Capítulo
VI

AUTOMATAS FINITOS

§ 1. FUNCIONES DETERMINADAS Y DE DETERMINACION ACOTADA

Sea A un alfabeto finito no vacío. Los elementos del mismo se llaman *letras* (o *símbolos*). Se llama *palabra en el alfabeto A* a la sucesión, compuesta de letras de A. La *longitud* (número de letras) en la palabra w se anota mediante $\lambda(w)$. El conjunto de todas las palabras $\tilde{x}^s = x(1)\,x(2)\,\ldots\,x(s)$ de longitud s $(s \geqslant 1)$ en el alfabeto A suele indicarse por medio de A^s. La palabra de longitud 0 (*palabra vacía*) se connota con el símbolo Λ. Con A^* se indica el conjunto $\{\Lambda\} \cup \bigcup\limits_{s\geqslant 1} A^s$, y por medio de A^ω el conjunto de todas las palabras $\tilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\,\ldots$, donde $x(t) \in A$, $t = 1, 2, \ldots$ Las palabras de A^ω *se llaman palabras infinitas en el alfabeto A*.

La palabra w, que se obtiene con el agregado de la palabra w_2 a la derecha de la palabra finita (o vacía) w_1, se llama *unión de las palabras* w_1 y w_2 y se indica mediante w_1w_2. Además, la w_1 se llama *comienzo* (*prefijo*) y la palabra w_2, *terminación* (*sufijo*) de la palabra w.

Sean A y B dos alfabetos finitos no vacíos. La aplicación φ: $A^\omega \rightarrow B^\omega$ se denomina *función determinada*, u *operador determinado* (abreviado: *d. función*, o *d. operador*), si cumple la siguiente condición: para todo $s \geqslant 1$, el s-ésimo símbolo $y(s)$ de la palabra $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega)$ es función unívoca de los primeros s símbolos $x(1), x(2), \ldots, x(s)$, de la palabra $\tilde{x}^\omega$.

Si en las palabras $\tilde{x}_1^\omega$ y $\tilde{x}_2^\omega$ los prefijos de longitud s $(s \geqslant 1)$ coinciden, entonces también coinciden los prefijos de longitud s en las palabras $\tilde{y}_1^\omega = \varphi(\tilde{x}_1^\omega)$ e $\tilde{y}_2^\omega = \varphi(\tilde{x}_2^\omega)$.

Con $\Phi_{A,\,B}$ se indicará el conjunto de todas las funciones determinadas (f.d.) del tipo φ: $A^\omega \rightarrow B^\omega$.

Si $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, y $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$, entonces, la aplicación $\varphi: A^\omega \to B^\omega$ induce m funciones $\varphi_i = \varphi_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, cada una de las cuales depende de n variables, además, la variable X_j recorre el conjunto A_j^ω ($j = 1, 2, \ldots, n$). Estas funciones se definen así. Sea $\widetilde{x}^\omega = x(1)\, x(2) \ldots x(t) \ldots$, una palabra de A^ω e $\widetilde{y}^\omega = \varphi(\widetilde{x}^\omega) = y(1)\, y(2) \ldots y(t) \ldots$ Entonces, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $x_j(t) \in A_j$, $\widetilde{x}_j^\omega = x_j(1)\, x_j(2) \ldots x_j(t) \ldots$, $\widetilde{x}^\omega = (\widetilde{x}_1^\omega, \widetilde{x}_2^\omega, \ldots, \widetilde{x}_n^\omega)$; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t))$, $y_i(t) \in B_i$, $\widetilde{y}_i^\omega = y_i(1)\, y_i(2) \ldots y_i(t) \ldots$, $\widetilde{y}^\omega = (\widetilde{y}_1^\omega, \widetilde{y}_2^\omega, \ldots, \widetilde{y}_m^\omega)$, $\varphi_i(\widetilde{x}_1^\omega, \widetilde{x}_2^\omega, \ldots, \widetilde{x}_n^\omega) = \widetilde{y}_i^\omega$.

Se puede proceder a la inversa, a partir de las funciones φ_i, construir la aplicación φ.

El concepto de *función determinada de n argumentos*, surge de un modo natural al considerar las funciones determinadas del tipo $\varphi: (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)^\omega \to B^\omega$.

La variable X_1 de la función $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n): (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)^\omega \to B^\omega$ se llama *sustancial*, si es que se encuentran dos colecciones $(\widetilde{x}_{11}^\omega, \widetilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \widetilde{x}_{n1}^\omega)$ y $(\widetilde{x}_{12}^\omega, \widetilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \widetilde{x}_{n1}^\omega)$ de valores de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, que se diferencian sólo por el primer elemento, y tales, que $\varphi(\widetilde{x}_{11}^\omega, \widetilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \widetilde{x}_{n1}^\omega) \neq \varphi(\widetilde{x}_{12}^\omega, \widetilde{x}_{21}^\omega, \ldots, \widetilde{x}_{n1}^\omega)$. Si la variable X_1 no es sustancial, entonces se denomina *ficticia* (o *insustancial*). Análogamente se determinan la sustancialidad o la ficción de cualquier otra variable X_i, de la que dependa la función dada.

Se dice que la función $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *depende sustancialmente* (*insustancialmente*) de la variable X_i ($1 \leqslant i \leqslant n$), si esta variable es sustancial (respectivamente, ficticia) de la función φ.

Si A es el conjunto de todos los vectores de longitud n con elementos de E_k, y B el conjunto de todos los vectores de longitud m con elementos de E_l, entonces, en lugar de $\Phi_{A,B}$ se empleará la designación $\Phi_{k;\,l}^{n;\,m}$. Para $n = m = 1$, los superíndices se omitirán, indicando $\Phi_{k,\,l}$ en lugar de $\Phi_{k;\,l}^{1;\,1}$; si $k = l$, el subíndice será único: $\Phi_k^{n,\,m}$.

A veces resulta cómodo considerar que la f.d. φ de $\Phi_{A,\,B}$ *se realiza* por algún *mecanismo discreto* (*autómata*) $\mathfrak{A}_\varphi$ que trabaja en momentos discretos de tiempo $t = 1, 2, \ldots$ En la entrada de este mecanismo, en cada momento t se da una señal $x(t)$, y en la salida aparece la señal $y(t)$ (fig. 23). Las palabras $\widetilde{x}^\omega$ se denominan *de entrada*, y las $\widetilde{y}^\omega$, *de salida*; A es el *alfabeto de entrada* y B el *de salida del autómata* $\mathfrak{A}_\varphi$. Si $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, y $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$, entonces, se puede considerar que el autómata $\mathfrak{A}_\varphi$ realiza m funciones determinadas, cada una de las cuales depende de n variables.

Cualesquiera dos funciones φ_1 y φ_2 de $\Phi_{A,\,B}$ se llaman *distintas*, si existe una palabra de entrada $\widetilde{x}_0^\omega$, modificada por éstas en diferentes palabras de salida, o sea, si $\varphi_1(\widetilde{x}_0^\omega) \neq \varphi_2(\widetilde{x}_0^\omega)$. Si la igualdad $\varphi_1(\widetilde{x}^\omega) = \varphi_2(\widetilde{x}^\omega)$ se cumple para toda palabra de entrada $\widetilde{x}^\omega$, entonces, φ_1 y φ_2 se denominan funciones determinadas *equivalentes* o *indistintas*.

Sean $\varphi \in \Phi_{A,\,B}$ y $\psi \in \Phi_{A,\,B}$. Si existe la palabra $\widetilde{x}_0^s \in A^*$, tal que $\varphi(\widetilde{x}_0^s\widetilde{x}^\omega) = \varphi(\widetilde{x}_0^s)\,\psi(\widetilde{x}^\omega)$ [1] para cualquier palabra $\widetilde{x}^\omega \in A^\omega$, entonces, el operador ψ se llama *operador residual del operador* φ *engendrado por la palabra* $\widetilde{x}_0^s$, y se lo indica mediante $\varphi_{\widetilde{x}_0^s}$. El conjunto $Q(\varphi, \widetilde{x}_0^s)$ de todos los *operadores residuales* del operador φ, equivalentes al operador $\varphi_{\widetilde{x}_0^s}$, forma una *clase de equivalencia*, denominada *estado del operador* φ, *contenedor del operador residual* $\varphi_{\widetilde{x}_0^s}$. El estado

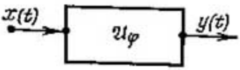


Fig. 23.

que contiene el operador φ se denomina *inicial*. Si $\psi \in Q(\varphi, \widetilde{x}_0^s)$, entonces, diremos que el *operador* ψ *se realiza con el estado* $Q(\varphi, \widetilde{x}_0^s)$ del operador φ. El operador φ se denomina *acotado-determinado* (abreviado: *o.a.-d.* o *f.a.-d.*, *función acotada-determinada*), si tiene un número finito de estados distintos de par en par. El número de los distintos estados de una f.a.-d. se llama *peso* de la misma. Si el conjunto de los distintos estados de par en par del operador φ es infinito, entonces, consideraremos que el peso del operador φ es ∞. Indiquemos con $\hat{\Phi}_{A,\,B}$ el conjunto de todas las funciones de $\Phi_{A,\,B}$, que son f.a.-d.

Al considerar las f.d. es cómodo utilizar la representación gráfica de las mismas en forma de *árboles informativos infinitos*. Sea A un alfabeto de n letras. Con D_A designamos al árbol radical orientado infinito, que cumple las condiciones:

(a) el semigrado de salida de cada vértice, incluida la raíz, es igual a n;

(b) el semigrado de escala de la raíz es igual a 0, y de todo otro vértice a 1;

(c) cada arco del árbol D_A tiene adjudicada alguna letra del alfabeto A, además, a distintos arcos que parten de un mismo vértice del árbol (en particular, de la raíz) se les atribuyen letras diferentes. La raíz del árbol se considerará como un *vértice de rango nulo*; si el vértice v es el extremo final de un arco que sale de un vértice de i-ésimo rango ($i \geqslant 0$), entonces, v se llama *vértice de* $(i+1)$*-ésimo*

[1]) Aquí, mediante $\varphi(\widetilde{x}_0^s)$ se indica el profijo de longitud s de la palabra de entrada $\varphi(\widetilde{x}_0^s\widetilde{x}^\omega)$.

rango. *Arco de la j-ésima fila* ($j \geqslant 1$), se llama al que parte de un vértice de $(j-1)$-*ésimo rango*. A toda cadena orientada infinita en el árbol D_A le corresponde una palabra de A^{ω}. En la fig. 24 se muestra un *fragmento del árbol* D_A, $A = \{0, 1\}$,compuesto de las tres primeras filas de este árbol (aquí y en adelante, supondremos que el símbolo 0 corresponde al arco izquierdo que parte del vértice, y el símbolo 1 al derecho); con arcos en negrita se destaca la cadena que corresponde a la palabra 101.

El *árbol cargado* $D_{A,\ B}$ se obtiene del árbol D_A, agregando a cada arco alguna palabra del alfabeto B. A toda cadena infinita orientada

Fig. 24.

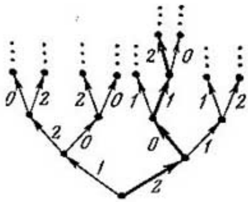


Fig. 25.

en el árbol $D_{A,\ B}$ le corresponde una palabra de B^{ω}, compuesta por las letras adjudicadas a los arcos de esta cadena. Por eso, puede considerarse que el árbol cargado $D_{A,\ B}$ *da* (*realiza*) la aplicación φ: $A^{\omega} \to B^{\omega}$, que es una f.d. En la fig. 25 se muestra un fragmento de un árbol cargado $D_{A,\ B}$, donde $A = \{0, 1\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$; la f.d. que corresponde a este árbol, modifica, por ejemplo, la palabra 1010, haciéndola 2012.

Sea que $D_{A,\ B}$ es un árbol cargado que realiza la f.d. φ. Al operador residual $\varphi_{\tilde{x}_0^s}$ ($s \geqslant 0$) del operador φ, le corresponde el subárbol $D_{A,\ B}(\widetilde{x}_0^s)$, que crece a partir de un vértice $v(\widetilde{x}_0^s)$ de s-ésimo rango, en el que concluye la cadena que parte de la raiz y contiene exactamente s arcos; además, a esta cadena en la i-ésima fila le corresponde el arco marcado con la letra $x_0(i) \in A$.

Si los operadores residuales $\varphi_{\tilde{x}_1^{s_1}}$ y $\varphi_{\tilde{x}_2^{s_2}}$ son equivalentes, entonces, los vértices que les corresponden $v(\widetilde{x}_1^{s_1})$ y $v(\widetilde{x}_2^{s_2})$ y los subárboles que parten de estos vértices también se llaman *equivalentes*. El peso del árbol, realizado por la f.d., es igual al peso de esta función, y, en consecuencia, al número máximo de vértices (o subárboles) no equivalentes de par en par del árbol dado.

1.1. Aclarar, si es f.d. o no la aplicación φ: $\{0, 1\}^{\omega} \to \{0, 1\}^{\omega}$:
1) $\varphi(x(1)\, x(2) \ldots) = x(2)\, x(3) \ldots$, o sea $y(t) = x(t+1)$, $t \geqslant 1$;

2) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = 10100100010\ldots010\underbrace{\ldots010}_{n \text{ veces}}$ para cualquier palabra de entrada $\tilde{x}^\omega$;

3) $\varphi(x(1)\,x(2)\,x(3)\ldots) = x(1)\,x(2)\,x(1)\,x(2)\,x(3)\ldots$, o sea, $y(1) = x(1)$, $y(2) = x(2)$ e $y(t) = x(t-2)$ para $t \geqslant 3$;

4) $\varphi(x(1)\,x(2)\ldots) = 0\,x(1 + x(2))\,x(1 + x(3))\ldots$, o sea, $y(1) = 0$, $y(t) = x(1 + x(t))$ para $t \geqslant 2$.

1.2. ¿Es o no una función determinada la φ: $\{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$, dada mediante la siguiente descripción verbal?

1) La palabra $\tilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots$ se transforma en la palabra $\tilde{0}^\omega = 000\ldots0\ldots$, si existe tal t, que $x(t) = 0$; en el caso contrario $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \tilde{1}^\omega = 111\ldots1\ldots$

2) La s-ésima letra $y(s)$ en la palabra $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega)$ es igual a 0, si para algún $t \leqslant s$ se cumple la desigualdad $x(t) < x(t+1) + x(t+2)$; en el caso contrario, $y(s) = 1$.

3) La s-ésima letra $y(s)$ en la palabra $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega)$ es igual a 0, si existe un $t \geqslant s$ tal, que $x(t) \leqslant x(s)$; en el caso contrario, $y(s) = 1$.

4) $y(1) = 0$ y para $s \geqslant 2$ el número de ceros en el prefijo $y(1) \times y(2)\ldots y(s)$ de la palabra $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega)$ es en una unidad mayor que el número de ceros en la palabra $x(2)\,x(3)\ldots x(s)$.

A cada palabra $\tilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$ de $\{0, 1\}^\omega$, le corresponde algún número $\nu(\tilde{x}^\omega)$ del segmento $[0, 1]$, cuya descomposición binaria tiene la forma $0, x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$ Si $a \in [0, 1]$, entonces, su descomposición binaria[1]) $0, a_1a_2\ldots a_t\ldots$ genera la palabra $\langle a\rangle = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$, donde $x(t) = a_t$ $(t \geqslant 1)$.

1.3. Aclarar si es o no f.d. la $\varphi: \{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$.

1) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$; 4) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \left\langle \frac{\nu(\tilde{x}^\omega)}{3} \right\rangle$;

2) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \left\langle \frac{7}{15} \right\rangle$; 5) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \langle 1 - \nu(\tilde{x}^\omega)\rangle$.

3) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \left\langle \frac{\nu(\tilde{x}^\omega)}{2} \right\rangle$;

1.4. Es o no función determinada la $\varphi(X_1, X_2, \ldots X_n)$: $\underbrace{\{0, 1\}^\omega \times \{0, 1\}^\omega \times \ldots \times \{0, 1\}^\omega}_{n \text{ veces}} \to \{0, 1\}^\omega$?

1) $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega) = \begin{cases} \tilde{1}^\omega, & \text{si } \nu(\tilde{x}_1^\omega) \leqslant \nu(\tilde{x}_2^\omega), \\ \tilde{0}^\omega & \text{en caso contrario;} \end{cases}$

---

[1]) Si $a = p/2^n$ $(n \geqslant 1)$, entonces, se considera una descomposición binaria tal, que contenga una infinita cantidad de ceros.

2) $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega) = \begin{cases} \tilde{x}_1^\omega, & \text{si } \nu(\tilde{x}_1^\omega)\nu(\tilde{x}_2^\omega) \leqslant 1/2 \\ \tilde{x}_2^\omega & \text{en caso contrario;} \end{cases}$

3) $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \tilde{x}_3^\omega) = \begin{cases} \tilde{1}^\omega, & \text{si } \nu(\tilde{x}_1^\omega) + \nu(\tilde{x}_2^\omega) \leqslant \nu(\tilde{x}_3^\omega), \\ \tilde{x}_3^\omega & \text{en caso contrario;} \end{cases}$

4) $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, \tilde{x}_2^\omega, \tilde{x}_3^\omega) = \begin{cases} \langle \nu(\tilde{x}_1^\omega)\nu(\tilde{x}_2^\omega)\rangle, & \text{si } \nu(\tilde{x}_3^\omega) = 1, \\ \tilde{0}^\omega & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

1.5. Las funciones parciales indicadas más abajo φ: $\{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$ no están determinadas solamente en la palabra $\tilde{0}^\omega = 00\ldots0\ldots$ Aclarar, cuáles de estas funciones se pueden predefinir hasta la determinación, y cuales no.

1) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = \begin{cases} \tilde{x}^\omega, & \text{si en cada prefijo de la palabra } \tilde{x}^\omega \text{ el número de ceros no es menor que el de unidades,} \\ \tilde{1}^\omega & \text{en caso contrario;} \end{cases}$

2) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, donde

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \exists s\,((s \leqslant t)\,\&\,(x(s) = 1)), \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

3) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, donde

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{si para algún } s \leqslant t \text{ en el prefijo } x(1)\,x(2)\ldots x(s) \text{ el número de ceros es mayor que el de unidades,} \\ x(t) & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

4) $\varphi(\tilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, donde

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \nu(x(1)\,x(2)\ldots x(t)\,00\ldots0\ldots) \leqslant 1/2, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1.6. 1) Refutar la siguiente afirmación: si la función $\varphi(X_1, X_2)$: $\{0, 1\}^\omega \times \{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$ depende sustancialmente da la variable X_1 y para toda palabra (fijada) $\tilde{x}_2^\omega \in \{0, 1\}^\omega$ $\varphi(X_1, \tilde{x}_2^\omega)$ es una f.d., entonces, la propia función $\varphi(X_1, X_2)$ es determinada.

2*) Sea que la función $\varphi(X_1, X_2)$: $\{0, 1\}^\omega \times \{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$ cumple la condición: cualesquiera que sean las palabras $\tilde{x}_1^\omega$ y $\tilde{x}_2^\omega$ de $\{0, 1\}^\omega$, las funciones $\varphi(X_1, \tilde{x}_2^\omega)$ y $\varphi(\tilde{x}_1^\omega, X_2)$ son determinadas. ¿Resulta entonces determinada la función $\varphi(X_1, X_2)$?

1.7. Para la función $\tilde{y}^\omega = \varphi(\tilde{x}^\omega)$, que pertenece al conjunto Φ_2, construir un fragmento de un grafo cargado, contenedor de las s primeras filas.

1) $y(1) = 1$ e $y(t) = x(t-1)$, para $t \geqslant 2$, $s = 3$;
2) $y(1) = 0$ e $y(t) = x(t) \oplus y(t-1)$, para $t \geqslant 2$, $s = 4$;

3) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega})=\left\langle\frac{1}{3}\right\rangle$, $s=3$;

4) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega})=\left\langle\frac{\nu(\widetilde{x}^{\omega})}{4}\right\rangle$, $s=4$.

1.8. De acuerdo con la función $\varphi(\widetilde{x}^{\omega})\in\Phi_2$ dada, representar en el árbol cargado una cadena que corresponda al prefijo $\widetilde{x}^s$ de la palabra de entrada $\widetilde{x}^{\omega}$, y escribir el prefijo $\widetilde{y}^s$ de la palabra de salida $\widetilde{y}^{\omega}$.

1) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega})=10100100010\ldots$ (o sea, $y(t)=1$ sólo para

$$t=\binom{i}{2},\ i=2,\ 3,\ \ldots\Big),\ \widetilde{x}^7=0101001;$$

2) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega})=\left\langle\frac{\nu(\widetilde{x}^{\omega})}{2}\right\rangle$, $(a)\ \widetilde{x}^7=1111101$, $(b)\ \widetilde{x}^7=1010110$;

3) $y(t)=\begin{cases}1, & \text{si } x(1)+x(2)+\ldots+x(t)>t/2,\\ 0, & \text{en caso contrario,}\end{cases}$

(a) $\widetilde{x}^{10}=0101010110$, (b) $=\widetilde{x}^{10}=1100101110$.

1.9. El árbol cargado que corresponde a alguna función $\varphi(\widetilde{x}^{\omega})\in\in\Phi_2$, tiene la siguiente forma: al arco izquierdo que parte de la raíz se le adjudica el 0, al derecho, el 1; si v es un vértice de i-ésimo rango $(i\geqslant 1)$ y al arco de la i-ésima fila que hace escala en el vértice v se le otorga el símbolo $\sigma\in\{0,1\}$, entonces, al arco izquierdo que parte de v se lo connota con el mismo símbolo σ, y al arco derecho con el símbolo $\bar{\sigma}$ (que es negación de σ).

1) ¿Es cierto, que para esta función la s-ésima letra de la palabra de salida $\widetilde{y}^{\omega}=\varphi(\widetilde{x}^{\omega})$ es hallada a partir de la relación:

(a) $y(1)=x(1)$, $y(s)=x(s-1)\oplus x(s)$ para $s\geqslant 2$;
(b) $y(1)=x(1)$, $y(2)=x(1)\oplus x(2)$, $y(s)=x(s-2)\oplus\oplus x(s)$, para $s\geqslant 3$;
(c) $y(s)=x(1)\oplus x(2)\oplus\ldots\oplus x(s)$?

2) Hallar el peso de la función φ.

1.10. ¿Son equivalentes los operadores residuales $\varphi_{\widetilde{x}_0^s}$ y $\varphi_{\widetilde{x}_1^r}$ de la función determinada $\varphi\in\Phi$?

1) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega})=10100100010\ldots\Big($o sea, $y(t)=1$, sólo para $t=\binom{i}{2}$, $i=2,\ 3,\ \ldots\Big)$, $\widetilde{x}_0^3=101$, $\widetilde{x}_1^3=010$;

2) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega})=\left\langle\frac{8}{15}\right\rangle$, $\widetilde{x}_0^2=10$, $\widetilde{x}_1^5=00101$;

3) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega})=\left\langle\frac{\nu(\widetilde{x}^{\omega})}{2}\right\rangle$, $\widetilde{x}_0^1=1$, $\widetilde{x}_1^3=001$,

4) $\varphi(\widetilde{x}^{\omega})=y(1)\,y(2)\ldots$ e

$$y(t)=\begin{cases}0, \text{ si } x(1)+x(2)+\ldots+x(t)<t/2\\ 1, \text{ en caso contrario,}\end{cases}$$

$$\tilde{x}_0^2=10,\ \tilde{x}_1^6=010110.$$

1.11. Aclarar si φ_1 es operador residual de la función $\varphi\in\Phi_2$.

1) φ: $\begin{cases}y(1)=0,\\ y(t)=x(t)\oplus\bar{y}(t-1),\ t\geqslant 2\end{cases}$

φ_1: $\begin{cases}y(1)=1,\\ y(t)=\bar{y}(t-1),\ t\geqslant 2;\end{cases}$

2) φ: $\begin{cases}y(1)=1,\\ y(t)=\bar{y}(t-1),\ t\geqslant 2,\end{cases}$

φ_1: $\begin{cases}y(1)=0,\\ y(t)=\bar{y}(t-1),\ t\geqslant 2;\end{cases}$

3) φ: $\begin{cases}y(1)=0,\\ y(t)=x(t)\cdot\bar{x}(t-1)\vee\bar{x}(t)\cdot x(t-1),\ t\geqslant 2,\end{cases}$

φ_1: $\begin{cases}y(1)=0,\\ y(t)=x(t)\oplus y(t-1),\ t\geqslant 2;\end{cases}$

4) $\varphi(\tilde{x}^\omega)=\left\langle\frac{13}{15}\right\rangle$, $\varphi_1(\tilde{x}^\omega)=\left\langle\frac{7}{15}\right\rangle$.

1.12 Aclarar si la función $\varphi\in\Phi_2^{n,m}$ es a.-d. función y hallar su peso.

1) $\varphi(\tilde{x}^\omega)$: $\begin{cases}y(1)=y(2)=1,\\ y(t)=x(t-2),\ t\geqslant 3;\end{cases}$

2) $\varphi(\tilde{x}^\omega)$: $\begin{cases}y(2t)=x(t+1),\ t\geqslant 1;\\ y(2t-1)=\bar{x}(t),\ t\geqslant 1;\end{cases}$

3) $\varphi(\tilde{x}^\omega)$: $\begin{cases}y(1)=1,\\ y(2t-1)=x(2t-1)\oplus y(2t-3),\ t\geqslant 2,\\ y(2t)=x(2t-1),\ t\geqslant 1;\end{cases}$

4) $\varphi(\tilde{x}^\omega)$: $\begin{cases}y_1(1)=x_1(1)\oplus x_2(1),\\ y_1(t)=x_1(t)\oplus x_2(t)\oplus y_2(t-1),\ t\geqslant 2,\\ y_2(1)=x_1(1)\cdot x_2(1),\\ y_2(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)\oplus x_1(t)\cdot y_2(t-1)\oplus\\ \qquad\oplus x_2(t)\cdot y_2(t-1),\ t\geqslant 2;\end{cases}$

5) $\varphi(\tilde{x}^\omega)$: $\begin{cases}y_1(1)=1,\\ y_1(t)=\bar{y}_2(t-1),\ t\geqslant 2,\\ y_2(1)=0,\\ y_2(t)=y_1(t-1),\ t\geqslant 2.\end{cases}$

1.13. Sea $D_{A,\,B}$ un árbol cargado que realiza la a.-d. función $\varphi\colon A^{\omega} \to B^{\omega}$. Cada vértice del árbol $D_{A,\,B}$ lo indicamos con un número igual al peso del subárbol que crece a partir del mismo. Obtenemos un nuevo árbol $\overline{D}_{A,\,B}$.

1) Para todo $r \geqslant 1$ poner un ejemplo de a.-d. función φ tal, que cada vértice en el árbol $\overline{D}_{A,\,B}$, correspondiente a la función φ, esté marcado con el número r.

2) Para todo $r \geqslant 2$ poner un ejemplo de a.-d. función φ tal, que para $j = 0, 1, \ldots, r-1$, cada vértice de j-ésimo rango en el árbol $\overline{D}_{A,\,B}$, correspondiente a la función φ, esté marcado con el número $r - j$.

1.14. 1) Demostrar que el árbol $\overline{D}_{A,\,B}$, construido de acuerdo con las condiciones del problema 1.13, posee la siguiente propiedad: la sucesión de números $\nu(v_1), \nu(v_2), \ldots$, atribuidos a los vértices de la cadena orientada $v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \ldots$ (finita o infinita), es monótona no creciente y, en el caso de una cadena infinita, esta sucesión se estabiliza.

2) Mostrar que cualquier operador residual de la función $\varphi \in \Phi_{A,\,B}$ tiene un peso no superior al de la función φ.

1.15. El árbol que realiza la función $\varphi_0(\tilde{x}^{\omega}) \in \Phi_2$, tiene la siguiente forma: el símbolo **1** se le asigna solamente a aquellos arcos que pertenecen a la cedena orientada que parte de la raíz y que corresponde a la palabra de entrada 10100100010 . . . (aquí $x(t) = 1$ únicamente para $t = \binom{i}{2}$, $i = 2, 3, \ldots$); a los restantes arcos se les otorga el símbolo 0. Demostrar que la función φ_0 tiene peso infinito y, por consiguiente, no es acotada-determinada.

1.16. Para cada $r \geqslant 2$ construir un ejemplo de a.-d. función tal, de peso r, que satisfaga la condición: en el árbol cargado que realice esta función, el símbolo **1** se le inscribe solamente a los arcos de cierta cadena orientada infinita Z, que parte de la raíz; a los restantes arcos (que no pertenecen a la cadena Z), se les asigna el símbolo 0.

La palabra $\tilde{x}^{\omega} \in A^{\omega}$ se llama *casiperiódica*, si es que existen tales números enteros n_0 y T, que $n_0 \geqslant 1$, $T \geqslant 1$, y $x(n+T) = x(n)$ para $n \geqslant n_0$. Además, el prefijo $x(1)\, x(2) \ldots x(n_0 - 1)$ de la palabra $\tilde{x}^{\omega}$ se llama *preperíodo*; el número $n_0 - 1$, *longitud del preperíodo*; la palabra $x(n_0)\, x(n_0+1) \ldots x(n_0 + T - 1)$, *período de la palabra* $\tilde{x}^{\omega}$; y el número T, *longitud del período*. Es cómodo escribir una palabra casiperiódica así de la forma $x(1)\, x(2) \ldots x(n_0 - 1) \times \times [x(n_0+1) \ldots x(n_0 + T - 1)]^{\omega}$.

1.17. 1) Demostrar que si la función $\varphi \in \hat{\Phi}_{A,\,B}$, entonces, toda palabra casiperiódica de A^{ω} se transforma con la función φ en una palabra casiperiódica de B^{ω}.

2) Mostrar sin salir de los límites del conjunto Φ_2, que la afirmación contraria a la formulada en 1), no es correcta.

INDICACION: Véase el problema 1.15.

1.18. Refutar la siguiente afirmación: si la función determinada $\varphi(X_1, X_2)$: $\{0, 1\}^\omega \times \{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$ depende sustancialmente de la variable X_1 y para toda palabra (fijada) $\widetilde{x}_2^\omega \in \{0, 1\}^\omega$ $\varphi(X_1, \widetilde{x}_2^\omega)$ es a.-d. función, entonces la función $\varphi(X_1, X_2)$ también es acotada-determinada.

1.19. Sea que todos los vértices de un árbol cargado están divididos del modo corriente en clases de equivalencia. Demostrar que cualquiera que sea la clase de equivalencia, en ella existe algún vértice v que cumple la condición: todos los vértices en la cadena orientada que parte de la raíz del árbol y termina en el vértice v, son no equivalentes de par en par.

1.20. 1) Demostrar que para cada vértice de un árbol cargado que tiene peso r, existe otro vértice equivalente al mismo de rango no mayor que $r - 1$.

2) ¿Se puede reemplazar en el problema anterior a $r - 1$ por $r - 2$, si $r \geqslant 2$?

Sean $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, funciones del tipo $\underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ veces}} \to E_l$, donde k y l no son menores de 2. El operador $\varphi_{f_1, f_2, \ldots, f_m}$ de $\Phi_{k, l}^{n, m}$ se llama *operador engendrado por las funciones* $f_1, f_2, \ldots, f_m$, si para todo $t \geqslant 1$

$$y_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

1.21. Mostrar que un operador de $\Phi_{k, l}^{n, 1}$ es engendrado (por alguna función del tipo $\underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ veces}} \to E_l$) si, y sólo si, su peso es igual a 2.

1.22. Aclarar si es o no engendrado el operador $\varphi \in \Phi_2^{1, 2}$, dado por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} &y_1(1) = 0, \\ &y_1(t) = x(t-1) \oplus y_2(t-1),\ t \geqslant 2, \\ &y_2(t) = x(t). \end{aligned}$$

1.23. El operador parcial φ: $\{0, 1\}^\omega \to \{0, 1\}^\omega$ está dado solamente en las palabras de entrada $\widetilde{0}^\omega$ y $\widetilde{1}^\omega$. Predefinirlo de tal modo, que se obtenga un operador con el peso mínimo posible.

1) $\varphi(\widetilde{0}^\omega) = 0101\ [100]^\omega$, $\varphi(\widetilde{1}^\omega) = 11\ [10]^\omega$;

2) $\varphi(\widetilde{0}^\omega) = 01\ [011]^\omega$, $\varphi(\widetilde{1}^\omega) = 1010010001000010 \ldots$ (o sea, $y(t) = 1$, solamente para $t = \binom{i}{2}$, $i = 2, 3, \ldots$).

1.24. 1) Demostrar que si $|A| > 1$ y $|B| > 1$, entonces, la potencia del conjunto $\Phi_{A, B}$ es igual a $\mathfrak{c}$ (potencia de continuo).

2) Hallar la potencia del conjunto $\Phi_{A, B}$ en aquellos casos en que, bien $|A| = 1$, o bien $|B| = 1$.

1.25. Las palabras $\widetilde{x}_1^\omega$ y $\widetilde{x}_2^\omega$ de A^ω se llaman *s-equivalentes* (se indica: $\widetilde{x}_1^\omega \underset{s}{\sim} \widetilde{x}_2^\omega$), si son iguales sus prefijos de longitud s ($s \geqslant 1$). La relación $\underset{s}{\sim}$ es relación de equivalencia y parte al conjunto A^ω en clases $K_j(s)$ de palabras s-equivalentes.

1) ¿Cuál es la potencia de cada clase $K_j(s)$ (s es un número fijado)?

2) ¿Cuántas clases $K_j(s)$ distintas existen (para un s dado)?

3) ¿Cuántas clases distintas $K_{jl}(s + l)$ existen en cada clase $K_j(s)$ (aquí $l \geqslant 1$)?

4) Demostrar que la aplicación φ: $A^\omega \to B^\omega$ es función determinada si, y sólo si, para todo $s \geqslant 1$ y cualesquiera palabras $\widetilde{x}_1^\omega$ y $\widetilde{x}_2^\omega$, pertenecientes al conjunto A^ω, la relación $\widetilde{x}_1^\omega \underset{s}{\sim} \widetilde{x}_2^\omega$ lleva a la relación $\varphi(\widetilde{x}_1^\omega) \underset{s}{\sim} \varphi(\widetilde{x}_2^\omega)$.

1.26. 1) Demostrar que si $|B| \geqslant 2$, entonces, el conjunto $\hat{\Phi}_{A,B}$ es numerable-infinito.

2) ¿A qué es igual la potencia del conjunto $\hat{\Phi}_{A,B}$, si $|B| = 1$?

1.27. Sea un árbol cargado $D_{A,B}$, que realiza la a.-d. función φ: $A^\omega \to B^\omega$ de peso r. Cambiamos el símbolo de salida y algún arco de la j-ésima fila del árbol $D_{A,B}$ (consideramos que $|B| \geqslant 2$). Obtenemos el árbol $D'_{A,B}$, que realiza alguna (nueva) a.-d. función φ' de peso r'.

