b) Determinar m de modo que una de las raíces sea el doble de la otra.

141. Resolver $\sqrt{9a^4+36a^3b-27a^2b^2+ab^3+b^4}$

142. Se pide determinar "a" de modo que en la ecuación, una de las raíces sea el cuadrado de la otra:

$$x^2-\frac{15x}{4}+a^2=0$$

143. Sea $ax^2+bx+c=0$ una ecuación cuyas raíces son x' y x''. Buscar otra ecuación cuyas raíces sean $\frac{1}{x'}$ y $\frac{1}{x''}$

144. Determinar p y q de manera que las raíces de $x^2 - px - q = 0$ tengan por diferencia 2i y estén en la razón de 1 : 3.

145. Resolver:

$$3x^2(a+b+c) + 4x(ab+bc+ac) + 4abc = 0$$

146. Reducir a la forma más simple:

$$(a+xi)\,(a-xi)^{-1} - (a-xi)\,(a+xi)^{-1}$$

Santiago, 1951.

147. Determinar m de modo que las raíces de la siguiente ecuación sean iguales y de signo contrario:

$$(z^2 - az)\,(m+1) - (bz - c)\,(m-1) = 0$$

Santiago, 1951.

148. Determinar los valores que deben tener a y b para que las siguientes ecuaciones tengan raíces iguales:

$$(7a-2)\,x^2 - (5a-3)\,x + 1 = 0$$
$$8bx^2 - (4b+2)\,x + 2 = 0$$

149. Verifique la expresión:

$$\frac{c^2}{x^{-2}} + (a^2-b^2)^{1/2} - \frac{(cx)^6}{(a+b)^2} - \frac{(a-b)}{c^{-1}\,x^{-1}}^{1/2}$$ se reduce a cero para $x = (c^{-1})\,\sqrt{a+b}$

150. Se sabe que $e = 2{,}72$ y que $e^3 = 20$.

Determine lo más cómodamente posible, los valores de e^7 y

$$\sqrt[4]{e^{-e^3}}$$

Talca, 1953.

151. Resuelva y discuta:

$$8(1 - x\sqrt{x}) = 4\left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right)^2 - 1$$

152. Reducir al máximo la expresión:

$$\left(m^{\frac{a}{b}} \cdot n^{-1}\right)^{b} : \left(\frac{m^{a^2-b^2}}{n^{ab+b^2}}\right)^{\frac{1}{a+b}}$$

(Talca).

153. Resuelva y discuta:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{a}{x} = \frac{b}{x} \pm \frac{x}{b}$$

Temuco, 1954

154. Verifique la identidad:

$$\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{7})^2 - 2(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = \sqrt{415-40\sqrt{105}}$$

155. Resolver:

$$5x^2+\sqrt{5x^2+x+1} = 5-x$$

156. Resolver la ecuación: $(x^2-x-20)\ (x^2-x-42) = 504$

Talca, 1954

157. Se pide construir un $\triangle$ rectángulo de hipotenusa dada $AB=c$ y en ella el punto de intersección de la bisectriz del ángulo recto.

Valdivia, 1956

158. En una $\odot$ de $r=30$ cm. el $\measuredangle$ del centro AOB mide $60°$. Se pide calcular el área del círculo tangente a los lados del $\measuredangle AOB$ y a la $\odot$.

159. Si α y β son las raíces de la ecuación $x^2+px+9=0$, forme la ecuación cuyas raíces son $(\alpha+\beta)^2$ y $(\alpha-\beta)^2$.

160. Si las raíces de la ecuación $ax^2+bx+b=0$ están en la razón de m : n, demuestre que:

$$\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$$

161. Resuelva:
$$\frac{a+b\sqrt[n]{cx+d}}{b+f\sqrt{cx+d}} = g.$$

162. En un $\triangle$ ABC se conoce el lado AC=b. Se pide calcular los lados BC=a y AB=c, en función de "b", sabiendo que la bisectriz del $\sphericalangle\ \beta$, es media proporcional geométrica entre los segmentos que esta bisectriz determina sobre el lado "b" y que la transversal de gravedad, t_b, es media proporcional geométrica entre los lados "a" y "c". Dígase de qué naturaleza es el triángulo ABC.

b) Cuadratura del círculo.—Consiste en construir un cuadrado equivalente a un círculo dado, geométricamente.

Si el lado del cuadrado $= x$

Resulta la ecuación: $x^2 = \pi r^2$.

Transformando la igualdad anterior en proporción se tiene: $r : x = x : \pi r$.

El lado del cuadrado es M. p. g. entre **r** y la semicircunferencia πr.

Como es imposible construir una recta exactamente igual a una semicircunferencia, puesto que π es inconmensurable, el problema no tiene solución exacta.

EJERCICIOS DE APLICACION

1. Desde un punto A situado en una $\odot$ de centro O, parten las cuerdas $AB = l_6$ y $AC = l_5$. ¿De qué polígono regular es el lado la cuerda BC?

Idem, ¿si $AB = l_6$ y $AC = l_4$? Idem, ¿si $AB = l_3$ y $AC = l_4$?
Idem, ¿si $AB = l_4$ y $AC = l_5$? Idem, si $AB = l_8$ y $AC = l_{12}$?

2. Dada una $\odot$ de radio $r = 12$ cm, calcular: a) el perímetro del cuadrado inscrito; b) el área comprendida entre los cuadrados inscrito y circunscrito; c) el perímetro del $\triangle$ equilátero inscrito; d) el perímetro del $\triangle$ equilátero circunscrito; e) la apotema ρ_3; f) el área del $\triangle$ equilátero inscrito; g) el área del $\triangle$ equilátero circunscrito.

3. En una $\odot$ de radio $= b$ determinar la razón entre las áreas: 1º) de los cuadrados inscrito y circunscrito en dicha $\odot$; 2º) de los $\triangle$s equiláteros inscrito y circunscrito; 3º) de los hexágonos regulares inscrito y circunscrito; 4º) del hexágono regular inscrito y $\triangle$ equilátero inscrito.

4. En un $\triangle$ equilátero cuyo lado mide 36 cm, se inscribe y circunscribe una $\odot$. Calcular los radios de ambas $\odot$s.

5. En una ⊙ se inscribe y circunscribe un △ equilátero. Calcular el radio de dicha ⊙ si el área comprendida entre ambos polígonos es 36 $\sqrt{3}$ cm^2.

6. Si la diferencia de las áreas entre los hexágonos regulares inscrito y circunscrito a una misma ⊙ es 18 $\sqrt{3}$. Determinar el radio de esta ⊙.

7. A partir del extremo A de un diámetro AB de una ⊙, se aplican sucesivamente y en el mismo sentido, las cuerdas $AC = l_4$ y $CD = l_{12}$. Si se une D con B, ¿de qué polígono es el lado la cuerda DB?

8. Dado un pentágono regular inscrito ABCDE, desde el vértice A se trazan la diagonal AC y una cuerda AF= al lado del △ equilátero inscrito. ¿De qué polígono regular es lado la cuerda FC.

9. Si un △ rectángulo tiene por catetos l_6 y l_{10}, tendrá por hipotenusa l_5, en el mismo círculo. Calcular l_5 en función del radio **r**.

INDICACIONES:

$AB = l_{10}$ (Fig. 292).
Se prolonga $AB \rightarrow B$
Se hace: $AC = AO = r = l_6$
Resulta: CA : AB = AB : CB.
(Probl. 28, pág. 378).

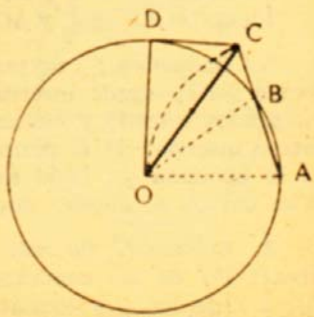

Fig. 292

Desde C se traza la tangente CD a la circunferencia O.

D(→O.

Resulta CA : CD = CD : CB
Teor. de la tang., pág. 310).

10. Dado un círculo, construir el lado del decágono y del pentágono regulares en la misma figura y sin dividir previamente el radio en sección aúrea.

Solución.— Se traza diámetro AB. (Fig. 293).

$OC \perp AB$

Se hace $MO = MA$

Con centro en M y radio MC se describe arco CD

$OD = l_{10}$

$CD = l_5$

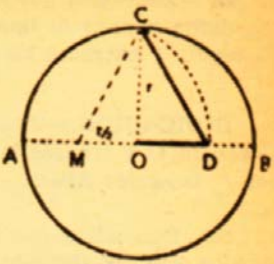

Fig. 293

Demostración.—En $\triangle$ rect. CMO se aplica teor. de Pitág.: $\overline{MC}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{OC}^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 = \frac{5r^2}{4}$

$$MC = MD = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

Luego: $OD = MD - MO = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = l_{10}$

También $CD = l_5$. En efecto, aplicando teor. part. de Pitág. en $\triangle$ rect. COD, se tiene:

$$CD = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2} = \sqrt{r^2 + [\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)]^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4r^2 + 6r^2 - 2r^2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10r^2 - 2r^2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = l_5$$

11. Demostrar que si en una circunferencia una cuerda AB$=l_{10}$, dicha cuerda es igual al segmento mayor del radio dividido en media y extrema razón.

INDICACION.—Unanse los extremos A y B de la cuerda con el centro O y trácese la bisectriz de uno de los ángulos basales del $\triangle$ isósceles ABO.

12. Demostrar que las diagonales AD y BE de un pentágono regular ABCDE inscrito se cortan en un punto M en media y extrema razón.

13. La altura de un $\triangle$ equilátero inscrito mide 1 m. Calcular el perímetro del $\triangle$ semejante circunscrito al mismo círculo.

14. Demostrar que en todo $\triangle$ isósceles cuyo ángulo basal es el duplo del ángulo del vértice, la bisectriz de un ángulo basal divide al lado opuesto en media y extrema razón.

15. ¿Cuál es el valor de la apotema de un hexágono regular cuyo perímetro es 120 m.?

• **16.** La apotema de un hexágono regular es 2,80. Calcular el perímetro del hexágono.

• **17.** Calcular la apotema ρ_8 de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio $=6$ cm.

• **18.** Si $l_8 = 4$ cm, calcular la apotema ρ_8 (octógono regular inscrito).

• **19.** En un octógono regular inscrito $l_8=1$ m. ¿Cuánto mide r del círculo circunscrito?

20. La diferencia entre l_4 y l_8 de un cuadrado y octógono regular inscritos en una misma circunferencia es 3 m. Calcular el radio de la circunferencia y los lados de ambos polígonos.

• **21.** Calcular la apotema ρ_{10} del decágono regular inscrito, en función del radio r de la circunferencia circunscrita.

22. El lado l_{12} de un dodecágono regular inscrito mide 30 cm; determinar el radio de la circunferencia circunscrita.

• 23. Calcular l_{12}, sabiendo que $l_6=r$

• 24. Calcular l_8, sabiendo que $l_4=r\sqrt{2}$

25. Calcular l_6, deduciéndolo de $l_3=r\sqrt{3}$

• 26. Calcular l_{16}, sabiendo que $l_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

27. Calcular l_{24}, sabiendo que $l_{12}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

28. Calcular l_3, sabiendo que $l_6=r$

29. Calcular l_4, partiendo de que $l_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

30. Calcular l_5, sabiendo que $l_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

• 31. Calcular l_8, sabiendo que $l_{16}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

• 32. Calcular l_{10}, deduciéndolo de $l_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

33. Calcular l_{20}, sabiendo que $l_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

• 34. Calcular L_3, si $l_3=r\sqrt{3}$

• 35. Calcular L_4, si $l_4=r\sqrt{2}$

36. Calcular L_6, si $l_6=r$

• **37.** Calcular L_5, si $l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

• **38.** Calcular L_8, si $l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

• **39.** Calcular L_{16}, si $l_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

• **40.** Calcular L_{12}, si $l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

41. Calcular L_{10}, si $l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

42. Calcular L_{24}, si $l_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

mínese el radio de la $\odot$ circunscrita en función de m.

43. Calcular el valor de l_n en función de L_n y de r.

44. Calcular en función del radio r de la $\odot$: 1º el área del pentágono regular inscrito; 2º el área del pentágono regular circunscrito; 3º el área del hexágono regular inscrito; 4º el área del hexágono regular circunscrito; 5º el área del decágono regular inscrito; 6º el área del dodecágono regular circunscrito.

45. El perímetro del octógono regular inscrito en una $\odot$ es $32\sqrt{2+\sqrt{2}}$ metros. Calcular: 1º el radio r de la $\odot$; 2º el perímetro del octógono circunscrito; 3º el área del octógono inscrito; 4º el área del octógono circunscrito.

46. El área de un pentágono regular circunscrito es s^2. Determínese el radio de la $\odot$ inscrita en función de s.

47. El área de un octógono regular inscrito es m^2. Deter-

48. Las bases de un trapecio isósceles inscrito en una $\odot$ miden, respectivamente, 20 m y 12 m y el lado del mismo mide de 8 m. Calcular: 1º el área del trapecio; 2º el radio de la $\odot$ circunscrita.

49. Un trapecio isósceles inscrito en una $\odot$ de radio r, tiene por base menor r y por lado $r\sqrt{2}$. 1º Pruébese que las diagonales son $\perp$s; 2º Calcular el área del trapecio.

50. Demostrar que el área de un $\triangle$ rectángulo es igual al producto de los segmentos que el punto de contacto de la $\odot$ inscrita determina sobre la hipotenusa.

51. ¿Cuál es el perímetro de un octógono regular cuya área es igual 12 m^2?

52. Desde un punto A de una $\odot$ se trazan sucesivamen- las cuerdas $AB = BC = l_4$; $CD = l_6$, y finalmente, DA. Calcular: 1º el valor de los $\sphericalangle$s del trapezoide ABCD; 2º su perímetro; 3º su área.

53. En una semi $\odot$ de diámetro AB, se marcan los puntos C y D, sobre ella, de modo que arc. $AC = 60°$ y arc. $BD = 45°$. Enseguida se unen los puntos A, C, D y B. Calcúlese cada uno de los ángulos del trapezoide ABCD y su perímetro.

