G. P. GAVRÍLOV
A. A. SAPOZHENKO

PROBLEMAS de MATEMÁTICA DISCRETA

Editorial
MIR
Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

Г. П. Гаврилов,
А. А. Сапоженко

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Издательство
«НАУКА»
Москва

G. P. GAVRÍLOV
A. A. SAPOZHENKO

PROBLEMAS de MATEMÁTICA DISCRETA

Editorial
MIR
Moscú

Traducido del ruso por
Bernardo del Río Salceda, candidato
a doctor en ciencias técnicas

На испанском языке

Impreso en la URSS. 1980

INDICE

INTRODUCCION

Esta colección de problemas que se propone al lector se proyectó como un manual de ejercicios para la asignatura de matemática discreta destinado fundamentalmente para los estudiantes de los primeros cursos de las universidades. También puede ser útil para los estudiantes de los cursos superiores y los aspirantes a doctor que se especializan en el terreno de la matemática discreta. Los profesores pueden emplear este libro al preparar las clases prácticas.

El libro se basa en el curso de matemática discreta que se dio durante una serie de años en la facultad mecánico-matemática y ahora en la facultad de matemática de cómputo y cibernética de la Universidad estatal de Moscú.

El libro se compone de ocho capítulos. Los dos primeros están dedicados a la lógica algebraica. La sección dedicada a la lógica algebraica es fundamental en el estudio de la matemática discreta. En la facultad de matemática de cómputo y cibernética de la Universidad de Moscú esta sección ocupa una cuarta parte del tiempo dedicado a las conferencias y ejercicios prácticos. A base de este material los estudiantes adquieren los primeros conocimientos sobre tales conceptos como función discreta, operación de superposición, sistema funcionalmente completo; asimilan las diferentes formas de presentación de las funciones discretas (en forma de tablas, representación con polinomios y formas normales, representación geométrica con el empleo del cubo unidad n-dimensional); estudian los procedimientos de investigación de la plenitud y propiedad de cerrado de los sistemas de funciones.

El tercer capítulo está dedicado a las lógicas k-valentes. Los problemas aquí presentados persiguen el fin de iniciar al lector en la descomposición canónica de las funciones k-valentes con transformaciones equivalentes de las fórmulas, en las principales clases cerradas de funciones de lógica k-valente y en los métodos de investigación de la plenitud y propiedad de cerrado de sistemas de funciones. En una serie de problemas se ilustra la diferencia que existe entre las lógicas k-valentes ($k > 2$) y la lógica algebraica.

El capítulo cuarto contiene problemas de la teoría de los grafos (orientados y no orientados), de la teoría de las redes y de esquemas. El objetivo de esta sección es dar a conocer al estudiante los conceptos fundamentales, los métodos y el lenguaje de la teoría de los grafos. Todo esto se emplea muy ampliamente para describir e investigar las propiedades de las estructuras de los objetos en los más variados terrenos de la ciencia y de la técnica. En esta parte hay problemas predestinados a afirmar los conocimientos de los conceptos principales de la teoría de los grafos; problemas que ilustran la aplicación de la teoría de los grafos y las redes a la síntesis de esquemas que realizan funciones booleanas; problemas de cálculo de objetos con una estructura geométrica dada, etc. Los autores esperan que los profesores también encontrarán aquí problemas con la ayuda de los cuales podrán enseñar a los estudiantes a hacer rigurosas demostraciones matemáticas de afirmaciones geométricas «evidentes».

El quinto capítulo está dedicado a la teoría de la codificación. Los problemas presentados tratan sobre las propiedades de los códigos que corrigen errores; sobre los códigos alfabéticos; sobre los códigos con mínimo exceso.

El capítulo sexto contiene problemas que muestran diferentes modos de descripción de transformadores discretos (autómatas). Se han incluido problemas para revelar la determinación y la determinación acotada de los autómatas; para presentar autómatas de diferentes maneras: por medio de diagramas, de ecuaciones canónicas, de esquemas; para investigar la plenitud funcional y la cerrabilidad de los sistemas de aplicaciones automáticas; para estudiar las propiedades de las diferentes operaciones a las que se pueden someter estas aplicaciones.

El séptimo capítulo, dedicado a los elementos de la teoría de los algoritmos, tiene como fin dar nociones sobre la eficacia de la calculabilidad y la complejidad de los cómputos, sobre ciertas formas concretas de definición del algoritmo (máquinas de Turing y funciones recursivas).

El capítulo ocho tiene un carácter auxiliar y está dedicado a la combinatoria. Esta parte sale de los límites del curso universitario de la matemática discreta. No obstante, el que estudia la matemática discreta frecuentemente choca con cuestiones sobre la existencia, el cálculo y la evaluación de diferentes objetos combinatorios. Por este motivo los autores han considerado útil incluir también problemas sobre combinatoria.

Actualmente todavía no existe un manual que abarque por completo los materiales teóricos del programa del curso universitario de la asignatura «matemática discreta». El primer tomo de la monografía «La matemática discreta y las cuestiones matemáticas de la cibernética» (en ruso; Moscú, editorial «Naúka», 1974), que es hoy el manual básico, contiene el material teórico que corresponde a los cinco primeros capítulos de este libro. La literatura correspondiente a los demás capítulos se halla dispersa en varias monografías. Por eso los autores de este libro de problemas tuvieron que anticipar cada párrafo con notas teóricas, a veces con más detalle que lo habitualmente acostumbra para este tipo de obras.

En el libro se dan los resultados de muchos (no de todos) problemas y las indicaciones correspondientes. Las soluciones se exponen lo más abreviadamente posible en un estilo compendioso, se omiten las conclusiones triviales. En ciertos casos se hace exclusivamente un pequeño esbozo de la solución.

Según su origen los materiales de esta colección de problemas son bastante variados. Una parte considerable de los problemas tiene un carácter «folklórico». Estos son bien conocidos por los especialistas de la matemática discreta, sin embargo es casi imposible establecer la paternidad de los problemas de este género. En el proceso de las clases prácticas, de la toma de exámenes de matemática discreta y también durante la escritura de este libro los autores crearon la parte fundamental de problemas incluidos en él. Cierta parte de problemas surgió como resultado del estudio de artículos de revistas. Algunos problemas los hemos extraído de otros manuales. Miembros de la cátedra de matemática cibernética de la Universidad de Moscú y otros colegas nuestros nos propusieron una serie de problemas. O. B. Lupanov presentó a disposición de los autores muchos de ellos. Algunos problemas fueron propuestos por S. V. Yablonsky, V. B. Alekséiev, A. A. Evdokímov, V. K. Leontiev, A. A. Márkov. A todos ellos les expresamos un sincero agradecimiento.

Los autores quedan muy reconocidos por la atención que ha concedido S. V. Yablonsky a nuestro trabajo para la preparación de este libro. Sus consejos y recomendaciones han determinado considerablemente la estructura y la dirección temática de esta colección de problemas.

Los autores agradecen profundamente la participación de O. B. Lupanov, quien revisó todo el manuscrito y dedicó mucho tiempo a la discusión de su contenido.

Nosotros estamos sinceramente reconocidos a S. S. Márchenkov por su minuciosa revisión del capítulo «Elementos de la teoría de los algoritmos», a V. I. Levenshtein por su examen del capítulo «Elementos de la teoría de la codificación» y también a los recensionistas V. V. Glagóliev y A. A. Márkov por las observaciones críticas y las ideas que expusieron para mejorar el libro.

G. P. Gavrílov, A. A. Sapozhenko

Capítulo
I

LAS FUNCIONES DE BOOLE, SUS FORMAS DE DESIGNACION Y SUS PROPIEDADES PRINCIPALES

§ 1. VECTORES DE BOOLE Y EL CUBO UNIDAD n-DIMENSIONAL[1]

El vector $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ cuyas coordenadas toman sus valores del conjunto $\{0, 1\}$ se llama *binario* o *vector booleano* (*colección*). Para abreviar designaremos tal vector por $\widetilde{\alpha}^n$ o $\widetilde{\alpha}$. El número n se llama *longitud del vector*. El conjunto de todos los vectores booleanos de longitud n se llama *cubo unidad n-dimensional* y se designa por B^n. Los propios vectores $\widetilde{\alpha}^n$ se llaman *vértices del cubo* B^n. *Peso* $\| \widetilde{\alpha}^n \|$ o *norma del vector* $\widetilde{\alpha}^n$ se llama al número de sus coordenadas iguales a la unidad o sea $\| \widetilde{\alpha}^n \| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Al conjunto de todos los vértices del cubo B^n que tienen un peso k, le denominaremos *k-ésima capa del cubo* B^n, y lo designaremos por B_k^n. A cada vector booleano $\widetilde{\alpha}^n$ se le puede confrontar el número $\nu (\widetilde{\alpha}^n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 2^{n-i}$ que se llama *número del vector* $\widetilde{\alpha}^n$. La colección $\widetilde{\alpha}^n$ es, evidentemente, una descomposición binaria del número $\nu (\widetilde{\alpha}^n)$. *La distancia* (*de Hamming*) *entre los vértices* $\widetilde{\alpha}$ *y* $\widetilde{\beta}$ del cubo B^n se llama número $\rho (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i - \beta_i |$, que es igual al número de las coordenadas en las que ellos se diferencian. La distancia de Hamming es la métrica y el cubo B^n es el espacio métrico. Las colecciones $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ de B^n se llaman *adyacentes* si $\rho (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1$ y *opuestas* si $\rho (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = n$. Un par de vértices adyacentes no ordenado se llama *arista del cubo*. El conjunto $B_k^n (\widetilde{\alpha}) = \{\widetilde{\beta}: \rho (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = k\}$ se llama *esfera* y el conjunto $S_k^n (\widetilde{\alpha}) =$

[1]) Este párrafo es auxiliar. En lo sucesivo se emplean sólo los problemas 1.1—1.6; 1.11; 1.14; 1.15; 1.31; 1.34; 1.35; 1.44.

$= \{\tilde{\beta}: \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant k\}$ se llama *bola de radio k con el centro* en $\tilde{\alpha}$. Se dice que la colección $\tilde{\alpha}^n$ *precede* a la colección $\tilde{\beta}^n$ (lo que se designa $\tilde{\alpha}^n \leqslant \tilde{\beta}^n$) si $\alpha_i \leqslant \beta_i$ para todos los $i = \overline{1, n}$. Si tiene lugar $\tilde{\alpha}^n \neq \tilde{\beta}^n$, entonces, se dice que $\tilde{\alpha}^n$ *rigurosamente precede a* $\tilde{\beta}^n$ (lo que se designa $\tilde{\alpha}^n < \tilde{\beta}^n$). Si tiene lugar aunque sea una de las dos relaciones $\tilde{\alpha}^n \leqslant \tilde{\beta}^n$ o $\tilde{\beta}^n \leqslant \tilde{\alpha}^n$, entonces $\tilde{\alpha}^n$ y $\tilde{\beta}^n$ se llaman *congruentes*. En el caso contrario se dice que $\tilde{\alpha}^n$ y $\tilde{\beta}^n$ son *incongruentes*. La colección $\tilde{\alpha}^n$ *precede inmediatamente* a la colección $\tilde{\beta}^n$ si $\tilde{\alpha}^n < \tilde{\beta}^n$ y $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = 1$. La relación de precedencia entre las colecciones es una relación de orden parcial en B^n. En la fig. 1 se representan diagramas de los conjuntos parcialmente ordenados B^2, B^3, B^4. La sucesión de los vértices del cubo $\{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k\}$ se llama *cadena que una* a $\tilde{\alpha}_0$ y $\tilde{\alpha}_k$

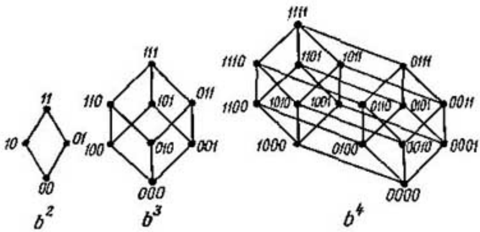


Fig. 1.

(lo que se designa: $[\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_k]$) si $\rho(\tilde{\alpha}_{i-1}, \tilde{\alpha}_i) = 1$ $(i = \overline{1, k})$. El número k se llama *longitud de la cadena* $[\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_k$. La cadena $\{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k\}$ *es creciente si* $\tilde{\alpha}_{i-1} < \tilde{\alpha}_i$ $(i = \overline{1, k})$. La cadena z de la variedad $\{\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k\}$ se llama *ciclo de longitud* k si $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_k$. Supongamos que $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ son vectores de B^n. Por $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}$ designaremos al vector $(\alpha_1 \oplus \beta_1, \alpha_2 \oplus \beta_2, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n)$ obtenido por medio de la suma por el módulo 2 de cada par de coordenadas de los vectores $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$. Por $\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}$ designaremos al vector cuya i-ésima coordenada es igual a 0 si, y sólo si, $\alpha_i = \beta_i = 0$. Por $\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}$ designaremos al vector cuya i-ésima coordenada es igual a 1 si, y sólo si, $\alpha_i = \beta_i = 1$. Por $\bar{\tilde{\alpha}}$ designaremos a un vector (*opuesto* a $\tilde{\alpha}$) cuya i-ésima coordenada toma el valor 0, si $\alpha_i = 1$, y el valor 1, si $\alpha_i = 0$. Si $\sigma \in \{0, 1\}$ admitimos que $\sigma\alpha = (\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2, \ldots, \sigma\alpha_n)$. Con el símbolo $\tilde{0}$, designamos al vector $(0, 0, \ldots, 0)$ y con el símbolo $\tilde{1}$, al vector $(1, 1, \ldots, 1)$.

El conjunto $B^{n,\, i_1, \ldots, i_k}_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k}$ de todas las colecciones $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de B^n en las que $\alpha_{i_j} = \sigma_j$ $(j = \overline{1, k})$, se llama *cara* del cubo B^n. El conjunto $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ se llama *dirección de la cara*, el número k se llama *rango de la cara* y $n - k$, *dimensión de la cara*.

1.1. 1) Encontrar el número $|B_k^n|$ de colecciones $\widetilde{\alpha}^n$ de peso k.

2) ¿A qué es igual el número de todos los vértices del cubo B^n?

1.2. 1) Hallar los números de las colecciones (1001), (01101), (110010).

2) Encontrar un vector de longitud 6 que sea una descomposición binaria del número 19.

1.3. ¿A qué es igual el número de colecciones $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$ que satisfacen la condición $2^{n-1} \leqslant \nu(\widetilde{\alpha}) < 2^n$?

1.4. Mostrar que para cualesquier $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$ de B^n son justas las relaciones:

$$1)\ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) \leqslant \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) + \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma});$$

$$2)\ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = \rho(\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma} \oplus \widetilde{\beta});$$

$$3)\ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \|\widetilde{\alpha}\| + \|\widetilde{\beta}\| - 2\|\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}\|;$$

$$4)\ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \|\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}\|.$$

1.5. 1) Hallar el número de pares no ordenados de los vértices adyacentes en B^n.

2) Hallar el número de pares no ordenados de las colecciones $(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\beta}^n)$ tales que $\rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\beta}^n) = k$.

1.6. Sean $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ vértices del cubo B^n, $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = m$. Encontrar el número de vértices $\widetilde{\gamma}$ que satisfacen la condición:

$$1)\ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta});$$

$$2)\ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = k, \quad \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) = r;$$

$$3)\ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) \leqslant k, \quad \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) = r;$$

$$4)\ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) \leqslant k, \quad \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \geqslant r.$$

1.7. Demostrar la incompatibilidad de los siguientes sistemas de relaciones para $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\gamma}$ de B^n, $n \geqslant 2$:

$$1)\ \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) > 2n/3, \quad \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) > 2n/3, \quad \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha}) > 2n/3;$$

$$2)\ \nu(\widetilde{\alpha}) < \nu(\widetilde{\beta} \oplus \widetilde{\gamma}), \quad \nu(\widetilde{\beta}) < \nu(\widetilde{\gamma} \oplus \widetilde{\alpha}), \quad \nu(\widetilde{\gamma}) < \nu(\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta});$$

$$3)\ \|\widetilde{\alpha}\| > \|\widetilde{\beta} \oplus \widetilde{\gamma}\|, \ \|\widetilde{\beta}\| > \|\widetilde{\gamma} \oplus \widetilde{\alpha}\|, \ \|\widetilde{\gamma}\| > \|\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}\|, \quad \|\widetilde{\alpha} \cap (\widetilde{\beta} \cap \widetilde{\gamma})\| = 0;$$

$$4)\ \|\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta} \oplus \widetilde{\gamma}\| = 0, \quad \|\overline{\widetilde{\alpha}} \oplus \overline{\widetilde{\beta}} \oplus \overline{\widetilde{\gamma}}\| = n - 1.$$

1.8. Supongamos que $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\gamma}$ son vértices de B^n. Mostrar que:

1) $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$ es equivalente a $\widetilde{\alpha} \cap \overline{\widetilde{\beta}} = \widetilde{0}$;

2) $\overline{\widetilde{\alpha}} \cup \widetilde{\beta} = \widetilde{1}$ es equivalente a $\overline{\widetilde{\beta}} \leqslant \overline{\widetilde{\alpha}}$;

3) $\tilde{\alpha} \cap (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}$;

4) $\tilde{\alpha} \cup (\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}) = \tilde{\alpha}$;

5) $(\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) \cap (\tilde{\beta} \cup \tilde{\gamma}) = (\tilde{\alpha} \cap \tilde{\gamma}) \cup \tilde{\beta}$;

6) $((\tilde{\alpha} \cap \tilde{\gamma}) \cup \tilde{\beta}) \cap \tilde{\gamma} = (\tilde{\alpha} \cap \tilde{\gamma}) \cup (\tilde{\beta} \cap \tilde{\gamma})$;

7) de $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\gamma}$, se deduce que $\tilde{\alpha} \cup (\tilde{\beta} \cap \tilde{\gamma}) = (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) \cap \tilde{\gamma}$;

8) $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\gamma}$ es equivalente a $\tilde{\alpha} \cup (\tilde{\beta} \cap \tilde{\gamma}) \leqslant (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) \cap \tilde{\gamma}$;

9) $(\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}) \cup (\tilde{\beta} \cap \tilde{\gamma}) \cup (\tilde{\gamma} \cap \tilde{\alpha}) = (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) \cap (\tilde{\beta} \cup \tilde{\gamma}) \cap (\tilde{\gamma} \cup \tilde{\alpha})$.

1.9. ¿Cuál es el número de vectores $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12})$ de B_6^{12}, tales que $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \alpha_i \leqslant m/2$ para todos los $m = \overline{1,12}$?

1.10. Hallar el número de vectores $\tilde{\alpha}$ de B_k^n tales que entre dos coordenadas de unidad existan por lo menos r nulas.

1.11. 1) Mostrar que en B^n existe un conjunto formado por $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ vectores incongruentes de par en par.

2) Mostrar que cualquier subconjunto que contenga no menos de $n+2$ vectores incluye un par de vectores incongruentes.

1.12. Sean $0 \leqslant l < k \leqslant n$ y $A(\tilde{\alpha})$ un conjunto de todos los vectores de B^n congruentes con $\tilde{\alpha}$. Hallar la potencia del conjunto C:

$$1)\ C = A(\tilde{\alpha}) \cap B_k^n, \quad \tilde{\alpha} \in B_l^n;$$

$$2)\ C = A(\tilde{\alpha}) \cap B_l^n, \quad \tilde{\alpha} \in B_k^n;$$

$$3)\ C = A(\tilde{\alpha}), \quad \tilde{\alpha} \in B_k^n.$$

1.13. Supongamos que $A \subseteq B_l^n$, y B es un conjunto de todas las colecciones de B_k^n comparables aunque sea con una sola colección de A. Demostrar que $\dfrac{|A|}{\binom{n}{l}} \leqslant \dfrac{|B|}{\binom{n}{k}}$.

1.14. 1) Mostrar, que en B^n existe un número $n!$ de cadenas diferentes de par en par, crecientes y de longitud n.

2) Mostrar que el número de cadenas diferentes de par en par, crecientes, de longitud n, que contienen el vértice fijo $\tilde{\alpha}$ de B_k^n es igual a $k!\,(n-k)!$.

1.15.* 1) Mostrar que la potencia de cualquier subconjunto de colecciones incongruentes de par en par del cubo B^n no supera a $\binom{n}{[n/2]}$.

2) Mostrar que si el subconjunto $A \subseteq B^n$ está formado por colecciones incongruentes de par en par y $\|\widetilde{\alpha}\| \leqslant k$ para cualquier $\widetilde{\alpha} \in A$, entonces $|A| \leqslant \binom{n}{k}$ siempre que $k \leqslant \frac{n}{2}$.

1.16. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números primos diferentes de par en par y N, el conjunto de todes los números, presentados en la forma $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, donde $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$. Sea el subconjunto $A \subset N$ tal, que ningún número $a \in A$ no es divisor de ningún número $b \in A$ diferente de a. Demostrar que $|A| \leqslant \binom{n}{[n/2]}$.

1.17. Supongamos que $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ son tales vértices del cubo B^n, que $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$, $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = k$. Mostrar que el número de colecciones $\widetilde{\gamma}$, tales que $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant \widetilde{\beta}$, es igual a 2^k.

1.18.* Demostrar que el cubo B^n se puede presentar en forma de una unión de cadenas crecientes que no se intersecan de par en par y que poseen las propiedades siguientes:

1) el número de cadenas de longitud $n-2k$ es igual a $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$, $k = \overline{0, [n/2]}$, y en este caso la colección mínima de cada cadena tal, tiene un peso k y la máxima, un peso $n-k$;

2) si $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\alpha}_{i+1}$ y $\widetilde{\alpha}_{i+2}$ son tres vértices consecutivos de una cadena creciente quo tiene una longitud $n-2k$, entonces el vértice $\widetilde{\beta}$, tal que $\widetilde{\alpha}_i < \widetilde{\beta} < \widetilde{\alpha}_{i+2}$, $\widetilde{\beta} \neq \widetilde{\alpha}_{i+1}$, pertenece a cierta cadena de longitud $n-2k-2$.

1.19. Que sean $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ unos vértices del cubo B^n tales que $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = k$ y sea $C(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ el conjunto de todos los vértices $\widetilde{\gamma}$ para los que existe una cadena $[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]$ de longitud $k + 2r$ que contiene este vértice. ¿A qué es igual la potencia del conjunto $C(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$?

1.20. El conjunto $A \subseteq B^n$ se llama *completo en* B^n si cualquier vector $\widetilde{\beta} \in B^n$ unívocamente se restablece si se da la condición de que para cada $\widetilde{\alpha} \in A$ se conoce la distancia $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$. Un conjunto completo en B^n se llama *básico* si para cualquier vector $\widetilde{\alpha}$ de A el conjunto $A \setminus \{\widetilde{\alpha}\}$ no es completo

1) Mostrar que cualquier cadena creciente $\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_{n-1}$ en B^n forma un conjunto básico.

2) Mostrar que los conjuntos B_1^n y B_{n-1}^n son completos en B^n si $n > 2$. Indicar un $n > 2$ tal que B_1^n no sea básico.

3) ¿Con qué valores de n y k el conjunto B_k^n no será completo en B^n?

4) Demostrar que cualquier conjunto básico A en B^n satisface la condición $\frac{n}{\log_2(n+1)} \leqslant |A| \leqslant n$.

5) Demostrar que ninguna cara de dimensión $n-2$ es un conjunto completo en B^n.

6) Mostrar que el número Ψ_n de conjuntos básicos en B^n satisface a las desigualdades $2\cdot(n!) \leqslant \Psi_n \leqslant \binom{2n}{n}$.

1.21. Sea φ la aplicación recíprocamente unívoca de B^n en sí mismo. Se dice que la aplicación φ *conserva la distancia entre los vértices*, si $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \rho(\varphi(\widetilde{\alpha}), \varphi(\widetilde{\beta}))$ para todos los $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ de B^n. Demostrar que la aplicación φ conserva la distancia si y solamente si, puede ser obtenida por medio de:

1) cierta permutación de las coordenadas, simultánea en todas las colecciones de B^n;

2) cambios de 0 por 1 y 1 por 0 en algunas coordenadas de todos los vectores.

1.22. La aplicación φ del conjunto B^n en sí mismo se llama *monótona* si de $\nu(\widetilde{\alpha}) \leqslant \nu(\widetilde{\beta})$, se deduce que $\nu(\varphi(\widetilde{\alpha})) \leqslant \nu(\varphi)\widetilde{\beta}))$. Hallar el número de aplicaciones monótonas del cubo B^n.

1.23. Sea $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$. El conjunto $M_k^n(\widetilde{\alpha}) = \{\widetilde{\gamma}: \nu(\widetilde{\gamma}) \leqslant \nu(\widetilde{\alpha}), \widetilde{\gamma} \in \in B_k^n\}$ se llama *segmento inicial de la capa* B_k^n. Sea $A \subseteq B^n$; designaremos por $Z_l^n(A)$ el conjunto de colecciones $\widetilde{\beta} \in B_l^n$ para los cuales existe tal $\widetilde{\alpha} \in A$, que $\widetilde{\beta} \leqslant \widetilde{\alpha}$.

1) Sea $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$ e $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$ sean los números de las coordenadas del vector $\widetilde{\alpha}$, iguales a la unidad. Mostrar que

$$|M_k^n(\widetilde{\alpha})| = 1 + \binom{n-i_1}{k} + \binom{n-i_2}{k-1} + \ldots + \binom{n-i_k}{1}.$$

2) Mostrar que si $l \leqslant k$ y A es el segmento inicial de la capa B_k^n, entonces el conjunto $Z_l^n(A)$ será el segmento inicial de la capa B_l^n.

3) Sea $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$ y sean $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant \leqslant n)$ los números de las coordenadas del vector $\widetilde{\alpha}$ iguales a la unidad. Sea $A = M_k^n(\widetilde{\alpha})$ y $l \leqslant k$. Mostrar que

$$|Z_l^n(A)| = 1 + \binom{n-i_1}{l} + \binom{n-i_2}{l-1} + \ldots + \binom{n-i_l}{1}.$$

4*) Sea $1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{k}$. Demostrar que el mínimo de la magnitud $|Z_{k-1}^n(A)|$ en todos los $A \subseteq B_k^n$, tales que $|A| = m$, se alcanza en el segmento inicial de la capa B_k^n.

5) Sean $1 \leqslant m \binom{n}{k}$ y $l \leqslant k$. Demostrar que el mínimo de la magnitud $|Z_l^n(A)|$ en todos los $A \subseteq B_k^n$, tales que $|A| = m$, se alcanza en el segmento inicial de la capa B_k^n.

6) Que sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números dados para los cuales existe un tal conjunto A de colecciones incongruentes de par en par que $|A \cap B_k^n| = a_k$ $(k = \overline{0, n})$. Entonces el mínimo de la magnitud $|Z_l^n(A)|$ cogido por todos esos conjuntos A se alcanza en el caso de que para cualquier $i > l$ el conjunto $Z_i^n(A)$ sea segmento inicial de la capa B_i^n. Demostrar esto.

1.24*. Sea $A \subseteq B^n$ un conjunto de colecciones tal, que no existen colecciones $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ de A para las cuales $\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta} = \widetilde{0}$, y $\widetilde{\alpha} \cup \widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma}$. Sea $a_k = |A \cap B_k^n|$. Demostrar, que

$$a_{k+m}\Big/\binom{n}{k+m} + a_k\Big/\binom{n}{k} + a_m\Big/\binom{n}{m} \leqslant 2,$$

para todos los k, m naturales que no superen a n.

1.25. El conjunto $\Gamma(A) = \{\widetilde{\alpha}: \widetilde{\alpha} \in B^n \setminus A, \rho(\widetilde{\alpha}, A) = 1\}$ se llama *cota del subconjunto* $A \subset B^n$. Sean $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Designemos $A_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ el conjunto de todas las colecciones de A en las que la coordenada con el número i_j es igual a σ_j $(j = \overline{1, k})$.

Llamaremos *centro del conjunto* A a una colección tal en la que la i-ésima coordenada es igual a 0, si $|A_0^i| \geqslant \frac{1}{2}|A|$, y es igual a 1 en el caso contrario. Designaremos por $\widetilde{\alpha}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ la colección obtenida de $\widetilde{\alpha}$ al cambiar las coordenadas que llevan los números $i_1, i_2, \ldots, i_k$ por las opuestas.

1) Mostrar que para todo $A \subseteq B^n$ existe un $A' \subseteq B^n$ tal que $|A'| = |A|$, $|\Gamma(A')| = |\Gamma(A)|$ y el centro de A' es el vértice $\widetilde{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

2) Diremos que el conjunto $A \subseteq B^n$ posee la propiedad I si para cualquier $i = \overline{1, n}$ de $\widetilde{\alpha} \in A_1^i$ se deduce que $\widetilde{\alpha}^i \in A$. Mostrar que para todo $A \subseteq B^n$ existe un conjunto A' con centro $\widetilde{0}$, tal, que $|A'| = |A|$, A' posee la propiedad I y $|\Gamma(A')| \subseteq |\Gamma(A)|$.

3) Diremos que el conjunto $A \subseteq B^n$ posee la propiedad II, si para cualesquiera i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ de $\widetilde{\alpha} \in A_{10}^{i, j}$ se deduce que $\widetilde{\alpha}^{i, j} \in A$. Mostrar que para cualquier A con centro $\widetilde{0}$ que posea la propiedad I existe un A' con el centro en $\widetilde{0}$ que posee las propiedades I y II y que es tal, que $|A| = |A'|$, $|\Gamma(A')| \leqslant |\Gamma(A)|$.

4*) Mostrar, que el min $|\Gamma(A)|$ por todos los $A \subseteq B^n$, es tal que $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} < |A| \leqslant \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$, se alcanza en el conjunto $A = S_{k-1}^n(\widetilde{0}) \cup M_k^n(\widetilde{\alpha})$, donde $M_k^n(\widetilde{\alpha})$ es un cierto segmento final de la capa B_k^n (véase el problema 1.23).

1.26. Que sea $\varphi(n)$ $(\varphi'(n))$ la potencia máxima del conjunto $A \subseteq B^n$, tal, que $\|\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}\| = 1$ (correspondientemente $\|\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}\| \geqslant$

$\geqslant 1$) para dos cualesquiera diferentes vectores de A. Mostrar que: 1) $\varphi(n) = n$; 2) $\varphi'(n) = 2^{n-1}$.

1.27. Sea $F(n, k)$ una familia de subconjuntos A del conjunto B^n, tales que $\|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}\| \geqslant k$, para cualesquiera $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de A. Sea $\varphi(n, k) = \max\limits_{A \in F(n, k)} |A|$. Demostrar las siguientes afirmaciones

$$1)\ \varphi(n, k) \geqslant \sum_{i+]\frac{n+k+1}{2}[}^{n} \binom{n}{i}.$$

$$2)\ \text{Sea } A \subset F(n, k);\ \text{entonces } |A \cap B_l^n| + |A \cap B_{n-l+k-1}^n| \leqslant \binom{n}{l}.$$

$$3)\ \text{Si } l \geqslant \frac{n+k+1}{2},\ \text{la igualdad } |A \cap B_l^n| + |A \cap B_{n-l+k-1}^n| = \binom{n}{l}$$

se alcanzará solamente en el caso de que $A \cap B_{n-l+k-1}^n = \varnothing$.

$$4)\ \varphi(n, k) = \sum_{i=\frac{n+k+1}{2}}^{n} \binom{n}{i} \text{ si } n+k \text{ es impar,} \quad \varphi(n, k) =$$

$$= \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1} + \sum_{i=\frac{n+k}{2}+1}^{n} \binom{n}{i} \text{ si } n+k \text{ es par.}$$

1.28. Sea $F_r(n)$ una familia de subconjuntos $A \subseteq B^n$ tales que $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant 2r$ para cualesquiera $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de A. Sea $\varphi_r(n) = \max\limits_{A \in F_r(n)} |A|$.

1*) Mostrar que el máximo $|A|$ por todos los $A \in F_r(n)$ se alcanza en los conjuntos de la forma $S_r^n(\tilde{\alpha})$ y es igual a $\sum\limits_{k=0}^{r} \binom{n}{k}$.

2) Para un n impar y $r = \frac{n-1}{2}$, dar un ejemplo de un conjunto $A \in F_r(n)$ que no sea una bola de radio r, para la cual $|A| = \varphi_r(n)$.

1.29*. Diremos que el subconjunto $A \subseteq B^n$ posee la propiedad I, si cualesquiera dos vectores de A tienen una coordenada unidad común, posee la propiedad II, si para cualquier $\tilde{\alpha} \in A$ el vector opuesto $\tilde{\bar{\alpha}}$ no descansa en A y, por fin, posee la propiedad III, si de $\tilde{\alpha} \in A$ y $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ se deduce que $\tilde{\beta} \in A$. Sea $\psi(n)$ el número de subconjuntos $A \subseteq B^n$ que poseen simultáneamente las propiedades I y II, y $\varphi(n)$ el número de subconjuntos $A \subseteq B^n$ que poseen la propiedad III. Mostrar que:

$$1)\ \psi(n) \geqslant 2^{\binom{n-1}{[(n-1)/2]}};\quad 2)\ \psi(n) \leqslant \varphi^2(n-1).$$

1.30. Sea $A \subset B^n$; $R(A)$, el número de aristas $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, tales que $\widetilde{\alpha} \in A$, $\widetilde{\beta} \in B^n \setminus A$. Mostrar que $|R(A)| \geqslant \text{mín}\{|A|, 2^n - |A|\}$.

1.31. Demostrar las siguientes afirmaciones:

1) El número de las diferentes caras de dirección fija $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ es igual a 2^k.

2) Dos caras diferentes de una misma dirección no se intersecan.

3) La unión de todas las caras del cubo B^n que tienen una dirección dada, da como resultado todo el cubo.

4) El número de todas las caras de rango k del cubo B^n es igual a $\binom{n}{k} \cdot 2^k$.

5) El número total de caras del cubo B^n es igual a 3^n.

6) El número de caras de dimensión k, que contienen el vértice $\widetilde{\alpha}$ dado, es igual a $\binom{n}{k}$.

7) El número de caras de dimensión k, que contienen la cara dada de dimesión l, es igual a $\binom{n-l}{k-l}$.

8) El número de caras k-dimensionales que se intersecan con la cara l-dimensional dada, del cubo B^n, es igual a

$$\sum_{j=0}^{\min(k,\, l)} \binom{l}{j} 2^{l-j} \binom{n-l}{k-j}.$$

1.32. *Intervalo del cubo* B^n, se llama al conjunto de la forma $\{\widetilde{\gamma}: \widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant \widetilde{\beta}\}$, donde $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ son ciertos vértices tales, que $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$. El número $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ se llama *dimensión del intervalo*. Mostrar que una cara de dimensión k es un intervalo de dimensión k.

1.33. Sean g_1, g_2, g_3, caras del cubo B^n. Mostrar que de $g_1 \cap g_2 \neq \varnothing$, $g_2 \cap g_3 \neq \varnothing$, $g_3 \cap g_1 \neq \varnothing$, se deduce que $(g_1 \cap g_2) \cap g_3 \neq \varnothing$.

1.34. Sean $n_1, n_2, \ldots, n_s$, unos números enteros y no negativos tales, que $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} \leqslant 2^n$. Entonces en B^n existen unas caras $g_1, g_2, \ldots, g_s$, de las que se forman pares de caras que no se intersecan y que tienen una dimensión igual a $n_1, n_2, \ldots, n_s$ respectivamente. Demostrar esto.

1.35. Las caras g_1 y g_2 del cubo B^n se llaman *incomparables* si no se cumple ninguna de las incluisones $g_1 \subseteq g_2$, $g_2 \subseteq g_1$.

1) Mostrar que existe un conjunto de caras del cubo B^n formado por $\binom{n}{[n/3]}\binom{n-[n/3]}{[n/3]}$ caras incongruentes de par en par.

2) Mostrar que la potencia de cualquier conjunto de caras del cubo B^n incongruentes de par en par no supera a $\binom{n}{[n/3]} \times 2^{n-\left[\frac{n}{3}\right]}$.

1.36. Sea $L(n, k)$ el número mínimo de vértices de B^n tales, que en cada cara k-dimensional haya aunque sea uno solo de estos vértices. Demostrar que:

1) $L(n, 1) = 2^{n-1}$;
2) $L(n, n-1) = 2$;
3) $L(n, 2) \leqslant]2^n/3[$;
4*) $m \leqslant L(n, n-2) \leqslant m+2$, donde m es el menor número entero para el cual $\binom{m}{]m/2[} \geqslant n$;
5) $L(n, k-1) \leqslant \sum_{i=0}^{[n/k]} \binom{n}{ki}$;
6) $L(n, k) \geqslant 2^{n-r} L(r, k)$, $k \leqslant r \leqslant n$.

1.37. Mostrar que las colecciones de B^n se pueden disponer en una sucesión $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_{2^n}$ tal, que es un ciclo.

1.38. Demostrar que en B^n no hay ciclos de longitud impar.

1.39. Al vector binario $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1})$ lo llamaremos *n-universal*, si para cualquier vector $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ de B^n existe tal número k, que $\beta_i = \alpha_{k \oplus i}$ $(i = \overline{0, n-1})$, donde $k \oplus i = k + i \pmod N$. Aclarar si es el vector $\tilde{\alpha}$ n-universal en el caso de que:

1) $\tilde{\alpha} = (0011)$, $n = 2$;
2) $\tilde{\alpha} = (01011)$, $n = 2$;
3) $\tilde{\alpha} = (00110)$, $n = 2$;
4) $\tilde{\alpha} = (00011101)$, $n = 3$.

1.40. Demostrar que para todo n natural existe un vector n-universal de longitud 2^n y no existen vectores n-universales de longitud menor que 2^n.

1.41. El ciclo Z del cubo B^n se llama *2d-ciclo* si $|Z \cap S_d^n(\tilde{\alpha})| = 2d + 1$ para todos los $\tilde{\alpha} \in Z$, o sea, si para cualquier vértice $\tilde{\alpha}$ del ciclo Z el conjunto de los vértices del ciclo, que se encuentran a una distancia no mayor que d (por el cubo), coincide con el conjunto de los vértices que se encuentran a una distancia no mayor de d «a lo largo del ciclo».

1) Sea $l(n)$ la longitud máxima de 2-ciclo en B^n. Hallar $l(n)$ para $n = \overline{2, 5}$.

2) Sea Z 2-ciclo en B^n. Mostrar que en cualquier cara de dimensión 4 hay no más de ocho vértices del 2-ciclo Z.

3*) Mostrar que la longitud máxima de un 2-ciclo en B^n no es mayor que 2^{n-1}, $n > 3$.

1.42. El par $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{i+1})$ que está compuesto de dos vértices consecutivos del ciclo Z del cubo B^n se llama *arista del ciclo*. Mostrar que en B^5 existe un ciclo de longitud 32, en el que cualesquiera cuatro aristas consecutivas tienen, de dos en dos, direcciones diferentes.

1.43. Sean $a_1, \ldots, a_n$, números tales que $a_i > 2\,(i=\overline{1, n})$. Mostrar que el número de las sumas $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i} a_i$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, que satisfacen la condición $\left|\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i} a_i\right| \leqslant 1$, no supera a $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

1.44. Sea $A \subseteq B^n$, $|A| > 2^{n-1}$. Mostrar que existe no menos de n aristas del cubo que se contienen por entero en A.

§ 2. FORMAS DE EXPRESION DE LAS FUNCIONES DE BOOLE. FUNCIONES ELEMENTALES. FORMULAS. OPERACION DE SUPERPOSICION

Designaremos por $\widetilde{x}^n$ (o $\widetilde{x}$) una colección de símbolos variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y por X^n, un conjunto de esos mismos símbolos variables. La función $f(\widetilde{x}^n)$ definida sobre el conjunto B^n y que toma sus valores del conjunto $\{0, 1\}$ se llama *función del álgebra de la lógica* o *función booleana*. Designaremos por $P_2(X^n)$ el conjunto de todas las funciones booleanas de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ se puede presentar con una tabla $T(f)$ (véase la tabla 1). Aquí las colecciones $\widetilde{\sigma}$ están colocadas en

Tabla 1

x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,$	$x_2,$	$\ldots,$	$x_{n-1},$	$x_n)$
0	0		0	0	$f(0$	0		0	0)
0	0		0	1	$f(0$	0		0	1)
0	0		1	0	$f(0$	0		1	0)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
1	1		1	1	$f(1$	1		1	1)

el orden de crecimiento de sus números. En lo sucesivo, suponiendo una colocación estándard de las colecciones, presentaremos la función $f(\widetilde{x}^n)$ por medio del vector $\widetilde{\alpha}_f^{2^n} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$ en el cual la coordenada α_i representa en sí el valor de la función $f(\widetilde{x}^n)$ sobre la colección $\widetilde{\sigma}$ con el número i $(i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$.

Por el símbolo N_f designaremos el conjunto $\{\widetilde{\sigma}: (\widetilde{\sigma} \in B^n) \,\&\, \& \,(f(\widetilde{\sigma}) = 1)\}$.

La función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ puede ser también dada con una tabla rectangular $\Pi_{k,n-k}(f)$ (véase la tabla 2) en la cual los valores

Tabla 2

$$\begin{array}{cccc|cccccc|l}
 & & & & 0 & 0 & \dots & \sigma_{k+1} & \dots & 1 & x_{k+1} \\
 & & & & 0 & 0 & \dots & \sigma_{k+2} & \dots & 1 & x_{k+2} \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
x_1 & x_2 & \dots & x_k & 0 & 1 & \dots & \sigma_n & \dots & 1 & x_n \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & \dots & 1 & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \boxed{f(\widetilde{\sigma})} & & & \\
\sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_k & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\
1 & 1 & \dots & 1 & & & & & & & \\
\end{array}$$

$f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ de la función f están colocados en la intersección de la «fila» $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ con la «columna» $(\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_n)$, $1 \leqslant k < n$.

Las funciones booleanas dadas en las tables 3 y 4 se considerarán

Tabla 3

x	0	1	f_1	f_2
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Tabla 4

x_1 x_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
0 0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	0	1	1	0	1	1	0
1 0	0	1	1	0	0	1	0
1 1	1	1	0	1	1	0	0

elementales.

Citaremos las designaciones y los nombres de estas funciones.

1) Las funciones 0 y 1 se llaman correspondientemente *idéntica a cero* e *idéntica a la unidad.*

2) La función f_1 se llama *función idéntica* y se designa por x.

3) La función f_2 se llama *negación de* x, se designa $\bar{x}$ o $\neg x$ y con frecuencia se lee «*no* x».

4) La función f_3 se llama *conjunción de* x_1 *y* x_2, se designa $x_1 \& \& x_2$ o $x_1 \cdot x_2$ o $x_1 x_2$ o min (x_1, x_2) y con frecuencia se lee «x_1 y x_2».

5) La función f_4 se llama *disyunción de* x_1 *y* x_2, se designa $x_1 \vee x_2$ o $x_1 + x_2$ o max $(x_1 x_2)$ y con frecuencia se lee «x_1 o x_2».

6) La función f_5 se llama *suma por el módulo* 2 de x_1 y x_2, se designa $x_1 \oplus x_2$ y con frecuencia se lee «x_1 *más* x_2».

7) La función f_6 se llama *equivalencia de* x_1 *y* x_2, se designa $x_1 \sim \sim x_2$ o $x_1 \leftrightarrow x_2$ o $x_1 \equiv x_2$ y con frecuencia se lee «x_1 *es equivalente a* x_2».

8) La función f_7 se llama *implicación de* x_1 *y* x_2, se designa $x_1 \rightarrow \rightarrow x_2$ o $x_1 \supset x_2$ y con frecuencia se lee «x_1 *implica a* x_2».

9) La función f_8 se llama *raya* u *operación de Sheffer de* x_1 *y* x_2, se designa $x_1 \mid x_2$ y con frecuencia se lee «*no* x_1 y x_2».

10) La función f_9 se llama *flecha* u *operación de Peirce de* x_1 *y* x_2 se designa $x_1 \downarrow x_2$ y con frecuencia se lee «*no* x_1 *o* x_2».

Algunas veces las funciones 0 y 1 se consideran como funciones dependientes de un conjunto vacío de variables.

Los símbolos $\neg$, $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\sim$, etc. que se emplean en las designaciones de las funciones elementales se llaman *enlaces lógicos.*

Fijemos cierto *alfabeto de variables* X (finito o contable-infinito). Supongamos que $\Phi = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots\}$ es un conjunto de *símbolos funcionales* en donde los índices superiores indican los *lugares* («*arnost*») de los símbolos. Algunas veces los índices superiores se omiten pero entonces se supone que se conoce el «arnost» de los símbolos funcionales.

DEFINICIÓN 1. *Fórmula sobre el conjunto* Φ se llama a cualquier (y sólo a una tal) expresión de los tipos siguientes:

1) f_k y $f_j(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, en donde f_k y f_j son símbolos funcionales de cero lugares y de n lugares respectivamente y $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ $\ldots, x_{i_n}$ son las variables del conjunto X;

2) $f_m(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s)$, en donde f_m es un símbolo funcional de s lugares y $\mathfrak{A}_i$ es una fórmula sobre Φ o bien una variable de X, $i = \overline{1, s}$.

Para agudizar la atención en que en la fórmula $\mathfrak{A}$ entran *sólo variables de* X (o *sólo símbolos funcionales de* Φ) anotaremos $\mathfrak{A}(X)$ (y respectivamente $\mathfrak{A}[\Phi]$).

Algunas veces se anotan las fórmulas del tipo $f(x, y)$ en forma de (xfy) o bien xfy, y la fórmula $f(x)$, en forma de (fx) o fx. En estos casos al símbolo f lo llaman *enlace*.

Generalmente se emplean en calidad de enlaces los símbolos del conjunto $\mathfrak{S} = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \sim, \rightarrow, \mid, \downarrow\}$.

DEFINICIÓN 2. Se llama *fórmula sobre* $\mathfrak{S}$ a toda (y sólo a una tal) expresión de los tipos siguientes:

1) x es una variable cualquiera del conjunto X;

2) $(\neg \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B})$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \downarrow \mathfrak{B})$, en donde $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son fòrmulas sobre $\mathfrak{S}$.

Usualmente se aceptan los siguientes acuerdos para la reducción de la escritura de las fórmulas sobre el conjunto de los enlaces $\mathfrak{S}$:

a) se omiten los paréntesis exteriores de las fórmulas;

b) la fórmula $(\neg\mathfrak{A})$ se escribe en la forma de $\overline{\mathfrak{A}}$;

c) la fórmula $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$ se anota en la forma $(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})$ o $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$;

d) se considera que el enlace $\neg$ es *más fuerte* que cualquier enlace de dos lugares de $\mathfrak{S}$;

e) el enlace $\&$ se considera *más fuerte* que cualquiera de los enlaces $\vee$, $\oplus$, $\sim$, $\rightarrow$, $\mid$, $\downarrow$.

Estos acuerdos permiten, por ejemplo, escribir la fórmula $((\neg x) \rightarrow ((x\&y) \vee z))$ en la forma $\bar{x} \rightarrow (xy \vee z)$.

Se emplean también escrituras *mixtas* de las fórmulas, por ejemplo, $x \oplus f(y, z)$ o $x_1 f(x_2, 0, x_3) \vee \overline{x_1}\, f(1, \bar{x}_2, x_3)$.

Supongamos que a cada símbolo funcional $f_i^{(n_i)}$ del conjunto Φ se la coteja cierta función $F_i\colon B^{n_i} \rightarrow B$. El concepto de *función* $\varphi_{\mathfrak{A}}$ *que se realiza con la fórmula* $\mathfrak{A}$ *sobre el conjunto* Φ se determina por inducción:

1) si $\mathfrak{A} = f_i^{(n_i)}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$, entonces para toda colección $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i})$ de valores de las variables $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$ el valor de la función $\varphi_{\mathfrak{A}}$ será igual a $F_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i})$;

2) si $\mathfrak{A} = f(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m)$, en donde $f \in \Phi$, $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_k(y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{ks_k})$ es una fórmula sobre Φ o una variable de X y en toda colección $(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{ks_k})$ de los valores de las variables $y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{ks_k}$ la función $\varphi_{\mathfrak{A}_k}$ igual a $\beta_k\,(k = \overline{1, m})$, entonces,

$$\varphi_{\mathfrak{A}}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1s_1}, \ldots, \alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots$$
$$\ldots, \alpha_{ks_k}, \ldots, \alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots, \alpha_{ms_m}) =$$
$$= F(\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_m)$$

(aquí F es la función cotejada al símbolo funcional f).

Si $\mathfrak{A} = f_i^{(n_i)}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$, entonces $\varphi_{\mathfrak{A}}$ se designa corrientemente for $F_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n_i}})$. Pero si $\mathfrak{A} = f(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m)$

entonces $\varphi_{\mathfrak{A}}$ se designa por $F[\varphi_{\mathfrak{A}_1}(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1s_1}), \ldots, \varphi_{\mathfrak{A}_m}(y_{m1}, y_{m2}, \ldots, y_{ms_m})]$.

El concepto de *función* $\varphi_{\mathfrak{A}}$, *realizado por medio de la fórmula* $\mathfrak{A}$ *sobre el conjunto de enlaces* $\mathfrak{S}$, se introduce de la manera siguiente:

1) a la fórmula $\mathfrak{A} = x$, en donde $x \in X$, se le coteja una función idéntica $\varphi_{\mathfrak{A}}(x) = x$;

2) si $\mathfrak{A} = (\neg\mathfrak{B})$ (o $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \bigcirc \mathfrak{C})$, en donde $\bigcirc \in \{\&, \vee, \oplus, \sim, \rightarrow, |, \downarrow\}$), entonces $\varphi_{\mathfrak{A}} = \overline{\varphi_{\mathfrak{B}}}$ (respectivamente $\varphi_{\mathfrak{A}} = \varphi_{\mathfrak{B}} \bigcirc \varphi_{\mathfrak{C}}$, habiendo que entender el símbolo $\bigcirc$ como la designación de la función booleana elemental correspondiente; véanse las tablas 3 y 4).

Supongamos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es el conjunto de las variables que se encuentran aunque sea en una de las fórmulas $\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{B}$. Las fórmulas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se llaman *equivalentes* (se designan $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ o $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), si en cualquier colección $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de valores de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, coinciden los valores de las funciones $\varphi_{\mathfrak{A}}$ y $\varphi_{\mathfrak{B}}$ que se realizan con las fórmulas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, respectivamente.

Sea Φ un conjunto de símbolos funcionales (o de enlaces lógicos) y P, un conjunto de funciones que les corresponden. Se llama *superposición sobre el conjunto* P a toda función F que pueda realizarse por medio de una fórmula sobre el conjunto Φ.

2.1. ¿Cuál será el número de funciones en $P_2(X^n)$ que tomen en colecciones opuestas los mismos valores?

2.2. Hallar el número de funciones en $P_2(X^n)$ que en cualquier par de colecciones adyacentes toman valores opuestos.

2.3. ¿Cuál es el número de funciones en $P_2(X^n)$ que toman el valor 1 en menos de k colecciones de B^n?