1) Mostrar, que $1 \leqslant r' \leqslant r + j$.

2) Poner un ejemplo de una a.-d. función φ tal, que en ella se alcanza la evaluación superior, o sea, $r' = r + j$.

§ 2. REPRESENTACION DE FUNCIONES DETERMINADAS CON DIAGRAMAS DE MOORE, CON ECUACIONES CANONICAS, CON TABLAS Y CON ESQUEMAS. OPERACIONES SOBRE FUNCIONES DETERMINADAS

Sea $Q = \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_{w-1}\}$, el conjunto de todos los estados de la función φ de $\hat{\Phi}_{A,B}$. Cotejamos el orgrafo Γ_φ a la función φ:

1) El conjunto de los vértices del orgrafo Γ_φ es el conjunto $E_w = \{0, 1, \ldots, w-1\}$, además, se considera que el vértice j corresponde al estado Q_j;

2) Si $\varphi^{(i)}$ y $\varphi^{(j)}$ son operadores residuales de la función φ, realizados respectivamente por los estados Q_i y Q_j (además, $\varphi^{(j)}$ es también operador residual del operador $\varphi^{(i)}$, que corresponde al prefijo $\widetilde{x}^1 = a$, y $\varphi^{(i)}(a\widetilde{x}^\omega) = b\varphi^{(j)}(\widetilde{x}^\omega)$), entonces en el orgrafo Γ_φ se tiene un arco (i, j), y a éste se le otorga la expresión $a\ (b)$;

3) el arco (i, j) existe en Γ_φ sólo si se cumplen las condiciones del punto 2).

El vértice de Γ_φ que existe en el estado inicial de la función φ, habitualmente se marca con un asterisco. Supongamos que desde el vértice i al j van m arcos, a quienes se les atribuye las expresiones $a_1(b)_1$, $a_2(b_2)$, . . ., $a_m(b_m)$ (aquí necesariamente $a_p \neq a_q$, para $p \neq q$, pero algunos o todos los símbolos b_s pueden coincidir entre sí); entonces uniremos i con j solamente mediante un arco (i, j) y le otorgaremos todas las expresiones $a_p(b_p)$, $p = \overline{1, m}$. El orgrafo Γ_φ se llama *diagrama de Moore de la función* φ. Con Γ_φ se pueden enlazar dos funciones:

a) F: $A \times Q \to B$, es la *función de las salidas*,

b) G: $A \times Q \to Q$, es la *función de paso* (de transición).

Las funciones F y G de Γ_φ se definen así: por el par (a, j) hallamos el vértice j y un arco tal, que partiendo de j, le es asignado el símbolo de entrada a (sea que este arco tiene la forma (j, r)); el valor de la función F en el par (a, j) es el símbolo de salida otorgado al arco (j, r) y que se encuentra entre paréntesis en forma de símbolo a; el valor de la función G en el par (a, j) coincide con r, o sea, es igual al «número» de un estado tal, que «es terminación» del arco (j, r).

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y(t) = F(x(t),\ q(t-1)), \\ q(t) = G(x(t),\ q(t-1)), \\ q(0) = q_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $x(t) \in A$, $y(t) \in B$, $q(t) \in Q$, $(t = 1, 2, \ldots)$ y $q_0 \in Q$, se denomina: *ecuaciones canónicas del operador* φ *con condición inicial* q_0.

Con ayuda del diagrama de Moore y de las ecuaciones canónicas se pueden formular tales operadores determinados, que no resultan ser acotados-determinados. El conjunto de los vértices del orgrafo Γ_φ que corresponde a un operador determinado así, coincide con la serie natural $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Si φ es un operador acotado-determinado, entonces las funciones $F(x(t), q(t-1))$ y $G(x(t), q(t-1))$ (véase el sistema (1)) y los argumentos de los que dependen estas funciones, toman un número finito de valores; por eso es posible la formulación tabulada del a.-d. operador φ con ayuda de la llamada *tabla canónica*:

Tabla 7

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
a	j	$F(a, j)$	$G(a, j)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

En lugar de las ecuaciones canónicas (1) resulta cómodo considerar tales ecuaciones canónicas, en las que las funciones de salidas y de transiciones son funciones de la lógica k-valente P_k ($k \geqslant 2$). Para la obtención de la correspondiente representación del operador φ los alfabetos A, B y Q se codifican con vectores, cuyas coordenadas pertenecen al conjunto E_k ($k \geqslant 2$). Si φ es un operador acotado-determinado y $n =]\log_k |A|[$, $m =]\log_k |B|[$, $r =]\log_k |Q|[$, entonces, para la codificación de las letras de los alfabetos A, B, y Q es suficiente con tomar vectores (con coordenadas pertenecientes a E_k), que tengan dimensiones n, m y r, respectivamente[1]). Entonces el sistema (1) se transforma en el siguiente:

$$\begin{cases} y_1(t) = F_1(x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t), \ q_1(t-1), \ \ldots, \ q_r(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m(t) = F_m(x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t), \ q_1(t-1), \ \ldots, \ q_r(t-1)), \\ q_1(t) = G_1(x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t), \ q_1(t-1), \ \ldots, \ q_r(t-1)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_r(t) = G_r(x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t), \ q_1(t-1), \ \ldots, \ q_r(t-1)), \\ q_1(0) = q_{01}, \ \ldots, \ q_r(0) = q_{0r}. \end{cases} \tag{2}$$

En adelante, se utiliza también la «escritura vectorial» de los sistemas análogos al (2). Con esta escritura el sistema (2) tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{(m)}(t) = \boldsymbol{F}^{(m)}(\boldsymbol{x}^{(n)}(t), \ \boldsymbol{q}^{(r)}(t-1)), \\ \boldsymbol{q}^{(r)}(t) = \boldsymbol{G}^{(r)}(\boldsymbol{x}^{(n)}(t), \ \boldsymbol{q}^{(r)}(t-1)), \\ \boldsymbol{q}^{(r)}(0) - \boldsymbol{q}_0^{(r)}r. \end{cases} \tag{3}$$

Las funciones F_i y G_l en el sistema (2) son, hablando en general, *parciales*, o sea, no determinadas en todas partes. Habitualmente a ellas las predeterminan de tal modo, que los segundos miembros de las ecuaciones en (2) tengan la forma más simple posible.

La tabla canónica que expresa al a.-d. operador φ, correspondiente al sistema (2), tiene $m + n + 2r$ columnas y k^{n+r} filas.

Las ecuaciones del sistema (2) se denominan *ecuaciones canónicas en forma escalar*, y las del sistema (1), *ecuaciones canónicas en forma vectorial*.

Puede considerarse que el sistema (2) determina el operador del conjunto $\Phi_k^{n, m}$.

Sea que el operador determinado φ está dado por el sistema (2), y que cada una de sus funciones F_i y G_l son funciones de la lógica k-valente P_k ($k \geqslant 2$), siempre determinadas en todas partes. Consideraremos al operador φ como si fuese un elemento del conjunto $\Phi_k^{n, m}$. El esquema Σ_φ del operador φ se define del siguiente modo: Σ_φ representa una red, cuyos polos están indicados con los símbolos de las variables de entrada y de salida, y a algunos vértices que no

[1]) Si el operador determinado φ no es acotado-determinado, entonces $r = \infty$.

son polos, se les inscriben los símbolos de ciertos operadores determinados (del conjunto $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} \bigcup\limits_{s'=1}^{\infty} \Phi_k^{s, s'}$). Al esquema del operador φ de $\Phi_k^{n, m}$ lo expresaremos en forma de rectángulo (fig. 26), con n canales *de entrada* y m *de salida*. Los canales de entrada se dibujan en forma de flechas que parten de los polos de entrada, y los canales de salida se representan como flechas que llegan a los polos de salida. Los polos se indican en forma de pequeños círculos. Si $m = 1$, entonces al esquema Σ_φ del operador φ a veces lo dibujaremos como un triángulo (fig. 27) con n polos de entrada y uno de salida.

Consideramos que en cada momento $t = 1, 2, \ldots$ en la i-ésima entrada x_i *«ingresa»* el símbolo de entrada $x_i(t) \in E_k$, y en la j-ésima

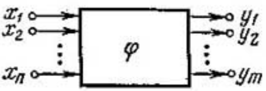


Fig. 26.

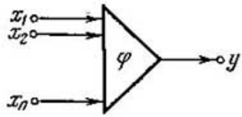


Fig. 27.

salida y_j *«resulta»* (*se realiza*) el valor $y_j(t) = F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1))$. Se dice que la *salida* y_j *depende con retardo de la entrada* x_i, si la función $F_j(x^{(n)}(t), q^{(r)}(t-1))$ no depende sustancialmente de la variable $x_i(t)$.

El concepto de dependencia con retardo puede formularse de otro modo. Consideremos, por ejemplo, el caso de una función determinada del tipo $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ y definimos la dependencia con retardo con respecto a la variable X_1. La función φ *depende con retardo de* X_1, si para cualesquiera palabras de entrada $\widetilde{x}_1^\omega, \widetilde{x}_2^\omega, \ldots, \widetilde{x}_n^\omega$ ($\widetilde{x}_j^\omega \in A_j^\omega$, $j = \overline{1, n}$), la s-ésima letra de la palabra de salida $\widetilde{y}^\omega = \varphi(\widetilde{x}_1^\omega, \widetilde{x}_2^\omega, \ldots, \widetilde{x}_n^\omega)$ se determina unívocamente con los primeros s símbolos de las palabras $\widetilde{x}_2^\omega, \ldots, \widetilde{x}_n^\omega$ y con los $s - 1$ primeros símbolos de la palabra $\widetilde{x}_1^\omega$.

Sea la función determinada φ dada por el sistema (2) y Σ_φ el esquema de esta función. Definimos tres operaciones sobre φ y sobre Σ_φ.

1) *Operación* O_1, *de identificación de un número de dos o más variables de entrada* en la función φ e *identificación en el esquema* Σ_φ *de los polos de entrada* correspondientes a estas variables. Los polos identificados se consideran como un polo de un nuevo esquema. En la fig. 28 se muestra el esquema $\Sigma_{\varphi'}$, obtenido de Σ_φ mediante la identificación de los polos x_1 y x_2.

2) *Operación* O_2, *de extracción de alguna variable de salida* y_j de la función φ (lo que es equivalente a quitar del sistema (2) la ecuación $y_j(t) = F_j(x^{(n)}(t), q^{(r)}(t-1))$) y *de eliminación del esquema* Σ_φ *del canal de salida y del polo*, correspondientes a la variable de sa-

lida y_j (véase la fig. 29, en la que se representa el esquema Σ_ψ, obtenido de Σ_φ después de haber sido extraídos el canal de salida y el polo y_1).

Observación. Si $m = 1$, entonces, al eliminar la variable y_1 (la única variable de salida), se obtiene un *autómata sin salida.*

3) *Operación O_3, de introducción de la retroacción* para una variable de entrada y otra de salida. Sea que en calidad de variable

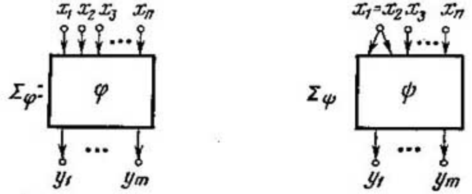


Fig. 28.

de entrada se toma x_i y como variable de salida, y_j. La operación O_3 se puede emplear (a la función φ en el esquema Σ_φ) sólo en el caso cuando la salida y_j depende con retardo de la entrada x_i. Las ecua-

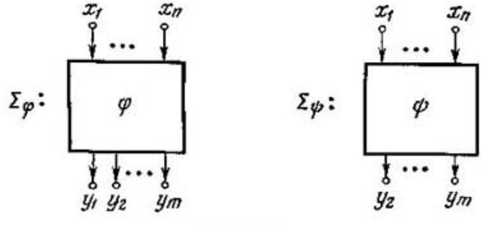


Fig. 29.

ciones canónicas para la nueva función ψ se obtienen mediante la exclusión de la ecuación $y_j(t) = F_j(x^{(n)}(t),\ q^{(r)}(t-1))$ del sistema (2), y por el reemplazo de la variable $x_i(t)$ en cada función F_q ($q \neq j$) y G_l, por la función $F'_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t),\ q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1))$, obtenida de la función $F_j(x^{(n)}(t),\ q^{(r)}(t-1))$ quitando la variable no sustancial $x_i(t)$. Las condiciones iniciales no varían. El esquema Σ_ψ se obtiene del Σ_φ como resultado de la identificación de la salida y_j con la entrada x_i; además, los polos identificados se declaran vértices interiores del esquema Σ_ψ. En la fig. 30 se muestra el esquema Σ_ψ, obtenido del Σ_φ mediante la introducción de la retroacción por las variables x_1 e y_1.

OBSERVACIÓN 1. Si $n = 1$, entonces, al introducir la retroacción por la variable x_1 (y cualquier variable de salida), obtenemos un *autómata sin entrada.*

OBSERVACIÓN 2. Empleando las operaciones arriba enumeradas, es cómodo indicar entre paréntesis (como designaciones de estas operaciones) aquellos canales (polos y variables), con respecto a los

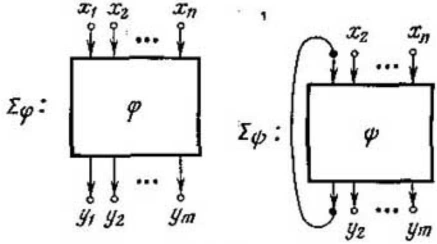


Fig. 30.

cuales se emplean las operaciones. Por ejemplo, $O_1(x_1, x_3)$, $O_2(y_5)$, $Q_3(x_{10}, y_2)$.

Definamos otras dos operaciones sobre las funciones determinadas.

4) *Operación* O_4, *de unión de dos* (*o de un número mayor*) *de funciones.* Sean $\varphi_1 \in \Phi_k^{n_1, m_1}$ y $\varphi_2 \in \Phi_k^{n_2, m_2}$. Supondremos que estas funciones tienen $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1}$ y $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n_2}$ en calidad de

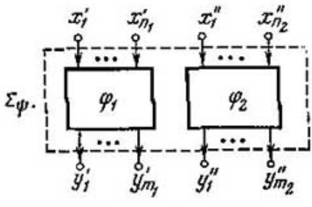


Fig. 31.

variables de entrada, e $y'_1, y'_2, \ldots, y'_{m_1}$ e $y''_1, y''_2, \ldots, y''_{m_2}$ como variables de salida, respectivamente. Consideramos que todas estas variables son distintas de par en par. Sean Σ_{φ_1} y Σ_{φ_2} los esquemas de las funciones φ_1 y φ_2, respectivamente. Entonces, el esquema Σ_ψ de la función ψ, igual a la unión de las funciones φ_1 y φ_2, tendrá un aspecto como el mostrado en la fig. 31; además, los polos de salida (de entrada) del esquema Σ_ψ son todos polos de salida (de entrada) de los esquemas iniciales Σ_{φ_1} y Σ_{φ_2}. El sistema de ecuaciones canónicas (y de las condiciones iniciales) de la función ψ se obtiene por una sencilla unión de los correspondientes sistemas de las funciones φ_1 y φ_2 (con esto, naturalmente, se supone que los conjuntos $Q^{(1)}$ y $Q^{(2)}$ de todos los estados de las funciones φ_1 y φ_2 no se intersecan).

5) *Operación S, de superposición.* Sean $\varphi_1 \in \Phi_{A,\,B}$ y $\varphi_2 \in \Phi_{B,\,C}$. Se llama *superposición* φ_1 (φ_2) *de los operadores* φ_2 y φ_1, a un operador $\psi \in \Phi_{A,\,C}$ tal, que $\psi(\widetilde{x}^{\omega}) = \varphi_1(\varphi_2(\widetilde{x}^{\omega}))$ para cualquier palabra de entrada $\widetilde{x}^{\omega}$ de A^{ω}. Sean los operadores $\varphi_i \in \Phi_k^{n_i,\,m_i}$ $(i = 1, 2)$ y que a ellos les correspondan los esquemas Σ_{φ_1} y Σ_{φ_2} (consideramos que las variables de entrada y las de salida y los estados de las funciones

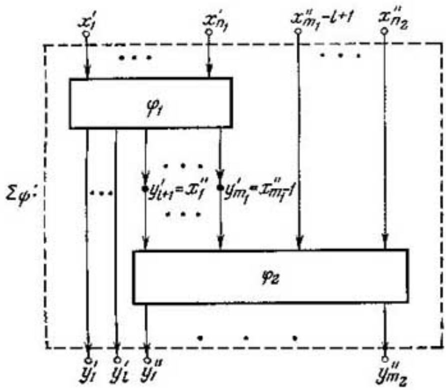


Fig. 32.

φ_1 y φ_2, son iguales a los de la frase anterior). Entonces se puede considerar «otra» *superposición* de estos operadores: identificamos, por ejemplo, el polo de entrada x_1'' del esquema Σ_{φ_2} con el polo de salida y'_{l+1} del esquema Σ_{φ_1}; el polo x_2'', con el polo y'_{l+2}, y así sucesivamente; por último, el polo x''_{m_1-l}, con el polo y'_{m_1}; obtenemos el esquema Σ_{ψ} (fig. 32), en el que: a) serán polos de entrada todos los polos de entrada del esquema Σ_{φ_1} y los polos de entrada del esquema Σ_{φ_2} que no hayan participado en el proceso de identificación arriba indicado; b) son polos de salida todos los polos de salida del esquema Σ_{φ_2} y aquellos polos de salida del esquema Σ_{φ_1} que no fueron identificados con ninguno de los polos de salida del esquema Σ_{φ_2}. Los polos identificados se declaran vértices interiores del esquema Σ_{ψ}. El esquema Σ_{ψ} se llama *superposición de los esquemas* Σ_{φ_2} y Σ_{φ_1} (para las variables $x_1'' - y'_{l+1}$, $x_2'' - y'_{l+2}$, . . ., $x''_{m_1-l} - y'_{m_1}$). Si el operador φ_1 se da por el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y'_1(t)=F'_1(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y'_{m_1}(t)=F'_{m_1}(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)),\\ q'_1(t)=G'_1(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ q'_{r_1}(t)=G'_{r_1}(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ q'_{r_1}(t-1)),\\ q'_{r_1}(0)=q'_{01},\ \ldots,\ q'_{r_1}(0)=q'_{0r_1}, \end{array}\right. \tag{4'}$$

y el operador φ_2, por el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y''_1(t)=F''_1(x''_1(t),\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q''_1(t-1),\ \ldots,\ q''_{r_2}(t-1)),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y''_{m_2}(t)=F''_{m_2}(x''_1(t),\ \ldots,\ x''_{n_2}(t);\ q''_1(t-1),\ \ldots,\ q''_{r_2}(t-1)),\\ q''_1(t)=G''_1(x''_1(t),\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q''_1(t-1),\ \ldots,\ q''_{r_2}(t-1)),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ q''_{r_2}(t)=G''_{r_2}(x''_1(t),\ \ldots,\ x''_{n_2}(t)\ \ q''_1(t-1),\ \ldots,\ q''_{r_2}(t-1)),\\ q''_1(0)=q''_{01},\ \ldots,\ q''_{r_2}(0)=q''_{0r_2}, \end{array}\right. \tag{4''}$$

entonces, al operador ψ, realizado por el esquema Σ_ψ, le corresponde el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} y'_1(t)=F'_1(x'_1,\ (t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y'_l(t)=F'_l(x'_1,\ (t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t)\,q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)),\\ y''_1(t)=F''_1(F'_{l+1},\ \ldots,\ F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t),\ \ldots\\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1),\ q_{r_2}(t-1)),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y''_{m_2}(t)=F''_{m_2}(F'_{l+1},\ \ldots,\ F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t),\ \ldots\\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1),\ \ldots,\ q_{r_2}(t-1)),\\ q'_1(t)=G'_1(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ q'_{r_1}(t)=G'_{r_1}(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_{r_1}(t-1)),\\ q_1(t)=G''_1(F'_{l+1},\ \ldots,\ F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t),\ \ldots\\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1),\ \ldots,\ q_{r_2}(t-1)),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ q_{r_2}(t)=G''_{r_2}(F'_{l+1},\ \ldots,\ F'_{m_1},\ x''_{m_1-l+1}(t),\ \ldots\\ \ldots,\ x''_{n_2}(t),\ q_1(t-1),\ \ldots,\ q_{r_2}(t-1)),\\ q'_1(0)=q'_{01},\ \ldots,\ q'_{r_1}(0)=q'_{0r_1},\ q_1(0)=q''_{01},\ \ldots,\ q_{r_2}(0)=q''_{0r_2}, \end{array}\right. \tag{5}$$

donde $F'_j=F'_j(x'_1(t),\ \ldots,\ x'_{n_1}(t),\ q'_1(t-1),\ \ldots,\ q'_r\ \ (t-1)),\ j=l+1,\ \ldots,\ m_1$.

Se denomina *elemento de retardo unitario* (en el conjunto $\hat{\Phi}_k$) el operador acotado-determinado φ_3, dado por el sistema

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

EJEMPLO. El operador φ de $\hat{\Phi}_2$ es dado con ayuda de un diagrama de Moore, representado en la fig. 33. La tabla canónica (véase la

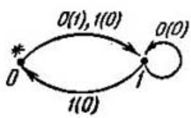


Fig. 33.

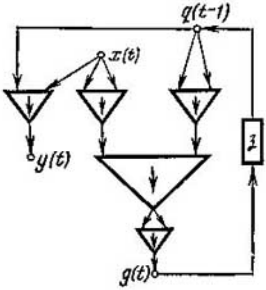


Fig. 34.

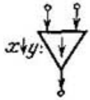
tabla 8), las ecuaciones canónicas y la condición inicial para el mismo tienen el siguiente aspecto:

Tabla 8

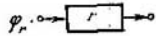
$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

$$\begin{cases} y(t) = \bar{x}(t) \cdot \bar{q}(t-1), \\ q(t) = \bar{x}(t) \vee \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

En la fig. 34 se ha diubjado el esquema que realiza este operador y se ha construido con el empleo del elemento de retardo unitario y del operador de $\Phi_1^{2,1}$, engendrado por la flecha de Pears $x \downarrow y$. Aquí, el operador engendrado por la flecha de Pears, se realiza con el esquema



y el elemento de retardo unitario, con el esquema



Es sabido, que todo a.-d. operador de $\hat{\Phi}_k^{n,\,m}$ pueae ser realizado por un esquema sobre un conjunto tal que contenga: 1) esquemas que realicen el elemento de retardo unitario; 2) los esquemas que realicen los operadores engendrados por las funciones de algún sistema completo en P_k. En otras palabras, el conjunto de los operadores acotados-determinados, compuesto por el elemento φ_r y por los operadores engendrados por las funciones de algún sistema completo, en P_k genera un sistema completo $\bigcup\limits_{n,m} \hat{\Phi}_k^{n,\,m}$ con respecto a las operaciones O_1, O_2, O_3, O_4 y S.

Observación. En adelante, al referirnos a la construcción del esquema de algún a.-d. operador φ sobre algún conjunto M de operadores acotados-determinados, interpretaremos esto del siguiente modo: el esquema Σ_φ del operador φ se construye con el sólo empleo de esquemas de una salida, que realizan los operadores del conjunto M (además, sólo se permite efectuar las operaciones O_1, O_2, O_3, O_4 y S, salvo indicaciones adicionales).

2.1. Construir el diagrama de Moore, la tabla canónica y las ecuaciones canónicas para la función $\varphi \in \hat{\Phi}_2$.

1) $\varphi(\widetilde{x}^\omega)$; $\begin{cases} y(2t-1) = x(2t-1), & t \geqslant 1, \\ y(2t) = x(2t) \oplus y(2t-1), & t \geqslant 1; \end{cases}$

2) $\varphi(\widetilde{x}^\omega)$: $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(t-1) \oplus x(t), & t \geqslant 2; \end{cases}$

3) $\varphi(\widetilde{x}^\omega)$: $\begin{cases} y(3t-2) = \overline{x}(3t-2), & t \geqslant 1, \\ y(3t-1) = x(3t-2), & t \geqslant 1, \\ y(3t) = x(3t) \cdot y(3t-1), & t \geqslant 1; \end{cases}$

4) $\varphi(\widetilde{x}^\omega) = \langle 2/3 \rangle$;

5) $\varphi(\widetilde{x}^\omega) = \langle \nu(\widetilde{x}^\omega)/8 \rangle$.

2.2. Predefinir de algún modo el operador parcial $\varphi: \{0, 1\}^{\omega} \to \{0, 1\}^{\omega}$, además de tal manera, que se obtenga un a.-d. operador. Construir para el nuevo operador el diagrama de Moore, la tabla canónica y las ecuaciones canónicas.

1) $\varphi([011010]^{\omega}) = [0111]^{\omega}$, $\varphi(0\,[1]^{\omega}) = 0\,[1]^{\omega}$;

2) $\varphi(\widetilde{0}^{\omega}) = \widetilde{1}^{\omega}$, $\varphi(1\,[0]^{\omega}) = [10]^{\omega}$;

3) $\varphi(1\,[10]^{\omega}) = [01]^{\omega}$, $\varphi([001]^{\omega}) = 1\,[10]^{\omega}$;

4) $\varphi: \begin{cases} y(3t-1) = x(3t-1), & t \geqslant 1, \\ y(3t) = \bar{x}(3t-1), & t \geqslant 1. \end{cases}$

2.3. Hallar el peso del a.-d. operador φ de $\hat{\Phi}_2$, dado por las ecuaciones canónicas.

$$1)\ \varphi: \begin{cases} y(t) = \bar{x}(t) \cdot \bar{q}_1(t-1) \vee x(t) \cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \cdot q_1(t-1) \vee \bar{x}(t) \cdot q_2(t-1), \\ q_2(t) = \bar{x}(t)\, q_2(t-1) \vee \bar{x}(t) \cdot \bar{q}_1(t-1) \cdot \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 1; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi: \begin{cases} y(t) = x(t) \oplus q_1(t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \sim q_1(t-1), \\ q_2(t) = (x(t) \to \bar{q}_1(t-1)) \to \bar{x}(t) \cdot \bar{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 1; \end{cases}$$

3) φ es dado por las ecuaciones canónicas del problema anterior, pero con cambios de las condiciones iniciales: $q_1(0) = 0$, $q_2(0) = 1$;

$$4)\ \varphi: \begin{cases} y(t) = (x(t) \to q_2(t-1)) \to q_1(t-1), \\ q_1(t) = q_1(t-1) \to (x(t) \to q_2(t-1)), \\ q_2(t) = q_2(t-1) \to x(t), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

2.4. Sea que $(\hat{\Phi}_k^{n,m}, X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ indica el conjunto de todas las funciones de $\hat{\Phi}_k^{n,m}$, cuyas variables de entrada son $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y las de salida, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Mostrar que en el conjunto $(\hat{\Phi}_k^{n,m}; X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ el número de funciones de peso w no es mayor que $(w \cdot k^m)^{w \cdot k^n}$.

2.5. Sea que el operador φ de $\hat{\Phi}_2^{n,m}$ está dado por el sistema (2) y las funciones $G_1, G_2, \ldots, G_r$, enlazadas por la relación $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_r \equiv 0$. Mostrar que el peso del operador φ no supera a 2^{r-1}.

2.6. Realizar el operador $\varphi \in \hat{\Phi}_2^{n,m}$ con un esquema sobre el conjunto compuesto por un elemento de retardo unitario y por el operador engendrado por una línea de Sheffer.

$$1)\ \varphi:\ \begin{cases} y(t)=q(t-1), \\ q(t)=x(t), \\ q(0)=1; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi:\ \begin{cases} y(t)=x(t)\vee q_1(t-1))\to q_2(t-1), \\ q_1(t)=x(t)\to q_2(t-1), \\ q_2(t)=\bar{q}_1(t-1)\vee \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(0)=0,\ q_2(0)=1; \end{cases}$$

$$3)\ \varphi(\tilde{x}^\omega)=\begin{cases} 10\,[110]^\omega, & \text{si } \tilde{x}^\omega=\tilde{0}^\omega, \\ \tilde{1}^\omega, & \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

4) el operador φ es dado por el diagrama de Moore dibujado en la fig. 35;

$$5)\ \varphi:\ \begin{cases} y_1(t)=x(t)\to \bar{q}_1(t-1), \\ y_2(t)=q_1(t-1)\cdot q_2(t-1), \\ q_1(t)=\bar{x}(t), \\ q_2(t)=(q_1(t-1)\vee q_2(t-1)\cdot \bar{x}(t), \\ q_1(0)=q_2(0)=0. \end{cases}$$

2.7. Según el esquema del operador $\varphi \in \hat{\Phi}_2^{n,m}$ construir las ecuaciones canónicas, tabla canónica y el diagrama de Moore.

1) Véase la fig. 36, *a*; 2) véase la fig. 36, *b*; 3) véase la fig. 36, *c*.

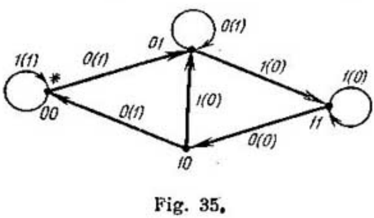


Fig. 35.

2.8. Para la superposición $\psi=\varphi_1(\varphi_2)$ de los operadores φ_2 y φ_1 de $\hat{\Phi}_2$, construir las ecuaciones canónicas, el diagrama de Moore y el esquema Σ_ψ. El esquema Σ_ψ debe ser construido sobre el conjunto compuesto por el elemento de retardo unitario y por operadores engendrados por la implicación $x \to y$ y la negación $\bar{x}$.

$$1)\ \varphi_1\colon \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \cdot q_1(t-1), \\ q_1(t) = q_1(t-1) \to x_1(t), \\ q_1(0) = 0. \end{cases}$$

$$\varphi_2\colon \begin{cases} y_2(t) = x_2(t) \oplus q_2(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t) \vee q_2(t-1), \\ q_2(0) = 1; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi_1(\widetilde{x}^\omega) = \langle 1/3 \rangle,$$

el operador φ_2 es dado por el diagrama de Moore, que se muestra

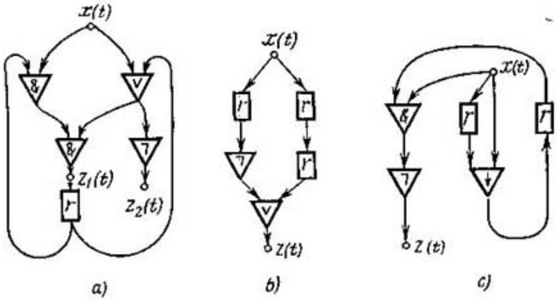


Fig. 36.

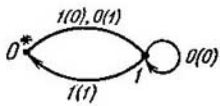


Fig. 37.

en la fig. 37;

$$3)\ \varphi_1(\widetilde{x}^\omega)\colon \begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = y(t-1) \oplus x(t-1),\ t \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\varphi_2(\widetilde{x}^\omega)\colon \begin{cases} y(t) = 1, \\ y(t) = x(t) \to x(t-1),\ t \geqslant 2; \end{cases}$$

$$4)\ \varphi_1(\widetilde{x}^\omega)\colon \begin{cases} y(t) = 1, \\ y(t) = y(t-1) \to x(t),\ t \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\varphi_2(\widetilde{x}^\omega)\colon\ \langle 1/7 \rangle.$$

2.9. Construir las ecuaciones canónicas y el diagrama de Moore del a.-d. operador obtenido del operador φ con la introducción de la retroacción por las variables x_2, y_1.

$$1)\ \varphi: \begin{cases} y_1(t) = q(t-1) \to x_1(t)\,\overline{x}_3(t), \\ y_2(t) = x_2(t) \vee (x_1(t) \to q(t-1)), \\ q(t) = \overline{x}_2(t) \oplus q(t-1), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi: \begin{cases} y_1(t) = \overline{q}(t-1) \to x_1(t)\,x_3(t), \\ y_2(t) = (x_1(t) \downarrow q(t-1)) \vee x_2(t), \\ q(t) = x_2(t) \oplus q(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

2.10. Hallar el peso del a.-d. operador, obtenido del a.-d. operador φ con la introducción de la retroacción por las variables x_3, y_2.

$$1)\ \varphi: \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \to (x_3(t) \to q(t-1)), \\ y_2(t) = x_2(t) \to x_1(t), \\ q(t) = x_2(t) \to (x_1(t) \cdot \overline{x}_3(t) \to (x_1(t) \to q(t-1))). \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi: \begin{cases} y_1(t) = x_1(t)\,x_3(t) \to q(t-1), \\ y_2(t) = x_2(t)\,q(t-1), \\ q(t) = \overline{x}_2(t) \vee x_3(t) \vee q(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

2.11. Sea que el operador ψ se obtiene del operador φ con ayuda de la operación O_1 (identificación de las variables de entrada).

1) Mostrar un ejemplo de un par de operadores φ y ψ, para el que se cumpla la desigualdad: el peso del operador φ es mayor que el del ψ.

2) ¿Es posible que el peso del operador φ fuese menor que el peso de ψ?

2.12. Sean, φ, un a.-d. operador de peso r, y ψ, un operador de peso r', obtenido de φ con la introducción de la retroacción por algún par de variables. ¿Es cierto que siempre

1) $r \geqslant r'$; 2) $r = r'$; 3) $r \leqslant r'$?

2.13. Sea que los a.-d. operadores φ_1 y φ_2 tengan los pesos r_1 y r_2, respectivamente. ¿A qué es igual el peso del operador ψ obtenido de φ_1 y φ_2 con ayuda de la operación O_4 (de unión)?

2.14. Los a.-d. operadores φ_1 y φ_2 tienen pesos igual a r_1 y r_2, respectivamente. ¿Puede ser el peso de la superposición $\varphi_1(\varphi_2)$

1) mayor que r_1; 4) mayor que $r_1 \cdot r_2$;
2) mayor que r_2; 5) menor que r_1;
3) mayor que $r_1 + r_2$; 6) menor que r_2?

2.15. Hallar el peso de la superposición $\varphi_1(\varphi_2)$, si:

1) los operadores φ_1 y φ_2 son dados por los diagramas de Moore representados en la fig. 38, *a*, *b*;

2) los operadores φ_1 y φ_2 se expresan mediante los diagramas de Moore de la fig. 39, *a*, *b*;

$$3)\ \varphi_i:\qquad \begin{cases} y_i(t) = x_i(t) \to q_i(t-1), \\ q_i(t) = q_i(t-1) \to x_i(t), \quad i = 1,\ 2. \\ q_i(0) = 0. \end{cases}$$

El operador φ de $\Phi_{A,\,B}$ se llama *autónomo* (*constante*, *operador sin entrada*), si para cualquier palabra de entrada $\tilde{x}^{\omega} \in A^{\omega}$ el valor

Fig. 38.

Fig. 39.

del operador φ en $\tilde{x}^{\omega}$ es igual a una misma palabra (de salida) de B^{ω}.