54. En una $\odot$ de radio r se inscribe un $\triangle$ equilátero ABC. Enseguida se une el punto medio D del arco AB con el punto medio E del lado BC y se prolonga DC hasta cortar la $\odot$ en F. Calcular en función de r, BE, DE, EF y AF.

55. En una semi $\odot$ de diámetro MN, desde el extremo M, se aplica la cuerda $MA = l_6$, y desde el extremo N, se aplica la cuerda $NB = l_{12}$. Calcular el área del trapezoide MABN en función del radio r de la $\odot$.

56. En una $\odot$ de radio r se marcan los puntos M, N, P y Q de modo que $MN = l_4$, $NP = l_{12}$ y $PQ = l_6$. Se pide calcular el área del trapezoide MQPN.

Ejemplos: Si $n = 5$

$x = \sqrt{5a^2} = \sqrt{4a^2 + a^2}$ = **hipotenusa** de un $\triangle$ **rect**. de catetos 2a y a.

Si $n = 7$

$x = \sqrt{7a^2} = \sqrt{16a^2 - 9a^2}$ = **cateto de un** $\triangle$ **rect.** de hipotenusa 4a y cuyo cateto es igual a 3a.

Si $n = 14$

$$x = \sqrt{14a^2} = \sqrt{9a^2 + 4a^2 + a^2}$$

o también: $x = \sqrt{16a^2 - a^2 - a^2}$

Se construye según N.os 13 ó 14 ó 15.

En general, todo número entero se puede representar por una suma de, a lo más, cuatro cuadrados. Así:

$$23 = 9 + 9 + 4 + 1 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

EJERCICIOS DE APLICACION

Construir el valor de x en las siguientes expresiones:

56. $x = \dfrac{ab}{2c}$ **57.** $x = \dfrac{2ab}{c}$ **58.** $x = \dfrac{a^3}{bc}$

59. $x = \dfrac{ab^2}{c^2}$ **60.** $x = \dfrac{a^3}{b^2}$ **61.** $x = \dfrac{a^2 - b^2}{3c}$

62. $x = \sqrt{3ab}$ **63.** $x = \dfrac{ab}{\sqrt{cd}}$ **64.** $x = \sqrt{2a^2 - ab}$

65. $x = \sqrt{a^2 + \dfrac{bcd}{e} - \dfrac{f^2g}{h}}$ **66.** $x = a(1 + \sqrt{5})$

67. $x = a\sqrt{\dfrac{2}{3}} - b\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ **68.** $x = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$

69. $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt[4]{a^3b}$ **70.** $x = \frac{a^2 + b^2}{c}\sqrt{5+\sqrt{7}}$

71. $x = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 2b^2 - 0{,}5c^2}$ **72.** $x = \sqrt{\frac{4}{3}b^2\sqrt{3}}$

73. $x = \sqrt{2c^2 - ab}$ **74.** $x = \frac{ab - cd}{f}$ **75.** $x = \sqrt{ab + cd}$

76. $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$ **77.** $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$ **78.** $x = c(2 - \sqrt{2})$

79. $x = \sqrt[4]{c^2df}$ **80.** $x = (bcdf)^{0{,}25}$

81. $x = \sqrt{ab + \sqrt{c^4 + d^4}}$ **82.** $x = \sqrt{a\sqrt{\frac{2}{3}cd}}$

83. $x = \frac{a^2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{b}$ **84.** $x = \frac{a^2 + b^2}{a + b + d\sqrt{5}}$

85. Determinar gráficamente dos trazos x e y cuya diferencia sea 4 cm y su producto 12 cm^2.

86. Construir dos trazos cuya suma sea 3a y la media proporcional geométrica sea a.

87. Construir x en: $\frac{c}{b} - \frac{x}{a} = -\frac{b}{c}$

88. Construir x en: $\frac{\sqrt{a}}{x} = \frac{\sqrt{b}}{a - x}$ siendo a y b trazos dados.

89. Construir dos trazos cuya diferencia sea 2a y la media proporcional sea $a\sqrt{3}$.

90. Construir el trazo x determinado por la ecuación $x^2 = a^2\sqrt{3}$.

91. Construir el trazo determinado por la ecuación

$$x^2 = a\sqrt{b^2\sqrt{2}}$$

92. Indique la construcción del trazo determinado por la ecuación $a^3x + b^3x + c^3x + d^3x = abcd$, en que a, b, c, y d son trazos dados.

93. Construir x en:

$$a^{-2}x + c^{-2}x = \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^{-2} \right. \cdot b^{-1}$$

94. Siendo **p** y **q** dos trazos dados, construir las raíces de la ecuación de 2º grado $x^2 - 2px + q^2 = 0$.

Solución.—Sean x' y x'' las raíces.

Se requiere:

1º Que sea $q < p$, para que las raíces no resulten imaginarias.

2º Que sea $\left.\begin{aligned} x' + x'' &= 2p. \\ x'x'' &= q^2 \end{aligned}\right\}$ Propiedades de las raíces de la ec. de 2º grado.

Construcción.—Se describe una ⊙ de radio $OA = p$. (Fig. 296.)

Se trazan los diámetros $AB \perp CD$.

Se traza $EF \parallel AB$ (a la distancia q de AB).

Se hace $FG \perp AB$.

Las raíces gráficas de la ecuación son: $GA = x'$ y $GB = x''$.

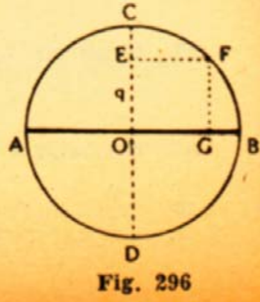

Fig. 296

del radical, resulta: $x = p - \dfrac{a}{2}$.

Construcción.—Se construye △ rect. AEB con

$BE = \dfrac{a}{2}$ y $BA = 2r$.

$AE = p$.

Se hace: $AD = AF = p - \dfrac{a}{2} = x$, y se prolonga hasta C.

La recta ADC cumple con las condiciones del problema.

NOTA.—Demostrar y discutir el problema.

EJERCICIOS DE APLICACION

Resolver los siguientes problemas por el análisis algebraico:

* **95.**—Dado un **trazo a**, dividirlo en dos segmentos tales que los cuadrados construídos sobre ellos, sean entre sí como 1 : 2.

* **96.**—Dividir un trazo dado **a** en dos segmentos, de modo que el rectángulo formado por los segmentos, sea equivalente a la diferencia de los cuadrados construídos sobre ellos.

* **97.**—Construir un △ rectángulo dados el cateto **a** y la proyección **q** del otro cateto.

* **98.**—En un cuadrado dado inscribir un △ equilátero, de modo que las dos figuras tengan un vértice común.

* **99.**—Dado un cuadrado, trazar entre sus lados contiguos cuatro rectas de modo que el octógono que se forme sea regular.

* **100.**—En una ⊙ de radio **r**, inscribir un rectángulo cuyo perímetro sea 2s.

* **101.**—Construir un △ equilátero: a) dada la suma $a+h=s$, del lado y la altura; b) dada la diferencia $a-h=d$; c) dada el área p^2.

* **102.**—Construir un cuadrado conocida la suma **s** de la diagonal y el lado.

* **103.**—Construir un △ rectángulo isósceles de perímetro dado 2s.

* **104.**—Construir un △ rectángulo conocida la hipotenusa **c** y la razón de sus catetos $a : b = 1 : 2$.

* **105.**—Construir un △ rectángulo dados los segmentos **u** y **v**, situados sobre la hipotenusa a ambos de b_γ.

* **106.** Dividir un △ dado ABC: 1º en dos partes equivalentes por medio de una recta paralela a otra recta dada L; 2º en dos partes que sean entre sí como 1:3.

* **107.**—Construir un rectángulo, dado su perímetro **2s** y equivalente a la suma de dos cuadrados dados: a^2 y b^2.

* **108.**—Dado un △ triángulo equilátero de lado **l**, transformarlo en un cuadrado.

* **109.**—Dado un △ ABC, transformarlo en un △ equilátero.

110.—Dividir un trazo dado **a** en dos segmentos tales que el rectángulo formado por dichos segmentos sea equivalente al cuadrado construído sobre la diferencia de ellos.

* **111.**—Desde un vértice de un cuadrado trazar una transversal que lo divida: 1º en la razón de 1 : 2; 2º en la razón de 2 : 3.

112.—En un △ dado ABC, inscribir un rectángulo de modo que: a) la suma de sus lados contiguos sea igual a un trazo dado s; b) la diferencia de sus lados contiguos sea igual a **d**; c) que su área sea equivalente a un cuadrado dado a^2; d) que sus lados contiguos estén en una razón dada $\frac{m}{n}$.

113.—Dividir un cuadrado dado en tres partes equivalentes. por dos $\parallel$s a una de las diagonales.

* **114.**—Dado un trapecio ABCD, dividirlo en dos partes equivalentes por medio de una paralela a las bases.

* **115.**—Dado un semi-círculo, inscribir en él un cuadrado.

* **116.**—En un cuadrado dado, inscribir otro cuya área sea c^2.

117.—Por el punto medio de una cuerda dada $AB=c$, de una $\odot$, trazar otra cuerda cuyos segmentos sean entre si como 2 : 1.

* **118.**—Desde un punto situado fuera de un círculo dado, trazar una secante que resulte dimidiada por la circunferencia

* **119.**—Dado un $\triangle$ ABC, dividirlo por una recta en dos partes equivalentes, de modo que una de las figuras resultantes sea un $\triangle$ isósceles.

120.—Dado un $\triangle$ isósceles ABC encontrar sobre la altura CD, $\perp$ a la base, un punto G de modo que GD y las $\perp$s trazadas desde G a los lados, dividan al $\triangle$ en tres partes equivalentes.

* **121.**—Construir un $\triangle$ dados: h_c, b_γ, c.

* **122.**—Construir un $\triangle$ dados: u, v y su área$=p^2$.

* **123.**—Dado un $\triangle$ ABC, dividirlo en tres partes equivalentes por medio de paralelas a uno de sus lados.

* **124.**—Dado un rectángulo ABCD, inscribir en él un rombo de modo que de los cuatro $\triangle$s que se forman, dos opuestos sean isósceles.

* **125.**—En un cuadrado dado inscribir un rectángulo de área p^2.

* **126.**—En un △ equilátero dado, inscribir un cuadrado.

* **127.**—En la prolongación de un diámetro CD de un círculo dado, hallar un punto P tal que la tangente trazada desde él. sea igual al doble de la distancia PD, del punto a la circunferencia.

* **128.**—Dado un △ ABC, cortarlo por una transversal, de modo que las dos figuras que resulten, tengan igual perímetro y área.

129.—Dadas dos ⊙s concéntricas construir en el círculo mayor una cuerda, que sea igual al duplo de la cuerda interceptada por la circunferencia menor.

130.—Dividir un círculo dado en tres partes equivalentes por medio de circunferencias concéntricas.

131.—Desde un punto situado fuera de un círculo dado, trazar una secante de modo que el rectángulo formado por su parte externa y la cuerda interceptada por la ⊙, sea equivalente a un cuadrado dado a^2.

132.—Dado un punto **P** en el interior de un círculo, trazar por él una cuerda, de modo que la diferencia de sus dos segmentos sea igual a un trazo **d.**

133.—Se dan dos ⊙s tangentes exteriormente. Por el punto de tangencia trazar una secante, de modo que el rectángulo que tenga por lados las dos cuerdas, sea equivalente a un cuadrado dado $\mathbf{p}^2$.

134.—Dado un △ ABC, determinar un punto **P** sobre el lado AB, de modo que el rectángulo formado por las ⊥s trazadas desde dicho punto a los lados, sea equivalente a un cuadrado dado a^2.

135.—Inscribir un círculo en un cuadrante de otro círculo.

* **136.**—Dado un △ ABC, dividirlo en dos partes equivalentes por medio de una ⊥ a uno de sus lados.

137.—En un cuadrante, inscribir un cuadrado tal que, dos de sus vértices estén situados sobre el arco y los otros dos sobre los radios $\perp_s$.

• **138.—En un △ equilátero ABC dado, inscríbase otro △ equilátero cuya área sea igual a la mitad del primero.**

139.—Dividir un trazo de 60 cm. en media y extrema razón. (Sólo se dispone de un metro plegadizo dividido en dm., cm. y mm.)

140.—Dados un círculo y un punto P, situado fuera de él, trazar desde dicho punto una secante que corte la circunferencia en dos puntos X y Z, y de modo que PX y PZ sean catetos de un △ rectángulo cuya hipotenusa sea el diámetro.

141.—C es el punto medio de AB. Se construyen tres semicircunferencias que tienen por diámetros AB, AC y BC, respectivamente, situadas las tres a un mismo lado de AB. Construir la circunferencia tangente a estas tres semicircunferencias.

GEOMETRIA DEL ESPACIO O ESTEREOMETRIA
PLANOS Y RECTAS EN EL ESPACIO

CAPITULO XIX

§ *1.—DEFINICIONES:*

Al indicar el objeto de la Geometría (Omer Canó, Tomo I, pág. 14), la dividimos en:

1º Geometría plana o *planimetría: estudia las figuras geométricas en un mismo plano.*

PROBLEMA 38.—*En un punto situado sobre un plano levantar la perpendicular a él.*

Solución.— Desde un punto cualquiera situado fuera del plano, se baja la perpendicular. (Problema 37).

Por esta perpendicular y el punto dado se hace pasar un plano.

En este último plano, y por el punto dado, se traza la paralela a la perpendicular anterior.

EJERCICIOS DE APLICACION

142.—¿Qué posición tienen el piso y el cielo raso de la sala de clase? ¿Y el piso y una muralla?

143.—¿Por qué un piso de tres patas queda mejor en equilibrio que otro de cuatro patas?

144.—Si una puerta gira en torno de la arista que tiene las bisagras. ¿cuántos puntos deben afirmarse para que la puerta quede inmóvil?

145.—Dadas tres rectas OA, OB y OC que concurren, en un mismo punto O. ¿Cuántos planos determinan si están situados en distintos planos?

146.—¿Cuántas perpendiculares se pueden trazar en el espacio en un punto de una recta L? ¿Dónde se hallan situadas?

147.—Dos rectas perpendiculares a una tercera, en el espacio, ¿son forzosamente paralelas?

148.—¿Podrían ser perpendiculares a un mismo plano, dos rectas que se cruzan?