2.4. Construir en vectores la función h, por las funciones $f(x_1, x_2)$ y $g(x_3, x_4)$ dadas en forma vectorial:

1) $\tilde{\alpha}_f = (1011)$, $\tilde{\alpha}_g = (1001)$, $h(x_2, x_3, x_4) = f(g(x_3, x_4), x_2)$;

2) $\tilde{\alpha}_f = (1011)$, $\tilde{\alpha}_g = (1001)$, $h(\tilde{x}^4) = f(x_1, x_2) \vee g(x_3, x_4)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (1000)$, $\tilde{\alpha}_g = (0111)$, $h(\tilde{x}^4) = f(x_1, x_2) \,\&\, g(x_3, x_4)$.

2.5. Que sea ν_1 un número, cuya descomposición binaria constituye la colección (x_1, x_2) y ν_2 un número cuya descomposición binaria es (x_3, x_4). Sea $f_i(\tilde{x}^4)$ el i-ésimo orden de la descomposición binaria del número $|\nu_1 - \nu_2|$, $i = 1, 2$. Construir la tabla rectángular $\Pi_{2,2}$ de las funciones $f_1(\tilde{x}^4)$ y $f_2(\tilde{x}^4)$.

2.6. 1) La función $f(\tilde{x}^3)$ se determina de la siguiente manera: es igual a 1 si $x_1 = 1$, o bien si las variables x_2 y x_3 adquieren distintos valores y el valor de la variable x_1 es menor que el valor de la variable x_3; en el caso contrario la función se hace cero. Componer las tablas $T(f)$ y $\Pi_{1,2}(f)$ de la función $f(\tilde{x}^3)$ y escribir las colecciones del conjunto N_f.

2) La función $f(\tilde{x}^4)$ se da de la siguiente forma: es igual a cero sólo en las colecciones $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ para las cuales la desi-

gualdad $\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + 2\alpha_4$ es verídica. Construir la tabla $T(f)$ y escribir las colecciones del conjunto N_f de esta función.

2.7. La función $f(\widetilde{x}^n)$ se llama *simétrica* si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ con cualquier sustitución $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_n \end{pmatrix}$.

2) Mostrar que si $f(\widetilde{x}^4)$ es una función simétrica, entonces de la igualdad $\| \widetilde{\alpha}^n \| = \| \widetilde{\beta}^n \|$ se deduce la igualdad $f(\widetilde{\alpha}^n) = f(\widetilde{\beta}^n)$.

2) Hallar el número de funciones simétricas que hay en $P_2(X^n)$.

2.8. Sea $f(\widetilde{x}^n)$ una función arbitraria del álgebra lógica ($n \geqslant 1$). Le cotejaremos la función simétrica $S(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, en donde $m = 2^n - 1$: $S(\widetilde{\alpha}^m) = f(\widetilde{\beta}^n)$, si $\| \widetilde{\alpha}^m \| = \nu(\widetilde{\beta}^n)$. Demostrar que

$$S(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{2^{n-1}\text{ veces}}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{2^{n-2}\text{ veces}}, \ldots, \underbrace{x_i, \ldots, x_i}_{2^{n-i}\text{ veces}}, \ldots, \underbrace{x_{n-1}, x_{n-1}}_{2\text{ veces}}, x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n).$$

2.9. Aclarar cual de las expresiones que se exponen a continuación son fórmulas sobre el conjunto de enlaces lógicos $\{\neg, \&, \vee, \rightarrow\}$

1) $x \rightarrow y$;
2) $(x \&) \neg y$;
3) $(x \leftarrow y)$;
4) $(y \rightarrow (x))$;
5) $(x \rightarrow (y \& (\neg x)))$;
6) $(x \& y) \neg z$;
7) $(\neg x \rightarrow z)$.

2.10. Aclarar de cuántas maneras se pueden colocar los paréntesis en la expresión A para que cada vez resulte una fórmula sobre el conjunto de enlaces lógicos $\{\neg, \&, \vee, \rightarrow\}$, si:

1) $A = \neg x \rightarrow y \& S$;
2) $A = x \& y \& \neg \neg z \vee x$;
3) $A = x \rightarrow \neg y \rightarrow z \& \neg x$.

2.11. Llamaremos *complejidad de la fórmula* sobre el conjunto de enlaces lógicos $\mathfrak{S}$ al número de enlaces en ella. Demostrar por la complejidad de la fórmula a base de inducción que en una fórmula

1) de complejidad no cero se contiene por lo menos un par de paréntesis;

2) el número de paréntesis izquierdos es igual al número de paréntesis derechos;

3) no hay dos enlaces que estén juntos;

4) no hay dos símbolos de variables que estén juntos.

2.12. Llamaremos *índice del enlace en la fórmula* a la diferencia entre el número de paréntesis izquierdos que preceden al enlace examinado en la fórmula dada y el número de paréntesis derechos que preceden a este mismo enlace. Demostrar que cualquier fórmula de una complejidad no cero sobre el conjunto $\{\neg, \&, \vee, \rightarrow\}$,

1) contiene un único enlace de índice 1;

2) puede ser presentada de una sola manera en una de las siguientes formas: $(\neg \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, en donde $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son fórmulas sobre el conjunto $\{\neg, \&, \vee, \to\}$.

2.13. Examinemos una anotación sin paréntesis de fórmulas sobre el conjunto de enlaces $\{\neg, \&, \vee, \to\}$; en lugar de $(\neg x)$, $(x \& y)$, $(x \vee y)$ y $(x \to y)$, escribiremos $\neg x$, $\& xy$, $\vee xy$, $\to xy$. Por ejemplo, la fórmula $((\neg x) \to (y \vee (\neg z)))$ se representará $\neg \to x \vee y \neg z$. Demostrar que si cada uno de los enlaces $\&$, $\vee$, $\to$ se evalúa con el número $+1$; cada símbolo variable, con el número -1 y el enlace $\neg$, con cero, entonces, en la anotación sin paréntesis de la expresión A habrá una fórmula si, y sólo si, la suma de las evaluaciones de todas las entradas de los símbolos en A es igual a -1 y en cada segmento inicial de la expresión A esta suma es no negativa.

2.14. Aclarar si la expresión A es una fórmula sobre el conjunto Φ, en el caso de que:

1) $A = f^{(2)}(g^{(2)}(x, y), f^{(2)}(x))$, $\Phi = \{f^{(2)}, g^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;
2) $A =)x(\varphi^{(1)}$, $\Phi = \{g^{(1)}, \varphi^{(1)}\}$;
3) $A = \varphi^{(1)}(f^{(2)}(1, x))$, $\Phi = \{f^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;
4) $A = g^{(2)}(\varphi^{(1)}, f^{(3)}, (x, y, \varphi^{(1)}))$, $\Phi = \{f^{(3)}, g^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;
5) $A = (\varphi^{(1)}(f^{(2)}x, \varphi^{(1)}(x))))$, $\Phi = \{f^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$.

2.15. Hallar el vector $\widetilde{\alpha}_\varphi$ de la función φ que realiza la fórmula $\mathfrak{A}$ sobre el conjunto $\Phi = \{f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, g^{(2)}\}$ si a los símbolos funcionales $f_1^{(1)}$, $f_2^{(2)}$, $g^{(2)}$ se les comparan las funciones booleanas determinadas respectivamente por los vectores (10), (1011) y (1000):

1) $\mathfrak{A} = f_2^{(2)}(f_1^{(1)}(g^{(2)}(x, f_1^{(1)}(y))), y)$;
2) $\mathfrak{A} = g^{(2)}(f_1^{(1)}(f_2^{(2)}(x, y)), g^{(2)}(x, f_1^{(1)}(y)))$;
3) $\mathfrak{A} = f_1^{(1)}(f_2^{(2)}(x, g^{(2)}(f_2^{(2)}(x, y), f_1^{(1)}(y))))$.

2.16. Construir las tablas de las funciones realizables con las fórmulas siguientes (sobre el conjunto de enlaces $\mathfrak{S}$):

1) $(x \to y) \oplus ((y \to z) \oplus (z \to x))$;
2) $\overline{(\bar{x} \vee y) \vee (x \cdot \bar{z})} \downarrow (x \sim y)$;
3) $\bar{x} \to (\bar{z} \sim (y \oplus xz))$;
4) $(((x|y) \downarrow z)|y) \downarrow z$.

2.17. Una fórmula sobre el conjunto $\mathfrak{S}$ se llama *idénticamente verdadera* (*idénticamente falsa*) si la función que la realiza es igual a 1 (o, respectivamente, a cero) en toda colección de valores de las variables. Aclarar cuál de las fórmulas indicadas a continuación es idénticamente verdadera o idénticamente falsa:

1) $(x \to y) \to ((x \vee z) \to (y \vee z))$;
2) $((x \oplus y) \sim z)\,(x \to yz)$;
3) $((\bar{x} \vee \bar{y}) \downarrow (x \oplus \bar{y})) \oplus (\overline{x \to \bar{y}} \to (\bar{x} \vee y))$;
4) $((x \vee \bar{y})\, z \to ((x \sim z) \oplus y))\,(x\,(yz))$.

2.18. ¿Son equivalentes las fórmulas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$?

1) $\mathfrak{A} = ((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y)(x \vee z))$, $\mathfrak{B} = x \sim z$;
2) $\mathfrak{A} = (x \to y) \to z$, $\mathfrak{B} = x \to (y \to z)$;
3) $\mathfrak{A} = ((x \oplus y) \to (x \vee y))((\bar{x} \to y) \to (x \oplus y))$, $\mathfrak{B} = x \mid y$;
4) $\mathfrak{A} = \overline{(x \to y) \vee ((x \to z)\, y)}$, $\mathfrak{B} = (x\bar{y})(\bar{y} \to x\bar{z})$.

2.19. Hallar todas las funciones dependientes sólo de las variables del conjunto $\{x, y\}$ y que son superposiciones sobre el conjunto P:

1) $P = \{u_1 \oplus u_2, 1\}$;
2) $P = \{u_1u_2 \oplus (u_1 \vee u_2)\}$;
3) $P = \{f(u_1, u_2) = (1101), g(u_1, u_2, u_3) = (10010110)\}$ [1]).

2.20. *La profundidad de la fórmula* $\mathfrak{A}$ *sobre el conjunto* Φ (se designa $\mathrm{dep}_\Phi(\mathfrak{A})$) se determina por inducción:

(I) si $\mathfrak{A}$ es un símbolo variable o un símbolo funcional de cero lugares, entonces $\mathrm{dep}_\Phi \mathfrak{A} = 0$;

(II) si $\mathfrak{A} = f^{(n)}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, en donde $f^{(n)} \in \Phi$, entonces,

$$\mathrm{dep}_\Phi(\mathfrak{A}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{dep}_\Phi(\mathfrak{A}_i) + 1.$$

Hallar la fórmula $\mathfrak{A}$ sobre el conjunto $\{\downarrow\}$ que tenga una profundidad mínima y que realice la función:

1) $f = x \vee y$; 2) $f = x \oplus y$; 3) $f = xy$.

2.21. Aclarar si se puede realizar la función f con la fórmula $\mathfrak{A}$ de profundidad k sobre el conjunto de enlaces S en los casos siguientes:

1) $f = xy$, $k = 2$, $S = \{\mid\}$;
2) $f = x \to y$, $k = 3$, $S = \{\vee, \sim\}$;
3) $f = x \oplus y \oplus z$, $k = 2$, $S = \{\to, \&\}$.

2.22. Demostrar que la función f no puede ser realizada con una fórmula sobre el conjunto de enlaces S cuando:

1) $f = x \oplus y$, $S = \{\&\}$;
2) $f = x \cdot y$, $S = \{\to\}$;
3) $f = x \vee y$, $S = \{\sim\}$.

2.23. ¿Se puede realizar la función f con una fórmula de profundidad $k + 1$ sobre el conjunto S si ella es realizable con una fórmula de profundidad k sobre ese mismo conjunto S?

2.24. La función f de P_2 es realizable con una fórmula de profundidad k sobre el conjunto S. Mostrar que la función f puede ser realizada sobre ese mismo conjunto S con cierta fórmula cuya profundidad será mayor que k.

Al operar con las funciones de álgebra lógica son con frecuencia útiles las siguientes equivalencias (las que en lo sucesivo se llamarán *equivalencias básicas*):

---

[1]) Aquí y en lo sucesivo en la presentación vectorial de una función en lugar de la anotación $\tilde{\alpha}_f = \tilde{\beta}$ emplearemos la anotación $f = \tilde{\beta}$.

$x \bigcirc y = y \bigcirc x$ (conmutatividad de los enlaces $\bigcirc$, en donde el símbolo $\bigcirc$ representa la designación general de los enlaces $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\sim$, $|$, $\downarrow$);

$(x \bigcirc y) \bigcirc z = x \bigcirc (y \bigcirc z)$ (asociatividad de los enlaces $\bigcirc$, en donde $\bigcirc$ es la designación general para los enlaces $\&$, $\vee$, $\oplus$ $\sim$);

$\overline{x \& y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ y $\overline{x \vee y} = \bar{x} \& \bar{y}$ (regla de Morgan);

$x \vee (x \& y) = x$ y $x \& (x \vee y) = x$ (regla de la absorción);

$x \vee (\bar{x} \& y) = x \vee y$ y $x \& (\bar{x} \vee y) = x \& y$;

$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$ (distributividad de la conjunción con relación a la disyunción);

$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$ (distributividad de la disyunción con relación a la conjunción);

$x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z)$ (distributividad de la conjunción con relación a la suma por módulo 2);

$$0 = x \& \bar{x} = x \& 0 = x \oplus x;$$

$$1 = x \vee \bar{x} = x \vee 1 = x \sim x;$$

$$x = \bar{x} = x \vee x = x \& x = x \& 1 = x \vee 0;$$

$$\bar{x} = x \oplus 1, \; x \sim y = (x \oplus y) \oplus 1;$$

$$x \oplus y = (x \& \bar{y}) \vee (\bar{x} \& y), \; x \to y = ((x \& y) \oplus x) \oplus 1.$$

2.25. Comprobar si son justas las relaciones siguientes:

1) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
2) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
3) $x \& (y \sim z) = (x \& y) \sim (x \& z)$;
4) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
5) $x \to (y \& z) = (x \to y) \& (x \to z)$;
6) $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$;
7) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

2.26. Realizar la función f con una fórmula sobre el conjunto de enlaces S si:

1) $f = x \to y$, $S = \{\neg, \vee\}$;
2) $f = x \vee y$, $S = \{\to\}$;
3) $f = x \sim y$, $S = \{\&, \to\}$;
4) $f = x \mid y$, $S = \{\downarrow\}$.

2.27. Demostrar, empleando las equivalencias básicas, la equivalencia de las fórmulas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en los casos en que:

1) $\mathfrak{A} = \overline{(\bar{x} \& \bar{z}) \vee (x \& y)} \vee (x \& \bar{z})$, $\mathfrak{B} = x \& \overline{y \& z} \vee \bar{x} \& z$;

2) $\mathfrak{A} = (x \to y) \to ((x \& \bar{y}) \oplus (x \sim \bar{y}))$, $\mathfrak{B} = (x \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y})$;

3) $\mathfrak{A} = x \to (x \& y) \to ((x \to y) \to y) \& z)$, $\mathfrak{B} = y \to (x \to z)$.

2.28. Demostrar que la fórmula $\mathfrak{A}$ es equivalente a la fórmula $\mathfrak{B}$ si, y sólo si, es idénticamente verdadera exactamente una de las fórmulas

$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \neg (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A})).$$

2.29. Demostrar que una fórmula $\mathfrak{A}$ que contenga sólo el enlace $\sim$ es idénticamente verdadera si, y sólo si, cualquier variable que esté contenida en la fórmula $\mathfrak{A}$ entra en ella un número de veces par.

2.30. Por $S_{\mathfrak{C}}^{x}\mathfrak{A} \mid$ se designa la fórmula que se obtiene de la fórmula $\mathfrak{A}$ por medio de una sustitución simultánea de cada entrada de la variable x en la fórmula $\mathfrak{C}$. Si x no entra en la fórmula $\mathfrak{A}$, entonces (por definición) se supone que $S_{\mathfrak{C}}^{x}\mathfrak{A} \mid = \mathfrak{A}$.

1) Demostrar que $\mathfrak{A}$ es una fórmula idénticamente verdadera si, y sólo si, es idénticamente verdadera la fórmula $S_{y_1 \rightarrow y_2}^{x}\mathfrak{A} \mid$, en donde y_1 e y_2 son algunas variables que no entran en la fórmula $\mathfrak{A}$.

2) ¿Se puede excluir en 1) la condición de que y_1 e y_2 no entran en la fórmula $\mathfrak{A}$?

2.31. 1) Supongamos que la función $f(x, y)$ de P_2 satisface la relación

$$f(f(x, f(y, z)), f(f(x, y), f(x, z))) \equiv 1.$$

Demostrar que entonces serán justas las siguientes equivalencias:

a) $f(x, x) \equiv 1$;
b) $f(x, f(y, x)) \equiv 1$;
c) $f(f(f(x, y), f(x, z)), f(x, f(y, z))) \equiv 1$;
d) $f(f(x, y), f(f(x, f(y, z)), f(x, z))) \equiv 1$;
e) $f(f(x, f(y, z)), f(y, f(x, z))) \equiv 1$.

2) ¿Se deducen las equivalencias b), c) y d) de la equivalencia e)?

§ 3. TIPOS ESPECIALES DE FORMULAS. FORMAS NORMALES DISYUNTIVAS Y CONJUNTIVAS. POLINOMIOS

La fórmula $x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_r}^{\sigma_r}$ (la fórmula $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$), en donde $\sigma_k \in \{0, 1\}$, $x_{i_k}^{0} = \overline{x}_{i_k}$, $x_{i_k}^{1} = x_{i_k}$, $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ para todos los $k = \overline{1, r}$, se llama *conjunción* (respectivamente, *disyunción*) *sobre el conjunto de variables* $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La conjunción (disyunción) se llama *elemental* (o abreviadamente c.e. y d.e.) si $x_{i_j} \neq x_{i_k}$, para $j \neq k$. Los símbolos & en la c.e. serán omitidos para reducir la escritura. Las expresiones del tipo $x_{i_k}^{\sigma_k}$ se llamarán *letras*. Llamaremos *rango* de la c.e. (d.e.) al número de letras en la c.e. (d.e.). La constante 1 se considerará c.e. de rango cero y el cero, d.e. de rango cero.

La fórmula del tipo

$$\mathscr{D} = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s \tag{1}$$

(su notación abreviada es $\bigvee\limits_{i=1}^{s} K_i$), donde K_i $(i = \overline{1, s})$ son conjunciones, se llama *forma normal disyuntiva* (abreviado f.n.d.).

La fórmula del tipo

$$\mathscr{K} = D_1 \,\&\, D_2 \,\&\, \ldots \,\&\, D_s \tag{2}$$

(su notación abreviada es $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} D_i$), donde D_i $(i = \overline{1, s})$ son conjunciones, es llama *forma normal conjuntiva* (abreviado f.n.c.). El número s se llama *longitud de la f.n.d.* (*longitud de la f.n.c.*). La suma de los rangos de las conjunciones (disyunciones) se llama *complejidad de la f.n.d.* (*complejidad la f.n.c.*). La forma disyuntiva normal (la forma conjuntiva normal) sobre un conjunto de variables $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se llama *perfecta* si está compuesta de par en par por diferentes conjunciones elementales (disyunciones elementales) de un rango n.

Sea $f(\widetilde{x}^n)$ una función booleana y sea $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Mediante $f_{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n)$ o a veces por $S_{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k} f(\widetilde{x}^n)|$, designaremos la función obtenida de $f(\widetilde{x}^n)$ sustituyendo en el lugar de las variables $x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_k}$ las constantes correspondientes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$. La función $f_{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n)$ se llama $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$-*componente de la función* $f(\widetilde{x}^n)$ o *subfunción* de $f(\widetilde{x}^n)$. La subfunción $f_{\sigma_1\sigma_1 \ldots \sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n)$ se llama *propia* si $k \neq n$, $k \neq 0$. Las subfunciones de la función $f(\widetilde{x}^n)$ *son diferentes* si ellas difieren como funciones de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Sean $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, entonces, es justa la representación

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)} x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k} f_{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n), \tag{3}$$

donde la disyunción se toma por todos los vectores $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ de B^k. En el caso de que $k = n$, esta representación tiene la forma

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n). \tag{4}$$

La representación (4) se puede anotar en la forma siguiente

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{\widetilde{\sigma}:\, f(\widetilde{\sigma}) = 1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}. \tag{5}$$

El segundo miembro de la fórmula (5) representa en sí una f.n.d. perfecta de la función $f(\widetilde{x}^n)$. Análogamente, son justas las representaciones

$$f(\widetilde{x}^n) = \underset{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)}{\&} (x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots \vee x_{i_k}^{\sigma_k} \vee f_{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n)) \qquad (6)$$

$$f(\widetilde{x}^n) = \underset{\widetilde{\sigma}^n:\, f(\widetilde{\sigma}^n)=0}{\&} (x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}). \qquad (7)$$

Una conjunción elemental se llama *monótona* si no contiene variables negativas. La fórmula

$$P(\widetilde{x}^n) = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_s, \qquad (8)$$

donde K_i ($i = \overline{1, s}$) son diferentes elementos monótonos de par en par sobre el conjunto X^n, se llama *polinomio de Zhegalkin* o *polinomio por módulo* 2. Al mayor de los rangos de las conjunciones elementales que entran en el polinomio se le llama *grado de este polinomio*. El número s se llama *longitud del polinomio* (8). Si $s = 0$, suponemos que $P(\widetilde{x}^n) = 0$.

3.1. Por medio de transformaciones equivalentes reducir a la f.n.d. la fórmula:

1) $F = (x_1 \vee x_2\overline{x}_3)(x_1 \vee x_3)$;

2) $F = ((x_1 \vee x_2\overline{x}_3x_4)((\overline{x}_2 \vee x_4) \rightarrow x_1\overline{x}_3\overline{x}_4) \vee x_2x_3 \vee (\overline{x}_1 \vee x_4)$;

3) $F = ((x_1 \rightarrow x_2x_3)(x_2x_4 \oplus x_3) \rightarrow x_1\overline{x}_4) \vee \overline{x}_1$.

3.2. Representar las funciones siguientes en una f.n.d. perfecta:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2x_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (01101100)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (10001110)$.

3.3. Mediante transformaciones de tipo $A = Ax \vee A\overline{x}$, $A \vee A = A$, pasar de la f.n.d. dada $D = (\widetilde{x}^3)$ a la perfecta si:

1) $D(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x}_2x_3$;

2) $D(\widetilde{x}^3) = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_3$;

3) $D(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3$.

3.4. Con ayuda de relaciones del tipo $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ transformar las f.n.d. del problema anterior a f.n.c.

3.5. Construir una f.n.c. perfecta para cada una de las funciones del problema 3.3.

3.6. Contar el número de funciones $f(\widetilde{x}^n)$ para las que la f.n.c. perfecta es también simultáneamente f.n.d.

3.7. Hallar la longitud de la f.n.d. perfecta de la función $f(\widetilde{x}^n)$:

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n)$;

3) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$.

3.8. Sean $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $Y^m = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ dos conjuntos que no se intersecan. Supongamos que las f.n.d. perfectas de las funciones $f(\widetilde{x}^n)$ y $g(\widetilde{y}^m)$ tienen respectivamente k y l sumandos. Hallar la longitud de la f.n.d. perfecta de las funciones siguientes:

1) $f(\widetilde{x}^n) \,\&\, g(\widetilde{y}^m)$; 2) $f(\widetilde{x}^n) \vee g(\widetilde{y}^m)$; 3) $f(\widetilde{x}^n) \oplus g(\widetilde{y}^m)$.

3.9. Expresar las funciones x_1-, $\overline{x}_2$- y $\overline{x}_1 x_3$-componentes de la función $f(\widetilde{x}^3)$ mediante las f. n.d. de complejidad mínima para:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (01101101)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \oplus x_2\overline{x}_3$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2\overline{x}_3) \oplus x_2$.

3.10. Hallar entre las funciones dependientes de las variables x_1 y x_2 aquellas que tienen el mayor número de subfunciones diferentes de par en par.

3.11. Contar el número de funciones booleanas $f(\widetilde{x}^n)$ que se pasan a sí después de la permutación de x_1 y x_2.

3.12. Dos funciones $f(\widetilde{x}^n)$ y $g(\widetilde{x}^n)$ son *permutativamente equivalentes* si existe una permutación π de los números $1, \ldots, n$ tal, que $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$. Hallar el número de clases de funciones permutativamente equivalentes de $P_2(X^2)$.

3.13*. La función $f_n(\widetilde{x}^n)$ se determina recurrentemente con las relaciones siguientes:

$$f_4(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_1 x_2 (x_3 \vee x_4) \vee \overline{x}_2 (\overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_1 x_4) \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4,$$

$$f_{n+1}(\widetilde{x}^{n+1}) = f_n(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)\overline{x}_{k+1} \vee x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} \; (n \geqslant 4).$$

Hallar para cada función de la sucesión $\{f_n\}$ el número de diferentes subfunciones de tipo $f_\sigma^i(\widetilde{x}^n)$, $i = \overline{1, n}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, tales que ningunas dos de las cuales sean permutativamente equivalentes.

3.14. Demostrar que el número de diferentes funciones $f(\widetilde{x}^n)$ para las cuales la función dada $g(\widetilde{x}^k)$ es subfunción, no es menor que $2^{2^n} - (2^{2^k} - 1)^{2^{n-k}}$, $(k \leqslant n)$.

3.15. Que sea $f_0^i(\widetilde{x}^n) = f_1^i(\widetilde{x}^n)$ para cualquier i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Demostrar que $f(\widetilde{x}^n)$ es una constante.

3.16. Hallar el número de tales funciones $f(\widetilde{x}^n)$ que $f_{00}^{i,\,j}(\widetilde{x}^n) = f_{11}^{i,\,j}(\widetilde{x}^n)$ para todos los $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

3.17. Sea $h(\widetilde{x}^n) = f(g_1(\widetilde{x}^n), \ldots, g_{i-1}(\widetilde{x}^n), g_i(\widetilde{x}^n), g_{i+1}(\widetilde{x}^n), \ldots, g_n(\widetilde{x}^n))$, $n \geqslant 2$ y con cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\sigma \in \{0, 1\}$ se cumple la relación

$$S_\sigma^i h(\widetilde{x}^n)| = f(S_{\overline{\sigma}}^i g_1(\widetilde{x}^n)|, \ldots, S_{\overline{\sigma}}^i g_{i-1}(\widetilde{x}^n)|,$$
$$\overline{\sigma}, S_{\overline{\sigma}}^i g_{i+1}(\widetilde{x}^n)|, \ldots, S_{\overline{\sigma}}^i g_n(\widetilde{x}^n)|),$$

o sea que la x_i^{σ}-componente de la superposición de las funciones f, $g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \ldots, g_n$ es igual a la superposición de la $x_i^{\bar{\sigma}}$-componente de las funciones $f, g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n$. Supongamos además de eso que para todos los $j, k\ (1 \leqslant j < k \leqslant n)$ y para cualesquiera σ_j, σ_k de $\{0, 1\}$ la $x_j^{\sigma_j} x_k^{\sigma_k}$-componente de la función $g_i(\tilde{x}^n)$ coincide con la $x_j^{\bar{\sigma}_j} x_k^{\bar{\sigma}_k}$-componente de esa misma función $g_i(\tilde{x}^n)$, $i = \overline{1, n}$. Mostrar que $h(\tilde{x}^n)$ es una constante.

3.18. Hallar el número de conjunciones elementales monótonas de un rango r sobre el conjunto X^n.

3.19. Hallar el número de polinomios de grado r sobre el conjunto de variables X^n.

3.20. Hallar el número de diferentes polinomios de longitud k sobre el conjunto X^n que se reducirán a cero en las colecciones $\tilde{0}$ y $\tilde{1}$. (Los polinomios se consideran diferentes si difieren en la composición de la c.e.)

Adoptaremos la siguiente numeración de las conjunciones elementales monótonas sobre el conjunto de variables $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. A cada c.e. monótona K le cotejaremos un vector $\tilde{\sigma}(K) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ de B^n en el que $\sigma_i = 1$ si, y sólo si, x_i entra en K. Número de c.e. K llamaremos al número $\nu(\tilde{\sigma}(K)) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i 2^{n-i}$. La constante 1 tendrá en esta numeración el número cero. Así que se puede anotar cada polinomio $P(\tilde{x}^n)$ con la forma

$$P(\tilde{x}^n) = \beta_0 \cdot 1 \oplus \beta_1 K_1 \oplus \beta_2 K_2 \oplus \ldots \oplus \beta_{2^n-1} K_{2^n-1}, \qquad (9)$$

donde K_i es la c.e. que tiene el número i $(i = \overline{0, 2^n - 1})$. El vector $\tilde{\beta}_P = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1})$ se llamará *vector de los coeficientes del polinomio* $P(\tilde{x}^n)$.

El método de los coeficientes indeterminados para la construcción del polinomio de Zhegalkin, el cual realiza la función $f(\tilde{x}^n)$, consiste en lo siguiente. Se examina el polinomio de la forma (9) y para cada $\tilde{\alpha} \in B^n$ se compone una ecuación de tipo $f(\tilde{\alpha}) = P(\tilde{\alpha})$. La resolución de estas ecuaciones da el coeficiente del polinomio $P(\tilde{x}^n)$.

EJEMPLO. $f(\tilde{x}^2) = x_1 \to x_2$, $P(\tilde{x}^2) = \beta_0 \oplus \beta_1 x_2 \oplus \beta_2 x_1 \oplus \beta_3 x_1 x_2$.

$$f(0, 0) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0;$$

$$f(0, 1) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0;$$

$$f(1, 0) = 0 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 0;$$

$$f(1, 1) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 1.$$

Hallamos $\beta_0 = \beta_2 = \beta_3 = 1$, $\beta_1 = 0$. Así que $x_1 \to x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2$.

3.21. Hallar a base del método de los coeficientes indeterminados los polinomios de Zhegalkin para las funciones:

1) $f(\tilde{x}^2) = (1001)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (01101000)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (11111000)$.

3.22. Introducimos la operación T sobre los vectores de B^{2^n}. Si $n = 1$ y $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$, entonces $T(\tilde{\alpha}) = (\alpha_0, \alpha_0 \oplus \alpha_1)$. Supongamos que para cada $\tilde{\sigma} \in B^{2^n}$ el vector $T(\tilde{\sigma})$ está definido y el vector $\tilde{\alpha}$ de $B^{2^{n+1}}$ tiene la forma $\tilde{\alpha} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1}, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n-1})$. Y también que:

$$T(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2^n-1}),$$

$$T(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n-1}) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2^n-1}).$$

Entonces $T(\tilde{\alpha}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2^n-1}, \delta_0 \oplus \varepsilon_0, \delta_1 \oplus \varepsilon_1, \ldots, \ldots, \delta_{2^n-1} \oplus \varepsilon_{2^n-1})$. Por ejemplo, si $\tilde{\alpha} = (1011)$, entonces $T(\tilde{\alpha}) = (1101)$. Demostrar que el vector $\tilde{\alpha}_f$ de los valores de la función $f(\tilde{x}^n)$ está vin ulado con el vector $\tilde{\beta}_P$ de los coeficientes del polinomio $P(\tilde{x}^n)$ que realiza la función $f(\tilde{x}^n)$ de la siguiente manera: $\tilde{\alpha}_f = T(\tilde{\beta}_P)$, $\tilde{\beta}_P = T(\tilde{\alpha}_f)$.

3.23. Hallar el vector $\tilde{\beta}_P$ de los coeficientes del polinomio de Zhegalkin para una función $f(\tilde{x}^4)$ tal que $\tilde{\alpha}_f = (1011001000101101)$.

UNO DE LOS MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN del polinomio de Zhegalkin por la fórmula F consiste en lo siguiente: primero se construye una fórmula equivalente sobre el conjunto de enlaces $\{\&, -\}$, después se sustituye en todos los sitios $\bar{x}$ por $x \oplus 1$, se abren los paréntesis utilizando la ley distributiva $(x \oplus y) z = xz \oplus yz$ y se reducen los miembros semejantes.

EJEMPLO. $x \to x_2 = \overline{x_1 \bar{x}_2} = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1$.

3.24. Construir polinomios para las funciones:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \mid x_2) \downarrow x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \downarrow x_3)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \to x_2) \vee \bar{x}_3) \mid x_1$.

3.25. Cualquier función booleana f puede ser anotada en forma de polinomio. Para eso se emplean las operaciones aritméticas corrientes de multiplicación, suma y resta. Es suficiente para realizar esto expresar la función f mediante la conjunción y negación y después sustituir las subfórmulas de tipo $\bar{A}$ por $1 - A$ y abrir los paréntesis. Expresar mediante operaciones aritméticas las funciones siguientes:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (10000001)$.

3.26. Indicar la función $f(\widetilde{x}^n)$ que tiene una longitud del polinomio que supera en 2^n veces la longitud de su f.n.d. perfecta.

3.27. Demostrar la veracidad de la siguiente fórmula de descomposición por k variables:

$$f(\widetilde{x}^n) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) \in B^k)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

3.28. Demostrar que:

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 (f_0^1(\widetilde{x}^n) \oplus f_1^1(\widetilde{x}^n)) \oplus f_0^1(\widetilde{x}^n)$;

2) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee (f_0^1(\widetilde{x}^n) \sim f_1^1(\widetilde{x}^i))) \sim f_1^1(\widetilde{x}^n)$.

3.29. Demostrar que la función $f(\widetilde{x}^n)$ que se realiza con un polinomio de grado $k > 0$, se hace igual a 1 no menos que en 2^{n-k} vectores de B^n.

3.30. ¿En cuántas colecciones de B^n se hace igual a la unidad el polinomio $P(\widetilde{x}^n)$?

1) $P(x^n) = x_1 \ldots x_k \oplus x_{k+1} \ldots x_n$, $(1 \leqslant k < n)$;

2) $P(\widetilde{x})^n = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus x_1 x_2 \ldots x_n$.

3.31. Mostrar que para cualquier l $(l \leqslant 2^n)$ existe un polinomio $P(\widetilde{x}^n)$ de longitud no mayor que n para el cual $|N_{P(\widetilde{x}^n)}| = l$.

3.32. Demostrar que toda función $f(\widetilde{x}^n)$ puede ser representada en la forma $f(\widetilde{x}^n) = \sum_{i=1}^{s} K_i$, donde K_i $(i = \overline{1, S})$ son conjunciones elementales que contienen no más de una negación de la variable, y $s \leqslant 2^{n-1}$.

3.33. Mostrar que si en todos los lugares de una f.n.d. perfecta se sustituye el signo $\vee$ por el signo $\oplus$, entonces resultará una fórmula equivalente a la inicial. ¿Será justa una afirmación análoga para una f.n.d. arbitraria?

Se llama *derivada de una función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ respecto al conjunto de variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$* (*o diferencia booleana*) a la función

$$\frac{\partial f(\widetilde{x}^n)}{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})} = f(x_1, \ldots, \bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_k}, \ldots$$
$$\ldots, x_n) \oplus f(x_1, \ldots, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \ldots, x_n).$$

(En el caso en que $k = 1$ se emplea la designación $\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_{i_1}}$.)

3.34. Demostrar las siguientes propiedades de la derivada:

1) $\frac{d}{dx_j}\left(\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\right)=\frac{d}{dx_i}\left(\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_j}\right)$;

2) $\frac{\partial f(\widetilde{x}^n)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}=\frac{\partial \bar{f}(\widetilde{x}^n)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$;

3) $\frac{\partial(f(\widetilde{x}^n)\oplus g(\widetilde{x}^n))}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}=\frac{\partial f(\widetilde{x}^n)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}\oplus\frac{\partial g(\widetilde{x}^n)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$;

4) $\frac{d(f(\widetilde{x}^n)\vee g(\widetilde{x}^n))}{dx_i}=\bar{f}(\widetilde{x}^n)\frac{dg(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\oplus\bar{g}(\widetilde{x}^n)\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\oplus\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\frac{dg(\widetilde{x}^n)}{dx_i}$;

5) $\frac{d(f(\widetilde{x}^n)g(\widetilde{x}^n))}{dx_i}=f(\widetilde{x}^n)\frac{dg(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\oplus g(\widetilde{x}^n)\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\oplus\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}\frac{dg(\widetilde{x}^n)}{dx_i}$;

6) $\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_i}=0$ si, y sólo si, x_i no entra en forma evidente en el polinomio de Zhegalkin de la función $f(\widetilde{x}^n)$;

7) si $f(\widetilde{x}^n)=x_1g(x_2, x_3, \ldots, x_n)\oplus h(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, entonces $\frac{df(\widetilde{x}^n)}{dx_1}=g(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

3.35. Si $g(x_1, \ldots, x_m)$ y $h(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ son funciones booleanas y $1\leqslant i_j\leqslant m$, para todos los $j=\overline{1, k}$, entonces:

1) $\frac{\partial(g\oplus h)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}=\frac{\partial g}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$;

2) $\frac{\partial(g\,\&\,h)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}=h\,\frac{\partial g}{\partial(x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_k})}$;

3) $\frac{\partial(g\vee h)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}=\bar{h}\,\frac{\partial g}{\partial(x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_k})}$.

§ 4. MINIMIZACION DE LAS FUNCIONES DE BOOLE

Conjunción admisible o *implicante* de la función $f(\widetilde{x}^n)$ se llama a una tal conjunción elemental K sobre el conjunto de variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, que $K\vee f(\widetilde{x}^n)=f(\widetilde{x}^n)$. El implicante K de la función f se llama *implicante simple* si después de eliminar de K cualquier letra resulta una conjunción elemental que no es una implicante de la función f. La disyunción de todas las implicantes de la función f se llama *f.n.d. abreviada* de la función f.

La forma normal disyuntiva se llama:

mínima, si contiene el menor número de letras entre todas las f.n.d. equivalentes a ella;

la más corta, si tiene la menor longitud entre todas las f.n.d. equivalentes a ella;

sin salida, si la eliminación de cualquier sumando o letra lleva a una f.n.d. no equivalente;

f.n.d. de la función f, si realiza la función f.

Si la conjunción elemental K es implicante de la función $f(\widetilde{x}^n)$ entonces el conjunto N_k de tales vectores $\widetilde{\alpha}$ de B^n, que hacen $K(\widetilde{\alpha}) = 1$, forma una cara que se contiene en el conjunto N_f. Esta cara se llama *intervalo de la función $f(\widetilde{x}^n)$ correspondiente a la implicante K.* El intervalo de la función f que no se contiene en ningún otro intervalo de la función f se llama *intervalo máximo*. Los intervalos máximos corresponden a las implicantes simples de la función f.

4.1. Seleccionar del conjunto dado de conjunciones elementales $\mathscr{K}$ las implicantes simples de la función $f(\widetilde{x}^n)$ si:

1) $\mathscr{K} = \{x_1, \bar{x}_3, x_1x_2, x_2\bar{x}_3\}$, $f(\widetilde{x}^3) = (00101111)$;

2) $\mathscr{K} = \{x_1\bar{x}_2, x_2x_3, x_1, x_1x_2x_3\}$, $f(\widetilde{x}^3) = (01111110)$;

3) $\mathscr{K} = \{x_1, \bar{x}_4, x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\}$, $f(\widetilde{x}^4) = (1010111001011110)$.

El método de Blake para obtener una f.n.d. abreviada de un f.n.d. arbitraria consiste en la utilización de las reglas de aglutinación sintetizada $xK_1 \vee \bar{x}K_2 = xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2$ y de absorción $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$. Se sobreentiende que estas reglas se aplican de izquierda a derecha. En la primera etapa se hacen todas las operaciones de aglutinación sintetizada mientras sea posible. En la segunda etapa, las operaciones de absorción.

Ejemplo. Obtener la f.n.d. abreviada para $\mathscr{D}(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$.

Después de la primera etapa obtendremos

$$\mathscr{D}_1 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_3 \vee x_1x_3.$$

Después de la segunda,

$$\mathscr{D}_2 = x_1x_2 \vee x_3.$$

4.2. Construir empleando el método de Blake una f.n.d. abreviada en base a la f.n.d. dada $\mathscr{D}$:

1) $\mathscr{D} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$;

2) $\mathscr{D} = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_3x_4$;

3) $\mathscr{D} = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4$.

Se puede obtener una f.n.d. abreviada de la función $f(\widetilde{x}^n)$ dada como una f.n.c. de la manera siguiente. Primero se abren los paréntesis utilizando la ley distributiva, después se tachan de la f.n.d. letras y sumandos a base de las reglas $x\bar{x} = 0$, $xx = x$, $x \vee x = x$, $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$.

EJEMPLO. Obtener la f.n.d. abreviada para

$$f(\widetilde{x^3}) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Después de abrir los paréntesis tendremos

$$\mathscr{D}_1 = x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_1 \vee x_2x_2 \vee x_2x_3.$$

Aplicando las reglas indicadas anteriormente obtendremos

$$\mathscr{D} = x_1x_3 \vee x_2.$$

4.3. Construir una f.n.d. abreviada a base de la f.n.c. dada:

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

3) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$.

4.4. Sea N_f un conjunto de vectores $\tilde{\alpha} \in B^n$ tales que $f(\tilde{\alpha}) = 1$ y $l^a(f)$ es la longitud de la f.n.d. abreviada de la función f. Mostrar que $l^a(f) \leqslant \frac{1}{2} |N_f|(|N_f| + 1)$.

4.5. Hallar la longitud de la f.n.d. abreviada de las funciones siguientes:

1) $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$;

3) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots x_n)$;

4) $(x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

5) $(x_1 \vee \ldots \vee x_n)(x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee \bar{x}_{k+1} \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

4.6. Sea $f(\widetilde{x^n})$ tal que $N_f = \{\tilde{\alpha} : k \leqslant \|\tilde{\alpha}\| \leqslant k+m\}$, y $k \leqslant l \leqslant k+m$, $\tilde{\alpha} \in B_l^n$.

1) Hallar el número de sumandos de la f.n.d. abreviada de la función f que se hacen igual a la unidad en la colección $\tilde{\alpha}$.

2) Mostrar que la longitud de la f.n.d. abreviada de la función $f(\widetilde{x^n})$ es igual a $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}$.

4.7. Supongamos que las funciones $f(\widetilde{x^n})$ y $g(\widetilde{y^m})$ no tienen variables comunes, K es una implicante simple de la función f, y que L es una implicante simple de la función g. Mostrar que $K \& L$ es una implicante simple de la función $f \& g$.

Cada conjunción elemental sobre el conjunto de variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mutua y unívocamente corresponde a la cara del cubo B^n formada por los vértices $\tilde{\alpha}$ en los que la c.e. se hace igual a la unidad. Esto permite construir la f.n.d. abreviada partiendo de la representación geométrica de la función booleana. En el cubo B^n se marcan los vértices del conjunto N_f de la función f. Se anotan las caras que se contienen en N_f y no se contienen en otras caras formadas por los vértices del conjunto N_f. A cada una de las caras obtenidas se le coteja una implicante simple.

Ejemplo. Supongamos que la función $f(\widetilde{x}^3)$ está dada por el vector $\widetilde{\alpha}_f = (11111000)$. Se requiere hallar su f.n.d. abreviada.

Solución. El conjunto N_f está formado por $\{(000), (001), (010), (011), (100)\}$. Las caras tienen la forma $g_1 = \{(000), (001), (010),$

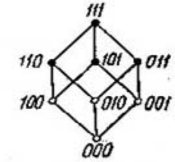


Fig. 2.

$(011)\}$, $g_2 = \{(000), (100)\}$. La cara g_1 corresponde a la c.e. $\overline{x}_1$, y la cara g_2, a $\overline{x}_2\overline{x}_3$. La f.n.d. abreviada es $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$ (véase la fig. 2).

4.8. Construir una f.n.d. abreviada de la función $f(\widetilde{x}^n)$:

1) $f(\widetilde{x}^4) = (1111100001001100)$;
2) $f(\widetilde{x}^4) = (0000001111111101)$;
3) $f(\widetilde{x}^4) = (0001101111011011)$.

4.9. Contar el número de funciones $f(\widetilde{x}^n)$ para las cuales la conjunción elemental de rango r dada es:

1) implicante;
2) implicante simple.

4.10. Sea $i_r(f)$ el número de implicantes de rango r de la función $f(\widetilde{x}^n)$, y $s_r(f)$ el número de implicantes simples de rango r. Sea P_n el conjunto de funciones booleanas de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$$\overline{i}_r(n) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{f \in P_n} i_r(f);$$

$$\overline{s}_r(n) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{f \in P_n} s_r(f).$$

Mostrar que:

1) $\overline{i}_r(n) = \binom{n}{r} 2^{r - 2^{n-r}}$;

2) $\overline{s}_r(n) = \binom{n}{r} 2^{r - 2^{n-r}} (1 - 2^{-2^{n-r}})^r$.

Cuando los valores de n son pequeños se puede hallar la f.n.d. abreviada de la función $f(\widetilde{x}^n)$ con la ayuda de una tabla rectangular (una *tabla minimizadora*). Por ejemplo, supongamos que la función $f(\widetilde{x}^4)$ está dada mediante la tabla 5. Reuniendo las casillas que corresponden a los valores uno de la función f en los intervalos máximos, como se muestra en la tabla 5, y cotejándoles la c.e., obtendremos la f.n.d. abreviada

$$x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4.$$

Tabla 5

	x_3	0	0	1	1
x_1	x_2 \ x_4	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0

4.11. Construir unas f.n.d. abreviadas para las funciones dadas con las tablas siguientes:

1)

	x_3	0	0	1	1
x_1	x_2 \ x_4	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1

2)

	x_3	0	0	1	1
x_1	x_2 \ x_4	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1

3)

	x_3	0	0	1	1
x_1	x_2 \ x_4	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0

La implicante simple se llama *nuclear* si su eliminación de la f.n.d. abreviada lleva a una f.n.d. que no es equivalente a la inicial. Para cada implicante nuclear K existe una tal colección de valores de las variables que lleva K a la unidad y a los demás sumandos de la f.n.d. abreviada, a cero. Esta colección se llama *colección propia* de la implicante nuclear.

4.12. Seleccionar de las f.n.d. abreviadas siguientes las implicantes nucleares:

1) $\bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_3x_4$;

2) $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1x_4$;

3) $x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_1x_4$.

4.13. Mostrar que el número de implicantes nucleares de una función arbitraria $f(\widetilde{x}^n)$ no supera a 2^{n-1}.

4.14. Hallar el número de implicantes nucleares de la función del problema 4.5.

4.15. Hallar el número de funciones booleanas $f(\widetilde{x}^n)$ para las cuales la c.e. $x_1 \ldots x_r$ es implicante nuclear.

4.16. Sean K, K_1, K_2 conjunciones de una f.n.d. abreviada, y r, r_1, r_2, los rangos de estas conjunciones. Supongamos que $K \vee K_1 \vee \vee K_2 = K_1 \vee K_2$. Mostrar que $r_1 + r_2 \geqslant r + 2$.

4.17. Construir todas las f.n.d. finales de las funciones siguientes:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (01111110)$;
2) $f(\widetilde{x}^4) = (1110011000010101)$;
3) $f(\widetilde{x}^4) = (0110101111011110)$.

4.18. Contar el número de f.n.d. sin salida y mínimas que tienen las funciones del problema 4.5.

4.19. Mostrar que el número de f.n.d. sin salida de una función booleana arbitraria $f(\widetilde{x}^n)$ no supera a $\binom{3^n}{2^n}$.

4.20*. ¿Cuántas f.n.d. sin salida tiene una función que tenga 2^{n-1} implicantes nucleares?

4.21. Aclarar si las siguientes f.n.d. son finales, las más cortas o mínimas:

1) $\mathscr{D} = x_1x_2 \vee \bar{x}_2$;

2) $\mathscr{D} = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;

3) $\mathscr{D} = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2x_3$.

4.22. Sea $L(f)$ la complejidad mínima y $l(f)$, la longitud de la f.n.d. más corta de la función f. Mostrar que $L(f(\widetilde{x}^n)) \leqslant nl(f(\widetilde{x}^n))$ para cualquier función arbitraria $f(\widetilde{x}^n)$.

4.23. Mostrar que $l(f(\widetilde{x}^n)) \leqslant 2^{n-1}$, $L(f(\widetilde{x}^n)) \leqslant n2^{n-1}$ para cualquier función $f(\widetilde{x}^n)$.

4.24. ¿Para cuántas funciones $f(\widetilde{x}^n)$ son justas las relaciones que van a continuación?

1) $L(f(\widetilde{x}^n)) = n2^{n-1}$;

2) $L(f(\widetilde{x}^n)) = n2^{n-1} - n$.

4.25. Poner el ejemplo de un número k $(0 < k \leqslant n2^n)$, tal que no existe una función $f(\widetilde{x}^n)$ que tenga una f.n.d. mínima de complejidad k.

4.26. Hallar la complejidad de las f.n.d. mínimas y la longitud de las f.n.d. más cortas para las funciones del problema 4.5.

4.27. Examinemos una familia de funciones zonales, o sea de funciones $f(\widetilde{x}^n)$ para las que existen unos números k y m tales que

$$N_f = \{\widetilde{\alpha} : k \leqslant \|\widetilde{\alpha}\| \leqslant k+m\}.$$

1) ¿Qué número de implicantes nucleares tiene la función zonal $f(\widetilde{x}^n)$ para diferentes k y m?

2) ¿En cuántas funciones zonales $f(\widetilde{x}^n)$ se alcanza el número máximo de implicantes nucleares?

4.28. La función $f(\widetilde{x}^n)$ se llama *en cadena* (*cíclica*) si se puede disponer el conjunto N_f en una sucesión que sea 2-cadena (respectivamente, 2-ciclo).

1) Hallar el número de f.n.d. sin salida y minimales de la función en cadena $f(\widetilde{x}^n)$, si $|N_f| = l$.

2) Lo mismo para la función cíclica $f(\widetilde{x}^n)$, tal, que $|N_f| = 2m$ $(m > 2)$.

§ 5. VARIABLES SUSTANCIALES Y FICTICIAS

La variable x_i de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama *sustancial* si pueden encontrarse tales colecciones $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ que $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\beta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ y $f(\widetilde{\alpha}) \neq f(\widetilde{\beta})$. En el caso contrario la variable x_i se llama variable *ficticia* (*insustancial*) de la función $f(\widetilde{x}^n)$. Dos funciones $f(\widetilde{x}^n)$ y $g(\widetilde{x}^n)$ se llaman *iguales* si los conjuntos de sus variables sustanciales coinciden y en cualesquiera dos colecciones, que se diferencien, puede ser, sólo en los valores de las variables insustanciales, los valores de las funciones son los mismos. Supongamos que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Diremos que la función $\varphi(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_{i_k-1}, x_{i_k+1}, \ldots, x_n)$ *se obtiene de* $f(\widetilde{x}^n)$ *mediante la identificación de las variables* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ si φ se obtiene de f sustituyendo con x a las variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.

En calidad de x se puede tomar cualquier variable que no pertenezca al conjunto $X^n \setminus \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$.