2.16. ¿Es autónomo el operador $\varphi \in \hat{\Phi}_2$?

$$1)\ \varphi(\tilde{x}^{\omega}): \begin{cases} y(1) = y(2) = 1, \\ y(t) = y(t-1) \oplus y(t-2), \quad t \geqslant 3; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi: \begin{cases} y(t) = x(t) \to q(t-1), \\ q(t) = x(t) \vee q(t-1), \\ q(0) = 1; \end{cases}$$

$$3)\ \varphi: \begin{cases} y(t) = x(t) \to q(t-1), \\ q(t) = x(t) \vee q(t-1), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

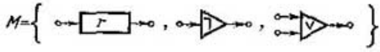
$$4)\ \varphi(\tilde{x}^{\omega}): \begin{cases} y(1) = 0, \\ y(2t-1) = \overline{y}(2t-2), \quad t \geqslant 2, \\ y(2t) = \left|\cos\frac{\pi}{2} t\right|, \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

2.17. Sea φ un operador autónomo de peso r ($r < \infty$).

1) Mostrar que la palabra de salida del operador φ es casi periódica.

2) Demostrar que la suma de las longitudes del período y del preperíodo de la palabra de salida del operador φ, no es mayor que r.

2.18. Sobre el conjunto



construir un esquema Σ_φ tal, que contenga exactamente cuatro elementos de M y realice algún operador autónomo φ de $\hat{\Phi}_2$ (véase la observación de la página 173).

2) ¿Se puede construir (sobre el conjunto M) un esquema Σ_φ que realice algún operador autónomo φ de $\hat{\Phi}_2$ y que contenga menos de cuatro elementos?

Operación O_5, de ramificación (de alguna salida de una a.-d. función). Esta operación puede ser definida así. Sean φ, un operador de $\hat{\Phi}_k^{n,\,m}$, y Σ_φ el esquema que lo realiza. Como resultado del empleo de la operación O_5 en la salida y_j de la función φ, se obtiene el operador ψ, que realiza un esquema Σ_ψ tal, que en lugar de un canal (y polo) y_j aparecen varios canales $y_j^{(1)}, \ldots, y_j^{(s)}$ ($s \geqslant 2$) que «trabajan igual» siendo que cada uno de estos canales realiza la misma función que y_j en el esquema Σ_φ.

2.19. 1) ¿Qué cambios hay que introducir en el sistema de ecuaciones canónicas y de condiciones iniciales que dan la función φ, para obtener un sistema correspondiente a la función ψ, que sea resultado del empleo de la operación O_5 en la salida y_j de la función φ?

2) ¿Se puede, empleando las operaciones $O_1 - O_5$ y S, construir sobre el conjunto M (véase el problema 2.18) un esquema Σ_φ, tal, que contenga no más de tres elementos y realice el operador autónomo φ de $\hat{\Phi}_2$? (Véase la observación de la página 173.)

2.20 Sea que el operador ψ fue obtenido de $\varphi \in \hat{\Phi}_k^{n,\,m}$ como resultado del empleo de la operación O_5 en alguna salida del operador φ. Mostrar que el operador ψ se puede realizar sobre el conjunto $\{\varphi\}$ (o sea, utilizando varios ejemplares del operador φ) con ayuda de las operaciones O_1, O_2 y O_4.

2.21. Los operadores φ_1 y φ_2 de $\hat{\Phi}_2$ tienen un peso igual a 2 y son dados por las siguientes ecuaciones canónicas:

$$\varphi_i\colon \begin{cases} y_i(t) = F_i(x_i(t),\ q_i(t-1)), \\ q_i(t) = G_i(x_i(t),\ q_i(t-1)), \quad i = 1,\ 2, \\ q_i(0) = 0, \end{cases}$$

además, $G_1(x,\ q) \equiv G_2(x,\ q)$. Es sabido, que si en el diagrama de Moore del operador φ_1 se sustituyen los ceros, atribuidos a los arcos, por unidades, y las unidades por ceros, entonces se obtiene el diagrama de Moore del operador φ_2. Demostrar que si los valores de salida de los operadores φ_1 y φ_2 coinciden en algún prefijo de longitud 2 (o sea, $\varphi_1(\sigma_1\sigma_2) = \varphi_2(\sigma_1\sigma_2)$ para algunos σ_1, σ_2), entonces estos operadores son idénticamente iguales.

2.22. Contar el número de todas aquellas a.-d. funciones en $\hat{\Phi}_2$ que cumplen las siguientes condiciones: a) la función depende de la variable de entrada X; b) el peso de la función es igual a tres; c) en el diagrama de Moore que da la función, el semigrado de paso (de transición) de cada vértice es siempre el mismo e igual al semigrado de salida.

2.23. Para cada $r \geqslant 2$ mostrar un ejemplo de un operador φ de $\hat{\Phi}_2$ tal, que el peso de la superposición $\varphi(\varphi)$ sea igual a r. ¿Se puede hacer esto para los operadores no autónomos?

2.24. El peso de la función $\varphi \in \hat{\Phi}_2$ es igual a r, y el peso de la superposición $\varphi(\varphi)$ es $2r$. ¿Es cierto que el peso de la superposición $\varphi(\varphi(\varphi))$ es igual a $3r$?

§ 3. CLASES CERRADAS Y PLENITUD EN LOS CONJUNTOS DE FUNCIONES DETERMINADAS Y ACOTADAS-DETERMINADAS

Sea M algún conjunto de *d.* funciones (o de a.-d. funciones) y $\mathfrak{O}$ alguna *colección de operaciones*, que no salen de los límites del conjunto de todas las d. funciones (o de las a.-d. funciones). En otras palabras, si $\sigma \in \mathfrak{O}$, entonces, empleando σ en d. funciones (o a.-d. funciones) arbitrarias (o admisibles), obtenemos nuevamente d. funciones (o a.-d. funciones). Se llama *clausura* o *cierre* $[M]_{\mathfrak{O}}$ *del conjunto M con respecto a la colección de operaciones* $\mathfrak{O}$, el conjunto de todas las d. funciones (o a.-d. funciones) que pueden ser obtenidas de las funciones del conjunto M con ayuda de las operaciones de $\mathfrak{O}$, además, estas operaciones pueden ser efectuadas cualquier número finito de veces. Habitualmente se considera que $[M]_{\mathfrak{O}} \supseteq M$. En adelante casi siempre supondremos que esta inclusión se cumple (de lo contrario, se harán salvedades especiales). La operación de obtención del conjunto $[M]_{\mathfrak{O}}$ de M se llama *operación de clausura* o *de cierre*. El conjunto M se denomina (*funcionalmente*) *clase de clausura o de cierre con respecto a la colección de operaciones* $\mathfrak{O}$, si $[M]_{\mathfrak{O}} = M$. Sea M cerrado con respecto a la colección de operaciones $\mathfrak{O}$ de las clases de d. funciones (o a.-d. funciones). El subconjunto $\mathfrak{P}$ de M se llama (*funcionalmente*) *sistema completo en M con respecto a la colección de operaciones* $\mathfrak{O}$, si $[\mathfrak{P}]_{\mathfrak{O}} = M$. El conjunto $\mathfrak{P}$ de las d. (o, a.-d.) funciones se denomina *sistema irreducible con respecto a la colección de las operaciones* $\mathfrak{O}$, si $[\mathfrak{P}']_{\mathfrak{O}} \subset [\mathfrak{P}]_{\mathfrak{O}}$ para cualquier subconjunto propio $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ (¡la infclusión es rigurosa!). Se llama *base* de la clase cerrada M con respecto a la colección de operaciones $\mathcal{O}$, a todo sistema completo e irreducible de M. El conjunto M', contenido en la clase cerrada M, se denomina *clase precompleta en* M, si éste no es sistema completo en M pero para toda función $\varphi \in \in M \setminus M'$ se cumple la igualdad $[M' \cup \{\varphi\}]_{\mathcal{O}} = M$.

OBSERVACIÓN 1. En adelante, cuando está claro con respecto a qué colección $\mathcal{O}$ se considera la clausura, los sistemas completos, las bases, etc., la expresión «con respecto a la colección de las operaciones $\mathcal{O}$» se omitirá.

OBSERVACIÓN 2. Habitualmente en calidad de $\mathcal{O}$ tomaremos el conjunto $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, compuesto de las operaciones descritas en el § 2 de este capítulo.

Como se indicó en el § 2, el conjunto de las a.-d. funciones que contiene el elemento de retardo unitario φ_3 y los operadores engendrados por las funciones de algún sistema completo en P_k $(k \geqslant 2)$, genera un sistema completo en el conjunto $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m}$ con respecto a las operaciones O_1, O_2, O_3, O_4 y S (o sea, en el conjunto de todas las *a.-d. funciones k-valentes*).

Resulta que en el conjunto $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m}$ $(k \geqslant 2)$ existen bases con respecto a $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, compuestas por una función. Ejemplo de una base así resulta el conjunto $\{\varphi_0 (X_1, X_2, X_3, \varphi_3 (X_4))\}$, donde φ_3 es el elemento de retardo unitario de $\hat{\Phi}_k$, y φ_0 es un operador de $\hat{\Phi}_k^{4,1}$ engendrado por la función máx $(x_1 \cdot x_4 + + x_2 (1 - x_4), x_3) + 1$ (la suma, la sustracción y el producto, por módulo k).

En todo este párrafo emplearemos el símbolo $\hat{\Phi}_{(k)}$ (respectivamente, $\Phi_{(k)}$) para la designación del conjunto de todos los k-valores de las a.-d. funciones (correspondientemente, d. funciones), incluidas las funciones sin entradas o sin salidas, o las sin entradas y sin salidas, o sea,

$$\hat{\Phi}_{(k)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m} \left(\text{y} \ \ \Phi_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} \Phi_k^{n,m}\right).$$

3.1. ¿Resulta el conjunto M una clase cerrada con respecto a la colección de operaciones $\mathcal{O}$?

1) M se compone de todas las a.-d. funciones k-valentes que no tienen salida, y también de tales funciones φ, que pertenecen a $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,m}$, que «conservan $\tilde{0}^{\omega}$», o sea,

$$\varphi (\underbrace{0^{\tilde{\omega}}, \ldots, 0^{\tilde{\omega}}}_{n \text{ veces}}) = (\underbrace{0^{\tilde{\omega}}, \ldots, 0^{\tilde{\omega}}}_{m \text{ veces}}); \ \mathcal{O} = \{O_3, O_5, S\}.$$

2) M está compuesto de todas aquellas a.-d. funciones k-valentes, que pertenecen al conjunto $\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{1,\,m}$ y tienen un peso múltiplo de k; $\Theta = \{S\}$.

3) M se compone de todas las d. funciones k-valentes, que pertenecen al conjunto $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \hat{\Phi}_k^{n,\,m}$ y que tienen peso par o infinito; $\Theta = \{O_1,\ O_2,\ O_4,\ O_5\}$.

$$4)\ M = \bigcup_{n=0}^{1} \bigcup_{m=0}^{\infty} (\Phi_k^{n,m} \setminus \hat{\Phi}_k^{n,m});\ \Theta = \{O_3,\ S\}.$$

3.2. 1) Sea φ_3 un elemento de retardo unitario del conjunto $\hat{\Phi}_2$ y $\Theta = \{O_3,\ O_5,\ S\}$. Demostrar que la clase $[\varphi_3]_\Theta$ contiene solamente funciones idénticamente iguales a 0 (o sea, operadores que en cada una de sus salidas «brindan» la palabra $\widetilde{0}^\omega$), funciones sin entradas y salidas y funciones que tienen peso par.

2) Formular un ejemplo de función de $\hat{\Phi}_2$ que tenga peso par y no pertenezca a la clase $[\varphi_3]_\Theta$, descrita en el problema 3.2, 1).

3.3. Sean, $\varphi_0\,(X_1,\ X_2)$, un operador de $\hat{\Phi}_{(2)}$ engendrado por el trazo de Sheffer $x_1 \mid x_2$, y φ_3, un elemento de retardo unitario de $\hat{\Phi}_2$. Demostrar que el operador $\varphi\,(\widetilde{x}^\omega) = \langle 1/3 \rangle$ de $\hat{\Phi}_2$ no pertenece a la clase $[\varphi_0,\ \varphi_3]_\Theta$, si $\Theta = \{S\}$.

3.4. En la entrada del a.-d. operador $\varphi \in \hat{\Phi}_2$ se introduce la palabra periódica $\widetilde{x}^\omega$ de período 3. Hallar el período máximo de la palabra de salida (el máximo se toma con respecto a todas las palabras periódicas de entrada de período 3).

$$1)\ \varphi\colon \begin{cases} y\,(t) = (x\,(t) \oplus q_1\,(t-1)) \cdot q_2\,(t-1), \\ q_1\,(t) = x\,(t) \cdot \overline{q}_1\,(t-1) \cdot \overline{q}_2\,(t-1) \vee \overline{x}\,(t) \cdot q_2\,(t-1), \\ q_2\,(t) = x\,(t) \cdot \overline{q}_1\,(t-1) \cdot \overline{q}_2\,(t-1) \vee \overline{x}\,(t) \cdot q_2\,(t-1), \\ q_1\,(0) = q_2\,(0) = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \varphi\colon \begin{cases} y\,(t) = x\,(t) \cdot q_1\,(t-1), \\ q_1\,(t) = \overline{x}\,(t) \cdot \overline{q}_1\,(t-1) \vee q_2\,(t-1), \\ q_2\,(t) = q_1\,(t-1), \\ q_1\,(0) = q_2\,(0) = 0. \end{cases}$$

3.5. Sea φ una a.-d. función de peso r, perteneciente al conjunto $\hat{\Phi}_{A,\ B}$.

1) Mostrar que si la palabra de entrada $\widetilde{x}^\omega$ es casi periódica con período T, entonces la palabra de salida $\varphi\,(\widetilde{x}^\omega)$ también es casi periódica y su período no es superior al número $r \cdot T$.

2) Evaluar desde arriba la longitud del período de la palabra de salida $\varphi(\tilde{x}^\omega)$, si se sabe que la longitud del preperíodo de la palabra $\tilde{x}^\omega$ es igual a p.

3.6. Sean las funciones φ_0, φ_3 y φ las mismas que las del problema 3.3. ¿Existe algún $s \geqslant 1$ que satisfaga la condición $\varphi(\varphi_3^s(X)) \in \in [\varphi_0, \varphi_3]_{\Theta}$, donde $\Theta = \{S\}$? (Aquí $\varphi_3^s(X) = \varphi_3(\varphi_3(\ldots\varphi_3(X)\ldots))$ es una superposición de s «ejemplares» de las funciones φ_3.)

Si $f(\tilde{x}^n) \in P_k$, entonces, mediante $\varphi_{f(\tilde{x}^n)}(X_1, \ldots, X_n)$ designaremos al a.-d. operador (de $\hat{\Phi}_k^{n,1}$), engendrado por la función $f(\tilde{x}^n)$.

3.7. ¿Son completos en $\hat{\Phi}_{(k)}$ con respecto a la colección de las operaciones $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$ los siguientes sistemas de a.-d. funciones?

1) $\{\varphi_{\text{máx}(x_1, x_2)}(X_1, X_2), \varphi_3(X)\}$, $k \geqslant 2$;

2) $\{\varphi_{x_1 \cdot x_2}(X_1, X_2), \varphi_{x_1 \dot{-} x_2}(X_1, X_2), \varphi_{x_1 \dot{-} x_2}(\varphi_3(X), X_2)$, $\varphi_{\equiv 1}(X), \varphi_{\equiv k-2}(X)\}$, $k \geqslant 3$ (aquí $\varphi_{\equiv j}(X)$ es un a.-d. operador, engendrado por una función de P_k, idénticamente igual a j);

3) $\{\varphi_{x \dot{+} 1}(X), \varphi_3(\varphi_3(X)), \varphi_{x \dot{-} y}(\varphi_3(X), X_2)\}$.

3.8. Del sistema $\mathfrak{P}$ completo en $\hat{\Phi}_{(k)}$ con respecto a la colección de operaciones $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, separar aunque sea una base.

1) $\mathfrak{P} = \{\varphi_3(X), \varphi_{\equiv 0}(X), \varphi_{\equiv 1}(X), \varphi_{x_1 \cdot x_2}(X_1, X_2), \varphi_{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}(X_1, X_2, X_3)\}$, $k = 2$;

2) $\mathfrak{P} = \{\varphi_3(X), \varphi_{\equiv 0}(X), \varphi_{\equiv 1}(X), \varphi_{j_0(x)}(X), \varphi_{x_1 + x_2}(X_1, X_2)\}$, $k \geqslant 3$

3) $\mathfrak{P} = \{\varphi_{\equiv 0}(X), \varphi_{x_1 \dot{-} x_2}(\varphi_3, (X), X_2), \varphi_{x+1}(X), \varphi_{\text{mín}(x_1, x_2)}(X_1, X_2)\}$, $k \geqslant 3$.

3.9*. ¿Existe en $\hat{\Phi}_{(2)}$ una base con respecto a la colección de operaciones $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, que contenga cinco funciones?

3.10*. Demostrar que en $\hat{\Phi}_{(k)}$ cualquier clase cerrada, distinta de todo el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$, se amplía hasta una clase precompleta[1]).

3.11*. Empleando los problemas 3.8, 1) y 3.10, mostrar que en $\hat{\Phi}_{(2)}$ existen no menos de 4 clases precompletas.

3.12. Sea $\varphi_3 \in \hat{\Phi}_2$. Enumerar todas las clases precompletas en $[\varphi_3]_{\{O_3, O_5, S\}}$ con respecto a la colección de operaciones $\{O_5, S\}$.

3.13. Sea $\varphi_x = \varphi_x(X)$ un a.-d. operador de $\Phi_{(k)}$, engendrado por la función x. Demostrar que cualquiera que sea la clase cerrada[1]) M de $\Phi_{(k)}$, siempre se cumple la igualdad $[M \cup \{\varphi_x\}] = M \cup \{\varphi_x\}$ (aquí, como es habitual, junto con la función se toman todas las funciones iguales y congruentes a la misma).

---

[1]) Las condiciones de cerrada y precompleta se toman con respecto a la colección de operaciones $\{O_1, O_2, O_3, P_4, S\}$.

3.14. ¿Existe una función que pertenezca a cada clase precompleta $\hat{\Phi}_{(k)}$?

3.15. ¿Se puede representar el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$ en forma de la unión $\bigcup_{i=1}^{s} M_i$ ($s \geqslant 2$) que interseca de par en par a las clases cerradas[1]) en $\hat{\Phi}_{(k)}$?

3.16*. Demostrar que en $\hat{\Phi}_{(k)}$ la potencia del conjunto de todas las clases cerradas es continua.

3.17. ¿Cuál es la potencia del conjunto de todas las clases cerradas[1]) en $\hat{\Phi}_{(k)}$ que tienen sistemas completos finitos?

3.18*. Demostrar que en $\Phi_{(k)}$ la potencia del conjunto de todas las clases cerradas[1]) es igual a 2^{c} (potencia de hipercontinuidad).

3.19*. Hallar la potencia del conjunto de todas las clases cerradas[1]) en $\Phi_{(k)}$, que tienen bases finitas.

3.20. Refutar las siguientes afirmaciones:

1) el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$ genera una clase precompleta en $\Phi_{(k)}$;

2) en el conjunto $\Phi_{(k)}$ existe una función que forma, junto con el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$, un sistema completo en $\Phi_{(k)}$.

3.21. Sea M_0 un conjunto compuesto por todas las d. funciones k-valentes que no tienen salidas, y también por todas aquellas funciones φ, pertenecientes a $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \Phi_k^{n,m}$, que toma el valor 0 para $t = 1$, o sea, $\varphi(\widetilde{x}_1^{\omega}, \ldots, \widetilde{x}_n^{\omega}) = (\widetilde{y}_1^{\omega}, \ldots, \widetilde{y}_m^{\omega})$, e $y_j(1) = 0$, para $j = \overline{1, m}$.

1) ¿Es M_0 una clase precompleta en $\Phi_{(k)}$?

2) ¿Forma la intersección $M_0 \cap \hat{\Phi}_{(k)}$ la clase precompleta $\hat{\Phi}_{(k)}$?

3.22. 1) ¿Es clase precompleta en $\hat{\Phi}_{(k)}$ el conjunto $\bigcup_{n=0}^{1} \bigcup_{m=0}^{\infty} \times$ $\times \hat{\Phi}_k^{n,m}$?

2) ¿Forma una clase precompleta en $\Phi_{(k)}$ el conjunto $\bigcup_{n=0}^{1} \bigcup_{m=0}^{\infty} \times$ $\times \Phi_k^{n,m}$?

---

[1]) Las condiciones de cerrada y precompleta se toman con respecto a la colección de operaciones $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$.

Capítulo
VII

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LOS ALGORITMOS

§ 1. MAQUINAS DE TURING Y OPERACIONES A LAS QUE SE SOMETEN. FUNCIONES CALCULABLES EN LAS MAQUINAS DE TURING

Una *máquina de Turing* representa en sí un aparato (abstracto) que está compuesto de *cinta*, *de la unidad de mando* y *del cabezal de lectura*.

La cinta está dividida en *células*. En cualquier célula en cada momento (discreto) hay exactamente un *símbolo* del *alfabeto exterior* $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, $n \geqslant 2$. A cierto símbolo del alfabeto A se le denomina *vacío* y cualquier célula que contenga en el momento dado el símbolo vacío se la llama *célula vacía* (en este momento). En calidad de símbolo vacío corrientemente se emplea el 0 (cero). Se supone que la cinta es ilimitada potencialmente en los dos sentidos[1]).

La unidad de mando en cada momento se encuentra en cierto *estado* q_j perteneciente al conjunto $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{r-1}\}$, $r \geqslant 1$. El conjunto Q se denomina *alfabeto interior* (o *conjunto de los estados interiores*). A veces se separan de Q los subconjuntos no interseccionados Q_1 y Q_0 de los *estados iniciales* y *conclusivos* respectivamente.

OBSERVACIÓN. En adelante, si no se menciona lo contrario, consideraremos que $|Q| \geqslant 2$ y en calidad de inicial tomaremos sólo el estado q_1. Como regla general el estado q_0 será conclusivo.

El cabezal lector (o impresor) se traslada a lo largo de la cinta y en cada momento él observa exactamente una célula de la cinta. Este cabezal puede *leer* el contenido de la célula observada y *anotar* en ella (*imprimir* en ella) en lugar del símbolo observado cierto símbolo nuevo del alfabeto exterior. El símbolo «enviado» a la célula puede, en particular, coincidir con el que se estaba observando (en el momento dado).

---

[1]) Esto se debe entender de la manera siguiente: en cada momento la cinta se considera finita (contiene un número finito de células), pero las «dimensiones» de la cinta (su número de células) se puede aumentar (si es necesario).

En el proceso de funcionamiento la unidad de mando, en dependencia del estado en que se encuentra y del símbolo que observa el cabezal, cambia su estado interior (puede quedarse en el estado anterior), da al cabezal la orden de imprimir en la célula observada un símbolo determinado del alfabeto exterior y «ordena» al cabezal quedarse en el mismo lugar, trasladarse a una célula más a la izquierda, o bien trasladarse a una célula más a la derecha.

El trabajo de la unidad de mando se caracteriza por las tres funciones siguientes:

$$G\colon Q \times A \to Q,$$
$$F\colon Q \times A \to A,$$
$$P\colon Q \times A \to \{S,\ L,\ R\}.$$

La función G se llama *función de los traspasos* o *de los traslados*; la función F, *función de las salidas*, y la D, *función del movimiento (del cabezal)*. Los símbolos S, L y R significan respectivamente que el cabezal no se mueve en ninguna dirección, el traslado del cabezal a la célula vecina de la izquierda, el traslado del cabezal a la célula vecina de la derecha.

Las funciones G, F y D se pueden presentar con una lista de grupos de cinco palabras del tipo siguiente:

$$q_i a_j G\ (q_i a_j)\ F\ (q_i a_j)\ D\ (q_i a_j) \tag{1}$$

o abreviadamente, $q_i a_j q_{ij} a_{ij} d_{ij}$. Estos grupos de cinco se llaman *instrucciones*. Las funciones G, F y D son, hablando en general, *parciales* (no están determinadas en todas partes). Esto quiere decir que no para cualquier par $(q_i,\ a_j)$ está definido el respectivo grupo de cinco del tipo (1). La lista de todos los grupos de cinco que determina el trabajo de la máquina de Turing se llama *programa* de esta máquina. Con frecuencia se presenta el programa de la máquina en forma de tabla (véase la tabla 9).

Tabla 9

	$q_0 \dots q_i \dots q_{r-1}$
a_0	$\cdot$
	$\cdot$
$\dots$	$\cdot$
a_j	$\dots$ $\boxed{q_{ij}a_{ij}d_{ij}}$ $\dots$
$\dots$	$\cdot$
a_{n-1}	$\cdot$

Si en el programa de la máquina para el par $(q_i,\ a_j)$ no hay grupo de cinco del tipo (1), entonces en la tabla en el cruce de la fila a_j y la columna q_i se pone una raya.

Suele ser cómodo describir el funcionamiento de la máquina de Turing en «el lenguaje de las configuraciones».

Supongamos que en el momento t la célula no vacía C_1 de la cinta, la que está más a la izquierda, contiene el símbolo a_{j_1} y la célula no vacía C_s ($s \geqslant 2$), que está más a la derecha, contiene el símbolo a_{j_s} (entre las células C_1 y C_s hay $s - 2$ células). En este caso diremos que en el *momento* t en la cinta está *escrita la palabra* $P = a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_p} \ldots a_{j_s}$, donde a_{j_p} es el símbolo que se contiene en el momento t en la célula C_p ($1 \leqslant p \leqslant s$). Con $s = 1$, o sea cuando en la cinta hay un solo símbolo no vacío, $P = a_{j_1}$. Supongamos que en este momento la unidad de mando se encuentra en el estado q_i y el cabezal observa el símbolo a_{jl} de la palabra P ($l \geqslant 2$). Entonces la palabra

$$a_{j_1} \ldots a_{j_{l-1}} q_i a_{j_l} \ldots a_{j_s} \tag{2}$$

se llama *configuración de la máquina* (en el momento dado t). Con $l = 1$ la configuración tiene la forma $q_i a_{j_1} \ldots a_{j_s}$. Si en el momento t el cabezal observa una célula vacía que se encuentra a la izquierda (o a la derecha) de la palabra P, y entre esta célula y la primera (respectivamente la última) célula de la palabra P hay $v \geqslant 0$ células vacías, entonces se llama *configuración de la máquina en el momento* t la palabra

$$q_l \underbrace{\Lambda \ \ldots \ \Lambda}_{v+1 \text{ veces}} a_{j_1} \ \ldots \ a_{j_s} \tag{3}$$

(respectivamente la palabra $a_{j_1} \ldots a_{j_s} \underbrace{\Lambda \ldots \Lambda}_{v \text{ veces}} q_l \Lambda$, donde con Λ se designa el símbolo vacío del alfabeto A. Si en el momento t la cinta está vacía, o sea que en ella está escrita una palabra vacía compuesta solamente de símbolos vacíos del alfabeto exterior, entonces la *configuración de la máquina* en el momento t será la palabra $q_i \Lambda$.

Supongamos que en el momento t la configuración de la máquina tiene la forma (2) y en el programa de la máquina se contiene la instrucción

$$q_i a_{j_l} q_{ij_l} a_{ij_l} d_{ij_l};$$

entonces con $d_{ij_l} = L$ en el momento siguiente la configuración de la máquina será la palabra:

a) $q_{ij_1} \Lambda a_{ij_1} a_{j_2} \ \ldots \ a_{j_s}$ si $l = 1$;

b) $q_{ij_2} a_{j_1} a_{ij_2} a_{j_3} \ \ldots \ a_{j_s}$ si $l = 2$;

c) $a_{j_1} \ \ldots \ a_{jl-2} q_{ijl} a_{jl-1} a_{ijl} a_{jl+1} \ \ldots \ a_{j_s}$ si $l > 2$.

Los casos cuando $d_{ij_l} = R$ o $d_{ij_l} = S$, o la configuración de la máquina corresponde al cabezal que se encuentra fuera de la palabra

P (como en la palabra (3)), o la palabra P es vacía, se describen en forma análoga.

Si en el programa de la máquina no hay grupo de cinco del tipo (1) para el par (q_i, a_j) o el «nuevo» estado q_{ij_1} es *conclusivo*, entonces la máquina *termina su trabajo* y la configuración que resulta se llama *conclusiva*. La configuración que corresponde al comienzo del trabajo de la máquina se llama *inicial*.

Supongamos que en cierto momento la configuración de la máquina era K y en el momento siguiente se hizo K'. Entonces la configuración K' se llama *inmediatamente deducida de* K (la designación es $K \models K'$). Si K_1 es la configuración inicial, pues la sucesión $K_1, K_2, \ldots, K_m$, donde $K_i \models K_{i+1}$ con $1 \leqslant i \leqslant m-1$ se llama *cómputo de Turing*. Aquí se dice que la configuración K_m *es deducible de* la configuración K_1 y se anota $K_1 \vdash K_m$. Si K_m al mismo tiempo es una configuración conclusiva, entonces se dice que K_m es *conclusivamente deducible* de K_1 y se emplea la anotación: $K_1 \mathrel{|\!\!\dot{-}} K_m$.

Supongamos que la máquina de Turing T comienza a trabajar en cierto momento inicial. La palabra que está escrita en este momento en la cinta se llama *inicial* u *original*. Para que la máquina T comience realmente a trabajar es necesario colocar el cabezal lector sobre alguna célula de la cinta e indicar en qué estado se encuentra la máquina T en el momento inicial.

Si P_1 es la palabra inicial, entonces la máquina T, comenzando a trabajar «en la palabra» P_1 se para después de cierto número de pasos, o no se para nunca. En el primer caso se dice que la máquina T es *aplicable a la palabra* P_1 y el *resultado de la aplicación de la máquina* T *a la palabra* P_1 es la palabra P que corresponde a la configuración conclusiva (la designación es $P = T(P_1)$. En el segundo caso se dice que la máquina T *no es aplicable a la palabra* P_1.

A continuación supondremos, si no se menciona lo contrario, que: 1) la palabra inicial no es vacía; 2) en el momento inicial el cabezal se encuentra sobre la célula no vacía que está más a la izquierda en la cinta; 3) la máquina comienza a funcionar encontrándose en el estado q_1.

Zona de trabajo de la máquina T (*en la palabra* P_1) se llama al conjunto de todas las células que se observan aunque sea una vez durante el tiempo de trabajo de la máquina.

La designación $[P]^m$ se empleará con frecuencia para las palabras del tipo $PP \ldots P$ (m veces); si $P = a$, la palabra es de longitud 1, entonces en lugar de $aa \ldots a$ (m veces) y $[a]^m$ ecribiremos a^m.

Con W designaremos una palabra arbitraria finita en el alfabeto exterior de la máquina de Turing (en particular una palabra *vacía*, o sea compuesta de símbolos vacíos del alfabeto exterior).

Al describir el trabajo de la máquina de Turing «en el lenguaje de las configuraciones» se emplearán expresiones análogas a la siguiente:

$$q_1 1^x 0 1^y 0 W \mathrel{|\!\!\dot{-}} 1^y 0 q_0 W,$$

$x \geqslant 1$ e $y \geqslant 1$. La expresión citada se debe comprender así: la máquina «borra» la palabra 1^x y se para en la primera letra de la palabra W; si W es una palabra vacía, entonces «la parada» tiene lugar en el segundo 0 (cero) después de la palabra 1^y.

Las máquinas de Turing T_1 y T_2 se llaman *equivalentes* (en el alfabeto A) si para cualquier palabra de entrada P (en el alfabeto A) se cumple la relación $T_1(P) \simeq T_2(P)$ que significa lo siguiente: $T_1(P)$ y $T_2(P)$ están definidas o no están definidas simultáneamente[1]), y si ellas están definidas, entonces $T_1(P) = T_2(P)$. El símbolo $\simeq$ se llama *signo de igualdad condicional.*

Supongamos que las máquinas T_1 y T_2 tienen respectivamente los programas $\mathfrak{P}_1$ y $\mathfrak{P}_2$. Aceptemos que los alfabetos interiores de estas máquinas no se intersecan; que q_1' es cierto estado conclusivo de la máquina T_1, y q_2' algún estado inicial de la máquina T_2. En el programa $\mathfrak{P}_1$ sustituiremos en todas los lugares el estado q_1' por el estado q_2' y uniremos el programa obtenido con el programa $\mathfrak{P}_2$. El nuevo programa $\mathfrak{P}$ define la máquina T, llamada *composición de las máquinas* T_1 y T_2 *(por el par de estados* (q_1', q_2')) y designada por $T_1 \bigcirc T_2$ o T_1T_2 (con más detalle: $T = T(T_1, T_2, (q_1', q_2'))$). El alfabeto exterior de la composición T_1T_2 es la unión de los alfabetos exteriores de las máquinas T_1 y T_2.

Sea q' cierto estado conclusivo de la máquina T y q'' cierto estado de la máquina T que no es conclusivo. En el programa $\mathfrak{P}$ de la máquina T sustituiremos en todos los lugares el símbolo q' por el símbolo q''. Se obtendrá el programa $\mathfrak{P}'$ que define la máquina $T'(q', q'')$. La máquina T' se llama *iteración de la máquina* T *(por el par de estados* (q', q'')).

Sean $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ y $\mathfrak{P}_3$ los programas que representan las máquinas de Turing T_1, T_2 y T_3 respectivamente. Suponemos que los alfabetos interiores de estas tres máquinas no se intersecan de par en par. Sean q_1' y q_1'' algunos estados conclusivos diferentes entre sí de la máquina T_1. En el programa $\mathfrak{P}_1$ sustituimos en todos los lugares el estado q_1' por cierto estado inicial q_2' de la máquina T_2, y el estado q_1'' por cierto estado inicial q_3' de la máquina T_3. Después uniremos este nuevo programa con los programas $\mathfrak{P}_2$ y $\mathfrak{P}_3$. Obtendremos el programa $\mathfrak{P}$ con el que se da la máquina de Turing $T = T(T_1, (q_1', q_2'), T_2, (q_1'', q_3'), T_3)$. Esta máquina se llama *ramificación de las máquinas* T_2 y T_3 *controlada por la máquina* T_1.

Al representar máquinas de Turing complejas con frecuencia se emplea la llamada *anotación del algoritmo en operadores.* Esta escritura se presenta con líneas compuestas de símbolos de máquinas, símbolos de traspaso (del tipo $\underline{|q'}_{k}$ y $\underline{q''|}_{k}$) y también de los símbolos α y ω que sirven para designar el comienzo y el final del funcionamiento del algoritmo respectivamente. En la anotación (de cierto algoritmo)

1) $T(P)$ está definida (no está definida) si la máquina T es aplicable (no es aplicable) a la palabra P.

en operadores la expresión $T_i \underset{k}{\lfloor q_{i0}} T_j \ldots T_m \underset{k}{q_{n1} \rfloor} T_n$ significa la ramificación de las máquinas T_j y T_n, controlada por la máquina T_i, con la particularidad de que el estado de conclusión q_{i0} de la máquina T_i se sustituye por el estado inicial q_{n1} de la máquina T_n y cualquier otro estado conclusivo de la máquina T_i se sustituye por el estado inicial de la máquina T_j (¡con lo mismo!). Si la máquina T_i tiene un estado conclusivo, entonces los símbolos $\lfloor q_{i0}$ y $q_{n1} \rfloor$ sirven para designar un traspaso incondicional. Allí donde no pueden surgir confusiones los símbolos q_{i0} y q_{n1} se omiten.