* **149.**—¿Cuál es el L. G. de los puntos equidistantes de dos puntos dados, en el espacio?

150.—Dados en el espacio una recta L y dos puntos fuera de ella (determinar en la recta un punto que equidiste de los dos puntos dados.

* **151.**—Dado un plano y un punto A fuera de él, indicar cuál es el L. G. de las rectas paralelas al plano que pasan por el punto A.

• **152.—Determinar el L. G. de los puntos equidistantes de dos planos dados: a) los planos son paralelos; b) los planos se cortan.**

• **153.—Determinar el L. G. de los puntos que equidistan de tres puntos dados en el espacio A, B y C.**

• **154.—¿Cuál es la L. G. de los puntos de un plano que equidistan de dos puntos dados A y B situados fuera de él?**

155.—Dado un triángulo rectángulo isósceles tal que $CA = CB = 10$ cm, se levanta $CP = 10$ cm perpendicular al plano del triángulo. Calcular AB, PA, PB. ¿De qué naturaleza es el △ PAB?

156.—En el vértice C del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC, se levanta la perpendicular al plano del triángulo. Siendo M un punto variable de esta perpendicular, mostrar que los △s MCA y MCB son △s rectángulos. ¿A qué condición será equilátero el triángulo MAB?

157.—Una sala rectangular mide 6,40 de largo y 4,80 m de ancho. En el piso, a tres de los ángulos de la sala se fija un cordel de 5 m de largo. Los extremos libres de estos cordeles queden tirantes. Precisar este punto y calcular la altura de la sala.

158.—Dado un triángulo equilátero ABC de lado a, desde un punto P, exterior al plano del triángulo y situado a una distancia l de cada uno de los tres vértices, se baja la perpendicular al plano ABC. Precisar la posición del pie de esta perpendicular y calcular su longitud PH. ¿Con qué condición ha de cumplir l para que sea posible el problema?

159.—Dados dos puntos A y B en el espacio, por el punto medio O del segmento AB, se traza el plano P perpendicular a AB. 1º Mostrar que cualquier punto M de este plano equidista de A y B. 2º Mostrar que cualquier punto M, equidistante de A y B está en el plano P. De este estudio deducir una proposición general.

160.—¿Cuál es el lugar de los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto A a un plano que gira alrededor de una recta?

161.—Dado un punto O situado a una distancia d de un plano dado P ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos de este plano situado a una distancia l del punto O? (Discutir según los valores de l).

162.—Trazar por un punto dado P un plano paralelo a dos rectas que se cruzan L y L'.

163.—Las distancias de los puntos A y B a un plano son 14 y 29, respectivamente. Si la distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas desde los puntos A y B al plano es 20 ¿cuál es la distancia entre los dos puntos?

* **164.**—Determinar el L. G. de todos los puntos que están a una distancia dada **a** de un plano dado.

165.—Demostrar que dos planos ||s a un tercero son ||s entre sí.

166.—Demostrar que si entre tres planos ||s se trazan dos rectas cualesquiera, los segmentos de las rectas que interceptan los planos, son proporcionales.

CAPITULO XX

ANGULOS DIEDROS Y POLIEDROS

§ *1.—ANGULOS DIEDROS*

Llámase *ángulo diedro* a la abertura comprendida entre dos planos que se cortan.

Los planos que forman el diedro se llaman *caras.*

La intersección de dos caras se llama *arista.*

El ángulo diedro se designa por las dos letras de la arista o bien por cuatro letras: las dos de la arista y una de cada cara. Las de la arista se leen entre las otras dos.

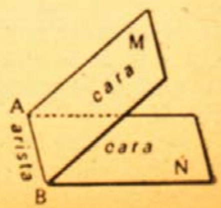

Fig. 321

EJERCICIOS DE APLICACION

167.—¿Cuál es el L. G. de los puntos del espacio que equidistan de las caras de un diedro?

168.—Dado un triángulo ABC, se pasa por cada uno de los vértices un plano perpendicular al lado opuesto. Mostrar que los tres planos así determinados tienen una recta común y que esta recta es perpendicular al plano ABC.

169.—Un segmento AB penetra en O en un plano P. Se proyectan A y B en a y b sobre el plano P. Sabiendo que AB = 1 m, Aa = 20 cm, Bb = 30 cm, calcular las longitudes ab, AO, OB y el ángulo de la recta AB con el plano P.

170.—Siendo MABN, NABP y PABM tres diedros consecutivos iguales de misma arista AB ¿cuál es el valor de cada uno?

171.—Comparar los diedros formados por dos planos paralelos cortados por un tercer plano.

172.—Mostrar que dos rectas trazadas a un plano desde un mismo punto fuera de él y que forman con él ángulos iguales, son iguales entre sí y recíprocamente.

173.—Desde un punto situado fuera de un plano se traza a este plano una oblicua de longitud a y que forma con él un ángulo de 30º; ¿cuál es la distancia del punto al plano?

174.—Construir un plano perpendicular a un plano dado M y que pase: 1º por una recta situada en el plano M; 2º por una recta paralela a M; 3º por una recta oblicua a M.

175.—En el centro O de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero ABC de lado a, se levanta la perpendicular OS al plano ABC. Se une un punto S de esta perpendicular con los vértices A, B, C.

1º Mostrar que son iguales las caras del triedro de vértice S

2º Determinar la posición de S para que este triedro sea trirectángulo.

3º Determinar la posición de S para que el triedro S tenga por caras tres triángulos equiláteros.

176.—Dado un triedro tri-rectángulo OABC, se toman en las aristas longitudes iguales OA=OB=OC=a. Mostrar que el triángulo ABC es equilátero. Se proyecta O en el plano ABC; determinar la posición del pie de la proyectante y calcular la longitud de ésta.

177.—En las aristas de un triedro tri-rectángulo, se toman tres cualesquiera longitudes OA, OB, OC. Se traza la altura AH del triángulo ABC, se une O con H y se proyecta O en O' del plano ABC.

1º Mostrar que OH es perpendicular a BC.

2º Mostrar que el punto O' se halla sobre la recta AH.

3º Mostrar que O' es el punto de concurrencia de las alturas del triángulo ABC.

177'.—Demuestre que: Si una recta y un plano son $\perp_s$ a otro plano, o son $\perp_s$ entre sí, o la recta está en el plano.

CAPITULO XXI

CUERPOS GEOMETRICOS. SUS PROPIEDADES Y ELEMENTOS PRINCIPALES

Se dividen en $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Cuerpos poliedros}\text{: caras planas} \\ \text{y} \\ \textit{Cuerpos redondos}\text{: caras curvas.} \end{array} \right.$

I.—CUERPOS POLIEDROS

§ *1.—DEFINICIONES Y DIVISION GENERAL*

Llámase cuerpo poliedro un sólido limitado completamente por porciones de planos.

En un poliedro se pueden considerar:

Dem.): Sea **P** una pirámide cualquiera y sea **EG** una sección paralela a la base AC. Hay que demostrar que la pirámide **S—EFGL** y **S—ABCD** son semejantes. (Fig. 352).

1º Las caras homólogas son semejantes. En efecto:

EFGL∼ABCD (Teor. CVI)

Las caras laterales también lo son por tener en **S** un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.

2º Los ∢s rectilíneos son respectivamente iguales.

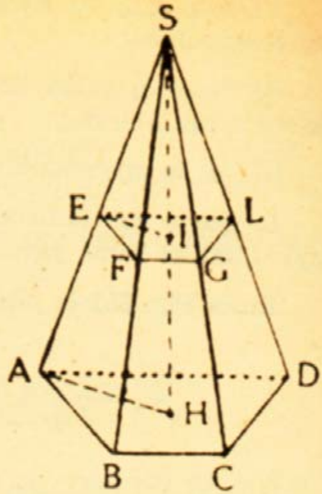

Fig. 352

En los triedros A y E los ∢s de las caras son respectivamente iguales por pertenecer a polígonos semejantes. Luego estos ∢s triedros podrían coincidir. Lo mismo ocurre con los demás triedros.

EJERCICIOS DE APLICACION

178.—Un prisma recto tiene por base un hexágono regular de 10 cm. de lado. Sus caras laterales son cuadradas. Calcular la longitud de las tres diagonales que parten de uno de sus vértices.

* **179.**—Las tres dimensiones de un paralelepípedo recto de base rectangular son entre sí como 2 : 3 : 6. Calcular dichas dimensiones sabiendo que una de sus diagonales mide 35 cm

• **180.**—La arista de un cubo mide $10\sqrt{3}$ cm. ¿Cuál es la longitud de una de sus diagonales?

• **181.**—Si una diagonal de un cubo mide 30 cm. ¿Cuánto mide su arista?

182.—Demostrar que en un paralelepípedo de base rectangular la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren a un mismo vértice es equivalente al cuadrado de una de sus diagonales.

• **183.**—Demostrar que en un paralelepípedo una sección plana corta cuatro aristas paralelas, dicha sección es un paralelógramo.

• **184.**—Si por dos aristas opuestas de un cubo se hace pasar una sección plana (**plano diagonal**), decir la naturaleza del polígono de la sección y calcular su área si la arista del cubo es igual a $10\sqrt{2}$.

185.—Demostrar que en un paralelepípedo las rectas que unen los puntos medios de dos aristas paralelas situadas en distintas caras, se cortan en un mismo punto que, coincide con el punto de concurrencia de las diagonales.

186.—Por los extremos de tres aristas de un cubo que parten de un mismo vértice A se hace pasar un plano.

Demostrar que la sección resultante es un $\triangle$ equilátero y que la diagonal AA' es perpendicular al plano de sección. Determinar la posición del punto en que la diagonal corta la sección.

• **187.**—La altura de una pirámide recta regular triangular mide 8 m. y su arista basal es igual a $6\sqrt{3}$. ¿Cuánto mide su arista lateral?

• **188.**—En una pirámide recta regular triangular, 1º la arista basal $= 6\sqrt{3}$ m y la altura 4 m. Calcular la apotema lateral; 2º la arista lateral $= 12$ m y su apotema lateral $= 6\sqrt{3}$ m.

Calcular la apotema basal; 3º la arista basal $= 12 \sqrt{3}$ y la apotema lateral $= 10$. Calcular la altura de la pirámide; 4º la arista lateral $= 2$ m y la altura $= 1{,}6$ m. Calcular la arista basal.

189.—La arista basal de una pirámide hexagonal regular mide 4 cm y su arista lateral mide 8 cm. ¿Qué ángulo forma esta última con la base?

190.—Si en los centros de las $\odot$s circunscritas a las caras laterales de un tetraedro regular se levantan las $\perp$s a los planos de las caras, demostrar que estas $\perp$s concurren en un punto que equidista de los vértices del tetraedro.

191.—Demostrar que el plano que pasa por los puntos medios de tres aristas no $\parallel$s y no concurrentes de un cubo corta al sólido según un hexágono regular.

Resulta: $\left.\begin{array}{l} OM \perp BC \\ O'M \perp BC \end{array}\right\}$ MO y MO' son simetrales de BC.

Plano **OMO'⊥BC.** (Teor. LXXXVII).

Por tanto OMO'⊥a los planos ABC y BCD. (Estos planos contienen BC).

Entonces: OE y O'F están en el plano OMO'.

También OE y O'F concurren en un punto P. (Por ser ⊥s a dos rectas que se cortan).

Luego **P** equidista de **A, B, C y D** y es centro de la superficie esférica en que se hallan situados tales puntos.

El radio es la distancia común de P a los 4 puntos dados.

EJERCICIOS DE APLICACION

* 192.—La circunferencia de la base de un cilindros es C. Calcúlese el valor del radio.

* 193.—¿Cuánto mide la generatriz g de un cono recto, si el radio de la base=6 m. y la altura=8 m?

* 194.—Calcular la altura de un cono recto cuya generatriz mide 10 m y el radio basal es igual a $5\sqrt{3}$ m.

195.—Calcular el radio basal de un cono recto cuya generatriz mide 20 m y su altura 16 m.

196.—Escriba la fórmula que permita hallar:

1º la generatriz g de un cono recto en función de su altura h y de su radio basal r.

2º h en función de g y r.

3º r en función de g y r.

197.—¿Cuál es la altura de un cono recto cuya generatriz es 15 y la circunferencia basal = 18π?

* 198.—¿Cuál es la altura de un tronco de cono recto cuyos radios basales miden respectivamente r=13 m; r'=7 m y la generatriz 10 m.

EJERCICIOS DE APLICACION

199.—Calcular el área de un cubo cuya arista mide 5 m.

* **200.**—¿Cuál es la área total de un cubo en que la diagonal de una de sus caras es: 1º $3\sqrt{a}$?; 2º m?

* **201.**—¿Cuál es el área total de un cubo cuya diagonal mide 1º) $4\sqrt{3}$?; 2º) d.?

* **202.**—Si el área total de un cubo es 294 m^2 ¿Cuánto mide su arista?

203.—¿Cuánto debe medir la arista de un cubo para que su área sea la mitad de la de otro que tiene 16 m de arista?

* **204.**—Si el área total de un cubo es 108 m^2. ¿Cuánto mide la diagonal de una cara?

* **205.**—Si el área total de un cubo es 500 m^2 ¿Cuál es la longitud de una de sus diagonales?

206.—¿Cuál es el área total de un paralelepípedo rectangular cuyas aristas concurrentes a un mismo vértice miden 4 m, 8 m, 5 m?

207.—El área total de un paralelepípedo rectangular es equivalente a la de un cubo. Si el paralelepípedo mide 40,2 cm de largo, 12 cm de ancho y 8 cm de alto, ¿cuánto mide una de las diagonales del cubo?

208.—El área total de un paralelepípedo de base cuadrada es 80 m^2; su altura es 3 m. Calcular el lado de la base.

209.—El área total de un prisma recto de base rectangular es 100,2 m^2 y su altura es 2 m. Las dimensiones de la base son entre sí como 2 : 3. Calcular la longitud de una de las diagonales.

210.—Calcular el lado de la base de un prisma hexagonal regular, cuya área total es igual a $648 + 108\sqrt{3}$ y su altura al triple del lado de la base.

211.—El área lateral de un prisma recto de base pentagonal regular es 104 m^2. Calcular su altura sabiendo que uno de los lados de la base es igual a 2,60 m.