5.1. Mostrar que la afirmación «x_i es una variable sustancial de la función $f(\widetilde{x}^n)$» es equivalente a cada una de las siguientes afirmaciones:

1) $f_0^i(\widetilde{x}^n) \neq f_1^i(\widetilde{x}^n)$;

2) existen las variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ $(i_j \neq i,\ j = \overline{1, k})$ y las constantes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ tales que la función $f_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k}^{i_1, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n)$ sustancialmente depende de x_i.

5.2. Enumerar las variables sustanciales de las siguientes funciones:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3$;
2) $f(\widetilde{x}^2) = (x_1 \vee x_2) \to x_2$;
3) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3)\, x_4$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \times$
$\times (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

5.3. Mostrar que x_1 es una variable ficticia de la función f (expresando f con una fórmula en la que x_1 no entre en forma evidente):

1) $f(\widetilde{x}^2) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \downarrow x_2)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (((x_3 \to x_2) \vee x_1)(x_2 \to x_1)\, x_3 \bar{x}_1) \oplus x_3$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3) \to (\bar{x}_1 \to x_2 \bar{x}_3))\, x_2$.

5.4. Indicar las variables ficticias de la función f:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (11110000)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (00110011)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (00111100)$.

5.5. Supongamos qua la función $f(\widetilde{x}^n)$ está dada con el vector $\widetilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$. Demostrar que si x_k es una variable ficticia, entonces $\alpha_i = \alpha_{2^{n-k}+i}$ para todos los i del segmento $[s2^{n-k+1}, (2s+1)\,2^{n-k} - 1]$, $s = \overline{0, 2^{k-1} - 1}$.

5.6. Mostrar que si entre las variables de la función $f(\widetilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, las hay ficticias, entonces la función toma el valor 1 en un número par de colecciones. ¿Es justa la afirmación contraria?

5.7. Sea la función $f(\widetilde{x}^n)$ tal que $|N_f| = 2^m(2l - 1)$. ¿Cuál es el número máximo posible de variables ficticias que puede tener la función f?

5.8. Partiendo de los resultados de los problemas 5.5 y 5.6 aclarar de que variables la función f depende sustancialmente.

1) $f(\widetilde{x}^4) = (1011100111001010)$;
2) $f(\widetilde{x}^4) = (0011110011000011)$.
3) $f(\widetilde{x}^4) = (0111011101110111)$;
4) $f(\widetilde{x}^4) = (0101111100001010)$.

5.9. Construir para cada función de las del problema 5.8 una igual a ella y dependiente de todas sus variables en forma sustancial.

5.10. Aclarar para cuales n $(n \geqslant 2)$ dependen sustancialmente de sus variables las funciones siguientes:

1) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2) \oplus (x_2 \vee x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \vee x_n) \oplus (x_n \vee x_1)$;

2) $$f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \oplus (x_2 \to x_3) \times \\ \times (x_3 \to x_2) \oplus \ldots \oplus (x_n \to x_1)(x_1 \to x_n);$$

3) $$f(\widetilde{x}^n) = (\ldots((x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3) \downarrow \ldots \downarrow x_n) \to \\ \to (x_1 | (x_2 | (x_3 | \ldots | x_n) \ldots));$$

4) $$f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3) \ldots \\ \ldots (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1) \to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1);$$

5) $$f(\widetilde{x}^n) = \Big(\bigvee_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{[n/2]} \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{[n/2]}}\Big) \,\& \\ \&\Big(\bigvee_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{[n/2]} \leqslant n} \bar{x}_{i_1} \bar{x}_{i_2} \ldots \bar{x}_{i_{[n/2]}}\Big) \to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n).$$

5.11. Sean las funciones $f(\widetilde{x}^n)$ y $g(\widetilde{y}^m)$ sustancialmente dependientes de todas sus variables y las variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ diferentes de par en par. Mostrar que las funciones $f(x_1, \ldots \ldots, x_{n-1}, g(y_1, \ldots, y_m))$ sustancialmente dependen de todas sus variables.

5.12. Sea $P^c(X^n)$ el conjunto de todas las funciones de álgebra lógica dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y además sustancialmente.

1) Enumerar todas las funciones de $P^c(X^2)$.
2) Hallar el número $|P^c(X^3)|$.
3) Mostrar que $|P^c(X^n)| = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$.
4) Mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-2^n} |P^c(X^n)| = 1$.

5.13. Que sean $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ tales colecciones de B^n que $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta} \leqslant \widetilde{\gamma}$, y sea la función $f(\widetilde{x}^n)$ tal, que $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\gamma}) \neq f(\widetilde{\beta})$. Demostrar que $f(\widetilde{x}^n)$ depende sustancialmente de no menos que de dos variables.

5.14*. Mostrar que x_i es una variable sustancial de la función f si, y sólo si, esta variable entra evidentemente en la f.n.d. abreviada de la función f.

5.15. Mostrar que x_i es una variable sustancial de la función f si, y sólo si, x_i entra explícitamente en el polinomio de Zhegalkin de la función f.

5.16. Sea $\frac{\partial f(\widetilde{x}^n)}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_j)} = 0$ para cualquier conjunto no vacío $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ de variables diferentes de x_j. ¿Es verdad que $f\{\widetilde{x}^n\}$ ficticiamente depende de x_j?

5.17. Mostrar que toda función simétrica $f(\widetilde{x}^n)$ diferente de una constante depende sustancialmente de todas sus variables.

5.18. Supongamos que en los vértices de la cadena $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}_1, \ldots$ $\ldots, \widetilde{\beta}_{k-1}, \widetilde{\gamma}$, que une tales vértices $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}$ del cubo B^n, que $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) =$ $= k$, la función $f(\widetilde{x}^n)$ cambia su valor m veces. Mostrar que $f(\widetilde{x}^n)$ depende sustancialmente de no menos que de m variables.

5.19. Supongamos que $f(\widetilde{x}^n)$ depende sustancialmente de no menos que de dos variables. Mostrar que existen tres vértices $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ del cubo B^n que satisfacen las condiciones

$$\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) = 1, \quad \widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\gamma}, \quad f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\gamma}) \neq f(\widetilde{\beta}).$$

5.20. Supongamos que $f(\widetilde{x}^n)$ depende sustancialmente de todas sus variables. Demostrar que para cualquier i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ se podrá encontrar tal j, que con cierta sustitución de constantes en el lugar de las variables diferentes de x_i y x_j, se obtendrá una función sustancialmente dependiente de x_i y x_j.

5.21. Demostrar que para toda función $f(\widetilde{x}^n)$ dependiente en forma sustancial de n variables se podrá encontrar una variable x_i y una constante α tales, que la función $f_\alpha^i(\widetilde{x}^n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha,$ $x_{i+1}, \ldots, x_n)$ sea sustancialmente dependiente de $n - 1$ variables.

5.22. Supongamos que $f(\widetilde{x}^n)$ depende sustancialmente de todas sus variables. ¿Son justas las afirmaciones siguientes?

1) Existe tal i que para cualquier j se podrán encontrar tales constantes que colocándolas en $f(\widetilde{x}^n)$ en los lugares de las variables diferentes de x_i y x_j es posible obtener una función sustancialmente dependiente de x_i y x_j.

2) Para cualesquiera dos variables x_i y x_j existen tales constantes que colocándolas en $f(\widetilde{x}^n)$ en los lugares de las variables diferentes de x_i y x_j es posible obtener una función sustancialmente dependiente de x_i y x_j.

5.23. Enumerar las funciones de $P_2(X^2)$ que pueden ser obtenidas mediante la identificación de las variables de las funciones siguientes:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (10010110)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (11111101)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_2 \oplus 1$.

5.24. Mostrar que de la $f(\tilde{x}^n)$ mediante la operación de identificación se puede obtener una constante si, y sólo si, $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1})$.

5.25. Hallar el número de funciones $f(\tilde{x}^2)$ de las cuales con la identificación de las variables no se puede obtener una función sustancialmente dependiente de una variable.

5.26. ¿Se puede obtener de una función simétrica $f(\tilde{x}^n)$ con ayuda de la operación de identificación, una función que sea sustancialmente dependiente de todas sus variables y que no sea simétrica?

5.27. Sean $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, tres vértices de B^n, tales que $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta} \leqslant \tilde{\gamma}$, y $f(\tilde{x}^n)$, tal que $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) \neq f(\tilde{\beta})$. Mostrar que se pueden identificar ciertas variables de la función f de tal manera que resulte una función sustancialmente dependiente de no menos que de dos y de no más que de tres variables.

5.28*. Mostrar que en la función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$, que se realiza con el polinomio de Zhegalkin de grado no menor de 2, se pueden encontrar dos variables tales que con la identificación de las cuales se disminuye el número de variables sustanciales en uno.

5.29. Enumerar todas las funciones $f(\tilde{x}^3)$ sustancialmente dependientes de tres variables, tales que la identificación de cualesquiera dos variables lleva a una función sustancialmente dependiente exactamente de una variable.

5.30. Sea la función $f(\tilde{x}^n)$ sustancialmente dependiente de todas sus variables y $|N_f| > 2^{n-1}$. Mostrar que al identificar cualesquiera dos de sus variables se obtiene una función no idénticamente igual a cero.

5.31. Mostrar que el número de funciones $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ de las cuales mediante la identificación de las variables se puede obtener la función dada $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si $n \to \infty$ es asintóticamente igual a $n2^{2^n}$.

5.32. Mostrar que si $f(\tilde{x}^n)$ depende ficticiamente de x_i, entonces la identificación de esta variable con cualquier otra lleva a una función sustancialmente dependiente de las mismas variables que $f(\tilde{x}^n)$.

5.33. Sea $n \geqslant 1$ y las funciones $f(\tilde{x}^n)$ y $g(\tilde{x}^n)$ tales que $|N_{f \oplus g}| = 1$. Mostrar que para todo $i = \overline{1, n}$ por lo menos una de las funciones f o g sustancialmente dependen de x_i.

5.34. Mostrar que si $|N_{f^{ij}_{00}(\tilde{x}^n) \& f^{ij}_{11}(\tilde{x}^n)}|$ es impar, entonces la función φ, obtenida de $f(\tilde{x}^n)$ mediante la identificación de las variables x_i y x_j, sustancialmente depende de $n-1$ variables.

5.35*. Supongamos que la función $f(\tilde{x}^n)$ depende sustancialmente de n variables. Sea $v_f(\tilde{\alpha})$ el número de los vértices de $\tilde{\beta}$ para los cuales $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$ y $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1$. Sea $v(f) = \max\limits_{\tilde{\alpha} \in B^n} v_f(\tilde{\alpha})$.

1) Mostrar que $]\sqrt{n}[\leqslant v(f) \leqslant n$.
2) Indicar las $g(\tilde{x}^n)$ y $h(\tilde{x}^n)$, tales que $v(g) =]\sqrt{n}[$, $v(h) = n$.

Capítulo II
CLASES CERRADAS Y PLENITUD

§ 1. OPERACION DE CLAUSURA. CLASES CERRADAS

Sea M un cierto conjunto de funciones del álgebra lógica. *Clausura* $[M]$ del conjunto M se llama a la totalidad de todas las funciones de P_2 que son superposiciones de las funciones del conjunto M. La operación de obtención del conjunto $[M]$ de M se llama *operación de clausura*. El conjunto M se llama *clase cerrada funcionalmente* (abreviado, *clase cerrada*), si $[M] = M$.

Sea M una clase cerrada en P_2. El subconjunto $\mathfrak{P}$ de M se llama *sistema funcionalmente completo* (o sencillamente: *sistema completo*) en M, si $[\mathfrak{P}] = M$. El conjunto $\mathfrak{P}$ de funciones del álgebra lógica se llama *sistema irreducible* si la clausura de cualquier subconjunto propio $\mathfrak{P}'$ de $\mathfrak{P}$, es diferente de la clausura de todo el conjunto $\mathfrak{P}$, o sea $[\mathfrak{P}'] \subset [\mathfrak{P}]$ y $[\mathfrak{P}'] \neq [\mathfrak{P}]$. Un sistema irreducible y completo en la clase cerrada M se llama *base* de la clase M. El conjunto M' que se contiene en la clase cerrada M (en particular, que se contiene en todo el conjunto P_2) se llama *clase precompleta en* M si no es un sistema completo en M, pero para cualquier función $f \in M \setminus M'$ se cumple la igualdad $[M' \cup \{f\}] = M$.

Las funciones f_1 y f_2 se llamarán *congruentes* si una de ellas puede ser obtenida de la otra por medio de una sustitución de variables (sin identificación). Por ejemplo, las funciones $x \cdot \bar{y}$ e $y \cdot \bar{z}$ son congruentes, pero las funciones $x \cdot y$ y $z \cdot z$ no. Al estudiar las cuestiones relacionadas con las clases cerradas, suele ser cómodo señalar una representación del conjunto de funciones congruentes de par en par. Por ejemplo, la clase $\{x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$, compuesta por el total de funciones idénticas, se designará por $\{x\}$.

Si M es cierto conjunto de funciones, entonces por medio de $M(X^n)$ (o por M^n) se designará el subconjunto de todas aquellas funciones de M, que dependan *sólo* de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1.1. Argumentar las siguientes propiedades de la clausura:

1) $[[M]] = [M]$;
2) si $M_1 \subseteq M_2$, entonces $[M_1] \subseteq [M_2]$;
3) $[M_1 \cup M_2] \supseteq [M_1] \cup [M_2]$;
4) $[\varnothing] = \varnothing$.

1.2. ¿Se deduce en el problema 1.1 la relación 4) de las relaciones 1)—3)?

1.3. ¿Es el conjunto $\mathcal{P}$ una clase cerrada? Se presupone que junto con cada función f de $\mathcal{P}$, al conjunto $\mathcal{P}$ le pertenecen también todas las funciones de P_2 que son congruentes a f.

1) $\mathcal{P} = \{0, 1\}$; 2) $\mathcal{P} = \{\tilde{x}\}$; 3) $\mathcal{P} = \{1, \tilde{x}\}$;
4) $\mathcal{P} = \{x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \ldots, x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n, \ldots\}$;
5) $\mathcal{P} = \{0, x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n, n \geqslant 1\}$;
6) $\mathcal{P} = \{x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n, n \geqslant 1\}$;
7) $\mathcal{P} = \{0, x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{2n}, n \geqslant 1\}$.

1.4. Anotar todo lo que depende solamente de las variables x_1, x_2, x_3, y las funciones congruentes de par en par de la clausura del conjunto $\mathcal{P}$.

1) $\mathcal{P} = \{x \to 1\}$;
2) $\mathcal{P} = \{0, \bar{x}\}$;
3) $\mathcal{P} = \{x \vee y\}$;
4) $\mathcal{P} = \{x^y\}$;
5) $\mathcal{P} = \{x \oplus y \oplus z\}$;
6) $\mathcal{P} = \{(00000001)\}$.

1.5. Demostrar que si una clase cerrada en P_2 contiene una función que depende sustancialmente de $n \geqslant 2$ variables, entonces ella contiene infinitamente muchas funciones congruentes de par en par.

1.6. Enumerar todas las clases cerradas en P_2 tales que contengan solamente un número finito de funciones congruentes de par en par.

1.7. ¿Es que siempre en P_2:
1) la intersección de clases cerradas es una clase cerrada;
2) la diferencia de clases cerradas es una clase cerrada;
3) el complemento de una clase cerrada no es una clase cerrada?

1.8. Reduciendo a ciencia cierta a unos sistemas completos en P_2, mostrar que el conjunto $\mathcal{P}$ es un sistema completo en P_2, donde:

1) $\mathcal{P} = \{x \downarrow y\}$;
2) $\mathcal{P} = \{x \cdot y \oplus z, (x \sim y) \oplus z\}$;
3) $\mathcal{P} = \{x \to y, \overline{x \oplus y \oplus z}\}$;

4) $\mathcal{P}=\{x\to y,\ (1100001100111100)\}$;

5) $\mathcal{P}=\{0,\ m(x,\ y,\ z),\ x^y\oplus z\}$[1];

6) $\mathcal{P}=\{(1011),\ (1111110011000000)\}$.

1.9. Aclarar cuál de las relaciones $\supset$, $\subset$, $\supseteq$, $\subseteq$, $=$, $\not\supseteq\!\!\!\!\not\subseteq$, se cumple para los conjuntos[2]) K_1 y K_2 (la relación $\not\supseteq\!\!\!\!\not\subseteq$ significa que no se cumple ninguna de las relaciones $\supset$, $\subset$, $\supseteq$, $\subseteq$, $=$.

1) $K_1=[M_1\cap M_2]$, $\qquad K_2=[M_1]\cap[M_2]$;

2) $K_1=[M_1\setminus M_2]$, $\qquad K_2=[M_1]\setminus[M_2]$;

3) $K_1=[M_1\cup(M_2\cap M_3)]$, $\qquad K_2=[M_1\cup M_2]\cap[M_1\cup M_3]$;

4) $K_1=[M_1\cap(M_2\cup M_3)]$, $\qquad K_2=[M_1\cap M_2]\cup[M_1\cap M_3]$;

5) $K_1=[M_1\setminus(M_1\cap M_2)]$, $\qquad K_2=[M_1]\setminus[M_1\cap M_2]$.

1.10. Sean M_1 y M_2 tales clases cerradas en P_2, que $M_1\setminus M_2\neq\neq\varnothing$. Formular ejemplos de clases concretas M_1 y M_2 que satisfagan además las condiciones siguientes:

1) $M_1\cap M_2=\varnothing$, $M_2\setminus M_1\neq\varnothing$, $[M_1\cup M_2]=M_1\cup M_2$;

2) $M_1\cap M_2\neq\varnothing$, $\quad M_2\setminus M_1\neq\varnothing$, $\quad [M_1\cup M_2]=M_1\cup M_2$;

3) $M_1\supset M_2$, $\quad [M_1\setminus M_2]\neq M_1\setminus M_2$;

4) $M_1\cap M_2\neq\varnothing$, $\quad M_2\setminus M_1\neq\varnothing$, $\quad [M_1\setminus M_2]=M_1\setminus M_2$;

5) $M_1\cap M_2\neq\varnothing$, $\quad M_2\setminus M_1\neq\varnothing$, $\quad [M_1\oplus M_2]=M_1\oplus M_2$.

1.11. Del sistema $\mathcal{P}$ que es completo para la clase cerrada $M==[\mathcal{P}]$ seleccionar la base.

1) $\mathcal{P}=\{0,\ 1,\ x,\ \bar{x}\}$;

2) $\mathcal{P}=\{1,\ x\oplus y\oplus z\oplus 1\}$;

3) $\mathcal{P}=\{x\vee y,\ x\cdot y\cdot z,\ x\vee y\cdot z,\ (x\vee y)\cdot z\}$;

4*) $\mathcal{P}=\{x\oplus 1,\ x\oplus y\oplus z,\ m(x,\ y,\ z)\}$;

5) $\mathcal{P}=\{x\vee y\vee z,\ x\cdot y\cdot z,\ (x\to y)\to z,\ (x\vee y)\to z\}$;

6) $\mathcal{P}=\{(x\to y)\to(y\to z),\ x\vee y\vee(y\oplus z)\}$;

7) $\mathcal{P}=\{x\cdot y,\ x\vee y,\ x\to y,\ x\oplus y\oplus z\oplus u\}$.

1.12. Demostrar que toda clase precompleta en P_2 es una clase cerrada.

1.13. Sean M_1 y M_2 clases precompletas diferentes en una misma clase cerrada M [3]). Demostrar que si $M_1^1\neq M^1$ entonces $M_1^1\neq M_2^1$

---

[1]) Por $m(x,\ y,\ z)$ (o $h_2(x,\ y,\ z)$) se designa la función $xy\vee xz\vee yz$, que se llama *mediana* (o *función de votación*).

[2]) Los conjuntos se toman de P_2.

[3]) Suponemos que $M\subseteq P_2$.

(o sea que las clases M_1 y M_2 se «diferencian» ya en el conjunto de funciones que dependen de una variable).

1.14. Enumerar todas las clases precompletas en la clase cerrada M.

1) $M = [0, \bar{x}]$;
2) $M = [0, 1]$;
3) $M = [x \cdot y]$;
4) $M = [0, x \vee y]$;
5) $M = [0, x \cdot y \cdot z]$.

1.15. Comprobar si es una clase cerrada en P_2:

1) el conjunto de todas las funciones simétricas;

2) el conjunto de todas las funciones $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 0$ que satisfacen la condición $f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{1}^n) = 0$[1];

3) el conjunto de todas las funciones $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$ que tienen $|N_f| = 2^{n-1}$.

1.16. Demostrar que si M es una clase cerrada en P_2, entonces $[M \cup \{x\}] = M \cup \{x\}$.

1.17. Demostrar que el conjunto P_2 de todas las funciones del álgebra lógica no es presentable en la forma de una unión $\bigcup_{i=1}^{s} M_i$ $(s \geqslant 2)$ de clases cerradas en P_2 que no sean intersecables de par en par.

1.18. Demostrar que toda clase cerrada en P_2 que contenga una función diferente de una constante, contiene también la función x.

1.19. Demostrar que si una clase cerrada en P_2 tiene una base finita, entonces cualquier base de esta clase es finita.

1.20. Evaluar desde arriba la potencia del conjunto de todas las clases cerradas en P_2 que tienen sistemas completos finitos.

1.21. Desmostrar que si una clase no vacía cerrada en P_2 es diferente a los conjuntos $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{0, 1\}$, entonces es imposible ampliarla hasta la base en P_2.

1.22. Sea M una clase cerrada en P_2 que tiene un número finito de clases precompletas (en M). Supongamos que cualquier clase cerrada en M se amplía hasta una clase precompleta en M. Demostrar que el número de funciones en cualquier base de la clase M no supera al número de clases precompletas (en M).

1.23. Demostrar que en la clase cerrada $[x \to y]$ se contienen sólo tales funciones de P_2 que pueden ser presentadas (con una exactitud hasta la designación de las variables) de forma $x_i \vee \vee f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $f(\tilde{x}^n) \in P_2$.

1.24. Supongamos que la función $f(\tilde{x}^n)$ pertenece a la clase cerrada $[x \to y]$ y depende sustancialmente de no menos que de dos variables. Demostrar que $|N_f| > 2^{n-1}$.

1.25. Demostrar (no a base del problema 1.12) que cada clase precompleta en P_2 contiene una función idéntica.

---

[1] Si $n = 0$, entonces f es una constante 0, vista como una función de o-lugar.

§ 2. DUALIDAD Y CLASE DE FUNCIONES AUTODUALES

La función $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama *dual a la función* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$. Por definición, la función dual a la constante 0 es la constante 1 y, recíprocamente, la constante 0 es función dual a la constante 1. Una función dual a la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se designa por $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Es justa la siguiente afirmación, llamada *principio de dualidad*: si $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, entonces $\Phi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(f_1^*(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Supongamos que M es un cierto conjunto de funciones del álgebra lógica. Mediante M^* designaremos el conjunto de todas las funciones duales a las funciones del conjunto M. El conjunto M^* se llamará *dual al conjunto* M. Si $M^* = M$, entonces el conjunto M se llamará *autodual*.

La función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama *autodual* si $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El conjunto de todas las funciones autoduales se designa por S.

De la definición de autodualidad se deduce que una función es autodual si, y sólo si, en cualesquiera dos colecciones opuestas de valores de las variables ella toma valores opuestos.

Es justa la siguiente afirmación, corrientemente llamada *lema de la función no autodual*: si la función $f(\widetilde{x}^n)$ es no autodual, entonces, colocando las funciones x y $\overline{x}$ en lugar de sus variables, se puede obtener una constante.

2.1. Es la función g dual a la función f si:

1) $f = x \oplus y$, $\quad g = x \sim y$;
2) $f = x \to y$, $\quad g = y \to x$;
3) $f = xy \vee xz \vee yz$, $\quad g = xy \oplus xz \oplus yz$;
4) $f = x \oplus y \oplus z$, $\quad g = x \oplus y \oplus z$;
5) $f = \overline{xy}z \vee x(y \sim z)$, $\quad g(x, y, z) = (01101101)$.

2.2. Supongamos que la función $f(\widetilde{x}^n)$ está dada con el vector $\widetilde{\alpha}_f = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^n})$. Demostrar que la función $f^*(\widetilde{x}^n)$ se da con el vector $(\overline{\alpha}_{2^n}, \ldots, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_1)$.

2.3. Utilizando el principio de dualidad construir una fórmula que realice la función dual a la función f. Simplificar la expresión obtenida (anotándola como una f.n.d. o en forma del polinomio de Zhegalkin).

1) $f = xy \vee yz \vee xt \vee zt$;
2) $f = x \cdot 1 \vee y(zt \vee 0) \vee \overline{x}yz$;

3) $f=(x\to y)\oplus((x\downarrow y)|(\overline{x}\sim yz))$;

4) $f=(\overline{x}\vee y\vee(\overline{yz}\oplus 1))\to 1$.

2.4. Supongamos que la función $f(\tilde{x}^n)$ se realiza con la fórmula $\mathfrak{A}$ sobre el conjunto $\{0, 1 \neg, \&, \vee\}$. Demostrar que la función $f^*(\tilde{x}^n)$ se realiza con la fórmula $\mathfrak{A}^*$, llamada *dual a la fórmula* $\mathfrak{A}$ y obtenida de $\mathfrak{A}$ mediante la sustitución de cada entrada del símbolo & por el símbolo $\vee$, del símbolo $\vee$ por el &, del símbolo 0 por el 1 y del símbolo 1 por el 0.

2.5. Demostrar que si las fórmulas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ sobre el conjunto $\{0, 1, \neg, \&, \vee\}$ son equivalentes, entonces las fórmulas $\mathfrak{A}^*$ y $\mathfrak{B}^*$ también serán equivalentes.

2.6. Demostrar que si la función $f(\tilde{x}^n)$ depende sustancialmente de la variable x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, entonces la función $f^*(\tilde{x}^n)$ también dependerá sustancialmente de x_i.

2.7. Demostrar que:

1) un conjunto dual a M^* coincide con M;

2) el conjunto M es una clase cerrada si, y sólo si, el conjunto M^* es una clase cerrada;

3) si el conjunto M_1 es un sistema completo (o una base) en la clase cerrada M, entonces el conjunto dual M_1^* forma un sistema completo (y respectivamente una base) en la clase cerrada M^*;

4) si $M_1 \supseteq M_2$, entonces $M_1^* \supseteq M_2^*$.

2.8. Contar el número de funciones dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el conjunto $[M^*]\setminus[M]$.

1) $M=\{0, \overline{x}\}$; 2) $M=\{x\oplus y\}$; 3) $M=\{xy, x\vee y, 1\}$.

2.9. ¿Es autodual la función f?

1) $f=m(x, y, z)$;

2) $f=\overline{(x\to y)\to xz}\to(y\to z)$;

3) $f=(\overline{x}\vee y\vee\overline{z})t\vee\overline{x}y\overline{z}$;

4) $f=(0001001001100111)$;

5) $f=x_1\oplus x_2\oplus\ldots\oplus x_{2m+1}\oplus\sigma$, donde $\sigma\in\{0, 1\}$.

2.10. Demostrar que la función $f(\tilde{x}^n)$ es autodual si, y sólo si, su x_1-componente $f_1^1(\tilde{x}^n)$ es dual a su $\overline{x}_1$-componente $f_0^1(\tilde{x}^n)$.

2.11. Demostrar que si $f(\tilde{x}^n)$ es una función autodual, entonces $|N_f|=2^{n-1}$.

2.12. Mostrar que no existen funciones autoduales sustancialmente dependientes de dos variables.

2.13. Contar el número de funciones autoduales sustancialmente dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2.14. Enumerar todas las funciones autoduales sustancialmente dependientes de las variables x, y, z y mostrar que cada una de estas funciones se puede representar en la forma $m(x^{\alpha}, y^{\beta}, z^{\gamma})$ o en la forma $x \oplus y \oplus z \oplus \sigma$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$.

2.15. ¿Con qué valores $n \geqslant 2$ la función $f(\widetilde{x}^n)$ es autodual?

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1(x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n) \vee x_2(x_3 \vee \ldots \vee x_n) \vee \ldots$
$$\ldots \vee x_{n-2}(x_{n-1} \vee x_n) \vee x_{n-1}x_n;$$

2) $f(\widetilde{x}^n) = x_1(x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_n) \oplus x_2(x_3 \oplus \ldots \oplus x_n) \oplus \ldots$
$$\ldots \oplus x_{n-2}(x_{n-1} \oplus x_n) \oplus x_{n-1}x_n;$$

3) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \to x_n) \oplus (x_n \to x_1);$

4) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{]n/2[} \leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{]n/2[}}$

(donde la disyunción se toma por todas las conjunciones monótonas de longitud $]n/2[$, compuestas de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

2.16. Sean $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$, $g_i^*(\widetilde{x}^m) = g_{n-i+1}(\widetilde{x}^m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. ¿Es la función $f(g_1(\widetilde{x}^m), \ldots, g_n(\widetilde{x}^m))$ autodual?

2.17. Demostrar que si

1) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$, entonces $f(x, x, \ldots, x) \in \{x, \overline{x}\}$;
2) $f \in S$, entonces $m(x_1, \overline{f}, x_2 \oplus x_3 \oplus f) \oplus x_3 \oplus x_4 \in S$;
3) $f \in S$, entonces $\overline{x}_1 f \oplus x_2x_3 \oplus \overline{x}_1x_3 \oplus x_2\overline{f} \oplus x_4 \oplus x_5 \in S$.

2.18. Supongamos que las funciones $f(\widetilde{x}^n)$ y $f^*(\widetilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$ satisfacen la condición $|N_f| = |N_{f^*}|$. Demostrar que:
1) si $\overline{f} \vee f^* \equiv \text{const}$, entonces $f \in S$;
2) si $f \oplus f \cdot f^* \equiv \text{const}$, entonces $f \in S$.

2.19. Obtener una constante de la función no autodual f mediante la sustitución en los lugares de las variables de las funciones x y $\overline{x}$.

1) $f = (00111001)$;
2) $f = (x \vee \overline{y} \vee z)t \vee \overline{x}yz$;
3) $f = (x \downarrow y) \to (x \oplus z)$;
4) $f = xy \vee xz \vee yt \vee zt$.

2.20. Demostrar que si una función no autodual depende sustancialmente de no menos que de tres variables, entonces identificando ciertas variables suyas se puede obtener una función sustancialmente dependiente de dos variables.

2.21. Demostrar que si mediante la identificación de las variables de la función $f(\widetilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$ no se puede obtener una función que dependa sustancialmente de dos variables, entonces la función f es autodual.

2.22. Sea $f(x, y, z) = m(x^{\alpha}, y^{\beta}, z^{\gamma})$, donde α, β, γ pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$. Demostrar que para cualquier $n \geqslant 4$ de la función f se puede obtener (empleando la operación de superposición) una función que dependa sustancialmente de n variables.

2.23. Demostrar las equivalencias siguientes:

1) $x \oplus y \oplus z = m(m(x, y, \bar{z}), \quad m(x, \bar{y}, z), \quad m(\bar{x}, y, z)) = m(x, m(\bar{x}, y, z), \overline{m(x, y, z)}) = m(m(x, \bar{y}, z), m(\bar{x}, y, z)\, \bar{z})$;

2) $(x \vee y \vee z)\, t \vee xyz = m(m(y, z, t), \; x, \; t) = m(m(x, y, t), m(x, z, t), m(y, z, t))$;

3) $m(x, y, z) = m(\overline{m(\bar{x}, y, z)}, y, z)$.

2.24. Sea $f(\tilde{x}^n) \in P_2$ y $n \geqslant 3$. Demostrar la relación siguiente:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) = f(x_1, m(x_1, x_2, x_3), m(x_1, x_2, x_3), x_4, \ldots, x_n) \oplus \oplus f(m(x_1, x_2, x_3), x_2, m(x_1, x_2, x_3), x_4, \ldots, x_n) \oplus \oplus f(m(x_1, x_2, x_3), m(x_1, x_2, x_3), x_3, x_4, \ldots, x_n).$$

2.25. 1) Demostrar, empleando los problemas 2.12, 2.14, 2.23, 1) y 2.24, que $\overline{[m(x, y, z)]} = [m(x, \bar{y}, \bar{z})] = S$.

2) Demostrar que cualquier base de la clase S de todas las funciones autoduales, contiene no más de dos funciones.

2.26. ¿Se puede obtener la función g de la función f con ayuda de la operación de superposición en los casos siguientes?

1) $f = (10110010)$, $g = (1000)$;
2) $f = (1111011100010000)$, $g = (00010111)$;
3) $f = (11001100)$, $g = (00110011)$.

2.27. La función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$ posee las propiedades siguientes: $f(\tilde{x}^n) \notin S$ y con la identificación en ella de cualesquiera $2[\sqrt{n}]$ variables se obtiene una función de la clase S. ¿Cuál es el número mayor de variables sustanciales que puede tener la función $f(\tilde{x}^n)$?

2.28. Enumerar todas las funciones sustancialmente dependientes de las variables x_1, x_2, x_3, x_4 tales que todo $x_i^{\sigma_i}$-componente suyo sea una función autodual.

2.29. ¿Es el conjunto M autodual?

1) $M = \{x \oplus y \oplus z, \; m(x \oplus y, \; x \sim z, \; y \sim \bar{z})\}$;
2) $M = \{x \cdot y, \; x \vee y, \; x \oplus y \oplus m(x, y, z)\}$;
3) $M = \{(x \to y) \to y, \; (x \vee y) \oplus x \oplus y, \; (x \vee y \vee z)\, t \vee \bar{x}yz\}$;
4) $M = S \setminus \{x \oplus y \oplus \bar{z}, \; m(x, \bar{y}, \bar{z})\}$.

§ 3. LINEALIDAD Y CLASE DE FUNCIONES LINEALES

La función $f(\tilde{x}^n)$ se llama *lineal* si se presenta en la forma

$$f(\tilde{x}^n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n,$$

donde $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $0 \leqslant i \leqslant n$. El conjunto de todas las funciones lineales se designa por L, y el conjunto de todas las funciones lineales dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, por L^n. El conjunto L es cerrado y precompleto en la clase P_2. Es justa la afirmación (*lema de la función no lineal*):

Si $f \notin L$, entonces sustituyendo en el lugar de sus variables las funciones $0, 1, x, y, \overline{x}, \overline{y}$ se puede obtener xy o $\overline{xy}$.

Si $f \notin L$, entonces f se llama *no lineal*.

3.1. Aclarar, descomponiendo la función f en un polinomio de Zhegalkin, si es ella lineal.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2) \oplus x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1x_2(x_1 \oplus x_2)$;

3) $f(\widetilde{x}^4) = \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_4x_1$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \sim x_3$.

3.2. Demostrar que si la función $f(\widetilde{x}^n)$ toma valores opuestos en cualesquiera dos vértices contiguos $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ de B^n, entonces ella es lineal. ¿Es justa la afirmación inversa?

3.3. Demostrar que si $f(\widetilde{x}^n)$ es una función lineal diferente de una constante, entonces $|N_f| = 2^{n-1}$. ¿Es cierto lo contrario?

3.4. Aclarar si f es una función lineal.

1) $f(\widetilde{x}^4) = (1010\ 1010\ 0110\ 1000)$;

2) $f(\widetilde{x}^4) = (1001\ 0110\ 1001\ 0110)$;

3) $f(\widetilde{x}^4) = (1001\ 0110\ 0110\ 1001)$;

4) $f(\widetilde{x}^4) = (0110\ 1001\ 1010\ 0101)$.

3.5. Mostrar que el número de funciones lineales $f(\widetilde{x}^n)$, que sustancialmente dependen exactamente de k variables del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, es igual a $2\binom{n}{k}$.

3.6. Hallar el número de funciones autoduales que pertenecen al conjunto L^n.

3.7. Mostrar que no se puede obtener la función $x \to y$ de las funciones $x \oplus y \oplus z$, $x \oplus 1$, $x \oplus y$ por medio de la operación de superposición.

3.8. Aclarar si se puede obtener xy de la función f sustituyendo a sus variables por las funciones $0, 1, x, y, \overline{x}, \overline{y}$.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (1110\ 1000)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (0111\ 1111)$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (1001\ 1001)$;

4) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \oplus (x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2) \oplus \ldots$

$\ldots \oplus (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_{n-1})$.

3.9. Aclarar si se puede realizar la función $x \to y$ con una fórmula sobre el conjunto Φ, donde:

1) $\Phi = L \cup \{xy \vee xz \vee zy\}$;

2) $\Phi = L \setminus S$;

3) $\Phi = (L \cup \{xy \vee yz \vee zx\}) \setminus S$;

4) $\Phi = (L \cup \{xy\}) \setminus S$.

3.10*. Demostrar que la función $f(\tilde{x}^n)$, que depende sustancialmente de todas sus variables, es lineal si, y sólo si, al sustituir cualquier subconjunto de variables por cualquier colección de constantes se obtiene una función que dependerá sustancialmente de todas las demás variables.

3.11*. Mostrar que de un polinomio de grado $k \geqslant 3$ mediante la identificación de las variables se puede obtener un polinomio de grado $k-1$.

3.12*. Mostrar que de una función no lineal $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$ mediante la identificación de las variables se puede obtener una función no lineal que dependa de no más que de tres variables. Enumerar todas las funciones no lineales $f(\tilde{x}^3)$ de las que mediante la identificación de las variables no se puede obtener una función no lineal.

3.13. Mostrar que de una función no lineal mediante la identificación de las variables se puede obtener una función congruente bien a $xy \oplus l(x, y)$, bien a $xy \oplus yz \oplus zx \oplus l(x, y, z)$, donde $l(x, y)$ y $l(x, y, z)$ son funciones lineales.

3.14. Mostrar que si $f(\tilde{x}^n) \notin L$, entonces en B^n se podrá encontrar una cara bidimensional tal, que exactamente en tres vértices de ella la función $f(\tilde{x}^n)$ toma el mismo valor.

3.15. Sea la función $f(\tilde{x}^n)$ tal que para todos los i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ $f_{00}^{ij}(\tilde{x}_n) = f_{11}^{ij}(\tilde{x}^n)$. Mostrar que $f(\tilde{x}^n) \in L$.

3.16. Aclarar cual de los sistemas enumerados a continuación forma una base en L.

1) $\{1, x \oplus y\}$;

2) $\{x \sim y, x \oplus y \oplus z\}$;

3) $\{x \sim y, x \oplus y, 0\}$;

4) $\{0, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;

5) $\{1 \oplus x \oplus y \oplus z, x \oplus y \oplus z\}$.

3.17. Seleccionar todas las bases de un sistema completo en L.

1) $\{0, 1, x \oplus 1, x \sim y, x \oplus y \oplus z\}$;

2) $\{x \sim y, (x \sim y) \sim z, x \oplus y \oplus z, x \oplus y \oplus z \oplus t\}$;

3) $\{0, (x \sim y) \sim z, x \oplus 1, x \oplus y\}$.

3.18. Demostrar que cualquier sistema completo en L contiene no menos de dos funciones.

3.19. Demostrar que cualquier base en L contiene no menos de tres funciones.

3.20. Demostrar que existe solamente un número finito de clases cerradas que contienen sólo funciones lineales. Enumerar todas estas clases.

3.21. Mostrar que cualquier clase cerrada que contenga un número finito de funciones no congruentes de par en par se contiene en L.

3.22. La función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$ satisface las condiciones:

1) $|N_f| = 2^{n-1}$; 2) $f \oplus f^*$ es una constante.

Mostrar que $f(\tilde{x}^n) \in L \cup S$ siempre que $n \leqslant 3$. Poner un ejemplo de la función f que satisfaga las condiciones 1) y 2) y que no pertenezca al conjunto $L \cup S$.

3.23. Demostrar que $L \cap S = \{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$.

3.24. Mostrar que $L^* = L$.

3.25. Enumerar todas las funciones no congruentes de par en par f que satisfagan las condiciones siguientes:

1) $f \notin L$;

2) cualquier subfunción (propia) de la función f es lineal.

3.26. Contar el número de funciones lineales autoduales $f(\tilde{x}^n)$ que dependan sustancialmente de todas sus variables.

3.27. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los paréntesis en la expresión $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_1$ para que se obtenga una función lineal?

3.28. Sean $f(\tilde{x}^n) \in L \cap S$, $f(0, 0, \ldots, 0) = f(0, 0, \ldots, 0, 1)$ y $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$. ¿A qué es igual $f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{n-1}, \alpha_n)$?

3.29. ¿Con cuáles n existe una función lineal $f(\tilde{x}^n)$ que satisfaga la condición $f(0, 0, \ldots, 0) \neq f(1, 1, \ldots, 1)$ y que sea simétrica?

3.30. Sea $f(\tilde{x}^n)$ tal que

$$f_{1\,1\,\ldots\,1}^{3,\,4,\,\ldots,\,n}(\tilde{x}^n) = \bar{x}_1 x_2 \quad \text{y} \quad f_{0\,0\,\ldots\,0}^{3,\,4,\,\ldots,\,n}(\tilde{x}^n) = \bar{x}_2.$$

Mostrar que $f(\tilde{x}^n) \notin L \cup S$.

3.31*. Enumerar todas las funciones f no congruentes de par en par, no lineales, tales que cualquier identificación de las variables lleve a una función de L.

3.32*. Enumerar todas las funciones no congruentes de par en par $f \notin L \cup S$ de las que con cualquier identificación de las variables se obtiene una función de $L \cap S$.

3.33. Sea $Q = \{0, \bar{x}, f_1, f_2, f_3\}$, donde f_1, f_2, f_3 son funciones diferentes de par en par, sustancialmente dependiente de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 1)$. Demostrar que el sistema Q es completo en P_2.

§ 4. CLASES DE FUNCIONES QUE CONSERVAN LAS CONSTANTES

Se dice que la función $f(\tilde{x}^n)$ *conserva la constante* 0 (*la constante* 1), si $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$ (respectivamente si $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$). El conjunto de todas las funciones del álgebra lógica que conservan la constante 0 se designa por T_0 y el de las que conservan 1, por T_1. El conjunto de todas las funciones del álgebra lógica que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y que conservan la constante 0 (la constante 1) se designará por T_0^n (respectivamente por T_1^n). Cada uno de los conjuntos T_0, T_1 es una clase cerrada y precompleta en P_2.

4.1. Aclarar a cuál de los conjuntos $T_0 \cup T_1$, $T_1 \setminus T_0$ pertenece cada una de las funciones enumeradas a continuación:

1) $((x \vee y) \rightarrow (x \mid yz)) \downarrow ((y \sim z) \rightarrow x)$;
2) $(xy \rightarrow z) \mid ((x \rightarrow y) \downarrow (z \oplus \bar{x}y))$;
3) $(x \rightarrow y) \mathbin{\&} (y \downarrow z) \vee (x \rightarrow y)$.

4.2. Aclarar con cuáles n la función $f(\tilde{x}^n)$ pertenece al conjunto $T_1 \setminus T_0$.

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$;
2) $f(\tilde{x}^n) = (\ldots((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow \ldots \rightarrow x_n)$;
3) $f(\tilde{x}^n) = (\ldots((x_1 - x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow \ldots \rightarrow x_n) \oplus$
$\oplus ((\ldots((x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow x_4) \rightarrow \ldots \rightarrow x_n) \rightarrow x_1) \oplus \ldots$
$\ldots \oplus (\ldots(x_n \rightarrow x_1) \rightarrow x_2 \rightarrow \ldots \rightarrow x_{n-1})$;
4) $f(\tilde{x}^n) = 1 \oplus \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}$.

4.3. Aclarar con cuáles n la función $f_n(\tilde{x}^n)$ dada en forma recurrente pertenece al conjunto $T_0 \setminus T_1 \cup (T_1 \setminus T_0)$

1) $f_2(\tilde{x}^2) = x_1 \oplus x_2$,
$$f_n(\tilde{x}^n) = (x_1 \rightarrow f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}))(x_n \vee f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1})), \quad n > 2;$$
2) $f_1(x_1) = x_1$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$,
$$f_n(\tilde{x}^n) = x_{n-1} x_n \oplus f_{n-2}(\tilde{x}^{n-2}), \quad n \geqslant 3;$$
3) $f_1(x_1) = x_1$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$,
$$f_n(\tilde{x}^n) = f_{n-1}(\tilde{x}^{n-1}) \oplus x_n f_{n-2}(\tilde{x}^{n-2}), \quad n \geqslant 3.$$

4.4. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los paréntesis en la expresión $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ para obtener una fórmula que realice una función de T_0?

4.5. Contar el número de funciones que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en cada uno de los conjuntos siguientes:

1) $T_0 \cap T_1$; 5) $L \setminus (T_0 \cap T_1)$; 9) $S \cap (T_0 \cup T_1)$;
2) $T_0 \cup T_1$; 6) $L \setminus (T_0 \cup T_1)$; 10) $S \cap (T_0 \setminus T_1)$;
3) $T_0 \cap L$; 7) $T_1 \cap S$; 11) $S \setminus (T_0 \cup T_1)$;
4) $T_1 \cup L$; 8) $T_0 \setminus S$; 12) $(S \setminus T_0) \cap T_1$;
13) $L \cap S \cap T_1$;
14) $L \setminus (T_0 \cup (T_1 \cap S))$;
15) $(L \cup S) \setminus (T_0 \cup T_1)$.

4.6. Hallar la función $f(x, x, \ldots, x)$ si:

1) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1 \setminus T_0$;
2) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L \setminus (T_1 \cap S)$;
3) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S \setminus T_0$.

4.7. Aclarar si se puede obtener la función f mediante la operación de superposición sobre el conjunto Φ si:

1) $f = x \oplus y, \quad \Phi = \{x \to y\}$;
2) $f = x \to y, \quad \Phi = \{xy, x \vee y\}$;
3) $f = \overline{x} \vee \overline{y}, \quad \Phi = T_0 \cup (S \setminus (L \cup T_1))$;
4) $f = x\overline{y}, \quad \Phi = (T_1 \setminus L) \cup \{x \oplus y\}$.

4.8. Demostrar que:

1) $T_0 = [xy, x \oplus y] = [x \vee y, x \oplus y]$;
2) $T_1 = [x \vee y, x \sim y] = [xy, x \sim y]$;
3) $T_0 \cap T_1 = [xy, x \oplus y \oplus z]$.

4.9*. Demostrar que cualquier base en T_0 contiene no más de tres funciones. Poner ejemplos de bases de clase T_0 que estén formadas de una, dos y tres funciones.

4.10*. Demostrar que cualquier base en $T_0 \cap T_1$ contiene no más de dos funciones. Poner el ejemplo de una base que esté formada de una función.

4.11. ¿Existe en la clase $T_0 \cap T_1$ una función que dependa de tres variables y que forme en ella una base?

4.12. Demostrar que:

1) $L \cap T_0 = [x \oplus y]$;
2) $L \cap T_1 = [x \sim y]$;
3*) $S \cap T_0 = [xy \vee yz \vee zx, x \oplus y \oplus z] = [\overline{x}y \vee yz \vee z\overline{x}]$.

4.13. La función $f(\widetilde{x}^3)$, no determinada en todos sus puntos, es igual a cero en las colecciones (000), (001) y es igual a la unidad en las colecciones (011), (100), (110). Acabar de determinar la función $f(\widetilde{x}^3)$ en las demás colecciones de tal manera que la función obtenida forme una base en T_0.

4.14*. Demostrar que si la función f es sustancialmente dependiente de no menos que de dos variables y $f \notin T_0 \cup T_1$, entonces $L \cap S \subseteq [f]$.

4.15. Aclarar si son bases en T_0 los sistemas siguientes:

1) $\{xy \vee y\overline{z} \vee \overline{z}x, x \oplus y \oplus z\}$;
2) $\{x\overline{y}, x \oplus y \oplus \overline{z}, x \vee y\}$;
3) $\{xy \oplus z\}$;
4) $\{x \oplus y \oplus z, xy, x \vee y \vee z\}$.

4.16. Poner un ejemplo de una función simétrica $f(\widetilde{x}^4)$ que forme un sistema completo en T_0.

4.17. Demostrar que

$$L \cap T_0 \cap T_1 = L \cap S \cap T_0 = L \cap S \cap T_1 = L \cap S \cap T_0 \cap T_1.$$

4.18*. Demostrar que las clases $T_0 \cap L$, $T_0 \cap S$, $T_0 \cap T_1$ son precompletas en T_0.

4.19. Demostrar que el sistema de funciones $\{1\} \cup \cup (T_0 \setminus (T_1 \cup L \cup S))$ es completo en P_2.

4.20. Demostrar que:

1) $T_0^* = T_1$;
2) $(T_0 \cup T_1)^* = T_0 \cup T_1$;
3) $(T_0 \cup T_1 \cup S \cup L)^* = T_0 \cup T_1 \cup S \cup L$;
4) $((T_0 \cap T_1) \cup S)^* = (T_0 \cap T_1) \cup S$;
5) $(T_0 \setminus S)^* = T_1 \setminus S$;
6) $(S \setminus T_0)^* = S \setminus T_1$.

4.21. Supongamos que $f(\widetilde{x}^4) \in S \cap L \cap T_0$, $f(1, 1, 0, 1,) = 1$ y $f(\widetilde{x}^4)$ depende sustancialmente de no menos que de dos variables. Hallar $f(\widetilde{x}^4)$.

4.22. Demostrar que las clases $L \cap T_0$, $L \cap T_1$, $L \cap S$, $[0, \overline{x}]$, y solamente ellas, son precompletas en L.

4.23. Demostrar que $f \in (T_0 \cap T_1) \cup S$ si, y sólo si, mediante la operación de superposición de f no se puede obtener ni una de las constantes.

§ 5. MONOTONIA Y CLASE DE FUNCIONES MONOTONAS

Una función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ se llama *monótona* si para cualesquiera dos colecciones $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ de B^n, tales que $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$ tiene lugar la desigualdad $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$. En el caso contrario $f(\widetilde{x}^n)$ se llamará *no monótona*. El conjunto de todas las funciones booleanas monótonas se designa por M y el conjunto de todas las funciones dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, por M^n. El conjunto M es una clase cerrada y precompleta en P_2. Es justa la afirmación (*lema de la función no monótona*): si $f \notin M$, entonces sustituyendo en el lugar de sus variables las funciones 0, 1, x, se puede obtener la función $\overline{x}$.

El vértice $\widetilde{\alpha}$ del cubo B^n se llama *unidad inferior* (*cero superior*) de la función monótona $f(\widetilde{x}^n)$ si $f(\widetilde{\alpha}) = 1$ (respectivamente $f(\widetilde{\alpha}) = 0$) y para cualquier vértice $\widetilde{\beta}$ de $\widetilde{\beta} < \widetilde{\alpha}$ se deduce que $f(\widetilde{\beta}) = 0$ (respectivamente de $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ se deduce que $f(\widetilde{\beta}) = 1$).

5.1. ¿Cuáles de las funciones enumeradas a continuación son monótonas?