Ejemplo. El esquema de operadores

$$\underset{2}{\rfloor} \underset{1}{\rfloor} T_1 \alpha T_2 \underset{1}{\lfloor q_{20}} T_3 \underset{2}{\lfloor q_{30}} T_4 \omega$$

describe el siguiente «proceso de cálculo». Comienza su funcionamiento la máquina T_2. Si ella acaba su trabajo en el estado q_{20}, entonces comienza a trabajar la máquina T_1 y al acabar el trabajo la máquina T_1 de nuevo «cumple el trabajo» de la máquina T_2. Pero si la máquina T_2 se para en cierto estado conclusivo diferente de q_{20}, entonces «continúa el trabajo» la máquina T_3. Si T_3 llega al estado conclusivo q_{30}, entonces comienza el trabajo la máquina T_1; pero si T_3 acaba su trabajo en cierto estado conclusivo diferente de q_{30}, entonces «continúa el trabajo» la máquina T_4. Si la máquina T_4 alguna vez se para, entonces en esto termina el proceso de cálculo.

Sea $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $n \geqslant 1$ una colección arbitraria de números enteros no negativos. La palabra $1^{\alpha_1+1}01^{\alpha_2+1}0 \ldots 01^{\alpha_n+1}$ se llama *código de máquina básico* (o sencillamente *código*) de la *colección* $\tilde{\alpha}$ (en el alfabeto $\{0, 1\}$) y se designa $k(\tilde{\alpha})$. En particular, la palabra $1^{\alpha+1}$ es el código de máquina básico del número α.

En adelante se examinarán fundamentalmente sólo las *funciones numéricas parciales*. La función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $n \geqslant 1$ se llama *función numérica parcial* si las variables x_i toman el valor de la serie natural $N = \{0, 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$ y en el caso cuando en la colección $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la función f está determinada, $f(\tilde{\alpha}) \in N$.

Una función numérica parcial se llama *calculable* (*con métodos de Turing*) si existe una máquina de Turing T_f que tiene las propiedades siguientes:

a) si $f(\tilde{\alpha})$ está determinada, entonces $T_f(k(\tilde{\alpha})) = k(f(\tilde{\alpha}))$;

b) si $f(\tilde{\alpha})$ no está determinada, entonces o bien $T_f(k(\tilde{\alpha}))$ no es código de ningún número de N, o bien la máquina T_f no es aplicable a la palabra $k(\tilde{\alpha})$.

Observación. A continuación supondremos que en el momento inicial el cabezal de la máquina observa la unidad que está más a la izquierda de la palabra $k(\tilde{\alpha})$. Se sabe que esta limitación no reduce la clase de funciones calculables.

Si la función f es calculable con los métodos de Turing con la ayuda de la máquina T_f, entonces diremos que la *máquina T calcula la función f*.

1.1. Aclarar si es aplicable la máquina de Turing T, presentada con el programa $\mathfrak{P}$, a la palabra P. Si es aplicable, entonces hallar el resultado del empleo de la máquina T a la palabra P. Se supone que q_1 es el estado inicial, que q_0 es el estado conclusivo y que en el momento inicial el cabezal de la máquina observa la unidad que está más a la izquierda en la cinta.

$$1)\ \mathfrak{P}: \begin{cases} q_10q_20R & \\ q_11q_11R & \\ q_20q_30R & \\ q_21q_11L & \text{a) } P=1^30^21^2, \\ q_30q_00S & \text{b) } P=1^301^3, \\ q_31q_21R & \text{c) } P=10\,[01]^21. \end{cases}$$

$$2)\ \mathfrak{P}: \begin{cases} q_10q_21R & \\ q_11q_30R & \\ q_20q_31L & \text{a) } P=1^401, \\ q_21q_21S & \text{b) } P=1^301^2, \\ q_31q_11R & \text{c) } P=1^6. \end{cases}$$

$$3)\ \mathfrak{P}: \begin{cases} q_10q_11R & \\ q_11q_20R & \\ q_20q_11R & \text{a) } P=101^2, \\ q_21q_31L & \text{b) } P=1^20^21, \\ q_30q_11L & \text{c) } P=[10]^2\,1. \end{cases}$$

1.2. Construir en el alfabeto $\{0, 1\}$ una máquina de Turing que tenga la propiedad siguiente (en calidad de símbolo vacío se toma el 0);

1) la máquina es aplicable a cualquier palabra no vacía en el alfabeto $\{0, 1\}$;

2) la máquina no es aplicable a ninguna palabra en el alfabeto $\{0, 1\}$ y la zona de trabajo en cada palabra es infinita;

3) la máquina no es aplicable a ninguna palabra en el alfabeto $\{0, 1\}$ y la zona de trabajo en cualquier palabra está limitada por un mismo número de células que no depende de la palabra elegida;

4) la máquina es aplicable a las palabras del tipo 1^{3n} ($n \geqslant 1$) y no es aplicable a ninguna de las palabras del tipo $1^{3n+\alpha}$, donde $\alpha = 1, 2$ y $n \geqslant 1$;

5) la máquina es aplicable a las palabras del tipo $1^\alpha01^\alpha$, donde $\alpha \geqslant 1$ y no es aplicable a las palabras $1^\alpha01^\beta$ si $\alpha \neq \beta$ ($\alpha \geqslant 1$ y $\beta \geqslant 1$).

1.3. A base de la máquina de Turing T dada y de la configuración inicial K_1 hallar la configuración conclusiva (q_0 es el estado conclusivo).

1) T:

	q_1	q_2
0	$q_0 1 S$	$q_1 0 R$
1	$q_2 0 R$	$q_2 1 L$

a) $K_1 = 1^2 q_1 1^3 01$, b) $K_1 = 1 q_1 1^4$,

2) T:

	q_1	q_2	q_3
0	$q_0 0 S$	$q_0 1 L$	$q_1 1 L$
1	$q_2 1 R$	$q_3 0 R$	$q_1 0 R$

a) $K_1 = 1 q_1 1^5$, b) $K_1 = q_1 1^3 01$, c) $K_1 = 10 q_1 1^4$.

1.4. Construir en el alfabeto $\{0, 1\}$ una máquina de Turing que traspasa la configuración K_1 a la configuración K_0.

1) $K_1 = q_1 1^n$, $K_0 = q_0 1^n 0 1^n$ $(n \geqslant 1)$;

2) $K_1 = q_1 0^n 1^n$, $K_0 = q_0 [01]^n$ $(n \geqslant 1)$;

3) $K_1 = 1^n q_1 0$, $K_0 = q_0 1^{2n}$ $(n \geqslant 1)$;

4) $K_1 = 1^n q_1 0 1^m$, $K_0 = 1^m q_0 0 1^n$. $(m \geqslant 1,\ n \geqslant 1)$.

1.5. 1) Mostrar que para toda máquina de Turing existe una máquina equivalente a ella cuyo programa no contiene el símbolo S.

2) Mostrar que a base de cualquier máquina de Turing T se puede construir una máquina equivalente a ella en el programa de la cual no se contengan estados de conclusión.

1.6. El programa de una máquina de Turing tiene la forma

	q_1	q_2	q_3	q_4
0	$q_2 1 R$	$q_3 1 R$	$q_1 2 L$	$q_2 3 R$
1	$q_4 1 L$	$q_3 1 R$	$q_2 1 R$	$q_3 1 R$
2	$q_1 2 L$	$q_2 0 R$	$q_3 2 R$	—
3	—	$q_2 3 R$	$q_3 0 R$	$q_4 3 L$

(el símbolo vacío es 0, el estado inicial es q_1).

1) Mostrar que comenzando el funcionamiento desde una cinta vacía la máquina T con $t(n)$ pasos construirá una palabra del tipo $P_n = 11010^2\,10^3 \ldots 10^n 1$ (n es un número entero positivo arbitra-

rio), con la particularidad de que el cabezal de la máquina en cualquier momento $t \geqslant t(n)$ (para $n \geqslant 3$) se encontrará a la derecha de la palabra P_{n-2}.

2) Construir una máquina que tenga las mismas propiedades y que tenga el conjunto $\{0, 1\}$ en calidad de alfabeto exterior.

3) Demostrar que si en el programa de la máquina de Turing no se encuentra el símbolo L (pero, naturalmente, pueden encontrarse los símbolos S y R), entonces esta máquina comenzando su funcionamiento desde una cinta vacía no puede construir un prefijo de ilimitada longitud de la palabra $11010^2 10^3 1 \ldots 0^n 10^{n+1} 1 \ldots$

1.7. Mostrar que para cualquier máquina de Turing T (en el alfabeto A) existe una cantidad numerable de máquinas equivalentes a ella $T_1, T_2, \ldots, T_m, \ldots$ (en el alfabeto A) que se diferencian una de otra por sus programas.

1.8. Sea $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ cierto alfabeto que contiene no menos de dos letras. Codificaremos sus letras de la manera siguiente: el código del símbolo a_i es la palabra $10^{i+1}1$ en el alfabeto $\{0, 1\}$. En concordancia con esta codificación el código de la palabra arbitraria $P = a_{i_1}, a_{i_2} \ldots a_{i_s}$ $(s \geqslant 1)$ en el alfabeto A tendrá la forma $10^{i_1+1}110^{i_2+1}1 \ldots 10^{i_s+1}1$. Demostrar que cualquiera que sea la máquina de Turing T con el alfabeto exterior A, existe una máquina de Turing T_0 con el alfabeto exterior $\{0, 1\}$ que satisface la condición: con cualquier palabra P (en el alfabeto A) la máquina T_0 es aplicable al código de esta palabra si, y sólo si, la máquina T es aplicable a la palabra P, con la particularidad de que si $T(P)$ está definido, entonces el código de la palabra $T(P)$ coincide con la palabra que es resultado de la aplicación de la máquina T_0 al código de la palabra P.

1.9. Construir una composición T_1T_2 de las máquinas de Turing T_1 y T_2 (por el par de estados (q_{10}, q_{21})) y hallar el resultado de la aplicación de la composición T_1T_2 a la palabra P (q_{20} es el estado conclusivo de la máquina T_2)

1) T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}1L$
1	$q_{12}1R$	$q_{11}0R$

T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}1R$	$q_{21}1R$
1	$q_{21}0L$	$q_{20}1S$

a) $P = 1^3 0^2 1^2$, b) $P = 1^4 01$.

2) T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{10}0L$	$q_{13}0R$	$q_{11}0R$
1	$q_{12}1R$	$q_{13}1R$	$q_{11}0R$

T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}1L$	$q_{20}0R$
1	$q_{22}1L$	$q_{21}0L$

a) $P = 1^4 0^2 1^3 01^2$, b) $P = 1^2 0101^3$.

3) T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{12}0R$	$q_{13}0R$	$q_{10}1L$
1	$q_{11}1R$	$q_{11}1R$	—

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{22}0L$	$q_{23}0L$	$q_{20}0R$
1	$q_{21}1L$	$q_{22}1L$	$q_{23}1L$

a) $P = 1^2 0 1^3 0 1^2$, b) $P = 1^2 0 1^2 0^2 1^2$.

1.10. Hallar el resultado de la aplicación de la iteración de máquinas T (por el par de estados (q_0, q_i)) a la palabra P (los estados conclusivos son q_0 y q_0').

1) $i = 1$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$q_0 0S$	$q_4 0S$	$q_5 0S$	$q_4 1R$	$q_0' 1L$
1	$q_2 0R$	$q_3 0R$	$q_1 0R$	—	—

a) $P = 1^{3k}$, b) $P = 1^{3k+1}$, c) $P = 1^{3k+2}$, $k \geqslant 1$.

2) $i = 1$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$q_0' 0R$	$q_0' 0R$	$q_4 0R$	$q_5 1L$	$q_6 0L$	$q_0 0R$
1	$q_2 0R$	$q_3 0R$	$q_3 1R$	$q_4 1R$	$q_6 1L$	$q_6 1L$

a) $P = 1^{2x}$, b) $P = 1^{2x+1}$, $x \geqslant 1$.

3) $i = 3$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$q_2 0L$	—	$q_4 0R$	$q_5 1L$	$q_6 0L$	$q_0' 0R$
1	$q_1 2R$	$q_2 1R$	—	$q_4 1R$	$q_5 1L$	$q_6 1L$
2	—	$q_3 1R$	—	—	—	$q_0 1R$

$P = 1^x 0 1^y$ $(x \geqslant 1,\ y \geqslant 1)$.

1.11. Hallar el resultado de la aplicación de la máquina $T = T(T_1(q_{10}', q_{21}),\ T_2(q_{10}'', q_{31}),\ T_3)$ a palabra P (q_{20} es el estado conclusivo de la máquina T_2 y q_{30}, el de la máquina T_3).

1) T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}'0R$
1	$q_{12}1R$	$q_{10}''1L$

T_2:

	q_{21}
0	$q_{20}1S$
1	$q_{21}0R$

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}1L$	$q_{30}1L$
1	$q_{31}1L$	—

a) $P = 101^3$. b) $P = 1^3 01$.

2) T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{12}0R$	$q'_{10}0L$	$q''_{10}0R$
1	$q_{11}1R$	$q_{13}1R$	$q_{13}1R$

T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}0L$	$q_{20}0R$
1	$q_{21}1L$	$q_{22}1L$

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}0R$	$q_{30}1S$
1	$q_{31}1R$	$q_{31}1R$

a) $P = 1^x0^21$ $(x \geqslant 1)$,

b) $P = 1^x0101^y01^z$ $(x \geqslant 1,\ y \geqslant 1,\ z \geqslant 1)$.

1.12. Empleando las máquinas T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 construir un esquema de operadores del algoritmo $\mathfrak{A}$ (aquí q'_{10}, q_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{40} y q_{50} son los estados conclusivos de las máquinas correspondientes).

T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}0R$
1	$q'_{10}0R$	$q_{11}1S$

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{22}0R$	$q_{23}0R$	$q_{20}0S$
1	$q_{21}1R$	$q_{22}1R$	$q_{23}1R$

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}1R$	$q_{30}1S$
1	$q_{31}1R$	—

T_4:

	q_{41}	q_{42}	q_{43}
0	$q_{42}0L$	$q_{43}0L$	$q_{40}0R$
1	$q_{41}1L$	$q_{42}1L$	$q_{43}1L$

T_5:

	q_{51}
0	$q_{50}1S$
1	$q_{51}1R$

1) $\mathfrak{A} : q_1 1^x \models q_0 1^{2x}$ $(x \geqslant 1)$,

2) $\mathfrak{A} : q_1 1^{x+1} \models q_0 1^{3x}$ $(x \geqslant 0)$,

3) $\mathfrak{A} : W0q_1 1^{x+1} \models W0q_0 1^{2x+1}$ $(x \geqslant 0)$.

Observación. Si $x = 0$, entonces 1^x se considera palabra vacía.

1.13. En base al esquema de operadores del algoritmo $\mathfrak{A}$ y de la descripción de las máquinas que entran en el esquema del algoritmo, construir el esquema de máquina y hallar el resultado de la aplicación de la máquina, dada con este esquema, a la palabra P.

1) $\mathfrak{A} = \alpha T_1 \underset{1}{\rfloor} T_2 T_3 \underset{1}{\underline{\mid q_{30}}} \omega$,

T_1:

	q_{11}
0	$q_{10}0L$
1	$q_{11}2R$
2	—

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{23}0R$	$q_{23}0R$	$q_{20}1L$
1	$q_{21}1R$	—	$q_{23}1R$
2	$q_{22}1R$	—	—

T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}0L$	$q'_{30}0R$
1	$q_{31}1L$	$q_{32}1L$
2	—	$q_{30}1R$

$$P = 1^x 0 1^y \ (x \geqslant 1, \ y \geqslant 1).$$

(Los estados iniciales de las máquinas son q_{11}, q_{21} y q_{31}, y los conclusivos son q_{10}, q_{20}, q_{30} y q'_{30}.)

2) $\mathfrak{A} = \alpha \underset{2}{\rfloor} T_1 T_2 \underset{1}{\underline{|\, q_{20}}} T_3 \underset{2}{\underline{|\, q_{30}}} \underset{1}{\rfloor} \omega$

T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}
0	—	$q_{13}0R$	$q_{14}0L$	—
1	$q_{12}0R$	$q_{12}1R$	$q_{13}1R$	$q_{10}0L$

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{22}0L$	$q_{20}1S$	$q_{20}1S$
1	$q'_{20}1S$	$q_{23}1L$	$q_{23}1L$

T_3:

	q_{31}	q_{32}	q_{33}	q_{34}
0	$q_{32}0L$	$q_{33}0R$	$q'_{30}1S$	$q_{30}1R$
1	$q_{31}1L$	$q_{34}1L$	—	$q_{34}1L$

$$P = 1^x 0^2 1^y \ (x \geqslant 1, \ y \geqslant 1).$$

(Los estados iniciales de las máquinas son q_{11}, q_{21} y q_{31}, y los conclusivos son q_{10}, q_{20}, q'_{20}, q_{30} y q'_{30}.)

1.14. Construir una máquina de Turing que calcule la función f.

1) $f(x) = \mathrm{sg}\, x = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x = 0, \\ 1, & \text{si} \quad x \geqslant 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right] = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x = 1, \\ 0, & \text{si} \quad x \geqslant 2. \\ \text{por definición} & \text{si} \quad x = 0; \end{cases}$

3) $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right] = m$, si $x = 2m$ o $x = 2m + 1$, $m \geqslant 0$;

4) $f(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant y; \\ x - y, & \text{si} \quad x > y; \end{cases}$

5) $f(x, y) = x - y$;

6) $f(x, y) = \frac{4 - x}{y^2}$.

Observación. Aquí (y en lo sucesivo) en la presentación «analítica» de las funciones numéricas se emplean con frecuencia las funciones «elementales» ampliamente conocidas (del análisis matemático). En esto existe la particularidad de que la presentación «analítica» de la función se considera *determinada* solamente en tales colecciones de valores de las variables en números enteros (pertenecientes a la serie natural N) en las que *están determinadas y toman valores enteros no negativos todas las funciones «elementales»* que entran en la «presentación formular» de la función definida. Por ejemplo, la función $\frac{x^2}{3 - \frac{y}{2}}$ estará definida si, y sólo si, $\frac{y}{2}$ es un número entero no negativo, $3 - \frac{y}{2}$ es un número entero positivo y $\frac{x^2}{3 - \frac{y}{2}}$ es un número entero no negativo.

Se dice que la máquina de Turing T *calcula correctamente la función* $f(\widetilde{x}^n)$ si:

1) en el caso de que $f(\widetilde{\alpha}^n)$ esté determinada, $T(k(\widetilde{\alpha}^n)) = k(f(\widetilde{\alpha}^n))$ y el cabezal de la máquina en la configuración conclusiva observa la unidad izquierda del código $k(f(\widetilde{\alpha}^n))$;

2) en el caso de que $f(\widetilde{\alpha}^n)$ no esté determinada, la máquina T comenzando su funcionamiento desde la unidad izquierda del código $k(\widetilde{\alpha}^n)$ no se detiene.

1.15. Demostrar que para cualquier función calculable existe una máquina de Turing que computa correctamente esta función.

1.16. Construir una máquina de Turing que calcule correctamente la función f.

1) $f(x) = x \dot{-} 1$;

2) $f(x) = \overline{\mathrm{sg}}\, x = 1 - \mathrm{sg}\, x$;

3) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$;

4) $f(x, y) = x + y$;

5) $f(x, y) = \frac{x}{2 - y}$.

1.17. Escribir por el programa de la máquina de Turing T una expresión analítica para las funciones $f(x)$ y $f(x, y)$ computadas por la máquina T. (Siempre en calidad de estado inicial se toma q_1 y en calidad de estado conclusivo, q_0.)

1) T:

	q_1	q_2
0	$q_{21}1L$	$q_0 0R$
1	$q_1 1R$	$q_2 1L$

2) T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$q_2 0R$	$q_1 0L$	$q_4 0L$	$q_4 0L$	$q_0 0R$
1	$q_1 1R$	$q_3 0R$	$q_3 0R$	$q_5 1L$	$q_5 1L$

3) T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
0	$q_2 0R$	$q_3 0R$	$q_0 1S$	$q_5 0R$	$q_3 0L$	$q_7 0L$	—	$q_9 0L$	$q_1 0R$
1	$q_2 0R$	$q_4 1R$	$q_3 1L$	$q_4 1R$	$q_6 1R$	$q_6 1R$	$q_8 0L$	$q_8 1L$	$q_9 1L$

1.18. ¿Qué funciones de un lugar se calculan con todas las máquinas de Turing (en el alfabeto $\{0, 1\}$), cuyos programas contienen sólo una instrucción?

1.19. ¿ Es justa la afirmación: dos funciones calculables diferentes $f_1(\tilde{x}^m)$ y $f_2(\tilde{x}^n)$ se pueden calcular en una máquina de Turing si, y sólo si, $m \neq n$?

1.20. Sea M un conjunto numerable de algunas funciones calculables y $T(M)$ el conjunto mínimo posible de máquinas de Turing, tales que para cualquier función f de M existe una máquina en el conjunto $T(M)$ que calcula la función f.

1) Mostrar que si para cierto $n \geqslant 1$ existe en el conjunto M un subconjunto infinito compuesto de funciones de n lugares, entonces en $T(M)$ habrá una máquina con un número tan grande como se quiera de estados (o sea que para todo $l_0 \geqslant 1$ se puede encontrar en $T(M)$ una máquina con el número de estados mayor que l_0).

2) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente de la finitud del conjunto $T(M)$?

1.21. Construir un esquema de operadores de la máquina de Turing que calcula la función f; en calidad de operadores elementales emplee las máquinas T_i ($i = 4, 5, 6, 7, 8$). En los problemas 1) y 2), primero construya el esquema de operadores utilizando sólo las máquinas T_1, T_2, T_3, y después represente cada una de las máquinas T_1, T_2, T_3 con un esquema de operadores empleando las máquinas T_4, T_5, . . ., T_8. Los estados iniciales en las máquinas que se examinan aquí son: q_{11}, q_{21}, . . ., q_{81}, y los estados conclusivos: q_{10}, q'_{10}, q_{20}, q'_{20}, q_{30}, q_{40}, . . ., q_{80}, q'_{80}.

T_4:

	q_{41}
0	$q_{40}0R$
1	$q_{40}1R$

T_5:

	q_{51}
0	$q_{50}0L$
1	$q_{50}1L$

T_6:

	q_{61}
0	$q_{60}0S$
1	$q_{61}1R$

T_7:

	q_{71}
0	$q_{70}0S$
1	$q_{71}1L$

T_8:

	q_{81}
0	$q_{80}1S$
1	$q'_{80}0S$

1) $f(x, y) = x + y \pmod 2$,

T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}1L$	$q_{10}0R$
1	$q_{11}1R$	$q_{12}1L$

T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{23}1L$	$q_{23}0L$	$q_{20}1S$
1	$q_{22}0L$	$q_{21}0L$	—

T_3:

	q_{31}
0	$q_{30}0L$
1	$q_{31}1R$

2) $f(x) = 2^x$,

$$T_1: \begin{cases} q_{11}1 \models q_{10}1^2, \\ q_{11}1^{x+1} \models 101^x0q'_{10}1^2 \text{ con } x>0; \end{cases}$$

$$T_2: \begin{cases} 1^x010^tq_{21}1^y \models q_{20}1^y, \\ 1^x0^{z+1}10^tq_{21}1^y \models 1^{x+1}01^z0^tq'_{20}1^y \text{ con } z>0; \end{cases}$$

aquí $x>0$, $y>0$, $t>0$.

$$T_3: W0q_{31}1^{y+1} \models W0q_{30}1^{2y+1}, \quad y \geqslant 0;$$

3) $f(x) = 3x$;
4) $f(x, y) = x \cdot y$;
5) $f(x, y) = x - y$.

La *distancia entre dos células* C y C' de la cinta es igual al número de células que se encuentran entre C y C' más una. En particular, las células vecinas de la cinta se encuentran una de otra a la distancia de 1. Sea l un número positivo entero. El subconjunto de todas las células de la cinta tales que cada dos de ellas están colocadas una de otra a una distancia múltiple de l, se llama *retículo con el paso l*. Así que la cinta puede ser vista como la unión del retículo l con el paso l. Sea $R_{(l)}$ un retículo con el paso l. Dos células de este retículo se llamarán *vecinas* si la distancia entre ellas (examinándola con relación a toda la cinta) es igual a l. Se dice que la *palabra* $P = a_1 a_2 \ldots a_m$ *está escrita en el retículo* $R_{(l)}$ si:

1) el símbolo a_1 está escrito en cierta célula C_1 de este retículo;

2) el símbolo a_2 está escrito en la célula C_2 que es vecina a la C_1 en el retículo $R_{(l)}$ y está colocada a la derecha de la célula C_1, etc.;

m) el símbolo a_m está escrito en la célula C_m que está a la distancia $(m - 1)\cdot l$ de la célula C_1 y a la derecha de ella[1]).

Diremos que la *máquina de Turing T_1 simula la máquina de Turing T en el retículo* $R_{(l)}$ (con el paso l) si cualquiera que sea la palabra P (en el alfabeto A) se cumple la condición siguiente: supongamos que en el retículo $R_{(l)}$ está escrita la palabra P y en el momento inicial el cabezal de la máquina T_1 observa la letra que está más a la izquierda de la palabra P; la máquina T_1 se detiene si, y sólo si, la máquina T es aplicable a la palabra P; con la particularidad de que si $T(P)$ está determinada, entonces después de la terminación del trabajo de la máquina T_1, en el retículo $R_{(l)}$ estará escrita la palabra $T(P)$.

1.22. Simular el trabajo de la máquina T, que calcula la función f, en un retículo con paso l.

1) $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$, $l = 4$;

2) $f(x, y) = \frac{\operatorname{sg} x}{y}$, $l = 3$;

3) $f(x, y) = x + y$, $l = 3$;

1.23. Mostrar que para cualquier máquina de Turing T y cualquier número entero $l \geqslant 2$, existe una máquina T' que simula la máquina T en un retículo con paso l.

Llamaremos código *l-múltiple de la colección* $\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ a la palabra en el alfabeto $\{0, 1\}$ que tiene la forma

$$1^{l(\alpha_1+1)}0^l 1^{l(\alpha_2+1)}0^l \ldots 0^l 1^{l(\alpha_n+1)} \quad (l \geqslant 2).$$

1.24. 1) Demostrar que la máquina que transforma el código básico de la colección $\widetilde{\alpha}^n$ en un código l-múltiple de esta colección $(l \geqslant 2)$ se puede presentar con el esquema de operadores siguiente:

$$\alpha T_1 \underset{1}{\lrcorner} T_2 \,|\, \underline{q'_{20}\omega}_{1},$$

---

[1]) Consideremos que fuera de las células $C_1, C_2, \ldots, C_m$ en el retículo $R_{(l)}$ hay sólo símbolos vacíos del alfabeto exterior.

donde:

a) T_1 tiene el estado inicial q_{11}, el estado de conclusión q_{10} y

$$q_{11}1^{\alpha_1+1}01^{\alpha_2+1}0\ldots 01^{\alpha_n+1} \vdash q_{10}1^{\alpha_1+1}0^2 1^{\alpha_2+1}01^{\alpha_3+1}0\ldots$$
$$\ldots 01^{\alpha_n+1}0^{l+1}1^l;$$

b) T_2 tiene el estado inicial q_{21}, dos estados conclusivos q_{20} y q'_{20} y

$$q_{21}1^{x+1}0^2 1^{\alpha_{i+1}+1}01^{\alpha_{i+2}+1}0\ldots$$
$$\ldots 01^{\alpha_n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^l 1^{l(\alpha_2+1)}0^l\ldots$$
$$\ldots 0^l 1^{l(\alpha_i+1-x} \vdash q'_{20}1^x 0^2 1^{\alpha_{i+1}+1}01^{\alpha_{i+2}+1}0\ldots$$
$$\ldots 01^{\alpha_n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^{l+1}1^{l(\alpha_2+1)}0^l\ldots 0^l 1^{l(\alpha_i+2-x)} \text{ con } x>0,$$

$$q_{21}10^2 1^{\alpha_{i+1}+1}01^{\alpha_{i+2}+1}0\ldots 01^{\alpha_n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^l\ldots$$
$$\ldots 0^l 1^{l(\alpha_i+1)} \vdash q'_{20}1^{\alpha_{i+1}+1}0)^2 1^{\alpha_{i+2}+1}01^{\alpha_{i+3}+1}0\ldots$$
$$\ldots 01^{\alpha_n+1}0^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^l\ldots 0^l 1^{l(\alpha_i+1)}0^l 1^l,$$

$$q_{21}10^{l+1}1^{l(\alpha_1+1)}0^l 1^{l(\alpha_2+1)}0^l\ldots$$
$$\ldots 0^l 1^{l(\alpha_n+1)} \vdash q_{20}1^{l(\alpha_1+1)}0^l 1^{l(\alpha_2+1)}0^l\ldots 0^l 1^{l(\alpha_n+1)}.$$

2) Construir los programas de las máquinas T_3, T_4, ..., T_{11} por su descripción oral.

T_3—la máquina al comenzar su funcionamiento desde la última unidad del grupo de unidades la «mueve» una célula a la izquierda (sin cambiar «el contenido restante» de la cinta[1]); el cabezal se detiene en la primera unidad del grupo de unidades «trasladado»;

T_4—con un $l \geqslant 4$ dado, al comenzar el funcionamiento desde una célula arbitraria que contiene una unidad, el cabezal de la máquina se mueve hacia la derecha hasta que pase por todo un grupo de $l+1$ ceros; el cabezal se para en la primera célula después de este grupo y anota en ella el 1;

T_5—con un $l \geqslant 1$ dado, el cabezal de la máquina al comenzar su funcionamiento desde cierta célula y moviéndose hacia la derecha consecutivamente pone l unidades y se detiene en la última de ellas;

T_6— la máquina comienza su funcionamiento desde la célula no vacía que está más a la izquierda; con un $l \geqslant 1$ dado «se busca» el primer grupo de $l+1$ ceros que esté a la izquierda y el cabezal se para en el último de estos ceros («el contenido del trozo inicial de la cinta» no se cambia);

T_7— comenzando su funcionamiento desde la célula no vacía que está más a la izquierda, la máquina busca la unidad limítrofe por el lado izquierdo al primer grupo de tres ceros de la izquierda

[1]) Con otras palabras, consideramos que no ha aparecido ni una sola «nueva» unidad y que los cambios en el trozo inicial de la cinta *sólo* han influido en el grupo indicado.

«rebordeado» de unidades; el cabezal se detiene en la unidad encontrada («el contenido del trozo inicial de la cinta» no se cambia);

T_8— en la célula inicial se anota 0 y el cabezal, después de moverse una célula hacia la izquierda, se detiene;

T_9—el cabezal se mueve dos células hacia la derecha desde la célula «inicial» y la máquina se detiene en el estado q_{90} si la célula nueva contiene el símbolo 0, y en el estado q'_{90} si en la célula «nueva» hay un **1** (el contenido de la cinta queda como antes);

T_{10}— el cabezal se mueve una célula a la izquierda (después de esto la máquina se detiene; no se hace ningún cambio en la cinta);

T_{11}— el cabezal comienza a moverse hacia la derecha desde cierta célula «inicial» y «encuentra» la primera (en este movimiento) unidad, haciendo otro paso más se para en la célula que está a la derecha de la unidad «encontrada»[1]) (el contenido de la cinta no se cambia).

3) Construir, tomando en calidad de máquinas iniciales T_3, T_4, . . ., T_{11}, un esquema operador para las máquinas T_1 y T_2 y para la máquina que transforma el código básico de la colección en l-múltiple.

1.25. Construir un esquema operador de una máquina de Turing que transforme el código l-múltiple de la colección $\widetilde{\alpha}^n$ en el código básico de esta colección. En calidad de máquinas iniciales correspondientes a los operadores elementales emplee las máquinas T_4, T_5, ..., T_8 del problema 1.21 y además tres máquinas así:

T_1— con la $l \geqslant 1$ dada, el cabezal de la máquina moviéndose por la derecha de alguna célula vacía encuentra el primer (en esta dirección del movimiento del cabezal) grupo que contiene no menos de l unidades, después en este grupo borra las primeras l unidades y se detiene en la célula en la que estaba la última unidad borrada («el resto del contenido» de la cinta no se cambia);

T_2— el cabezal de la «posición inicial» se mueve hacia la izquierda l células (el número l está dado), después de esto la máquina se para en la l-ésima célula. Al hacer esto el contenido de la cinta no se cambia;

T_3— funciona en forma análoga a la máquina T_2 pero el «movimiento» se hace hacia la derecha.

Código reticulado de la colección $\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ se llama a una palabra en el alfabeto $\{0, 1\}$ anotada en n retículos con un paso n y con la particularidad de que en el primer retículo estará anotada la palabra 1^{α_1+1}, en el segundo, la palabra 1^{α_2+1}, etc., y en el n-ésimo, la palabra 1^{α_n+1}; los comienzos de las palabras en los retículos tienen que estar *concordados* o sea que la unidad que está más a la izquierda en el primer retículo inmediatamente precede (en la cinta) a la unidad que está más a la izquierda en el segundo

---

[1]) Si en la célula «inicial» está escrita una unidad, entonces el cabezal se para en la célula vecina de la derecha.

retículo, y esta unidad inmediatamente precede a la unidad más izquierda del tercer retículo, etc.

1.26. 1) Construir un esquema operador de una máquina de Turing que transforma el código básico de la colección $\widetilde{\alpha}^n$ en un código de retículo de esta colección. En calidad de máquinas iniciales que corresponden a los operadores elementales emplee las máquinas T_4, T_5, . . ., T_8 del problema 1.21 y además dos máquinas:

T_1— el cabezal de la «posición inicial» se mueve n células a la derecha y después de eso se detiene (en la n-ésima célula); el contenido de la cinta no se cambia;

T_2— funciona en forma análoga a la máquina T_1 pero el cabezal se mueve hacia la izquierda.

2) Construir, empleando la misma máquina que en el problema anterior, un esquema operador de una máquina de Turing que transforme un código de retículo de la colección $\widetilde{\alpha}^n$ en código básico de esta colección.

§ 2. CLASES DE FUNCIONES CALCULABLES Y RECURSIVAS

Las funciones que se examinan en este párrafo son funciones numerales parciales.