212.—El área lateral de un paralelepípedo rectangular es 63 m^2 y su altura 2 m. Calcular el perímetro de la base.

• **213.**—Las tres aristas que concurren a un mismo vértice de un paralelepípedo rectangular suman 17 m.

Calcúlese cuánto mide cada una de ellas, sabiendo que la diagonal de una de sus bases es 10 m y la superficie total del paralelepípedo es 180 m^2.

214.—Calcular el área total de un paralelepípedo recto de base rombal, sabiendo que uno de los ángulos de la base mide $60°$, la arista basal 4 m y la altura 5 m.

215.—La base de un prisma recto regular hexagonal se halla inscrita en una $\odot$ de 12 cm. de radio. Calcular el área total del prisma si su arista lateral mide 80 cm.

216.—Calcular el área total de un paralelepípedo recto de base rectangular cuyas aristas concurrentes a un mismo vértice son entre si como 1 : 3 : 5 y cuya diagonal es igual a $4\sqrt{35}$ cm.

• **217.**—La base de un prisma recto es un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia cuyo radio es 3 m. Calcúlese la altura, sabiendo que su área lateral es $135\sqrt{3}$ m^2.

218.—¿Cuál es el área total de un prisma octogonal regular, si la arista basal mide 4 m y su altura 6 m?

219.—En un prisma oblicuo, la proyección de la arista lateral sobre la base es 3 m; la altura es 4 m. Calcular el perímetro de una sección recta si el área lateral del prisma es igual a 60 m^2.

220.—La superficie de un prisma es 22,04 m^2. ¿Cuál es la de un prisma semejante cuyas dimensiones son la mitad de las del primero?

OBSERVACION.—En la Fig. 380, MQNP es una sección media paralela a las bases del tronco de pirámide. Es fácil probar que el perímetro de esta sección es igual a la semi suma de los perímetros basales. Demuéstrese.

Por lo tanto el teorema CXX se podría enunciar como sigue:

"El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al perímetro de la sección media paralela a las bases por la apotema lateral del tronco".

$$\boxed{S_{\text{lat. tr. pi.}} = s_m \cdot \rho}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

* **221.**—La arista basal de una pirámide triangular regular es 5 m y la apotema lateral 4,7 m. Calcular la superficie lateral.

* **222.**—Calcular el área total de una pirámide triangular regular cuya arista basal mide 12 m. y la arista lateral 10 m.

* **223.**—La arista basal de una pirámide de base cuadrada es 6 m y la altura 4 m. Calcular la superficie total.

224.—En una pirámide recta regular de base pentagonal, las aristas laterales miden 9 m y la arista basal 10,8 m. ¿Cuál es el área lateral del sólido?

* **225.**—Cada arista lateral de una pirámide regular hexagonal mide 5 m; el radio **r** de la base es 8 m. Calcular 1º el área lateral; 2º el área total.

* **226.**—Calcular el área total de un tetraedro regular en función 1º, de su arista cuya longitud es **a**; 2º, de su altura **h**; 3º, de su apotema lateral ρ.

227.—La altura de una pirámide regular hexagonal mide 8 m y la arista basal 4 m. ¿Cuál es el área total de la pirámide?

228.—El área lateral de una pirámide regular pentagonal es 77,05 m^2; la apotema lateral es 6,70 m. ¿Cuál es el valor de la arista basal?

* **229.**—El área total de un tetraedro regular es $36\sqrt{3}$ m^2. Calcular: 1º, la longitud de una de sus aristas; 2º, su altura.

230.—Calcular el área lateral de una pirámide recta de base cuadrada cuya arista lateral, con una inclinación de 30° sobre la base, mide 8 m.

231.—Calcular el área total de una pirámide cuadrangular recta, cuya arista basal mide 22,20 m y la altura 14,80 m.

232.—Calcular la altura de una pirámide hexagonal regular, sabiendo que la arista basal es 3 y que su superficie lateral es seis veces la superficie de la base.

* **233.**—Calcular la superficie lateral de un tronco de pirámide de bases cuadradas, si la arista basal superior es 5; la inferior 8 y la apotema lateral 4.

234.—La arista lateral de un tronco de pirámide de base hexagonal regular es 4. Las aristas basales son 12 y 8 respectivamente. Calcular el área total.

* **235.**—¿Cuál es el área de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas aristas basales miden respectivamente 4 m y 2 m y la altura 4 m?

236.—Un tronco de pirámide regular, de bases cuadradas. tiene 4 m de altura y las aristas basales son 3 m y 5 m. Calcular: 1º, la longitud de las aristas laterales de la pirámide completa; 2º, la apotema lateral del tronco.

237.—Un tronco de pirámide recta tiene por bases dos rectángulos cuyas dimensiones son respectivamente 5 y 9; y 15 y 27. La altura del tronco es 24. ¿Cuál es el área total?

Luego: $$S_{huso} = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}$$

$$\boxed{S_{huso} = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

Area del cilindro

• **238.** ¿Cuál es el área lateral de un cilindro cuyo radio basal es 2,55 m y su altura igual a los $\frac{3}{5}$ de la circunferencia basal?

• **239.** Calcular el radio basal de un cilindro de revolución cuya área lateral es 48,30 m^2 y su generatriz 7 m.

240. El radio de la base de un cilindro es 0,35 m y la altura es el duplo del diámetro de la base.
Calcúlese el área del cilindro.

241. El área total de un cilindro de revolución es $182{,}80\pi$. El área del círculo basal es $49{,}96\pi$. Calcúlese la altura.

• **242.** En qué razón están las áreas laterales de dos cilindros rectos de igual altura y cuyo radio basal de uno de ellos es el doble del otro.

• **243.** Construir un cilindro de altura dada g, de modo que su área lateral sea equivalente a la suma de las áreas de sus bases.

• **244.** Un rectángulo de lados a y b, gira en torno del lado a. Calcular el área total del cuerpo generado.

245. Un cilindro cuya altura es igual al diámetro tiene de área total 1 m^2. ¿Cuál es su altura?

Area del cono

246. Calcular el área lateral de un cono de revolución cuya generatriz es 10 y cuyo radio basal es 6.

* 247. Calcular el área total de un cono de revolución cuya generatriz es 15 y su altura 12.

248. En un cono recto $g : h = 5 : 4$. Calcular el área lateral y el área total del cono si $h = 8{,}4$ m.

* 249. Calcular el área total de un cono de revolución sabiendo que su radio basal es 8,4 y su altura 11,2.

250. Calcular el área lateral de un cono de revolución cuya circunferencia basal es igual a $7{,}8\,\pi$ y su altura igual 5,2.

* 251. La generatriz de un cono de revolución tiene una inclinación de 45° sobre la base. Calcular el área total, sabiendo que la generatriz es igual $10\sqrt{2}$.

252. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto, cuyo radio basal es 1,40 m y la generatriz es igual a los $\frac{5}{7}$ de la circunferencia de la base?

253. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto sabiendo que la generatriz mide 3 m y la altura igual al diámetro basal?

* 254. ¿En qué razón están el área lateral de un cono recto con su área basal, 1º si la generatriz es igual al diámetro basal; 2º si su altura es igual al diámetro basal?

* 255. En un cono de revolución, la sección plana que pasa por la cúspide y su eje es un triángulo equilátero. Calcular el área total: 1º en función de su altura **h**; 2º en función del radio **r** de la base.

* 256. Un cilindro de 8 m de altura está inscrito en un cono cuya generatriz mide 15 m y la altura 12 m. Calcular el área total del cilindro..

• 257. Determinar el área del cuerpo que se genera por la rotación de un cuadrado: 1º en torno de una de sus diagonales; 2: alrededor de una paralela a una diagonal que pasa por un vértice del cuadrado.

258. La sección plana que pasa por la cúspide y el eje de un cono recto es un triángulo rectángulo isósceles, de hipotenusa 1,8 m. Calcular el área lateral de este cono.

259. En un cono recto la altura mide 40 cm; calcular el área total sabiendo que $g : r = 5 : 3$.

Area del tronco de cono

• 260. ¿Cuál es el área lateral de un tronco de cono recto cuya generatriz es 3 m y los radios de las bases paralelas $r = 2,8$ m y $r' = 2,1$ m?

• 261. Calcular la superficie total de un tronco de cono recto sabiendo que su altura es 4,5; el diámetro de la base inferior es 18 y el de la superior 6.

262. ¿Cuál es el área lateral de una cuba cuyo diámetro de fondo es 2,10 m, el de su abertura 2,30 y su generatriz 3,84?

263. Determinar el área de un tronco de cono recto, sabiendo que la generatriz es 6 m y la suma de las circunferencias de las bases paralelas 8,48 m.

• 264. El radio de la base de un cono recto es 6 m y su altura 12 m. A 4 m de distancia de la cúspide se hace pasar un plano paralelo a la base. ¿Cuál es el área total del tronco?

• 265. Calcular el área total de un tronco de cono de revolución, si sus radios basales son 10 y 4 y su altura 8..

266. En un tronco de cono recto el radio de la base inferior es 5, el de la base superior 2; el ángulo de inclinación que forma la generatriz sobre la base es 45º. Calcular el área total.

267. Calcular el área lateral de un tronco de cono recto, sabiendo que su sección central tiene un área a^2 y que la generatriz es el duplo de la altura.

Area de la esfera

268. Calcular el área de una esfera de 3 cm de radio.

* **269.** Calcular el área de una esfera cuyo diámetro mide 1,2 m.

270. Si el área de una esfera es $10{,}24\,\pi$. ¿Cuál es su radio?

* **271.** El área total de un cubo es $8{,}64$ m^2. Calcular el área de la esfera inscrita en él.

* **272.** Determinar el área de la esfera circunscrita a un cubo de arista $a = 4\sqrt{3}$ m.

* **273.** El área de una esfera es equivalente al área de un cubo cuya arista mide 4 m.

Calcular el radio de la esfera.

* **274.** Determinar la relación que existe entre el área de una esfera y el área lateral del cilindro circunscrito a ella.

275. Determinar el radio de la esfera circunscrita a un tetraedro regular de arista **a**, en función de dicha arista.

* **276.** Dado un cono de revolución de altura **h** y radio basal **r**, calcular el radio **R** de la esfera inscrita a este cono y tangente al círculo basal.

277. Calcular la circunferencia de un círculo máximo de una esfera cuya área es 36 m^2.

* **278.** Probar que las superficies de dos esferas son entre sí como los cuadrados de los radios o de sus diámetros.

279. ¿En qué razón están el área de una esfera y el área total del cilindro circunscrito a ella?

280. ¿En qué razón están las áreas de una esfera y del cono equilátero circunscrito a ella?

281. Calcular el radio de una esfera cuya área es equivalente a la suma de las áreas de dos esferas de radios 9 y 12 respectivamente?

282. Calcúlese el área de la tierra, si el radio $R = 6370$ Km.

283. Dado un tetraedro regular de arista 12 m. ¿Cuál es el área de la esfera circunscrita?

284. Construir un círculo cuya área sea equivalente al área lateral de un tronco de cono de altura $h = 10\sqrt{15}$ cm y cuyos radios basales son: $r = 25$ cm y $r' = 15$ cm.

285. Calcular el área de una zona esférica cuya altura es 6 y el radio de la esfera 10.

286. ¿Cuál es el área interior y exterior de una esfera hueca, sabiendo que su espesor es de 0,04 m y el diámetro de la circunferencia exterior es 0,60 m?

* **287.** Calcular el área total de un casquete esférico de 0,8 m de altura, en una esfera de 2.10 m de radio.

* **288.** Calcular la altura de un casquete esférico de 3 m², en una esfera de 1 m de radio.

* **289.** El área de un casquete esférico es 2.261952 m² y su altura 0,45 m. Calcular el área de la esfera correspondiente.

290. El área de una zona esférica es 5,4 m². ¿Cuál es el radio de la esfera, sabiendo que la altura de la zona es 1,8 m?

291. El área de una esfera es $144\ \pi$ y la de una zona de la misma esfera es $33{,}6\ \pi$. ¿Cuál es la altura de la zona?

292. ¿En qué tanto por ciento habrá que disminuir el radio R de una esfera para que la superficie de ésta: a) disminuya en el 20%? b) ¿En qué tanto % hay que aumentar el radio para que la superficie aumente en el 40%?

• **293.** Una esfera se corta por dos planos paralelos a las distancias 4 y 8 del centro, respectivamente. Calcúlese la zona resultante, si el radio de la esfera es 12. (**Dos casos**).

• **294** Calcular el área de un huso esférico cuyo ángulo rectilíneo es 30°, sabiendo que el radio de la esfera es 6.

295. Calcular el ángulo rectilíneo correspondiente a un huso esférico cuya área es $24\frac{2}{5}$ cm², sabiendo, además, que la esfera a la cual pertenece dicho huso, tiene 180 cm² de área.

296. Calcular el área total de un segmento esférico en función del radio **R** de la esfera a la cual pertenece, y a la altura **h** del segmento, conociéndose, además, el radio r de la base menor. (**Los tres casos**).

CAPITULO XXIII

DETERMINACION DEL VOLUMEN DE LOS CUERPOS GEOMETRICOS

Volumen de un cuerpo es la extensión que ocupa, considerada en sus tres dimensiones (largo, ancho y alto o profundidad).

La palabra **volumen** *se emplea con frecuencia para designar el número que lo mide.*

Medir un volumen es compararlo con otro volumen elegido como unidad. Este último volumen es la **unidad de medida.**

La **unidad de volumen** es un cubo cuya arista mide la unidad de longitud.

Son unidades de volumen el m³, el dm³, etc.

cada uno de estos prismas triangulares. Se suman los volúmenes parciales y se saca como factor común la altura **h**. Resulta la tesis.

O sea que:

$$V_{\text{pr. recto}} = b_1 h + b_2 h + b_3 h + \ldots + b_n \cdot h$$
$$= (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\, h.$$

Luego: $$\boxed{\mathbf{V_{\text{pr. recto}} = B \cdot h}}$$

COROLARIOS: 1º *El volumen de un prisma cualquiera* (recto u oblicuo) *es igual al producto de una arista lateral por su sección recta.*

Dem.) Ver teoremas CXXX y CXXXI.