1) $x \to (x \to y)$;	5) $f(\widetilde{x}^3) = (00110111)$;
2) $x \to (y \to x)$;	6) $f(\widetilde{x}^3) = (01100111)$;
3) $xy(x \oplus y)$;	7) $f(\widetilde{x}^4) = (0001010101010111)$;
4) $xy \oplus yz \oplus zx \oplus z$;	8) $f(\widetilde{x}^4) = (0000000010111111)$.

5.2. Aclarar con cuáles n la función $f(\tilde{x}^n)$ es monótona.

1) $f(\tilde{x}^n) = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$;

2) $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \bar{x}_n \to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n)$;

3) $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \oplus \sum\limits_{i=1}^{n} x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n$.

5.3. Demostrar que para las funciones monótonas $f(\tilde{x}^n)$ son justas las siguientes fórmulas de descomposición:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i f_1^i(\tilde{x}^n) \vee f_0^i(\tilde{x}^n);$$
$$f(\tilde{x}^n) = (x_i \vee f_0^i(\tilde{x}^n)) \,\&\, f_1^i(\tilde{x}^n).$$

5.4. Demostrar que para cada función monótona f, diferente de una constante existen f.n.d. y f.n.c. que no contienen negación de las variables y que realizan f.

5.5. Determinar el número de funciones monótonas $f(x^3)$, tales que $f(0, 1, 1) = f(1, 0, 1) = 1$, $f(0, 0, 1) = 0$, que existen. ¿Cuántas funciones tales pertenecen al conjunto $M \setminus S$? ¿Hay entre ellas funciones con variables ficticias?

5.6. Supongamos que $f(\tilde{x}^4) \in S \cap M$, $f(0, 0, 1, 1) = f(1, 1, 1, 0) = 1$, $f(\tilde{x}^4)$ depende sustancialmente de todas sus variables. Hallar $f(\tilde{x}^4)$.

5.7. Demostrar que si f no es una constante y $f \vee f^*$ lo es, entonces $f \notin M \cup S$.

5.8. 1) ¿Es verdad que si $f(\tilde{x}^n)$ es monótona, entonces de las condiciones

$$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B^n, \quad \nu(\tilde{\beta}) > \nu(\tilde{\alpha}), \quad \|\tilde{\beta}\| > \|\tilde{\alpha}\|, \quad f(\tilde{\alpha}) = 1,$$

se deduce la igualdad $f(\tilde{\beta}) = 1$?

2*) Supongamos que para cualquier k $(0 \leqslant k < n)$ de las condiciones $f(\tilde{\alpha}^n) = 1$, $\nu(\tilde{\alpha}^n) \leqslant 2^{n-1} - 2^k$, $\nu(\tilde{\beta}^n) = \nu(\tilde{\alpha}^n) + 2^k$ se deduce que $f(\tilde{\beta}^n) = 1$. Demostrar que $f(\tilde{x}^n) \in M$.

5.9. Enumerar todas las funciones $f(\tilde{x}^4) \in M$ que satisfacen las condiciones siguientes:

1) $f(1, 0, 0, 0) = 1, \quad f(0, 1, 1, 1) = 0$;
2) $f(1, 0, 0, 0) = 1, \quad f(\tilde{x}^4) \in L$;
3) $f(0, 1, 0, 0) \neq f(1, 0, 1, 1)$, $f(\tilde{x}^4)$ es simétrica;
4) $f(1, 0, 0, 1) = 0, f \in S$.

5.10. Mostrar que si $f(\tilde{x}^n)$ no es monótona, entonces existen dos tales vectores $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ de B^n, diferentes exactamente en una coordenada, que $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$, pero $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$.

5.11. Mostrar que la función f, que depende sustancialmente de no menos que de dos variables, es monótona si, y sólo si, toda subfunción (propia) de la función f es monótona.

5.12. Poner un ejemplo de una función no monótona $f(\widetilde{x}^n)$ que tenga cada subfunción del tipo $f_\sigma^i(\widetilde{x}^n)$, $i = \overline{1, n}$, $\sigma \in \{0, 1\}$ monótona. ¿Cuál es el número de tales funciones que dependan de las variables del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$?

5.13. Mostrar que la función $f(\widetilde{x}^n)$ es monótona si, y sólo si, para cualquier k ($k = \overline{1, n-1}$) de cualquier subconjunto no vacío $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ y cualesquiera colecciones $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ y $\widetilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$, tales que $\widetilde{\sigma} \leqslant \widetilde{\tau}$, se cumple la relación

$$f_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}^{i_1, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n) \vee f_{\tau_1 \ldots \tau_k}^{i_1, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n) = f_{\tau_1 \ldots \tau_k}^{i_1, \ldots, i_k}(\widetilde{x}^n).$$

5.14. Demostrar que ninguna implicante simple de una función monótona contiene variables negativas.

5.15. Diremos que una c.e. monótona K sobre el conjunto de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corresponde al vector $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de B^n en el caso de que $\alpha_i = 1$ para cualquier $i = \overline{1, n}$ si, y sólo si, x_i entra en K. Demostrar que si el vector $\widetilde{\alpha}$ es la unidad inferior de la función monótona $f(\widetilde{x}^n)$, entonces el polinomio de Zhegalkin contiene en calidad de sumando la conjunción K que corresponde al vector $\widetilde{\alpha}$.

5.16*. Sea $f(\widetilde{x}^n)$ una función monótona y simétrica tal que $N_f = \{\widetilde{\alpha}\colon \|\widetilde{\alpha}\| \geqslant k,\ \widetilde{\alpha} \in B^n\}$. ¿Con cuáles n y k su polinomio de Zhegalkin contiene en calidad de sumando aunque sea una c.e. de rango $k + 2$?

5.17. Mostrar que no existen funciones monótonas autoduales que tengan exactamente dos unidades inferiores.

5.18. Determinar si existen funciones monótonas autoduales con tres unidades inferiores que dependan sustancialmente de

1) tres variables;

2) más de tres variables.

5.19*. 1) Mostrar que el número máximo de unidades inferiores de una función monótona $f(\widetilde{x}^n)$ es igual a $\binom{n}{[n/2]}$.

2) ¿Cuántas funciones monótonas $f(\widetilde{x}^n)$ que tengan $\binom{n}{[n/2]}$. unidades inferiores hay?

5.20. Mostrar que si se cambian en forma arbitraria los valores de una función monótona en ciertas unidades inferiores suyas por ceros, entonces la función obtenida también será monótona.

5.21. Mostrar que $|M^n| \geqslant 2^{\binom{n}{[n/2]}}$.

5.22. Contar el número de funciones que hay en cada uno de los conjuntos siguientes:

1) $M^n \setminus (T_1^n \cap T_0^n)$;
2) $M^n \setminus (T_1^n \cup T_0^n)$;
3) $M^n \cap L^n$;
4) $M^n \cap L^n \cap S^n$;
5) $L^n \setminus (M^n \cup S^n)$.

5.23*. Mostrar que:

1) $|S^n \cap M^n| < |M^{n-1}|$, para $n \geqslant 1$;
2) $|M^n| < |M^{n-1}|^2$, para $n \geqslant 1$;
3) $|M^n| \leqslant |M^{n-2}|^2 \, 2^{2^{n-2}}$, para $n \geqslant 2$.

5.24. Sea $m(n)$ el número de funciones monótonas que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mostrar que $m(1) = 3$, $m(2) = 6$, $m(3) = 20$, $m(4) = 186$.

5.25. Contar el número $m_c(n)$ de funciones monótonas $f(\widetilde{x}^n)$ que dependen sustancialmente de n variables (para $n = \overline{1, 4}$).

5.26*. Demostrar que $|M^n| < |S^n|$ para $n \geqslant 4$.

5.27. ¿Cuál es el número de funciones monótonas autoduales $f(\widetilde{x}^4)$ que dependen sustancialmente de todas sus variables?

5.28*. Utilizando aquello (véase el problema I.1.18) de que el cubo B^n se puede dividir en $\binom{n}{[n/2]}$ cadenas crecientes no intersecadas, mostrar que :

1) $|M^n| \leqslant (n+1)^{\binom{n}{[n/2]}}$; 2) $|M^n| \leqslant (n-1)^{\binom{n}{[n/2]}} + 2$.

5.29*. Partiendo de I.1.18, demostrar que $|M^n| \leqslant 3^{\binom{n}{[n/2]}}$.

5.30. Demostrar que el número de funciones monótonas $f(\widetilde{x}^n)$ en las que cada unidad inferior tiene un peso que no supera a k $(0 \leqslant k \leqslant n/2)$, no es mayor de $1 + k^{\binom{n}{k}}$.

5.31. Sea $(A, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado. La función f, definida en el conjunto A y que toma sus valores del conjunto $\{0, 1\}$, se llama *monótona*, si para cualesquiera α y β de A, tales que $\alpha \leqslant \beta$, se cumple la relación $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$. Supongamos que $m(A, \leqslant)$ es el número de diferentes funciones monótonas determinadas en A. Hallar el $\min\limits_{|A|=n} m(A, \leqslant)$, el $\max\limits_{|A|=n} m(A, \leqslant)$ e indicar en qué conjuntos parcialmente ordenados de n elementos se alcanzan estos valores mínimos y máximos.

5.32*. Poner un ejemplo de una sucesión de funciones monótonas $f_n(\widetilde{x}^{2n})$, $n = 1, 2, \ldots$, tales que el número de unidades inferiores de la función $f_n(\widetilde{x}^{2n})$ supere en $2^n/n$ veces el número de ceros superiores.

5.33. Demostrar que si el número de unidades inferiores de una función monótona $f(\widetilde{x}^n)$ no es menor de 2, entonces la función depende sustancialmente por lo menos de dos variables.

5.34*. Sea $t(f)$ el número de unidades inferiores de una función monótona f y $p(f)$, el número de sus variables sustanciales. Demostrar que $p(f) \geqslant \log_2 t(f) - \log_2 \log_2 t(f)$.

5.35. Sea $f \in M^n$ y $m_k(f)$, el número de vectores $\widetilde{\alpha}$ de B_k^n tales que $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, $q_k(f) = m_k(f) \Big/ \binom{n}{k}$. Mostrar que $q_{k-1}(f) \leqslant q_k(f)$, $k = \overline{1, n}$.

5.36*. La función $\varphi(\widetilde{x}^n)$ determinada en B^n que toma valores arbitrarios y reales, se llama *función monótona generalizada*, si de $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$ se deduce que $\varphi(\widetilde{\alpha}) \leqslant \varphi(\widetilde{\beta})$. Demostrar que una función monótona generalizada puede ser representada con una combinación lineal de funciones booleanas monótonas del tipo siguiente:

$$\varphi(\widetilde{x}^n) = c + \sum_{f(\widetilde{x}^n) \in M \cap T_0} a_f \cdot f(\widetilde{x}^n),$$

donde c es real, $a_f \geqslant 0$.

5.37*. Sea $\varphi(\widetilde{x}^n)$ una función monótona generalizada y $q_k(\varphi) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{\widetilde{\alpha} \in B_k^n} \varphi(\widetilde{\alpha})$. Mostrar que $q_{k-1}(\varphi) < q_k(\varphi)$, $k = \overline{1, n}$.

5.38*. Mostrar que si $f(\widetilde{x}^n) \notin M$ $(n \geqslant 4)$, entonces identificando las variables de ella se puede obtener una función no monótona dependiente de no más que de tres variables.

5.39. Determinar si de la función $\bar{x}\bar{y}z \vee t\ (xy \to z)$ se puede obtener $\bar{x}$:

1) identificando las variables;
2) identificando las variables y sustituyendo ciertas variables por la constante 0;
3) identificando las variables y sustituyendo las constantes.

5.40*. Mostrar que si $f(\widetilde{x}^n) \notin M \cup S$ $(n \geqslant 3)$, entonces, identificando las variables, de ella se puede obtener una función no monótona, no autodual y que dependa sustancialmente de dos variables.

5.41. Mostrar que si $f \in M$, entonces $f^* \in M$.

5.42. Mostrar que cualquier función monótona se contiene en no menos de dos clases de T_0, T_1, L.

5.43. Mostrar que M no se contiene en ninguna de las clases T_0, T_1, S, L.

5.44. ¿Se puede obtener la función xy de la función $xy \vee yz \vee zx$ mediante la operación de superposición?

5.45. ¿Se puede obtener 0 por medio de las funciones xy, $x \vee y$, 1?

5.46. Mostrar que el conjunto $\{0, 1, xy, x \vee y\}$ forma una base en M.

5.47. Seleccionar del conjunto $\{0, 1, xy, x \vee y, xy \vee z, xy \vee \vee yz \vee zx\}$ todos los subconjuntos que son bases en M.

5.48*. Mostrar que cualquier base en M contiene no más de cuatro y no menos de tres funciones.

5.49. Mostrar que cualquier base en M que esté compuesta de tres funciones contiene una función que depende sustancialmente de tres o más variables.

5.50. Poner ejemplos de bases en las clases siguientes:

1) $T_0 \cap M$; 2) $T_1 \cap M$; 3) $L \cap M$.

5.51. Sea $f(\widetilde{x}^n) \in M$ $(n \geqslant 4)$. Demostrar la justedad de la representación

$$f(\widetilde{x}^n) = m\,(f(x_1, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n),$$

$f(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_n)$, $\qquad f(x_3, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$,
donde $m(x, y, z) = xy \vee yz \vee zx$.

5.52. Mostrar que:

1) $xy \vee yz \vee zx$ forma una base en $M \cap S$;

2) cualquier función de $M \cap S$ que depende sustancialmente de más que de una variable, forma una base en $M \cap S$.

5.53*. Que sea $\mathscr{D}$ un conjunto formado por todas las disyunciones elementales monótonas y $\mathscr{K}$, el conjunto de todas las conjunciones elementales monótonas. Mostrar que los conjuntos $\mathscr{D} \cup \{0, 1\}$, $\mathscr{K} \cup \{0, 1\}$, $M \cap T_0$, $M \cap T_1$ y solamente ellos son precompletos en M.

5.54*. Que sea $f(\widetilde{y}^{2^n}) = \mathop{\&}\limits_{k=0}^{n-1} \mathop{\&}\limits_{i=0}^{2^n-2^k-1} (y_i \to y_{i+2^k})$. Demostrar que $|N_f| = |M^n|$.

5.55. Supongamos que f es monótona y depende sustancialmente de n variables. Demostrar que o bien su f.n.d. abreviada tiene un sumando de rango mayor que $\sqrt{n} - 1$, o bien su f.n.c. abreviada tiene un factor de rango mayor que $\sqrt{n} - 1$.

§ 6. PLENITUD Y CLASES CERRADAS

En P_2 es justo el siguiente *criterio de plenitud.*

Teorema (Post). *El sistema $\mathscr{P}$ es completo en P_2 si, y sólo si, él no se contiene por completo en ninguna de las clases T_0, T_1, L, S y M.*

La función $f(\widetilde{x}^n)$ se llama *shefferiana* (o *función de Sheffer*) si ella forma una base en P_2.

Supongamos que la función $f(\widetilde{x}^n)$ depende sustancialmente de todas sus variables. Por $\mathfrak{N}(f(\widetilde{x}^n))$ designan el conjunto de todas las funciones tales que se obtienen de la función $f(\widetilde{x}^n)$ mediante la identificación de las variables, teniendo en cuenta que la propia función f no pertenece al conjunto $\mathfrak{N}(f)$. Si $n < 2$ entonces, por definición $\mathfrak{N}(f(\widetilde{x}^n)) = \varnothing$. El conjunto $\mathfrak{N}(f(\widetilde{x}^n))$ se llama *sistema hereditario de la función* $f(\widetilde{x}^n)$. La función f se llama *irreducible* si $[\mathfrak{N}(f)] \neq [f]$. La base $\mathfrak{B}$ de una clase cerrada K se llama *simple* después de sustituir una clase arbitratria f de $\mathfrak{B}$ por su sistema hereditario se obtiene un sistema no completo en K. La función f, que no pertenece a la clase cerrada K, se llama *simple con relación a* K si su sistema hereditario $\mathfrak{N}(f)$ se contiene en K.

6.1. Mostrar que en P_2 no existen clases precompletas diferentes de las clases T_0, T_1, L, S, M.

6.2. Aclarar mediante el criterio de la plenitud si el sistema $\mathfrak{P}$ es completo.

1) $\mathfrak{P} = \{x \rightarrow y,\ x \rightarrow \overline{y} \cdot z\}$;
2) $\mathfrak{P} = \{x \cdot \overline{y},\ \overline{x} \sim yz\}$;
3) $\mathfrak{P} = \{0,\ 1,\ x(y \sim z) \vee \overline{x}(y \oplus z)\}$;
4) $\mathfrak{P} = \{(01101001),\ (10001101),\ (00011100)\}$;
5) $\mathfrak{P} = \{(0010),\ (1010110111110011)\}$;
6) $\mathfrak{P} = (S \setminus M) \cup (L \setminus (T_0 \cup T_1))$;
7) $\mathfrak{P} = (S \cap M) \cup (L \setminus M) \cup (T_0 \setminus S)$;
8) $\mathfrak{P} = (M \setminus (T_0 \cap T_1)) \cup (L \setminus S)$.

6.3. Demostrar que si la función f depende sustancialmente de no menos que de dos variables y pertenece a la clase $S \cap M$, entonces el sistema $\{0, \overline{f}\}$ será completo en P_2.

6..4 ¿Es completo el sistema $\mathfrak{P} = \{f_1(\widetilde{x}^n),\ f_2(\widetilde{x}^n)\}$ si:

1) $f_1 \in S \setminus M$, $\quad f_2 \notin L \cup S$, $\quad \overline{f}_1 \rightarrow f_2 \equiv 1$;
2) $f_1 \notin T_0 \cup L$, $\quad f_2 \notin S$, $\quad f_1 \rightarrow \overline{f}_2 \equiv 1$;
3) $f_1 \notin T_0 \cap T_1$. $\quad f_2 \in M \setminus T_1$, $\quad f_1 \rightarrow f_2 \equiv 1$?

6.5. ¿Es el sistema $\mathfrak{P} = \{f_1(\widetilde{x}^n),\ f_2(\widetilde{x}^n),\ f_3(\widetilde{x}^n)\}$ completo si se sabe que $f_1 \notin L \cup (T_0 \cap T_1)$, $f_2 \in M \setminus L$, $f_1 \rightarrow f_2 \equiv 1$ y $f_1 \vee \vee f_3 \equiv 1$?

6.6. Seleccionar todas las bases posibles del sistema $\mathfrak{P}$ completo en P_2.

1) $\mathfrak{P} = \{(x \vee y(\overline{x} \vee \overline{y}),\ xy \oplus z,\ (x \oplus y \sim z,\ m(x, y, z)\}$;
2) $\mathfrak{P} = \{1,\ \overline{x},\ xy(y \sim z),\ x \oplus y \oplus m(x, y, z)\}$;
3) $\mathfrak{P} = \{0,\ x \oplus y,\ (x \rightarrow y) \downarrow (y \sim z),\ (x | (xy)) \rightarrow \overline{z}\}$;
4) $\mathfrak{P} = \{x \vee (x \oplus y) \vee z,\ (x \sim y) \sim z,\ xy \oplus zu,\ m(x, \overline{y}, \overline{z})\}$.

6.7. Poner respectivamente tres ejemplos de bases en P_2 que contengan una, dos, tres y cuatro funciones.

6.8. Enumerar todas las diferentes bases en P_2 que contienen solamente funciones dependientes sustancialmente de las dos variables x, y (las bases se consideran diferentes si una no se reduce a otra mediante la operación de un cambio de nombre de las variables).

6.9. Aclarar si se puede ampliar el conjunto $\mathfrak{A}$ hasta una base en P_2.

1) $\mathfrak{A}=\{x\oplus y,\ m(x, y, z)\}$; 3) $\mathfrak{A}=M\setminus(T_0\cup T_1)$;
2) $\mathfrak{A}=\{x\sim y,\ x\vee yz\}$; 4) $\mathfrak{A}=L\cap M$.

6.10*. ¿Existe una base en P_2 formada por cuatro funciones f_1, f_2, f_3, f_4 tales que $f_1\notin T_0$, $f_2\notin T_1$, $f_3\notin L$ y $f_4\notin S$?

6.11. Empleando operaciones teórico-conjuntivas expresar la clausura del conjunto $\mathfrak{A}$ mediante las clases cerradas conocidas T_0, T_1, L, S, M y P_2.

1) $\mathfrak{A}=P_2\setminus(T_0\cup T_1\cup L\cup S\cup M)$;
2) $\mathfrak{A}=M\setminus(T_0\cup L)$; 6) $\mathfrak{A}=S\setminus(T_0\setminus T_1)$;
3) $\mathfrak{A}=M\setminus(T_0\cap T_1)$; 7) $\mathfrak{A}=L\setminus(T_0\cup T_1)$;
4) $\mathfrak{A}=M\setminus L$; 8) $\mathfrak{A}=T_0\setminus T_1$;
5) $\mathfrak{A}=T_0\cap(L\setminus S)$; 9) $\mathfrak{A}=(T_0\cap T_1)\setminus M$.

6.12. Aclarar cuál de las relaciones $\supset$, $\subset$, $\supseteq$, $\subseteq$, $=$, $\not\supseteq\!\!\!\!\not\subseteq$ tiene lugar para las clases K_1 y K_2 (la relación $\not\supseteq\!\!\!\!\not\subseteq$ significa que no se cumple ninguna de las demás cinco relaciones restantes).

1) $K_1=[x\vee(x\oplus y)\vee z]$, $K_2=[x\vee y,\ x\oplus y]$;
2) $K_1=[x\sim y,\ x\vee yz]$, $K_2=[x\oplus yz]$;
3) $K_1=[xy,\ x\oplus y]$, $K_2=[x\to y,\ x\sim y]$;
4) $K_1=[1,\ x\vee y]$, $K_2=[x\oplus y,\ x\vee \overline{yz}]$;
5) $K_1=[x\oplus y,\ x\sim yz]$, $K_2=[m(x, y, z),\ x\oplus y\oplus z\oplus 1,\ xy\oplus z]$;
6) $K_1=[x\to y]$, $K_2=[x\oplus y,\ m(x, y, z)]$.

6.13. 1) Demostrar que en $P_2(X^2)$ existen exactamente dos funciones de Sheffer.

2) Contar el número de funciones de Sheffer en $P_2(X^3)$.

6.14. 1) Demostrar que si $f\notin T_0\cup T_1\cup S$, entonces f es una función de Sheffer.

2*) Contar el número de funciones de Sheffer en $P_2(X^n)$.

6.15. Demostrar que de una función de Sheffer, que depende sustancialmente de no menos que de tres variables, mediante la identificación de las variables se puede obtener una función de Sheffer dependiente sustancialmente de dos variables.

6.16. ¿Con cuáles n $(n\geqslant 2)$ la función f es shefferiana?

1) $f=1\oplus\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_iy_j$;
2) $f=1\oplus x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus\ldots\oplus x_{n-1}x_n\oplus x_nx_1$;
3) $f=(x_1\to x_2)\oplus(x_2\to x_3)\oplus\ldots\oplus(x_{n-1}\to x_n)\oplus(x_n\to x_1)$;
4) $f=(x_1|x_2)\oplus(x_2|x_3)\oplus\ldots\oplus(x_{n-1}|x_n)\oplus(x_n|x_1)$;

5) $f = 1 \oplus (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3) \ldots (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$;

6) $f = \bigvee\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots i_{[n/2]} \leqslant n} \bar{x}_{i_1} \bar{x}_{i_2} \ldots \bar{x}_{[n/2]}$.

6.17. La función f no pertenece al conjunto $T_1 \cup M$ y toma exactamente un solo valor igual a cero. Demostrar que ella o bien es una función de Sheffer, o bien depende sustancialmente de una sola variable.

6.18. Poner el ejemplo de una función de Sheffer que dependa sustancialmente del número menor posible de variables y que toma el valor unidad en la mitad exacta de todas las colecciones de los valores de las variables.

6.19. Poner el ejemplo de una función $f(\tilde{x}^n)$ tal que para cualquier k $(1 \leqslant k \leqslant n-2)$ y cualquier subconjunto $i_1, i_2, \ldots, i_k$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, la función

$$\frac{d}{dx_{i_1}}\left(\frac{d}{dx_{i_2}}\left(\ldots\left(\frac{d}{dx_{i_k}} f(\tilde{x}^n)\right)\ldots\right)\right)$$

es shefferiana.

6.20. Que sea la función f monótona y tenga exactamente dos unidades inferiores. Demostrar que f es una función de Sheffer.

6.21. Demostrar que cualquier función autodual no perteneciente al conjunto $T_0 \cup T_1 \cup L \cup M$ forma una base en la clase S.

6.22. 1) Demostrar que cualquier función de la clase L pertenece aunque sea a una de las clases T_0, T_1, S y M.

2) Poner ejemplos de funciones lineales contenidas exactamente en una de las clases T_0, T_1, S.

6.23*. Poner el ejemplo de una función de la clase T_0 que no forme base en T_0 y que no pertenezca al conjunto $T_1 \cup L \cup S \cup M$.

6.24. Poner el ejemplo de una función no lineal $f(\tilde{x}^n)$ que dependa sustancialmente del menor número posible de variables y que satisfaga la condición siguiente: para cualquier número i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ cada una de las funciones $f_0^i(\tilde{x}^n)$ y $f_1^i(\tilde{x}^n)$ toma el valor unidad exactamente en 2^{n-2} colecciones de valores de las variables.

6.25*. Demostrar que de funciones no lineales sustancialmente dependientes de $n \geqslant 4$ variables se puede obtener, mediante la identificación de las variables, una función no lineal dependiente sustancialmente de $n-1$ variables.

6.26*. Demostrar que si la función f no pertenece al conjunto $L \cup S$ y depende sustancialmente de $n \geqslant 4$ variables, entonces identificando en ella las variables se puede obtener una función no lineal y no autodual que dependa sustancialmente de $n-1$ variables. ¿Es justa esta afirmación para $n = 3$?

6.27*. Demostrar que de una función de Sheffer $f(\tilde{x}^n)$ sustancialmente dependiente de $n \geqslant 3$ variables se puede obtener mediante la identificación de las variables una función shefferiana dependiente sustancialmente de $n-1$ variables.

6.28. Determinar si son justas las sucesiones siguientes:

1) $f \notin (T_0 \cup T_1) \setminus S \Rightarrow f \in L \cup M$;
2) $f \notin T_0 \cup T_1 \cup M \Rightarrow f$ es una función de Sheffer;
3) $f \notin T_0 \cup S \cup M \Rightarrow f \in (L \setminus T_1) \cap (S \setminus M)$;
4) $f \notin L \cup S \cup M \Rightarrow f$ es una función de Sheffer.

6.29. Supongamos que el subconjunto $\mathfrak{A}$ de $P_2(X^n)$ contiene más de 2^{2^n-1} funciones. Demostrar que siempre que $n \geqslant 2$, $\mathfrak{A}$ es completo en el sistema P_2.

6.30. Demostrar que cualquier función de una base simple en P_2 es simple con relación a cierta clase precompleta en P_2.

6.31. Hallar todas las funciones no congruentes de par en par y simples con relación a la clase K.

1) $K = T_0$; 3) $K = [0, 1, x]$;
2*) $K = L \cap S$; 4) $K = [0, 1, x, \bar{x}]$.

6.32. Demostrar que las funciones, simples con relación a la clase K y no congruentes de par en par entre sí, se llevan a efecto con las funciones del conjunto $\mathfrak{A}$.

1) $K = T_0 \cap T_1$, $\mathfrak{A} = \{0, 1, \bar{x}\}$;
2) $K = T_0 \cap L \cap S$, $\mathfrak{A} = \{0, 1, \bar{x}, xy, x \vee y, m(x, y, z), m(x, y, \bar{z})\}$.

6.33. Demostrar que en P_2 existen:

1) sólo dos bases simples compuestas de una función $\{x \mid y\}$ y $\{x \downarrow y\}$;

2*) sólo tres bases simples compuestas de cuatro funciones $\{0, 1, x \oplus y \oplus z, f\}$, donde $f \in \{xy, x \vee y, m(x, y, z)\}$.

Capítulo III

LOGICAS k-VALENTES

§ 1. REPRESENTACION DE LAS FUNCIONES DE LAS LOGICAS k-VALENTES CON FORMULAS DE TIPO ESPECIAL

En todo este capítulo se supone que el número k es natural y mayor de dos. Por E_k se designa el conjunto $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. La función $f(\widetilde{x}^n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama *función de la lógica k-valente* si en cualquier colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ los valores de las variables son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde $\alpha_i \in E_k$; el valor de $f(\widetilde{\alpha})$ también pertenece al conjunto E_k. *La reunión de todas las funciones de la lógica k-valente* se designa por P_k. Los conceptos de variables ficticias y sustanciales, de funciones iguales y congruentes, de fórmulas sobre conjuntos de funciones (y enlaces), de operaciones de superposición y clausura, de clase cerrada, de base y otros, se definen en las lógicas k-valentes lo mismo que los conceptos respectivos del álgebra lógica. Por eso en lo sucesivo solamente se citan las definiciones de aquellos conceptos que se diferencian esencialmente de los conceptos análogos en P_2.

Se consideran *elementales* las siguientes funciones de la lógica k-valente:

Las constantes $0, 1, \ldots, k-1$; estas funciones se van a examinar como funciones dependientes de un número finito y arbitrario (incluyendo también el cero) de variables;

la negación de Post: $x+1$ (mód k), designación: $\bar{x}$;

la negación de Lukasevich: $(k-1)-x$, designación: $\sim x$ o Nx;

la función característica del número i: $j_i(x)$, $i = 0,$

$$1, \ldots, k-1;\ j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = i, \\ 0, & \text{si } x \neq i; \end{cases}$$

la función característica (de segundo género) del número i:

$$J_i(x),\ i = 0, 1, \ldots, k-1;\quad J_i(x) = \begin{cases} k-1, & \text{si } x = i, \\ 0, & \text{si } x \neq i; \end{cases}$$

el mínimo de x e y: mín (x, y);

el máximo de x e y: máx (x, y);

la suma por módulo k: $x+y$ (mód k), que se lee: «*x más y por módulo k*»[1]);

el producto por módulo k: $x \cdot y$ (mód k), que se lee: «*producto de x por y de módulo k*»[1]);

la diferencia truncada:

$$x \dot{-} x = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leqslant x < y \leqslant k-1, \\ x-y & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant k-1; \end{cases}$$

la implicación:

$$x \supset y = \begin{cases} (k-1), & \text{si } 0 \leqslant x < y \leqslant k-1, \\ (k-1)-x+y, & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant k-1; \end{cases}$$

función de Webb: máx $(x, y)+1$ (mód k), se designa: $v_k'(x, y)$;

la diferencia por módulo k:

$$x-y = \begin{cases} x-y, & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant k-1, \\ k-(y-x), & \text{si } 0 \leqslant x < y \leqslant k-1. \end{cases}$$

Las funciones (operaciones) mín, más, $+$ $y \cdot$ tienen las propiedades de conmutatividad y asociatividad. Además son *justas las relaciones*:

$$(x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z);$$

—la distributividad de la multiplicación con respecto a la suma;

$$\text{máx}\,(\text{mín}\,(x, y), z) = \text{mín}\,(\text{máx}\,(x \cdot z), \text{máx}\,(y \cdot z));$$

— la distributividad de la operación máx con relación a la operación mín;

$$\text{mín}\,(\text{máx}\,(x, y), z) = \text{máx}\,(\text{mín}\,(x, z), \text{mín}\,(y, z))$$

— la distributividad de la operación mín con relación a la operación máx;

$$\text{máx}\,(x, x) = x, \quad \text{mín}\,(x, x) = x$$

— la idempotencia de las operaciones máx y mín.

Se introducen por definición las igualdades siguientes:

$$\text{máx}\,(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \text{máx}\,(\text{máx}\,(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n), \quad n \geqslant 3;$$
$$\text{mín}\,(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \text{mín}\,(\text{mín}\,(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n), \quad n \geqslant 3;$$

$$-x = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ k-x, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Tomando en cuenta la asociatividad del producto por módulo k, la multiplicación $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (l factores, $l \geqslant 1$) corrientemente se escribe en forma de potencia x^l.

Cualquier función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de P_k se puede representar en la así llamada *primera forma* que es una análoga de la f.n.d.

[1]) En todo este capítulo, si no se indica lo contrario, los signos $+$ y $\cdot$ se interpretan como signos de *suma* y *multiplicación* por módulo k.

perfecta para las funciones del álgebra lógica:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \max_{\widetilde{\sigma}} \{\min (f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), J_{\sigma_1}(x_1), J_{\sigma_2}(x_2), \ldots, J_{\sigma n}(x_n))\},$$

donde el máximo se toma por todas las colecciones $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ $\ldots, \sigma_n)$ de los valores de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Para las funciones de la lógica k-valente es justa una representación más que se llama la *segunda forma*:

$$f(\widetilde{x}^n) = \sum_{\widetilde{\sigma}} f(\widetilde{\sigma}) \cdot j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma n}(x_n),$$

en donde la suma se hace por todas las colecciones $\widetilde{\sigma}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ de los valores de las variables $x_1, \ldots, x_n$ (la suma y la multiplicación se hacen por el módulo k).

Se llama *polinomio* $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *por módulo* k de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a la expresión del tipo

$$a_0 + a_1 X_1 + \ldots + a_m X_m,$$

donde los coeficientes a_i pertenecen al conjunto E_k y X_j es o bien cierta variable de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, o bien el producto de las variables de este conjunto.

Se dice que cierta función de P_k es *representable* (o *se realiza*) *mediante un polinomio* por módulo k, si existe un polinomio por módulo k igual a esta función.

En P_k tiene lugar el siguiente

Teorema. *Cualquier función de P_k es representable con un polinomio por* módulo k *si, y sólo si,* k *es un número primo.*

1.1. Demostrar las relaciones siguientes:

1) $-(\bar{x}) = \sim x$;
2) $x \dot{-} (x \dot{-} y) = \min(x, y)$;
3) $(x \supset y) \supset y = \max(x, y)$;
4) $(x \supset y) + \bar{x} = \min(x, y)$;
5) $x \dot{-} y = x - \min(x, y)$;
6) $(\sim x) \dot{-} (\sim y) = y \dot{-} x$;
7) $(\sim x) \dot{-} (y \dot{-} x) = \sim \max(x, y)$.

1.2. Demostrar que las igualdades que van a continuación en las cuales la suma y la diferencia son las corrientes (o sea no por el módulo k) y al calcular el mínimo los valores de los argumentos no se reducen por el módulo k.

1) $x \supset y = \min(k - 1, (\sim x) + y)$;
2) $x \dot{-} y = \sim \min(0, y - x)$;
3) $(x \supset y) \dot{-} (y \supset x) = -\min(0, x - y)$.

1.3. Representar la función $J_{k-2}(x)$ en forma de superposición de las funciones $k - 1$, $x + 2$ y $x \dot{-} y$.

1.4*. ¿Con qué valores de $\alpha \in E_k$ cualquier función $J_i(x)$, $0 \leqslant i \leqslant k - 2$, es presentable en forma de una superposición sobre el conjunto $\{x + \alpha, J_{k-1}(x)\}$?

1.5*. Construir mediante la operación de superposición, utilizando sólo funciones del conjunto $\{0, 1, \ldots, k-1, x \dot{-} 2y\}$, alguna de las funciones $j_i(x)$.

1.6. Sean $h_1(x) = \sim x$, $h_{i+1}(x) = x \supset h_i(x)$, $i \geqslant 1$. Demostrar que $J_{k-1}(x) = \sim h_{k-1}(x)$.

1.7. ¿Cuántas diferentes funciones de P_k dependientes sólo de la variable x se pueden representar en la forma x^l $(l \geqslant 1)$, en donde la potencia se toma por el módulo k?

Véanse los casos en los que $k = 3, 4, \ldots, 10$.

1.8. ¿Con qué valores de k $(k \geqslant 3)$ las funciones x^2, x^3 y x^4 son diferentes de par en par?

1.9*. Supongamos que por $P_k^{(1)}$ se designa el conjunto de todas las funciones de la lógica k-valente que dependen de una variable. Demostrar que $P_k^{(1)} \subseteq [1, J_{k-1}(x), x + y]$ en donde los corchetes sirven para designar la clausura de los respectivos conjuntos de funciones.

1.10. Demostrar que las relaciones siguientes son válidas:

1) $\sim(\overline{x}+y) = (\sim x) + (\sim y)$;
2) $\overline{\sim(\overline{x}\cdot\overline{y})} = (\sim x)\cdot\overline{y}$;
3) $x \dot{-} y = \text{máx}(x, y) - y$;
4) $\overline{x} \dot{-} \overline{y} = (x \dot{-} y) + \overline{x}\cdot j_{k-1}(y) + \overline{y}\cdot j_{k-1}(x)$;
5) $\overline{x} = \text{máx}((x+2) \dot{-} 1, J_{k-2}(x))$;
6) $\overline{x} = \text{mín}(\sim J_{k-1}(x), (k-2) \supset x)$;
7) $\text{máx}(\overline{x}, \overline{y}) = v_k(x, y) + \overline{x}\cdot j_{k-1}(y) + \overline{y}\cdot j_{k-1}(x)$;
8) $\text{máx}(\overline{x}, y) = \overline{\text{máx}(x, y)} + j_0(y \dot{-} x) + j_{k-1}(x)\cdot y$;
9) $\text{mín}(\overline{x}, y) = \overline{\text{mín}(x, y)} + J_0(y \dot{-} x) - j_{k-1}(x)\cdot y$.

1.11. Aclarar si tiene lugar un «análogo» de la forma normal conjuntiva perfecta para las funciones de P_k, o sea comprobar si para cualquier función $f(\widetilde{x^n}) \in P_k$ se cumple la igualdad

$$f(\widetilde{x^n}) = \min_{\widetilde{\sigma}}\{\text{máx}(f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \sim J_{\sigma_1}(x_1), \sim J_{\sigma_2}(x_2), \ldots, \sim J_{\sigma_n}(x_n))\}.$$

1.12. Para la k dada representar la función f en la primera y en la segunda forma.

1) $f = j_1(x)$, $k = 3, 4$;
2) $f = \sim x$, $k = 5$;
3) $f = J_0(x^2 \dot{-} x)$, $k = 6, 7$;
4) $f = \text{mín}(x, y)$, $k = 3$;
5) $f = x^2 \dot{-} y$, $k = 4$;
6) $f = x^2\cdot y^2$, $k = 4$.

1.13. Descomponer la función f de P_k en un polinomio por módulo k.

1) $f = J_{k-2}(x)$, k es un número simple arbitrario;
2) $f = j_1(x^2 - x)$, k es un número simple arbitrario;
3) $f = x \dot{-} x^2$, $k = 5$;
4) $f = 3x \dot{-} (x \dot{-} 2x)$, $k = 7$;
5) $f = \text{mín}(x, y)$, $k = 3$;
6) $f = x \supset y$, $k = 5$;
7) $f = \text{máx}(x, j_2(y))$, $k = 7$.

1.14. Demostrar que siempre que k sea compuesto las funciones de P_k enumeradas a continuación no son representables con un polinomio por módulo k.

1) $j_i(x)$, $0 \leqslant i \leqslant k - 1$;
2) $x \dot{-} y$;
3) $x \supset y$;
4) $\text{máx}(x, y)$;
5) $\text{mín}(x, y)$;
6) $(x \dot{-} y) \dot{-} z$.

7) cualquier función de Sheffer (o sea una función que forma en P_k un sistema completo).

1.15*. Demostrar, seleccionando para la función $f(x, y)$ de modo correspondiente tales polinomios $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$, que aunque sea una de las funciones $Q_0(f(Q_1(x), Q_2(y)))$ o $Q_0(f(Q_1(x), Q_2(x)))$ sin ofrecer dudas no sea descomponible en un polinomio por módulo k; demostrar que con $k = 4, 6$ las funciones que van a continuación no son presentables con polinomios por módulo k.

1) $f = (2 \dot{-} x^3) \cdot \overline{y}$;
2) $f = ((\sim \overline{x}) + y) \dot{-} (\overline{x} \dot{-} 1)$;
3) $f = \text{mín}(\sim x, y) \dot{-} (1 \dot{-} x)$;
4) $f = \text{máx}(x, y) \dot{-} (x \dot{-} 2)$.

1.16*. Comprobar si la función f de P_k es representable con un polinomio por módulo k.

1) $f = (x \dot{-} y) \dot{-} y$, $k = 4$;
2) $f = 3j_0(x)$, $k = 6$;
3) $f = (\text{máx}(x, y) - \text{mín}(x, y))^2$, $k = 4$.

1.17. Las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ de P_3 satisfacen las condiciones

$$f_1(x) \not\equiv \text{const}, \quad f_1(E_3) \neq E_3$$

y

$$f_2(E_3) = E_3.$$

Demostrar que la función $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$, donde la suma se hace por el módulo 3, omite aunque sea uno de los valores de E_3 o sea que $g(E_3) \neq E_3$.

1.18. La función $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ de P_3, donde $a_i \in E_3$ y la suma y la multiplicación se hacen por el módulo 3, no toma aunque sea un valor de E_3 (o sea que $f(E_3) \neq E_3$) ¿Qué valores pueden tomar los coeficientes a_0, a_1, a_2?

La función $f(\tilde{x}^n)$ de P_k se llama *lineal por la variable* x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) si es válida la representación

$$f(\tilde{x}^n) = x_i \cdot \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

donde φ y ψ son ciertas funciones de P_k y la suma y la multiplicación se hacen por el módulo k.

La función $f(\tilde{x}^n)$ de P_k se llama *fuertemente dependiente de la variable* x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) si en cualesquiera dos colecciones de valores de las variables que se diferencien sólo en la i-ésima componente, la función $f(\tilde{x}^n)$ adquiere diferentes valores.

1.19*. 1) La función $f(\tilde{x}^n)$ pertenece a P_3 y depende fuertemente de cada variable. Demostrar que $f(\tilde{x}^n)$ es lineal para toda variable suya x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$).

2) Con los mismos supuestos acerca de la función $f(\tilde{x}^n)$ demostrar que $f(\tilde{x}^n)$ es una función lineal, o sea que se la puede representar en la forma $a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, donde $a_i \in E_3$ y la suma y la multiplicación se hacen por el módulo 3.

1.20*. 1) La función $f(\tilde{x}^n)$ pertenece a P_k (donde k es un número primo), es diferente de una constante, y lineal respecto a cualquier variable suya. Demostrar que existe tal colección de valores de las variables en la cual la función $f(\tilde{x}^n)$ se hace cero.

2) ¿Es válida una afirmación análoga con un k compuesto?

1.21. Supongamos que la función $f(\tilde{x}^n) \in P_k$ (donde k es un número primo) es lineal respecto a la variable x_1 y depende fuertemente de esta variable. Demostrar que la función $f(\tilde{x}^n)$ es representable en la forma $a \cdot x_1 + \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, donde $a \in E_k$, $a \neq 0$ y la suma y la multiplicación se hacen por el módulo k.

1.22. 1) Demostrar que la función $2j_i(x)$ de P_4 con cualquier $i = 0, 1, 2, 3$ es representable con un polinomio por módulo 4.

2) Demostrar que si una función de P_4 dependiente de una variable toma solamente los valores del conjunto $\{0, 2\}$ o bien sólo del conjunto $\{1, 3\}$, entonces es representable con un polinomio por módulo 4.

3*) Poner el ejemplo de una función de P_4 que dependa sustancialmente de dos variables, que tome sólo los valores 0 y 2 y que no sea descomponible en un polinomio por módulo 4.

1.23*. Demostrar que si la función $f(x) \in P_4$ no es representable con un polinomio por módulo 4, entonces con cualquier $m \geqslant 2$, la función $(f(x))^m$, igual al m-ésimo grado de la función $f(x)$, tampoco es representable con un polinomio por módulo 4.

1.24*. Hallar el número de funciones de P_4 que dependen solamente de la variable x y se realizan con polinomios por módulo 4.

1.25. 1) Sea la función $f(x) \in P_6$ representable con un polinomio por módulo 6. Demostrar que $f(x)$ se puede realizar con un polinomio por módulo 6 del tipo $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

2*) Demostrar que en P_6 el número de funciones dependientes de la variable x y presentables con polinomios por módulo 6, es igual a 108.

1.26*. Enumerar todas las funciones $f(x)$ de P_6 que tienen la forma $a + b \cdot j_0(x)$ (aquí a y b pertenecen a E_6), que no se realizan con polinomios módulo 6 y tales que $(f(x))^2$ son presentables con polinomios por módulo 6.

1.27. 1) Supongamos que la función $\varphi(x, y) \in P_k$ satisface las condiciones:

1) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
b) $\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z)$;

c) cualesquiera que sean a y b del conjunto E_k, existe una única x, tal (dependiente de a y b) que $\varphi(a, x) = b$.

Por 0_a designaremos tal elemento de E_k que $\varphi(a, 0_a) = a$. Demostrar que $0_a = 0_b$ con cualesquiera a y b de E_k (o sea que $0_0 = 0_1 = \ldots = 0_{k-1}$).

Observacion. Llamaremos a este «elemento común» (para todas las $a \in E_k$) *el cero de la función* φ y le designaremos por 0_φ.

2) Demostrar que si $k = 3$, entonces en calidad de la función $\varphi(x, y)$ se puede tomar sólo una de las funciones siguientes del conjunto P_3: $x + y$, $x + y + 1$, $x + y + 2$.

3*) Sea la función $\varphi(x, y) \in P_k$ que satisfaga las condiciones enumeradas en el punto 1). La función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_k$ se llama *casi lineal con relación a* φ, si para cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ que pertenezcan a E_k se cumple la igualdad

$$\varphi(f(\varphi(a_1, b_1), \varphi(a_2, b_2), \ldots, \varphi(a_n, b_n)), f(0_\varphi, 0_\varphi, \ldots, 0_\varphi)) = \\ = \varphi(f(a_1, a_2, \ldots, a_n), f(b_1, b_2, \ldots, b_n)).$$

Demostrar que la función $f(\widetilde{x}^n) \in P_3$ es casi lineal con relación a $x + y + i$ (con un $i = 0, 1, 2$ fijado arbitrariamente) si, y sólo si, $f(\widetilde{x}^n)$ es una función lineal.

1.28. 1) Supongamos que la función $\varphi(x, y) \in P_k$ satisface las condiciones a)—c) del problema 1.27, 1). Demostrar que la función $\varphi(x, y)$ es casi lineal con relación a sí misma.

2) Demostrar que en P_4 existe una función no lineal $\varphi(x, y)$ que es casi lineal con relación a sí misma y es representable en la forma $x + y + axy$ (en donde $a \in E_4$ y la suma y la multiplicación se hacen por el módulo 4).

1.29. Sea $s(x)$ una función heterovalente[1]) de P_k dependiente de una variable. La función $g(x) \in P_k$ se llama inversa a la función $s(x)$ y se designa por $s^{-1}(x)$ si $g(s(x)) \equiv x$ (entonces es válida también la identidad $s(g(x)) \equiv x$). La función $f^{s(x)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = s^{-1}(f(s(x_1), s(x_2), \ldots, s(x_n)))$ se llama *dual a la función* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *con relación a* $s(x)$. Si la función $f(\widetilde{x}^n)$ es dual

[1]) Una función de una variable de P_k se llama heterovalente si toma todos los valores k.

a sí misma con relación a $s(x)$, entonces se llama *autodual con relación a* $s(x)$.

1) Construir una fórmula sobre el conjunto $\{1, k-1, xy, x+y, \text{mín}(x, y)\}$ que realice una función dual a f con relación a $s(x)$.

1) $f = v_k(x, y)$, $s(x) = \sim x$;
b) $f = \text{mín}(x, y) + j_0(x)\cdot j_1(y) + j_1(x)\cdot j_0(y)$, $\quad s(x) = x + j_0(x) + J_1(x)$;
c) $f = (x \dot{-} y) + z + x\cdot J_0(y) + y\cdot J_0(x)$, $\quad s(x) = \bar{x}$;
d) $f = x + (y \dot{-} z) + x\cdot y\cdot z - y\cdot j_0(z)$, $s(x) = -x$.

2) Demostrar que si la función $f(\tilde{x}^n) \in P_k$
a) toma l diferentes valores $(1 \leqslant l \leqslant k)$ o
b) depende sustancialmente de m variables $(0 \leqslant m \leqslant n)$, entonces la función $f^{s(x)}(\tilde{x}^n)$, dual a ella, tiene las mismas propiedades.

3) Sea $s(x) = \bar{x}$. Aclarar con qué valores de k y del parámetro a (del conjunto E_k) la función $f(x, y)$ es autodual con relación a $s(x)$.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2a\cdot x\cdot y + y$;
b) $f(x, y) = \text{máx}(x, y) + a\cdot(x \dot{-} y) + 2x - 2y$;
c) $f(x, y) = x + j_0(x + ay)$.

4) Aclarar cuál de las funciones citadas a continuación es autodual con relación a $s(x) = -x$,

a) $\bar{x}$;
b) $\sim x$;
c) $j_1(x) + J_{k-1}(x)$;
d) $x + y$;
e) $(x \dot{-} y) + y$;
f) $x^2\cdot y^2\cdot z$;
g) $x\cdot y\cdot z + y\cdot J_{[k/2]}(z) + z\cdot J_{[k/2]}(y)$.

5) Demostrar que si la función $f(\tilde{x})$ es autodual con relación a las funciones $s_1(x)$ y $s_2(x)$, entonces es también autodual con relación a las funciones $s_1(s_2(x))$ y $s_1^{-1}(x)$.

1.30. Una función heterovalente $s(x) \in P_k$ se llama *ciclo* (o *sustitución cíclica*) si $s^i(0) \neq s^j(0)$[1]) para cualesquiera i, j que satisfagan las condiciones $1 \leqslant i < j \leqslant k$ ($s^i(x)$, es la escritura abreviada de la expresión $\underbrace{s(s(\ldots s}_{i \text{ veces}}(x)\ldots)))$. Demostrar que si $s(x)$ es una sustitución cíclica de P_k, entonces en P_k el número de funciones autoduales con relación a $s(x)$ y dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es igual a $k^{k^{n-1}}$.

1.31. Que sea r el menor número positivo[2]) tal que $s^r(x) \equiv x$. Demostrar que si $s(x) \not\equiv x$ y r es un simple divisor del número k,

[1]) En esta desigualdad en lugar de 0 se puede tomar cualquier otro elemento del conjunto E_k.
[2]) Corrientemente a este número se lo llama orden de la función (de la sustición).

entonces en P_k el número de funciones autoduales con relación a $s(x)$ y dependientes de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es igual a $k^{k^{n/r}}$.

1.32. Demostrar que si la función $f(\widetilde{x^n}) \in P_k$ es casi lineal con relación a $\varphi(x, y) \in P_k$ (véase el problema 1.27, 3)), entonces la función $f^{s(x)}(\widetilde{x^n})$, dual a $f(\widetilde{x^n})$ con relación a $s(x)$, es casi lineal con relación a $\varphi^{s(x)}(x, y)$.

§ 2. CLASES CERRADAS DE LA LOGICA k-VALENTE

La función $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, que transforma la n-ésima potencia cartesiana $E_k^n = \underbrace{E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ veces}}$ del conjunto E_k en un conjunto $\{0, 1\}$[1]) se llama *predicado de n lugares determinado en el conjunto* E_k.