La función $F(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$ se llama *superposición de la función* f y $g_1, \ldots, g_m$ y se designa por $S(f^{(m)}; g_1^{(n)}, \ldots, g_m^{(n)})$. Aquí la función F estará definida en la colección $\widetilde{\alpha}^n$, y $F(\widetilde{\alpha}^n) = f(g_1(\widetilde{\alpha}^n), \ldots, g_m(\widetilde{\alpha}^n))$ si, y sólo si, cada función g_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ está definida en la colección $\widetilde{\alpha}^n$ y, además, la función f está definida en la colección $(g_1(\widetilde{\alpha}^n), \ldots, g_m(\alpha^n))$.

Sean $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$ cualesquiera dos funciones con $n \geqslant 2$. Definiremos la tercera función $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ mediante el esquema siguiente:

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y+1) = \\ = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)), \quad y \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

El esquema (1) se llama *esquema de recursión primitiva* para la función $f(\widetilde{x}^n)$ *por las variables* x_n y x_{n+1} y representa la *descripción recursiva primitiva de la función* $f(\widetilde{x}^n)$ con la ayuda de las funciones g y h. Se dice también que la *función* f *está obtenida de las funciones* g *y* h *con ayuda de la operación de recursión primitiva por las variables* x_n y x_{n+1}. En este caso emplean también la designación $f = R(g, h)$ (e indican aparte por qué variables se hace la recursión).

Al presentar la descripción recursiva primitiva de la función $f(x)$ dependiente de una variable, el esquema de la recursión primitiva tiene la forma

$$\begin{cases} f(0) = a, \\ f(y+1) = h(y, f(y)), \ y \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

donde a es una constante (un número de la serie natural $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$).

Sea $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $n \geqslant 1$ cierta función. Determinaremos la función $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ de la manera siguiente: sea $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ una colección arbitraria de números enteros no negativos; estudiemos la ecuación

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y) = \alpha_n, \tag{3}$$

a) si la ecuación (3) tiene la solución $y_0 \in N$ y con todas las $y \in N$ tales que $0 \leqslant y < y_0$, la función $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y)$ está definida y sus valores son diferentes de α_n, entonces suponemos que $g(\widetilde{\alpha}) = y_0$;

b) si la ecuación (3) no tiene solución en números enteros no negativos, entonces consideramos que $g(\widetilde{\alpha})$ no está definida;

c) si y_0 es el menor número no negativo de la solución de la ecuación (3) y con cierto $y_1 \in N$ y un menor y_0 el valor de $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y_1)$ no está determinado, entonces suponemos: $g(\widetilde{\alpha})$ no está definido.

Sobre la función $g(\widetilde{x}^n)$, construida de la manera indicada a base de la función $f(\widetilde{x}^n)$, se dice que *ha sido obtenida de la función* $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ *mediante la operación con la que se minimiza por la variable* x_n (o abreviadamente: *minimizando por* x_n). En este caso se emplean las siguientes designaciones: $g = Mf$, o $g(\widetilde{x}^n) = M_{x_n}(f(\widetilde{x}^n))$, o $g(\widetilde{x}^n) = \mu_y(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n)$, o $g(\widetilde{x}^n) = \mu_{x_n}(f(\widetilde{x}^n))$.

Observación. La operación de recursión primitiva y de minimizar se puede aplicar por cualesquiera variables que entran en las funciones f, g y h (pero siempre hay que indicar por cuáles variables se hacen estas operaciones).

En adelante denominaremos *simplísimas* a las siguientes funciones:

a) $s(x) = x + 1$, *función de sucesión*;

b) $o(x) \equiv 0$, *función nula*;

c) $I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n;\ n = 1, 2, \ldots)$ *función de selección o función de elección del argumento.*

La *clase* K_{pr} *de todas las funciones primitivamente recursivas* representa en sí el conjunto de todas las funciones que pueden ser obtenidas de las funciones simplísimas mediante las operaciones de superposición y de recursión primitiva.

Se llama *clase K_{rp} de todas las funciones parcialmente recursivas* al conjunto de todas las funciones que pueden ser obtenidas de las funciones simplísimas mediante las operaciones de superposición, de recursión primitiva y minimización.

OBSERVACIÓN. Al definir las clases K_{pr} y K_{rp} se supone que en la construcción de cada función concreta las operaciones correspondientes se emplean no más de un número finito de veces (ciertas o todas las operaciones pueden no utilizarse ni una vez).

La *clase K_{rg} de todas las funciones recursivas generales* representa en sí el conjunto de todas las funciones parcialmente recursivas siempre determinadas.

No es difícil mostrar que $K_{rp} \supset K_{rg}$ (¡la inclusión es rigurosa!). También es justa la siguiente inclusión rigurosa: $K_{rg} \supset K_{pr}$.

Por K_c designaremos la *clase de todas las funciones numéricas parciales computables en las máquinas de Turing*.

Es justa la afirmación siguiente: las clases K_{rp} y K_c coinciden.

TEOREMA (R. Robinson). *Todas las funciones primitivamente recursivas de un lugar, y solamente ellas, pueden ser obtenidas de las funciones $x + 1$ y $\overline{sg}\,(x \dot{-} [\sqrt{x}]^2)$ mediante una utilización finito-múltiple de las tres operaciones siguientes*:

a) *diferencia absoluta* $f(x) = |f_1(x) - f_2(x)|$;
b) *composición* $f(x) = f_1(f_2(x))$;
c) *iteración* $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+1) = f_1(f(x)). \end{cases}$

2.1. Aplicar la operación de recursión primitiva a las funciones $g(x_1)$ y $h(x_1, x_2, x_3)$ por las variables x_2 y x_3. Anotar la función $f(x_1, x_2) = R(g, h)$ en forma «analítica».

1) $g(x_1) = x_1$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$;
2) $g(x_1) = x_1$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$;
3) $g(x_1) = 2^{x_1}$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_1}$ (suponemos $0^0 = 1$);
4) $g(x_1) = 1$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_3(1 + \mathrm{sg}\,|x_1 + 2 - 2 - 2x_3|)$;
5) $g(x_1) = x_1$, $h(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 1)\,\mathrm{sg}\left(1 + \frac{x_3}{3}\right)$.

2.2. Demostrar la recursividad primitiva de la función $f(\tilde{x}^n)$.
1) $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2^2$;
2) $f(x_1) = 3^{x_1}$;
3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 \oplus x_3$ (suma por el módulo 2).

2.3. Demostrar que la relación $f = R(g, h)$ es válida.

1) $f(x_1, x_2) = \mathrm{rest}(x_1, x_2) =$

$$= \begin{cases} x_1, & \text{si } x_2 = 0, \\ \text{resto de la división de } x_1 \text{ por } x_2, & \text{si } x_2 > 0; \end{cases}$$

$$g(x_2) = 0,\ h(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 1)\,\mathrm{sg}\,|x_2 - (x_3 + 1)|,$$

la recursión se hace por las variables x_1, x_3.

2) $f(x_1, x_3) = \left[\frac{x_1}{x_2}\right] =$

$$= \begin{cases} x_1, & \text{si } x_2 = 0, \\ \text{la parte entera de la división de } x_1 \text{ por } x_2, & \text{si } x_2 > 0; \end{cases}$$

$g(x_2) = 0$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_3 + \overline{\text{sg}}\,|x_1 + 1 - (x_3 + 1)\,x_2| + \overline{\text{sg}}\,x_2$,

la recursión se hace por las variables x_1, x_3.

3) $f(x_1) = x_1 \dot{-} [\sqrt{x_1}]^2$,

$g = 0$, $h(x_1, x_2) = (x_2 + 1)\ \text{sg}\,(4x_1 \dot{-} (x_2^2 + 4x_2))$.

4) $f(x_1) = [\sqrt{x_1}]$,

$g = 0$, $h(x_1, x_2) = x_2 + \overline{\text{sg}}\,((x_2 + 1)^2 \dot{-} (x_1 + 1))$.

2.4. Mostrar que si las funciones $g(y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ y $\varphi_3(x)$ son primitivamente recursivas, entonces la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(x), \text{ si } g(y) \leqslant a; \\ \varphi_2(x), \text{ si } a < g(y) \leqslant b, \\ \varphi_3(x), \text{ si } g(y) > b, \end{cases}$$

donde $0 \leqslant a \leqslant b$ también es primitivamente recursiva[1]).

2.5. Sean $g_1(y)$, $g_2(x)$ y $g_3(x, y)$ funciones primitivamente recursivas. Demostrar que entonces $f(x, y)$, determinada con el esquema que se expone a continuación, también es primitivamente recursiva:

$$\begin{cases} f(0, y) = g_1(y), \\ f(x + 1, 0) = g_2(x), \\ f(x + 1, y + 1) = g(x, y) \end{cases}$$

(aquí $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$).

2.6. Sean las funciones $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ y $h_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $n \geqslant 1$, primitivamente recursivas. Demostrar que entonces también serán primitivamente recursivas las funciones siguientes:

1) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sum\limits_{i=0}^{x_n} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$;

2) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \prod\limits_{i=0}^{x_n} g(x_1 \ldots, x_{n-1}, i)$;

3) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z) = \begin{cases} \sum\limits_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i) & \text{con } y \leqslant z, \\ 0 & \text{con } y > z; \end{cases}$

---

[1]) La condición que se pone sobre la función $g(y)$ se debe entender así: se examinan todos los valores de y con los que la función $g(y)$ satisface la relación indicada.

4) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z) = \begin{cases} \prod_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i) & \text{con } y \leqslant z, \\ 1 & \text{con } y > z; \end{cases}$

5) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{i=h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}^{h_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$

(aquí, como es habitual, se considera que si el límite superior de la suma es menor que el inferior, entonces la suma es igual a 0);

6) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{i=h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}^{h_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$

(en el caso de que el límite superior de la multiplicación es menor que el inferior, el producto se supone igual a 1).

2.7. Aplicar la operación de minimización a la función f por la variable x_i. Presentar la función que resulte en forma «analítica».

1) $f(x_1) = 3$, $i = 1$;

2) $f(x_1) = \left[\frac{x_1}{2}\right]$, $i = 1$;

3) $f(x_1, x_2) = I_1^2(x_1, x_2)$, $i = 2$;

4) $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2$, $i = 1, 2$;

5) $f(x_1, x_2) = x_1 - \frac{1}{x_2}$, $i = 1, 2$;

6) $f(x_1, x_2) = 2^{x_1}(2x_2 + 1)$, $i = 1, 2$.

2.8. Demostrar, aplicando la operación de minimización a la función adecuada primitivamente recursiva, que esta función f es parcialmente recursiva.

1) $f(x_1) = 2 - x_1$;

2) $f(x_1) = \frac{x_1}{2}$;

3) $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$;

4) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 - x_1 x_2}$.

2.9. ¿Es justa la afirmación siguiente: si aunque sea una de las funciones g y h no es determinada en todas partes, entonces $f = R(g, h) \notin K_{rg}$?

2.10. 1) ¿Se puede obtener una función nunca indeterminada mediante la aplicación en una vez de la operación de minimización a una función siempre determinada?

2) Formular un ejemplo de una función primitivamente recursiva de la cual se puede obtener, aplicando dos veces la operación de minimización, una función nunca indeterminada.

2.11. Demostrar la computabilidad de las funciones siguientes:

1) $f(x, y, z) = \left[\frac{2}{x+1}\right](x - \overline{\mathrm{sg}}(2^x \dot{-} y)) \dot{-} (x+1)^z$;

2) $f(x, y, z) = \left(\frac{yz}{x-1} + 2^{[x/2]}\right)(y^2 \dot{-} xz)$;

3) $f(x, y, z) = 4^{x^2 \dot- y^2} - (x^2+1)^{z \dot- 1}$;

4) $f(x, y, z) = \frac{x^2-y^2}{n+1} \cdot 2^{(x^2+y)\,\overline{\mathrm{sg}}\,(x \dot- yz)}$.

2.12. ¿Qué potencia tienen las clases K_{pr}, K_{rg}, K_{rp} y K_{c}? La función $\varphi(x, y)$, definida con el esquema

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = y + 1, \\ \varphi(x + 1, 0) = \varphi(x, 1), \\ \varphi(x + 1, y + 1) = \varphi(x, \varphi(x + 1, y)). \end{cases}$$

donde $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ usualmente se llama *función de Ackermann*.

2.13. Mostrar que la función de Ackermann satisface las condiciones siguientes:

a) $\varphi(x, y) > y$, con cualesquiera x e y;
b) $\varphi(x, y)$ es rigurosamente monótona por las dos variables;
c) $\varphi(x + 1, y) \geqslant \varphi(x, y + 1)$, con cualesquiera x e y.

2.14. Empleando el problema 2.13 y el teorema de R. Robinson (sobre que el sistema $\{x + 1, \overline{\mathrm{sg}}\,(x \dot- [\sqrt{x}]^2)\}$ es completo respecto a las operaciones de composición, iteración y diferencia absoluta en la clase de funciones de un lugar primitivamente recursivas), demostrar que cualesquiera que fuese la función de un lugar primitivamente recursiva $f(y)$ se encontrará un x tal, para el cual $f(y) < \varphi(x, y)$ con cualquier valor de la variable y.

2.15. Mostrar que la función de Ackermann es recursiva general y no es primitivamente recursiva.

2.16*. Designaremos por $K_{\mathrm{pr}}^{(1)}$ y $K_{\mathrm{rg}}^{(1)}$ el conjunto de todas las funciones de un lugar primitivamente recursivas y el conjunto de todas las funciones recursivas generales, respectivamente. Demostrar que el sistema $K_{\mathrm{pr}}^{(1)} \cup \{x + y\}$ es completo respecto a la operación de superposición en la clase K_{pr} y el sistema $K_{\mathrm{rg}}^{(1)} \cup \{x + y\}$ en la clase K_{rg}.

2.17. Supongamos que la máquina de Turing T calcula la función $f_1(x) \in K_{\mathrm{rg}} \setminus K_{\mathrm{pr}}$. ¿Es siempre cierto que la función $f_2(x, y)$ calculada en esta misma máquina no pertenece a K_{pr}?

2.18. 1) Supongamos que las máquinas de Turing T_1 y T_2 calculan las funciones primitivamente recursivas $f_1(x)$ y $f_2(x)$, respectivamente. ¿Es siempre cierto que la composición T_1T_2 también calcula cierta función recursiva primitiva $f(x)$? ¿Y en el caso de que las máquinas T_1 y T_2 calculen correctamente las funciones f_1 y f_2?

2) Supongamos que la máquina T calcula la función primitivamente recursiva $f(x)$. ¿Es siempre justa la afirmación siguiente: si la iteración de maquinas T calcula cierta función siempre determinada $g(x)$, entonces esta función forzosamente es primitivamente recursiva?

2.19. ¿Son válidas las relaciones siguientes?
1) $\mu_x (x \dot{-} 1) = (\mu_x (x \dot{-} 2)) \dot{-} 1$.
2) $\mu_{x_2} (x_1 + (x_2 \dot{-} x_1)) = \mu_{x_1} ((x_1 \dot{-} x_2) + x_2)$.
3) $\mu_x \left(x \dot{-} \left[\frac{x}{2}\right]\right) \in K_{\text{pr}}$.
4) $\mu_x (x \dot{-} [\sqrt{x}]^2) \in K_{\text{pr}}$.
5) $\mu_x ([\sqrt[3]{x^2}]) \in K_{\text{pr}}$.

2.20*. Supongamos que las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ pertenecen al conjunto $K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$. ¿Pueden ser justas las afirmaciones siguientes?

1) $f_1(f_2(x)) \in K_{\text{pr}}$, pero $f_2(f_1(x)) \notin K_{\text{pr}}$,
2) $f_1(x^2) \in K_{\text{pr}}$, pero $[\sqrt{f_1(x^2)}] \notin K_{\text{pr}}$.
3) $f_1(x) + f_2(x) \in K_{\text{pr}}$, pero $f_1(x) + 2f_2(x) \notin K_{\text{pr}}$.

2.21*. Sea $f(x) \in K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$. ¿Son siempre válidas las relaciones siguientes?

1) $f(2x) \notin K_{\text{pr}}$.
2) $f(x + y) \in K_{\text{pr}}$,
3) $f(x \cdot y) \notin K_{\text{pr}}$.
4) $1 \dot{-} f(x) \notin K_{\text{pr}}$.
5) $f(x \dot{-} y) \in K_{\text{pr}}$.

2.22. Las dos variables de la función $f(x, y)$ de K_{rg} son sustanciales. Supongamos que $\mu_x f(x, y)$ y $\mu_y f(x, y)$ son funciones siempre determinadas. ¿Puede depender sustancialmente aunque sea una de estas dos funciones sólo de una variable?

2) La función $f(x, y) \in K_{\text{rg}}$ tiene una variable ficticia. ¿Puede, suponiendo además que es una función recursiva general, la función $\mu_x f(x, y)$ tener las dos variables sustanciales?

2.23. Formular las condiciones necesaria y suficiente para que la función $\mu_x f(x)$ sea nunca indeterminada.

2.24. 1) ¿Cuáles serán las condiciones necesaria y suficiente para el cumplimiento de la relación $\mu_x f(x) \in K_{\text{rg}}$?

2) ¿Puede ser aunque sea una de las funciones $\mu_x f(x, y)$ o $\mu_y f(x, y)$ recursiva general si $f(x, y) \in K_{\text{rp}} \setminus K_{\text{rg}}$?

2.25*. Sea $f(x) \in K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$. ¿Puede ser válida la relación $\mu_x f(x) \in K_{\text{pr}}$?

2.26. Se sabe que $f(x) \in K_{\text{rg}}$ y que $f(2x + 1) = f(x)$ y $f(2x) = f(x + 1)$ con todos los $x \geqslant 0$. ¿Es cierto que $f(x) \in K_{\text{pr}}$?

2.27. Aclarar si es completo el sistema $K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$ con relación a la operación de superposición en la clase K_{rg}?

2.28. ¿Forma el conjunto M un sistema completo en la clase K_{rp} con relación a la colección de operaciones $\mathfrak{O}$?

1) $M = K_{\text{rp}} \setminus K_{\text{pr}}$, $\quad \mathfrak{O} = \{R, \mu\}$,
2) $M = K_{\text{rp}} \setminus K_{\text{rg}}$, $\quad \mathfrak{O} = \{S\}$.
3) $M = K_{\text{rg}} \setminus K_{\text{pr}}$, $\quad \mathfrak{O} = \{S, \mu\}$.
4) $M = K_{\text{pr}}$, $\quad \mathfrak{O} = \{\mu\}$.

2.29. Supongamos que la función recursiva general $f(x)$, tal que $f(N) = \{f(x): x \in N\}$, es un subconjunto infinito propio del conjunto N. Confirmar si se podrá cumplir con esta condición la igualdad siguiente:

$$[(K^{(1)}_{\text{rp}} \setminus K^{(1)}_{\text{rg}}) \cup \{f(x)\}] = K^{(1)}_{\text{rp}},$$

donde $K^{(1)}_{\text{rp}}$ y $K^{(1)}_{\text{rg}}$ son respectivamente los conjuntos de todas las funciones de un lugar parcialmente recursivas y de todas las funciones recursivas generales, y la clausura se toma respecto a las operaciones de superposición y de minimización.

§ 3. CALCULABILIDAD Y COMPLEJIDAD DE LOS CALCULOS

La función parcial $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ se denomina *universal* para la familia $\mathcal{G}$ de funciones de n-lugares, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

a) para cada i $(i = 0, 1, \ldots)$ la función de n-lugares $F(i, x_1, \ldots, x_n)$, pertenece a $\mathcal{G}$;

b) para cada función $f(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{G}$ existe tal número i, que para todos los valores de las variables $x_1, \ldots, x_n$

$$F(i, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

La cantidad i se llama *número de la función* $f(x_1, \ldots, x_n)$, y la numeración de las funciones de la familia $\mathcal{G}$ obtenida de este modo, se llama *numeración que responde a la función universal* $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Por el contrario, si es dada la numeración del sistema $\mathcal{G}$, o sea, si es dada cualquier aplicación $\varphi: i \to f_i$ de la serie natural en $\mathcal{G}$, entonces, la función $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ determinada por la fórmula

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f_{x_0}(x_1, \ldots, x_n),$$

es universal para $\mathcal{G}$. A cada función recursiva primitiva (parcial) $f(x_1, \ldots, x_n)$ se le puede cotejar el término que refleja el modo de expresión de la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ mediante la función $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$, $s(x) = x + 1$ y $o(x) \equiv 0$, con ayuda de las operaciones de superposición, de recursión primitiva (y de minimización). Numerando todos los términos, se puede obtener la numeración de todas las funciones recursivas primitivas (parciales). A una numeración de tal calidad se la suele llamar *guedeliana* (véase [20]). En adelante, consideraremos que se ha fijado alguna numeración guedeliana. Una función de n-lugares parcialmente recursiva, que tiene el número x en esta numeración, se indicará mediante $\varphi^{(n)}_x$. El superíndice se omitirá, si no se tienen otras indicaciones respecto al número de las variables de la función $\varphi^{(n)}_x$.

Son justas las siguientes afirmaciones.

TEOREMA 1 (sobre la función universal para el conjunto de todas las funciones primitivamente recursivas de n-lugares). *La clase de todas las funciones de n-lugares primitivamente recursivas, tiene una función universal recursiva-general.*

Esta función universal (correspondiente a la numeración guedeliana elegida) se indicará mediante $D(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

TEOREMA 2 (sobre la función universal). *Existe una función parcialmente recursiva* $U(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, *universal para el conjunto de todas las funciones parcialmente recursivas de n-lugares.*

El concepto de función universal se usa frecuentemente para efectuar demostraciones con ayuda de la llamada *«diagonalización»*. Puede servir de ejemplo la siguiente demostración de la existencia de la función recursiva-general, que no es primitivamente recursiva. Sea $D(x_0, x_1)$, una función universal para la clase de funciones primitivamente recursivas de un lugar. Del punto a) de la definición de función universal se deduce, que $D(x_0, x_1)$ está determinada en todas partes. Consideremos a $g(x) = D(x, x) + 1$. La función $g(x)$ no es primitivamente recursiva. En efecto, si $g(x)$ fuese primitivamente recursiva, entonces, para alguna j y para todas las x se cumpliría la igualdad $D(j, x) = g(x)$. Pero para $x = j$ esta igualdad se transforma en la relación contradictoria

$$D(j, j) = g(j) = D(j, j) + 1.$$

Un papel importante juega el llamado $(s - m - n)$-teorema, que pertenece a Klin.

TEOREMA 3. *Para cualesquiera* $m, n \geqslant 1$ *existe una función primitivamente recursiva* $s^{(m+1)}$ *tal, que para todas las* $x, y_1, \ldots, y_m$

$$\varphi_x^{(m+n)}(y_1, \ldots, y_m, \quad z_1, \ldots, z_n) = \varphi_{s(x, y_1, \ldots, y_m)}^{(n)}(z_1, \ldots, z_n).$$

Sea T una máquina de Turing, y K, alguna configuración. La *complejidad temporal del proceso de cálculo* $t_T(K)$ se determina como el número de pasos que efectúa la máquina T al pasar de K a la configuración final, si T es aplicable a K. La función $t_T(K)$ no es determinada, si T no es aplicable a K. Se llama *zona del proceso de cálculo* a la parte mínima de la cinta, contenedora de todas las células de la cinta, que por lo menos integran parte de alguna de las configuraciones que se encuentran a lo largo del proceso de cálculo. La *capacidad de complejidad* $s_T(K)$ se define como el largo de la zona del proceso de cálculo con configuración inicial K, si T es aplicable a la configuración K. La función $s_T(K)$ no es determinada, si T no es aplicable a K. Mediante $\omega_T(K)$ se indica el número de cambios de direcciones del cabezal y por medio de $r_T(K)$, el número máximo de pasos del cabezal por la frontera entre dos células vecinas de la zona en el proceso de cálculo (el máximo se toma por todos los pares de células vecinas). Las funciones $\omega_T(K)$ y $r_T(K)$ no son determinadas, si T no es aplicable a K. Si en calidad de configuración K se toma la configuración inicial para la palabra P, entonces las funciones de complejidad se indican respectivamente por medio de

$t_T(P)$, $s_T(P)$, $\omega_T(P)$ y $r_T(P)$. Si q_T es una cierta función de complejidad, entonces $q_T(n) = \max\limits_{P:\lambda(P)\leqslant n} q_T(P)$.

3.1. Demostrar que la función, universal para las funciones primitivamente recursivas de un lugar

a) toma todos los valores;

b) toma cada valor un número infinito de veces.

3.2. Mostrar que en la numeración guedeliana, cada función primitivamente recursiva de un lugar tiene una cantidad calculable de números.

3.3. Demostrar que no existe ninguna función universal parcialmente recursiva para la familia de todas las funciones recursivas-generales de n-lugares.

3.4. Demostrar que existen funciones parciales numéricas, que no son parcialmente recursivas. Dar dos demostraciones, una de las cuales se base en la comparación de las potencias del conjunto de las funciones parcialmente recursivas y del conjunto de todas las funciones numéricas parciales, y la otra, en la «diagonalización».

3.5. Poner un ejemplo de función numérica parcial, que tome exactamente un valor y que no sea parcialmente recursiva.

3.6. Demostrar que la función f no es parcialmente recursiva.

1) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si el valor } \varphi_x(y) \text{ está determinado,} \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi_x(x) \text{ está determinado,} \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

3) $f(x, y) = \begin{cases} \varphi_x(y), & \text{si } \varphi_x(y) \text{ está determinado,} \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

4) $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi_x(y) = z, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

5) $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } y, \text{ para el cual } \varphi_x(y) = z, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

3.7. Aclarar si la función f es parcialmente recursiva o no.

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi_x(x) = 1, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \text{indeterminada,} & \text{si } \varphi_x(x) \text{ es determinado,} \\ 1, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si la unidad pertenece al conjunto de valores} \\ & \text{de la función } \varphi_x, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } \varphi_x \text{ es primitivamente recursiva}, \\ 0, \text{ en el caso contrario}. \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si en la descomposición decimal del número } \pi \\ \text{hay una cantidad infinita de ceros}, \\ 0, \text{ en el caso contrario}. \end{cases}$

3.8. Sea $u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ una función parcialmente recursiva, universal para algún subconjunto no vacío M de funciones recursivas-generales, tal que $K_{rg} \setminus M$ es infinito. Por medio de la «diagonalización», indicar el conjunto numerable de las funciones recursivas-generales, no pertenecientes a M.

3.9. Mostrar que si la función $f(x)$ es parcialmente recursiva, entonces, toda función distinta de $f(x)$ en un conjunto finito de valores del argumento, es parcialmente recursiva.

3.10. Sea $U(x, y)$ una función universal para el conjunto de todas las funciones parcialmente recursivas de un lugar. Demostrar que la función $f(x) = U(x, x) + 1$ no tiene predeterminaciones recursivas (en otras palabras, toda función determinada en todas partes, que coincide con $f(x)$ en todo lugar en donde $f(x)$ está determinada y en lo restante es arbitraria, no es parcialmente recursiva).

3.11. Sea una función parcialmente recursiva $f(x)$ tal, que la función $h(x)$, determinada por la condición:

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ en aquellos puntos, donde } f(x) \text{ está determinada}, \\ 1 \text{ en los puntos, donde } f(x) \text{ es indeterminada}, \end{cases}$$

es recursiva. Mostrar, que la función $f(x)$ tiene predeterminación recursiva.

3.12. Poner un ejemplo de sucesión binaria $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, que es engendrada por un operador determinado autónomo conveniente, y cumple la siguiente condición: la función $f(x)$, determinada para todo $n \geqslant 0$ por la igualdad $f(n) = \alpha_n$, no es recursiva-general.

3.13. 1) Mostrar, que si la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, es de salida para cierto operador acotado-determinado autónomo, entonces la función $f(x)$, propuesta para todo $n \geqslant 0$, mediante la relación $f(n) = \alpha_n$, es recursiva-general.

2) Una función así, ¿es siempre primitivamente recursiva?

3.14. Construir un ejemplo de sucesión binaria infinita $\tilde{\alpha} = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, que cumpla las siguientes condiciones:

1) no existe ningún a.-d. operador, para el cual $\tilde{\alpha}$ resulta una sucesión de salida;

2) existe una máquina de Turing que comenzando el trabajo con una cinta vacía, construye la sucesión $\tilde{\alpha}$; además, para cada n existe tal momento de tiempo $t_0 = t_0(n)$, que para todo $t \geqslant t_0$ el cabezal de la máquina no observa las células de la cinta que se encuentran a la izquierda de aquella en la que está escrito el símbolo α_n.

3.15. Poner un ejemplo de transformación de palabras finitas, que pueda ser ejecutada con una máquina de Turing conveniente, pero que no pueda ser realizable por ningún operador determinado.

3.16. Para la función dada f, construir una máquina de Turing T, que calcule correctamente f, con evaluación superior para su función temporal de complejidad, y evaluar superiormente las restantes funciones de complejidad. Los datos de entrada son dados en forma monaria. El alfabeto exterior es $A = \{0, 1\}$.

1) $f(x, y) = x + y$, $\quad t_T(n) \leqslant cn$;

2) $f(x) = 2x$, $\quad t_T(n) \leqslant cn^2$;

3) $f(x) = |x - y|$, $\quad t_T(n) \leqslant cn^2$;

4) $f(x, y) = \left[\frac{x}{y}\right]$, $\quad t_T(n) \leqslant cn^2$;

5) $f(x) =]\log_2 x[$, $\quad t_T(n) \leqslant cn^2$.

3.17. Construir una máquina de Turing T, que realice la traducción de una escritura monaria de números a una binaria, con las limitaciones dadas para la función de complejidad: $t_T(n) \leqslant c_1 n^2$, $s_T(n) \sim n$, $w_T(n) \leqslant c_2 n$, $r_T(n) \leqslant c_3 n$, donde c_1, c_2, c_3 son algunas constantes.

3.18. Construir una máquina de Turing T, que realice la traducción de una escritura binaria a una monaria, tal que $t_T(n) \leqslant c_1 n 2^n$, $s_T(n) \sim c_2 n + 2^n$, $\omega_T(n) \leqslant c_3 n 2^n$. $r_T(n) \leqslant c_4 n 2^n$, donde c_1, c_2, c_3, c_4 son algunas constantes.

3.19. Construir una máquina de Turing T, con alfabeto de entrada A de m letras, que transforme la palabra P en la palabra $P{*}P$, donde el símbolo $*$ no forma parte de P, y tal, que $t_T(n) \leqslant c_1 n^2$, $s_T(n) \leqslant c_2 n$, $\omega_T(n) \leqslant c_3 n$, $r_T(n) \leqslant c_4 n$.

3.20. 1) Construir una máquina T, que distinga la linealidad [1]) de una función booleana arbitraria $f(\widetilde{x}^n)$. La función $f(\widetilde{x}^n)$ se da mediante el vector binario $\widetilde{\alpha}_f$, de longitud $N = 2^n$. El alfabeto de entrada de la máquina es $A = \{0, 1, \Lambda\}$. Las funciones $t_T(N)$ y $s_T(N)$ deberán satisfacer las desigualdades $t_T(N) \leqslant c_1 N^2$, $s_T(N) \leqslant c_2 N$.

2) Construir una máquina T, que distinga la autodualidad de la función booleana arbitraria $f(\widetilde{x}^n)$, y tal, que $t_T(N) \leqslant c_1 N^2$, $s_T(N) \leqslant c_2 N$.

3) Construir una máquina T, que distinga la monotonía de la función de Boole arbitraria $f(x^n)$, y tal, que $t_T(N) \leqslant c_1 N^2$, $s_T(N) \leqslant c_2 N$.

3.21. Mostrar que para cualquier máquina de Turing T y para cualquier palabra P.

1) $s_T(P) \leqslant t_T(P) + |P|$;

2) existe una constante c, tal que $t_T(P) \leqslant c^{s_T(P)}$.

---

[1]) La máquina que distingue alguna propiedad de la palabra de entrada, tiene dos posiciones de clausura: q_0' y q_0''. La máquina deberá detenerse en la posición q_0' si la propiedad se cumple, y en la posición q_0'' si no.

Capítulo VIII

ELEMENTOS DE COMBINATORIA

§ 1. PERMUTACIONES Y COMBINACIONES. PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES BINOMINALES

La colección de los elementos $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ del conjunto $U = \{a_1, \ldots, a_n\}$ se llama *selección* o *arreglo de volumen r de n elementos*, o *(n, r)-selección*. La selección se llama *ordenada* si se da el orden consecutivo de los elementos. Dos selecciones ordenadas que se diferencien solamente en el orden consecutivo de los elementos se consideran diferentes. Si el orden consecutivo de los elementos no es sustancial, se dice que la selección es *no ordenada*. En las selecciones se puede admitir o no admitir la repetición de los elementos. Una (n, r)-selección ordenada en la que los elementos pueden repetirse se llama *permutación con repeticiones de n elementos por r* o *(n, r)-permutación con repeticiones*. Si los elementos de una (n, r)-selección son diferentes de par en par, entonces ésta se llama *(n, r)-permutación sin repeticiones*, o, simplemente, *(n, r)-permutación*. El número de (n, r)-permutaciones se designará por el símbolo $P(n, r)$ y el número de (n, r)-permutaciones con repeticiones por $P(n, r)$. Una (n, r)-selección no ordenada en la que sus elementos pueden repetirse se llama *combinación con repetición de n elementos por r* o abreviadamente *(n, r)-combinación con repeticiones*. Si los elementos de una selección no ordenada son diferentes de par en par, ésta se llama *combinación (sin repeticiones) de n elementos por r* o *(n, r)-combinación*. Cada una de estas combinaciones representa en sí un subconjunto de potencia r del conjunto U. El número de combinaciones de n elementos por r se designará por $C(n, r)$ [1]. El número de combinaciones con repeticiones de n elementos por r se designará por $\hat{C}(n, r)$.

---

[1]) En la literatura también se suelen encontrar las designaciones C_n^r, nCr, (n, r), $\binom{n}{r}$.

EJEMPLO. Sean $U = \{a, b, c\}$ y $r = 2$. Entonces hay: nueve permutaciones con repeticiones: aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc;
seis permutaciones sin repeticiones; ab, ac, ba, bc, ca, cb;
seis combinaciones con repeticiones: aa, ab, ac, bb, bc, cc;
tres combinaciones sin repeticiones; ab, ac, bc.

El producto $n(n-1)\ldots(n-r_1+1)$, donde n es un número real y r es un número entero positivo, lo designaremos por $(n)_r$. Por definición pondremos $(n)_0 = 1$. Si n es un número natural, pues $(n)_n$ se designa por el símbolo $n!$ y se llama *n-factorial*. Con $n = 0$ suponemos $0! = 1$. Para cualquier n real y un r entero y no negativo la magnitud $\frac{(n)_r}{r!}$ se llama *coeficiente binominal* y se designa por el símbolo $\binom{n}{r}$. Supongamos que $r_1, r_2, \ldots, r_k$ son números enteros no negativos y $r_1 + r_2 \ldots + r_h = n$. La magnitud $\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_h!}$. se llama *coeficiente polinomial* y se designa por $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$.