2º *Dos prismas son entre sí como los productos de las bases por sus alturas.*

3º *Dos prismas de igual altura y de distintas bases son entre sí como sus bases.*

4º *Dos prismas de bases equivalentes son entre sí como sus alturas.*

EJERCICIOS DE APLICACION

297. Calcular el volumen de un cubo sabiendo que su arista es: 1º 0,7; 2º $2\sqrt{3}$; 3º $a\sqrt{b}$.

• **298.** Calcular el volumen de un cubo cuya diagonal es $5\sqrt{3}$.

• **299.** Calcular el volumen de un cubo si, 1º una de sus caras tiene un área de 961 m²; 2º la diagonal de una cara = 8.

300. ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya área total es: a) 13,5 m²?; b) S cm²?

* **301.** Calcular el volumen de un cubo sabiendo: 1º que el perímetro de su plano diagonal es 2s; 2º que el área de su plano diagonal es a^2.

302. ¿En qué % aumenta el volumen de un cubo, si cada una de sus aristas aumenta en el 20%?

* **303.** Calcular el volumen de un paralelepípedo recto que mide 3 m de largo, 5 de ancho y 4 m de alto.

* **304.** Un paralelepípedo recto de base rectangular tiene un área total de 148 m^2. Calcular su volumen sabiendo que las dimensiones de la base son 6 m y 5 m.

305. Una sala de clase que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular, la diagonal mide 14,5 m y las tres dimensiones son entre sí como los números 3 : 6 : 7. ¿Cuál es el volumen de aire contenido en esta sala?

* **306.** El área total de un paralelepípedo rectangular es 248 m^2. Su volumen es 240 m^3 y su altura 4 m. Calcular las dimensiones de la base.

* **307.** ¿Cuánto debe medir la arista de una fosa cúbica para que su capacidad sea doble de otra cuya arista mide 2,20 m?

308. Dos cubos de latón miden 15 cm y 24 cm de arista; si se funden juntos, ¿Cuál será la arista del nuevo cubo equivalente a la suma de los anteriores?

309. Calcular el volumen de un paralelepípedo rectangular cuya área total es 184 m^2 y cuya base tiene como dimensiones 8 y 5 m.

310. El volumen de un paralelepípedo rectangular es 405 m^3; las dimensiones de la base son 10 y 9 m. ¿Cuál es la superficie total?

311. Se desea transformar un cubo de 8 m de arista en un paralelepípedo rectangular cuya base mide 16 m de largo por 8 m de ancho. ¿Qué altura debe tener el paralelepípedo?

312. Si la arista de un cubo es **a**. ¿Cuánto medirá la de un cubo de doble volumen?

313. En un paralelepípedo rectangular las dimensiones de la base son entre sí como 1 : 2. La altura es 2,4 m y la superficie total es 43,2 m^2. ¿Cuál es su volumen?

314. En un paralelepípedo rectangular las aristas concurrentes a un mismo vértice suman $9 \frac{1}{4}$ m si el volumen es 27 m^3 y la altura es el medio geométrico de las dimensiones basales, ¿cuáles son las dimensiones del paralelepípedo?

315. La arista basal de un prisma recto regular triangular mide 6 m y la altura 5 m. Calcular su volumen.

316. El volumen y el área total de un paralelepípedo rectc rectangular están expresados por el mismo número. Se pide calcular la altura del paralelepípedo, sabiendo que una de las aristas basales mide 8 m y que la diagonal de la base es igual a 10 m.

• **317.** Calcular el volumen de un prisma recto triangular regular de 4 m de altura y de 3,75 de perímetro basal.

318. Las aristas basales de un prisma triangular recto son 9 m, 5m y 6 m. Calcular su volumen si su altura es 3 m.

• **319.** La base de un prisma recto es un triángulo rectángudo de catetos 5 y 8 m respectivamente. El volumen es 6,90 m^3. Calcular el área lateral.

320. Calcular el volumen de un prisma recto triangular cuya altura es 8 m y cuya base es un triángulo ABC de lados $a = 6{,}40$ m, $c = 5$ m y ángulo $\beta = 30°$.

321. Calcular el volumen de un prisma recto hexagonal sabiendo que su altura es 6 m y que cada arista basal mide $2\sqrt{3}$ m.

322. El volumen de un prisma recto hexagonal es $90\sqrt{3}$ m^3; cada una de sus aristas basales mide 6 m. Calcular la superficie lateral.

323. El volumen de un prisma recto hexagonal regular es $120\sqrt{3}$ m^3; su altura es 5 m. Calcular el lado del hexágono de la base.

324. Un prisma recto tiene por base un hexágono regular, inscrito en una circunferencia de radio 6 m. Su altura es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita a la base. Calcular el volumen.

* **325.** Un prisma recto tiene por base un octógono regular, inscrito en una circunferencia de radio 8. Calcular su volumen, sabiendo que su altura es igual al lado del cuadrado inscrito en la circunferencia anterior.

326. Un prisma oblicuo tiene por base un rombo cuyo lado mide 10 m y el ángulo agudo 30°.

La arista lateral mide 20 m y tiene una inclinación de 30° sobre el plano de la base. Calcular el volumen del prisma.

327. La base de un prisma oblicuo es un rombo cuyas diagonales miden 8 y 12 m, respectivamente. La arista lateral mide 20 m y forma un ángulo de 45° con la base. Calcular el volumen del prisma.

328. Un estanque tiene la forma de un prisma octogonal regular de 8 m de perímetro. ¿Cuál es el volumen de agua que contiene cuando ésta se eleva a 0,75 m?.

329. Un paralelepípedo oblicuo tiene por base un rectángulo cuyos lados contiguos miden 4 y 5 m. La arista lateral forma un ángulo de inclinación de 60° y su proyección sobre la base es igual a 3 m. ¿Cuál es su volumen?

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4+2}{2}\cdot RS\cdot EH'\right). \qquad \text{(Se simpl. por 2)}$$

$$V_2=\frac{1}{3}(3\cdot RS\cdot EH')=\mathbf{1}\cdot \mathbf{RS}\cdot \mathbf{EH'}. \quad \text{(Se simpl. por 3)}$$

Pero el producto $RS \cdot EH' = 2\triangle ESR = \mathbf{2B}$.

Luego: $V_2 = 40 \cdot 2 = \mathbf{80\ cm^3}$.

$$V_{\text{tronco prisma}}=V_1+V_2=320\ cm^3+80\ cm^3=400\ cm^3$$

NOTA.—Repetir el cálculo para el caso en que la base del tronco de prima es **B** y la longitud de las aristas **m, n, p.**

se obtiene: $\mathbf{V} = \dfrac{1}{3}\,\mathbf{B}\,(\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p})$.

EJERCICIOS DE APLICACION

• **330.** Calcular el volumen de una pirámide triangular regular cuya arista basal es 6 m y su altura 3 m.

• **331.** Calcular el volumen de una pirámide triangular cuyas aristas basales son respectivamente 14 m, 12 m y 10 m, y su altura 6 m.

• **322.** Idem de una pirámide recta de base cuadrada cuya arista basal es 8 y la arista lateral 6.

• **333.** Idem de una pirámide recta de base cuadrada en la cual su apotema lateral es 10,5 y la arista basal es 16,8.

• **334.** Idem de una pirámide triangular regular sabiendo que su arista lateral mide 10 m y su altura 8 m.

• **335.** Calcular el volumen de un tetraedro regular, si se conoce: 1º su arista basal **a**; 2º su altura **h**; 3º su apotema lateral ρ.

336. ¿Cuánto mide la arista lateral de una pirámide recta de base cuadrada, si su altura es 7 m y su volumen 15,75 m^3?

337. Calcular el volumen de una pirámide hexagonal regular, si la arista basal es 4 y su altura 9.

338. ¿Cuál es el volumen de una pirámide regular hexagonal cuya arista lateral es 8 y el ángulo de inclinación sobre la base 30°?

339. ¿Cuál es el volumen de una pirámide regular hexagonal si cada uno de sus ángulos diedros de la base vale 45° y su altura es $4\sqrt{3}$?

340. Idem, si la pirámide es de base cuadrada.

341. Calcular el volumen de una pirámide regular hexagonal, sabiendo que la arista lateral mide 8 m y que su proyección sobre la base es 6, 4.

342. En una pirámide recta regular hexagonal la arista lateral mide 25 cm. y su altura 20 cm. Calcular: a) el volumen; b) la superficie total.

• **343.** Calcular el volumen de una pirámide triangular, sabiendo que las aristas basales son 13, 14 y 15, respectivamente, y que una de las aristas laterales es 1,5 y su proyección sobre la base 0,9.

344. La altura de una pirámide es 9. Calcular el volumen sabiendo que su base es un rombo cuyas diagonales miden 8 y 6.

• **345.** Calcular la arista de un tetraedro regular cuyo volumen es: 1° $144\sqrt{2}$ m^3; 2° 1 m^3; 3° v m^3.

• **346.** Calcular el volumen de una pirámide que tiene su base cuadrada y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros, si, además, se sabe que su arista basal mide 10 cm.

347. Determinar el volumen y el área total de un octaedro regular de arista **a**.

• **348.** En una ⊙ de 10 cm de radio se inscribe un triángulo equilátero. ¿Cuál sería el volumen de la pirámide que tuviera por base dicho triángulo y 12 cm de altura?

349. A un tercio de la longitud de las aristas laterales, medidas desde el vértice, se corta una pirámide por un plano paralelo a la base. ¿Qué parte de la pirámide completa es la pirámide desprendida?

350. ¿A que distancia de la cúspide debe cortarse una pirámide, por planos paralelos a la base para que resulte dividida: 1º en dos partes equivalentes; 2º en tres partes equivalentes.

• **351.** ¿Cuál es el volumen de una pirámide truncada de bases paralelas, cuya base inferior tiene un área de 144 m^2, la superior 81 m^2 y la altura 15 m?

352. Calcular el volumen de un tronco de pirámide regular de bases cuadradas y paralelas, cuyos lados son 9 m y 4 m, respectivamente; si la altura del tronco es 15 m.

353. Calcular el volumen de un tronco de pirámide triangular regular, sabiendo que la arista de la base inferior es 6, la de la base superior 4, y la altura del tronco $6\sqrt{3}$.

• **354.** Las aristas basales de un tronco de pirámide de bases paralelas y cuadradas son 3 m y 2 m, respectivamente. Determinar el volumen de dicho tronco, si la altura de la pirámide complementaria es 1,2 m.

355. En un tronco de pirámide recta regular hexagonal la arista lateral mide 40 cm, sus aristas basales miden, respectivamente, 40 y 16 cm. Calcúlese el volumen y el área total del tronco de pirámide.

356. El volumen de un tronco de pirámide triangular regular de bases paralelas es 49 m^3. La arista de la base inferior es $3\frac{1}{3}\sqrt[3]{27}$ m y la de la base superior es $2\sqrt[3]{27}$ m. Calcular el volumen de la pirámide completa.

Resp. = 62,5 m^3.

357. El volumen de un tronco de pirámide de bases cuadradas y paralelas es 50,8 m^3; su altura es 1,2 m. ¿Cuál es el volumen de la pirámide completa, si la arista de la base menor es 6 m?

358. Calcular el volumen de un tronco de prisma recto cuya área basal=**B** y la longitud de las aristas **m, n, p.**

$$R. = \frac{1}{3} B\ (m+n+n+p)$$

359. Calcular el volumen de un tronco de prisma recto triangular cuyas aristas laterales son respectivamente: 4 m, 6 m y 8 m; la arista basal=$6\sqrt{3}$. Calcular el volumen del tronco y la altura de una pirámide equivalente y de misma base.

360. Un tronco de prisma recto tiene por base un triángulo equilátero de lado **a**; sus aristas miden respectivamente: a, 2.a, 3a. Calcular su volumen y área total.

Resp.: $$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2};\ S = \frac{a^2}{4}\ (24+\sqrt{15}+\sqrt{3})$$

361. Un tronco de prisma recto tiene por base un cuadrado de lado **a**; dos aristas tienen por longitud común **a** y las otras dos **2.a** Calcular el volumen y área total.

362. ¿Cuál es el volumen de un tronco de pirámide hexagonal regular de bases paralelas, sabiendo que las aristas basales son 0,60 m y 0,20 m y la altura 2m?

• **363.** Un tronco de pirámide triangular regular tiene: Volumen $95\sqrt{3}$ cm^3; arista de la base inferior 6 cm; altura 15 cm. Calcúlese el área de la base superior.

364. En un tronco piramidal triangular regular se tiene: base inferior=10,24 m^2; base superior=6,25 m^2; altura=4,20 m. ¿Cuál es el volumen de la pirámide complementaria o deficiente?

365. El volumen de un tronco de pirámide es **v**; la altura es **h**; la base superior=**b**. Calcúlese la base inferior.

366. En un tronco de pirámide de bases paralelas, la base inferior=**B**; la base superior=**B'**; la altura de la pirámide complementaria o deficiente=**h**. Calcular el volumen del tronco.

367. En un tronco de pirámide de bases paralelas se tiene: base inferior=**B**, base superior=**B'**, la altura de la pirámide entera=**h**. Calcúlese el volumen del tronco.

368. En un octaedro regular calcular: a) el volumen conocida su área $72a^2\sqrt{3}$ cm²; b) su área conocido su volumen $81\sqrt{3}$ cm³.

II.—VOLUMEN DE LOS CUERPOS REDONDOS

§ *5.—VOLUMEN DEL CILINDRO*

TEOREMA CXXXV.—**El volumen de un cilindro recto es igual al producto de su base por la altura.**

Tes.) $V_{cil} = \pi r^2 g.$

Dem.) Se puede considerar el cilindro como un prisma de una infinidad de caras laterales.

Luego para obtener su volumen basta aplicar la fórmula del volumen de un **prisma recto:** $V_{pr} = B \cdot h$.

Como en el cilindro recto $\mathbf{B} = \pi\, \mathbf{r^2}$ y $\mathbf{h} = \mathbf{g}$ resulta directamente la tesis.