Supongamos que $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)$ es una función de P_k $(m \geqslant 1)$ y $R(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ es un predicado de n lugares determinado en E_k. Se dice que *la función f conserva el predicado R* si, cualesquiera que sean los elementos

$$a_{11}, \ldots, a_{1j}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}, \ldots \\ \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mj}, \ldots, a_{mn}$$

del conjunto E_k, las igualdades
$R(a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}) = 1$ (para todos los $i = 1, \ldots, m$) llevan a la relación

$$R(f(a_{11}, \ldots, a_{i1}, \ldots, a_{m1}), \ldots, f(a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}), \ldots \\ \ldots, f(a_{1n}, \ldots, a_{in}, \ldots, a_{mn})) = 1.$$

Si la función f es constante (por ejemplo, $f \equiv a$), entonces según la definición *la función f conserva el predicado* $R(x_1, \ldots, x_n)$ si $R(a, \ldots, a) = 1$.

Por $H(R(x_1, \ldots, x_n))$ designaremos *el conjunto de todas las funciones de P_k que conservan el predicado* $R(x_1, \ldots, x_n)$ determinado en el conjunto E_k.

2.1. Demostrar que el conjunto $H(R(x_1, \ldots, x_n))$ con cualquier predicado R es una clase cerrada.

2.2. Sea $\mathscr{E}$ un subconjunto del conjunto E_k. Se dice que la función $f(x_1, \ldots, x_m)$ *conserva el conjunto* $\mathscr{E}$ si en cualquier colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ tal que $\alpha_i \in \mathscr{E}$ $(i = 1, \ldots, m)$ la función toma el valor de $f(\widetilde{\alpha})$ también perteneciente al conjunto $\mathscr{E}$. *El*

[1]) En lugar del conjunto $\{0, 1\}$ se consideran también los conjuntos $\{V, F\}$ o $\{t, f\}$, en los cuales V (respectivamente t) significa «verdadero» y F (respectivamente f) significa «falso».

conjunto de todas las funciones P_k que conservan el conjunto $\mathscr{E}$ se designa por $T(\mathscr{E})$ y se llama *clase de conservación del conjunto $\mathscr{E}$.*

1) Demostrar que $T(\mathscr{E}) = H(R(x))$ si el predicado $R(x)$ es igual a la unidad en el conjunto $\mathscr{E}$ y es igual a cero en el conjunto $E_k \setminus \mathscr{E}$.

2) Demostrar que $T(\mathscr{E}) \neq P_k$ si, y sólo si, $\mathscr{E}$ es diferente de un conjunto vacío y de todo el conjunto E_k.

3) ¿Cuántas clases cerradas diferentes existen en P_k que sean clases de conservación de los conjuntos?

4) Contar el número de funciones de P_k que se contienen en la clase $T(\mathscr{E})$ y dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 0)$.

5) Demostrar que siempre que $\mathscr{E} \neq \varnothing$ y $\mathscr{E} \neq E_k$, la clase $T(\mathscr{E})$ es precompleta en P_k.

2.3. Sea $D = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s\}$ la partición del conjunto E_k, o sea que $E_k = \mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2 \cup \ldots \cup \mathscr{E}_s$, $\mathscr{E}_i \neq \varnothing$ con $i = 1, 2, \ldots, s$ y $\mathscr{E}_i \cap \mathscr{E}_j = \varnothing$, siempre que $i \neq j$. Se dice que los elementos a y b de E_k *son equivalentes respecto a la partición D* (la designación es: $a \sim b \pmod D$) si a y b pertenecen a cierto subconjunto $\mathscr{E}_j$ de la partición D. Dos colecciones $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ y $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ se llaman *equivalentes respecto a la partición D* (la designación es: $\widetilde{\alpha} \sim \widetilde{\beta} \pmod D$) si $\alpha_i \sim \beta_i \pmod D$ con $i = 1, 2, \ldots, m$. Se dice que la función $f(\widetilde{x}^m)$ de P_k *conserva la partición D* si para cualesquiera colecciones $\widetilde{\alpha}^m$ y $\widetilde{\beta}^m$ de la equivalencia $\widetilde{\alpha}^m \sim \widetilde{\beta}^m \pmod D$ se deduce la equivalencia $f(\widetilde{\alpha}^m) \sim f(\widetilde{\beta}^m) \pmod D$. *El conjunto de todas las funciones de P_k que conservan la partición* $D = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s)$ se designa por $U(D)$ o $U(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s)$ y se llama *clase de conservación de la partición D.*

1*) Demostrar que $U(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s) = H(R(x, y))$ si el predicado $R(x, y)$ es igual a la unidad en tales y solamente en tales pares (a, b) que están formados de elementos equivalentes respecto a la partición $\{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s\}$.

2) Demostrar que $U(D) = P_k$ si, y sólo si, la partición $D = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s\}$ es *trivial* o sea que o bien D se induce *con la relación de igualdad* (en este caso $s = k$), o bien D se representa con una relación de dos lugares *universal* (o *completa*), lo que corresponde a $s = 1$.

3) Para $k = 3, 4, 5$ contar el número de diferentes clases cerradas en P_k, que sean clases de conservación de las particiones.

4*) Contar el número de funciones de P_k que se contienen en la clase $U(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s)$ y que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 0)$.

2.4. Sea $\mathscr{E}$ un subconjunto no vacío de E_k diferente de todo E_k y $D = \{\mathscr{E}, E_k \setminus \mathscr{E}\}$. Contar el número de funciones de P_k que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 0)$ y que se contienen en el conjunto

1) $T(\mathscr{E}) \setminus U(D)$; 2) $U(D) \setminus T(\mathscr{E})$; 3) $T(\mathscr{E}) \cup U(D)$.

2.5. Sea $R(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$, un predicado determinado en el conjunto E_k. Se le llama *predicado plenamente reflexivo* si en cualquier colección de valores de las variables que contiene aunque sea dos componentes iguales él se convierte en una unidad. El predicado $R(\widetilde{x}^n)$ se llama *plenamente simétrico* si con cualquier conmutación de las variables en $R(x_1, \ldots, x_n)$ se obtiene el predicado $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ que coincide con el predicado inicial $R(\widetilde{x}^n)$. Los predicados de un lugar se consideran (por definición) también plenamente reflexivos y plenamente simétricos. El predicado plenamente simétrico y plenamente reflexivo $R(x_1, \ldots, x_n)$ se llama *central* si existe un elemento $c \in E_k$ tal que $R(c, x_2, \ldots, x_n) = 1$ con cualesquiera valores de las variables $x_2, \ldots, x_n$ (el elemento c que satisface la condición indicada se llama *central* y todos los elementos tales del predicado R forman su *centro*).

1*) Demostrar que existen exactamente

$$\sum_{i=1}^{k-2} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} 2^{\binom{k-i}{2}} + (-1)^k (k-1)$$

diferentes predicados centrales de dos lugares, determinados en el conjunto E_k.

2) Comprobar que para cada $n \geqslant k$ existe sólo un predicado central de n lugares, determinado en el conjunto E_k.

3) Enumerar todos los predicados centrales determinados en el conjunto E_k cuyos centros contienen exactamente $k-1$ elementos.

4*) Demostrar que si $R(x_1, \ldots, x_n)$ es un predicado central determinado en el conjunto E_k, entonces $H(R(x_1, \ldots, x_n)) = P_k$ si, y sólo si, el centro del predicado R coincide con E_k.

2.6. Sean $\mathscr{E} \subseteq E_k$ y $s \in \{1, \ldots, k\}$. Por $T(\mathscr{E}, s)$ designaremos el subconjunto de P_k formado por *todas las constantes y todas las funciones* $f(x_1, \ldots, x_m)$, $m \geqslant 1$, *que satisfacen la condición*: para cualquier sistema $\{A_1, \ldots, A_m\}$ de subconjuntos del conjunto E_k, tales que cada uno de ellos contiene exactamente s elementos, se encontrará un conjunto $A_0 \subseteq E_k$ que también contiene s elementos y es tal que $f(\mathscr{E} \cup A_1, \ldots, \mathscr{E} \cup A_m) \subseteq \mathscr{E} \cup A_0$.

1) Demostrar que el conjunto $T(\mathscr{E}, s)$ es una clase cerrada en P_k.

2) Mostrar que $T(\mathscr{E}, s) = P_k$ si, y sólo si, o bien $\mathscr{E} \neq \varnothing$ y $s \geqslant k - |\mathscr{E}|$, o bien $\mathscr{E} = \varnothing$ y $s = 1$ o k.

3*) Demostrar que $T(\varnothing, 2) \subset T(\varnothing, 3) \subset \ldots \subset T(\varnothing), k-1)$ y $T(\varnothing, k-1)$ es una clase precompleta en P_k.

4) Mostrar que el número de diferentes clases cerradas en P_k que sean clases del tipo $T(\mathscr{E}, s)$, donde $1 \leqslant s \leqslant k$, es igual a $1 + 2^{k-1}(k-2)$.

5*) Demostrar que siempre que $\mathscr{E} \neq \varnothing$, es válida la igualdad $T(\mathscr{E}, s) = H(R(x_1, \ldots, x_{s+1}))$, donde R es un predicado central de $s+1$ lugares con el centro $\mathscr{E}$ que satisface la condición: $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1}) = 0$ solamente cuando los componenetes de la colección $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1})$ son diferentes y ninguno de ellos pertenece al centro.

6) Hallar el número de funciones de la lógica k-valente P_k dependientes de la variable x y pertenecientes al conjunto $T(\{0\}, 1)$.

2.7. Por S_k se designa *el conjunto de todas las funciones heterovalentes de P_k que dependen de una variable* (o sea que $g(x)$ pertenece a S_k si, y sólo si, $g(E_k) = E_k$). Designaremos por $P_k^{(1)}$ *el conjunto de todas las funciones P_k de la lógica k-valente dependientes de una variable*. Sea $CS_k = P_k^{(1)} \setminus S_k$.

1) Mostrar que los conjuntos S_k y CS_k son clases cerradas.

2) Hallar el número de funciones dependientes de la variable x y pertenecientes a la clase $S_k \cap U(\{0, k-2\}, \{1, \ldots, k-3\}, \{k-1\})$.

2.8. Supongamos que $s(x) \in S_k$. Por $Z(s(x))$ designaremos *el conjunto de todas aquellas funciones de P_k que son autoduales con respecto a $s(x)$* (véase la definición de función autodual en el párrafo 1 de este capítulo).

1) Demostrar que $Z(s(x))$ es una clase cerrada.

2) Mostrar que $Z(s(x)) = P_k$ si, y sólo si, $s(x) \equiv x$.

3) Demostrar que $Z(s(x)) \subseteq Z(s^i(x))$ con cualquier $i \geqslant 0$ ($s^0(x)$ por definición se supone igual a x).

2.9. Supongamos que $s(x) \in S_k$. Designemos por $\widetilde{Z}(s(x))$ *el conjunto de todas aquellas funciones $f(\widetilde{x}^n)$ de P_k $(n \geqslant 1)$ que satisfacen la condición*: cualesquiera que sean los números enteros $i_1, i_2, \ldots, i_n$ se podrá encontrar un número entero i (para cada función el suyo), tal que $f(s^{i_1}(x), s^{i_2}(x), \ldots, s^{i_n}(x)) \equiv s^i(x)$.

1) Mostrar que $\widetilde{Z}(s(x))$ es una clase cerrada.

2) Mostrar que $\widetilde{Z}(s(x)) \neq P_k$ con cualquier función $s(x)$.

3) Demostrar que $\widetilde{Z}(s(x)) = Z(s(x))$ si, y sólo si, $s(x)$ es una sustitución cíclica (véase el problema 1.30).

2.10. Refutar la afirmación: con cualquier función $s(x)$ de S_k se cumple la igualdad $Z(s^2(x)) = \widetilde{Z}(s^{-1}(x))$.

2.11. Examinemos la función $\varphi(x, y)$ de P_k que satisface todas las condiciones enumeradas en el problema 1.27, 1). Designemos por $L(\varphi(x, y))$ *el conjunto de todas las funciones de P_k que son casi lineales con relación a $\varphi(x, y)$*. Si $\varphi(x, y) = x + y$, entonces el conjunto $L(\varphi(x, y))$ en algunas ocasiones se designa por L y sus elementos se llaman *funciones lineales*.

1) Demostrar que $L(\varphi(x, y))$ es una clase cerrada.

2) Mostrar que $L(\varphi(x, y)) \neq P_k$ para cualquier función $\varphi(x, y)$.

3*) Comprobar si es justa la afirmación: en P_4 para toda función $s(x) \in S_4$, las clases $L(\varphi(x, y))$ y $L(\varphi^{s(x)}(x, y))$ coinciden.

Supongamos que en el conjunto E_k se ha dado cierta relación ρ de un orden parcial no estricto. Se dice que la colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *precede* a la colección $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ [1])

[1]) O la colección β *sucede* a la colección α.

con el ordenamiento ρ (la designación es: $\tilde{\alpha}\rho\tilde{\beta}$) si para cualquier $i = 1, \ldots, n$ se cumple la relación $\alpha_i \rho \beta_i$. Las colecciones $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ se llaman *comparables con relación a* ρ si bien $\tilde{\alpha}\rho\tilde{\beta}$, o bien $\tilde{\beta}\rho\tilde{\alpha}$. La relación ρ corresponde en forma natural a un predicado de dos lugares $R_\rho(x, y)$, igual a 1 en aquellos y solamente en aquellos pares $(a, b) \in E_k \times E_k$ para los cuales es válida la relación $a\rho b$. La función $f(\tilde{x}) \in P_k$ se llama *monótona con respecto a* ρ si para cualesquiera colecciones $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de $\tilde{\alpha}\rho\tilde{\beta}$ se deduce que $f(\tilde{\alpha})\,\rho f(\tilde{\beta})$. En otras palabras, $f(\tilde{x})$ es monótona respecto a ρ si ella *conserva el predicado* R_ρ que corresponde a la relación ρ. Designaremos por $M(\rho)$ al conjunto $H(R_\rho(x, y))$, o sea al *conjunto de todas las funciones de* P_k *que son monótonas respecto a* ρ.

2.12. 1) Veamos dos relaciones de un orden parcial no estricto determinadas en el conjunto E_k:

$$\rho_1 = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{(1, i)\} \cup \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{i=2}^{k-1} \{(0, i)\} \cup \bigcup_{i=2}^{k-1} \{(i, i), (i, i+1), \ldots, (i, k-1)\},$$

$$\rho_2 = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{(0, i)\} \cup \{(1, 1), (2, 2)\} \cup \bigcup_{i=3}^{k-1} \{(i, i), (i, i+1), \ldots, (i, k-1)\}.$$

Aclarar cuáles de las funciones citadas a continuación pertenecen a los conjuntos $M(\rho_1)$ o $M(\rho_2)$.

a) $\bar{x}$;
b) $J_1(x)$;
c) $j_2(x)$;
d) $x + j_0(x) + J_1(x)$;
e) $\text{máx}(x, y)$;
f) $x \dot{-} y$;
g) $2x + j_{k-1}(y)$.

2) Sin emplear el concepto de clase de conservación del predicado $R_\rho(x, y)$, demostrar que $M(\rho)$ es una clase cerrada.

3) Mostrar que $M(\rho) = P_k$ si, y sólo si, la relación ρ es una relación de igualdad (o sea en el caso de que $\rho = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{(i, i)\}$.

2.13. Seleccionando una clase del tipo $T(\mathscr{E})$ o $U(D)$ idónea, demostrar que el sistema A no es completo en P_k.

1) $A = \{\sim x, \text{mín}(x, y), x \cdot y^2\}$;
2) $A = \{2, j_0(x), x + j_0(x) + J_1(x) + J_{k-1}(x), \text{mín}(x, y)\}$;
3) $A = \{2x^3, 2x + y, x^2 \cdot y, x \cdot J_0(y), \bar{x} + (\sim y)\}$;
4) $A = \{J_2(x), \overline{x + j_0(x)}, x + j_0(x) + J_1(x), \text{máx}(x, y)\}$;
5) $A = \{1, 2, \overline{x \dot{-} j_2(x)}, \text{máx}(x, y)\}$;
6) $A = \{j_2(x), x + j_0(x) + J_1(x), x \cdot y, x \dot{-} y, \text{mín}(x, y)\}$.

2.14. Para la demostración de la no plenitud (en P_k) del sistema A aclarar con qué valores de k no es suficiente examinar sólo las clases del tipo $T(\mathscr{E})$, $U(D)$ y $M(\rho)$, sino que también hay que emplear clases del tipo $T(\mathscr{E}, s)$.

1) $A=\{2j_0(x),\ J_1(x),\ x+j_0(x)+J_1(x),\ x\cdot j_0(y)\}$;

2) $A=\{1,\ \sim x,\ j_0(x),\ \text{máx}(x, y)\}$;

3) $A=\{0,\ 1,\ \ldots,\ k-2,\ J_{k-1}(x),\ \text{máx}(x, y),\ \text{mín}(x, y)\}$;

4) $A=\{\sim x,\ [k/2]\cdot j_0(x \dot{-} [(k-1)/2]),\ J_0(x)+$
$+(x \dot{-} 1),\ \text{mín}(x, y)\}$.

2.15. ¿Se puede demostrar la no plenitud (en P_k) del sistema A, empleando sólo las clases L y $Z(s(x))$?

1) $A=\{\bar{x},\ 2x-y,\ \text{máx}(x, y)-(x \dot{-} y)\}$;

2) $A=\{0,\ 1,\ -x,\ 2x+y,\ x+(\sim y)\}$;

3) $A=\{j_1(x)+J_{k-1}(x),\ x-y,\ x\cdot y\cdot z\}$;

4) $A=\{\bar{x},\ -x+2y,\ x_0+j_0(x-y)\}$;

5) $A=\{\sim x,\ \text{mín}(\bar{x}, y),\ x\cdot y\}$.

2.16*. Dos funciones en P_k se llaman *congruentes* si una de ellas puede ser obtenida de la otra mediante la sustitución de las variables sin identificación (comparar con el párrafo 1 del capítulo II). Sea la función $f(x, y)=2j_1(x)\cdot j_2(y) \in P_3$. Demostrar que la clase cerrada $[f(x, y)]$ contiene un número finito de funciones congruentes de par en par (comparar con el problema 1.5 del capítulo II).

2.17. Sea A un conjunto no vacío de funciones de un lugar de la lógica k-valente diferente de todo el conjunto $P_k^{(1)}$ y que satisface la condición: existe tal clase precompleta B en P_k que $B \cap P_k^{(1)}=A$. Demostrar que ella es única.

2.18*. Demostrar que el número de clases precompletas en P_k, cada una de las cuales no contiene totalmente el conjunto $P_k^{(1)}$, es menor que 2^{k^k}.

2.19. Demostrar que si una clase cerrada en P_k tiene un sistema finito y completo (en ella), entonces ella tiene el conjunto de todas (las diferentes) bases no más que numerable.

2.20*. ¿Es válida la afirmación siguiente? Toda clase cerrada en P_k $(k \geqslant 3)$ que contiene una función diferente de una constante contiene también una función que depende sustancialmente de una variable.

2.21*. ¿Es cierto que si a una clase cerrada en P_k $(k \geqslant 3)$ le pertenece una función que depende sustancialmente de no menos que de dos variables, entonces en esta clase se contiene o bien una función x, o bien una constante?

2.22. Sea $s(x)$ una función heterovalente de P_k. Por $A^{s(x)}$ designaremos el conjunto de aquellas, y solamente de aquellas, funciones de P_k para las cuales en el conjunto A hay funciones duales con relación a $s(x)$. El conjunto $A^{s(x)}$ se llama *dual a A con relación a $s(x)$*. Demostrar las siguientes afirmaciones:

1) El conjunto $(A^{s_1(x)})^{s_2(x)})$, dual a $A^{s_1(x)}$ con relación a $s_2(x)$, coincide con el conjunto A si, y sólo si, $s_1(s_2(x)) \equiv x$ o bien cuando él es dual a sí mismo con relación a cada una de las sustituciones $s_1(x)$ y $s_2(x)$.

2) El conjunto A es una clase cerrada si, y sólo si, $A^{s(x)}$ es una clase cerrada.

3) Si el conjunto B forma un sistema completo (o una base) en la clase cerrada A, entonces el conjunto $B^{s(x)}$ es un sistema completo (y respectivamente una base) en la clase $A.^{s(x)}$

4) Si $A_1 \supseteq A_2$, entonces $A_1^{s(x)} \supseteq A_2^{s(x)}$.

2.23*. Como ya se sabe, en P_k, siempre que $k \geqslant 3$, existen clases cerradas que no tienen bases y clases cerradas con bases numerables. Una de las clases cerradas que tiene bases numerables es la clase siguiente:

$$A_k = [f_2, \ldots, f_m, \ldots],$$

donde

$$f_m(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} 1 \text{ con } x_1 = \ldots = x_{l-1} = x_{l+1} = \ldots \\ \qquad \ldots = x_m = 2, \ x_i = 1 \ (i = 1, \ldots, m), \\ 0 \text{ en los demás casos,} \end{cases}$$

$m \geqslant 2$. Base en A_k es el conjunto $\{f_2, \ldots, f_m, \ldots\}$. Demostrar, empleando la clase A_k que en P_k $(k \geqslant 3)$ existe un conjunto continual $\{B_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$ de clases cerradas que forman (por inclusión) una cadena, o sea que para cualesquiera dos clases B_{γ_1} y B_{γ_2} del conjunto $\{B_\gamma\}$ es justa una de las inclusiones:

$$B_{\gamma_1} \subset B_{\gamma_2} \quad \text{o} \quad B_{\gamma_2} \subset B_{\gamma_1}.$$

§ 3. ESTUDIO DE LA PLENITUD DE LAS FUNCIONES DE LA LOGICA k-VALENTE

En las lógicas k-valentes el estudio de la plenitud de un sistema arbitrario de funciones está ligado a grandes dificultades técnicas: el empleo del criterio de la plenitud, que se basa en el examen conjunto de todas las clases precompletas en P_k, incluso con $k = 3, 4$, exige la investigación de un número muy considerable de condiciones (puesto que en P_3 existen exactamente 18 y en P_4, 82 clases precompletas). Las demostraciones de la plenitud de sistemas concretos en P_k corrientemente se hace con ayuda del método de reducción a sistemas que son, sin ofrecer dudas, completos (tales, por ejemplo, como el *sistema de Rosser—Turquette*
$\{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), J_1(x), \ldots, J_{k-1}(x), \text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)\}$ o el *sistema de Post*, $\{\bar{x}, \text{máx}(x, y)\}$). Existe, aparte de eso, una serie de indicios de la plenitud en los que se examinan conjuntos

de funciones que contienen ciertas reuniones de funciones de una variable y, además, una sola función, sustancialmente dependiente por lo menos de dos variables. Definamos los más importantes de estos indicios. Recordaremos que S_k es el conjunto de todas las funciones no equivalentes de P_k, dependientes de una variable, y $CS_k = P_k^{(1)} \setminus S_k$, donde $P_k^{(1)}$ es el conjunto de todas las funciones de un lugar de P_k. La función $f(\widetilde{x}) \in P_k$ se llama *sustancial* si depende sustancialmente de no menos que de dos variables y toma todos los k valores del conjunto E_k.

TEOREMA 1 (criterio de Slupetsky). *El sistema* $P_k^{(1)} \cup \{f(\widetilde{x})\}$ *es completo en* P_k *(con* $k \geqslant 3$*) si, y sólo si,* $f(\widetilde{x})$ *es una función sustancial.*

TEOREMA 2 (criterio de Yablonsky). *El sistema* $CS_k \cup \{f(\widetilde{x})\}$ *es completo en* P_k *(con* $k \geqslant 3$*) si, y sólo si,* $f(\widetilde{x})$ *es una función sustancial.*

TEOREMA 3 (criterio de Sálomaa). *El sistema* $S_k \cup \{f(\widetilde{x})\}$ *es completo en* P_k *(con* $k \geqslant 5$*) si, y sólo si, la función* $f(\widetilde{x})$ *es sustancial.*

Al emplear estos teoremas son útiles las afirmaciones que dan diversos criterios de la plenitud de los sistemas de funciones en los conjuntos $P_k^{(1)}$, S_k, CS_k. Citaremos uno de tales resultados. Supongamos que la función $h_{ij}(x)$ (donde $0 \leqslant i < j \leqslant k-1$) se determina de la siguiente manera:

$$h_{ij}(x) = \begin{cases} i & \text{si } x = j, \\ j & \text{si } x = i, \\ x & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

TEOREMA 4 (S. Picard). *Cada uno de los sistemas* $\{\bar{x}, h_{01}(x), x + j_0(x)\}$ *y* $\{h_{01}(x), h_{02}(x), \ldots, h_{0(k-1)}(x), x + j_0(x)\}$ *es completo en* $P_k^{(1)}$.

3.1. Como ya se sabe (véase el párrafo 1), el sistema
$A = \{0, 1, \ldots, k-1, j_0(x), j_1(x), \ldots, j_{k-1}(x), x + y, x \cdot y\}$
es completo en P_k.

1*) Demostrar que del sistema A se puede seleccionar un subsistema completo en P_k que esté formado de dos funciones.

2) Mostrar que cualquier subsistema del sistema A formado de una función no es completo en P_k.

3.2. EL SISTEMA DE ROSSER–TURQUETTE

$$A_1 = \{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), J_1(x), \ldots, J_{k-1}(x), \\ \text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)\},$$

como se sabe es completo en P_k (véase el párrafo 1).

1) Mostrar que:

$$A_1 \setminus \{\text{mín}(x, y)\} \subset T_{\{2, \ldots, k-1\}, 1},$$
$$A_1 \setminus \{\text{máx}(x, y)\} \subset T_{\{0, \ldots, k-3\}, 1}$$

(consecuentemente, después de eliminar del sistema A_1 cualesquiera de las funciones mín (x, y) y máx (x, y) se obtiene un sistema no completo en P_k).

2) Comprobar que eliminando de A_1 cualquiera de las constantes diferentes de 0 y de $k-1$ se obtiene un subsistema que se contiene en cierta clase del tipo $T(\mathscr{E})$, donde $\varnothing \neq \mathscr{E} \neq E_k$ (y, en consecuencia, no completo en P_k).

3) Convencerse de la validez de las igualdades:

a) $J_0(x) = J_1(\text{máx}(1, J_1(x), \ldots, J_{k-2}(x), x))$

b) $J_{k-1}(x) = J_0(\text{máx}(J_0(x)\ J_1(x), \ldots, J_{k-2}(x)))$.

4) Seleccionar de un sistema de Rosser—Turquette completo en P_k un subsistema que esté formado de $2k-2$ funciones.

3.3. Aclarar si son completos en P_3 los siguientes subsistemas del sistema de Rosser—Turquette

1) $\{1, J_0(x), J_2(x), \text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)\}$;

2) $\{1, 2, J_2(x), \text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)\}$.

3.4. Investigar la plenitud en P_4 de los siguientes subsistemas del sistema de Rosser—Turquette

1) $\{1, 2, J_0(x), J_1(x), \text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)\}$;

2) $\{1, 2, J_0(x), J_3(x), \text{mín}(x, y), \text{máx}(x, y)\}$.

3.5. Demostrar que los sistemas citados a continuación son completos en P_k si, y sólo si, k es un número primo.

1) $\{1, x+y+xz\}$;

2) $\{x-1, x+y, x^2 \cdot y\}$;

3*) $\{1 + x_1 - x_2 + x_1x_2 \ldots x_k\}$.

3.6. Empleando el método de reducción a sistemas completos que no ofrecen dudas, demostrar la plenitud (en P_k) de los sistemas siguientes:

1) $\{1, x^2 - y, \text{mín}(x, y)\}$;

2) $\{k-1, x \dot{-} y, x+y\}$;

3) $\{\sim x, x+2, x \dot{-} y\}$;

4) $\{k-2, x+y, (\sim x) \dot{-} 2y\}$;

5) $\{1, 2x+y+z, x^2 \dot{-} y\}$;

6) $\{-x, 1-x^2, x \dot{-} y\}$;

7) $\{\overline{x} \cdot j_0(y), \text{mín}(x, y)\}$.

3.7. Empleando el criterio de Slupetsky demostrar la plenitud en P_k de los sistemas siguientes:

1) $\{f(x, y)\}$, donde

$$f(x, y) = \begin{cases} x+1 & \text{con } x = y, \\ x & \text{con } x \geqslant 2 \text{ e } y = 0, \\ y & \text{con } x = 0 \text{ e } y \geqslant 1, \\ 0 & \text{en los demás casos;} \end{cases}$$

2) $\{j_2(x),\ x+y^2,\ x\cdot y+1\}$;

3) $\{\overline{x}\cdot j_0(y)+y\cdot j_0(x)\}$;

4) $\{k-1,\ 2x-y,\ x^2\dot{-}y\}$.

3.8. Investigar la plenitud en P_k de los sistemas siguientes:

1) $\{k-2,\ x+y,\ \text{mín}(x,\ y)\}$;

2) $\{0,\ 1,\ \overline{x}\dot{-}(\sim y)\}$;

3) $\{1,\ 2,\ \overline{x\dot{-}y}\}$;

4) $\{2,\ 2x+y,\ x^2\dot{-}y\}$;

5) $\{1,\ 2,\ \text{máx}(\overline{x},\ y)\}$;

6) $\{2\dot{-}x,\ \text{máx}(x,\ y),\ x\cdot y)\}$;

7) $\{\sim x,\ 2j_0(x),\ J_1(x),\ x\dot{-}y\}$.

3.9. Demostrar que cada uno de los sistemas que se citan a continuación es completo en S_k.

1) $\{h_{01}(x,\ h_{02}(x),\ \ldots,\ h_{0(k-1)}(x)\}$;

2) $\{h_{01}(x,\ h_{12}(x),\ \ldots,\ h_{l(l+1)}(x),\ \ldots,\ h_{(k-2)(k-1)}(x)\}$;

3) $\{\overline{x},\ h_{01},\ x\}$.

3.10. Demostrar que el sistema $\{h_{01}(x),\ h_{02}(x),\ \ldots,\ h_{0(k-1)}(x),\ x+j_0(x)\}$ es completo en $P_k^{(1)}$.

3.11. Demostrar que en P_k existe solamente una clase precompleta que contiene totalmente el conjunto $P_{k,j}^{(1)}$ y que esa clase es $T(\varnothing,\ k-1)$ (véase el problema 2.6, 3).

3.12. Sea A cierto sistema finito de funciones de P_k. Veamos el procedimiento siguiente:

1) identificamos en todas las funciones de A las variables sustituyéndolas por x (obtenemos el conjunto A_1);

2) en el lugar de las variables en las funciones de A, de todas las maneras posibles, colocamos funciones del conjunto $A_1\cup\{x\}$ (obtenemos el conjunto A_2 de $P_k^{(1)}$); después

3) en las funciones de A en el lugar de las variables colocamos funciones del conjunto $A_2\cup A_1\cup\{x\}$, etc.

Demostrar que:

a) en cierto paso el proceso se estabiliza, o sea que con $i\geqslant i_0$ se cumplirá la igualdad $\{x\}\cup\bigcup\limits_{j=1}^{i}A_j=\{x\}\cup\bigcup\limits_{j=1}^{i+1}A_j$ (y la igualdad $A_i=A_{i+1}$);

b) el sistema A es completo en P_k si, y sólo si, se puede hallar tal i_0 que $\{x\}\cup\bigcup\limits_{j=1}^{i_0}A_j=P_k^{(1)}$ y en A se contiene una función sustancial.

3.13. Demostrar, empleando el algoritmo descrito en el problema 3.12, que:

1) el sistema $\{x^2 + y + 2\}$ no es completo en P_3;

2) el sistema $\{x^2y + 1\}$ es completo en P_3.

3.14*. Demostrar la plenitud del sistema A transformándolo con ayuda de una sustitución adecuada $s(x)$ a un sistema $A^{s(x)}$ que, sin ofrecer dudas, sea completo.

1) $\{x - 1, \text{mín}(x, y)\}$;

2) $\{\sim j_{k-1}(x), x + y + 1\}$;

3) $\{1 + \bar{x} j_{k-1}(y) + \bar{y} \cdot j_{k-1}(x) + \text{máx}(x, y)\}$.

3.15*. Refutar la afirmación siguiente: con un k fijo en la lógica k-valente siempre se podrá encontrar una base formada por un número (finito) de funciones tan grande como se quiera.

3.16. Poner el ejemplo de una función $f(x, y)$ del conjunto P_3 que satisfaga la condición: f es una función de Sheffer, pero $x + f$ no es función shefferiana.

3.17*. Supongamos que $f(\tilde{x}^n)$ es una función de P_k que depende sustancialmente de no menos que de dos variables y que toma l valores diferentes $(2 \leqslant l \leqslant k)$. Demostrar que sustituyendo sus variables por funciones del conjunto CS_k se puede obtener una función que dependa sustancialmente de dos variables y que tome l valores diferentes.

3.18. ¿Con qué valores de k el cuadrado de cualquier función sustancial de P_k es una función sustancial?

3.19*. Contar el número de funciones sustanciales en P_k que dependen de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$.

3.20. Sea $R(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado determinado en el conjunto E_k. Este se llama predicado *fuerte* si existe tal colección $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de valores de las variables $x_1, \ldots, x_n$, que para cada colección $\tilde{\beta}^n = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, en la que el predicado $R(x_1, \ldots, x_n)$ es igual a uno, se podrá encontrar en $H(R(x_1, \ldots, x_n))$ una función $f(x)$ que satisfaga la condición: $f(\alpha_i) = \beta_i$ para cualquier $i = 1, \ldots, n$ (en otras palabras, la función $f(x)$ «traduce» la colección $\tilde{\alpha}^n$ a la colección $\tilde{\beta}^n$). Supongamos que $R(\tilde{x})$ es un predicado fuerte determinado en el conjunto E_k y que $H(R(\tilde{x})) \neq P_k$. Demostrar que si con cualquier función $g(x)$ dependiente de una variable y no perteneciente a la clase $H(R(\tilde{x}))$, el sistema $H(R(\tilde{x})) \cup \{g(x)\}$ es completo en P_k, entonces, la clase $H(R(\tilde{x}))$ es precompleta en P_k.

3.21. Sea $R_i(\tilde{x}^n)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, un predicado de n lugares determinado en el conjunto E_k. Pongamos que $R(\tilde{x}^n) = R_1(\tilde{x}^n) \& \ldots \& R_s(\tilde{x}^n)$. Demostrar que $\bigcap_{i=1}^{s} H(R_i(\tilde{x}^n)) \subseteq H(R(\tilde{x}^n))$.

3.22*. Demostrar que en P_k con $k \geqslant 3$ el conjunto de todas las clases cerradas, cada una de las cuales contiene un número finito de funciones no congruentes de par en par, es numerable-infinito.

3.23*. Demostrar que cada clase cerrada en P_k tiene no más que un conjunto numerable de clases precompletas en él.

3.24*. Poner un ejemplo de una clase cerrada en P_k que contenga infinitamente muchas funciones no congruentes de par en par y que no contenga clases precompletas en ella.

3.25*.. Seleccionar la base del sistema A completo en P_k.

1) $A = \{k-1,\ j_0(x),\ j_1(x),\ \ldots,\ j_{k-1}(x),\ x \cdot y,\ x \dot{-} y\}$;
2) $A = \{x-2,\ J_0(x),\ \text{máx}(x, y),\ x \dot{-} y^2,\ x^2 \cdot y\}$;
3) $A = \{\sim x,\ \text{mín}(x, y),\ x \cdot y,\ x + y\}$;
4) $A = \{k-1,\ x+2,\ \text{máx}(x, y),\ x \dot{-} y\}$;
5) $A = \{2,\ j_0(x),\ x + y^2,\ x^2 \dot{-} y,\ x \cdot y \cdot z\}$.

3.26. Demostrar que en cualquier base seleccionada del sistema Rosser — Turquette forzosamente tiene que contenerse aunque sea una de las funciones $J_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant k-2$, pero no se encontrarán las constantes 0 y $k-1$.

Capítulo IV

GRAFOS Y REDES

§ 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LOS GRAFOS [1]

Sea V un conjunto finito no vacío, X, cierta colección de pares de elementos de V. En el conjunto X pueden haber pares con elementos iguales y también pares iguales. El conjunto V y la colección X determinan un *grafo con aristas y bucles* (lazos) *múltiples* (o abreviadamente un *pseudografo*) $G = (V, X)$. Los elementos del conjunto V se llaman *vértices* y los elementos de la colección X, *arcos* del pseudografo. Los arcos del tipo (v, v) $(v \in V)$ se llaman *lazos*. Un pseudografo sin lazos se llama *grafo con arcos múltiples* (o abreviadamente *multigrafo*). Si en la colección X no se puede encontrar ningún par más de una vez, entonces el multigrafo $G = (V, X)$ se llama *grafo*[2]. Si en el conjunto X los pares están ordenados, entonces el grafo se llama *orientado*. Las aristas de un grafo orientado frecuentemente se denominan *arcos*. Si los pares de la colección X no están ordenados, entonces el grafo se llama *no orientado* o sencillamente *grafo*. Si $x = (u, v)$ es una arista del grafo, entonces los vértices u y v se llaman *extremos* de la arista x. Si el vértice v es un extremo de la arista x, entonces se dice que v y x son *incidentes*. Los vértices u y v del grafo G se llaman *adyacentes* si existe una arista del grafo G que une a u y v. Dos aristas se llaman *adyacentes* si ellas tienen un vértice común. *Grado del vértice* v se llama al número $d(v)$ de aristas del grafo que son incidentes al vértice v. En un pseudografo el grado del vértice v es igual al número total de aristas incidentes a este vértice más el número de bucles incidentes a él. El vértice de un grafo que tiene grado 0 se llama *aislado* y el vértice que tiene grado 1, *colgante*.

[1]) Las definiciones que se dan a continuación coinciden o se aproximan a las que se dan en la sección «Grafos y redes» de los libros [10] y [33].

[2]) A continuación todas las definiciones se dan para los grafos. Generalmente estas definiciones de manera evidente se pueden aplicar a los multigrafos y pseudografos. En los casos de que haya gran diferencia en las definiciones, se darán también las definiciones respectivas para los pseudografos.

La sucesión

$$v_1 x_1 v_2 x_2 v_3 \;.\;.\;.\; x_{n-1} v_n \qquad (n \geqslant 2), \qquad (1)$$

en la que se alternan los vértices y las aristas y en la que para cada $i = \overline{1, n-1}$ la arista x_i tiene la forma (v_i, v_{i+1}), se llama *camino* que une los vértices v_1, v_n. El número de aristas del camino se denomina *longitud del camino. Camino de longitud* cero se llama a una sucesión que contiene un solo vértice. Un camino en el que todas las aristas son diferentes de par en par se llama *cadena*. Un camino en el que todos los vértices son diferentes de par en par se llama *cadena simple*. Un camino (1) se llama *cerrado* si $v_1 = v_n$. Un camino cerrado en el que todas las aristas son diferentes de par en par se llama *ciclo*. Un ciclo en el que todos los vértices, excepto el primero y el último, son diferentes de par en par se llama *ciclo simple*. Un grafo se llama *conexo* si para cualesquiera dos de sus vértices existe una cadena que une estos vértices. *Distancia* entre los vértices de un grafo conexo se llama a la longitud de la cadena más corta que une estos vértices. *Diámetro* de un grafo conexo se llama a la distancia entre los dos vértices más lejanos uno del otro. El diámetro del grafo G se designa por $D(G)$. *Subgrafo* del grafo G se llama a un grafo en el que todos los vértices y aristas se contienen entre los vértices y aristas del grafo G. Un subgrafo se llama *propio* si es diferente del mismo grafo. *Componente de conexión* del grafo G se llama su subgrafo conexo que no sea subgrafo propio de ningún otro subgrafo conexo del grafo G. *De soporte* se llama a un subgrafo que contenga todos los vértices del grafo. *Subgrafo* del grafo $G = (V, X)$ *(engendrado por el subconjunto* $U \subseteq V$ se llama al grafo $H = (U, Y)$ el conjunto de las aristas del cual está formado de aquellas, y solamente de aquellas, aristas del grafo G cuyos extremos se encuentran en U. Los grafos (pseudografos) $G = (V, X)$ y $H = (U, Y)$ son *isomorfos*, si existen dos correspondencias biunívocas φ: $V \leftrightarrow U$ y ψ: $X \leftrightarrow Y$ tales que para cualquier arista $x = (u, v)$ de X es justo $\psi(x) = (\varphi(u), \varphi(v)$. En el caso de los grafos se puede dar la definición siguiente: los *grafos* $G = (V, X)$ y $H = (U, Y)$ son *isomorfos* si existe una tal transformación biunívoca φ: $V \leftrightarrow U$ tal que $(u, v) \in X$ si, y sólo si, $(\varphi(u), \varphi(v)) \in Y$. Tal aplicación de φ se llama *isomorfa. Automorfismo* se llama a una aplicación isomorfa del grafo en sí mismo. Bajo el término de *operación de extracción de un vértice* del grafo G comprenderemos una operación que consiste en la extracción de cierto vértice junto con las aristas que le son incidentes. La *operación de extracción de una arista* del grafo $G = (V, X)$ consiste en la extracción del par correspondiente de X. Al hacer esto, si no se expresa lo contrario, todos los vértices se conservan. El *complemento* $\overline{G}$ *del grafo* G es un grafo en el cual dos vértices son contiguos si, y sólo si, ellos no son adyacentes en G. La *operación de subdivisión de la arista* (u, v) en el grafo $G = (V, X)$ consiste en la extracción de la arista (u, v) de X, en la adición de un nuevo vértice w a V y en la adición de dos aristas (u, w) y (w, v) a $X \setminus \{(u, v)\}$. El grafo G se llama *subdivisión del grafo* H si G puede ser obtenido de H mediante la aplicación sucesiva de la operación de subdivisión de las aristas. Los grafos G y H son *homeomorfos* si existen tales subdivisiones suyas que son isomorfas. Sean $G = (V, X)$ y $H = (U, Y)$ dos grafos. Por $G \oplus H$ designaremos un grafo, llamado *diferencia simétrica de los grafos* G y H con el conjunto de vértices $W = V \cup U$ y el conjunto de aristas $Z = X \oplus Y$ formado de aquellas, y solamente de aquellas, aristas que entran exactamente en uno de los conjuntos X o Y. Por $G \times H$ designaremos la *multiplicación cartesiana de los grafos* $G = (V, X)$ y $H = (U, Y)$, o sea, un grafo cuyos vértices son pares de la forma (v, u) $(v \in V, u \in U)$ y en el cual los vértices $(v_1 u_1)$ y (v_2, u_2) son adyacentes si, y sólo si, es adyacente aunque sea uno de los pares v_1, v_2 (en el grafo G) o u_1, u_2 (en el grafo H). *Unión de los grafos* $G = (V, X)$ y $H = (U, Y)$ se llama al grafo $E = (V \cup U, X \cup Y)$.

Arbol se llama a un grafo conexo sin ciclos. Un grafo sin ciclos se llama *bosque*. *Completo* se llama al grafo en el que cada dos vértices diferentes están unidos con una arista. Un grafo completo con n vértices se designa por K_n. Un grafo sin aristas se dice que es *vacío* (*completamente inconexo*). Un grafo de un vértice, sin aristas, se llama *trivial*. *Dicotiledónico* se llama a un grafo cuyo conjunto de vértices se puede dividir en dos subconjuntos (dos partes) V_1 y V_2 de tal manera que cada arista del grafo une vértices de partes distintas. Un grafo dicotiledónico con sus partes V_1 y V_2 y el conjunto de sus aristas X se designará por (V_1, V_2, X). Si cada vértice de V_1 está unido con una arista a cada vértice de V_2, entonces el grafo se llama *grafo dicotiledónico completo*. Un grafo dicotiledónico completo (V_1, V_2, X) tal que $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$ se designa por K_{n_1, n_2}. Un grafo se llama *k-conexo* si al extraerle cualesquiera $k - 1$ vértices se obtiene un grafo conexo diferente del trivial. El vértice cuya extracción del grafo aumenta el número de componentes de conexión se llama *divisor* o *punto de convergencia*. Un grafo se llama *grafo regular de grado d*, si todos sus vértices tienen grado d. Un grafo regular de grado 1 se llama *combinación de pares*. Un grafo regular de grado 3 se llama *cúbico*. El subgrafo soporte regular de grado k de un grafo se llama su *k-factor*. Una *combinación de pares perfecta* se llama 1-factor. *Combinación de pares máxima* del grafo G se llama a la combinación de pares que contiene el número máximo de aristas. *Ciclo hamiltoniano* de un grafo se llama a un ciclo simple que contiene todos los vértices del grafo. *Cubo n-dimensional unitario* se llama al grafo B^n cuyos vértices son vectores booleanos de longitud n y las aristas son caras unidimensionales (véase el capítulo I, párrafo 1).

1.1. Mostrar que para un grafo arbitrario $G(V, X)$ es justa la igualdad $2|X| = \sum_{v \in V} d(v)$.

1.2. Sea $i_k(G)$ el número de vértices de grado k en el grafo G. Hallar el número de grafos no isomorfos de par en par G, en los que:

1) $i_2(G) = i_3(G) = i_4(G) = 2$, $i_k(G) = 0$, con $k \neq 2, 3, 4$;
2) $i_2(G) = i_3(G) = i_4(G) = 3$, $i_k(G) = 0$, con $k \neq 2, 3, 4$.

1.3. Mostrar que en cualquier grafo que tenga no menos de dos vértices siempre habrán dos vértices con el mismo grado.

1.4. Demostrar que para cualquier colección de números enteros no negativos $(k_0, k_1, \ldots)$ tales que $\sum_i k_i = 2m$ existe un pseudografo con m aristas, que tiene para cada $i = 0, 1, \ldots$ exactamente k_i vértices del grado i.

1.5. Sea $d_0(G)$ el mínimo de los grados de los vértices del grafo G, que tiene n vértices.

1) Demostrar que si $d_0(G) \geqslant \frac{n-1}{2}$, entonces el grafo es conexo.

2) ¿Se puede cambiar en la afirmación anterior $\frac{n-1}{2}$ por $\left[\frac{n-1}{2}\right]$?

1.6. Demostrar, que cualquier camino cerrado de longitud impar contiene un ciclo simple. ¿Es válida una afirmación análoga para los caminos de longitud par?

1.7. Mostrar que un grafo conexo con n vértices contiene no menos de $n-1$ aristas.

1.8. Mostrar que en un grafo con n vértices y c componentes de conexión el número de aristas es no mayor de $\frac{1}{2}(n-c) \times (n-c+1)$.

1.9. Demostrar que cualquier grafo conexo no trivial contiene un vértice que no es divisorio.

1.10. Demostrar que en un grafo conexo, cualesquiera dos cadenas simples de longitud máxima tienen por lo menos un vértice común ¿Es justa la afirmación de que ellas siempre tienen una arista común?

1.11. Demostrar, que si de un grafo conexo se extrae una arista arbitraria contenida en algún ciclo simple, entonces el grafo seguirá siendo conexo.

1.12. Mostrar que si en un grafo con n vértices no hay ciclos de longitud impar y el número de aristas supera a $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, entonces el grafo es conexo.

1.13. Hallar el número $p_k(n)$ con el cual cualquier grafo de n vértices que tenga $p_k(n)$ ciclos de longitud k es conexo.

1.14. Supongamos que los grafos G y H son isomorfos. Mostrar que:

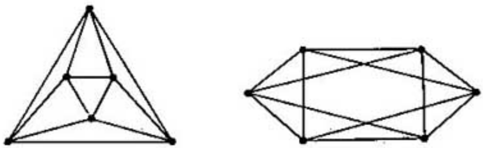
1) para cada $d \geqslant 0$ el número de vértices de grado d es igual en los grafos G y H;

2) para cada l el número de ciclos simples de longitud l en los grafos G y H es el mismo.

1.15. Mostrar que las condiciones 1), 2) del problema 1.14 son insuficientes para que los grafos G y H sean isomorfos.

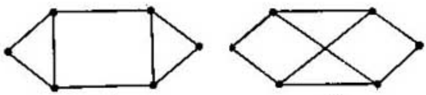
1.16. Indicar los pares de grafos isomorfos y no isomorfos que hay entre los pares presentados en las figs. 3-6. Argumentar la contestación.

1.17. Supongamos que los grafos G y H son biconexos y cada uno de ellos tiene seis vértices y ocho aristas. El grafo G tiene exactamente dos vértices del grado 2 y el grafo H tiene exactamente cuatro



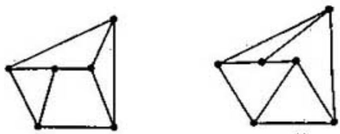
a) *b)*

Fig. 3.



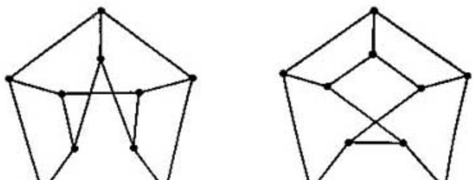
a) *b)*

Fig. 4.



a) *b)*

Fig. 5.



a) *b)*

Fig. 6.

vértices del grado 3. Se puede afirmar que los grafos G y H son: 1) isomorfos; 2) no isomorfos.

1.18. Los grafos G y H son biconexos y cada uno de ellos tiene seis vértices y diez aristas. Un vértice en cada uno de los grafos tiene grado $d\,(1 \leqslant d \leqslant 5)$ y los demás tienen grado d_1 $(d_1 < d)$. Mostrar que los grafos G y H son isomorfos.

1.19. Mostrar que en un grafo que no tiene automorfismos no triviales.

1) la distancia entre cualesquiera dos vértices de grado 1 es mayor de dos;

2) existe un vértice de grado 3 o mayor.

1.20. ¿Cuál es el número de automorfismos de un grafo que sea ciclo de longitud p?

1.21. Construir un grafo sin ciclos, que no tenga automorfismos no triviales y que contenga el número menor posible de aristas.

1.22. ¿Cuál es el menor número n $(n > 1)$ de vértices que puede haber en un grafo que no tenga automorfismos no triviales?

1.23. Supongamos que en un grafo biconexo que tiene seis vértices y diez aristas el grado de todos los vértices es igual y el número de ciclos simples de longitud 3 es igual a dos. Restablecer el grafo. Hallar el número de sus automorfismos.

1.24. Sea $O(v)$ el conjunto de todos los vértices adyacentes a v y $O'(v) = O(v \cup \{v\}$. Sea R_n el conjunto de todos los grafos G con n vértices, que tienen las propiedades siguientes: para cualesquiera dos vértices no contiguos u y v, o bien $O(v) \subseteq O(u)$, o bien $O(u) \subseteq O(v)$, y para cualesquiera vértices contiguos u y v o bien $O'(v) \subseteq O'(u)$, o bien $O'(u) \leqslant O'(v)$. Demostrar las afirmaciones siguientes:

1) En el grafo G de R_n los vértices de un mismo grado son todos o bien adyacentes de par en par, o bien no adyacentes de par en par.