Al calcular el número de diferentes combinaciones se emplean las dos reglas siguientes.

REGLA DE LA SUMA. Si el objeto A puede ser elegido de m maneras y el objeto B de otras n maneras, entonces la elección «A, o B» puede ser realizada con $m + n$ procedimientos.

REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN. Si el objeto A puede ser seleccionado con m procedimientos y después de cada tal selección el objeto B, a su vez, puede ser seleccionado con n procedimientos, entonces la selección «A y B» en el orden indicado puede ser realizado de mn maneras.

1.1. Mostrar que:

1) $\hat{P}(n, r) = n^r$; 3) $C(n, r) = \binom{n}{r}$;

2) $P(n, r) = (n)_r$; 4) $\hat{C}(n, r) = \binom{n+r-1}{n-1}$.

1.2. Hallar el número de vectores $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, cuyas coordenadas satisfacen las condiciones:

1) $\alpha_i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $i = \overline{1, n}$;
2) $\alpha_i \in \{0, \ldots, k_i - 1\}$, $i = \overline{1, n}$;
3) $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = r$.

1.3. 1) ¿Cuál es el número de matrices de n filas y m columnas con elementos del conjunto $\{0, 1\}$?

2) Lo mismo con la condición de que las filas de las matrices sean diferentes de par en par.

1.4. ¿Cuántas y cuáles cifras harán falta para anotar todos los números naturales menores que 10^n?

1.5. Las coaliciones A y B están entre sí en guerra; n países neutrales se encuentran indecisos, de ellos p no se unen a A y k no se unen a B. ¿Cuántas nuevas situaciones pueden aparecer en esta guerra en dependencia de la conducta sucesiva de los países neutrales?

1.6. Solucionar los problemas siguentes empleando la regla de la suma y de la multiplicación.

1) ¿De cuántas maneras de las 28 fichas del dominó se pueden escoger dos fichas tales que se las pueda poner una junto a la otra (o sea que haya un mismo número en las dos fichas)?

2) Se echan tres dados (con seis caras cada uno). ¿De cuántas maneras pueden éstos caer de forma que, o bien todas las caras de arriba sean iguales, o bien sean diferentes de par en par?

3) Los ingleses tienen la costumbre de dar a sus niños varios nombres. ¿De cuántas maneras se puede dar el nombre a un niño si se le da no más de tres nombres y el número total de nombres es igual a 300? (Dos maneras que se diferencian solamente en el orden de los nombres se consideran diferentes).

1.7. Se dan m objetos de una calidad y n de otra. Hallar el número de selecciones compuestas de r objetos de una calidad y s de la otra.

1.8. Supongamos que $n = p_1^{\alpha_1} \ldots u_r^{\alpha_r}$ es la descomposición del número n en el producto de números primos diferentes entre sí de par en par. Hallar:

1) el número de todos los divisores naturales del número n;

2) el número de todos los divisores que no se dividen por el cuadrado de ningún número entero diferente de la unidad;

3) la suma de los divisores del número n.

1.9. 1) De n letras entre las cuales la a entra α veces, la b entra β veces y las demás letras son diferentes de par en par, se forman combinaciones con repeticiones de r elementos. ¿Cuántas habrá entre ellas que contengan h veces la letra a y k veces la letra b?

2) ¿Cuántas palabras diferentes que contengan r letras se pueden componer con estas n letras?

1.10. ¿De cuántas maneras se puede presentar el número n en forma de una suma de k sumandos (las presentaciones que se diferencian solamente en el orden de los sumandos se consideran diferentes), si:

1) cada sumando es un número entero no negativo;

2) cada sumando es un número natural?

1.11. 1) ¿De cuántas maneras se pueden colocar n ceros y k unidades de tal forma que no haya dos unidades seguidas?

2) ¿Cuántos números existen que sean enteros positivos, no mayores de k^n, cuyas cifras estén dispuestas en un orden no decreciente?

3) Una ciudad tiene la forma de rectángulo, las calles la dividen en cuadrados. En la dirección de norte a sur hay n cuadrados y en la dirección de este o oeste hay k cuadrados. ¿Cuál es el número de las rutas más cortas entre uno de los vértices del rectángulo y el opuesto?

1.12. ¿De cuántas maneras se puede presentar el número 11^n en forma de tres factores (las presentaciones que se diferencian solamente en el orden de los factores se consideran diferentes)?

2) El mismo problema, pero las presentaciones que se diferencian solamente en el orden de los factores no se consideran diferentes y $n \neq 3s$.

1.13. ¿De cuántas maneras se pueden colocar k torres en un tablero semejante al del ajedrez pero de dimensiones $m \times n$ de tal manera que ninguna de ellas se amenace mutuamente, o sea que no haya dos o más que se encuentren en una línea vertical o horizontal? Examinar los casos:

1) $k = n = m$, todas las torres son del mismo color;

2) $k = n = m$, hay p torres blancas y $k - p$ torres negras;

3) $k \leqslant n \leqslant m$, todas las torres están pintadas de diferentes colores;

4) $k \leqslant n \leqslant m$, hay k_i torres del color i $(i = \overline{1, s})$, $k_1 + k_2 + \ldots + \ldots + k_s = k$.

1.14. Tenemos una baraja con $4n$ cartas ($n \geqslant 5$) que tiene cuatro palos, en cada uno de los cuales hay n cartas numeradas con $1, 2, \ldots, n$. Calcular de cuántas maneras se pueden recoger cinco cartas de forma que entre ellas resulten:

1) cinco cartas consecutivas de un palo;

2) cuatro cartas de las cinco, con los mismos números;

3) tres cartas con un número y dos con otro;

4) cinco cartas de un mismo palo;

5) cinco cartas numeradas consecutivamente;

6) tres cartas de las cinco con el mismo número;

7) dos cartas de las cinco con los mismos números y las demás con números diferentes.

1.15. Demostrar las propiedades siguientes de los coeficientes binominales:

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

5) $\binom{n}{k} = \sum\limits_{r=0}^{k} \binom{n-r-1}{k-r}$;

2) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n-r}{k-r}\binom{n}{r}$;

6) $\binom{n-r}{k-r} \Big/ \binom{n}{k} = \frac{(k)_r}{(n)_r}$;

3) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$;

7) $\binom{n+1}{k} \Big/ \binom{n}{k} = \frac{n+1}{n-k+1}$;

4) $\binom{n}{k-r} \Big/ \binom{n}{k} = \frac{(k)_r}{(n-k+r)_r}$;

8) $\sum\limits_{r=k}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{k+1}$.

1.16. Demostrar que:

1) $\binom{n}{k}$ aumenta en función de n con k fijo;

2) $\binom{n-r}{k-r}$ disminuye en función de r con n y k fijos;

3) si n es fijo, entonces $\binom{n}{k}$ aumenta en función de k con $k\leqslant[n/2]$ y disminuye con $k>]n/2[$ [1]);

4) $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}=\binom{n}{[n/2]}$;

5) el valor mínimo de la suma $\binom{n_1}{k}+\binom{n_2}{k}+\ldots+\binom{n_s}{k}$ bajo la condición de que $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i=n$ es igual a

$$(s-r)\binom{q}{k}+r\binom{q+1}{k},$$

donde $q=[n/3]$, $r=n-s\ [n/s]$;

6) el valor máximo de la suma $\binom{n}{k_1}+\binom{n}{k_2}+\ldots+\binom{n}{k_s}$ bajo la condición de que $0\leqslant k_1<\ldots<k_s\leqslant n$, $1\leqslant s\leqslant n+1$ es igual a

$$\sum_{\frac{n-s}{2}\leqslant j<\frac{n+s}{2}}\binom{n}{j}.$$

7) Mostrar que con un p primo y con cualquier $p>k\geqslant 1$ $\binom{p}{k}$ es múltiplo de p.

8) Mostrar que $\prod\limits_{n<p_i\leqslant 2n} p_i<\binom{2n}{n}$, donde la multiplicación se toma por todos los números primos p_i $(n<p_i\leqslant 2n)$.

1.17. 1) Supongamos que m es un número entero no negativo y $n=n(m)$ es el número entero mínimo tal que $m<n!$. Mostrar que se puede, y además de una sola manera, cotejar al número m tal vector $\tilde{\alpha}(m)=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ que $m=\alpha_1\cdot 1!+\alpha_2\cdot 2!+\ldots+\alpha_{n-1}(n-1)!$, donde $0\leqslant\alpha_i\leqslant i$ $(i=\overline{1, n-1})$.

2) Hallar el vector $\tilde{\alpha}(m)$ para $m=15, 23, 37$.

3) ¿A qué números se les cotejan los vectores $\alpha_1=(0, 1, 0, 23)$, $\tilde{\alpha}_2=(1, 0, 2, 4)$?

4) Proponer un algoritmo para la enumeración irrepetida de todas las (n, n)-permutaciones de los números $1, 2, \ldots, n$.

1.18. 1) Sean k, n números naturales. Demostrar que a cualquier número entero $m\left(0\leqslant m<\binom{n}{k}\right)$ se le puede cotejar, y además de una única manera, el vector $\beta(m)=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ que satisface la condición

$$\beta_1>\beta_2>\ldots>\beta_k,\ m=\binom{\beta_1}{k}+\binom{\beta_2}{k-1}+\ldots+\binom{\beta_k}{1}.$$

[1]) Aquí y en adelante con el símbolo $[b]$ se designa la parte entera del número real b, y con el símbolo $]b[$, el menor entero que no es menor que b. Con el signo $\{b\}$ se designa la parte fraccionaria del número b.

2) Determinar el número m por el vector dado $\beta(m) = (6, 3, 0)$.

3) Formar el vector $\widetilde{\beta}(m)$ para $m = 19$, $n = 7$, $k = 4$.

4) A base del problema 1) elaborar un procedimiento para la enumeración irrepetible de todos los vectores de longitud n que tienen k coordenadas igual a la unidad y las demás igual a cero.

1.19. Demostrar, con inducción por n y empleando la relación $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, la identidad

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k. \tag{1}$$

1.20. Supongamos que n y m son números positivos enteros. Empleando la identidad (1), o de algún otro modo, demostrar las igualdades siguientes:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0;$

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1};$

4) $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)\, 2^{n-2};$

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \binom{n}{k} = (n+1)\, 2^n;$

6) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1);$

7) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1};$

8) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n};$

9) $\sum\limits_{r=0}^{k} \binom{m}{r} \binom{n}{k-r} = \binom{n+m}{k};$

10) $\sum\limits_{k=0}^{n} (1)^k \binom{n}{k}^2 = (1)^n \binom{2n}{n}$;

11) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2\,((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2$;

12) $\sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{r=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{r} = 3^n$;

13) $\sum\limits_{r=k}^{n} (-1)^{k-r} \binom{n}{r} = \sum\limits_{r=0}^{k-1} (-1)^{n-1-r} \binom{n}{r}$;

14) $\sum\limits_{r=0}^{n-k} \binom{n}{k+r} \binom{m}{r} = \binom{m+n}{n-k}$;

15) $\sum\limits_{k=n}^{m} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \binom{m}{k} = \begin{cases} 0 \text{ con } m \neq n, \\ 1 \text{ con } m = n. \end{cases}$

Ejemplo. Demostrar la identidad $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Primer procedimiento. El número de subconjuntos de k elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ es igual a $\binom{n}{k}$, y el número de todos los subconjuntos es 2^n. De esto se deduce la identidad.

Segundo procedimiento. Hacer $t = 1$ en la identidad (1).

1.21. Demostrar que:

1) $\sum\limits_{k} \binom{n}{2k} = \sum\limits_{k} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$;

2) $4 \sum\limits_{k} \binom{n}{4k} = 2^n + 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{\pi n}{4}$;

3) si $0 \leqslant r < m$, entonces

$$m \sum_{k} \binom{n}{mk+r} = \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i r\nu}{m}} \left(1 + e^{\frac{2\pi i\nu}{m}}\right)^n, \text{ donde } i^2 = -1;$$

4) $\sum\limits_{k} \binom{n}{4k+r} = \frac{1}{4} \left(2^n + 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{\pi}{4} (n-2r)\right)$, $0 \leqslant r \leqslant 3$;

5) si $0 \leqslant r < m$, $m \geqslant 1$, entonces

$$\frac{2^n}{m} \left(1 - (m-1) \cos^n \frac{\pi}{m}\right) \leqslant \sum_{k} \binom{n}{mk+r} \leqslant \frac{2^n}{m} \left(1 + (m-1) \cos^n \frac{\pi}{m}\right).$$

INDICACIÓN. En los problemas 4) y 5) utilizar la identidad del punto 3).

1.22. Demostrar que

$$m\sum_{k}\alpha^{mk+r}\binom{n}{mk+r}=\sum_{\nu=0}^{m-1}e^{-\frac{2\pi ir\nu}{m}}(1+\alpha e^{\frac{2\pi i\nu}{m}})^n,$$

y con la ayuda de la identidad demostrada calcular:

1) $\sum_{k}3^k\binom{n}{2k}$; 2) $\sum_{k}(-1)^k2^k\binom{n}{4k+1}$;

3) $\sum_{k}(-1)^k3^k\binom{n}{2k+1}\binom{2k+1}{r}$.

1.23. Demostrar que con $m\geqslant 0$ y $n\geqslant 0$ enteros siempre son válidas las igualdades:

1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(n)_k}{(m)_k}=\frac{m+1}{m-n+1}$, $m>n$;

2) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}\Big/\binom{m}{k}=\frac{m+1}{(m-n)(m-n+1)}$, $m>n$;

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(m+k-1)_k}{k!}=\sum_{k=1}^{m}\frac{(n+k-1)_k}{k!}$.

1.24. Que sean a, b números reales y k, m, n, r números enteros no negativos. Demostrar que:

1) $\binom{a}{k}+\binom{a}{k-1}=\binom{a+1}{k}$;

2) $(1+t)^a=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}t^k$, $|t|<1$;

3) $\binom{-a}{k}=(-1)^k\binom{a+k-1}{k}$, $a>0$;

4) $\sum_{k=0}^{n}\binom{a-k}{r}=\binom{a+1}{r+1}-\binom{a-n}{r+1}$;

5) $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}$ (teorema de la suma);

6) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{a}{k}=\binom{a-1}{n}$;

7) $\sum_{k=0}^{n} \binom{a+n-k-1}{n-k}\binom{b+k-1}{k} = \binom{a+b+n-1}{n}$;

8) $\sum_{0\leqslant k,\ r\leqslant n} \binom{a}{k}\binom{b}{r}\binom{c}{n-k-r} = \binom{a+b+c}{n}$;

9) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

10) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \sqrt{5}-\sqrt{3}$;

11) $m \sum_{k} \binom{a}{mk+r} b^{mk+r} = \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i r\nu}{m}} (1+be^{\frac{2\pi i\nu}{m}})^a,\ |b|<1.$

1.25. 1) Hallar el número de todas las palabras de longitud mn en un alfabeto de n letras, en las que cada letra del alfabeto aparece m veces.

2) ¿De cuántas maneras un conjunto de n elementos puede ser dividido en s subconjuntos de los cuales el primero contiene k_1 elementos, el segundo k_2 elementos, etc.?

3) Partiendo desde el punto de vista combinatorio mostrar que para cualesquiera números enteros no negativos $k_1, k_2, \ldots, k_s, n$, tales que $k_1+k_2+\ldots+k_s = n$ es válida la igualdad

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{s-1}}{k_s} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}.$$

4) Demostrar, con inducción por s, la identidad

$$(t_1+t_2+\ldots+t_s)^n = \sum_{\substack{k_1,\ \ldots,\ k_s \\ k_1+\ldots+k_s=n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!} t_1^{k_1}t_2^{k_2}\ldots t_s^{k_s}.$$

§ 2. FORMULA DE INCLUSIONES Y EXCLUSIONES

Que haya N objetos y n propiedades $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Cada uno de estos objetos puede tener o no tener cualquiera de estas propiedades. Designemos por $N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$ el número de objetos que tienen las propiedades $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ (y puede ser algunas otras también). Entonces el número de objetos $\hat{N}_0$ que no tienen ninguna de las propiedades $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se determina con la igualdad

$$\hat{N}_0 = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^n S_n, \qquad (2)$$

donde $S_0 = N$ y

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}), \quad k = \overline{1, n}.$$

La fórmula (2) se llama fórmula de inclusiones y exclusiones.

EJEMPLO del empleo de la fórmula de inclusiones y exclusiones. Supongamos que una baraja está formada de n cartas numeradas con números desde el 1 hasta el n $(1, \ldots, n)$ ¿De cuántas maneras se pueden colocar las cartas en la baraja de tal forma que para ningún i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ la carta con el número i no se encuentre en el i-ésimo lugar?

SOLUCION. Hay n propiedades α_i del género: «la carta con el número i ocupa en la baraja el i-ésimo lugar». El número de todos los órdenes posibles de las cartas en la baraja es igual a $n!$. El número de colocaciones $N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$ en las cuales la carta con el número i_ν ocupa el lugar i_ν $(\nu = \overline{1, k})$ es igual a $(n-k)!$ Entonces

$$S_0 = n!, \ S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}) = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Empleando la fórmula (2) obtenemos que el número de colocaciones $\hat{N}_0$ en las que no se cumplen ninguna de las propiedades α_i es igual a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

2.1*. 1) Demostrar por inducción la fórmula (2)

2) Sea $\hat{N}_m$ el número de objetos que tienen exactamente m propiedades de n. Demostrar que

$$\hat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{m+k}{m} S_{m+k}. \tag{3}$$

3) Sea $\breve{N}_m$ el número de objetos que tienen no menos que m propiedades de n. Demostrar que

$$\breve{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{m-1+k}{m-1} S_{m+k}. \tag{4}$$

4) Mostrar que

$$S_k = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \hat{N}_m, \tag{5}$$

$$S_k = \sum_{m=k}^{n} \binom{m-1}{k-1} \breve{N}_m. \tag{6}$$

5) Mostrar que

$$S_m - (m+1) S_{m+1} \leqslant \hat{N}_m \leqslant S_m, \tag{7}$$

$$S_m - mS_{m+1} \leqslant \breve{N}_m \leqslant S_m. \tag{8}$$

2.2. Cuatro caballeros entregan sus sombreros en el guardarropa. Suponiendo que después los sombreros se reciben al azar, hallar la probabilidad de que exactamente k caballeros recibirán sus propios sombreros. Examinar todos los valores de k $(0 \leqslant k \leqslant 4)$.

2.3. Sea $E(r, n, m)$ el número de maneras de colocación de r objetos en n cajones entre los cuales quedarán exactamente m cajones vacíos y $F(r, n, m)$ es el número de las colocaciones en las cuales no menos de m cajones resulta que quedan vacíos. Mostrar que:

$$1)\ E(r, n, 0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r;$$

$$2)\ E(r, n, m) = \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-m}{k} (n-m-k)^r;$$

$$3)\ F(r, n, m) = \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-m}{k} (n-m-k)^r \frac{m}{m+k}.$$

2.4. Al investigar los gustos de lectura de los estudiantes resultó que el 60% de ellos lee la revista A; el 50%, la revista B; el 50%, la revista C; el 30%, las revistas A y B; el 20%, las revistas B y C; el 40%, las revistas A y C; el 10%, las revistas A, B y C. ¿Qué tanto por ciento de los estudiantes

1) no lee ninguna revista;

2) lee exactamente dos revistas;

3) lee no menos de dos revistas?

2.5. En una de las cátedras de la universidad trabajan trece personas y cada una de ellas sabe aunque sea una lengua extranjera. Diez personas saben el inglés, siete el alemán, seis el francés. Hay cinco que saben el inglés y el alemán, cuatro que saben el inglés y el francés, tres el alemán y el francés.

1) ¿Cuántas personas saben las tres lenguas?

2) ¿Cuántas personas saben exactamente dos lenguas?

3) ¿Cuántas personas saben sólo el inglés?

2.6. 1) Mostrar que la cantidad de números naturales que se dividen por n y que no son mayores de x es igual a $[x/n]$.

2) Hallar la cantidad de números positivos enteros que no sean mayores de 1000 y que no se dividan por ninguno de los números 3, 5 y y 7.

3) Hallar la cantidad de números positivos enteros que no sean mayores de 1000 y que no se dividan por ninguno de los números 6, 10 y 15.

4) Demostrar que si $n = 30\,m$, entonces la cantidad de números enteros que no son mayores de n y que no se dividen por ninguno de los números 6, 10, 15 es igual a $22\,m$.

5) Supongamos que $p_1, \ldots, p_r$ son todos números primos no mayores de $\sqrt{n}$. Mostrar que la cantidad de números primos p tales

que $\sqrt{n} < p \leqslant n$ es igual a $n-1-\sum_{k=1}^{r}(-1)^k S_k$, donde la suma

$$S_k = \sum \left[\frac{n}{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}} \right]$$

se toma por todas las colecciones posibles $\binom{r}{k}$ de los índices $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ en los que hay exactamente k índices iguales a 1 y los demás son iguales a cero.

6) Hallar la cantidad de números primos no mayores de 250.

2.7. Sea U un conjunto de n $(n \geqslant 3)$ elementos.

1) Hallar el número de pares (X, Y) de subconjuntos del conjunto U tales que $X \cap Y = \phi$.

2) Hallar el número de pares (X, Y) tales que $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1$.

3) Hallar el número de tales tríos (X, Y, Z) que $X \subseteq U, Y \subseteq U$, $Z \subseteq U$, $X \cup (Y \cap \overline{Z}) = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

4) Hallar el número de tales pares (X, Y) de subconjuntos del conjunto U que $X \cap Y = \phi$, $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 3$.

5) Hallar el número de tales pares (X, Y), que $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1$, $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 2$.

6) Hallar el número de tales tríos (X, Y, Z) que $X \subseteq U, Y \subseteq U$, $Z \subseteq U$, $X \cup (Y \cap \overline{Z}) = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 2$, $|Z| \leqslant 1$.

2.8. PROBLEMA DEL MAYORDOMO. A una comida que tendrá lugar en una mesa redonda están invitados n pares de caballeros enemigos entre sí $(n \geqslant 2)$. Hay que acomodarlos en la mesa de tal manera que ningún par de enemigos estén sentados uno al lado del otro. Mostrar que eso se puede hacer de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} 2^k(2n-k)!$ maneras.

2.9. PROBLEMA DE LOS MATRIMONIOS. ¿De cuántas maneras se puede acomodar en una mesa redonda n matrimonios de tal forma que los hombres y las mujeres se alternan y ningún matrimonio esté sentado junto?

§ 3. SUCESIONES REGRESIVAS, FUNCIONES GENERATRICES, RELACIONES RECURRENTES

La sucesión $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ se llama *regresiva* si para cierto k y todas las n se cumple la relación del tipo

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} \dots + p_k a_n = 0, \tag{9}$$

donde los coeficientes p_i, $i = \overline{1, k}$ no dependen de n. El polinomio

$$P_a(x) = x^k + p_1 x^{k-1} \dots + p_k \tag{10}$$

se llama *característico* para la sucesión regresiva $\{a_n\}$.

3.1. 1) Demostrar que una sucesión regresiva se determina por completo al dar los primeros k términos.

2) Supongamos que λ es la raíz de un polinomio característico. Mostrar que la sucesión $\{c\lambda^n\}$, donde c es una constante arbitraria, satisface la relación (9).

3) Demostrar que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son raíces simples (que no son múltiples) de un polinomio característico, entonces la solución general de la relación recurrente (9) es del tipo siguiente $a_n = c_1\lambda_1^n + \ldots$ $\ldots + c_k\lambda_k^n$.

4) Supongamos que λ_i es la raíz de la multiplicidad r_i $(i = \overline{1, s})$ del polinomio característico (10). Demostrar que en este caso la solución general de la relación recurrente (9) es del tipo

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} (c_{i1} + c_{i2}n + \ldots + c_{ir_i}n^{r_i-1})\lambda_i^n,$$

donde c_{ij} $(i = \overline{1, s};\ j = \overline{1, r_i})$ son constantes arbitrarias.

3.2. Hallar la solución general de las relaciones recurrentes:

1) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$;
2) $a_{n+2} + 3a_n = 0$;
3) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$;
4) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$;
5) $a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n = 0$;
6) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$.

3.3. Hallar a_n por las relaciones recurrentes y las condiciones iniciales:

1) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$,
$a_1 = 10,\ a_2 = 16$;
2) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0$,
$a_1 = 3,\ a_2 = 7,\ a_3 = 27$;
3) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$,
$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c$;
4) $a_{n+2} - 2\cos\alpha a_{n+1} + a_n = 0$,
$a_1 = \cos\alpha,\ a_2 = \cos 2\alpha$.

3.4. Demostrar que:

1) si $x = 1$ no es raíz del polinomio $x^2 + px + q$, entonces una solución particular de la relación recurrente

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = \alpha n + \beta \tag{11}$$

donde α, β, p, q son números dados, es la sucesión $a_n^* = an + b$; hallar a y b;

2) si $x = 1$ es una raíz simple del polinomio $x^2 + px + q$, entonces la solución particular se puede encontrar en la forma $a_n^* = n(an +$ $+ b)$; hallar a y b;

3) si $x = 1$ es la raíz múltiple del polinomio $x^2 + px + q$, entonces se puede encontrar una solución particular de la forma $a_n^* = n^2(an + b)$; hallar a y b;

4) en cada uno de los casos anteriores encontrar la solución general de la relación (11).

3.5. Resolver las relaciones recurrentes:

1) $a_{n+1} - a_n = n, \; a_1 = 1;$

2) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27 \cdot 5^n,$
$a_1 = -9, \; a_2 = 45;$

3) $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 6n^2 - 4n - 17,$
$a_1 = 3, \; a_2 = 15, \; a_3 = 41.$

3.6. 1) Supongamos que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones cuyos términos están ligados con las relaciones

$$a_{n+1} = p_1 a_n + q_1 b_n,$$
$$b_{n+1} = p_2 a_n + q_2 b_n,$$
$$\Delta = p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0,$$

donde p_1, q_1, p_2, q_2 son números dados. Hallar la expresión para a_n y b_n considerando que a_1 y b_1 están dados.

2) Hallar la solución del sistema de relaciones recurrentes

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n,$$
$$b_{n+1} = -a_n + b_n,$$
$$a_1 = 14, \; b_1 = -6.$$

3) Hallar la solución general del sistema de relaciones recurrentes

$$a_{n+1} = b_n + 5, \quad b_{n+1} = -a_n + 3.$$

3.7. La sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$ se da con la relación recurrente $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ y las condiciones iniciales $F_1 = F_2 = 1$. Demostrar que:

1) para cualesquiera números naturales n y m, $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}$.

2) para cualesquiera m y $n = km$ el número F_n se divide por F_m.

3) dos números consecutivos F_n y F_{n+1} son primos entre sí;

4) todo número natural N $(N > 1)$ puede ser unívocamente representado en forma de una suma de los números de Fibonacci, tal que cada número entra en la suma no más de una vez y ningunos dos números consecutivos no entran juntos;

5) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right];$

6) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n+1} = F_{2n+2};$

7) $1 + F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1};$

8) $F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}.$

Se puede ligar la serie $A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$, llamada *función generatriz para la sucesión* $\{a_n\}$ con cada sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ En aquellos casos cuando la serie $A(t)$ converge a cierta función $f(t)$, entonces también se dice que la función $f(t)$ es *generatriz para* $\{a_n\}$. La serie $E(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + \frac{a_n t^n}{n!} + \ldots$ se llama *función generatriz exponencial para* $\{a_n\}$. Las operaciones de suma, multiplicación y multiplicación por una constante para las funciones generatrices se pueden definir examinándolas como series formales. Supongamos que $A(t)$ y $B(t)$ son funciones generatrices para las series $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente, α y β son constantes. Entonces

$$\alpha A(t) + \beta B(t) = \alpha a_0 + \beta b_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1)t + \dots$$
$$\dots + (\alpha a_n + \beta b_n)t^n + \dots$$
$$A(t)\cdot B(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + \dots$$
$$\dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)t^n + \dots,$$

Si $E_a(t)$ y $E_b(t)$ son funciones generatrices exponenciales para las series $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente, pues la suma y la multiplicación por una constante se definen lo mismo que para las funciones generatrices corrientes y su producto se define de la manera siguiente

$$E_a(t)\cdot E_b(t) = c_0 + c_1 t + \dots + \frac{c_n t^n}{n!} + \dots,$$

donde $c_n = a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \dots + \binom{n}{k} a_k b_{n-k} + \dots + a_n b_0$.

3.8. Mostrar que la función $A(t)$ (y respectivamente la $E(t)$ es una función generatriz (generatriz exponencial) para la serie $\{a_n\}$ si:

1) $a_n = a^n$, $A(t) = (1-at)^{-1}$, $E(t) = \exp(at)$;
2) $a_n = n$, $A(t) = t(1-t)^{-2}$, $E(t) = t \exp t$;
3) $a_n = n(n-1)$, $A(t) = 2t^2(1-t)^{-3}$, $E(t) = t^2 \exp t$;
4) $a_n = n^2$, $A(t) = t(t+1)(1-t)^{-3}$, $E(t) = t(t+1)\exp t$;
5) $a_n = \binom{m}{n}$, $A(t) = (1+t)^m$;
6) $a_n = (m)_n$, $E(t) = (1+t)^m$.

3.9. Supongamos que $A(t)$ y $E(t)$ son, respectivamente, una función corriente y una función generatriz exponencial de la serie $\{a_n\}$.

1) Empleando la igualdad $n! = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^n dx$, mostrar que

$$A(t) = \int\limits_0^\infty e^{-x} E(xt)\, dx. \tag{*}$$

2) Convencerse de que la fórmula (*) es válida para las funciones generatrices $A(t) = (1-t)^{-1}$ y $E(t) = e^t$ de la serie $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 1$.

3) Lo mismo para las series con un término común

$$a_n = \begin{cases} 0, & n < j, \\ (n)_j, & n \geqslant j. \end{cases}$$

3.10. 1) Supongamos que $(a)_n = a(a-1)\dots(a-n+1)$. Demostrar, empleando funciones generatrices exponenciales, que

$$(a+b)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_{n-k} (b)_k.$$

INDICACIÓN. Emplear la identidad $(1+t)^{a+b} = (1+t)^a (1+t)^b$.

2) Supongamos que $(a)_{n,h} = a(a+h)\dots(a-h(n-1))$. Demostrar que

$$(a+b)_{n,h} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)_{n-k,h} (b)_{k,h}.$$

3.11. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ series, y $A(t)$ y $B(t)$ las respectivas funciones generatrices. Mostrar que

1) si $a_n = b_n - b_{n-1}$, entonces $A(t) = B(t)(1-t)$;

2) si $a_n = b_{n+1} - b_n$, entonces $A(t) = B(t)\frac{1-t}{t} - b_0 t^{-1}$;

3) si $a_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \dots$, entonces $A(t) = \frac{B(1)-B(t)}{1-t}$;

4) si $a_n = nb_n$, entonces $A(t) = t\frac{d}{dt}B(t)$;

5) si $a_n = n^2 b_n$, entonces $A(t) = t\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}B(t)\right)$;

6) Si se determina la operación S^k $(k \geqslant 0)$ sobre la serie $\{b_n\}$ mediante la relación

$$S^k(b_n) = b_n + \binom{k}{1} b_{n-1} + \dots + \binom{k+j-1}{j} b_{n-j} + \dots$$
$$\dots + \binom{k+n-1}{n} b_0$$

y se pone $a_n = S^k(b_n)$, entonces $A(t) = (1-t)^n B(t)$;

7) si $a_n = b_{2n}$, entonces $A(t) = \frac{1}{2}(B(t^{1/2}) + B(-t)^{1/2}))$;

8) si $a_n = b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}$, entonces $A(t) = B(t)\,t\,(1-t)^{-1}$.

3.12. Sean $A(t)$ y $B(t)$ funciones generatrices de las series $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente. Supongamos también que $A(t)\cdot B(t) = 1$. Hallar $\{b_n\}$ y $B(t)$ por la serie dada $\{a_n\}$.

1) $a_n = \binom{m}{n}$; 4) $a_0 = a_2 = 1$, $a_n = 0$ con $n \neq 0, 2$;

2) $a_n = a^n$; 5*) $a_n = (-1)^n \frac{1}{(n+1)!}$;

3) $a_n = n+1$; 6) $a_n = (-1)^n \binom{2n}{n} 4^{-n}$.

3.13. Mediante identidades relacionadas con las funciones generatrices deducir las identidades siguientes para coeficientes binomiales:

1) $(1+t)^n(1+t)^m=(1+t)^{n+m}$;

$$\sum_{s=0}^{k}\binom{n}{s}\binom{m}{k-s}=\binom{n+m}{k};$$

2) $(1-t)^{-1-n}(1-t)^{-1-m}=(1-t)^{-2-n-m}$;

$$\sum_{s=0}^{k}\binom{n+s}{n}\binom{m+k-s}{m}=\binom{n+m+k+1}{k};$$

3) $(1+t)^n(1+t)^{-m}=(1+t)^{n-m}$;

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\binom{n}{s}\binom{m+k-s-1}{k-s}=\binom{n-m}{k};$$

4) $(1-t)^{-1-n}(1+t)^{-1-n}=(1-t^2)^{-1-n}$;

$$\sum_{s=0}^{2k}(-1)^s\binom{n+s}{n}\binom{n+2k-s}{n}=\binom{n+k}{k};$$

5) $(1+t)^n(1-t^2)^{-n}=(1-t)^{-n}$;

$$\sum_{s=0}^{[k/2]}\binom{n}{k-2s}\binom{n+s-1}{s}=\binom{n+k-1}{k};$$

6) $(1+t)^n(1-t)^n=(1-t^2)^n$;

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{n}{k-s}\binom{n}{s}=\begin{cases}(-1)^{k/2}\binom{n}{k/2}, & k \text{ es par,}\\ 0, & k \text{ es impar.}\end{cases}$$

3.14. Hallar el término común a_n de la serie para la cual la función $A(t)$ es generatriz.

1) $A(t)=(q+pt)^m$;
2) $A(t)=(1-t)^{-1}$;
3) $A(t)=\sqrt{1-t}$;
4) $A(t)=t^m(1-t)^m$;
5) $A(t)=(t+t^2+\ldots+t^r)^m$;
6) $A(t)=\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-m}$;
7) $A(t)=(1+2t)^{-1/2}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-m}$;
8) $A(t)=t^2(1-t)(1+2t)^{-m}$;
9) $A(t)=\ln(1+t)$;
10) $A(t)=\operatorname{arc\,tg} t$;
11) $A(t)=\operatorname{arc\,sen} t$;

12) $A(t)=e^{-2t^2}$;

13) $A(t)=\int\limits_0^t e^{-x^2}\,dx$;

14) $A(t)=\frac{1}{m!}\left(\frac{-t}{1+t}\right)^m$.