342 - 357 - 358 - 362 - 367 - 375 - 387

fera son entre sí como sus ángulos diedros correspondientes, se tiene:

$$V_{ing.} : \frac{4}{3} \pi R^3 = \alpha^\circ : 360.$$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{ing.}} = \frac{\mathbf{4 \pi R^3 \alpha}}{\mathbf{3 \cdot 360}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \mathbf{R} \frac{\alpha^\circ}{\mathbf{90^\circ}} \pi \mathbf{R^2}$$

Resultado que se puede enunciar así:

"El volumen de un **inglete esférico** *es igual al producto de su área por un tercio del radio de la esfera".*

EJERCICIOS DE APLICACION

369. ¿Cuál es el volumen de un cilindro de revolución cuya altura es **b** y el radio basal **a**?

370. ¿Cuál es el volumen de un cilindro de revolución cuya circunferencia basal mide 8,06 π m y su altura 3 m?

371. Expresar en litros la capacidad de una cuba cilíndrica de 4,8 m de diámetro basal y 1,20 de profundidad.

372. ¿Cuántos m³ de tierra se han removido al cavar un pozo de 2,8 de diámetro y 12 m de profundidad?

373. ¿Qué profundidad ha de tener un depósito cilíndrico de 12 m de radio basal que pueda contener 1440 π Hl?

374. De un estanque cilíndrico de 8,80 m de diámetro, salen 2 litros de agua por segundo. ¿De cuánto habrá bajado el nivel después de $^3/_4$ de hora?

375. Calcular el diámetro de los cilindros de un doble litro, un litro, medio litro, si el diámetro es igual a la altura?

376. Idem de las medidas cilíndricas de 1 l, 1 dl, 1 cl; si la profundidad es doble del diámetro.

?

377. Los diámetros basales de dos cilindros están en la razón de 8 : 6. Calcúlese el % de volumen que mide el menor con relación al mayor, sabiendo que la altura del menor es el 75% de la del mayor.

?

378. Calcular el volumen de un cilindro cuya área lateral es equivalente a la suma de las áreas laterales de dos cilindros de radio basales 4 y 6 cm, respectivamente, y sabiendo, además, que cada uno de ellos tiene una altura de 12 cm.

379. Calcular el volumen de materiales empleados en la construcción de una torre cilíndrica de 15 m de altura, si el muro tiene un metro de espesor y la circunferencia basal exterior mide 20. m.

* **380.** Un cubo está inscrito en un cilindro de 1 m de diámetro basal. ¿Cuál es la diferencia de volumen de los dos cuerpos?

* **381.** Si el área lateral de un cilindro recto es S. Calcular su volumen, sabiendo que el radio de la base $=c$.

* **382.** El volumen de un cilindro de revolución es 80 π y el diámetro de la base es 16. Calcular el área total.

383. Calcular el volumen de un tubo cilíndrico de altura g, y cuyo radio de la circunferencia basal exterior es $\mathbf{r}_1$, y el de la circunferencia interior, $\mathbf{r}_2$.

* **384.** Se quiere construir un cilindro equivalente a la suma de dos cilindros dados cuyos radios son 6 y 8 mts respectivamente. ¿Qué magnitud debe tener el diámetro del cilindro pedido, si los tres cilindros tienen la misma altura?

385. Un cubo de 1 m de arista es circunscrito a un cilindro. Calcular la diferencia de volumen.

* **386.** Calcular el volumen de un cono de revolución de altura 5 m y diámetro basal = 8,40m.

387. Idem de un cono de revolución cuya altura es 3,2 m y la generatriz 4 m.

• **388.** Idem de un cono de revolución cuya generatriz es 4,50 m y el diámetro de la base 5,40 m.

• **389.** Calcular el diámetro de la base de un cilindro de revolución de 9 m de altura y equivalente a un cono de 12 m de altura y 9 m de radio basal.

390. Calcular el volumen de un cono de revolución cuya altura es 4,5 y la circunferencia basal $= 1{,}6\ \pi$.

391. El volumen de un cono de revolución es $250\ \pi$; calcular su área lateral sabiendo que su altura es 7,50.

• **392.** ¿Cuál es el volumen de un cono de revolución cuya área total es 96π y su generatriz 10?

393. La altura de un cono recto es b metros y su radio basal c metros; si el radio basal aumenta en 20% y la altura disminuye en 25%. ¿En qué tanto % varía el volumen?

394. Un vaso cónico de 24 cm de diámetro basal y 18 cm de altura está lleno con agua. Si ésta se vierte en un vaso cilíndrico de 20 cm de diámetro y 11,52 cm de alto, ¿a qué % de la altura del cilindro llega el agua?

395. Calcular el volumen de un cono de revolución, dadas la generatriz $= 13$ m y el área lateral $= 135{,}2\ \pi$.

396. El área lateral de un cono de revolución es $7{,}2\ \pi$; el diámetro basal es 4,8. Calcular su volumen.

397. ¿Cuál es el radio de la base de un cono recto cuyo volumen es 1,6 m^3 y altura 0,80 m?

398. El radio de la base de un cono recto es 5 y su generatriz es igual a los $^2/_3$ de la $\odot$ basal. Calcular: 1º, el volumen; 2º, el área lateral.

399. La generatriz de un cono recto es **a**. Calcular en función de la generatriz el área lateral y el volumen, sabiendo que la altura es equivalente a los $^{12}/_{13}$ de la generatriz.

• **400.** Por el punto medio de la generatriz de un cono, se hace pasar un plano paralelo a la base. ¿Qué parte del cono total es el cono complementario?

• **401.** Una vasija cónica de 20 cm de altura está llena de agua. ¿A qué altura llegará el líquido cuando se haya escurrido la mitad?

402. Calcular el volumen de un cono recto, sabiendo que la generatriz tiene una inclinación de 60º sobre el plano de la base, y la altura mide 9 m.

403. Calcular el volumen de un cono de revolución, sabiendo que el área de la base = B y que el área de una sección central = m^2.

• **404.** Las secciones centrales de un cono recto son triángulos equiláteros. Calcular el volumen del cono, dados: 1º el diámetro basal = **a**; 2º su altura **h**.

405. Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución, si sus diámetros basales son 10 m y 8 m, respectivamente y su altura = 6 m.

• **406.** La generatriz de un tronco de cono de revolución de bases paralelas mide 15 m, el diámetro de la base inferior = 22 m, el de la base superior = 4 m. Calcular su volumen y el área total.

407. Los diámetros basales de un tronco de cono recto son entre sí como 5 : 3. ¿En qué % aumenta el volumen de dicho tronco al aumentar el diámetro basal inferior en 40% y el superior en 20% y permaneciendo la altura constante?

408 **407.** En un tronco de cono recto hay inscrita una esfera de 10 cm de radio. Si la sección plana que pasa por el eje del tronco tiene un perímetro de 100 cm, calcular: a) el volumen del cuerpo que resulta al extraer la esfera del tronco de cono; b) el área total del mismo cuerpo; c) la razón entre los volúmenes del tronco de cono y la esfera.

• **409.** Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución cuya generatriz mide 7,5 m, su altura 6 m. y el radio de la base inferior 6,5 m.

410. El volumen de un tronco de cono de revolución es 78 π. El radio de la base superior es 2 y la altura = 6. Calcular el radio de la base inferior.

411. Los radios basales de un tronco de cono recto son 9 cm y 4 cm. La generatriz es igual a la suma de los radios. ¿Cuál es el volumen?

412. ¿Cuál es la altura de un tronco de cono que tiene un volumen de 84 m^3, si la base superior = 3 m^2 y la inferior 12 m^2?

413. Dado un cono truncado recto de radios basales 3 m y 9 m, encontrar el radio de la base de un cilindro equivalente y de misma altura que el tronco del cono. ?

414. De un tronco de cono recto se conoce su volumen V y su altura h. Determinar los radios de las circunferencias basales, si están en el razón m : n. X

415. El diámetro de una esfera es 6. Calcular su volumen.

416. El volumen de una esfera es 288π. Calcular su diámetro.

417. El volumen de una esfera es 36 π. Calcular su área.

• **418.** ¿Cuánto debe medir el radio de una esfera para que un mismo número exprese al mismo tiempo su volumen y área? ¿Cuál es ese número?

419. El área de una esfera es 225 π. ¿Cuál es el volumen?

420. Una esfera de radio R se corta por un plano perpendicularmente en el punto medio del radio. Calcular el volumen del cono recto que tiene por base dicha sección y por cúspide el centro de la esfera.

421. Probar que en todo cubo se puede inscribir una esfera.

Determinar el centro de la esfera y calcular su radio en función de la arista "a" del cubo.

X **422.** Calcular el volumen de una esfera circunscrita en un cubo, cuyo volumen es 216 cm^3.

4233. Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cubo cuya área total es 150 cm^2.

• **424.** En un cilindro recto cuya altura es igual al diámetro basal se hallan inscritos una esfera y un cono. Averiguar en qué razón están los volumenes de los tres sólidos. El cono tiene igual base y altura que el cilindro. (Problema de Arquímedes).

425. Calcular el radio de una esfera circunscrita a un tetraedro regular de arista **a**.

426. Dado un cono de revolución de radio basal r y altura h, calcular el radio R de la esfera inscrita en este cono y tangente al círculo de la base.

• **427.** ¿Cuál es el volumen de una esfera, si la circunferencia de un círculo máximo mide 10_π?

428. El volumen de una esfera es 32 cm^3. ¿Cuál es el área de un círculo máximo?

? **429.** Calcular el volumen de un sector esférico que tiene por base 10 m^2 si el radio de la esfera es 12 m.

430. En una esfera de 1,20 m de radio se trazan dos planos secantes paralelos y simétricos con respecto al centro y distantes de 0,90. ¿Cuál es el volumen del segmento esférico?

431. Calcular el volumen de un segmento esférico de una base cuya altura es igual a 2 m y el radio de la esfera 10 m.

432. Calcular el volumen de un segmento esférico de una base cuya altura es 2 y el radio de la base 3.

433. Se da un cono de revolución de altura b y de radio basal a. Si en él se inscribe un cilindro cuya área total es equivalente al área de la base del cono, calcular la altura y el radio basal del cilindro.

434. Calcular el área y el volumen de una esfera cuyo volumen es equivalente a la suma de los volúmenes de otras dos esferas cuyas áreas, de estas últimas, son a_1 y a_2, respectivamente.

435. La longitud de la circunferencia de un círculo menor de un esfera es 1. ¿Cuál es el volumen de la esfera si la distancia de dicho círculo al centro es h?

436. Dado un cono de revolución de altura 8 y radio basal 6, se traza un plano paralelo a la base, de manera que la superficie lateral del cono entero sea igual a la superficie total del cono complementario. Calcular el volumen de este último.

437. Se construye un cono de revolución dándole por área lateral la de un sector circular de 120º y radio R. Hallar el área total y el volumen de dicho cono.

438. El diámetro basal de un cilindro es igual a su altura. ¿Cuánto mide el diámetro, si el volumen es 8?

439. ¿Cuál es el volumen de un cono de revolución, cuya sección central es un triángulo equilátero de área $9\sqrt{3}$ m^2?

440. ¿Cuál es el ángulo del sector formado por el desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución de 4 m de circunferencia y 5 de generatriz?

441. El área lateral de un cono, desarrollada, forma un sector de 30º. La generatriz es 25. Calcular el radio basal.

442. El ángulo del centro de un sector circular es de 60º y su área 300 cm^2. Calcular el radio de una esfera equivalente al cono cuya área lateral es equivalente al sector circular.

443. Dado un cono que tiene 60 cm de altura y la misma longitud como radio de la base, se le inscribe una esfera de 10 cm de radio. 1º ¿Cuál será el volumen de la parte restante del cono? 2º ¿Cuál será el radio de la circunferencia de contacto la esfera y el cono, suponiendo que los puntos de contacto formen una circunferencia?

444. Demostrar que si un cilindro y un cono equilátero son circunscritos a una esfera, el volumen del cilindro es una media proporcional geométrica entre los volúmenes de la esfera y del cono.

445. Dado un cono de revolución de 6 m de altura y 8 m de radio basal, se traza un plano paralelo a la base que lo corta de tal manera que el área de la base superior del tronco es igual al área lateral del mismo. Calcular el volumen del cono complementario.

446. Calcular el volumen de un tetraedro: 1º inscrito en un cubo de arista **a**; 2º inscrito en una esfera de radio R.

447. Calcular el volumen de un octaedro regular, inscrito en una esfera de radio R.

448. Calcular en función de la arista **a** de un octaedro regular: 1º el radio de la esfera inscrita; 2º el radio de la esfera circunscrita.

449. Dado un cono de revolución de radio basal **r** y de altura **h**, calcular el radio de la esfera inscrita en este cono y tangente al círculo basal.

450. Las caras laterales de una pirámide de base cuadrada son triángulos equiláteros. La arista basal es **a**. Calcular en función de **a** el radio de la esfera inscrita.

451. De un tronco de revolución se dan los radios basales **r** y **r'** y la generatriz **g**. Determinar el radio de la esfera circunscrita.

452. Un cono es circunscrito a dos esferas que son tangentes exteriormente y cuyos radios son 4 y 12. Calcúlese el volumen del cono.

• **453.** Un triángulo equilátero de lado a se hace girar: 1º alrededor de una de sus alturas; 2º alrededor de uno de sus lados;

3º alrededor de la paralela a uno de sus lados que pasa por el vértice opuesto. Determinar en cada caso el volumen del cuerpo engendrado por la rotación [1].

454. Determinar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de un △ equilátero de lado a, alrededor de un eje que está situado fuera de él, y paralelo a uno de sus lados. Si la distancia del eje al lado paralelo es **b.**

• **455** un △ rectángulo de hipotenusa 15 cm y uno de sus catetos = 12 cm, gira en tono de un eje paralelo a este último y situado fuera del triángulo. Calcular el área lateral y el volumen del cuerpo engendrado por la rotación, sabiendo que la distancia del eje al cateto paralelo es igual a 1 cm.

456. Calcular el volumen del cuerpo que se engendra al hacer girar un cuadrado de lado a, en torno:

1º de una de sus diagonales;
2º de la paralela a una de las diagonales que pasa por uno de los vértices del cuadrado;
3º de la recta que une los puntos medios de dos lados contiguos.

457. Se hace girar un △ ABC en torno de su lado AB como eje. Calcular el volumen del cuerpo generado por la rotación, sabiendo que AB=25 cm; BC=20 cm y AC=15 cm.