2) En el grafo G de R_n existe aunque sea un vértice de grado $n - 1$.

3) Si para cierto d, los vértices de grado d son en el grafo G de R_n adyacentes de par en par, entonces los vértices de grado mayor que d también serán adyacentes de par en par.

4) El grafo G de R_n se determina unívocamente con una exactitud hasta el isomorfismo con la definición de los grados de los vértices.

5) La extracción de un vértice del grafo $G \in R_n$ lleva a un grafo de R_{n-1}

1.25. Supongamos que $n \geqslant 2$ y sea dada una familia $F(G) = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ de grafos, en la cual el grafo H_i se ha obtenido del grafo G de n vértices mediante la extracción del vértice con el número i $(i = \overline{1, n})$. Observaremos que en los grafos H_i los vértices no están marcados. Demostrar que por la familia $F(G)$ se puede:

1) hallar el número de aristas del grafo G;

2) hallar para cada H_i el grado del vértice con la extracción del cual de G se obtiene el grafo H_i;

3) determinar para un grafo arbitrario L que tenga no más de $n - 1$ vértices, si éste es un subgrafo del grafo G;

4) determinar si el grafo G es conexo;

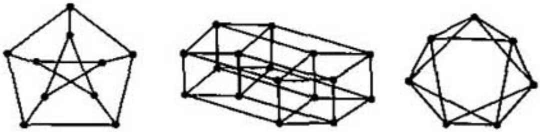
5) restablecer el grafo G si no es conexo.

1.26. Sea $D(G)$ el diámetro del grafo G y $\overline{G}$ el grafo cor
tario a G. Demostar que $D(\overline{G}) \leqslant 3$ si el grafo G no es co
$D(G) \geqslant 3$.

1.27. El grafo G se llama *autocomplementario* si los graros ~ ~
son isomorfos.

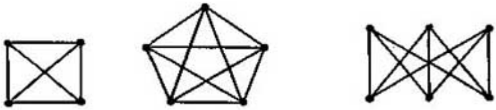
1) Hallar el grafo no trivial autocomplementario con el número
de vértices.

2) Mostrar que un grafo autocomplementario es conexo.



a) *b)* *c)*

Fig. 7.



a) *b)* *c)*

Fig. 8.

3) Mostrar que si G es un grafo autocomplementario, entonces $2 \leqslant D(G) \leqslant 3$.

1.28. ¿Cuántos grafos no isomorfos de par en par que tengan 20 vértices y 188 aristas existen?

1.29. Mostrar que si los grafos G y H son homeomorfos, entonces:

1) para cada $d \neq 2$ el número de vértices de grado d en ambos grafos es igual;

2) existe una aplicación biunívoca del conjunto de los ciclos simples del grafo G en el conjunto de los ciclos simples del grafo H, con la cual el número de vértices del grado d en los ciclos respectivos es igual para todos los $d \neq 2$.

1.30. Establecer si existen en los grafos representados en la fig. 7 subgrafos homeomorfos al grafo G.

1) $G = K_4$ (véase la fig. 8, *a*);
2) $G = K_5$ (véase la fig. 8, *b*);
3) $G = K_{3,3}$ (véase la fig. 8, *c*).

1.31. La *operación de sobredivisión* consiste en la sustitución de dos aristas adyacentes (u, v) y (v, w), cuyo vértice común v tiene el grado 2, por una arista (u, w). Aplicando paso a paso la operación de sobredivisión se puede obtener de un grafo arbitrario G, que contenga vértices del grado 2, un pseudografo que no contenga vértices del grado 2. Este pseudografo se llamará sobredivisión completa del grafo G.

1) Mostrar que la sobredivisión completa del grafo G no depende del orden en el que se aplicó la operación de sobredivisión a los pares de aristas adyacentes del grafo G.

2) Mostrar que los grafos G y H son homeomorfos si, y sólo si, sus sobredivisiones completas son isomorfas (como los pseudografos).

1.32. Demostrar que en el grafo de Petersen (fig. 7, *a*) no hay ciclo hamiltoniano, pero en el grafo obtenido de él mediante la extracción de un vértice, hay un ciclo hamiltoniano.

1.33. Demostrar que en cada uno de los grafos K_n, $K_{n,n}$, B^n hay un ciclo hamiltoniano.

1.34. Sean n impar y B^n_k, el conjunto de vértices del cubo B^n, formado por vértices de peso k. Sea G un subgrafo del cubo B^n engendrado por el conjunto $B^n_{\frac{n-1}{2}} \cup B^n_{\frac{n+1}{2}}$.

1) ¿Existen en el grafo G combinaciones de pares perfectas?

2) ¿Existen en el grafo G ciclos de Hamilton?

1.35. En el grafo G hay un ciclo hamiltoniano y en el grafo H, una cadena hamiltoniana. ¿Es verdad que en el grafo $G \times H$ existe un ciclo hamiltoniano?

1.36. Demostrar que si para cualesquiera dos vértices u y v de un grafo conexo de n vértices se cumple $d(u) + d(v) \geqslant n$, entonces el grafo tiene un ciclo hamiltoniano.

1.37. Mostrar que cualquier grafo con n vértices y con no menos de $\binom{n-1}{2} + 2$ aristas, tiene ciclos hamiltonianos.

1.38. Mostrar que un grafo que tiene dos vértices no adyacentes de tercer grado y los demás de un grado no mayor de 2, no posee un ciclo hamiltoniano.

1.39. 1) Mostrar que $D(G \times H) \leqslant D(G) + D(H)$.

2) Comprobar si $D(G \times H) \leqslant \text{máx}\,\{D(G), D(H)\}$.

1.40*. Demostrar que cada grafo conexo regular de grado $2d$ es presentable en forma de unión de 2-factores no intersecados.

1.41.*. Mostrar que el grafo K_{2n} es representable en forma de unión de algún 1-factor y $n-1$ ciclos hamiltonianos.

1.42. Mostrar que el grafo K_{2n+1} se puede representar en forma de unión de n ciclos hamiltonianos.

1.43. Mostrar que en el grafo K_n con vértices numerados, hay $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos hamiltonianos diferentes.

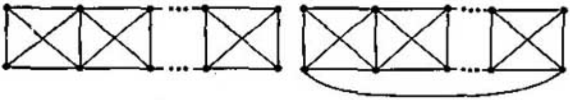
1.44. Mostrar que el número de diferentes combinaciones de pares perfectas del grafo K_{2n} con vértices numerados es igual a $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

§ 2. PLANICIDAD, CONEXION, CARACTERISTICAS NUMERALES DE LOS GRAFOS

Un grafo se llama *planar* si puede ser dibujado en un plano de tal manera, que los arcos de las curvas que representan las aristas se crucen sólo en los puntos que corresponden a los vértices del grafo; además, en cualquier punto de intersección convergen sólo los arcos cotejados a las aristas incidentes precisamente al vértice que corresponde a este punto. Tal figura geométrica es la expresión del grafo planar y se llama *grafo plano. Cara interior* de un grafo conexo plano se llama a la región finita del plano, acotada por un camino cerrado y no conteniente dentro de sí ningún vértice ni arista del grafo. El camino que acota la cara se llama *frontera de la cara.* La parte del plano, formada por puntos que no pertenecen ni al grafo, ni a una de sus caras interiores, se llama *cara exterior.* Para los grafos planos biconexos (multigrafos) que tienen n vértices, m aristas y r caras se cumple la *fórmula de Euler* $n - m + r = 2$. Son válidos los siguientes criterios de la planicidad.

TEOREMA (Pontriagin—Kuratovsky). *Un grafo es planar si, y sólo si, no contiene subgrafos homeomorfos a los grafos* K_5 y $K_{3,3}$ (fig. 8, b, c).

Grosor del grafo G se llama al número menor $t(G)$ de subgrafos planares suyos, cuya unión es igual a G. A cada pseudografo conexo, plano, no trivial G se le puede cotejar el *pseudografo dual* G^* de la siguiente manera. Dentro de cada cara del pseudografo G se escoge un vértice del grafo G^*. Si x es una arista del grafo G que está en la frontera de las caras g_1 y g_2, y v_1 y v_2 son vértices del pseudografo G^* cogidos en estas caras, entonces los vértices v_1 y v_2 se unen con una arista en G^*. Un pseudografo (grafo) plano isomorfo a su pseudografo dual se llama *autodual*. Los ciclos $Z_1, Z_2, \ldots, Z_h$ del grafo G se llaman *linealmente dependientes* si para algunos $i_1, i_2, \ldots, i_s$ $(1 \leqslant i_1 < < i_2 < \ldots < i_s \leqslant k)$ se cumple la relación $Z_{i_1} \oplus Z_{j_2} \oplus \ldots \oplus \oplus Z_{i_s} = 0$, donde 0 es un grafo sin aristas, $Z \oplus Y$ es la diferencia simétrica de los grafos Z e Y. En el caso contrario los ciclos Z_1, $Z_2, \ldots, Z_k$ se llaman *linealmente independientes.* El número mayor de ciclos $\xi(G)$ en la totalidad de ciclos linealmente independientes del grafo G se llama *número ciclomático del grafo G.* La coloración de los vértices (las aristas) de un grafo se llama *regular* si los vértices (las aristas) contiguos están pintados de diferentes colores. El menor número $\chi(G)$ de colores para el cual existe una coloración regular de los vértices del grafo G se llama *número cromático del grafo G*. El menor número $\chi'(G)$ de colores para el cual existe una coloración regular de las aristas del grafo G se llama *número cromático de las aristas del grafo G.* El subconjunto U de los vértices (aristas) se llama *encubrimiento del conjunto de los vértices* (o de las aristas) del grafo G si cada vértice (cada arista) del grafo, o bien coincide con cierto elemento del conjunto U, o bien es adyacente a algún elemento de U (respectivamente, es incidente a cierto elemento de U). El encubrimiento se llama *sin salida* si después de la eliminación de cualquier elemento, deja de ser encubrimiento. La potencia mínima del subconjunto U de los vértices del grafo G, tal que cualquier arista del grafo es incidente aunque sea a un vértice de U, de designa por $\alpha_0(G)$ y se llama *número del encubrimiento de los vértices*. La potencia mínima del subconjunto Y de las aristas del grafo G, tal que cada vértice del grafo es incidente aunque sea a una arista de Y, se designa por $\alpha_1(G)$ y se denomina *número del encubrimiento de las aristas del grafo G*. El conjunto de los vértices (aristas) del grafo G se llama *independiente* si dos elementos suyos cualesquiera son adyacentes. Por $\beta_0(G)$ (y respectivamente, por $\beta_1(G)$) se designa la potencia



a) *b)*

Fig. 9.

máxima del conjunto independiente de vértices (aristas) del grafo G. El número $\beta_0(G)$ (el número $\beta_1(G)$) se llama *número de independencias por los vértices (aristas) del grafo G*. Por $\alpha_{00}(G)$ se designa la potencia mínima del subconjunto de vértices U, tal que cada vértice del grafo G que no entra en U es adyacente aunque sea a un vértice de U.

2.1. ¿Son planares los grafos presentados en las fig. 6, *a*, *b*, 7, *a*, *b*, *c*?

2.2. ¿Con cuáles $n \geqslant 2$ los grafos presentados en la fig. 9, *a*, *b* son planares?

2.3. Sea $G_n = (V_1, V_2, X)$ un grafo dicotiledóneo,

$$V_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$
$$V_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\},$$
$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n\},$$

donde

$$x_i = (a_i, b_i), \quad i = \overline{1, n};$$
$$y_i = (a_i, b_{i+1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad y_n = (a_n, b_1);$$
$$z_i = (a_i, b_{i+2}), \quad i = \overline{1, n-2},$$
$$z_{n-1} = (a_{n-1}, b_1), \quad z_n = (a_n, b_2).$$

Determinar con cuáles $n > 2$ el grafo G es planar.

2.4. 1) ¿Qué número mínimo de aristas hay que extraer del cubo B^4 para que el grafo obtenido sea planar?

2) ¿Qué número mínimo de vértices hay que extraer del cubo B^4 para que el grafo obtenido sea planar?

2.5*. Supongamos que G es un grafo biconexo plano que tiene no menos de dos caras interiores. Demostrar que existe tal cadena simple, perteneciente a la frontera de la cara exterior, cuya extracción lleva a un grafo biconexo plano con menor número de caras.

Observación. Al extraer una cadena se eliminan todas sus aristas y vértices interiores, pero los vértices extremos de la cadena se quedan en el grafo.

2.6. Demostrar por inducción, empleando el resultado del problema 2.5, que en un grafo biconexo plano que tenga n vértices y m aristas, el número de las caras interiores es igual a $m - n + 1$.

2.7. Demostrar por inducción relacionada con el número de aristas, que el número ciclomático $\xi(G)$ de un pseudografo con n vértices, m aristas y c componentes de conexión es igual a $m - n + c$.

2.8. Hallar, para los grafos presentados en las figs. 5, *a*; 6, *a*; 7, *a* el número ciclomático $\xi(G)$ y seleccionar un sistema de $\xi(G)$ ciclos linealmente independientes.

2.9. Demostrar que en cualquier grafo planar existe un vértice de grado no mayor que 5.

2.10. Demostrar que en cualquier grafo planar que tenga no menos de cuatro vértices podrán encontrarse por lo menos cuatro vértices de grado no mayor que 5.

2.11. Demostrar que si en un grafo conexo planar con n vértices y m aristas cada ciclo simple contiene no menos de k aristas, entonces $m \leqslant \frac{k(n-2)}{k-2}$.

2.12. Un grafo conexo plano, cada cara del cual, incluyendo también la exterior, está acotada por un ciclo de longitud tres, se denomina *triangulación*.

Mostrar que cualquier triangulación con $n \geqslant 3$ vértices tiene $3n-6$ aristas y $2n - 4$ caras.

2.13. Sea $t(G)$ el grosor del grafo G. Mostrar que:

1) $t(K_n) \geqslant \left[\frac{n+7}{6}\right]$;

2) $t(K_{n,\,m}) \geqslant \left]\frac{n \cdot m}{2(n+m-2)}\right[$;

3) $t(B^n) \geqslant \left]\frac{n+1}{4}\right[$.

2.14*. Demostrar, empleando la fórmula de Euler, que los grafos $K_{3,\,3}$ y K_5 no son planares.

2.15*. Demostrar que de un grafo biconexo, cuyo número ciclomático es ξ ($\xi > 1$), mediante la extracción de una cadena se puede obtener un grafo biconexo con un número ciclomático igual a $\xi - 1$.

2.16. Construir un grafo dual al grafo representado en la fig. 5, *a*.

2.17. Mostrar que un pseudografo dual a un grafo conexo plano es conexo y plano.

2.18. Mostrar que el número ciclomático de un grafo dual coincide con el número ciclomático del grafo inicial.

2.19. Mostrar que si G tiene un vértice divisorio, entonces G^* también lo tiene.

2.20. Mostrar que el pseudografo G^*, dual al grafo triconexo plano G, no tiene bucles y aristas múltiples.

2.21. ¿Cuántos grafos biconexos, planos, autoduales, no isomorfos de par en par, con seis vértices, hay?

2.22. Mostrar que no existen grafos planares sexticonexos.

2.23. Mostrar que un grafo dual a una triangulación de n vértices ($n > 3$) es un grafo plano cúbico doblemente conexo.

2.24. 1) Mostrar que un grafo cúbico plano, cuyas caras no tienen menos de cinco vértices, contiene doce o más vértices.

2) Mostrar que si r_i es el número de caras de un grafo cúbico plano acotadas por i aristas, entonces $\sum_i (6 - i)\, r_i = 12$.

2.25. Hallar los números cromáticos de los grafos representados en las figs. 4—8.

2.26. Hallar los números cromáticos de aristas de los grafos presentados en las figs. 3—7.

2.27. Hallar el número cromático y el número cromático de aristas

1) del grafo K_n;

2) del grafo $K_{n,n}$;

3) del grafo B^n.

2.28. ¿Cuántas coloraciones regulares de los vértices del cubo B existen en el número mínimo de colores?

2.29. Mostrar que el número cromático de aristas del grafo de Petersen, representado en la fig. 7, *a*, es igual a cuatro, pero cualquiera de sus subgrafos G con ocho vértices tiene $\chi'(G) \leqslant 3$. ¿Es válida la desigualdad $\chi'(G) \leqslant 3$ para un subgrafo arbitrario propio del grafo de Petersen obtenido después de haber extraído un vértice?

2.30. Mostrar que para colorear las aristas de cualquier pseudografo cúbico son suficientes cuatro colores.

2.31. Mostrar que las aristas de un grafo cúbico plano se pueden colorear con dos colores a y b, de tal manera que cada vértice sea incidente a una arista de color a y a dos de color b.

2.32. Demostrar que a los vértices de cualquier grafo plano se les puede dar una coloración regular en seis colores.

2.33. Demostrar por inducción por el número de vértices, que para el grafo plano G es válida la desigualdad $\chi(G) \leqslant 5$.

2.34. Construir un grafo plano G con un número mínimo de vértices, tal que $\chi(G) = 4$.

2.35. Los vértices del grafo G están numerados en orden creciente de sus grados. Demostrar que si k es el número mayor, tal que $k \leqslant d(v_k) + 1$, entonces $\chi(G) \leqslant k$.

2.36. La operación de compresión consiste en la extracción de dos vértices adyacentes de un grafo, y en la añadidura de un nuevo vértice que será adyacente a aquellos que han quedado y con los que era adyacente aunque sea uno de los vértices extraídos. Mostrar que el grafo obtenido al aplicar la operación de compresión a un grafo planar, también es planar.

2.37. Sea l la longitud de la cadena simple más larga en el grafo G. Mostrar que $\chi(G) \leqslant l + 1$.

2.38. Sea d el grado mayor de todos los vértices del grafo G. Mostrar que

1) $\chi(G) \leqslant d + 1$;

2) $\chi'(G) \leqslant d + 1$.

2.39. Sea p el número mayor para el que en el grafo G existe un subgrafo isomorfo al grafo K_p. Mostrar que $\chi(G) \geqslant p$.

2.40. Mostrar que para el grafo G con n vértices

1) $\beta_0(G) \cdot \chi(G) \leqslant n$;

2) $\chi(G) \cdot \overline{\chi}(G) \geqslant n$.

2.41. Determinar cuál es el menor n con el que existe un grafo no plano de n vértices con un complemento no plano.

2.42. Hallar el grosor del grafo K_8.

2.43. Demostrar que para un grafo conexo arbitrario G con n ($n > 1$) vértices

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = \alpha_1(G) + \beta_1(G) = n.$$

2.44. 1) Poner un ejemplo que refute la afirmación siguiente: cualquier encubrimiento de vértices contiene el encubrimiento de vértices mínimo.

2) Demostrar que cualquier encubrimiento de vértices contiene el encubrimiento de vértices sin salida.

2.45. Hallar el número de encubrimientos de aristas mínimos y finales:

1) de una cadena de longitud m;

2) de un ciclo de longitud n;

3) del grafo de Petersen (fig. 7, *a*).

2.46. Demostrar que para cualquier grafo G son válidas las desigualdades $\alpha_0(G) \geqslant \beta_1(G)$, $\alpha_1(G) \geqslant \beta_1(G)$.

2.47. Demostrar que para cualquier grafo G se cumple la desigualdad $\alpha_{00}(G) \leqslant \alpha_0(G)$.

2.48. Demostrar o refutar la desigualdad $\beta_0(G) \leqslant \alpha_{00}(G)$.

2.49. Supongamos que $U \subseteq V$ es cierto subconjunto de vértices del grafo $G = (V, X)$, y $\nu(U)$ es el número de aquellos vértices $v \subseteq V \setminus U$ que no son adyacentes a ninguno de los vértices de U. Sea

$$\overline{\nu}_k(G) = \frac{1}{\binom{|V|}{k}} \sum_{U \subseteq V,\, |U| = k} \nu(U).$$

1) Mostrar que $\alpha_{00}(G) \leqslant k + \overline{\nu}_k(G)$.

2) Sea d_0 el menor de los grados de los vértices del grafo G. Mostrar que

$$\overline{\nu}_k(G) \leqslant |V| \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{d_0}{|V| - 1}\right).$$

3) Mostrar que para un grafo regular G de grado d que tenga n vértices,

$$\frac{n}{d}\leqslant\alpha_{00}(G)\leqslant 1+\frac{n}{d}(1+\ln d).$$

2.50. Mostrar que si d_0 es el mínimo de los grados de los vértices del grafo G, entonces $\alpha_0(G)\geqslant d_0$.

2.51.* Si G es un grafo dicotiledóneo y m, el número de sus aristas, entonces $m\leqslant\alpha_0(G)\cdot\beta_0(G)$. Mostrar que la igualdad se alcanza sólo para los grafos dicotiledóneos completos.

§ 3. GRAFOS ORIENTADOS

Un *pseudografo orientado* $D=D(V, X)$ se determina con la presentación de un conjunto no vacío (finito) V y una colección X de pares ordenados de elementos de V. Los elementos del conjunto V se llaman *vértices* y los elementos del conjunto X *arcos* (o *aristas orientadas*) del pseudografo orientado $D(V, X)$. En la colección X pueden haber también pares del tipo (v, v) que se denominan *bucles* (o lazos) y pares iguales que se llaman *arcos múltiples* (*o paralelos*). Los pares (u, v) y (v, u) se consideran iguales solamente en el caso en que $u=v$. *Multigrafo orientado* se llama a un pseudografo orientado que no contiene bucles. Si en un pseudografo orientado no hay ni bucles ni arcos múltiples, entonces éste se llama *grafo orientado* (o abreviadamente, *orgrafo*). *Grafo dirigido* se llama a un orgrafo tal que no tiene pares simétricos de aristas orientadas, o sea que el conjunto X no puede contener simultáneamente un arco (u, v) y el arco dirigido en sentido contrario (v, u).

Sea $x=(u, v)$ un arco de un pseudografo orientado. En éste el vértice u se llama *vértice inicial* (o *comienzo*) y v, *vértice final* (o *terminación*) del arco x; en este caso también se dice que el arco x *parte del* vértice u y *llega al* vértice v. Si el vértice v es comienzo o final del arco x, entonces se dice que v y x *son incidentes*. *Semigrado de comienzo del vértice* v (del pseudografo D) se llama al número de arcos del pseudografo D que parten del vértice v. El semigrado de comienzo del vértice v se designa por od (v) o $d^+(v)$. Analógicamente se llama *semigrado de llegada del vértice* v (designación: id (v) y $d^-(v)$) al número de arcos del pseudografo que se ponen en el vértice v.

Sustituyendo cada par ordenado (u, v) de la colección X del pseudografo orientado $D(V, X)$ por un par no orientado $\{u, v\}$, formado por los mismos elementos u y v, se obtiene el *pseudografo* $G=(V, X^0)$ *asociado* a $D(V, X)$.

Los pseudografos orientados $D_1(V_1, X_1)$ y $D_2(V_2, X_2)$ se llaman *isomorfos* si existen dos correspondencias biunívocas φ: $V_1\leftrightarrow V_2$ y ψ: $(X_1\leftrightarrow X_2)$, tales que para cualquier arco $x=(u, v)\in X_1$ es válida la relación $\psi(x)=(\varphi(u), \varphi(v))$. La *transformación isomorfa* de un pseudografo orientado *a sí mismo* se llama *automorfismo del pseudografo*. La totalidad de los automorfismos de un pseudografo orientado forma un grupo con relación a la operación de multiplicación (de cumplimiento sucesivo) de automorfismos. Este grupo se llama *grupo (de automorfismos) de un pseudografo orientado.*

Las operaciones de extracción de vértices y arcos, así como los conceptos de subgrafo, subgrafo soporte y subgrafo engendrado se definen para los pseudografos orientados en forma semejante a como se hizo en los casos de pseudografos no orientados.

Al definir *los conceptos de camino orientado, camino cerrado, cadena, ciclo, cadena simple y ciclo simple* se exige (a diferencia de la definición de los respectivos «conceptos no orientados») que la sucesión (de vértices y arcos) $v_1, x_1, v_2, x_2, \ldots, x_{n-2}, v_{n-1}, x_{n-1}, v_n$ $(n \geqslant 2)$ satisfaga la condición: cada arco x_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ tiene la forma (v_i, v_{i+1}), o sea, que el vértice v_i es el comienzo del arco x_i y el vértice v_{i+1} es su final. Se considera que el $(u - v)$-camino orientado está orientado desde su primer vértice u hasta su último vértice v. *Longitud del camino* se llama al número de arcos que éste tiene. *Distancia* $\rho(u, v)$ *de un vértice* u *a otro vértice* v se llama la longitud del $(u - v)$-camino más corto. A un camino orientado con frecuencia se lo denomina *vía* y a un ciclo simple orientado, *contorno.*

A una cadena soporte simple orientada se le llama *camino hamiltoniano (cadena hamiltoniana)*. Se denomina *contorno hamiltoniano* al contorno soporte de un pseudografo orientado. Si un pseudografo orientado contiene un contorno hamiltoniano, entonces el propio pseudografo también se llama *hamiltoniano.*

Se dice que el vértice v de un pseudografo orientado *es accesible desde* el vértice u si en el pseudografo existe un $(u - v)$-camino, o sea un camino que parte del vértice u y llega al vértice v.

Un pseudografo orientado se llama *fuertemente conexo* (o *fuerte*) si en él cualquier vértice es accesible desde cualquier otro vértice suyo. Un pseudografo orientado se llama *conexo unilateral* (o *unilateral*) si para cualesquiera dos vértices por lo menos uno es accesible desde el otro. Un pseudografo orientado $D(V, X)$ se llama *débilmente conexo* (o *débil*) si el pseudografo (V, X^0) asociado a él es conexo. Si un pseudografo orientado ni siquiera es débilmente conexo, entonces se llama *inconexo*. Un *orgrafo trivial*, que consta solamente de un vértice, se considera (por definición) fuertemente conexo.

Componente fuerte del orgrafo D se llama a cualquiera de sus subgrafos orientados que sea orgrafo fuerte y que no se contenga en ningún otro subgrafo orientado fuertemente conexo del orgrafo D. Analógicamente, un *componente unilateral* representa en sí un subgrafo unilateral máximo del orgrafo D, y un *componente débil*, un subgrafo débil máximo. Los conceptos de componente fuerte, unilateral y débil se generalizan en forma natural para el caso de un pseudografo orientado.

Sea $\gamma = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ el conjunto de todos los componentes fuertes del orgrafo D. *Condensación* D^* del orgrafo D se llama un tal orgrafo, cuyo conjunto de vértices es γ y el arco (S_i, S_j) estará en el orgrafo D^* si, y sólo si, en el orgrafo D existe aunque sea un arco que sale de cierto vértice del componente S_i y llega a algún vértice del componente S_j.

Si $D = D(V, X)$ es un orgrafo, entonces el orgrafo inverso a él D' se da con el mismo conjunto de vértices V y con un conjunto de arcos X' tal que el arco (u, v) pertenece a X' si, y sólo si, el arco (v, u) pertenece a X.

El vértice v del orgrafo D se llama *fuente* si desde él es accesible cualquier otro vértice del orgrafo D. *Sumidero* del orgrafo D se llama todo vértice suyo v que sea fuente en el orgrafo inverso (al orgrafo D) D'.

Supongamos que D es un orgrafo para el cual el grafo asociado a él es un árbol. Entonces el orgrafo D se llama *árbol creciente*, si él tiene fuente. Un pseudografo orientado se denomina *completo* si en él cualesquiera dos vértices diferentes se unen aunque sea con un arco.

Torneo se llama a un grafo dirigido completo.

Sea D un orgrafo de n vértices y el conjunto de sus vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Matriz de adjunción* del orgrafo D se llama a la $(n \times n)$-matriz $A(D) = \| a_{ij} \|$ en la cual $a_{ij} = 1$ si el arco (v_i, v_j) pertenece al orgrafo D y $a_{ij} = 0$ en el caso contrario. Supongamos además que el conjunto de todos los arcos del orgrafo D también está ordenado: $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. *Matriz de incidencia* (o *matriz incidental*) del orgrafo D se llama a la $(n \times m)$-matriz $B(D) = \| b_{ij} \|$ en la que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el vértice } v_i \text{ es final del arco } x_j, \\ -1 \text{ si el vértice } v_i \text{ es comienzo del arco } x_j, \\ 0 \text{ si el vértice } v_i \text{ no es incidente al arco } x_j. \end{cases}$$

3.1. Refutar la afirmación: si los semigrados de partida y de llegada de cualquier vértice de un orgrafo son positivos y pares, entonces para cada vértice del orgrafo habrá un contorno que le contenga.

3.2. Supongamos que el orgrafo $D(V, X)$ es por lo menos débilmente conexo, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n \geqslant 2$ y $d^+(v_1) - d^-(v_1) = 1$, $d^+(v_2) - d^-(v_2) = -1$, $d^+(v_j) = d^-(v_j)$, con $j = 3, \ldots, n$. Demostrar que entonces en el orgrafo D existe una $(v_1 - v_2)$-cadena orientada, que contiene todos los arcos del orgrafo.

3.3. Demostrar que un orgrafo es fuertemente conexo si, y sólo si, en él existe un camino cerrado soporte orientado.

3.4. Demostrar que un orgrafo débil es fuertemente conexo si, y sólo si, en él existe un camino cerrado orientado que contiene cada arco del orgrafo aunque sea una vez.

3.5. Supongamos que el orgrafo D se puede representar en forma de una unión de ciertos caminos cerrados orientados suyos $D_1, D_2, \ldots, D_k$ $(k \geqslant 1)$, que satisfacen la condición: cada dos caminos vecinos D_j y D_{j+1} $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ tienen aunque sea un vértice común. Demostrar que entonces el orgrafo D es fuertemente conexo.

3.6. Demostrar que en cualquier torneo hay un camino hamiltoniano.

3.7. Demostrar que el torneo T es orgrafo fuerte si, y sólo si, T tiene un contorno soporte (o sea que es un torneo hamiltoniano).

3.8. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ el conjunto de los vértices de un torneo. Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} (d^+(v_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (n - d^+(v_i))^2$.

3.9. Supongamos que el vértice v del torneo T tiene un semigrado de salida no menor que el semigrado de salida de cada uno de los otros vértices del torneo. Demostrar que la distancia del vértice v a cualquier vértice del torneo no supera a 2.

3.10*. Designemos por S cierto conjunto de arcos del torneo T. Los arcos del conjunto S se llaman *concordados* si se pueden numerar los vértices del torneo T de tal forma que de la pertenencia del arco (v_i, v_j) al conjunto S se pueda deducir la desigualdad $i < j$. Supongamos que $f(n)$ es el mayor número entero tal, que cada torneo de n vértices $(n \geqslant 3)$ contiene un conjunto S formado por $f(n)$ arcos concordados. Demostrar que $f(n) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

3.11*. Demostrar que el número de ciclos orientados de longitud 3 en un torneo de n vértices no es mayor que

$$t(n) = \begin{cases} \dfrac{n(n^2-1)}{24} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \dfrac{n(n^2-4)}{24} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

3.12. Demostrar que el grupo de automorfismos de cualquier torneo tiene un orden impar (o sea que está formado de un número impar de elementos).

3.13. Mostrar que en la condensación D^* de un orgrafo arbitrario no hay contornos.

3.14. Demostrar que el orgrafo D es unilateral si, y sólo si, su condensación D^* tiene una única cadena soporte orientada.

3.15. El orgrafo $D(V, X)$ se llama *transitivo* si de la pertenencia de los arcos (u, v) y (v, w) al conjunto X se deduce la pertenencia al conjunto X del arco (u, w). Demostrar que la condensación de cualquier torneo es un torneo transitivo.

3.16. *Orgrafo sin contornos* se llama a un orgrafo que no contiene contornos. Demostrar que en un orgrafo sin contornos existe un vértice con un semigrado de salida nulo.

3.17. Demostrar que un orgrafo es isomorfo en su condensación si, y sólo si, él no tiene contornos.

3.18. Sea el orgrafo D débilmente conexo, pero no unilateral. Demostrar que en D no existe tal vértice que extrayéndoselo le convierte en un orgrafo fuerte.

3.19. Demostrar que un orgrafo débil es árbol creciente si, y sólo si, únicamente uno de sus vértices tiene un semigrado de llegada nulo y el semigrado de llegada de los demás vértices es igual a 1.

3.20. Sea S_n un grupo de sustituciones simétrico aplicado al conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 2$. Examinemos la unión arbitraria T

de las transposiciones del grupo S_n. Al conjunto T se le puede cotejar el orgrafo $D(V, X_T)$ que tiene $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ y el arco (i, j) pertenece a X_T sólo en el caso en que $i < j$ y la transposición (ij) se contiene en el conjunto T. Demostrar que el conjunto T forma una base en S_n (o con otras palabras, el conjunto T es un *sistema irreducible* de generatrices del grupo S_n) si, y sólo si, el orgrafo $D(V, X_T)$ es un árbol creciente.

3.21. Demostrar que un orgrafo completo fuertemente conexo es hamiltoniano.

3.22. Mostrar que en orgrafo completo hay fuente.

3.23. Convencerse de que cualquier torneo transitivo tiene un solo camino hamiltoniano.

3.24. Demostrar que en cada torneo el número de todos los diferentes caminos hamiltonianos es impar.

3.25. Supongamos que un orgrafo completo fuertemente conexo tiene n vértices $(n \geqslant 3)$. Demostrar que con cualquier valor de k $(3 \leqslant k \leqslant n)$ para todo vértice del orgrafo habrá un contorno de longitud k que contiene este vértice.

3.26. Sea $D(V, X)$ un orgrafo completo fuertemente conexo que tiene $|V| \geqslant 4$. Mostrar que en el orgrafo D existen dos vértices diferentes v_1 y v_2 que satisfacen la condición: los orgrafos D_1 y D_2 que se obtienen del orgrafo D después de la extracción de los vértices v_1 y v_2 (respectivamente) son fuertemente conexos.

3.27. Por A^q se designa la matriz de la contigüidad de q-ésimo grado $A(D) = \| a_{ij} \|$ del orgrafo D. Demostrar que el (i, j)-ésimo elemento $a_{ij}^{(q)}$ de la matriz A^q es igual al número de todos los $(v_i - -v_j)$-caminos de longitud q (en el orgrafo D).

3.28. Sea B la matriz de incidencias del orgrafo $D(V, X)$. Mostrar que el subconjunto X_1 de arcos del orgrafo D $(X_1 \subseteq X)$ genera un ciclo simple (que puede no ser orientado) si, y sólo si, el conjunto de las columnas (de la matriz B) que corresponden a estos arcos es linealmente dependiente y cualquier subconjunto suyo propio no tiene esta propiedad.

3.29. Demostrar que un determinante de cualquier submatriz cuadrada de la matriz de incidencias $B(D)$ del orgrafo D es igual a 0, a $+1$, o bien a -1.

3.30. Sea B la matriz de las incidencias de un orgrafo débilmente conexo de n vértices D y sea la matriz $\overline{B}$ obtenida de B eliminando cualquier (una) fila. Demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre diferentes[1]) árboles orientados del orgrafo D (considerados como subgrafos orientados del orgrafo D) y las submatrices no degeneradas del orden $n - 1$ de la matriz $\overline{B}$.

3.31. Supongamos que la matriz $\overline{B}$ es la submatriz de la matriz de las incidencias B del orgrafo débilmente conexo D que fue descrita en el problema anterior. Por $\overline{B}'$ se designa la matriz transpuesta

[1]) Aquí se considera que los dos árboles son *diferentes*, si son orientados *no isomorfos* con los vértices *marcados* (*numerados*).

a la matriz $\overline{B}$. Demostrar que el número de diferentes árboles orientados que hay en el orgrafo D es igual al valor del determinante de la matriz $\overline{B}\cdot\overline{B}'$.

§ 4. ARBOLES Y REDES BIPOLARES

El pseudografo $G = (V, X)$ en el que se han seleccionado k vértices, llamados *polos*, se denomina *red k-polar*. El pseudografo G se llamará *grafo* correspondiente a la *red k-polar*. La red Γ con el conjunto de polos P y el grafo $G (V, X)$ se designará por $(P; V, X)$. Dos redes k-polares son *isomorfas* si sus grafos son isomorfos y al

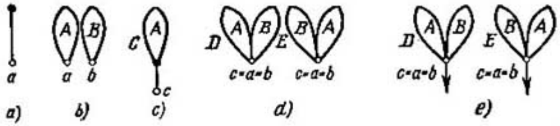


Fig. 10.

mismo tiempo los polos de una red mutua y unívocamente corresponden a los polos de la otra. Una red unipolar, cuyo grafo es un árbol, se llama *árbol radical*. El único polo de tal red se llama *raíz*. *Arbol radical plano* se llama a la representación del grafo en un plano. Este concepto se puede definir por inducción de la manera siguiente. La red representada en la fig. 10, *a*, es un árbol radical plano. Si A y B (véase la fig. 10, *b*) son árboles radicales planos, entonces las figuras C, D, E (fig. 10, *c*, *d*) también son árboles radicales planos. Consideraremos que un árbol radical plano arbitrario se representa en el plano con un corte, que es una semirecta que sale de la raíz (véase fig. 10, *e*). Aquí se puede suponer que las aristas incidentes a la raíz están numeradas en el sentido del giro de las agujas del reloj con los números $1, \ldots, m$, donde m es el grado de la raíz. Si se extrae de este árbol radical plano la arista de número i, entonces se obtendrá un grafo con dos componentes de conexión. A aquel de los componentes que no contiene raíz le llamaremos i-ésima *rama* del árbol radical inicial. La raíz de la i-ésima rama se considerará el vértice incidente a la i-ésima arista (en el árbol inicial). Designaremos por $d_0(A)$ el grado de la raíz de un árbol radical arbitrario A. Los árboles radicales planos A y B se llaman *iguales* si bien $d_0(A) = d_0(B) = 0$, o bien $d_0(A) = d_0(B) = m > 0$ y para cualquier $i = \overline{1, m}$ las i-ésimas ramas de los árboles A y B son iguales. Dos árboles que no son iguales se llaman *diferentes*. Así que los árboles D y E (véase la fig. 10, *d*) son diferentes si los árboles A y B (véase la fig. 10, *b*) son diferentes. A cada árbol radical plano T con m

aristas se le puede unívocamente cotejar un vector binario de longitud $2m$ llamado *código del árbol*. A un árbol con una arista se le coteja el vector 01. Si a los árboles A y B (fig. 10, b) se les cotejan los vectores $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ respectivamente, entonces al árbol C (fig. 10, c) se le coteja el vector $0\tilde{\alpha}1$ y a los árboles D y E (fig. 10, d), los vectores $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ y $\tilde{\beta}\tilde{\alpha}$.

A continuación, si no se menciona lo contrario, por red se entenderá una red de dos polos. La red Γ ($\{a, b\}$; V, X) se designará abreviadamente por Γ (a, b). *Subgrafo* de esta red se llamará a un subgrafo del grafo (V, X). A un vértice del subgrafo no trivial G de la red Γ se le llama de *frontera* si él, o bien es un polo, o bien es incidente a cierta arista de la red que no pertenece al subgrafo G. Un subgrafo no trivial de una red se llama *ramificación* (derivación) si posee el único vértice de frontera. *Subred* de una red de dos polos se llama a su subgrafo que tiene exactamente dos vértices de frontera. Estos vértices son los polos de la subred. Una red se llama *conexa* si su grafo es conexo. *Trivial* se llama a una red (o subred) conexa que tiene una arista. Una red conexa se llama *fuertemente conexa* si por cada arista pasa una cadena simple que une los polos de la red. Una red fuertemente conexa se llama *descomponible* si ella posee aunque sea una subred no trivial. En el caso contrario se denomina *indescomponible*. Supongamos que Γ (a, b) es una red descomponible, G (c, d) es su subred no trivial y Γ_1 (a, b) es la red obtenida de Γ (a, b) mediante la sustitución de la subred G (c, d) por la arista (c, d). Entonces a su vez la red Γ (a, b) puede ser obtenida mediante la sustitución de la arista (c, d) de la red Γ_1 (a, b) por la red G (c, d). De esta manera, la red descomponible Γ (a, b) puede ser representada por medio de la red Γ_1 (a, b), la arista (c, d) de la red Γ_1 (a, b) y la red G (a, b). Tal representación se llama *descomposición de la red* Γ (a, b). La red Γ_1 (a, b) se llama red *exterior* y la red G (c, d), *red interior de la descomposición*. La red Γ (a, b) se llama *superposición de las redes* Γ_1 (a, b) y G (c, d). Una red formada de m aristas paralelas que unen los polos a, b se designa por Γ_m^p (a, b) o, abreviadamente, por Γ_m^p. Una red cuyo grafo es una cadena simple de longitud m y que une los polos a, b se designa por Γ_m^s (a, b) o, abreviadamente por, Γ_m^s. La red que puede ser obtenida de las redes Γ_2^p y Γ_2^s mediante la aplicación de un número finito de operaciones de sustitución de una arista por una red, se llama red *paralelasecuencial* o abreviadamente π-red. Una red indescomponible y no trivial Γ (a, b), diferente de Γ_2^p (a, b) y de Γ_2^s (a, b) se llama *H-red*.

Una red descomponible se llama *p-descomponible* (o respectivamente *s-descomponible*) si cierta red exterior de descomposición tiene la forma de Γ_m^p (o respectivamente de Γ_m^s), $m \geqslant 2$. Si cierta red exterior de descomposición de la red Γ es una H-red, entonces Γ se llama H-descomponible. Es válida la afirmación de que toda red descomponible es p-, s-, o bien H-descomponible. Una *p-descomposición* en la que las redes interiores de descomposición son diferentes de las redes del tipo Γ_2^p que son p-descomponibles, se llama *p-descomposición canónica* de una red. De manera semejante se define la *s-descomposición canónica.* Una descomposición cuya red exterior es una H-red se llama *H-descomposición canónica.* A cada π-red Γ con $m \geqslant 1$ aristas se le puede cotejar un árbol radical plano $T(\Gamma)$ con m vértices colgantes, tal que: a) cada vértice del árbol $T(\Gamma)$, diferente de uno colgante, esté marcado con uno de los signos p o s; b) en cada red que va desde la raíz hasta un vértice colgante las marcas p y s

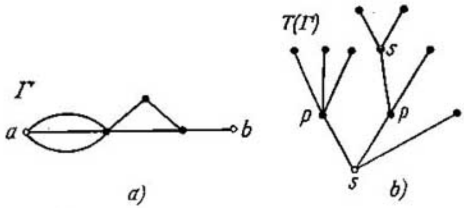


Fig. 11.

se alternan; c) los vértices diferentes de la raíz tienen un grado no igual a dos. Los vértices colgantes del árbol $T(\Gamma)$ no están marcados. El árbol $T(\Gamma)$ se define por inducción. Si Γ tiene el tipo Γ_m^p (o Γ_m^s), entonces $T(\Gamma)$ es un árbol cuya raíz está marcada con el símbolo p (respectivamente, con el símbolo s) y los demás m vértices son colgantes, adjuntos a la raíz y no tienen marcas. Si la red Γ es descomponible y diferente de las redes del tipo indicado, la red exterior de descomposición tiene la forma Γ_k^p (o Γ_k^s) y las redes interiores son $G_1, G_2, \ldots, G_k$, entonces el árbol $T(\Gamma)$ se construye de la manera siguiente. Supongamos que $T(G_1)$, $T(G_2)$, $\ldots$, $T(G_k)$ son los árboles que corresponden a las redes interiores de descomposición. Entonces en calidad de raíz $T(\Gamma)$ se toma el vértice de grado k marcado con el símbolo p (respectivamente con el símbolo s). Los vértices adjuntos a la raíz se marcan con el símbolo s (respectivamente con el símbolo p). Los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ adjuntos a la raíz se identifican con las raíces de los árboles $T(G_1)$, $T(G_2)$, $\ldots$, $T(G_k)$. Por ejemplo, la π-red representada en la fig. 11, *a* corresponde al árbol representado en la fig. 11, *b*. El árbol $T(\Gamma)$ se llama *diagrama de la descomposición canónica* de la π-red Γ. Observemos que si la red exterior de descomposición de la red Γ tiene la forma $\Gamma_k^s(a, b)$ y las aristas (a, u_1), (u_1, u_2), $\ldots$, (u_{k-1}, b) se sustituyen por las redes interiores $G_1(a, u_1)$, $G_2(u_1, u_2)$, $\ldots$, $G_k(u_{k-1}, b)$ respectivamente, entonces en el árbol $T(\Gamma)$ los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$, identificados con las raíces de los árboles radicales planos $T(G_1)$, $T(G_2)$, $\ldots$, $T(G_k)$ se suceden uno a otro de izquierda a derecha en el orden creciente de los números. Así que el árbol $T(\Gamma')$ representado en la fig. 12, *b* es el diagrama de la descomposición canónica de la red Γ' (fig. 12, *a*), pero no es el diagrama de la red Γ (véase la fig. 11, *a*).

Un vértice de la red diferente de un polo se llama *interior*. El vértice v depende del vértice u si cualquier cadena simple que une los polos y pasa por v, también pasa por u. Los vértices v y u son *equivalentes* si v depende de u y u depende de v. El vértice v es *más débil* que el vértice u y el vértice u es *más fuerte* que el vértice v si v depende de u pero no es equivalente a él. El vértice v sa llama *mínimo* si no es más débil que ningún otro vértice interior de la red. En lo sucesivo se llamará *cadena de la red* a una cadena simple que une los polos de la red. En los casos en los que el término «cadena» se emplee en otro sentido eso se mencionará especialmente. A una cadena de la red se la llama la *más corta* si tiene la menor longitud posible.

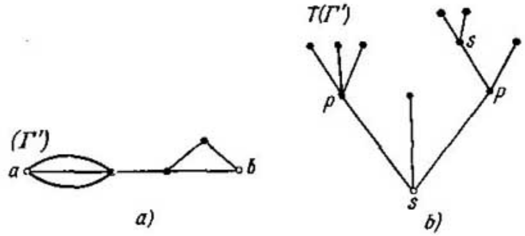


Fig. 12.

Longitud de la red se llama a la longitud de su cadena más corta. *Corte* se llama al conjunto de aristas cuya extracción destruye todas las cadenas. El corte se llama *sin salida* si no tiene ningún subconjunto que sea corte. El corte se llama *mínimo* si tiene el menor número posible de aristas. El número de aristas de un corte mínimo se llama *ancho* de la red.

4.1. Sea G un grafo con $n \geqslant 2$ vértices. Demostrar la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

1) G es un grafo conexo con $n-1$ aristas.

2) G es un grafo conexo pero después de la extracción de cualquier arista se hace inconexo.

3) Cualquier par de vértices diferentes del grafo G está unido por una cadena única.

4) G es un grafo sin ciclos pero si se añade una arista que una a cualesquiera dos vértices eso lleva a la aparición de un ciclo.

4.2. Demostrar que en cualquier árbol con $n \geqslant 2$ vértices hay no menos de dos vértices colgantes.

4.3. Demostrar que si en un grafo no trivial G el número de vértices colgantes es igual al número de aristas, entonces, o bien G es inconexo, o bien es árbol.

4.4. Supongamos que $F(G) = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ es una familia de grafos en la cual el grafo H_i ha sido obtenido del grafo de n vértices G mediante la extracción del vértice con el número i $(i=\overline{1, n})$. En los grafos H_i los vértices no están marcados. Demostrar que:

1) por la familia $F(G)$ se puede aclarar si es el grafo G un árbol;

2) si G es árbol, entonces por $F(G)$ se puede unívocamente (con una exactitud hasta el isomorfismo) reconstruir G.

4.5. Se llama *intersección* de dos *grafos* G y H al grafo $G \cap H$, todos los vértices y aristas del cual pertenecen tanto a G como a H. Mostrar que una intersección no vacía de dos subárboles de un árbol, es árbol.

Sea $\rho_G(v, u)$ la distancia entre los vértices v y u en el grafo $G = (V, X)$. El vértice u_0, para el cual

$$\max_{v \in V} \rho_G(u_0, v) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} \rho_G(u, v),$$

se llama *centro del grafo* y el número $R(G) = \max\limits_{v \in V} \rho_G(u_0, v)$ se llama *radio del grafo*.

4.6. 1) Hallar el número de centros en el grafo

a) G (véase la fig. 6, *a*);

b) G (véase la fig. 6, *b*);

c) $G = K_{n_1, n_2}$.

2) Demostrar que en cualquier árbol hay no más de dos centros.

4.7. Demostrar que un árbol tiene un centro único en el caso de que su diámetro sea número par y tiene dos centros cuando el diámetro es número impar.

4.8. 1) Sean $D(G)$ el diámetro y $R(G)$ el radio del grafo G. Mostrar que $R(G) \leqslant D(G) \leqslant 2R(G)$.

2) Mostrar que si G es un árbol, entonces $R(G) = \left]\frac{D(G)}{2}\right[$.

3) Poner el ejemplo de un grafo G para el cual $R(G) = D(G)$.

4.9*. Demostrar que un árbol se reconstruye unívocamente con una exactitud hasta el isomorfismo, si se dan de par en par las distancias entre sus vértices colgantes.

4.10. Mostrar que en un árbol con un diámetro impar cualesquiera dos cadenas simples de longitud máxima tienen aunque sea una arista común.

4.11. *Arbol infinito* se llamará a un grafo con un conjunto numerable de vértices que satisface la condición siguiente: para cualesquiera dos vértices u, v del grafo existe una única $(u - v)$-cadena simple y la longitud de esta cadena es finita. Demostrar que si el grado de cada vértice de un árbol infinito es finito, entonces para todo vértice existe una cadena simple de longitud infinita que contiene a este vértice.

4.12. Sea $P = \{v_1, v_2, \ldots\}$ una cadena simple infinita. Sea $G = K_2 \times P$. ¿Cuál será la potencia del conjunto de todos los árboles soportes del grafo G?

Supongamos que $G = (V, X)$ es un multigrafo con un conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $M(G) = \| a_{ij} \|$ es una matriz cuadrada de un orden n, en la que

$$a_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & \text{con } i = j; \\ -1 & \text{con } i \neq j, \ (v_i, v_j) \in X; \\ 0 & \text{con } i \neq j, \ (v_i, v_j) \notin X. \end{cases}$$

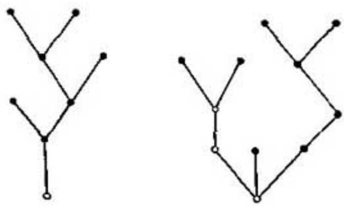
Se sabe [33] que el número de diferentes árboles soportes de par en par del grafo es igual al menor de cualquiera de los elementos de la diagonal principal de la matriz $M(G)$.

4.13. Hallar el número de árboles soportes de los grafos representados en las figs. 4, *a*, *b*; 8, *a*, *b*, habiendo numerado los vértices de estos grafos anticipadamente.

4.14. ¿Cuál es el número cromático de un árbol con $n \geqslant 2$ vértices?

4.15. ¿Es cierto que si el diámetro de un grafo G es igual a k ($k > 2$), entonces existe un árbol soporte cuyo diámetro es k?

4.16. Demostrar que siempre que $n \geqslant 3$ el número de árboles radicales isomorfos de par en par con n vértices, supera en no menos



a) *b)*

Fig. 13.

de dos veces al número de árboles no isomorfos de par en par con n vértices que no tienen raíz.