3.15. Deducir las identidades[1]):

1) $\sum\limits_s (-1)^{n-s}\binom{n}{s}\binom{m+s}{m+1}=\binom{m}{n-1}$;

2) $\sum\limits_s (-1)^s\binom{m}{s}\binom{s}{n}=\begin{cases} 0 & \text{con } m\neq n, \\ (-1)^n & \text{con } m=n; \end{cases}$

3) $\sum\limits_s (-1)^s\binom{m}{m-k+s}\binom{n+s}{n}=\binom{m-n-1}{k}$;

4) $2\sum\limits_s \binom{n}{2s}\binom{n}{2m-2s}=\binom{2n}{2m}+(-1)^m\binom{n}{m}$;

5) $2\sum\limits_s \binom{n+2s}{n}\binom{n+2m-2s+1}{n}=\binom{2n+2m+2}{2n+1}$;

6) $\sum\limits_{s=0}^{n} (-1)^{n-s}4^s\binom{n+s+1}{2s}=n+1$.

3.16. Supongamos que la serie $\{a_n\}$ satisface la relación recurrente $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$.

1) Mostrar que $A(t)=\frac{a_0+(a_1+pa_0)t}{1+pt+qt^2}$.

2) Que sean $1+pt+qt^2=(1-\lambda_1 t)(1-\lambda_2 t)$, $\lambda_1\neq\lambda_2$. Mostrar que

$$a_n=(a_1+pa_0)\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}+a_0\,\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

3) Expresar a_n en el caso cuando $1+pt+qt^2=(1-\lambda t)^2$.

4) Hallar las funciones generatrices para las series dadas con las relaciones recurrentes de los problemas 3.2, 1) —4).

3.17. Supongamos que

$$a_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n+2j}{2j}\qquad b_n=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+j}{2j+1},$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

---

[1]) La suma se hace por todas las s para las cuales las expresiones estudiadas tienen sentido.

y que $A(t)$ y $B(t)$ son las respectivas funciones generatrices.

1) Mostrar que a_n y b_n están ligadas con las relaciones del tipo

$$a_{n+1} = a_n + b_{n+1},$$
$$b_{n+1} = a_n + b_n, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

2) Mostrar que $A(t)$ y $B(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$A(t) - 1 = tA(t) + B(t),$$
$$B(t) = tA(t) + tB(t).$$

3 Hallar $(A(t)$ y $B(t)$.

4 Mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3.18. Supongamos que los términos de la serie $\{a_n\}$ satisfacen la relación

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0, \quad a_0 = 1.$$

1) Mostrar que la función generatriz $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ satisface la igualdad $tA^2(t) = A(t) - a_0$, o bien teniendo en cuenta la condición inicial $A(t) = \dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$.

2) Mostrar, descomponiendo $A(t)$ en una serie por los exponentes t, que $a_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

3.19. Deducir la relación recurrente para la serie de números a_n y resolver esta relación si:

1) a_n es el número de maneras de partición de un $(n+2)$ - ágono convexo en triángulos. Las particiones se hacen con diagonales que no se intersecan dentro de este polígono;

2) a_n es el número de maneras de colocación de los paréntesis en la expresión $b_1 : b_2 : \ldots : b_{n+1}$ con las que las expresiones obtenidas tienen sentido.

3.20. Hallar la sucesión $\{a_n\}$ cuyos términos satisfacen las relaciones:

1) $a_0a_n + a_1a_{n-1} + \ldots + a_na_0 = 2^na_n$, $a_0 = a_1 = 1$;
2) $a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1})$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$;
3) $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2a_n = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;
4) $(n+2)^2a_{n+2} + a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

3.21. Sea $A(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a(n, k)t^k$ una función generatriz para la serie que satisface la relación $a(n, k) = a(n, k-1) + a(n-1, k)$ con la condición inicial $a(n, 0) = 1$. Mostrar que:

1) $(1-t)A_n(t) = A_{n-1}(t)$;
2) $A_n(t) = (1-t)^{-n}$;
3) $a(n, k) = \dbinom{n+k-1}{k}$.

3.22. 1) La función $A(t) = \prod_{q=1}^{\infty}(1 - q^n t)$, $|q| < 1$, se descompone en la serie $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Hallar los coeficientes a_n.

INDICACION. Aprovecharse de que $A(t) = (1 - qt) A(qt)$. Comparar los coeficientes de las partes derecha e izquierda de esta igualdad.

2) Hallar los coeficientes b_n de la serie $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, donde $B(t) = A^{-1}(t)$.

3.23. Supongamos que a_n es el número de soluciones de la ecuación $2x + 5y + 7z = n$ en números enteros no negativos. Demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = (1 - t^2)^{-1} (1 - t^5)^{-1} (1 - t^7)^{-1}.$$

3.24. Sea a_n la cantidad de representaciones del número n en forma de la suma

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4, \quad x_i \in \{0, 1\}, \ i = \overline{1, 4}.$$

Hallar la función generatriz $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

3.25. Sea

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + qt^{2^k}) = \sum_{n=0} a_n t^n.$$

Demostrar que $a_n = q^{b_n}$, donde b_n es la cantidad de unidades en la descomposición binaria del número n.

3.26. Sea

$$S(n, k, l) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} (\nu + l)^k.$$

Demostrar que:

1) $S(n + 1, k, l) = S(n, k, l + 1) - S(n, k, l)$;
2) $S(n, k, l + 1) = S(n, k, l) - S(n + 1, k, l)$;
3) $S(n, k + 1, l) = (n + l) S(n, k, l) + nS(n - 1, k, l)$;
4) $S(n, k, l) = 0$, con $n > k$;
5) $S(n, k, l) = n!$;
6) $S(n, k, l) > 0$, con $n \leqslant k$;
7) $S(n, k, l)$ es una función creciente de los parámetros k y l con $n \leqslant k$;

8) $S(n, n+1, l) = \frac{n+2l}{2} (n+1)!$;

9) $S(1, k, 0) = 1$, con $1 \leqslant k$.

3.27. Sea

$$S(n, k) = S(n, k, 0) = \sum_{\nu} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \nu^k$$

y $\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n, k) t^k$. Mostrar que con $|t| < 1$

1) $\sigma_n(t) = \frac{n! t^n}{(1-t)(1-2t)\ldots(1-nt)}$;

2) $\sigma_n(t) = t \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{k\binom{n}{k}}{1-kt}$.

§ 4. EVALUACIONES ASINTOTICAS Y DESIGUALDADES

Al evaluar el incremento de las funciones se emplean las designaciones siguientes. La anotación $\varphi(x) = O(\psi(x))$ con $x \in X$ significa que existe una constante C tal que $|\varphi(x)| \leqslant C |\psi(x)|$ para $x \in X$. Si $\varphi(x) = O(\psi(x))$ y $\varphi(x) = 0 (\varphi(x))$ con $x \in X$, pues anotan $\varphi(x) \asymp \psi(x)$ siempre que $x \in X$. La notación $\varphi(x) = o(\psi(x)$ con $x \to a$ significa que $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$. Se dice que las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son *asintóticamente iguales* (la designación es: $\varphi(x) \sim \psi(x)$) siempre que $x \to a$, si $\varphi(x) = \psi(x) + o(\psi(x))$ siempre que $x \to a$. Al efectuar diferentes evaluaciones es útil la *fórmula de Stirling*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}. \tag{12}$$

Para hacer evaluaciones más exactas se emplean las desigualdades

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\left(-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\right) < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\left(-n + \frac{1}{12n}\right). \tag{13}$$

4.1. Demostrar las desigualdades [1]):

1) $n^{n/2} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ con $n > 2$;

2) $2n! < [n(n+1)]^n$;

3) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$;

4) $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$;

5) $(n!)^2 < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^n$, $n > 1$;

---

[1]) Con el símbolo $(2n-1)!!$ se designa el número $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$, y $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$.

6) $1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n\leqslant\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$;

7) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

8) $(2n-1)!!<n^n$, $n>1$; 9) $n!>e^{-n}n^n$.

4.2. Demostrar las desigualdades

1) $\left(2\frac{n-k}{k+1}\right)^k<\binom{n}{k}<\binom{3n}{k}^k$, $n>k>1$;

2) $\binom{n}{k}^k<\binom{n}{k}<\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$, $n>k>0$;

3) $\frac{4^n}{2\sqrt{n}}<\binom{2n}{n}\leqslant\frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$, $n>1$.

4.3. Mostrar, empleando la fórmula de Stirling, que con $n\to\infty$ son válidas las igualdades asintóticas siguientes:

1) $(2n-1)!!\sim\sqrt{2}(2n)^ne^{-n}$;

2) $\binom{2n}{n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}4^n$;

3) $\frac{n!}{\left(\left[\frac{n}{3}\right]!\right)^2\left(n-2\left[\frac{n}{3}\right]\right)!}\sim\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\cdot\frac{3^n}{n}$;

4) $\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+m)}\sim\frac{k!}{m!}n^{m-k}$ para los números enteros y no negativos k y m;

5) $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}n}$.

4.4. Demostrar que con $n\to\infty$ son válidas las igualdades asintóticas siguientes:

1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\sim\frac{2^{n+1}}{n}$;

2) $\sum_{\nu}\binom{n}{r+k\nu}\sim\frac{1}{k}2^n$, $0\leqslant r<k$;

3) $\sum_{\nu}\binom{n}{r+k\nu}\alpha^{r+k\nu}\sim\frac{1}{k}(1+\alpha)^n$, $0\leqslant r<k$;

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}\sim\ln n$;

5) $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}^2\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}4^n$.

4.5. Sean $b_0, b_1, \ldots, b_n$ unos números tales que $0 < a^k \leqslant b_k \leqslant \leqslant c^k < 1$. Aclarar si es justo que:

1) $(1+a)^n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \leqslant (1+c)^n$;

2) $(1-c)^n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k \leqslant (1-a)^n$

4.6. 1) Demostrar la desigualdad de Chébishev en la forma siguiente. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ una reunión de números, $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $Da = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2$. Entonces la parte δ_t de aquellos a_i para los cuales $|a_i - \bar{a}| \geqslant t$, no supera $\frac{Da}{t^2}$.

2) Demostrar, empleando la desigualdad de Chébishev, que

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2} - t\sqrt{n}} \binom{n}{k} + \sum_{\frac{n}{2} + t\sqrt{n} \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} \leqslant \frac{2^n}{(2t)^2}.$$

3) Mostrar que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{n}$.

4.7. Con ayuda de la fórmula de Stirling mostrar que:

1) si $k \to \infty$ y $k - \frac{n}{2} = o(n^{3/4})$ con $n \to \infty$, entonces

$$\binom{n}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(2k-n)^2}{2n}};$$

2*) si $a > 0$, $k \to \infty$ y $k - \frac{an}{a+1} = o(n^{2/3})$ con $n \to \infty$, entonces

$$\binom{n}{k} a^k = \frac{(1+a)^{n+1}}{\sqrt{2\pi n a}} e^{-\frac{(k(a+1)-n)^2}{2an}} \left(1 + o\left(\frac{1}{n} + \frac{(k(a+1)-n)^3}{n^2}\right)\right);$$

3*) si $a > 0$, $k < m$, $k \to \infty$, y k, $m = \frac{an}{a+1} + o(n^{2/3})$ con $n \to \infty$, entonces

$$\sum_{\nu=k}^{m} \binom{n}{\nu} a^\nu \sim \frac{(a+1)^n \sqrt{na}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\frac{((a+1)m-an)^2}{na}}}{m(a+1)-na} - \frac{e^{-\frac{((a+1)k-an)^2}{na}}}{k(a+1)-na} \right);$$

4*) si $a>0$, $k\to\infty$ y $k-\frac{an}{a+1}=o(n^{2/3})$ con $n\to\infty$, entonces

$$\sum_{\nu>na+t\frac{\sqrt{na}}{a+1}}\binom{n}{\nu}a^{\nu}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

4.8. Supongamos que $0<\lambda<1$, λn es un número entero, $\mu=1-\lambda$ y que $G(n,\lambda)=\frac{\lambda^{-\lambda n}\mu^{-\mu n}}{\sqrt{2\pi\lambda\mu n}}$. Con ayuda de las fórmulas (12) y (13) mostrar que:

1) $\binom{n}{\lambda n}\sim G(n,\lambda)$ con $n\to\infty$;

2) $G(n,\lambda)\exp\left(-\frac{1}{12n}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)\right)<\binom{n}{\lambda n}<G(n,\lambda)$;

3) $\frac{\sqrt{n}}{2}G(n,\lambda)\leqslant\binom{n}{\lambda n}$;

4) $\binom{n}{\lambda n}<\sum\limits_{k=\lambda n}^{n}\binom{n}{k}<\frac{\lambda}{2\lambda-1}\binom{n}{\lambda n}$ con $\lambda>\frac{1}{2}$;

5) $\sum\limits_{k=\lambda n}^{n}\binom{n}{k}<\lambda^{-\lambda n}\mu^{-\mu n}$ con $\lambda>\frac{1}{2}$.

4.9. Supongamos que k y n son números naturales ($k<n$). Mostrar que:

1) $(n)_k=n^k\exp\left(-\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu\cdot n^{\nu}}\sum\limits_{i=1}^{k-1}i^{\nu}\right)$;

2) si con $n\to\infty$ $k=o(\sqrt{n})$, entonces $(n)_k\sim n^k$;

3) si $k=o(n)$ con $n\to\infty$, entonces para cualquier $m>1$

$$(n)_k=n^k\exp\left(-\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{k^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)n^{\nu}}+O\left(\frac{k^{m+1}}{n^m}\right)\right);$$

4) con $n\to\infty$ y $k=o(n^{3/4})$

$$(n)_k=n^k\exp\left(-\frac{k^2}{2n}-\frac{k^3}{6n^2}+o(1)\right).$$

4.10. 1) Sean $k=k(n)$ y $s=s(n)$ tales que con $n\to\infty$ $s=o(\sqrt{k})$. Mostrar que $\binom{n-s}{k-s}\Big/\binom{n}{k}\sim\left(\frac{k}{n}\right)^s$.

2) Mostrar que si $s=o(k^{\frac{r}{r+1}})$, entonces

$$\binom{n-s}{k-s}\Big/\binom{n}{k}\sim\left(\frac{k}{n}\right)^s\exp\left(\sum_{\nu=1}^{r}\frac{s^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}\left(\frac{1}{k^{\nu}}-\frac{1}{n^{\nu}}\right)\right).$$

4.11. Sean $s = s(n)$ y $k = k(n)$ funciones en números enteros no negativos de un argumento natural. Mostrar que:

1) si $s+k = o(n)$ con $n \to \infty$, entonces

$$\binom{n-s}{k}\Big/\binom{n}{k} = \exp\Big(-\frac{sk}{n} - \frac{s^2k+sk^2}{2n^2} - s\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{1}{\nu}\Big(\frac{k}{n}\Big)^{\nu} - k\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu-1)}\Big(\frac{s}{n}\Big)^{\nu} + o(1)\Big);$$

2) si $s^2+k^2 = o(n)$ con $n \to \infty$, entonces $\binom{n-s}{k}\Big/\binom{n}{k} \sim 1$;

3) $$\exp\Big(-\frac{sk}{n}\Big(1+\frac{k}{n-k}+\frac{sn}{2(n-k)(n-k-s)}\Big)\Big) < \frac{\binom{n-s}{k}}{\binom{n}{k}} < \exp\Big(-\frac{sk}{n}\Big), \quad n > k+s.$$

4.12. Sea $f(x)$ una función continua monótona creciente en el segmento $[n, m]$. Mostrar que

$$f(n) \leqslant \sum_{k=n}^{m} f(k) - \int_{n}^{m} f(x)\,dx \leqslant f(m).$$

4.13. Utilizando el problema anterior mostrar que con $m \to \infty$ son válidas las relaciones siguientes:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \ln k \sim m\cdot\ln m - m + O(\ln m)$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^n = \frac{1}{n+1}m^{n+1} + O(m^n), \ n > 1$;

3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k\ln k\cdot\ln\ln k} = \ln\ln\ln m + c + O\Big(\frac{1}{m\ln m\ln\ln m}\Big)$,

c es una constante;

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\log k}{k} = \frac{1}{2}\log^2 m + c + O\Big(\frac{\log m}{m}\Big)$, c es una constante;

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k\ln^2 k} = c + \frac{1}{\ln m} + O\Big(\frac{1}{m\ln^2 m}\Big)$, c es una constante;

6) $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^{\nu}} = \frac{1}{\nu-1}\Big(\frac{1}{n^{\nu-1}} - \frac{1}{m^{\nu-1}}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^{\nu}} - \frac{1}{m^{\nu}}\Big)$.

4.14. La sucesión $\{p_n\}$ se define con la relación recurrente $p_n = p_{n-1} - \alpha p_{n-1}^{\beta}$, $p_0 = 1$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$. Mostrar que

1) $0 < p_n < 1$, $n \geqslant 1$;

2) p_n decrece en forma monótona con el incremento de n;

3*) $p_n \sim (\alpha(\beta - 1) n)^{\frac{1}{1-\beta}}$, $n \to \infty$.

INDICACIÓN. Utilizar las desigualdades

$$n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k - p_{k-1}}{-\alpha p_{k-1}^{\beta}} < \int_{1}^{p_n} \frac{dx}{-\alpha x^{\beta}} < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_k - p_{k-1}}{-\alpha p_{k-1}^{\beta}} = n + 1.$$

4.15*. Supongamos que la función generatriz $A(t)$ de la sucesión $\{a_n\}$ tiene la forma $A(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}$, donde $Q(t)$ y $P(t)$ son polinomios con coeficientes reales. Sea λ_1 la raíz de menor valor absoluto del polinomio $P(t)$. Demostrar que:

1) si λ_1 se una raíz real simple (no múltiple), entonces con $n \to \infty$

$$a_n \sim -\frac{Q(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)} \lambda_1^{-n-1}, \text{ donde } P'(\lambda_1) = \frac{d}{dt} P(t)\,|_{t=\lambda_1};$$

2) si λ_1 es una raíz real de multiplicidad r, entonces con $n \to \infty$

$$a_n \sim \frac{(-1)^r r!\, Q(\lambda_1)}{P^{(r)}(\lambda_1)} \binom{r+n-1}{r-1} \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{n+r},$$

donde $P^{(r)}(\lambda_1)$ es la derivada de orden r de $P(t)$ en el punto $t = \lambda_1$.

4.16. Sea $A(t)$ la función generatriz de la serie $\{a_n\}$. Hallar la conducta asintótica de a_n con $n \to \infty$.

1) $A(t) = \frac{1+t}{3t^2 - 4t + 1}$; 5) $A(t) = \frac{2t^3}{6t^4 - 17t^3 + 35t^2 - 22t + 4}$;

2) $A(t) = \frac{1}{6t^2 + 5t - 6}$; 6) $A(t) = \frac{1 - 3t}{(8t^3 - 1)(t^2 + 1)}$;

3) $A(t) = \frac{12t^3 + 10t^2}{6t^2 + 5t - 6}$; 7) $A(t) = \frac{1}{(t^2 + 2t - 2)^2}$;

4) $A(t) = \frac{t}{4t^2 + 1}$; 8) $A(t) = \frac{t^3 - 1}{(2t^2 + 1)(t^2 + 1{,}4t + 0{,}49)}$.

4.17. Por la relación recurrente dada y las condiciones iniciales hallar la conducta asintótica de a_n con $n \to \infty$.

1) $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;

2) $a_n = qa_{n-1} + p(1 - a_{n-1})$, $a_0 = 1$, $p + q = 1$, p, $q > 0$;

3) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + 4a_n = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2$;

4) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$, $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = -3$;

5) $a_{n+4} - 4a_{n+2} + 4a_n = 2^n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$.

4.18. 1) Mostrar que la solución de la ecuación $xe^x = t$ tiene la forma

$$x = \ln t - \ln \ln t + \frac{\ln \ln t}{\ln t} + O\left(\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)^2\right) \quad t \to \infty.$$

2) Mostrar que la solución de la ecuación $e^x + \ln x = t$ con $t = \infty$ tiene la forma

$$x = \ln t - \frac{\ln \ln t}{t} + O\left(\left(\frac{\ln \ln t}{t}\right)^2\right).$$

4.19. Sean $f(t) > 0$ y $e^{tf(t)} = f(t) + t + O(1)$, $0 < t < \infty$. Mostrar que $f(t) = \frac{\ln t}{t} + O(t^{-2})$ con $t \to \infty$.

4.20. Supongamos que a_n satisface las relaciones

$$a_n \geqslant 2^{-n-1} + (n-1)\cdot 4^{-n-1}, \tag{14}$$

$$a_{n+2} \leqslant 2^{-n-3} + (n+1)\cdot 4^{-n-3} + a_n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} + (n+2)\cdot 2^{n-2} + 4a_n\right), \tag{15}$$

$$a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{16}.$$

Mostrar que:

1) $a_n \leqslant 1/8$;
2) $a_n \leqslant 9\,(3/4)^n$;
3) $a_n = 2^{-n-1}\,(1 + O\,(3/4)^n)$.

4.21. Que sean k y n números enteros. Calcular, con una exactitud de hasta 1, $k = k(n)$ con la que la función $f(n, k)$ toma el valor máximo.

1) $f(n, k) = \binom{n}{k} 2^{-2^k}$;

2) $f(n, k) = \binom{n}{k} 2^{n-k-2^k}(1 - 2^{-2^k})^{n-k}$.

4.22. Hallar el valor máximo y el mínimo de la expresión

$$f(n, r, k) = \binom{n}{k}\binom{n-r}{k-r} 2^{-r+2^r}$$

como función de r ($0 \leqslant r \leqslant k \leqslant n$; r, n, k son números enteros).

4.23. Hallar la conducta asintótica con $n \to \infty$ de la magnitud $g(n) = \min\limits_{0 \leqslant k < n} f(n, k)$, k es un número entero, si:

1) $f(n, k) = 2^{n-k} + 2^k$;

2) $f(n, k) = k\cdot 2^k + \frac{1}{k} 2^{2n-k}$.

SOLUCIONES, RESULTADOS E INDICACIONES

Capítulo I

§ 1

1.1. 1) $\binom{n}{k}$; 2) 2^n. **1.2.** 1) 9, 13, 50; 2) (010011). **1.3.** $\binom{n-1}{k-1}$.

1.5. 1) $n2^{n-1}$; 2) $\binom{n}{k}2^{n-1}$. **1.6.** 1) 2^m; 2) [1] $\binom{m}{\frac{k+m-r}{2}}\binom{n-m}{\frac{k-m+r}{2}}$;

3) [1] $\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{\frac{j+m-r}{2}}\times\binom{n-m}{\frac{j+r-m}{2}}$.

1.9. INDICACIÓN. Mostrar que el número $\psi(n)$ de vectores $\tilde{\alpha}\in B_n^{2n}$, tales que $\sum_{i=1}^{h}\alpha_i\leqslant m/2$ para todos los $m=\overline{1,\ 2n}$ satisface la relación recurrente $\psi(n)=\sum_{i=1}^{m}\psi(i-1)\psi(n-i)$, $\psi(0)=\psi(1)=1$. Utilizando esta relación hallar que $\psi(6)=132$.

1.10. $\binom{n-r(k-1)}{k}$.

1.11. 1) INDICACIÓN. Ver la capa $B_{[n/2]}^n$ 2) INDICACIÓN. Entre $n+2$ colecciones de B^n siempre se encontrarán dos colecciones de un mismo peso.

1.12. 1) $\binom{n-l}{k-l}$; 2) $\binom{k}{l}$; 3) $2^k+2^{n-k}-1$.

1.13. Suponiendo que $0\leqslant l<k\leqslant n$, calcularemos el número $p(n,\ k,\ l)$ de pares $(\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta})$ tales que $\tilde{\alpha}\in A$, $\tilde{\beta}\in B$. Por una parte $p(n,\ k,\ l)=|A|\binom{n-l}{k-l}$, por otra parte $p(n,\ k,\ l)\leqslant|B|\binom{k}{l}$. Utilizando la identidad $\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}=$ $=\binom{n}{k}\binom{k}{l}$, obtenemos la desigualdad exigida. En el caso de que $l\geqslant k$ tendremos el mismo resultado.

---

[1] En el caso de que a no sea entero aquí se supone que $\binom{n}{a}$ es igual a 0.

1.14. 1) La cadena creciente de longitud n contiene en cada capa un vértice. En la capa B_1^n el vértice se puede escoger de n maneras. Después de que el vértice de la cadena que se encuentra en B_1^n ha sido escogido, se puede escoger de $n-1$ maneras el vértice de la cadena que se encuentra en la segunda capa, etc.

1.15. 1) Sea A el conjunto de colecciones incomparables de par en par de B^n y sea $A_i = A \cap B_1^n \cdot Z(\tilde{\alpha})$ será el conjunto de cadenas crecientes de longitud n que contiene el vértice $\tilde{\alpha}$. Tendremos que

$$n! \geqslant \left| \bigcup_{\tilde{\alpha}\in A} Z(\tilde{\alpha}) \right| = \sum_{\tilde{\alpha}\in A} |Z(\tilde{\alpha})| = \sum_{i=0}^{n} |A_i|\, i!\,(n-i)! \geqslant$$

$$\geqslant \left[\frac{n}{2}\right]! \cdot \left]\frac{n}{2}\right[! \cdot \sum_{i=0}^{n} |A_i| = |A| \cdot \left[\frac{n}{2}\right]! \cdot \left]\frac{n}{2}\right[!$$

De aquí $|A| \leqslant \binom{n}{[n/2]}$. 2) INDICACIÓN. Siempre que $i \leqslant k \leqslant n/2$ es válida la desigualdad $i!\ (n-i)! \geqslant k!\ (n-k)!$

1.16. INDICACIÓN. A cada número del tipo $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ le cotejaremos un vector $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de B^n. Entonces al conjunto A le corresponderá el conjunto $A' \subseteq B^n$ formado de colecciones incomparables de par en par. Empleando el resultado del problema 1.15, 1), obtendremos la afirmación.

1.17. Sean $i_1, i_2, \ldots, i_k$ los números de las coordenadas en las que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ se diferencian. Cualquier vector $\tilde{\gamma}$ tal que $\alpha \leqslant \tilde{\gamma} \leqslant \tilde{\beta}$ puede ser obtenido de α con la sustitución de 0 por 1 en ciertas coordenadas enumeradas. El número de procedimientos de esta sustitución es igual a 2^k.

1.18. Para B^1 la partición consiste en una única cadena $Z = \{(0), (1)\}$. Para B^2 en calidad de cadenas de partición se pueden tomar $Z_1 = \{(10)\}$ y $Z_2 = \{(00), (01), (11)\}$. Las propiedades 1) y 2) se cumplen para estas particiones. Supongamos que la afirmación está demostrada para cubos de dimensión $\leqslant n$ y la demostramos para B^{n+1}. Según la suposición existe una partición de las caras $B_0^{n+1,\, n+1}$ y $B_1^{n+1,\, n+1}$ en cadenas, que satisface las condiciones 1) y 2). Se pueden elegir las particiones en $B_0^{n+1,\, n+1}$ y $B_1^{n+1,\, n+1}$ isomorfas, o sea, tales que la cadena $Z_0 = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s\}$ pertenece a la partición del cubo $B_0^{n+1,\, n+1}$ si, y sólo si, la cadena $Z_1 = \{\tilde{\alpha}'_1, \tilde{\alpha}'_2, \ldots, \tilde{\alpha}'_s\}$, obtenida de Z_0 mediante la sustitución en cada colección $\tilde{\alpha}_i$ del Z_0 cero en la $(n+1)$-ésima coordenada, por la unidad, pertenece a la partición de la cara $B_1^{n+1,\, n+1}$. Sean $Z_0 = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s\}$ y $Z_1 = \{\tilde{\alpha}'_1, \tilde{\alpha}'_2, \ldots, \tilde{\alpha}'_s\}$ dos tales cadenas isomorfas de las particiones de las caras $B_0^{n+1,\, n+1}$ y $B_1^{n+1,\, n+1}$. Construimos dos cadenas nuevas $\hat{Z}_0 = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}'_s\}$ y $\hat{Z}_1 = \tilde{\alpha}'_1, \tilde{\alpha}'_2, \ldots, \tilde{\alpha}'_{s-1}$. La cadena $\hat{Z}_0$ se obtiene de Z_0 al unirle el vértice $\tilde{\alpha}'_s \in Z_1$ y la cadena $\hat{Z}_1$ se obtiene de Z_1 al extraer el vértice $\tilde{\alpha}'_s$. Hacemos lo mismo con cada par de cadenas isomorfas. Obtendremos la partición del cubo B^{n+1} en cadenas que no se intersecan. El cumplimiento de las condiciones 1) y 2) se comprueba fácilmente.

1.19. $2^k \sum_{i=0}^{r} \binom{n-k}{i}$.

1.20. 2) Mostraremos que la capa B_1^n es un conjunto completo siempre que $n > 2$. Sea $\widetilde{\alpha}_i$ un vector de B_1^n que tiene la i-ésima coordenada igual a la unidad. Supongamos que están dadas las distancias $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}) = r_i$, $i = \overline{1, n}$. Mostraremos cómo reconstruir $\widetilde{\beta}$. Si $\|\widetilde{\beta}\| = k > 0$, entonces es evidente que $r_i \in \{k-1, k+1\}$. Sea $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i \geqslant 2$ y sea $A(\widetilde{\beta}) = \{i : r_i = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} r_j\}$. Entonces la i-ésima coordenada del vector $\widetilde{\beta}$ es igual a la unidad si $i \in A(\widetilde{\beta})$ y es igual a cero en el caso contrario. Si $\max_{1 \leqslant j \leqslant n} r_j = 1$, entonces $\widetilde{\beta} = \widetilde{0}$. Siempre que $n = 5$ la capa B_1^n no es un conjunto básico puesto que el conjunto {(00001), (00010), (00100), (01000)} es completo. 3) Siempre que n sea par y $k = n/2$, con cualquier $n > 1$ y $k = 0, n$. 4) Sea $A = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k\}$ un sistema completo. Veamos el sistema de igualdades $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}) = r_i$, $i = \overline{1, k}$. Es evidente que $r_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $i = \overline{1, k}$. Cada colección, (r_1, r_2, r_k), con la que el sistema tiene solución, determina unívocamente cierto vector $\widetilde{\beta} \in B^n$. De esto se deduce que $(n+1)^k \geqslant 2^n$. INDICACIÓN. La evaluación superior para el número de vectores en un sistema básico se puede obtener partiendo de que el sistema de ecuaciones $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}) = r_i$, $i = \overline{1, k}$, puede ser reducido a un sistema lineal corriente. Siempre que $k > n$ ciertas ecuaciones de este sistema se expresan en forma de combinaciones lineales por las demás. Tales ecuaciones, y en consecuencia, los respectivos vectores, pueden ser eliminados.

1.21. SUFICIENCIA. La permutación de las coordenadas de todos los vectores de B^n y también la inversión de las coordenadas $i_1, i_2, \ldots, i_k$ de todos los vectores de B^n no cambian las distancias mutuas entre los vértices. NECESIDAD. Sea φ la transformación del cubo B^n en sí, tal que para cualesquiera $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ es válida la igualdad $\rho(\varphi(\widetilde{\alpha}), \varphi(\widetilde{\beta})) = \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$. Examinemos el conjunto $D = B_0^n \cup B_1^n$ que es completo en B^n (véase el problema anterior). Sea $\varphi(D) = \{\varphi(\widetilde{0}), \varphi(\widetilde{\alpha}_1), \ldots, \varphi(\widetilde{\alpha}_n)\}$ la imagen del conjunto D, y $\widetilde{\alpha}_i$ un vector de B_1^n que tiene la i-ésima coordenada igual a la unidad. Pongamos que $\widetilde{\beta}_i = \varphi(\widetilde{0}) \oplus \varphi(\widetilde{\alpha}_i)$, $i = \overline{1, n}$. Tenemos $\|\widetilde{\beta}_i\| = \rho(\widetilde{0}, \widetilde{\beta}_i) = \rho(\varphi(\widetilde{0}) \oplus \varphi(\widetilde{0}), \varphi(\widetilde{0}) \oplus \varphi(\widetilde{\alpha}_i)) = \rho(\varphi(\widetilde{0}), \varphi(\widetilde{\alpha}_i)) = \rho(\widetilde{0}, \widetilde{\alpha}_i) = 1$. Sea $j(i)$ el número de la coordenada del vector $\widetilde{\beta}_i$ que es igual a la unidad, $i = \overline{1, n}$. Entonces la aplicación π: $i \to j(i)$ es una permutación en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pongamos que $\pi \times (\widetilde{\alpha}) = (\alpha_{\pi(1)}, \ldots, \alpha_{\pi(n)})$ para un arbitrario $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de B^n. Mostremos que para todo $\widetilde{\gamma} \in B^n$ es válida $\varphi(\widetilde{\gamma}) = \pi(\widetilde{\gamma} \oplus \varphi(\widetilde{0}))$. Así se demuestra la necesidad. Realmente, $\rho(\varphi(\widetilde{\gamma}), \varphi(\widetilde{0})) = \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{0})$, $\rho(\varphi(\widetilde{\gamma}), \varphi(\widetilde{\alpha}_i)) = \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha}_i)$. Por otra parte $\rho(\pi(\widetilde{\gamma} \oplus \varphi(\widetilde{0})), \varphi(\widetilde{0})) = \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{0})$, $\rho(\pi(\widetilde{\gamma} \oplus \varphi(\widetilde{0})), \varphi(\widetilde{\alpha}_i)) = \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha}_i)$. Evidentemente, el conjunto $\varphi(D)$ es completo en B^n lo mismo que D. De aquí se deduce que $\varphi(\widetilde{\gamma})$ y $\pi(\widetilde{\gamma} \oplus \varphi(\widetilde{0}))$ coinciden.