458. Se hace girar un rectángulo de lados **a** y **b** alrededor de la paralela a una de las diagonales que pasa por un vértice del rectángulo. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

---

[1] Es útil recordar aquí las reglas de Gúlden sobre superficies y volúmenes de los cuerpos engendrados por la rotación de una figura plana alrededor de un eje:

1: La superficie de un cuerpo de rotación, es igual al producto de la línea generadora por el camino recorrido por su centro de gravedad.

2º El volumen de un cuerpo de rotación, es igual al producto de la superficie generadora, por el camino recorrido por su centro de gravedad.

459. Se hace girar un segmento circular, cuyo arco mide 60°, alrededor del diámetro paralelo a su cuerda. ¿Cuál es el volumen del cuerpo engendrado, si el radio del círculo al cual pertenece el segmento, es **r**?

460. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de un trapecio isósceles ABCD, alrededor de la base AB, sabiendo que AB=10; AC=6; AD=BC=5.

461. ¿Cuál es el volumen de un cuerpo engendrado por la rotación de un hexágono regular de lado **a**, que gira alrededor de uno de sus lados como eje?

462. Se da un rombo ABCD en el cual AB=a y el ∢DAB=60°; se hace girar dicha figura en torno de AC. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación.

463. El lado de un rombo mide 10 cm y una de sus diagonales mide 16 cm. Se pide calcular el volumen del cuerpo que se engendra al girar el rombo alrededor de uno de sus lados.

464. Las coordenadas ortogonales de los vértices de un △ ABC son: A(2,—4); B(4,—2) y C(4, 2). Se pide calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar dicho △ alrededor del eje de las ordenadas.

465. Los vértices de un cuadrilátero ABCD tienen, respectivamente las siguientes coordenadas: A(–8,–2); B(8,–2); C(2,6) y D(–2,6). Diga de qué clase de cuadrilátero se trata y calcule el volumen y el área total del cuerpo que se engendra al girar el cuadrilátero: a) en torno al eje de las ordenadas, b) en torno al lado AB; c) en torno al lado DC.

466. En un trapecio rectángulo la altura mide 3 cm. y la base mayor es el triple de la menor; si esta última mide 2 cm., calcular el volumen y el área total del cuerpo que se engendra al girar el trapecio: a) en torno a la base mayor; b) en torno a la base menor; c) en torno al lado ⊥ a las bases.

467. En un sistema ortogonal las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero son: A(2,3); B(6,-2); C(4,8) y D(2,6). Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar el cuadrilátero en torno del eje de las ordenadas.

468. En una semi ⊙ de radio **r** se halla inscrito un △ ABC, siendo el lado AB el diámetro de la ⊙ y AC igual a l_3. Calcular en función de **r** el volumen y el área total del cuerpo engendrado por la rotación del △ ABC alrededor: a) del lado BC; b) del lado AC; c) del lado AB.

EJERCICIOS DE APLICACION

1. Los vértices A y B de un $\triangle ABC$, de magnitud invariable, resbalan sobre rectas $\parallel$s. Encontrar el L.G. del tercer vértice.

2. Por el punto A, intersección de dos $\odot$s que se cortan, se traza una secante variable y sobre esta secante, a partir de A, se aplican los segmentos AM y AN cuya longitud es igual a la semisuma de las cuerdas interceptadas. Hallar el L.G. de los puntos M y N.

3. Construir un segmento de longitud dada $\parallel$ a una recta de dirección dada y cuyos extremos estén situados sobre dos rectas dadas.

4. Construir un trapezoide dados: b, d, e, f, ε (método de traslación).

5. Se da un $\measuredangle AOB$ y un vector $\vec{V}$ de su plano. Construir el vector $\overrightarrow{MN}$ equipolente a V y tal que M se halle sobre OA y N sobre OB.

6. Determinar los elementos de simetría: a) de un cubo; b) de un tetraedro regular; c) de una pirámide recta regular cuadrangular; d) de un octaedro regular.

7. Demuestre que: a) Si una figura admite dos planos de simetría rectangulares dicha figura admite un eje de simetría; b) Si una figura admite tres planos de simetría rectangulares, de dos a dos, admite tres ejes de simetría y un centro de simetría.

8. Se dan dos puntos fijos A y B y én AB otros dos puntos M y N tales que la razón de sus distancias a los puntos A y B sea un número dado k. Demuestre que si la razón de las distancias de A y B a un recta L del espacio es igual a k, la razón de las distancias del pie de la $\perp$ bajada de M a L a los puntos A y B, es también igual a k.

9. Se dan dos $\triangle$s isósceles congruentes ABC y ABD de base común y situados en planos diferentes. Demuestre que las rectas AB y CD son $\perp$s, y que el tetraedro ABCD admite un eje de simetría.

10. Inscribir un cuadrado en un $\triangle$ isósceles de modo que uno de los lados del cuadrado esté situado en la base del $\triangle$ y los otros dos vértices se hallen en los lados iguales.

11. Un $\triangle$ABC tiene el vértice A fijo, el vértice B describe una recta L y el lado BC permanece equipolente a un vector fijo $\vec{V}$. Hallar el L. G. del punto medio de los tres lados del $\triangle$ ABC.

12. Demuestre que dos $\odot$s tangentes son homotéticas respecto a su punto de contacto.

13. Dos $\odot$s son tangentes en A. La tangente a una de ellas en un punto M, corta a la otra en B y C. Demuestre que la recta AM es bisectriz del $\sphericalangle$ BAC.

14. Construir un $\triangle$ dados: α, t_a, t_b.

15. Dados un punto O y una $\odot$ fija C que no pasa por O, trazar un secante AOB tal que $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = k$, siendo k un número algebraico dado.

PROBLEMAS DE BACHILLERATO SOLUCIONABLES POR 6º AÑO DE HUMANIDADES

1.—Halle los términos de una proporción sabiendo que la suma de los medios es 5, la suma de los extremos es 7, y la suma de los cuadrados de sus 4 términos es 50. (Temuco, 1956)

2.—Construya las rectas $y = -x + 5$; $x - 3y = -3$; después determine el área del triángulo limitado por ellas y el eje de las abscisas. (Temuco, 1956).

3.—Resuelva:

$$mx = ny = pz$$
$$ax + by + cz = d.$$

(Temuco, 1954)

4.—Construya el gráfico de la relación entre el perímetro de un triángulo equilátero y el lado del triángulo, suponiendo que éste es variable. Temuco, 1954).

5.—La Compañía de Electricidad me cobró por consumo:

Agosto	104 KWH	\$ 265,70
Septiembre	40 KWH	\$ 162.

La cuenta es a base de una cuota fija, más el pago de la energía consumida, más el 8 por ciento de impuesto. ¿Cuánto me cobrarán por los 28 KWH que gasté en Octubre?

Halle la solución por un sistema de ecuaciones o por representación gráfica. Talca, 1953).

6.—Resuelva

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} &= 2 \\ \frac{1}{x} - \frac{9x}{y^2} &= x \end{aligned}\right|$$

Talca, 1953).

7.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 4xy + 8y^2 &= 3 \\ 9x^2 + 6xy + 32y^2 &= 10 \end{aligned}\right|$$

(Santiago, 1955.

8.—En una proporción se tiene que la suma de los medios es 23 y la de los extremos 26. La suma de los cuadrados de los términos es 725.

¿Cuáles son los términos?

(Santiago, 1955).

9.—Al unir el punto P con el origen de un sistema ortogonal de coordenadas, se tiene que la distancia $OP = 3$ cm y el ángulo que OP forma con OX es igual a 30°. Calcular las coordenadas de los vértices de uno de los cuadrados que pueden construirse sobre OP.

(Santiago, 1955).

10.—Dibuje el gráfico de la función $3x - 2y = 5$ y determine en él un punto tal que la abscisa sea igual a la ordenada.

(Talca, 1955)

11.—Resolver:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + x^2y^2 &= 481 \\ x^2 + y^2 + xy &= 37 \end{aligned}$$

12.—Represente gráficamente las rectas:

$$x + 2y = 16$$
$$5x - 3y = 14, \text{ y}$$

determine las coordenadas de su punto de intersección.

13.—Resolver:

$$\begin{aligned} 2^{5x} : 2^{y} &= 2^{17} \\ b^{xy} &= b^{12} \end{aligned}$$

¿Qué puede decirse cuando $b = 1$?

14.—Por P (3,4) se traza PX perpendicular a OP.

¿Qué largo tiene PX?, siendo X el punto en que la $\perp$ intercepta al eje de las abscisas.

15.—El número formado por las dos últimas cifras del año en que nació Newton, aumentado en 12, es el doble del número formado por las dos últimas cifras del año de su fallecimiento.

Este último número de 2 cifras, aumentado en 1, da los 2/3 del primer número.

¿En qué año del siglo XVIII nació Newton?

16.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y+z}{yz} &= \frac{1}{a} \\ \frac{x+z}{xz} &= \frac{1}{a^2} \\ \frac{x+y}{xy} &= \frac{1}{a^3} \end{aligned}\right|$$

17.—Verifique mediante el cálculo, que el perímetro de un decágono regular inscrito es mayor que el del hexágono regular inscrito en igual circunferencia.

18.—Resuelva:

$$\left.\begin{aligned} 3x &= 11-6y-14z \\ 14y &= 35-6x-36z \\ 98z &= 113-14x-36y \end{aligned}\right|$$

19.—Por un punto P intersección de dos circunferencias dadas O_1, O_2, se traza una secante que corta en A_1 y A_2.

20.—El centro M de una $\odot$ es (—5, —12). ¿Cuál es su radio, si pasa por el origen? ¿Cuáles son los puntos en que corta a los ejes del sistema ortogonal?

21.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} ax^2+by+c &= o \\ bx-ay-c &= o \end{aligned}\right|$$

22.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} x\left(1+\frac{x}{y}\right) &= 2 \\ y\left(1+\frac{y}{x}\right) &= 3 \end{aligned}\right|$$

Santiago, 1952.

23.—Determinar el área del trapecio formado por los ejes ortogonales de un sistema de coordenadas y por:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right|$$

Santiago, 1952.

24.—Resolver:

$$\begin{aligned} x+y &= 5xyz \\ y+x &= 8xyz \\ x+z &= 9xyz \end{aligned}$$

25.—Dos vértices de un triángulo equilátero son $Q(0,0)$ y $P(2,2\sqrt{3})$.

¿Cuáles son las coordenadas del tercer vértice? Discusión.

26.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4 &= 91 \\ x^2-xy+y^2 &= 7 \end{aligned}\right|$$

(Talca, 1950)

27.—El centro de un cuadrado es el punto de origen de un sistema ortogonal de coordenadas.

Si un vértice es A(—13, +85) ¿qué coordenadas tienen los otros vértices?

¿Cuánto mide el lado? y ¿cuánto la diagonal?

(Talca, 1950)

28.—Resolver:

$$x+y+pz=a$$
$$x+y+px=b$$
$$x+z+py=c$$

29.—Resuelva:

$$xy+xz=2xyz$$
$$xy+yz=5xyz$$
$$xz+yz=7xyz$$

(Valdivia, 1951).

30.—Resolver:

$$\frac{1}{u}+v=5$$
$$\frac{1}{v}+u=\frac{5}{6}$$

31.—Resolver:

$$1-y^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=0$$
$$y^2-2(x^2-y^2)=0$$

32.—Resolver:

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$
$$\frac{y}{z}=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$
$$xyz=a+b+c$$

33.—Un tren recorre cierta distancia a velocidad constante. Si ésta, aumenta en 6 Km por hora, el tiempo empleado para recorrer la distancia disminuye en 4 horas; y si la velocidad disminuye en 6 Km por hora, el tiempo aumenta en 6 horas.

Calcule la distancia y las tres velocidades.

34.—Determine qué valores hay que dar a **m** y **n** en:

$$mx+2ny=b$$
$$5mx-ny=2$$

Para que $x = 11$
$y = 4$

(Valdivia, 1951)

35.—Se dibujan dos rectas a partir del punto P (1,1) que cortan en los semiejes del primer cuadrante brazos iguales a $\frac{1}{2}$.

¿Cuál es el área del cuadrilátero que se forma?

(Valdivia, 1951).

36.—Determine dos cantidades de las cuales se conoce la suma **a** de sus recíprocos y la suma **b** de sus cuadrados.

(Valparaíso, 1952).

37.—En una circunferencia se inscribe el triángulo equilátero ABC, y en seguida se dibuja el $\sphericalangle BAD = 45^{\circ}$, siendo D punto de la circunferencia. Desde D se bajan las perpendiculares a los lados del triángulo.

¿Cuánto mide cada una de estas perpendiculares, en función del lado **a** del $\triangle$?

(Valparaíso, 1952).

38.—Resolver:

$$\frac{xy}{4y-3x} = 20$$
$$\frac{yx}{5z-4y} = -12$$
$$\frac{xz}{2x-3z} = 15$$

(Valparaíso, 1952).

39.—Resuelva:

$$\begin{array}{|c} \dfrac{x}{y} + \dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \dfrac{33}{4} \\ x - y = 5 \end{array}$$

(Punta Arenas, 1952)

40.—Resuelva:

$$\begin{array}{|c} x^2 + y^2 - 4x - 4y = -6 \\ xy + 3x + 3y = 15 \end{array}$$

(Punta Arenas, 1952).

41.—Encontrar 4 números proporcionales entre sí, tales que la suma de los extremos sea 21, la suma de los medios 19, y la suma de los 4 números 442.

42.—Resuelva:

$$\begin{array}{|c} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{array}$$

43.—Resuelva:

$$\begin{array}{|c} 5x - 2y = 13 \\ 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3 \end{array}$$

44.—Resuelva:

$$\begin{array}{|c} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2} \\ bcx^2 + acy^2 + abz^2 = m^2 \end{array}$$

45.—Encontrar el área del triángulo limitado por el eje de abscisas, la recta $y = 2x$.

y la recta $x = 5$.

46.—La suma, la diferencia y el producto de dos números son entre sí como 5 : 3 : 16.

¿Cuáles son los dos números?

47.—Resolver y representar gráficamente, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1$$
$$x^2 - xy\sqrt{3} = 0$$

48.—En un sistema ortogonal de coordenadas, la unidad elegida es el cm. Un móvil parte del origen, ascendiendo en la recta $y = \frac{1}{2}x$ hasta llegar a $y = -\frac{1}{2}x + 7$ por la cual desciende hasta el eje de las x. ¿Cuánto ha demorado si se ha movido con velocidad uniforme de 3 cm /minuto? ¿A qué distancia del origen termina su movimiento en el eje OX?