4.17. Supongamos que un árbol radical con n ($n \geqslant 2$) vértices colgantes no tiene vértices de grado 2 diferentes de la raíz. Mostrar que el número total de los vértices del árbol no es mayor que $2n - 1$.

4.18. Construir los códigos de los árboles radicales planos representados en la fig. 13, *a*, *b*.

4.19. Por el código $\tilde{\alpha}$ dado construir un árbol radical plano.

1) $\tilde{\alpha} = (001010011011)$;

2) $\tilde{\alpha} = (0100011001101011)$;

3) $\tilde{\alpha} = (0001010110011011)$.

4.20. 1) Aclarar cuantos árboles con cuatro aristas que sean radicales y no isomorfos de par en par existen.

2) ¿Cuántos árboles radicales planos con cuatro aristas diferentes de par en par existen?

4.21. Dividir el conjunto de vectores $\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5\}$ en clases de equivalencia de tal manera, que los vectores de una clase sean códigos de los árboles isomorfos de par en par siguientes:

$$\tilde{\alpha}_1 = (0010101101), \quad \tilde{\alpha}_2 = (0100101101),$$
$$\tilde{\alpha}_3 = (0101001011); \quad \tilde{\alpha}_4 = (0100101011),$$
$$\tilde{\alpha}_5 = (0010110101).$$

4.22. Demostrar que el código $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n})$ de un árbol radical plano con n aristas tiene las siguientes propiedades:

1) $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i = n$;

2) para cualquier $k\,(1 \leqslant k \leqslant 2n)$ es válida la desigualdad $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant k/2$.

4.23. Mostrar que cualquier vector binario $\tilde{\alpha}$ de longitud $2n$, que satisface las condiciones 1) y 2) del problema anterior, es el código de un grafo radical plano con n aristas.

4.24. 1) Mostrar que para el número $\psi(n)$ de los vectores $\tilde{\alpha} \in B^{2n}$ que satisfacen las condiciones 1), 2) del problema 4.22, es válida la relación recurrente

$$\psi(n) = \sum_{i=1}^{n} \psi(i-1)\,\psi(n-i), \text{ donde } \psi(0) = \psi(1) = 1.$$

2*) Hallar la expresión analítica de $\psi(n)$.

4.25. Supongamos que G es un grafo plano conexo. Partiendo de cierto vértice v, perteneciente a una cara exterior, recorreremos esta frontera de tal forma que ella constantemente se encuentre a la derecha según la dirección del recorrido. En cierto momento de nuevo llegaremos al vértice inicial v. El recorrido continuará si quedan aristas que no se han pasado, incidentes al vértice v y pertenecientes a la frontera de la cara exterior. En el caso contrario el recorrido se termina.

1) Demostrar que G es un árbol si, y sólo si, durante el recorrido cada arista se pasa dos veces.

2) Supongamos que G es un árbol con la raíz v. De acuerdo con el recorrido descrito anteriormente, al árbol se le puede cotejar un vector binario. Pasando sucesivamente una arista tras otra, al recorrer la arista de turno anotaremos 0 si pasamos por ésta la primera vez y 1 si pasamos la segunda vez. Mostrar que el vector obtenido de esta manera es el código del árbol G.

4.26. Supongamos que G es un grafo con n vértices y m aristas. El grafo se llama *compensado* si ningún subgrafo suyo tiene vértices de un grado mayor que $2m/n$.

1) Demostrar que un árbol con $n > 2$ es un grafo no compensado.

2) Poner el ejemplo de un grafo compensado en el que $m = n + 3$.

4.27. Sea G un grafo, a cada arista del cual se le ha inscrito un peso que es un número real no negativo. Se llama *peso del subgrafo* del grafo G a la suma de los pesos de las aristas de este subgrafo. Se llama *árbol recubriente mínimo del grafo* G al árbol soporte del mismo, que tenga un peso mínimo. Demostrar que se puede obtener un árbol recubriente mínimo empleando el algoritmo siguiente. En el primer paso del algoritmo se selecciona la arista de menor peso. Después en el paso sucesivo se selecciona la arista que tenga el peso menor entre todas las aristas que no formen ciclo con las aristas seleccionadas anteriormente. El algoritmo termina su funcionamiento si ya no existe una tal arista.

4.28. ¿Es justo que cualquier subred de una red fuertemente conexa es fuertemente conexa?

4.29. Supongamos que en una red conexa hay una única ramificación con k vértices que no se contiene en otra derivación con un número mayor de vértices. Mostrar que es suficiente trazar $k - 1$ aristas complementarias para hacer la red fuertemente conexa. ¿Se puede siempre hacer lo mismo con menor número de aristas complementarias?

4.30. ¿Es cierto que para cualesquiera n y m ($m \geqslant n \geqslant 3$) existen redes descomponibles con n vértices y m aristas?

4.31. ¿Es cierto que un grafo fuertemente conexo es 2-conexo?

4.32. ¿Es cierto que si se seleccionan en un grafo cúbico 2-conexo arbitrario dos vértices no adyacentes en calidad de polos, entonces se obtendrá una red indescomponible?

4.33. ¿Cuántas redes indescomponibles no isomorfas de par en par se pueden obtener seleccionando en un cubo n-dimensional dos vértices en calidad de polos?

4.34. 1) Mostrar que si una red indescomponible tiene $n > 2$ vértices y m aristas, entonces

$$3n \leqslant 2m + 2 \leqslant n(n - 1).$$

2) Mostrar que para cualesquiera m y n, tales que $m \geqslant \frac{3}{2} n - 1$, $n \geqslant 4$ existe una red indescomponible con n vértices y m aristas.

4.35. Para las redes representadas en la fig. 14, a, b. c,

1) determinar el tipo de descomposición;

2) hallar las redes exteriores de la descomposición canónica.

4.36. Sea Γ la red representada en la fig. 15.

1) Indicar todos los vértices minimales de la red.

2) Dividir todos los vértices interiores de la red en clases formadas de vértices equivalentes de par en par.

3) Comprobar si existe en esta red un vértice que sea más débil que todos los demás.

4.37. Demostrar que para cada vértice v de una red fuertemente conexa, existe una cadena que contiene todos los vértices más fuertes que él o equivalentes a él.

4.38. Supongamos que $S(\Gamma)$ es el conjunto de tales vértices v de la red Γ que no son mínimos.

1) ¿Es cierto que si Γ es una red H-descomponible sin aristas múltiples, entonces después de la unión de cada vértice $v \in S(\Gamma)$ por las aristas con cada uno de aquellos polos a los cuales v es no adyacente resultará una red indescomponible?

2) ¿Es suficiente para obtener una red indescomponible unir cada vértice v de $S(\Gamma)$ exactamente con uno de aquellos polos a los cuales v no es adjunta?

4.39. 1) Mostrar que todo vértice divisorio es mínimo.

2) Mostrar que todo vértice adjunto a ambos polos es mínimo.

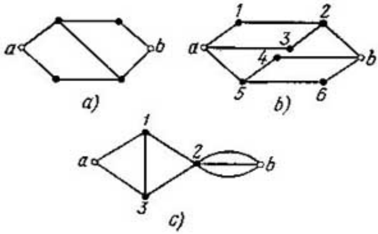


Fig. 14.

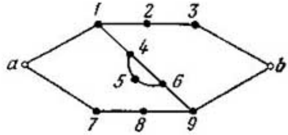


Fig. 15.

4.40. Sean todos los vértices de la red fuertemente conexa Γ mínimos.

1) Aclarar si la red Γ puede ser:

a) p-descomponible;

b) s-descomponible;

c) H-descomponible.

2) Supongamos que la red Γ es s-descomponible. Mostrar que cada vértice interior es divisor.

3) Supongamos que la red Γ es H-descomponible. Comprobar si alguna de sus redes interiores puede ser:

a) H-red;

b) red H-descomponible;

c) red diferente de las redes Γ_m^p $(m \geqslant 1)$.

4.41. Supongamos que la red fuertemente conexa Γ que tiene 8 aristas no es ni p-, ni s-descomponible y no tiene subredes del tipo Γ_m^p, Γ_m^s $(m > 1)$. Mostrar que Γ es una red indescomponible.

4.42. Sea $G = (V_1, V_2, X)$ un grafo conexo bipolar en el que el grado de cada vértice es mayor o igual a 2. Mostrar que si se construye una red $\Gamma(a, b)$, uniendo con arista el polo a con cada vértice del conjunto V_1, y el polo b, con cada vértice del conjunto V_2, entonces esta red resultará una H-red.

4.43. ¿Existe una red p-descomponible en la que cualquier subred que tenga no menos de tres aristas es p-descomponible?

4.44. Construir los diagramas de la descomposición canónica para cada una de las redes representadas en la fig. 16, *a*, *b*.

4.45. Construir π-redes que tengan los diagramas de la descomposición canónica como los representados en la fig. 17, *a*, *b*.

4.46. Demostrar que si las π-redes Γ_1 y Γ_2 no son isomorfas, entonces tienen diferentes diagramas de descomposición canónica.

4.47. Supongamos que A y B son dos cadenas de la red $\Gamma(a, b)$, que el vértice u pertenece a la cadena A pero no pertenece a la cadena B y que el vértice v pertenece a la cadena B pero no pertenece a la A. Supongamos además que $[u, v]$ es una cadena simple que une u y v,

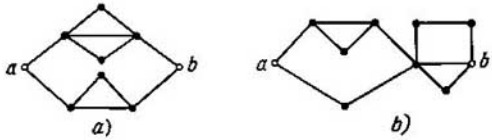


Fig. 16.

y no se cruza con las cadenas A y B en ningún sitio excepto en sus extremos.

1) Demostrar que existen por lo menos dos cadenas de la red Γ cuyos vértices pertenecen a la unión de las cadenas A, B y $[u, v]$,

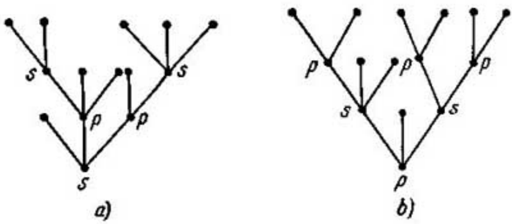


Fig. 17.

y que contienen la cadena $[u, v]$. ¿Es qué existen siempre aunque sea tres cadenas así?

2) Mostrar que si las cadenas A y B tienen vértices interiores comunes pero no tienen aristas comunes, entonces existen no menos de cuatro cadenas de la red que se contienen en la unión de las cadenas A, B y $[u, v]$, que satisfacen las condiciones del punto 1).

4.48. Demostrar la equivalencia de las dos definiciones siguientes de π-red:

1) La red $\Gamma(a, b)$ se llama π-red si se pueden orientar sus aristas de tal manera que en cada cadena simple que une los polos a y b, todas las aristas estén dirigidas de a hacia b.

2) π-redes se llaman aquéllas y solamente aquéllas redes que se obtienen con el siguiente proceso inductivo:

a) Las redes Γ_2^p y Γ_2^s (fig. 18, *a*) son π-redes.

b) Si las redes A y B (fig. 18, *b*) son π-redes, entonces las redes representadas en la fig. 18, *c* son π-redes.

4.49. Mostrar que entre todas las π-redes con m ($m > 4$) aristas, el mayor número de cadenas más cortas tienen redes s-descomponibles.

4.50. 1) Indicar el tipo de π-redes que tienen el número máximo de cadenas simples que unen los polos.

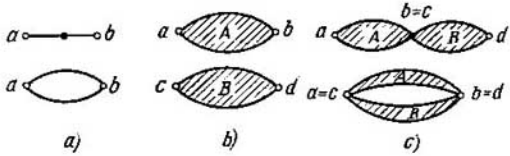


Fig. 18.

2) Indicar el tipo de π-redes que tienen el mayor número de cortes sin salida.

4.51. Sea $\varphi(m)$ el mayor número de cadenas de una π-red con m aristas. Mostrar que:

1) $\varphi(1) = 1$;
2) $\varphi(3n) = 3^n$ $(n \geqslant 1)$;
3) $\varphi(3n+1) = 4 \cdot 3^n$ $(n \geqslant 1)$;
4) $\varphi(3n+2) = 2 \cdot 3^n$ $(n \geqslant 1)$.

4.52. ¿Es cierto que entre todas las redes con m aristas son las π-redes las que tienen el mayor número de cadenas simples?

4.53. Para cada $n \geqslant 5$ indicar la H-red con n vértices que tiene el número máximo de cadenas que unen los polos. Contar para cada k $(1 \leqslant k < n)$ el número de cadenas de longitud k entre los polos.

4.54. Mostrar que para una red con m aristas que tiene una longitud l y una anchura t es válida la desigualdad $m \geqslant l \cdot t$.

4.55. Demostrar que en una π-red la intersección de cualquier cadena simple entre los polos y cualquier sección sin salida contiene exactamente una arista.

4.56*. El conjunto de las cadenas de la red Γ se llama *determinante* para el vértice v si la intersección de los conjuntos de los vértices interiores de estas cadenas es $\{v\}$. Demostrar o refutar la siguiente afirmación: para que una red sin aristas múltiples, que no es p-descomponible sea indescomponible, es necesario y suficiente que para cualquier vértice interior exista un conjunto determinante de cadenas.

4.57. Demostrar la afirmación siguiente. Para que a una red descomponible Γ, mediante la añadidura de aristas, se la pueda hacer descomponible, es necesario y suficiente que Γ no tenga aristas múltiples y tenga por lo menos cuatro vértices.

4.58. Construir una red descomponible con el menor número de aristas y el número n ($n \geqslant 4$) de vértices, que no se pueda hacer descomponible mediante una sustitución sucesiva de subredes del tipo Γ_2^s y Γ_2^p por aristas.

§ 5. EVALUACIONES EN LA TEORIA DE LOS GRAFOS Y REDES

Se llama *marcado* (o *numerado*) un grafo (orgrafo, pseudografo, etc.) a cuyos vértices les han inscrito marcas (números). Por $\mathcal{G}_n$ designaremos la totalidad de los grafos de n vértices (abreviadamente n-grafos) en cada uno de los cuales los vértices están numerados con $1, 2, \ldots, n$. Por $\mathcal{G}_{n,m}$ designaremos el subconjunto de todos los grafos de $\mathcal{G}_n$ cada uno de los cuales tiene exactamente m aristas. Un grafo con n vértices y m aristas se llamará abreviadamente *(n, m)-grafo*. Los grafos G y H de $\mathcal{G}_n$ se consideran *diferentes* si existen dos vértices j y k adyacentes en uno de los grafos pero no en el otro.

Supongamos que $\varphi_n(P)$ es la designación del número de todos los grafos de $\mathcal{G}_n$ que poseen la propiedad P. Se dice que *casi todos los n-grafos poseen la propiedad P* si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(P)}{|\mathcal{G}_n|} = 1$. Sea $m = m(n)$ una función en números enteros no negativa y $\varphi_{n,m}(P)$ el número de todos los grafos de $\mathcal{G}_{n,m}$ que poseen la propiedad P. Se dice que *casi todos los $(n, m(n))$-grafos poseen la propiedad P* si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi_{n,m}(P)}{|\mathcal{G}_{n,m}|} = 1$.

El *grupo de automorfismos* del grafo G (o abreviadamente *grupo del grafo G*) representa en sí el conjunto de todos los automorfismos del grafo G con la operación corriente de multiplicación (de cumplimiento consecutivo) de los automorfismos. El grupo del grafo G se designa por $\Gamma(G)$. Analógicamente se define el grupo del pseudografo (del orgrafo, etc.). El grupo del grafo de n vértices generalmente se identifica con el subgrupo del grupo simétrico S_n isomorfo a él.

Si π es una sustitución determinada sobre un conjunto de n elementos, entonces se la puede descomponer en el producto de los ciclos no intersecados. Supongamos que por $j_k(\pi)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ se designa el número de ciclos de longitud k en la sustitución π al descomponerse en ciclos que no se intersecan. La colección $(j) = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, donde $j_k = j_k(\pi)$ se llama *vector de la estructura cíclica de la sustitución* π. Si A es cierto grupo de sustituciones de n-ésimo grado, entonces la expresión

$$Z(A; t_1, t_2, \ldots, t_n) = |A|^{-1} \sum_{\pi\in A} \prod_{k=1}^{n} t_k^{j_k(\pi)}$$

se llama *índice cíclico* del grupo A y abreviadamente se designa por $Z(A)$. Aquí $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son las así llamadas *variables formales*.

Sea A un grupo de sustituciones aplicado al conjunto M. Los elementos b_1 y b_2 de M se llaman *A-equivalentes* si existe una sustitución $\pi \in A$ que transforma uno de estos elementos en otro, o sea $\pi(b_1) = b_2$ o $\pi(b_2) = b_1$. El conjunto M se divide con la relación de A-equivalencia en clases que no se intersecan y se llaman *órbitas*. Es válida la afirmación siguiente.

LEMA (Burnside). *El número de órbitas $N(A)$ en el conjunto M, determinadas por el grupo A, se da con la igualdad*

$$N(A) = |A|^{-1} \sum_{\pi \in A} j_1(\pi).$$

Supongamos que sobre el conjunto M_1 se aplica el grupo de sustituciones A y sobre el conjunto M_2, el grupo de sustituciones B. El grupo exponencial B^A está formado por elementos de todos los géneros del tipo $(\pi; \sigma)$; donde $\pi \in A$, $\sigma \in B$; y actúa este grupo sobre el conjunto $M_2^{M_1}$ (de todas las funciones que aplican M_1 en M_2) de acuerdo a la regla siguiente: $(\pi; \sigma) f(x) = \sigma(f(\pi(x)))$ para cualquier función $f(x)$ de $M_2^{M_1}$. Supondremos que el conjunto M_1 es finito, el conjunto M_2 no más que numerable y $|M_k| \geqslant 2$ $(k = 1, 2)$. Sea w: $M_2 \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ una función de ponderación dada en el conjunto M_2 y que satisface la condición: con cualquier $i = 0, 1, 2, \ldots$ la potencia c_i del subconjunto de todos los elementos de M_2, que tienen un peso i, es finita[1]). La función generatriz $c(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ se llama *serie enumeradora para las figuras. El peso de la función f* del conjunto $M_2^{M_1}$ se determina con ayuda de la igualdad $w(f) = \sum_{b \in M_2} w(f(b))$. Si el grupo B es igual al grupo unitario E, que actúa sobre el conjunto M_2, entonces el peso $w(F)$ de la *órbita* F en el conjunto $M_2^{M_1}$ determinado por el grupo E^A es igual al peso de cualquier función f de la órbita F. El número C_i de las órbitas de peso[2]) i en el conjunto $M_2^{M_1}$ es finito con cualquier $i \geqslant 0$. La función generadora $C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i$ se llama *serie enumeradora para las funciones* (o *serie enumeradora para las configuraciones*). Es válida la siguiente afirmación.

TEOREMA (Polya).

$$C(x) = Z(A;\ c(x),\ \ c(x^2),\ \ldots,\ c(x^n)),$$

---

[1]) Con frecuencia se dice que c_i es el número de «*figuras de peso i*» (en el conjunto M_2).

[2]) A veces a C_i se le denomina número de «*configuraciones de peso i*» en el conjunto $M_2^{M_1}$.

donde n es el número de elementos en el conjunto M_1 (el grado del grupo A) y $c(x^k)$ se sustituye en el índice cíclico $Z(A; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ sólo en los lugares de todas las entradas de las variables t_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

5.1. Mostrar que

$$1)\ |\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}};\quad 2)\ |\mathcal{G}_{n,m}| = \binom{\binom{n}{2}}{m}.$$

5.2. 1) Hallar el número de diferentes torneos con n vértices, enumerados con $1, 2, \ldots, n$.

2) Hallar el número de pseudografos orientados con n vértices numerados y m arcos.

5.3. 1) Mostrar que el número de grafos en $\mathcal{G}_n$ que tienen dados k vértices que son aislados, es igual a $2^{\binom{n-k}{2}}$.

2) Mostrar que el número de grafos sin vértices aislados en $\mathcal{G}_n$ es igual a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}}.$$

3) Mostrar que casi todos los n-grafos no tienen vértices aislados.

5.4. Supongamos que el subconjunto $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_n$ está formado de N grafos diferentes de par en par. Mostrar que en $\mathcal{G}$ el número de grafos no isomorfos de par en par es no menor que $N/n!$

5.5. Sea $\psi(m)$ el número de grafos conexos no isomorfos de par en par con m aristas. Mostrar que

$$1)\ \psi(m) \leqslant \sum_{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+8m}) \leqslant n \leqslant m+1} \binom{\binom{n}{2}}{m};$$

$$2)\ \psi(m) \leqslant e\left(\frac{em}{2}\right)^m \text{ con } m \to \infty.$$

5.6. Mostrar que el número de pseudografos no isomorfos de par en par, que no tienen vértices aislados y que tienen m aristas, no supera a $(cm)^m$, donde c es una constante que no depende de m y k.

5.7. Mostrar que el número de redes de k polos, no isomorfas de par en par, con m aristas, sin bucles y sin vértices aislados, no supera a $(2m)^k\,(cm)^{2m}$, donde c es una constante que no depende de m y de k.

5.8. Demostrar que el número de árboles con m aristas, no isomorfos de par en par, no sobrepasa al número de árboles radicales, planos, diferentes de par en par con m aristas.

5.9. 1) Mostrar que el número de árboles radicales, planos, con m aristas, diferentes de par en par, no sobrepasa $\binom{2m}{m}$.

2) Hallar la conducta asintótica del número $q(m)$ de árboles radicales planos con m aristas si $m \to \infty$.

5.10. Con ayuda del teorema de Cayley, el cual afirma que el número de árboles diferentes de par en par con n vértices numerados es igual a n^{n-2}, mostrar que el número de árboles no isomorfos de par en par con n vértices es no menor que $c_n n^{-1,5} e^n$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2\pi}$.

5.11. Mostrar que el número de árboles diferentes de par en par con n vértices numerados y en los que el vértice con el número 1 tiene el grado k, es igual a $\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$.

5.12. Hallar el número de grafos en $\mathcal{G}_n$ que sean bosques.

5.13*. Mostrar que el número de los bosques en $\mathcal{G}_n$, en los que los vértices j y k dados, que pertenecen a distintos componentes de conexión, es igual a $2n^{n-3}$.

5.14. Sea $\varphi(n)$ el número de los árboles radicales distintos de par en par con n vértices colgantes, tales que el grado de la raíz es igual a dos, y el grado de cada vértice igual a tres.

1) Mostrar, que el número $\varphi(n)$ es igual al número de maneras en que se pueden colocar paréntesis en la expresión $b_1 : b_2 : \ldots : b_n$, para que la expresión obtenida nuevamente, tenga sentido.

2) Mostrar que $\varphi(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

5.15. 1) Mostrar que el número de las π-redes bipolares no isomorfas de par en par, con m aristas, no supera el doble del número de los árboles radicales planos distintos de par en par, con m vértices colgantes.

2) Mostrar, que el número de π-redes no isomorfas de par en par con m aristas no supera $2\binom{4m-2}{2m}$.

5.16. Hallar el número de redes no isomorfas de par en par $\Gamma(a, b)$ con n vértices y m aristas, que tienen las siguientes propiedades:

1) la red $\Gamma(a, b)$ es s-descomponible;

2) todos los vértices de la red $\Gamma(a, b)$ son mínimos.

Observación. Los polos a y b de la red $\Gamma(a, b)$ se consideran no equivalentes; el primero de ellos es entrada y el segundo, salida de la red. En la aplicación isomorfa de la red Γ en la red G, la entrada (salida) de la red Γ debe corresponder a la entrada (salida) de la red G.

5.17. Sea $\Phi(n, m)$ el número de las diferentes fórmulas sobre el conjunto de enlaces $\{\&, \vee\}$ y el conjunto de variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con m entradas de los símbolos de los enlaces.

1) Mostrar que $\Phi(n, m)$ es igual al número de árboles radicales diferentes de par en par, que tienen cada vértice colgante marcado con cierto símbolo del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y cada vértice diferente del colgante, marcado con uno de los símbolos $\&$, $\vee$.

2) Mostrar que $\Phi(n, m) = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m} 2^m n^{m+1}$.

OBSERVACION. Las fórmulas se consideran diferentes si ellas representan en sí distintas palabras en el alfabeto $\{\&, \vee, (,), x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

5.18. Sea $\Phi(n, m, k)$ el número de diferentes fórmulas sobre el conjunto de enlaces $\{\&, \vee, -\}$ y el conjunto de variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con m entradas de los símbolos de las variables y k entradas del símbolo $^-$. Mostrar que

$$\Phi(n, m, k) \leqslant \frac{1}{m}\binom{2m-2}{m-1} 8^{m-1} n^m.$$

5.19. Mostrar que el número de grafos inconexos en $\mathcal{G}_{n,m}$ no supera a

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{k} \binom{\binom{n}{2} - k(n-k)}{m}.$$

5.20. Mostrar que el número de grafos en $\mathcal{G}_{n,m}$ que tienen exactamente dos componentes de conexión no supera a

$$4^{n-2} \sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{k} \sum_{j=k-1}^{\binom{k}{2}} \binom{\binom{k-1}{2}}{j-k+1} \binom{\binom{n-k-1}{2}}{m-j-n+k+1}.$$

5.21. Mostrar que el número de grafos k-conexos en $\mathcal{G}_{n,m}$ que no son $(k+1)$-conexos $(k \leqslant n-2)$, no supera a

$$\binom{n}{k} \sum_{j=\binom{k+1}{2}}^{m} \binom{\binom{k}{2} + k(n-k)}{j} \sum_{r=1}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \binom{n-k}{r} \binom{\binom{n-k}{2} - r(n-k-r)}{m-j}.$$

INDICACION. Con $k \leqslant n-2$ en un grafo que no sea $(k+1)$--conexo existen k vértices, cuyas extracciones llevan a un grafo inconexo.

5.22. Mostrar que el número de subgrafos conexos del cubo B^n diferentes de par en par, generados por subconjuntos de k vértices, no supera a $2^n(4n)^{k-1}$. (Considerar que los vértices del cubo B^n están numerados con números desde el 1 hasta el 2^n).

5.23. Mostrar que casi todos los n-grafos tienen el radio mayor que la unidad, evaluando desde arriba el número de grafos en $\mathcal{G}_n$ que tienen un vértice de grado $n-1$.

Sea $p(G)$ cierto parámetro numérico del grafo G. Sea $\bar{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} p(G)$ el valor medio del parámetro p y $Dp(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} (p(G) - \bar{p}(n))^2$, la dispersión del parámetro p. Análogicamente se puede determinar el valor medio y la dispersión de los parámetros de los grafos de $\mathcal{G}_{n,m}$. Sea $\theta > 0$, $\delta_n(\theta)$ la parte de aquellos grafos G de $\mathcal{G}_n$ para los cuales $p(G) \geqslant \theta$, y $\Delta_n(\theta)$, la parte de los grafos G de $\mathcal{G}_n$ tales que $|p(G) - \overline{p}(n)| \geqslant \theta$. Para variadas evaluaciones y demostraciones de las propiedades de casi todos los grafos se emplea con frecuencia la desigualdad siguiente (Chébishev):

$$\delta_n(\theta) \leqslant \frac{\overline{p}(n)}{\theta}, \tag{1}$$

$$\Delta_n(\theta) \leqslant \frac{Dp(n)}{\theta^2}. \tag{2}$$

Sea, por ejemplo, $p(G)$ el número de vértices aislados del grafo G. Hay que demostrar que para casi todos los n-grafos $p(G) = 0$. Sea $g_n(i)$ el número de grafos de $\mathcal{G}_n$ en los cuales el vértice con el número i es aislado. Entonces,

$$\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} p(G) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{n} g_n(i).$$

Es evidente que $g_n(i) = 2^{\binom{n-1}{2}}$ para todos los $i = \overline{1, n}$. De aquí que $\overline{p}(n) = n \cdot 2^{-n}$. Suponiendo que en (1) $\theta = 1/2$, obtendremos que la parte de los grafos G de $\mathcal{G}_n$ para los cuales $p(G) \geqslant 1/2$ no supera a $n2^{-n+1}$. Pero el $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot 2^{-n+1} = 0$. En consecuencia, para casi todos los n-grafos $p(G) < 1/2$, o sea que $p(G) = 0$.

Supongamos ahora que $p(G)$ es el número de aristas en el grafo G. Mostremos que en casi todos los n-grafos $p(G) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}(1+\varepsilon_n)$, donde el $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Tenemos $\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum\limits_{G \in \mathcal{G}_n} p(G) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum\limits_{(i, j)} g_n(i, j)$, donde $g_n(i, j) = 2^{\binom{n}{2}-1}$ es el número de grafos en los que el par de vértices (i, j) está unido con una arista. Así que $\overline{p}(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$. Calculemos la dispersión:

$$Dp(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} (p(G) - \overline{p}(n))^2 = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} p^2(G) - (\overline{p}(n))^2.$$

Numeremos todos los pares del tipo (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$ con números desde el 1 hasta el $\left(\frac{n}{2}\right)$, y sea $\widetilde{g}_n(\nu, \mu)$ el número de todos los grafos G de $\mathcal{G}_n$ en los que los pares con los números ν y μ son aristas. Entonces

$$\sum_{G \in \mathcal{G}_n} p^2(G) = \sum_{\nu=1}^{\binom{n}{2}} \sum_{\mu=1}^{\binom{n}{2}} \widetilde{g}_n(\nu, \mu) = \sum_{\nu=1}^{\binom{n}{2}} \widetilde{g}_n(\nu, \nu) + 2 \sum_{\nu<\mu} \widetilde{g}_n(\nu, \mu).$$

Pero $\widetilde{g}_n(\nu, \mu) = 2^{\binom{n}{2}-2}$ si $\nu \neq \mu$. Por eso

$$Dp(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{4}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2}-1\right) - \left(\frac{1}{2}\binom{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\binom{n}{2}.$$

Suponiendo en (2) $\theta = \sqrt{n\overline{p}(n)}$, obtendremos que la parte de aquellos grafos $G \in \mathcal{G}_n$ para los cuales $\left|p(G) - \frac{1}{2}\binom{n}{2}\right| \geqslant \sqrt{\frac{n}{2}\binom{n}{2}}$ no supera $1/n$. De esto se deduce que para casi todos los grafos $p(G) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}(1+\varepsilon_n)$ donde el $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

5.24. Sea $p(G)$ el número de pares de diferentes vértices del grafo G de $\mathcal{G}_n$ para los cuales no existe una cadena de longitud menor de 3, que una estos vértices. Sea $\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum\limits_{G \in \mathcal{G}_n} p(G)$.

1) Mostrar que $\overline{p}(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

2) Mostrar que en casi todos los n-grafos no hay vértices con una distancia entre ellos mayor que dos.

3) Empleando los resultados de los problemas 5.23 y 5.24, 2) mostrar que en casi todos los n-grafos el radio y el diámetro son iguales a dos.

5.25. Mostrar que el número medio de ciclos hamiltonianos en los grafos G de $\mathcal{G}_n$ es igual a $\frac{(n-1)!}{2^{n+1}}$.

5.26. Hallar el número medio de ciclos de longitud tres en los grafos G de $\mathcal{G}_{n,m}$.

5.27*. Empleando la desigualdad de Chébishev (2) mostrar que en casi todos los $(n, m(n))$-grafos, donde $m(n) = [n/\ln(n \ln n)]$, el número de vértices aislados es igual a $n(1 - \varepsilon(n))$, donde el $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$.

5.28*. Sea k un número entero y $k \geqslant 2$. Demostrar que si $m = m(n) = \varphi(n) \cdot n^{2-\frac{2}{k-1}}$ (donde $\varphi(n) \to \infty$ con $n \to \infty$), entonces casi todos los (n, m)-grafos contienen un subgrafo completo con k vértices.

5.29. Hallar el número medio de conjuntos independientes de k vértices en los grafos G de $\mathcal{G}_n$.

5.30. Sea k un número natural. Contar el número medio de vértices de grado k en los grafos G de $\mathcal{G}_{n,m}$.

5.31. Sea $p(G)$ un parámetro numérico entero no negativo y $\overline{p}(n)$ su valor medio para los grafos G de $\mathcal{G}_n$. Mostrar que si el $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{p}(n) = 0$, entonces, para casi todos los grafos, $p(G) = 0$.

5.32. Hallar el índice cíclico del grupo de automorfismos del grafo G.

1) G es un ciclo de longitud 4;

2) $G = K_{2,3}$;

3) $G = K_5 - \{x\}$, donde x es una arista arbitraria del grafo K_5.

5.33. Sea $(j) = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ una partición arbitraria del número n, o sea que $j_1 + 2j_2 + \ldots + nj_n$, donde j_k son números enteros no negativos $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Por $h(j)$ se designa el número de todas las sustituciones del grupo simétrico S_n en las que los vectores de la estructura de ciclo coincide con (j).

1) Demostrar que $h(j) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n} k^{j_k} \cdot j_k!}$.

2) Demostrar que

$$Z(S_n) = \frac{1}{n!} \sum_{(j)} h(j) \prod_{k=1}^{n} t_k^{j_k},$$

donde la suma se toma por todas las particiones posibles (j) del número n.

3) Mostrar que el índice de ciclo $Z(S_n)$ es igual al coeficiente de x^n en la descomposición de la función

$$\exp\left(t_1 x + \frac{t_2 x^2}{2} + \ldots + \frac{t_k x^k}{k} + \ldots\right)$$

en una serie por los exponentes de x.

4) Convencerse de la validez de la relación recurrente $Z(S_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} t_k Z(S_{n-k})$, donde (por definición) se ha puesto $Z(S_0) = 1$.

5.34. Sea A_n un grupo de signo variable de grado n (o sea que A_n es un subgrupo del grupo S_n $(n \geqslant 2)$ que consta de todas las sustituciones pares). Demostrar que

$Z(A_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) =$

$= Z(S_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) + Z(S_n;\ t_1, -t_2, \ldots, (-1)^{n-1} t_n)$.

5.35. Enumerar todas las órbitas en el conjunto de vértices del grafo G determinadas por el grupo $\Gamma(G)$ si:

1) $G = K_{2,3} - \{x\}$, donde x es una arista arbitraria del grafo $K_{2,3}$;

2) $G = K_3 \times C_4$.

5.36. Supongamos que en el conjunto M_1 de n elementos actúa el grupo A y en el conjunto finito M_2 actúa el grupo unitario E. Demostrar que el número de órbitas en el conjunto $M_2^{M_1}$ que se determinan con el grupo exponencial E^A, se da con la fórmula

$$N(E^A) = Z(A;\ \overbrace{|M_2|, |M_2|, \ldots, |M_2|}^{n \text{ veces}}),$$

donde la parte derecha representa el resultado de la sustitución del número $|M_2|$ en el índice cíclico $Z(A;, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ en el lugar de todas las entradas de las variables t_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

5.37. Supongamos que en el conjunto M de n elementos actúa el grupo A. Veamos dos r-subconjuntos arbitrarios del conjunto M: $M_1 = \{a_1, \ldots, a_r\}$, $M_2 = \{b_1, \ldots, b_r\}$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Estos se llaman *A-equivalentes* si existe una sustitución π en el grupo A, tal quo $\pi(a_j) = b_{ij}$ donde $j = 1, \ldots, r$. La relación de A-equivalencia divide todos los r-subconjuntos de M en *clases A-equivalentes* de subconjuntos. Demostrar que el coeficiente de x^r en la expresión $Z(A; 1+x, 1+x^2, \ldots, 1+x^n)$ (obtenida del índice cíclico $Z(A; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ mediante la sustitución de cada entrada de la variable t_k por $1+x^k$) es igual al número de clases de los A-equivalentes r-subconjuntos en el conjunto M.

5.38. Sea $T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k x^k$ una función arbitraria para los árboles radicales; aquí T_k significa el número de todos los árboles radicales no isomorfos de par en par con k vértices, incluyendo la raíz. Tomemos n árboles radicales arbitrarios $(n \geqslant 1)$ y unamos con una arista la raíz de cada uno de ellos con un vértice nuevo v_0. Consideraremos el vértice v_0 (y solamente este vértice) como la raíz de un árbol nuevo. El grado de la raíz v_0 es igual a n. Empleando la construcción descrita de generación de árboles radicales demostrar que

$$T(x) = x + x \sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n;\ T(x),\ T(x^2),\ \ldots,\ T(x)^n).$$

5.39. Demostrar la siguiente relación recurrente:

$$T_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{r \mid k \\ 1 \leqslant r \leqslant k}} r T_r T_{n-k+1};$$

aquí $n \geqslant 1$ y T_j es igual al número de todos los árboles radicales no isomorfos de par en par con j vértices, contando también la raíz $(T_1 = 1)$.

5.40. Sean $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n x^n$, una función arbitraria para los grafos, y $l(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n x^n$, una función arbitraria para los grafos conexos. El coeficiente g_n (y respectivamente l_n) es igual al número de todos los grafos de n vértices no isomorfos de par en par (respectivamente, grafos conexos). Demostrar que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(S_n;\ l(x),\ l(x^2),\ \ldots,\ l(x^n)).$$

5.41. Supongamos que en el conjunto de n elementos M_1 actúa el grupo A, y en el conjunto de r elementos M_2 actúa el grupo B.

Hallar el número de órbitas en el conjunto $M_2^{M_1}$ determinadas por el grupo exponencial B^A.

1) $A = E_n$, $B = E_r$ (o sea que A es el grupo unitario de exponente n, y B el grupo unitario de exponente r);

2) $A = E_n$, $B = S_r$;
3) $A = S_n$, $B = E_r$;
4*) $A = S_2$, $B = S_3$.

5.42. Sean $t(x)$ y $s(x)$ funciones generadoras para torneos y torneos fuertes respectivamente, o sea que $t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n$ y $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$, donde t_n es el número de todos los torneos de n vértices no isomorfos de par en par y s_n es el número de todos los torneos fuertes de n vértices no isomorfos de par en par. Demostrar que $t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k(x)$.

§ 6. REALIZACION DE LAS FUNCIONES BOOLEANAS POR MEDIO DE ESQUEMAS DE CONTACTO Y DE FORMULAS

La red Γ con k polos, en la que cada arista está marcada con una letra del alfabeto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ se llama *esquema de contacto k-polar que realiza las funciones booleanas de las variables* x_1, $x_2, \ldots, x_n$, o abreviadamente, $\langle k, n\rangle$-esquema. Los $\langle 2, n\rangle$-esquemas se llamarán *X^n-esquemas*. La red Γ se llama *red del esquema de contacto*. El esquema de contacto se llama *conexo* (*fuertemente conexo*, *paralelo-sucesivo*, etc.) si su red también lo es. Un esquema de contacto paralelo-sucesivo abreviadamente se llama π-esquema. Las aristas del esquema que están marcadas con símbolos de las variables o de sus negaciones se llaman de *contacto*. Un contacto se llama de *clausura* si está marcado con un símbolo de variable, y de *apertura* si está marcado con un símbolo de negación de la variable. Sean Σ_1 y Σ_2 dos esquemas de contacto de k-polos y cuyos polos estén marcados con las letras $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Las esquemas Σ_1 y Σ_2 se llaman *isomorfos* si sus redes son isomorfas y al mismo tiempo: a) las aristas correspondientes están marcadas de la misma manera; b) los polos correspondientes están marcados de la misma manera; Supongamos que a y b son dos polos del esquema de contacto Σ; $[a, b]$ es cierta cadena que une a y b, y $K_{[a,b]}$ es la conjunción de las letras atribuidas a las aristas de la cadena $[a, b]$. La función $f_{ab}(\widetilde{x}^n)$ determinada con la fórmula

$$f_{ab}(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{[a,b]} K_{[a,b]}, \qquad 3)$$

en la cual la disyunción se toma por todas las cadenas simples del esquema que unen los polos a y b, se llama *función de conductividad entre los polos* a y b del esquema Σ. Se dice que el esquema Σ realiza la función $g(\tilde{x}^n)$ si en él existen unos polos a y b tales, que $g(\tilde{x}^n) = f_{ab}(\tilde{x}^n)$.

Un esquema de contacto con $k+1$ polos se llama (1, k)-*polar* si uno de sus polos está seleccionado y los demás son equivalentes entre sí (el polo seleccionado se designa con la letra a, los demás por las letras b_i ($i = \overline{1, k}$)). Se dice que la función $g(\tilde{x}^n)$ *se realiza* con un esquema (1, k)-polar si existe un polo b_i ($1 \leqslant i \leqslant k$) tal, que $f_{ab_i}(\tilde{x}^n) = g(\tilde{x}^n)$. En el caso de que no se indique el número de polos del esquema siempre se sobreentenderá que se trata de un esquema de contacto de dos polos. Dos esquemas de contacto se llaman *equivalentes* si ellos realizan una misma función booleana. Se llama *complejidad* de un esquema de contacto a su número de contactos. Se llama *mínimo* a un esquema de contacto que tiene la menor complejidad entre todos los esquemas equivalentes a él. Se llama *complejidad de la función booleana f en la clase de esquemas de contacto* (la designación es $L_k(f)$) a la complejidad de un esquema de contacto mínimo que realiza f. Se llama *complejidad de la función booleana f en la clase de π-esquemas* al número de contactos en un π-esquema mínimo que realiza f (la designación es $L_\pi(f)$). Se llama *complejidad de la función booleana f en la clase de fórmulas* sobre el conjunto de enlaces $\{\vee, \&, \bar{\ }\}$ al número de entradas de los símbolos de las variables. La complejidad de la función f en esta clase de fórmulas se designa por $L_\Phi(f)$.

Se llama *esquema de elementos funcionales* a una red orientada sin contornos, los polos de la cual se dividen en polos de entrada y de salida. Los polos de entrada se marcan con los símbolos de las variables. Los polos de salida se llaman *salidas del esquema*. Cada vértice diferente del polo de entrada estará marcado con un símbolo funcional (o con un símbolo de enlace lógico). Al mismo tiempo se tienen que cumplir las condiciones siguientes: 1) El grado de llegada de cada polo de entrada es igual a cero. 2) El grado de llegada de cada vértice diferente del polo de entrada es igual al número de lugares del símbolo funcional (o del enlace) con el que está marcado este vértice.

El concepto de la *función f_i que se realiza en el vértice i del esquema* Σ, se define de la siguiente manera. Si el vértice i coincide con el polo de entrada que está marcado con el símbolo x, entonces $f_i = x$. Supongamos que el vértice i está marcado con el símbolo funcional φ de r lugares y que $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ son las funciones que se realizan en los vértices de los que salen los arcos que llegan al vértice i. Entonces $f_i = \varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$. Se dice que la *función f se realiza con el esquema* Σ, si existe una salida del esquema en la que ella se realiza. Los esquemas de elementos funcionales con una salida, que tienen los polos de entrada marcados con los símbolos $x_1, \ldots, x_n$ y los vértices diferentes de los polos de entrada, marcados con los símbolos $\vee$, &, $^-$, se llamaran aquí X^n *-esquemas funcionales.* Se llama *complejidad de los esquemas de elementos funcionales* al número de sus vértices diferentes de los polos de entrada. El X^n-esquema funcional Σ, que realiza la función f, se llama *mínimo* si cualquier otro X^n-esquema funcional que realice f tiene una complejidad no menor que la del esquema Σ. Por *complejidad de la función booleana f en la clase de esquemas de elementos funcionales aquí* se comprende la complejidad de un X^n-esquema funcional que realiza la función f. La complejidad de la función f en esta clase de esquemas se designará por $L(f)$.

6.1. Supongamos que $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \oplus x_2$. Mostrar que $L(f(\widetilde{x}^2)) = 4$.

6.2. Mostrar que para una función booleana diferente de una constante el esquema de contacto mínimo que realiza esta función es fuertemente conexo.

6.3. Hallar el número de funciones booleanas $f(x_1, x_2)$ que se realizan con esquemas de contacto de complejidad 3.

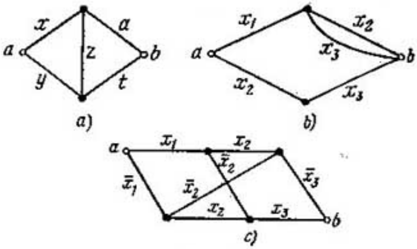


Fig. 19.

6.4. 1) Mostrar que para cada número natural m existe un esquema de contacto mínimo de complejidad m.

2) Mostrar que no existen esquemas de contacto mínimos de complejidad 4 que contengan sólo contactos de clausura con marcas del conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$.

6.5. Mostrar que si $m > n \cdot 2^{n-1}$, entonces ninguno de los X^n-esquemas de complejidad m es mínimo.

6.6. Mostrar que la función f entonces, y solamente entonces, depende sustancialmente de la variable x, cuando en el esquema mínimo que realiza f hay un contacto marcado con la variable x o con su negación.

6.7. Hallar la función de conductividad f_{ab} para los esquemas de contacto representados en la fig. 19, a, b, c y 20, a, b, c.

6.8. Construir esquemas de contacto que realicen la función f.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (00011111)$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = (11010001)$;

5) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

6.9. Construir para cada una de las funciones del problema anterior X^3-esquemas funcionales.

6.10. Construir para la función f un esquema de contacto de complejidad no mayor que L, simplificando previamente la fórmula con la cual se da la función f.

1) $(x_1 \vee x_2x_3)((x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_4) \vee (x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_4x_5))$, $L = 5$;

2) $(x_1 \vee x_2)((x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3)x_6 \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\bar{x}_5)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \vee$
$\vee (\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_6)x_3 \vee x_1x_2 \vee x_5x_6)$, $L = 5$;

3) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3((\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_5)(x_6 \vee x_1x_4x_7) \vee (x_6x_7 \vee x_2x_4x_5\ \&$
$\&\ (\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_3x_6x_7) \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_4 \vee x_6)(x_5 \vee x_7))$, $L = 6$.

6.11. Construir para cada una de las funciones del problema anterior un esquema de elementos funcionales de complejidad no mayor

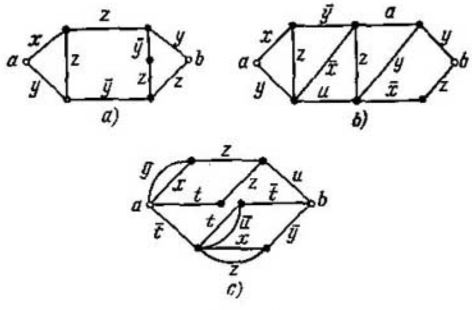


Fig. 20.

que 6 que realice esta función.

6.12. Supongamos que $\nu(\widetilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} 2^i \alpha_i$ es el número de la colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Construir un esquema de contacto que no tenga más de diez contactos y que realice la función

$$f(\widetilde{\alpha}^6) = \begin{cases} 1, & \text{si } \nu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leqslant \nu(\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6), \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

6.13. Construir un esquema de contacto que realice la función $f(\widetilde{x}^6)$ que es igual a la unidad si, y sólo si, $(x_1, x_2, x_3) \leqslant (x_4, x_5, x_6)$.

6.14. Construir un esquema de contacto que realice la suma de números binarios de dos órdenes. Más exactamente: construir un esquema de contacto con los polos a, b_0, b_1, b_2, en el cual para cada $i = 0, 1, 2$, la función de conductividad $f_{ab_i}(\tilde{x}^4)$ sea igual a z_i, donde $z_i \in \{0, 1\}$ y se determina de la igualdad

$$4z_1 + 2z_2 + z_3 = 2(x_1 + x_2) + x_3 + x_4.$$

6.15*. Construir un esquema de elementos funcionales que satisfaga las condiciones siguientes.

1) El esquema realiza tres funciones $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$.

2) Los vértices diferentes de los polos de entrada estarán marcados con los símbolos $\vee$, &, $^{-}$.

3) No habrá más de dos vértices marcados con el símbolo de negación.

6.16. Mostrar que $L_\Phi(f) \geqslant L_k(f)$ para cualquier función booleana f, diferente de una constante.

6.17*. Poner el ejemplo de una función $f(\tilde{x}^3)$ para la cual $L_\pi(f) > L_k(f)$.

INDICACION. Examinar la función que se realiza con el esquema representado en la fig. 19, a.

Supongamos que el esquema biconexo bipolar de contacto Σ es plano (o sea que su red $\Gamma(a, b)$ es plana) y sus polos a y b se encuentran en una cara. Tracemos en esta cara la arista (a, b) de tal manera que la red Γ' obtenida de Γ al añadir la arista (a, b) siga siendo plana. Seleccionemos un vértice en cada cara de la red Γ'. Construyamos en los vértices seleccionados el grafo G^* dual al grafo G de la red Γ'. Cada arista del grafo G^* diferente de (a, b) cruza cierto contacto del esquema Σ. Marquemos esta arista con la misma letra que está marcado el contacto cruzado. Designemos por a^*, b^* los vértices del grafo G^* que están en las caras de la red Γ' divididas por la arista (a, b) y llamémoslos polos. Al extraer ahora la arista (a^*, b^*) de G^* se obtendrá el esquema doblemente conexo Σ^* con los polos a^* y b^*. El esquema Σ^* se llama *esquema dual a* Σ.

6.18*. Mostrar que el esquema Σ^*, que es dual al esquema plano biconexo Σ, realiza una función booleana dual a la que realiza el esquema Σ.

INDICACION. Establecer una relación biunívoca entre las cadenas del esquema Σ y los cortes del esquema Σ^*.

6.19. Construir esquemas duales a los esquemas representados en las figs. 19, a, b y 20, a.

6.20. Demostrar que para cualquier función booleana f se cumple la igualdad $L_\pi(f) = L_\pi(f^*)$.

6.21. Mostrar que si $L_k(f) \leqslant 7$, entonces $L_k(\bar{f}) = L_k(f)$.

Se dice que un esquema de contacto está formado *sin repetición* (es sin repetición) si del hecho de que cierta arista esté marcada con la letra x o $\bar{x}$ se deduce que cualquier otra arista tiene una marca diferente de x o $\bar{x}$.

6.22. Mostrar que un esquema de contacto fuertemente conexo y sin repetición realiza una función sustancialmente dependiente de todas las variables que se encuentran en el esquema.

6.23. Mostrar que un esquema fuertemente conexo y sin repetición es mínimo.

6.24. Mostrar que si a un esquema mínimo se la une un contacto marcado con una variable nueva de tal forma que resulte un esquema fuertemente conexo, entonces este esquema así construido también será mínimo.

6.25*. Sea f una función que se realiza con el esquema indicado en la fig. 21. Demostrar que una función dual a f no puede ser realizada con un esquema sin repetición.

6.26*. ¿Es cierto que para todas las funciones booleanas f se cumple la relación $L_k(f) = L_k(\overline{f})$?

6.27. Sean f_{ab} y f_{ad} las funciones de la conductividad del esquema de contacto de tres polos Σ_1 y f_{eg} y f_{eh}, las funciones de la conducti-

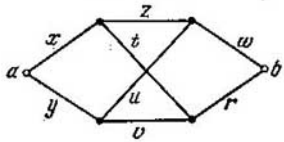


Fig. 21.

vidad del esquema de contacto de tres polos Σ_2. Sea Σ el esquema con los polos a y e, obtenido de los esquemas Σ_1 y Σ_2 identificando el polo b con el polo g, y el polo d con el polo e. ¿Es cierto que el esquema Σ realiza la función

$$f_{ae} = (f_{ab} \,\&\, f_{eg}) \vee (f_{ab} \,\&\, f_{eg})?$$

6.28. 1) Demostrar que la función f es monótona si, y sólo si, existe un esquema de contacto que realiza f y no contiene contactos interruptores.

2) ¿Es cierto que un esquema de contacto mínimo que realiza una función monótona no contiene contactos interruptores?

La función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ se llama *monótona por la variable* x_1 si se la puede representar en la forma

$$f(\widetilde{x}^n) = g(x_2, x_3, \ldots, x_n) \vee x_1 h(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

La función $f(\widetilde{x}^n)$ es *casi monótona por la variable* x_1 si ella es monótona por x_1 o se hace monótona por x_1 después de la sustitución de x_1 por $\overline{x}_1$. La monotonía y la casimonotonía por x_i $(i \neq 1)$ se definen en forma análoga.

6.29. Demostrar que la función $f(\widetilde{x}^n)$ es casi monótona por x_1 si, y sólo si, existe un esquema de contacto que realiza la función $f(\widetilde{x}^n)$ y no contiene contactos de clausura o de interrupción.

6.30. 1) Demostrar que un esquema de contacto mínimo que realiza la función $x_1 \oplus x_2$ contiene 4 contactos.

2*) Demostrar la calidad de mínimo del esquema representado en la fig. 20, *c*.

6.31*. Construir un esquema de contacto mínimo para la función f

1) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) x_4 \vee x_1x_2x_3$;

2) $f(\tilde{x}^4) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_2x_3x_4$;

3) $\tilde{f}(x^4) = (0001011101111111)$.

6.32. Mostrar que el número $S(n, m)$ de X^n-esquemas de contacto conexos, no isomorfos de par en par, de complejidad no mayor que m, no supera a $(cnm)^m$, donde c es una constante que no depende de n y m.

6.33. Mostrar que el número $P(n, m)$ de π-esquemas conexos, no isomorfos de par en par, de complejidad no mayor que m, que realizan las funciones booleanas de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no supera (cn^m), donde c es una constante que no depende de n y m.

6.34. Mostrar que el número $\Phi(n, m)$ de fórmulas, diferentes de par en par, de complejidad m, sobre el conjunto de enlaces ($\vee$, &, —) y el conjunto de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no supera a $(cn)^m$, donde c es una constante que no depende de n y m.

Al obtener las evaluaciones inferiores de la complejidad de realización de diferentes clases de funciones con esquemas y fórmulas, con frecuencia se emplean las llamadas «consideraciones vigorosas». Como ejemplo de esto puede valer la afirmación siguiente.

Sea $S(n, m)$ el número de esquemas de cierta clase K. Cada uno de ellos realiza una función booleana que depende de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y tiene una complejidad no mayor que m. Sea $\varphi(n)$ el número de funciones booleanas $f(\tilde{x}^n)$ en cierto conjunto $\mathfrak{M}$. Entonces si $S(n, m) < \varphi(n)$, én $\mathfrak{M}$ habrá una función $f(\tilde{x}^n)$ no realizable en la clase K de un esquema de complejidad menor o igual a m.

6.35. Mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grandes existe una autodual $f(\tilde{x}^n)$ para la que se cumplen simultáneamente las desigualdades:

a) $L_k(f) \geqslant \frac{2^{n-1}}{n}(1-\varepsilon)$; b) $L_\pi(f) \geqslant \frac{2^{n-1}}{\log_2 n}(1-\varepsilon)$.

6.36. Mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grandes existe una función $f(\tilde{x}^n)$ que es superposición de la función $\varphi(x, y, z) = xy \vee z$ tal que

$$L_\Phi(f) \geqslant \frac{\binom{n-1}{\left[\frac{n-1}{2}\right]}}{\log_2 n}(1-\varepsilon).$$

6.37. Sea $L(n) = \max\limits_{f \in P_2^n} L(f)$. Mostrar que para cualquier función autodual $f(\tilde{x}^n)$ es válida la desigualdad $L(f(\tilde{x}^n)) \leqslant L(n-1) + 4n$.

6.38. La función booleana $F(\widetilde{y}^m)$ tiene la propiedad U_n si se puede obtener cualquier función booleana $f(\widetilde{x}^n)$ de $F(\widetilde{y}^m)$, mediante la sustitución de constantes y la redesignación de las variables (se admite la identificación).

1) Mostrar que la función $y_1\bar{y}_2$ tiene la propiedad U_1.

2) Hallar una función con el número mínimo posible de variables que tenga la propiedad U_2.

3) Sea $m(n)$ el número mínimo posible de variables en la función que tiene la propiedad U_n. Mostrar que

$$\frac{2^n}{\log_2(n+2)} \leqslant m(n) \leqslant 3\cdot 2^{n-1}.$$

6.39. Mostrar que existe un X^n-esquema funcional de complejidad $2^{2^n} - n$ que realiza todas las funciones dependientes de las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Al construir esquemas de contacto de dos polos que realizan las funciones del álgebra lógica se emplea ampliamente el método llamado *método de las cascadas*. Lo describiremos aquí. Supongamos que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$ es una función del álgebra lógica que hay que realizar con un esquema de contacto. Por $\mathfrak{A}_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ designamos el conjunto de todas las funciones de álgebra lógica tales, que cada una de ellas depende sólo de las variables $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ y puede ser obtenida de la función $f(\widetilde{x}^n)$ en resultado de una sustitución adecuada de ceros y unidades en el lugar de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$. A cada conjunto $\mathfrak{A}$ le cotejamos biunívocamente el conjunto V_i cuyos elementos son puntos de un plano llamados *vértices de i-ésimo rango*. Añadiremos dos polos más: el polo de entrada a y el polo de salida b. El polo a es un vértice de rango cero, el polo b es un vértice de n-ésimo rango. El conjunto de vértices del esquema Σ que realiza la función $f(\widetilde{x}^n)$ coincidirá con $\{a\} \cup \cup \{b\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$. El conjunto de contactos del esquema Σ puede ser descrito de la manera siguiente: sea v_i un vértice arbitrario de i-ésimo rango $(n-2 \geqslant i \geqslant 0)$ y que le corresponda la función $\varphi(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ del conjunto $\mathfrak{A}_i$ (con $i = 0$, la función φ coincide con la función $f(\widetilde{x}^n)$). Las funciones $\varphi(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ y $\varphi(1, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ pertenecen al conjunto $\mathfrak{A}_{i+1}$ y a ellas les responden ciertos vértices v'_{i+1} y v''_{i+1} respectivamente (si las funciones $\varphi(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ y $\varphi(1, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ son iguales, entonces los vértices v'_{i+1} y v''_{i+1} coinciden). El vértice v_i en el esquema Σ está unido por el contacto $\bar{x}_{i+1}$ al vértice v'_{i+1} y por el contacto x_{i+1} al vértice v''_{i+1}. Por fin, los vértices del $(n-1)$-ésimo rango se unen con el vértice del n-ésimo rango (el polo b) en concordancia con la regla siguiente:

1) si el vértice v de V_{n-1} responde a la función x_n, entonces ella se une con el polo b por el contacto x_n;

2) si el vértice v responde a la función $\bar{x}_n$, entonces ella se une con b por el contacto $\bar{x}_n$;

3) si el vértice v está cotejado a una función idénticamente igual a la unidad, entonces se une con b por dos contactos paralelos x_n y $\bar{x}_n$;

4) si el vértice v está cotejado a un cero idéntico, entonces el vértice v no se une con el polo b.

6.40. Construir, empleando el método de las cascadas, un esquema que realice la función f.

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_3$;

2) $f(\tilde{x}^4) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_4$;

3) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

4) $f(\tilde{x}^n) = x_1x_2 \ldots x_n \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$;

5) $f(\tilde{x}^n) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_n$.

6.41. 1) Mostrar que si $f(\tilde{x}^n) \not\equiv 0$, entonces al construir con el método de las cascadas un esquema de contacto que realice la función f se pueden excluir de todos los conjuntos $\mathfrak{A}_i$ las funciones idénticamente iguales a cero.

2) Mostrar que un esquema de contacto obtenido con una construcción tal es fuertemente conexo.

6.42. 1) Supongamos que la función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$ depende sustancialmente de todas sus variables. Demostrar que un esquema que realice la función f y que esté construido con el método de las cascadas, es fuertemente conexo y no contiene contactos paralelos del tipo x_j, $\bar{x}_j$ si, y sólo si, f es una función lineal.

2) Poner el ejemplo de una función no lineal $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$ que dependa sustancialmente de todas sus variables y tal que el esquema que la realice, construido con el método de las cascadas, no tenga contactos paralelos del tipo x_j y $\bar{x}_j$.

6.43. ¿Es justa la afirmación siguiente? Si la función $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 2$, depende sustancialmente de todas sus variables y el esquema de contacto que realiza f, construido con el método modificado de las cascadas indicado en el problema 6.41. 1), contiene n contactos, entonces $f = x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$ (donde $\sigma_i \in \{0, 1\}$.)

6.44. Refutar la afirmación siguiente: si la función f es tal que con cierto i los conjuntos $\mathfrak{A}_i$ y $\mathfrak{A}_{i+1}$ empleados en el método de las cascadas no contienen funciones idénticamente iguales a cero y a uno, pero en cada uno de ellos hay no menos de tres funciones, entonces el esquema que realiza f, construido con el método de las cascadas, no es plano [1]).

6.45. Poner el ejemplo de una función f para la cual el esquema que la realiza, construido con el método de las cascadas, no es plano.

[1]) Se tiene en cuenta un esquema sin arista *inicial* o sea sin arista complementaria que una los polos.

Capítulo
V

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE CODIFICACION

§ 1. CODIGOS CON CORRECCION DE ERRORES

Sean A y B dos alfabetos finitos, y R algún conjunto de palabras finitas en el alfabeto A. La aplicación unívoca φ del conjunto R en algún conjunto de palabras en el alfabeto B se llama *codificación del conjunto R*. La imagen C del conjunto R para la aplicación φ se denomina *código del conjunto R*. A las palabras de C se les da el nombre de *palabras en código*; además, si la palabra w de R es aplicación en la palabra v de C, entonces v se llama *código de la palabra w*. Las palabras de R se denominan *comunicaciones*; el alfabeto A, *alfabeto de comunicaciones*; el B, *alfabeto codificador*. Si este alfabeto B se compone de dos letras (en tal caso supondremos que $B = \{0, 1\}$), entonces la codificación φ y el correspondiente código C se llaman *binarios*. El código se llama *uniforme* o *en bloque*, si todas las palabras codificadas tienen igual longitud. El código binario en bloque, en el que cada palabra codificada posee longitud n, se presenta como el conjunto de los vértices de un cubo n-dimensional. La función de Boole $f_C(\tilde{x}^n)$, que es igual a la unidad en el conjunto C y a cero si está fuera de C, se denomina *función característica del código de bloque binario C*. Sea $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ una distancia común de Hamming entre los vértices $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de B^n, igual al número de coordenadas en las que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ se diferencian. La magnitud $d(C) = \min \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, donde el mínimo se toma con respecto a todos los pares de vértices distintos, pertenecientes al código $C \subseteq B^n$, se llama *distancia de código* de C. El código $C \subseteq B^n$ con distancia de código d, será llamado abreviadamente *(n, d)-código*. La potencia máxima posible del (n, d)-código se connota mediante $m(n, d)$, y el (n, d)-código cuya potencia es $m(n, d)$, se denomina *maximal*. Se llama *compactamente empaquetado* el $(n, 2d + 1)$-código, que cumple la siguiente condición para todo vértice $\tilde{\alpha} \in B^n$ existe la palabra codificada $\tilde{\beta}$, para la cual $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant d$. Un código binario en bloque se denomina *equidistante*, si la distancia entre dos cualesquiera palabras en código es igual. El código $C \subseteq B^n$ se llama *equiponderado*, si toda palabra codificada tiene un mismo peso, o sea, si existe un entero k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ tal, que $C \subseteq B^n_k$. Este número k se denomina *peso del código equiponderado*. La magnitud máx $|C|$, donde el máximo se toma para todos $\langle n, d\rangle$-códigos de peso k, se anota mediante $m(n, k, d)$.

Sea que la palabra de un código binario en bloque C se transmite por un canal de enlace, en el que pueden suceder tergiversaciones de la palabra transmitida. La transmisión por un canal así, puede considerarse como una cierta transformación de las palabras transmitidas. Aquí serán examinadas solamente tales transformaciones de las palabras binarias, que no modifican la longitud de la palabra y que consisten en el reemplazo de algunas letras por sus contrarias, o sea, en el reemplazo del 0 por el 1 y del 1 por el 0. Si la palabra $\widetilde{\alpha}$ al ser transmitida se transformó en la palabra $\widetilde{\beta}$, distinta de $\widetilde{\alpha}$, entonces se dice, que *en el canal hubo errores*. Si la i-ésima letra de la palabra $\widetilde{\alpha}$ transmitida se diferencia de la i-ésima letra de la palabra $\widetilde{\beta}$ recibida, entonces se dice que hubo *un error en el i-ésimo orden*. Si la palabra recepcionada se diferencia de la transmitida en t órdenes, entonces se dice, que *hubieron t errores*. Evidentemente, el número de errores que han ocurrido durante la transmisión, es igual a la distancia de Hamming entre las palabras transmitidas y recibidas.

Sea el código binario $C \subseteq B^n$. La aplicación unívoca arbitraria ψ del conjunto B^n en el conjunto C se llama *decodificación*. Supongamos, que $\widetilde{\alpha} \in C$, y que $\psi^{-1}(\widetilde{\alpha})$ es el conjunto de todos aquellos $\widetilde{\beta}$ vértices de B^n; tales que $\psi(\widetilde{\beta}) = \widetilde{\alpha}$. Sea también $S^n_t(\widetilde{\alpha})$ el conjunto de todas las palabras que se obtienen de la palabra en código $\widetilde{\alpha}$ como resultado de no más de t errores (es evidente, que $S^n_t(\widetilde{\alpha})$ es una esfera de radio t con centro en $\widetilde{\alpha}$). Se dice, que el código C *corrige t errores*, si es que existe tal decodificación ψ, que $S^n_t(\widetilde{\alpha}) \subseteq \psi^{-1}(\widetilde{\alpha})$, para cada $\widetilde{\alpha} \in C$. El código C *descubre t errores*, si cualquier palabra que pueda ser obtenida de una palabra en código $\widetilde{\alpha}$ arbitraria, como resultado de no más de t errores, resulta diferente de cualquier palabra de $C \setminus \{\widetilde{\alpha}\}$.

1.1. Mostrar que el código $C \subseteq B^n$ corrige t errores si, y sólo si, $\rho(v, w) \geqslant 2t + 1$, para cualesquiera dos palabras en código v y w de C, distintas.

1.2. ¿Es cierto, que el código $C \subseteq B^n$, que corrige t errores, descubre:

1) no menos de $2t + 1$ errores;
2) no menos de $2t$ errores;
3) no más de $2t$ errores?

1.3. Mostrar que de todo subconjunto $C \subseteq B^n$ se puede obtener un código que descubra un error, quitando de C no más de la mitad de los vértices.

1.4. Determinar cuántos errores corrige y cuántos descubre el código con función característica f.

1) $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f(\tilde{x}^n) = x_1x_2 \ldots x_n \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$;

3) $f(\tilde{x}^{3n}) = x_1x_2 \ldots x_{3n} \vee x_1x_2 \ldots x_{2n}\bar{x}_{2n+1}\bar{x}_{2n+2} \ldots$
$\ldots \bar{x}_{3n} \vee x_1x_2 \ldots x_n\bar{x}_{n+1}\bar{x}_{n+2} \ldots \bar{x}_{3n} \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{3n}$;

4) $f(\tilde{x}^n) = x_1x_2 \ldots x_{n-1} \oplus x_1x_2 \ldots x_{n-2}x_n \oplus \ldots$
$\ldots \oplus x_2x_3 \ldots x_n$.

1.5. Supongamos que la palabra del código binario C se transmite por un canal de enlace. Al efectuar la transmisión de la palabra en código no puede suceder más de un error. Para cada palabra en código $\tilde{\alpha}$ construir el conjunto de aquellas palabras que pueden ser obtenidas después de la transmisión de $\tilde{\alpha}$ por el canal.

1) $C = \{01100, 00111, 11010, 10001\}$;
2) $C = \{11110, 10100, 01011, 11001\}$.

Sea que la probabilidad de que al transmitir por el canal de enlace la palabra arbitraria w de B^n tenga lugar un error en el i-ésimo orden, sea igual a p para todas las $i = \overline{1, n}$. Sea cierto código $C \subseteq B^n$ de potencia m, y ψ: $B^n \to C$ la decodificación. La magnitud

$$Q_\psi(p, C) = \frac{1}{m} \sum_{v \in C} \sum_{w \in \psi^{-1}(v)} p^{\rho(v, w)} (1-p)^{n-\rho(v, w)}$$

se llama *certeza de la decodificación ψ para el código C*.

1.6. Mostrar, que para $0 < p < 1/2$, el máximo de la cantidad $Q_\psi(p, C)$ para todas las decodificaciones posibles de un C dado, se obtiene con la condición, que para cada $w \in B^n$ se cumpla la igualdad $\rho(w, \psi(w)) = \min\limits_{v \in C} \rho(w, v)$.

1.7. 1) Para el código C del problema 1.5, 1), construir la decodificación ψ con la certeza máxima $Q_\psi(p, C)$, $0 < p < 1/2$, indicando para cada $w \in C$ el conjunto $\psi^{-1}(w)$. Hallar el $\max\limits_{\psi} Q_\psi(1/4, C)$.

2) ¿Cuántas decodificaciones distintas ψ con certeza máxima existen para el código C del problema 1.5, 1) y $0 < p < 1/2$?

1.8. Hallar la potencia máxima posible del código $C \subseteq B^n$, que posee la siguiente propiedad: es par para cualesquiera $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de $C\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

1.9. ¿Cuántos códigos maximales $\langle n, 2\rangle$ existen?

1.10. Sea $n = 3k$. Mostrar, que $m(n, 2n/3) = 4$.

1.11. Mostrar que la potencia del $\langle n, 2d+1\rangle$-código compactamente empaquetado es igual a $2^n \Big/ \sum\limits_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$.

1.12. ¿Existe el $\langle n, 3\rangle$-código compactamente empaquetado para $n = 147$?

1.13. Mostrar que para $n > 7$ no existen $\langle n, 7\rangle$-códigos compactamente empaquetados.

1.14. Demostrar que el código $C \subseteq B^n$ no es máximo, si $|C| = 3$.

1.15. Mostrar que si en B^n existe un $\langle n, 3\rangle$-código compactamente empaquetado, entonces existe la partición del cubo B^{n+1} en esferas no intersecadas de radio 1.

1.16. Sea C un $\langle n, 2d+1\rangle$-código compactamente empaquetado. Mostrar, que entonces $\binom{n}{d+1}$ es divisible sin resto por $\binom{2d+1}{d}$.

1.17. Mostrar que no existen $\langle n, 2d+1\rangle$-códigos equidistantes de potencia mayor que 2.

1.18. Mostrar que para un d par, existe un código equidistante de potencia $[2n/d]$.

1.19. Mostrar que $m(n, d)$ es una función no decreciente del parámetro n.

1.20. Mostrar que:

1) $m(n+d, d) \geqslant 2m(n, d)$;
2) $m(2n, d) \geqslant (m(n, d))^2$;
3) $m(n, d) \leqslant 2m(n-1, d)$.

1.21. Demostrar que $m(n, 2t+1) \geqslant 2^n \Big/ \sum\limits_{i=0}^{2t} \binom{n}{i}$.

1.22. Demostrar que

$$m(n, k, 2d) \geqslant \frac{\binom{n}{k}}{\sum\limits_{i=0}^{d-1} \binom{k}{i} \binom{n-k}{i}}.$$

1.23. Demostrar que para $n < 2d$ es justa la desigualdad

$$m(n, d) \leqslant \frac{2d}{2d-n}.$$

1.24. Demostrar que

$$m(n, k, d) \leqslant \left[\frac{nd}{2k^2 - n(2k-d)}\right],$$

si $2k^2 - n(2k-d) > 0$.

1.25. Mostrar que:

1) $m(n, k, d) \leqslant \left[\frac{n}{k} m(n-1, k-1, d-1)\right]$;

2) $m(n, k, d) \leqslant \left[\frac{n}{d}\left[\frac{n-1}{d-1}\left[\ldots\left[\frac{n-d}{k-d}\right]\ldots\right]\right]\right]$;

3) $m(n, k, d) \leqslant \left[\frac{n}{n-k} m(n-1, k, d)\right]$.

1.26. Sea $q(n, d)$ el número máximo de vértices en B^n, siendo que la distancia entre cualesquiera dos de ellos no supera a d. Demostrar que

$$m(n, d+1)\, q(n, d) \leqslant 2^n.$$

1.27. Demostrar que $m(n, d) \leqslant 2^{n-d+1}$.

1.28. Mostrar que de todo conjunto $C \subseteq B^n$, tal que $|C| \geqslant 2^d$, se puede separar un subconjunto D de potencia no menor que $2^{-d+1}|C|$, que es un $\langle n, d\rangle$-código.

§ 2. CODIGOS LINEALES

La expresión de la forma

$$\lambda_1\tilde{\alpha}_1 \oplus \lambda_2\tilde{\alpha}_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_s\tilde{\alpha}_s, \tag{1}$$

donde $\tilde{\alpha}_i \in B^n$, $\lambda_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, s}$ se llama *combinación lineal de los vectores* $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s$. La combinación lineal (1) se denomina *trivial*, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$, y no trivial en el caso contrario. Toda combinación lineal [1]) de vectores de B^n resulta, evidentemente, un vector de B^n. Los vectores $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s$ de B^n se llaman *linealmente independientes*, si cualquier combinación lineal no trivial de los mismos es distinta de $\tilde{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. En caso contrario se dice que los vectores $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s$ son *linealmente dependientes*. El subconjunto $G \subseteq B^n$ se denomina *grupo*, si G es cerrado con respecto a la operación de suma por módulo 2, o sea, si para cualesquiera $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ de G, el vector $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}$ pertenece a G. Del carácter cerrado de G con respecto a la operación de $\oplus$ se deduce, que toda combinación lineal de vectores de G también pertenecerá a G (en particular, $\tilde{0} \in G$). De este modo, todo grupo G en B^n resulta ser un *espacio vectorial lineal sobre el campo* $F_2 = \langle\{0, 1\}, \oplus, \cdot\rangle$. El mayor número $k = k(G)$, para el cual en el grupo (en el espacio lineal) G existen k vectores linealmente independientes, se denomina *dimensión* de G. El conjunto de los k vectores linealmente independientes de un espacio de dimensión k, se llama *base* de este espacio. Si el código $G \subseteq B^n$ genera un grupo, entonces él se denomina *lineal* o *grupal*. Si un código lineal en B^n tiene dimensión k, entonces se llama *(n, k)-código*. El código binario lineal que corrige un error, se denomina *código de Hamming*.

Es cómodo expresar a los códigos por medio de matrices. La matriz $H(C)$, cuyas filas son palabras codificadas del código $C \subseteq B^n$, se llama *matriz del código C*. La matriz $M(C)$, compuesta de k vectores linealmente independientes arbitrarios, que son palabras codi-

---

[1]) La definición de las operaciones de suma de vectores por módulo 2 y del producto de un escalar por un vector fue dada en el § 1 del cap. I.

ficadas del (n, k)-código C, se llama *matriz generadora* del código C. Si H es una matriz arbitraria de ceros y unidades con n columnas, entonces el conjunto $C(H)$ de todos los vértices del cubo B^n, que son combinaciones lineales de las filas de la matriz H, se llama *código engendrado por la matriz H*. Los vectores $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ se denominan *ortogonales*, si $\alpha_1\beta_1 \oplus \alpha_2\beta_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n\beta_n = 0$. El conjunto $V(H)$ de todos los vectores de B^n, ortogonales a cada una de las filas de la matriz H, se llama *espacio nulo de la matriz H*. Sea C un código binario, en el que cada palabra es ortogonal a cada fila de alguna matriz H. Si C es $(n-k)$-código, y la matriz H se compone de $n-k$ filas linealmente independientes, entonces H se llama *matriz de comprobación del código C*. El conjunto C^* de todos los vectores representados en forma de combinación lineal de las filas de la matriz de comprobación del (n, k)-código C, se denomina *código dual del código C*. Mediante $g(n, d)$ se designa el máx $|C|$, donde el máximo se toma con respecto a todos los códigos lineales $C \subseteq B^n$ con distancia de código d.

2.1. Sea que el conjunto $C \subseteq B^n$ se compone de k vectores linealmente independientes. Mostrar que cualesquiera dos combinaciones lineales de vectores del conjunto C, que se diferencian en sus coeficientes, representan distintos vértices del cubo B^n.

2.2. Mostrar que en B^n existe un sistema de n vectores linealmente independientes, pero no existe ninguno de $n+1$ vectores linealmente independientes.

2.3. Mostrar que el número de vectores de B^n, representados por combinaciones lineales de la forma (1), en las que la $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i \leqslant t$, no supera la $\sum_{i=0}^{t}\binom{s}{i}$.

2.4. Mostrar que todo (n, k)-código tiene potencia 2^k.

2.5. Mostrar que en un código lineal binario, o bien cada vector código tiene peso par, o bien la mitad de los vectores códigos tiene peso par, y la otra mitad peso impar.

2.6. Mostrar que el número de bases distintas en B^n es igual a

$$\frac{(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-2^{n-1})}{n!}.$$

2.7. Mostrar que el número de (n, k)-códigos distintos en B^n es igual a

$$\frac{(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-2^{k-1})}{(2^k-1)(2^k-2)\ldots(2^k-2^{k-1})}.$$

2.8. Hallar el número de vectores de B^n que sean ortogonales a un vector dado $\tilde{\alpha}$ de B_k^n.

2.9. Mostrar que el conjunto de todos los vectores de B^n ortogonales a cada una de las filas de la matriz binaria H de dimensiones

$k \times n$, toma un espacio lineal. ¿Acaso siempre este espacio tiene una dimensión $n - k$?

2.10. ¿Es cierto que para cada código lineal se puede indicar una matriz H, que sea:

1) generadora;

2) de comprobación?

2.11. A base de la matriz dada H, indicar la potencia $m(C(H))$ del código $C(H)$ por ella engendrado, y la distancia de código $d(C(H))$.

$$1)\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3)\ H = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

aquí la matriz H tiene una dimensión $n \times n$;

4) $H = (I_k P)$, donde I_k es una matriz unidad de dimensiónes $k \times k$, y P una matriz binaria arbitraria de dimensiones $k \times (n - k)$, siendo que en cada fila de la misma por lo menos hay dos unidades, $k \leqslant n - \log_2 (n + 1)$;

5) $H = (I_5 Q)$, donde I_5 es una matriz unidad de dimensiones 5×5, y

$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

2.12. Sea $V \subseteq B^n$ un espacio, compuesto de las combinaciones lineales de las filas de la matriz $H = (I_k P)$, donde I_k es una matriz unidad de dimensiones $k \times k$, y P una matriz compuesta por ceros y unidades, de dimensiones $k \times (n - k)$. Demostrar, que V es un espacio nulo de la matriz $G = (P^T I_{n-k})$, donde I_{n-k} es una matriz unidad de dimensiones $(n - k) \times (n - k)$, y P^T es la matriz traspuesta de P.

2.13. Para el código engendrado por la matriz H del problema 2.11, 1), construir la matriz de comprobación.

2.14. Mostrar que si $C \subseteq B^n$ es un (n, k)-código, entonces el código dual a C resulta un $(n, n - k)$-código.

2.15. Sea $H(C)$ la matriz del (n, k)-código $C \subseteq B^n$, no contenedora de columnas nulas. Mostrar que:

1) cada columna de la matriz $H(C)$ tiene 2^{k-1} unidades y la misma cantidad de ceros;

2) la suma de los pesos de las filas de la matriz $H(C)$ es igual a $n\,2^{k-1}$.

2.16. Mostrar que la distancia de código del código lineal $C \subseteq B^n$ es igual al minimal de los pesos de sus vectores no nulos.

2.17. Mostrar, que la distancia de código del (n, k)-código no supera a $[n2^{k-1}/(2^k - 1)]$.

2.18. Mostrar que para $n = 2d - 1$, la potencia del $\langle n, d\rangle$-código lineal no supera a $2d$.

2.19. 1) Mostrar, que la potencia maximal posible $g(n, d)$ del $\langle n, d\rangle$-código lineal, satisface la desigualdad $g(n, d) \leqslant 2g(n - 1, d)$.

2) Utilizando el resultado del problema 2.18, mostrar que $g(n, d) \leqslant d \cdot 2^{n-2d+2}$.

2.20. Sea que el código C es un espacio nulo de la matriz H. Mostrar que la distancia de código de C no es menor que d si, y sólo si, cualquier conjunto de un número $d - 1$ o menor de columnas de la matriz H, resulta linealmente independiente.

2.21. Mostrar que si $\sum\limits_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i} < 2^k$, entonces existe una matriz de ceros y unidades de dimensiones $k \times n$, en la que cualesquiera $d - 1$ columnas son linealmente independientes y, en consecuencia, existe un $(n, n - k)$-código con distancia de código d, o mayor que d.

2.22. Sea $H_{k,n}$, una matriz de dimensiones $k \times n$, donde $k =]\log_2(n + 1)[$, y en la que la columna con número i representa una descomposición binaria del número i $(i = \overline{1, n})$. Por ejemplo, para $n = 6$, la matriz $H_{3,6}$ tiene la forma

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Mostrar, que el espacio nulo de la matriz es un código de Hamming, o sea, un código lineal que corrige un error.

2) Construir un código que resulte ser un espacio nulo de la matriz $H_{3,6}$.

3) ¿Cuántos errores corrige el código engendrado por la matriz $H_{k,n}$?

2.23. Se llama especto del conjunto $C \subseteq B^n$ al vector $\widetilde{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$, donde s_r es el número de los pares de vértices de C, que tienen una distancia r entre ellos. Mostrar que para todo (n, k)-código C, existe un (n, k)-código C', que tiene el mismo espectro y que posee la forma de una matriz generadora $(I_k P)$, donde I_k es la matriz unidad de dimensiones $k \times k$, y P es alguna matriz compuesta por ceros y unidades, de dimensiones $k \times (n - k)$.

2.24. 1) Mostrar que $g(9, 5) = 4$.

2) Mostrar que $m(9, 5) \geqslant 5$.

2.25. Sea que existe un (n, k)-código con distancia de código d. ¿Es cierto que entonces hay un (n, k)-código con distancia de código $d - 1$?

§ 3. CODIFICACION ALFABETICA

Sea un alfabeto A, entonces, A^* es el conjunto de todas las palabras finitas en A, incluyendo la palabra vacía. La *longitud* (número de letras) de la palabra w se anota mediante $\lambda(w)$. La *palabra vacía* se connota por medio de Λ. La *unión de las palabras* w_1 y w_2, obtenida por la añadidura de la palabra w_2 a la derecha de la palabra w_1, se indica w_1w_2. La palabra w_1 se denomina *prefijo* de w_1w_2, y la palabra w_2, *sufijo* de w_1w_2. El prefijo w_1 (el sufijo w_2) de la palabra w_1w_2 se llama *propio*, si a un mismo tiempo $w_1 \neq \Lambda$ y $w_2 \neq \Lambda$. La palabra v se denomina *subpalabra de la palabra* w, si existen tales palabras u_1 y u_2, que $w = u_1vu_2$.

Sean, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ un alfabeto de comunicación y B un alfabeto codificador. Sea φ la aplicación unívoca de las letras del alfabeto A en B^*. La codificación de las palabras en A, mediante la cual a cada palabra (comunicación) $a_{i_1}a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ se le coloca en correspondencia la palabra $\varphi(a_{i_1})\varphi(a_{i_2}) \ldots \varphi(a_{i_k})$, se denomina codificación *alfabética* (o *letra a letra*). La codificación alfabética se determina totalmente mediante la aplicación φ que la engendra, y se indica por K_φ. El conjunto $\{\varphi(a)\colon a \in A\}$ se llama *código alfabético* y se designa por medio de $\varphi(A)$. La codificación alfabética K_φ y el código correspondiente $\varphi(A)$ se llaman *unívocamente decodificables*, o *separables*, si de cada igualdad del tipo

$$\varphi(a_{i_1})\varphi(a_{i_2}) \ldots \varphi(a_{i_k}) = \varphi(a_{j_1})\varphi(a_{j_2}) \ldots \varphi(a_{j_l})$$

entre las palabras en el alfabeto codificador B, se deduce que $l = k$ y $j_t = i_t$ $(t = \overline{1, k})$. El código $\varphi(A)$ se llama *prefijo*, si ninguna palabra de $\varphi(A)$ no resulta comienzo de alguna otra palabra de $\varphi(A)$. El código alfabético divisible $\varphi(A)$ se llama *completo*, si para cada palabra w en el alfabeto codificador B es justa la afirmación: o bien w es prefijo propio de alguna palabra de $\varphi(A)$, o bien alguna palabra de $\varphi(A)$ es prefijo (no es preciso que sea propio) de la palabra w.

Uno de los algoritmos de distinción de la divisibilidad de un código alfabético se reduce a lo siguiente. Sea $\varphi(A) = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, un código alfabético. Sean, S_1 el conjunto de los sufijos propios de las palabras en código, y S_2 el conjunto de todas las palabras, cada una de las cuales es prefijo de alguna palabra codificada. Examinemos el multigrafo orientado G_φ, cuyos vértices son elementos del conjunto $S = (S_1 \cap S_2) \cup \{\Lambda\}$. Sean σ y τ, dos vértices de S, distintos. El arco que va desde σ hasta τ en el grafo G_φ existe si, y sólo si, existen la palabra en código w y la sucesión $P = w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_k}$ de palabras en código, tales que las palabras w y $\sigma w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_k}\tau$ sean iguales como las palabras en el alfabeto codificador. Además, si $\sigma \neq \Lambda$, entonces la sucesión P puede ser vacía. Al arco que va desde σ hasta τ, se le inscribe la palabra $w_{i_1} w_{i_2} \ldots$

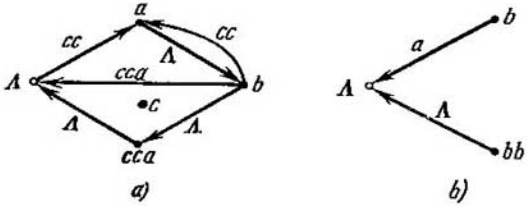


Fig. 22.

$\ldots, w_{i_k}$. En el multigrafo G_φ no hay bucles. El multigrafo G_φ se denomina *grafo del código alfabético* φ. Es justo el siguiente

TEOREMA 1 (A. A. Márkov). *El código φ es divisible si, y sólo si, en el grafo G_φ no existen circuitos que pasen por el vértice Λ.*

EJEMPLO 1. Sea $\varphi(A) = \{cc, cca, bcca, aa, ab\}$. Entonces, $S = \{\Lambda, c, cca, a, b\}$. El grafo G_φ se muestra en la fig. 22, a. En G_φ existe un circuito que pasa por los vértices Λ, a, b. Apuntando las palabras adjudicadas a los vértices y arcos de este circuito, hallamos una palabra que se decodifica de dos modos:

$$ccabcca = (cca)\,(bcca) = (cc)\,(ab)\,(cca).$$

EJEMPLO 2. Sea $\varphi(A) = \{a, ab, acbb, bb, bbacc\}$. Entonces $S = \{\Lambda, b, bb\}$. En el grafo G_φ, mostrado en la fig. 22, b, no hay circuitos que pasen por Λ. El código es divisible.

Sea que se tiene una fuente de comunicaciones, la que de un modo casual genera las letras del alfabeto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Se supone, que las apariciones de las letras del alfaboto A son estadísticamente independientes, y se someten a una distribución de probabilidades $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. A todo código alfabético binario $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ se le puede cotejar el número

$$\mathcal{L}_C(P) = \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda(w_i),$$

llamado *valor del código C para la distribución P*. El número $\mathcal{L}_C(P)$ es igual a la cantidad media de letras del alfabeto codificador, que tiene cada letra del alfabeto A. El código prefijo C_0 se llama *óptimo para la distribución P*, si $\mathcal{L}_{C_0}(P) = \inf\limits_{C} \mathcal{L}_C(P)$, donde la cara inferior se toma por el conjunto de los códigos prefijos binarios, compuestos de m palabras.

El método de Haffman para la construcción de un código óptimo, se apoya en el teorema siguiente.

Teorema 2. *Si* $C = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ *es un código binario óptimo para la distribución* $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ *y* $p_j = q_1 + q_2$, *siendo* $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_{j-1} \geqslant p_j \geqslant p_{j+1} \geqslant \ldots \geqslant p_m \geqslant q_1 \geqslant q_2$, *entonces, el código* $C' = \{w_1, w_2, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_m, w_j0, w_j1\}$ *resulta óptimo para la distribución*

$$P' = \{p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_m, q_1, q_2\}.$$

El código C' se llamará *ampliación del código óptimo C*. El método de Haffman consiste en lo siguiente. Sea que en la nómina inicial de probabilidades en orden no creciente, las dos últimas probabilidades son p_{m-1} y p_m. Estas probabilidades se excluyen de la nómina, y su suma se inserta en el listado de tal modo, que en la nueva nómina obtenida las probabilidades no crezcan. Este procedimiento se repite hasta que se obtiene una lista de dos probabilidades. Después de obtenida esta nómina, a una de las probabilidades se le otorga el símbolo 0, y a la otra el 1 (el código óptimo para un alfabeto de comunicaciones de dos letras, para cualquier ley de distribución de las propabilidades). Luego, en correspondencia con el teorema, se construye el código óptimo para tres letras para la correspondiente nómina de probabilidades, y así sucesivamente hasta que no se obtiene el código óptimo para el listado inicial de probabilidades. El método de Haffman se ilustra con este ejemplo:

i	p_i							w_{i1}
1	0,4	0,4	0,4	0,6	0	1	1	1
2	0,2	0,2	0,4	0,4	1	00	01	000
3	0,2	0,2	0,2			01	000	001
4	0,1	0,2					001	010
5	0,1							011

Para la distribución de probabilidades dada, existen también otros códigos óptimos, por ejemplo,

Tabla 6

i	p_i	w_i	w'_i
1	0,4	1	00
2	0,2	01	01
3	0,2	000	10
4	0,1	0010	110
5	0,1	0011	111

El método de Fano de construcción de códigos cercanos a los óptimos, consiste en lo siguiente. La nómina de probabilidades ordenadas en forma no creciente se divide en dos partes (consecutivas), de tal modo, que las sumas de las probabilidades que integran estas partes, se diferencien lo menos posible. A cada letra del alfabeto de comunicaciones, que corresponde a las probabilidades de la primera parte, se le confronta el símbolo 0 (ó 1), y a las letras restantes el símbolo 1 (respectivamente, el 0). Luego, se procede de igual modo con cada una de las partes, si ella contiene por lo menos dos probabilidades. El proceso continúa hasta que toda la lista no se divide en partes que contengan sólo una probabilidad. Ejemplos de códigos construidos por el método de Fano, se muestran en la tabla 6.

3.1. De acuerdo con el código alfabético $\varphi(A)$ dado, construir el grafo G_φ y aclarar si es un código divisible o no.

1) $\varphi(A)=\{ab, dc, a, bcadd, ca\}$, $A=\{i, i=\overline{1, 5}\}$;

2) $\varphi(A)=\{ddac, dd, cddab, a, cddd, b\}$, $A=\{i, i=\overline{1, 6}\}$;

3) $\varphi(A)=\{a, ab, acbb, abb, bbacc\}$, $A=\{i, i=\overline{1, 5}\}$;

4) $\varphi(A)=\{abc, bbc, bcb, caa, acbb, cbcb, bccabb, abcacbbb\}$,

$$A=\{i, i=\overline{1, 8}\};$$

5) $\varphi(A)=\{abc, abb, bcc, ccaa, bcabbbcc, bbccaaabca, abcabbabbbcca\}$,

$$A=\{i, i=\overline{1, 7}\};$$

6) $\varphi(A)=\{ab, bb, ca, cba, abb, bac, aabc, cabba\}$, $A=\{i, i=\overline{1, 8}\}$.

3.2. Sea que los números 1, 2, 4, 17, 98 se codifican con sus descomposiciones binarias de la longitud mínima posible. Por ejemplo, el código de la unidad es 1, el código del dos es 10, el del cuatro es 100. ¿Es esta codificación divisible?

3.3. Por el código indivisible dado $\varphi(A)=\{aa, ab, cc, cca, bcca\}$ y por la palabra w en el alfabeto codificador $B=\{a, b, c\}$ aclarar si la palabra w es código de alguna comunicación. Si es así, entonces dilucidar si la palabra w es código de exactamente una comunicación.

1) $w = ccabccabccabcc$;
2) $w = bccaccabccabccacabcca$;
3) $w = abbccaccabccaabab$.

3.4. Sea $\varphi(A)$ un código alfabético y G_φ el grafo de este código. Sea luego que el grafo G'_φ es obtenido del G_φ el quitar todos los vértices que sean palabras en código. ¿Sigue siendo válido el teorema 1, si se reemplaza a G_φ por G'_φ?

3.5. Sea $\varphi(A)$ un código alfabético y G_φ el grafo del mismo. Sea luego que el grafo G'_φ se obtuvo de G_φ mediante la eliminación de todos los arcos con la marca Λ, que llevan al vértice Λ. ¿Continúa teniendo valor el teorema 1, si reemplazamos a G_φ por G'_φ?

3.6. Para el código $\varphi(A)$ divisible dado, construir un código prefijo con la misma colección de las longitudes de las palabras en código.

1) $\varphi(A) = \{01, 10, 100, 111, 011\}$;
2) $\varphi(A) = \{1, 10, 00, 0100\}$;
3) $\varphi(A) = \{10, 101, 111, 1011\}$.

3.7. Sea $\varphi(A)$ un código alfabético de potencia m, en el que la suma de las longitudes de las palabras en código es igual a N, y la longitud máxima de estas palabras, igual a l. Utilizando el teorema 1, demostrar que el código $\varphi(A)$ es divisible si, y sólo si, cada palabra que en el alfabeto codificador tiene una longitud no mayor que $(l-1)(N-m+1)$, o bien es código de exactamente una palabra, compuesta por las letras del alfabeto de comunicaciones A, o bien en general no es código de ninguna palabra de A^*.

3.8. Sean, k la menor y l la mayor de las longitudes de las palabras en código del código alfabético $\varphi(A)$, y N la suma de las longitudes de estas palabras. Mostrar, que para establecer la divisibilidad del código $\varphi(A)$ es suficiente probar la decodificación unívoca, no más que para Nl/k palabras en el alfabeto codificador.

3.9. Consideraremos que dos palabras w y v en el alfabeto $\{0, 1\}$ son *equivalentes*, si existe tal palabra u, que puede ser obtenida tanto de w como de v, con ayuda de las siguientes operaciones, empleadas en un número finito:

1) por tachadura de las subpalabras del tipo 10 y 1001;
b) intercalando en los espacios entre letras[1]), las palabras del tipo 10 y 1001.

¿Son o no son equivalentes los siguientes pares de palabras w y v:

1) $w = 1010101$, $v = 0101010$;
2) $w = 10010010$, $v = 010010010$;
3) $w = 11011010$, $v = 01101101$?

[1]) También se permite añadir las palabras 10 y 1001 a la derecha y a la izquierda de la palabra que se transforma.

3.10. Sea que M es un conjunto compuesto por m palabras no vacías en el alfabeto A, que tiene k letras. Mostrar que:

1) en M se hallara una palabra cuya longitud no es menor que $\log_k (1 + m (k - 1))$;

2) para todo $\varepsilon > 0$, la porción de aquellas palabras en M cuyas longitudes no resultan menores que $(1 - \varepsilon) \log_k (1 + m (k - 1))$, no supera a $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-\varepsilon} m^{-\varepsilon}$, para $m \geqslant 2$, $k \geqslant 2$.

3.11. Sea que en el código alfabético binario C, de potencia $2^n + 1$, cada palabra en código tiene una longitud que no supera a n.

1) Demostrar que el código C no es prefijo.

2) ¿Puede ser divisible el código C?

3.12. Para las distribuciones de probabilidades de aparición de letras dadas, construir los códigos óptimos por el método de Haffman.

1) $P = (0{,}34;\ 0{,}18;\ 0{,}17;\ 0{,}16;\ 0{,}15)$;

2) $P = (0{,}6;\ 0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}08;\ 0{,}07;\ 0{,}06)$;

3) $P = (0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}03;\ 0{,}03;\ 0{,}02;\ 0{,}02)$;

4) $P = (0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}05)$.

3.13. 1) Para las distribuciones de probabilidades del problema anterior, construir los códigos por el método de Fano.

2) Poner un ejemplo de una distribución de probabilidades, con la que el código, construido por el método de Fano, no es óptimo.

3.14. Sea $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, un código binario óptimo, que responde a la distribución $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_m$. Mostrar que:

1) $\lambda (w_i) \leqslant \lambda (w_j)$, si $p_i > p_j$.

2) El código C es completo.

3) Existen dos palabras en código de longitud $\lambda (w_m)$, que tienen prefijos iguales, de longitud $\lambda (w_m) - 1$.

3.15. Mostrar que si m no es exponente de dos, entonces con cualquier distribución de probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, en el código óptimo se encuentran dos palabras que tienen diferente longitud.

3.16. Apoyándose en los problemas 3.14 y 3.15, así como en la definición de código óptimo, explicar por que los códigos que a continuación se indican, no son óptimos con las distribuciones de probabilidades dadas.

1)

p_i	w_i
0,6	0
0,2	10
0,1	11
0,1	01

2)

p_i	w_i
0,6	1
0,2	01
0,15	001
0,05	0001

3)

p_i	w_i
0,2	000
0,2	001
0,2	010
0,2	011
0,2	100

3.17. Hallar el menor m y tal distribución de probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, para los que existen códigos óptimos, que se diferencian por las colecciones de longitudes de las palabras en código.

3.18. 1) Mostrar, que la longitud máxima de la palabra en código en un código óptimo de potencia m, no supera a $m - 1$.

2) Mostrar que para todo m entero ($m \geqslant 2$) se halla una distribución de probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ que cumple la siguiente condición: existe un código óptimo que responde a la distribución P, tal que la longitud máxima de la palabra en código en él, es igual a $m - 1$.

3.19. Mostrar que no existen más de $\binom{2m-1}{m}$ prefijos completos de los códigos binarios de potencia m.

3.20. Un código se llama casi uniforme, si las longitudes de sus palabras en código no se diferencian en más de una unidad. Mostrar, que para todo m natural, un código casi uniforme es óptimo para la distribución $P = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)$. ¿Es cierto lo contrario?

3.21. 1) Mostrar (por inducción con respecto a m), que la suma de las longitudes de las palabras en código del código óptimo con m comunicaciones, no supera a $\frac{1}{2}(m + 2)\cdot(m - 1)$.

2) Mostrar que para cada $m \geqslant 2$, entero, la evaluación indicada en el problema anterior, es alcanzable.

3.22. Sean $g_1, g_2, \ldots, g_m$, caras arbitrarias del cubo B^n intersecadas de par en par, y de dimensiones $r_1, r_2, \ldots, r_m$, respectivamente.

1) Utilizando la evidente desigualdad $\sum_{i=1}^{m} 2^{r_i} \leqslant 2^n$, mostrar, que las longitudes $\lambda(w_1), \lambda(w_2), \ldots, \lambda(w_m)$ de las palabras del código prefijo binario arbitrario $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, cumplen con la condición $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda(w_i)} \leqslant 1$.

2) Mostrar que para el código prefijo completo, es justa la igualdad $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda(w_i)} = 1$.

3) Mosrtar que si $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$, donde λ_i son números naturales, $i = \overline{1, m}$, entonces existe un código prefijo con longitudes de palabras, iguales a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

3.23. 1) ¿Es cierto que en un código binario óptimo el número de palabras en código de longitud maximal es par?

2) ¿Es verdad que este número es exponente de 2?

3.24. Sea $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, un código binario prefijo completo, y sea que $\lambda(w_i) \geqslant \lambda(w_{i+1})$ para todo $i = \overline{1, m - 1}$.

Mostrar que para $m \geqslant 2$, para todo $i = \overline{1, m-1}$, es justa la desigualdad $\lambda(w_{i+1}) - \lambda(w_i) \leqslant \log_2 m - 1$.

3.25*. Sea L_m el menor entero, para el que existe un código prefijo binario de potencia m y con una suma de longitudes de las palabras en código, L_m. Demostrar, que $L_m \geqslant m\,[\log_2 m]$, para $m \geqslant 2$.

3.26. Mosrtar que las longitudes de las palabras en código $\lambda(w_1)$, $\lambda(w_2)$, ..., $\lambda(w_m)$, del código óptimo binario $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, se somete a la condición $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda(w_i)} = 1$.

3.27. Sean $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, una distribución de probabilidades $(p_i > 0,\ i = \overline{1, m})$, y $\mathcal{L}(P) = \inf_C \mathcal{L}_C(P)$, donde la cota inferior se toma por todos códigos prefijos binarios de potencia m $(m \geqslant 3)$.

1) Mostrar que $\mathcal{L}(P) > 1$.

2) Demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier entero $m \geqslant 1$, existe una distribución de probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, tal, que $\mathcal{L}(P) < 1 + \varepsilon$.

El método de Shennón para la construcción de códigos cercanos al óptimo, consiste en lo siguiente.

Sea $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $p_i \geqslant p_{i+1}$, $i = \overline{1, m-1}$, la distribución de probabilidades de aparición de las letras del alfabeto de comunicaciones $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Entonces, a la letra a_i se le confronta la palabra en código de longitud $l_i = \left]\log \frac{1}{p_i}\right[$, compuesta de las primeras (después de la coma) l_i cifras de la descomposición del número $q_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} p_j$ en la fracción binaria infinita (con insuficiencia).

Por ejemplo, si $P = (0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}3)$, entonces, el código de la letra a_1 es 00, el de la a_2 es 01, y el de la a_3, 10.

3.28. Construir, por el método de Shennón, los códigos para las distribuciones de probabilidades de los problemas 3.12, 1), 2).

3.29. Indicar el menor m, para el cual existe una distribución de probabilidades $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ tal, que el código construido por el método de Shennón para la distribución de probabilidades dada, no sea óptimo.

3.30. Demostrar que un código construido por el método de Shennón, es prefijo.

3.31. Sea $\mathcal{L}^*(m) = \sup_P \inf_C \mathcal{L}_C(P)$, donde la cota superior se toma por todas las distribuciones $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, tal que $p_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. 1) Demostrar que $\mathcal{L}^*(m) \geqslant [\log_2 m]$. 2) Demostrar que $\mathcal{L}^*(m) \leqslant [\log_2 m] + 1$.