49.—Determinar el área del cuadrilátero formado por los dos ejes de coordenadas ortogonales y las rectas $y - x = 3$

$$x = 2$$

50.—Resolver:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 29$$
$$xy - yz - zx = -14$$
$$x + y + z = 9$$

51.—Demuestre que (1,7), (3,0), (3,5), (1,—1) son los vértices de un trapecio. Calcule su mediana y su área.

52.—Resolver:

$$x^3 + 8y^3 = 35$$
$$x + 2y = 5$$

53.—Representar gráficamente la relación que existe entre el lado y la diagonal de un cuadrado.

54.—Resolver:
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{5}{2} \\ x+y&=\frac{3}{2} \end{aligned}\right|$$

55.—Resolver:
$$\left.\begin{aligned} x+y+xy&=17 \\ 2x+3y+xy&=29 \end{aligned}\right|$$

56.—Resolver:
$$\left.\begin{aligned} y&=x^2+x+1 \\ 0&=x^4+2x^3+3x^2+2x+1 \end{aligned}\right|$$

(Santiago, 1951).

57.—Resolver:
$$\left.\begin{aligned} x(y+z)&=a \\ y(z+x)&=b \\ z(x+y)&=c \end{aligned}\right|$$

58.—Un empleado recibe su sueldo de E° 8.000 el primer día de cada mes; el día 4 paga E° 3.000 de arriendo y el día 9, las cuentas de gas y luz que suman E° 400. Fuera de ello, el gasto diario es de E° 140. Hacer el gráfico del dinero que le resta desde el primer día de cierto mes y por dos meses consecutivos, suponiendo que al recibir el primer sueldo mensual considerado, le quedaban E° 200.

59.—Divida un trapecio en 3 partes equivalentes mediante paralelas a las bases.

(Temuco, 1950).

60.—El desarrollo de un tetraedro regular es un paralelógramo cuyo lado menor mide $\sqrt{5}$[cm] — ¿Cuál es la superficie y el volumen del cuerpo?

(Temuco, 1950)

61.—Un observador situado en Ecuador ve el día 4 de febrero a una hora dada una estrella en el meridiano del lugar.

¿Dónde ve esa misma estrella, desde el mismo lugar y a la misma hora, los días 1.o de mayo y 4 de mayo? ¿Por qué? Si no estuviera en el Ecuador ¿serían iguales las respuestas?

(Talca, 1955)

62.—Dos circunferencias se cortan bajo ángulo recto. Se pide encontrar la distancia de los 2 centros y la magnitud de la cuerda común sabiendo que los radios son respectivamente iguales a 3 cm y 4 cm.

(Santiago, 19555).

63.—La altura de culminación superior de una estrella, en Santiago, es igual a su declinación austral. ¿Cuánto vale esta declinación si en Santiago la declinación es 33° 34'? ¿Es o no estrella circumpolar?

(Santiago, 1955).

64.—El día solar medio es 1,00274; tomando como unidad el día sideral; expresarlo en horas, minutos y segundos.

(Talca, 1950).

65.—Hable de la paralaje y del diámetro aparente.

Señale algunas aplicaciones.

(Valparaíso, 1952).

66.—Diga lo que sepa acerca de los eclipses de luna, e ilustre con dibujos sus explicaciones.

67.—¿Cuál debería ser la velocidad, expresada en [km/h] a que debería viajar un automóvil a lo largo del Ecuador terrestre para que el tiempo no transcurra para él?

¿En qué sentido debería moverse?

68.—¿Cuál es la menor distancia, medida en la superficie terrestre, entre dos puntos de la Tierra pertenecientes al mismo meridiano, cuyas latitudes son $+33°$ y $-27°$?

¿Cuál es la mayor distancia?

$R = 6370{,}26$ [km].

69.—Construir las expresiones:

a) $$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

b) $$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}$$

c) $$x = \sqrt{a^2\sqrt{3} - bc\sqrt{2}}$$

70.—La declinación boreal de una estrella es de 45°, y culmina a 50° al norte del cenit.

¿Cuál es la altura del polo sobre el horizonte del lugar de observación?

71.—Hable acerca de los principales movimientos de la tierra.

72.—Calcule el radio del paralelo terrestre en que un grado mide 5.555,5 m.

¿De qué paralelo se trata, aproximadamente?

(Talca, 1956).

73.—¿Cuál es la mayor altura de culminación que alcanza el sol en cualquier ciudad de Chile?

¿Qué días se verifica?

(Santiago, 1952).

74.—En cierto día, el sol pasa por el meridiano del lugar, simultáneamente con una estrella determinada. ¿Qué ocurre al día siguiente? ¿Qué consecuencia acerca del movimiento de la tierra, deriva Ud. de la consecuencia que señala?

75.—¿En qué parte del firmamento están situados y pueden verse los planetas, especialmente Venus?

Explique por qué.

76.—¿Cuáles son las variaciones periódicas de la declinación del sol? Determine la mayor y la menor altura del sol para Santiago, latitud 33° 26' 42" y longitud 73° 1' 44". ¿En qué día del año ocurren esas alturas solares? ¿Hay algún dato de más en el problema?

(Punta Arenas, 1952).

77.— La latitud geográfica de Santiago es 33° 33' 33". Calcular la distancia cenital de una estrella, cuya declinación es 28° 19' 53", en el momento de su culminación en el meridiano de Santiago.

78.—Enuncie y comente la ley de la gravitación universal de Newton. Aplíquela a la determinación del peso de 1 [kg-masa] en la luna y en el sol; compararlo con el que tiene en la tierra, sabiendo que las masas de la luna y del sol, son respectivamente: 1/81 y 333.432 veces la de la tierra; y que los radios de estos cuerpos miden 3/11 y 110 radios terrestres.

79.—Calcular la latitud de un lugar, en el que la sombra de una estaca vertical, en el solsticio de verano y a mediodía verdadero, tiene una longitud de **a** (cm), siendo la estaca de **a** $\sqrt{3}$ cm de longitud.

80.—La rueda delantera de un coche da 50 vueltas más que la trasera, cuando el coche recorre 1 kilómetro. La suma de las dos ruedas ($\odot$s) es 9 m. ¿Cuánto miden sus radios?

81.—Santiago está a 33° 30' s". ¿Cuáles son los ángulos de elevación máxima y mínima que, en Santiago, puede tener el sol a mediodía? ¿Por qué no se indicó en esta cuestión, el número de segundos de la latitud de Santiago?

(Talca, 1953).

82.—¿A qué distancia del Ecuador se encuentra Santiago si su latitud es de —33° 23' 39"? El arco de meridiano correspondiente a 1° es de 111,1 km.

Talca).

83.—Una estrella cuya declinación es 42°, alcanza en su movimiento diurno una altura máxima de 84°. ¿Cuál es la latitud del lugar de observación?

84.—La latitud de un lugar es 40° 50' — se pide calcular las distancias cenitales de una estrella cuya declinación austral es de 70° 10' en los momentos de sus pasos por el meridiano ¿Entre qué límites debe variar la declinación de una estrella para que salga y se ponga a la misma latitud?

85.—Explique las fases lunares.

(Santiago, 1951).

86.—¿Qué consecuencias estima Ud. que afectarían a la vida en la Tierra, si su eje de rotación quedara perpendicular al plano de la eclíptica?

¿Cuáles, en el caso de que dicho eje estuviera situado en el plano de la órbita?

Justifique sus respuestas.

87.—Explique la noche polar.

88.—Relación entre la latitud de un lugar y la altura del polo en ese lugar. Explique con una figura. Explique también qué relación existe entre longitud geográfica y hora de un lugar.

89.—Se da el lado **a** de un cuadrado inscrito en una circunferencia, en la cual está circunscrito otro cuadrado que, a su vez, está inscrito en una segunda circunferencia... y así, sucesivamente.

Calcular el lado del cuarto cuadrado, así obtenido.

90.—Resolver y construir:

$$\frac{a}{b} + x = \frac{\frac{c}{d} + x}{d}$$

91.—Se corta una esfera por un plano, de modo que la diferencia de las áreas de los casquetes obtenidos sea equivalente al área de la sección plana. Se pide determinar en función del

R de la esfera, la distancia de la sección al centro O de la esfera.

92.—Hoy día las edades de tres personas están en la razón de 7 : 9 : 10.

¿Cuáles son sus edades, si hace 4 años las de las dos últimas eran como 23 : 26?

93.—Sabiendo que se verifican:

$$a + b = 7$$
$$b + c = 8$$
$$a + c = 9,$$ demostrar que se tiene
$$c = a+1=b+2.$$ Y en seguida resolver el sistema, aprovechando dicha propiedad.

94.—¿Cuál es la razón entre la arista a de un cubo, y el radio R de una esfera, si ambos tienen igual superficie e igual volumen?

95.—Dos capitales suman E° 100.000 y están colocados al 3% y al 4% de interés anual. En dos años, a interés simple, producen en total E° 7.500. Determine los dos capitales.

96.—Dos circunferencia secantes, tienen radios de 3 m y 4 m. Sus centros distan entre sí 5 m. Determine la superficie que resulta si el conjunto gira en 360° en torno de la línea de los centros.

97.—Se dan los trazos: **a**, **b**, **c** y se pide construir:

$$x = \frac{a^2-b^2}{c}\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}$$

98.—Se dan los trazos: **a**, **b**, **c** y se pide construir:

$$x = \frac{a^2+b^2}{c}\sqrt{5+\sqrt{7}}$$

99.—Determine el volumen comprendido entre dos esferas tangentes exteriormente y la superficie cónica tangente a ellas, si sus radios miden 2 cm y 1 cm.

100.—Una pirámide recta regular triangular, en que el apotema lateral es igual a la arista basal, se corta por un plano paralelo a la base y que dimidia las aristas laterales; determine la razón entre las superficies totales de los dos cuerpos resultantes.

(Temuco, 1954)

101.—Construya el trazo:

$$x = \frac{m\sqrt{n} + n\sqrt{p}}{\sqrt{n+p}}$$

m, n, p son trazos dados.

(Temuco, 1956)

102.—Demuestre que si un triángulo rectángulo isósceles gira en 360°, en torno a la paralela a la hipotenusa trazada por el vértice del ángulo recto, engendra un volumen igual al de la esfera que tiene a la hipotenusa por diámetro.

(Temuco, 1956)

103.—En una circunferencia de diámetro **2r** se pide inscribir un trapecio de modo que una de sus bases sea diámetro de la circunferencia, y que la suma de los cuadrados de los otros tres lados sea igual a 0,35 r^2.

(Talca, 1955).

104.—Compare los volúmenes, superficie laterales y superficies totales de 2 cilindros, uno de los cuales tiene una circunferencia basal de perímetro **a** y altura **b** y el otro tiene una ⊙ basal de perímetro **b** y su altura es **a**.

(Talca, 1955)

105.—Construir un triángulo, dados:

a + b, p, q.

(Santiago, 1955).

106.—Un cuadrado, un triángulo equilátero y una circunferencia tienen igual perímetro.

¿En qué razón están sus áreas?

(Concepción).

107. Construir el trazo:

$$x = \sqrt[8]{a^8 \pm b^8}$$

(Concepción)

108. Dados los trazos a, b, c, construir la expresión:

$$x = \sqrt{a^2 \pm \sqrt{b^4 - c^4}}$$

109. Tres números tienen por suma 57; si el primero se aumenta en 7, el segundo en 5 y el tercero en 3, los números aumentados son entre sí como 3 : 4 : 5. ¿Cuáles son los números?

110. En un tetraedro regular se traza un plano paralelo a una de las bases y equidistante de ella y del vértice opuesto. Calcular en función de la arista a, del tetraedro, las superficies totales de los cuerpos resultantes.

(Santiago, 1956)

111. Resolver:

$$a : b : c = 5 : 6 : 1$$

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1$$

(Santiago, 1956)

112. Repartir E° 801,000 entre 4 personas en razón inversa a sus edades que son: 20, 25, 30 y 40 años.

(Talca, 1953)

113. Construya la expresión:

$$t = \sqrt{pq - mn\sqrt{3}}$$

m, n, p, q son trazos dados.

(Talca, 1953)

114. Se da un cuadrado de lado, a. Se pide determinar la superficie del anillo limitado por las ⊙s inscrita y circunscrita al cuadrado, y la altura que debe tener un tronco de cono recto que tiene por bases los dos círculos, para que su superficie lateral sea equivalente a la del anillo.

(Talca, 1953)

115. Desde un vértice de un cuadrado dado, trace una transversal que lo divida en la razón 1 : 2.

Indice el N° de soluciones. (Temuco, 1964)

116. Una pirámide recta regular triangular en que el apotema lateral es igual a la arista basal, se corta por un plano paralelo a la base y que dimidia las aristas laterales, determine la razón entre las superficies totales de los dos cuerpos resultantes. (Temuco, 1954)

117. ¿Qué forma ofrece la sección central de un cono recto circular cuando su superficie lateral es la sección áurea de su superficie total. (Talca, 1953)

118. Kepler descubrió que los cubos de las distancias de los planetas al sol, son proporcionales a los cuadrados de sus períodos. Sabiendo que la distancia de Venus al sol es 0,7225 de la distancia Tierra-Sol y que la de Marte es 2,1025 de la de Venus, calcule los períodos de Venus y Marte, tomando como unidad, el período de la Tierra. (Talca, 1953)

119. Demuestre que las distancias de un punto, situado en el interior de un pentágono regular, a los lados, es igual a 5 veces el radio de su circunferencia inscrita. Generalice el problema. (Valdivia, 1951)

120. Resuelva:

$$\frac{x}{y} \qquad \frac{a^3+a^2+a+1}{a^2+a+1}$$

$$\frac{y}{z} \qquad \frac{a^2+a+1}{a+1}$$

$$\frac{z}{u} \qquad \frac{a+1}{1}$$

$$\frac{y}{u} \qquad \frac{a^2+a+1}{1}$$

$$x - y + z + u = \frac{a(a^4-1)}{a+1}$$

(Valdivia, 1951)