1.23. 1) Para $n=1$ y $k=\overline{0,1}$ la afirmación es justa. (Suponemos que $\binom{0}{k}=0$ con todos los $k=0, 1, \ldots$) Supongamos que la afirmación está demostrada para las dimensiones menores o iguales a $n-1$ y para todos los $k=0, 1, \ldots$. Sea $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y sea $\widetilde{\alpha}'=(\alpha_1', \ldots, \alpha_{n-1}')=(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Si $\alpha_1=0$ entonces es evidente que $|M_k^n(\widetilde{\alpha})|=|M_k^{n-1}(\widetilde{\alpha}')|=1+$ $+\binom{n-1-(i_1-1)}{k}+\ldots+\binom{n-1-(i_k-1)}{1}=1+\binom{n-i_1}{k}+\ldots$ $\ldots+\binom{n-i_k}{1}$. Si $\alpha_1=1$, entonces $|M_k^n(\widetilde{\alpha})|=\binom{n-1}{k}+|M_{k-1}^{n-1}(\widetilde{\alpha}')|=$ $=\binom{n-1}{k}+1+\binom{n-1-(i_2-1)}{k-1}+\ldots+\binom{n-1-(i_k-1)}{1}=1+$ $+\binom{n-i_1}{k}+\ldots+\binom{n-i_k}{1}$. 2) Para arbitrarios k y $\widetilde{\alpha}\in B_k^n$ al número $\mu_k(\widetilde{\alpha})=|M_k^n(\widetilde{\alpha})|$ le llamaremos número de la colección $\widetilde{\alpha}$ en la capa B_k^n. Sea $\widetilde{\alpha}\in B_k^n$ un vector las coordenadas unitarias del cual son $i_1, \ldots, i_k$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n$. Entonces según lo anterior $\mu_k(\alpha)=1+\binom{n-i_1}{k}+$ $+\ldots+\binom{n-i_k}{1}$. Supongamos también que la colección $\widetilde{\beta}\in B_l^n$ se ha obtenido de $\widetilde{\alpha}$ mediante la sustitución de las últimas $k-l$ coordenadas unitarias por ceros. Mostremos que $Z_l^n(M_k^n(\widetilde{\alpha}))=M_l^n(\widetilde{\beta})$ o, lo que es lo mismo, que $Z_l^n(M_k^n(\widetilde{\alpha}))=\{\widetilde{\gamma}: \mu_l(\widetilde{\gamma})\leqslant\mu_l(\widetilde{\beta})\}$. Mostremos primero que para todo $\widetilde{\gamma}\in B_l^n$ tal, que $\mu_l(\widetilde{\gamma})<\mu_l(\widetilde{\beta})$, existe una colección $\widetilde{\delta}\in B_k^n$ tal, que $\widetilde{\gamma}<\widetilde{\delta}$ y $\mu_k(\widetilde{\delta})\leqslant\mu_k(\widetilde{\alpha})$. Eligiremos en calidad de $\widetilde{\delta}$ la colección obtenida de $\widetilde{\gamma}$ mediante la sustitución de las últimas $k-l$ coordenadas nulas por unidades. Hay que mostrar que $\mu_k(\widetilde{\delta})\leqslant\mu_k(\widetilde{\alpha})$. Si $\mu_k(\widetilde{\delta})>\mu_k(\widetilde{\alpha})$, entonces existe tal t que $\alpha_i=\delta_i$ siempre que $i<t$, $\alpha_t=0$, $\delta_t=1$. Al examinar las colecciones $\widetilde{\alpha}'$ y $\widetilde{\delta}'$, obtenidas respectivamente de $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\delta}$ mediante la sustitución de las últimas $k-l$ coordenadas unitarias por ceros, tenemos que $\mu_l\times$ $\times(\widetilde{\alpha}')\leqslant\mu_l(\widetilde{\delta}')$, $\widetilde{\alpha}'=\widetilde{\beta}$, $\mu_l(\widetilde{\delta}')\leqslant\mu_l(\widetilde{\gamma})$. Obtenemos una contradicción con la desigualdad $\mu_l(\widetilde{\beta})>\mu_l(\widetilde{\gamma})$. Por analogía se puede mostrar que para todo $\widetilde{\gamma}\in B_l^n$ tal que $\mu_l(\widetilde{\gamma})>\mu_l(\widetilde{\beta})$ no existe colección $\widetilde{\delta}\in M_k^n(\widetilde{\alpha})$ tal que $\widetilde{\gamma}<\widetilde{\delta}$. 3) Se deduce de 1) y 2). 4). Supongamos que $A\subseteq B_k^n$ y A no es segmento inicial de la capa B_k^n. Indicaremos el procedimiento para la construcción de tal conjunto $F\subseteq B_k^n$ que $|F|=|A|$, $\Sigma_{\widetilde{\alpha}\in F}\nu(\widetilde{\alpha})<\Sigma_{\widetilde{\alpha}\in A}\nu(\widetilde{\alpha})$, $|Z_{k-1}^n(F)|\leqslant|Z_{k-1}^n(A)|$. De esta manera se demostrará la afirmación. Designemos por $K(\widetilde{\alpha})$ el conjunto de números de las coordenadas unitarias de la colección $\widetilde{\alpha}$. Sean $\widetilde{\alpha}\in B_k^n\setminus A$ y $\widetilde{\beta}\in A$ las colecciones en las que se alcanza el mín $|K(\widetilde{\sigma})\setminus K(\widetilde{\tau})|$, donde el mínimo se toma por todos los pares $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau})$ tales que $\widetilde{\sigma}\in B_k^n\setminus A$, $\widetilde{\tau}\in A$, $\nu(\widetilde{\sigma})<$ $<\nu(\widetilde{\tau})$. Supongamos que $M=K(\widetilde{\alpha})\setminus K(\widetilde{\beta})$, $N=K(\widetilde{\beta})\setminus K(\widetilde{\alpha})$. Es evidente que $M\cap N=\varnothing$, $|M|=|N|$. Para $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}$ arbitrarios de B^n designaremos por

$\widetilde{\sigma}\setminus\widetilde{\tau}$ una colección del tipo $\widetilde{\sigma}\oplus(\widetilde{\sigma}\cap\widetilde{\tau})$ y sean $\widetilde{\alpha}'=\widetilde{\alpha}\setminus\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\beta}'=\widetilde{\beta}\setminus\widetilde{\alpha}$. Está claro que $\nu(\widetilde{\alpha}')<\nu(\widetilde{\beta}')$. Pongamos

$$D=\{\widetilde{\gamma}:\widetilde{\gamma}\in A,\ \widetilde{\alpha}'\cap\widetilde{\gamma}=\widetilde{0},\ \widetilde{\beta}'<\widetilde{\gamma};\ (\widetilde{\gamma}\setminus\widetilde{\beta}')\cup\widetilde{\alpha}'\notin A\},$$
$$E=\{\widetilde{\delta}:\widetilde{\delta}=(\widetilde{\gamma}\setminus\widetilde{\beta}')\cup\widetilde{\alpha}',\ \widetilde{\gamma}\in D\},$$
$$F=E\cup(A\setminus D).$$

Evidentemente, $F\subseteq B_k^n$, $|F|=|A|$ y $\sum\limits_{\widetilde{\alpha}\in F}\nu(\widetilde{\alpha})<\sum\limits_{\widetilde{\alpha}\in A}\nu(\widetilde{\alpha})$ puesto que $\nu\times$ $\times((\widetilde{\gamma}\setminus\widetilde{\beta}')\cup\widetilde{\alpha}')<\nu(\widetilde{\gamma})$ para todos los $\widetilde{\gamma}\in D$. Queda por demostrar que $|Z_{k-1}^n(F)|\leqslant|Z_{k-1}^n(A)|$. Nos limitaremos a la siguiente indicación. Primero hay que mostrar que si $\widetilde{\sigma}\in Z_{k-1}^n(F)\setminus Z_{k-1}^n(A)$, entonces $\widetilde{\sigma}\cap\widetilde{\beta}'=\widetilde{0}$ y $\widetilde{\alpha}'<\widetilde{\sigma}$. Después hay que mostrar que la colección $\widetilde{e}=(\widetilde{\sigma}\setminus\widetilde{\alpha}')\cup\widetilde{\beta}'$ se contiene en $Z_{k-1}^n(A)\setminus Z_{k-1}^n(F)$. 5) INDICACIÓN. Aplicar el procedimiento de inducción por $k-l$. 6) Sea k el máximo entero con el que $a_k>0$. Entonces, siempre que $l=k-1$ la afirmación se reduce al punto 4). Al dar un paso inductivo (la inducción se hace por $k-l$) pondremos $A_l=A\cap B_l^n$, $A_i'=A\cap\left(\bigcup\limits_{j=i}^{k}B_j^n\right)$ y notaremos que

$$Z_l^n(A)=Z_l^n(Z_{l+1}^n(A'_{l+1}))\cup A_l.$$

Está claro que

$$\min_{C\subseteq B_l^n,\ |C|=m}|Z_l^n(C)|\leqslant\min_{C\subseteq B_l^n,\ |C|>m}|Z_l^n(C)|.$$

Según la suposición inductiva el mín $|Z_{l+1}^n(A'_{l+1})$ se alcanza en el caso de que cada $Z_i^n(A)$, $i>l+1$, sea un segmento inicial de la capa B_i^n. Pero entonces por 2) el conjunto $Z_{l+1}^n(A'_{l+1})$ es segmento inicial. Entonces, con la elección de A_{l+1} se puede hacer el conjunto $Z_l^n(A)=Z_{l+1}^n(A'_{l+1})\cup A_{l+1}$ segmento inicial de la capa B_l^n. Precisamente de esto se deduce la afirmación.

1.24. Sea $A_l=A\cap B_l^n$ para cada $l=\overline{0,n}$. El número $T(n,m,k)$ de pares $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$ tales que $\widetilde{\alpha}\in A_m$, $\widetilde{\beta}\cap\widetilde{\alpha}=0$, $\widetilde{\beta}\in B_k^n\cup B_{m+k}^n$. Del enunciado se deduce que $\widetilde{\beta}\notin A$. Por una parte, $t(n,m,k)=a_m\binom{n-m}{k}$. Por otra parte $t(n,m,k)\leqslant\left(\binom{n}{m+k}-a_{m+k}\right)\binom{m+k}{m}+\left(\binom{n}{k}-a_k\right)-\binom{n-k}{m}$. De esto se deduce la afirmación.

1.25. 1) Sea $\widetilde{\alpha}$ el centro del conjunto A; entonces $A'=\{\widetilde{\alpha}\oplus\widetilde{\beta},\ \widetilde{\beta}\in A\}$ será el conjunto que hay que hallar. 2) Se puede considerar, según 1), que $\widetilde{0}$ es el centro de A. Para la construcción de A' es suficiente sustituir, para cada $i=\overline{1,n}$, cada colección $\widetilde{\alpha}$ de A_1^i, para la que $\widetilde{\alpha}^i\notin A$, por una colección $\widetilde{\alpha}^i$. 3) INDICACIÓN. Supongamos que $A\subseteq B^n$ tiene por centro $\widetilde{0}$ y posee la propiedad 1). Sea $S^{i,j}$ la transformación que consiste en que para cada $\widetilde{\alpha}\in A_{10}^{i,j}$

tal, que para cada $\widetilde{\alpha}^{i,\,j} \notin A$, la colección $\widetilde{\alpha}$ se sustituye por $\widetilde{\alpha}^{i,\,j}$. Ordenaremos los pares $(i,\ j)$ tales que $1 \leqslant i < j \leqslant n$ de la manera siguiente:

$$(1,\ n),\ (1,\ n-1),\ \ldots,\ (1,\ 2),\ (2,\ n),$$
$$(2,\ n-1),\ \ldots,\ (2,\ 3),\ \ldots,\ (n-1,\ n).$$

Aplicando a A consecutivamente todas las transformaciones $S^{i,\,j}$ comenzando por $(i,\ j) = (1,\ n)$ y acabando por $(i,\ j) = (n-1,\ n)$ obtendremos el A' buscado.

1.26. 2) En calidad de A tal que $|A| = 2^{n-1}$ se puede tomar cualquier cara $(n-1)$-dimensional que contenga $\widetilde{1}$, y si n es impar se puede tomar el conjunto $\{\widetilde{\alpha} : \|\widetilde{\alpha}\| \geqslant (n+1)/2\}$. Por otra parte, si $|A| > 2^{n-1}$ entonces en A habrá dos colecciones contrapuestas, la intersección de las cuales es $\widetilde{0}$.

1.27. 1) INDICACIÓN. Examinar el conjunto $\{\widetilde{\alpha} : \|\widetilde{\alpha}\| \geqslant \left]\frac{n+k+1}{2}\right[,\ \widetilde{\alpha} \in B^n\}$.

1.28. 1) Por analogía a 1.25. 2) $A = \{\widetilde{\alpha} : \widetilde{\alpha} \in B^n,\ \|\widetilde{\alpha}\|$ es par.

1.31. 1) A cada cara $B^{n,\,i_1,\,\ldots,\,i_k}_{\sigma_1\,\ldots\,\sigma_k}$ de dirección $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ se le puede recíproca y unívocamente cotejar su *código* que será el vector $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ con las coordenadas $\gamma_i \in \{0,\ 1,\ -\}$, $i = \overline{1,\ n}$ tal, que $\gamma_{i_1} = \sigma_1, \ldots, \sigma_{i_k} = \sigma_k$ y las demás coordenadas estarán tachadas. Se pueden llenar con ceros y unidades los k lugares fijados de 2^k maneras. 4) El número que se busca es igual al número de vectores $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ con k coordenadas del conjunto $\{0,\ 1\}$ y con $n-k$ lugares tachados. Escoger k lugares, de los n, para los símbolos de valor, o sea para el 0 y el 1, puede hacerse de $\binom{n}{k}$ maneras; se puede llenar con ceros y unidades las k lugares fijados de 2^k maneras. 6) El código de una cara k-dimensional que contenga el vértice dado $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se puede dar colocando k tachaduras en el lugar de algunas k coordenadas del vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 8) La intersección de dos caras es una cara. Se puede seleccionar una cara de dimensión j en una cara de dimensión l de $\binom{l}{j}\ 2^{l-j}$ maneras. Asimismo, en el código de la cara de dimensión k ya hay l coordenadas fijadas. Entre las demás $n-l$ coordenadas se tienen que colocar $k-j$ tachaduras. Eso se puede hacer de $\binom{n-l}{k-j}$ maneras.

1.33. Sean $\widetilde{\gamma}_1,\ \widetilde{\gamma}_2,\ \widetilde{\gamma}_3$ los códigos de las caras $g_1,\ g_2,\ g_3$, respectivamente. Dos caras no se intersecan si, y sólo si, existe una coordenada en la que los códigos de estas caras tienen símbolos de valor, y estos símbolos son opuestos. Si las caras $g_1,\ g_2$ se intersecan, entonces el código de la intersección contiene símbolos de valor en aquellas coordenadas donde aunque sea uno de los códigos $\widetilde{\gamma}_1,\ \widetilde{\gamma}_2$ tiene una coordenada de valor, además las coordenadas de valor del código de la intersección coinciden con las respectivas coordenadas aunque sea de uno de los códigos $\widetilde{\gamma}_1,\ \widetilde{\gamma}_2$. Si $\widetilde{\delta}$ es el código de la intersección de las caras g_1 y g_2. la cara g_3 no tiene vértices comunes con esta intersección, entonces se podrá encontrar un i tal que la i-ésima coordenada de los vectores $\widetilde{\delta}$ y $\widetilde{\gamma}_3$ son de valor y no coinciden. Pero entonces la i-ésima coordenada del vector $\widetilde{\gamma}_3$ no coincide con la i-ésima coordenada de valor de uno de los vectores $\widetilde{\gamma}_1$ o $\widetilde{\gamma}_2$. Eso quiere decir que las respectivas caras no se intersecan. Es una contradicción.

1.34. El problema se reduce fácilmente al caso cuando $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} = 2^n$. Presentaremos una demostración para este caso con inducción por n. Para $n=0, 1$ la afirmación evidentemente es válida. El paso $n \longrightarrow n+1$. Sea $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant s} n_i \geqslant 1$. Pongamos $n_i' = n_i - 1$. Entonces n_i' son números no negativos y $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i'} = 2^n$. Por presupuesto de inducción existe partición de cada una de las caras $B_0^{n+1,\,n+1}$ y $B_1^{n+1,\,n+1}$ del cubo B^{n+1} en caras de dimensión $n_1', \ldots, n_s'$. Elijamos estas particiones iguales, o sea tales que para cada $i=\overline{1, s}$ la unión de las caras de dimensión n_i' forma la cara g_i de dimensión n_i. Obtendremos la partición necesaria. Si $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant s} n_i = 0$, entonces, sea m el número de aquellas i para las cuales $n_i = 0$. De la condición $\sum_{i=1}^{s} 2^{n_i} = 2^{n+1}$ se deduce que m es par. Examinemos una nueva reunión $n_1', n_2', \ldots, n_{s-m/2}'$, obtenida de la anterior mediante la sustitución de m ceros por $m/2$ unidades. Construimos, como en el caso anterior, la partición del cubo B^{n+1} en caras y después ciertas $m/2$ caras de dimensión 1 se partirán en m caras de dimensión 0.

1.36. 1) EVALUACIÓN SUPERIOR. INDICACIÓN. Examinar $N = \{\widetilde{\alpha}: \widetilde{\alpha} \in B^n \; \| \widetilde{\alpha} \|$ es par$\}$. EVALUACIÓN INFERIOR. Sea $N \subseteq B^n$, $|N| < 2^{n-1}$. Existe (véase 1.31, 1.34) una partición del cubo B^n en caras no intersecadas de dimensión 1. El número de caras en tal partición es igual a 2^{n-1}. De esto se deduce que aunque sea una de las caras no contiene vértices de N. 3) INDICACIÓN. Examinar $N = \{\widetilde{\alpha}: \widetilde{\alpha} \in B^n, \| \widetilde{\alpha} \| \equiv 0 \pmod 3\}$ o $N_1 = \{\widetilde{\alpha}: \widetilde{\alpha} \in B^n, \nu(\widetilde{\alpha}) \equiv 3 \pmod 4\}$. 4) EVALUACIÓN INFERIOR. Observaremos que para que el vértice $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se contenga en una cara $(n-2)$-dimensional con el código $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ (véase la resolución del problema 1.31) que tiene coordenadas de valor en los lugares de orden i y j, es necesario que $\alpha_i = \gamma_i$, $\alpha_j = \gamma_j$. Sea $N \subseteq B^n$, $|N| = m$ un conjunto tal, que en cada cara $(n-2)$-dimensional se contiene el vértice $\widetilde{\alpha}$ de N. Examinemos la matriz binaria M, cuyas filas son vectores de N. De la observación anterior se deduce que para cada par de números (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$ y cualquier par (σ, τ), $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$ tiene que haber una fila $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal, que $\alpha_i = \sigma$, $\alpha_j = \tau$. De esto se deduce que cualesquiera dos columnas de la matriz M son incomparables de par en par. El número de colecciones binarias de longitud m incomparables de par en par no sobrepasa a $\binom{m}{[m/2]}$. De aquí que $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$. EVALUACIÓN SUPERIOR. Sea m el menor entero tal, que $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$. Construimos una matriz binaria M con m filas y n columnas incomparables de par en par. Añadimos a la matriz M las filas $\widetilde{0}$ y $\widetilde{1}$. Entonces la colección de vectores-filas obtenida será «punzante» para el conjunto de todas las caras $(n-2)$-dimensionales del cubo B^n.

1.37. Para $n=1, 2$ la afirmación es evidente. Supongamos que $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_{2^n}$ es ciclo en B^n. Sea $\tilde{\beta}\sigma$, donde $\tilde{\beta} \in B^n$, $\sigma \in \{0, 1\}$ es el vector de longitud $n+1$, cuyas primeras n coordenadas coinciden con las respectivas coordenadas de la colección $\tilde{\beta}$, y la $(n+1)$-ésima coordenada es igual a σ. Entonces la sucesión $\tilde{\alpha}_1 0, \tilde{\alpha}_2 0, \ldots, \tilde{\alpha}_{2^n} 0, \tilde{\alpha}_{2^n} 1, \ldots, \tilde{\alpha}_2 1, \tilde{\alpha}_1 1$ es un ciclo en B^{n+1} que contiene todos sus vértices.

1.39. 1) Sí. 2) No. 3) Sí. 4) Sí.

1.43. INDICACIÓN. Observar que si las colecciones $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ y $\tilde{\sigma}' = (\sigma_1', \ldots, \sigma_n')$ son comparables, entonces una de las sumas $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma_i'} a_i$ es mayor que la unidad en su valor absoluto.

§ 2

2.1. $2^{2^{n-1}}$ $(n \geqslant 1)$. **2.2.** 2 $(n \geqslant 1)$. **2.3.** $C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{k-1}$ donde $m = 2^n$ $(n \geqslant 1, k \geqslant 1)$. **2.7.** 2^{n+1} $(n \geqslant 1)$. **2.10.** 1) De 5 maneras. 2) De 9 maneras.

2.12. 1) BASE DE INDUCCIÓN. Si la complejidad de la fórmula es igual a la unidad (sobre el conjunto de enlaces $M = \{\neg, \&, \vee, \rightarrow\}$), entonces esta fórmula tiene una de las formas siguientes: $(\neg x)$, $(x \& y)$, $(x \vee y)$, $(x \rightarrow y)$ (con exactitud hasta la designación de las variables). Por eso la afirmación es evidente para las fórmulas de complejidad 1. PASO INDUCTIVO. Sea la afirmación válida para todas las fórmulas (sobre el conjunto de enlaces M) que tienen una complejidad no mayor del número l $(l \geqslant 1)$. Tomemos una fórmula arbitraria $\mathfrak{A}$ (sobre M), cuya complejidad es igual a $l+1$. Consideremos, para la determinación, que $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$ (los demás casos se examinan en forma analógica). Es evidente que el enlace $\vee$ que se encuentra entre las fórmulas $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ tiene un índice igual a 1. Siguiendo, si el enlace en la fórmula $\mathfrak{B}$ (o $\mathfrak{C}$), examinado como enlace de la fórmula $\mathfrak{B}$ (respectivamente, de $\mathfrak{C}$), tiene el índice mayor que 1, entonces en la fórmula $\mathfrak{A}$ el índice de este enlace no puede ser disminuido. Si en enlace en $\mathfrak{B}$ (o $\mathfrak{C}$) tiene un índice igual a 1, entonces en la fórmula $\mathfrak{A}$ su índice será igual a 2 (el índice se aumenta porque en la fórmula $\mathfrak{A}$ ante la subfórmula $\mathfrak{B}$ hay un paréntesis izquierdo).

2.15. 3) (0 1 0 0). **2.18.** 3) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ **2.19.** 2) $f_1(x, y) \equiv 0$, $f_2(x, y) = x$, $f_3(x, y) = y$, $f_4(x, y) = x \oplus y$. **2.20.** 1) $((x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y))$. 2) $((x \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)))$. **2.21.** 1) $((x \mid y) \mid (x \mid y))$. 2) $((x \vee (x \vee y)) \sim y)$. 3) No se puede.

2.22. 2) La función que se realiza con una fórmula sobre el conjunto $\{\rightarrow\}$ toma el valor 1 no menos que en la mitad de las colecciones de valores de los argumentos. La función xy no satisface esta condición.

2.23. Hablando en general, no se puede. Ejemplo: $S = \{\neg\}$, *la función* x no es realizable sobre la S fórmula de profundidad par.

2.24. Si sobre el conjunto S se realizan sólo funciones constantes, entonces la afirmación es evidente. Supongamos que sobre S es realizable cierta función $f(\tilde{x}^n) \not\equiv \text{const}$. Identificando todas las variables en la función $f(\tilde{x}^n)$ y en la fórmula que la realiza, obtenemos la función $\varphi(x)$ (y la fórmula $\mathfrak{A}(x)$ que le corresponde). Hay que examinar los tres casos siguientes: a) $\varphi(x)$ es una constante, b) $\varphi(x) = x$ y c) $\varphi(x) = \bar{x}$. Al obtener (en los casos a) y b)) una fórmula que realiza la función x (y que tiene una profundidad de no menos de 1), podemos construir para cada función concreta, que se realiza con una fórmula sobre S, una fórmula que tenga una profundidad tan grande como se quiera. Sea $\varphi(x) \equiv 0$. Entonces se encontrará una colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ en la que la función f es igual a 1. Sustituiremos todas las x_i que corresponden a $\alpha_i = 1$ por x, y las demás x_i por $\varphi(x) \equiv 0$. Obtendremos la función $\psi(x) = x$. Si $\varphi(x) \equiv 1$, entonces de manera análoga se obtiene la función $\bar{x}$.

2.26. 2) $x \vee y = (x \to y) \to y$. 3) $x \sim y = (x \to y) \mathbin{\&} (y \to x)$.

2.30. 2) Hablando en general, no se puede. Ejemplo: $\mathfrak{A} = y_2 \to x$, esta fórmula no es idénticamente verdadera; sin embargo la fórmula $S^{x}_{y_1 \to y_2}\, \mathfrak{A} \mid = y_2 \to (y_1 \to y_2)$ es idénticamente verdadera.

2.31. 1) Si se supone que $f(0, 0) = 0$, entonces tomando $x = y = z = 0$ tenemos $f(f(0, f(0, 0)), f(f(0, 0), f(0, 0))) = f(f(0, 0), f(0, 0)) = 0$, lo que contradice a las condiciones del problema. Así que $f(0, 0) = 1$. Suponiendo además que $f(0, 1) = 0$ tenemos (con $x = y = z = 0$) que $f(f(0, f(0, 0)), f(f(0, 0), f(0, 0))) = f(f(0, 1), f(1, 1)) = f(0, f(1, 1))$ y, según las condiciones del problema, se tiene que cumplir la relación $f(1, 1) = 0$. Pero, examinando después $x = 0$, $y = z = 1$, vemos que $f(f(0, f(1, 1)), f(f(0, 1), f(0, 1))) = f(f(0, 0), f(0, 0)) = 0$, y eso contradice el enunciado del problema. Así que $f(0, 1) = 1$. Finalmente, suponemos que $f(1, 1) = 0$. Haciendo $x = y = 0$ y $z = 1$ obtenemos $f(f(0, f(0, 1)), f(f(0, 0), f(0, 1))) = f(f(0, 1), f(1, 1)) = f(1, 0)$. Tomando en cuenta las condiciones del problema tenemos $f(1, 0) = 1$. Pero entonces $f(f(1, f(1, 1)), f(f(1, 1), f(1, 1))) = f(f(1, 0), f(0, 0)) = f(1, 1) = 0$ lo que contradice las condiciones del problema. En consecuencia, también $f(1, 1) = 1$. Así que $f(0, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = 1$. Eso quiere decir que $f(x, y) = x \to y$, o bien $f(x, y) \equiv 1$. Luego las equivalencias a) — e) se comprueban directamente (por ejemplo utilizando las equivalencias básicas). 2) No, no se deducen. Es suficiente examinar la función $f(x, y) = x \sim y$.

§ 3

3.6. 2^n. 3.7. 1) 2^{n-1}; 2) $2^n - 2$; 3) 2^{n-1}. 3.8. 1) $k \cdot l$; 2) $k \cdot 2^m + l \cdot 2^n - k \cdot l$; 3) $k(2^m - l) + l(2^n - k)$. 3.9. 2) $f_1^1(\widetilde{x^3}) = x_2 x_3$, $f_0^2(\widetilde{x^3}) = \bar{x}_1$, $f_{01}^{1,\,3}(\widetilde{x^3}) = x_2$. 3.11. $2^{(3/4) \cdot 2^n}$. 3.12. 12. 3.16. 4. 3.18. $\binom{n}{r}$. 3.19. $2^{S_n^r} - 2^{S_n^{r-1}}$ donde $S_n^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$. 3.20. 0, si k es impar, $\binom{2^{n-1}}{k}$ si k es par. 3.23. $\widetilde{\beta}_P = (1101111011100111)$. 3.26. $f(\widetilde{x^n}) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$.

3.29. INDICACIÓN. Observar que con $k = 1$ el polinomio se convierte en unidad en 2^{n-1} colecciones. Utilizando la fórmula de descomposición, hacer la demostración con inducción por k.

3.30. 1) $2^{n-k}+2^k-2$; 2) $\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)$.

3.31. Para $n=1$ la afirmación es evidente. Paso inductivo de $n-1$ a n. Si $l \leqslant 2^{n-1}$, entonces por suposición inductiva existe un polinomio $P(\widetilde{x}^{n-1})$ de longitud $\leqslant n-1$ para el cual $|N_P|=l$. Entonces el polinomio $x_n P(\widetilde{x}^{n-1})$ se convierte en 1 en l vértices del cubo B^n. Si $2^{n-1}<l\leqslant 2^n$, entonces examinaremos el polinomio $P(\widetilde{x}^{n-1})$ que se convierte en unidad en 2^n-l vértices del cubo B^{n-1}. Entonces el polinomio $x_n P(\widetilde{x}^{n-1})\oplus 1$ es el buscado.

§ 4

4.4. INDICACIÓN. Supongamos que $K=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, $L=x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}$ y $K^\circ L$ es la c.e. obtenida de K al tachar aquellas letras $x_i^{\alpha_i}$ para las cuales $\alpha_i \neq \beta_i$. Observemos que cada implicante de la función $f(\widetilde{x}^n)$ se puede presentar en la forma $K^\circ L$, en donde K y L son c.e. adecuadas de la f.n.d. perfecta de la función $f(\widetilde{x}^n)$, y puede ser que sean coincidentes.

4.5. 1) 2^{n-1}; 2) 2^{n-1}; 3) $3\cdot 2^{n-3}$; 4) 2^{n-2}; 5) $k+(n-k)(n-k-1)$.

4.6. 1) $\binom{l}{k}\binom{n-l}{k+m-l}$.

4.8. 2) $\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3x_4$.

4.9. 1) $2^{2^n-2^{n-r}}$; 2) $2^{2^n-2^{n-r}}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}2^{-i\cdot 2^{n-r}}$.

4.11. 1) $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_4$.

4.12. 1) $\bar{x}_1x_3$, x_1x_2, $\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$, $\bar{x}_2x_3x_4$.

4.13. INDICACIÓN. Mostrar que ningunas dos colecciones propias de dos implicantes nucleares diferentes no son adyacentes; utilizar el hecho de que el conjunto $N\subset B^n$ tal que $|N|>2^{n-1}$, siempre contiene una arista (véase 1.44).

4.14. 1) 2^{n-1}; 2) 2^{n-3}; 3) 0; 4) 2^{n-2}; 5) k.

4.15. $2^{2^n-2^{n-r}}(1-(1-2^{-r})^{2^{n-r}})$.

4.18. 1) 1; 2) $5^{2^{n-r}}$; 3) $5^{2^{n-1}}$; 4) 1.

4.22. Una. Mostrar que todas las implicantes simples son nucleares.

4.23. INDICACIÓN. Hacer la inducción por n, utilizando la descomposición (3) de la función por las variables.

4.24. 1) Para dos funciones. 2) Para 2^{n+1} funciones.

4.25. Por ejemplo $k=n2^n-1$.

4.27. 0 si $k\neq 0$, $k+m<n$; $\binom{n}{m}$ si $k=0$; $\binom{n}{k}$ si $k+m=n$. 2) En dos si n es par y en cuatro si n es impar.

§ 5

5.2. 1) x_3; 2) x_1; x_2 3) x_4; 4) x_1. 5.4. 1) x_2; x_3; 2) x_1, x_3; 3) x_3. 5.7. m. 5.8. 1) x_1, x_2, x_3, x_4; 2) x_1, x_2, x_3; 3) x_3, x_4; 4) x_1, x_2, x_4.

5.10. 1) $n \geqslant 3$; 2) con ningún n; 3) $n \geqslant 3$; 4) con n pares; 5) con $n = 4k - 2$, $k = 1, 2, \ldots$

5.12. 2) $|P_2^c(X^3)| = 218$.

5.13. INDICACIÓN. Del enunciado del problema deducir que existen unas colecciones $\widetilde{\alpha}'$, $\widetilde{\beta}'$, $\widetilde{\gamma}'$ tales, que $\rho(\widetilde{\alpha}', \widetilde{\beta}') = \rho(\widetilde{\beta}', \widetilde{\gamma}') = 1$. Supongamos que $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}'$ se diferencian en el i-ésimo, y $\widetilde{\beta}'$ y $\widetilde{\gamma}'$ en el j-ésimo lugar de orden. Entonces las variables x_i y x_j son sustanciales.

5.14. INDICACIÓN. Es suficiente mostrar que si x_i o $\bar{x}_i$ entran en cierta implicante simple K de la función f, entonces x_i es una variable sustancial. Al tachar x_i^σ de K eso lleva a la c. e. K', que no es implicante. De esto se deduce la existencia de la colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\sigma}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ tal, que $K'(\widetilde{\alpha}) = 1$, pero $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Al mismo tiempo $f(\widetilde{\alpha}^i) = 1$, puesto que $K(\widetilde{\alpha}^i) = 1$. De esto se deduce la sustancialidad de x_i.

5.15. INDICACIÓN. Si x_i entra explícitamente en el polinomio $P(\widetilde{x}^n)$, entonces al último se le puede escribir en la forma $x_iQ \oplus R$, donde Q y R son polinomios no dependientes de x_i y $Q \not\equiv 0$. Sea la colección $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ tal, que $Q(\widetilde{\alpha}) = 1$; entonces $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = x_i \oplus R(\widetilde{\alpha})$. Ahora la afirmación se deduce del problema 5.1, 1).

5.16. No es cierto. INDICACIÓN. Examinar $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$.

5.17. INDICACIÓN. Supongamos que $f(\widetilde{x}^n)$ satisface la condición. Entonces existe tal entero i $(1 \leqslant i \leqslant n)$: que para cualesquiera $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ tales que $\widetilde{\alpha} \in B_i^n$, $\widetilde{\beta} \in B_{i-1}^n$, $f(\widetilde{\alpha}) \neq f(\widetilde{\beta})$. La afirmación se deduce ahora de que para todo i en $B_{i-1}^n \cup B_i^n$ hay aristas de cualquiera de las i direcciones.

5.18. INDICACIÓN. Véase 5.13.

5.19. Si $f(\widetilde{x}^n)$ se expresa con un polinomio de grado mayor que la unidad, entonces sin limitación de generalidad se le puede presentar en la forma $x_1x_2P_1 \oplus x_1P_2 \oplus x_2P_3 \oplus P_4$, donde $P_1 \not\equiv 0$ y P_1, P_2, P_3, P_4 dependen de las variables $x_3, \ldots, x_n$. Sea $\widetilde{\alpha}$ $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ una colección tal, que $P_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Entonces el componente $f_{\alpha_3 \ldots, \alpha_n}^{3, \ldots, n}(\widetilde{x}^n)$ tiene la forma $x_1x_2 \oplus \lambda_1x_1 \oplus \lambda_2x_2 \oplus \lambda_3$ y, en consecuencia, este componente depende sustancialmente de x_1 y x_2. De esto se deduce que las tres colecciones buscadas se encontrarán en la cara $B_{\alpha_3 \ldots, \alpha_n}^{n;\, 3, \ldots, n}$.

Si $f(\widetilde{x}^n)$ se expresa con un polinomio de primer grado y depende sustancialmente de x_1 y x_2, entonces para cualquier colección $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ cualesquiera tres vértices en la cara $B_{\alpha_3 \ldots \alpha_n}^{n;\, 3, \ldots, n}$ son los buscados.

5.21. Supongamos lo contrario. Sin limitación de generalidad se puede considerar que entre todos los componentes del tipo $f_\alpha^i(\widetilde{x}^n)$ el componente $f_1^1(\widetilde{x}^n)$ es el que tiene el mayor número de variables sustanciales. Entonces la suposición es equivalente a que $f_1^1(\widetilde{x}^n)$ depende ficticiamente de cierta variable, por ejemplo de x_2, o sea que $f_1^1 = f_{11}^{1,\,2} = f_{10}^{1,\,2}$. Como x_1 es una variable sustancial se cumple aunque sea una de las relaciones $f_{10}^{1,\,2} \neq f_{00}^{1,\,2}$, $f_{11}^{1,\,2} \neq f_{01}^{1,\,2}$. Supongamos, por ejemplo, que $f_{11}^{1,2} \neq f_{01}^{1,2}$. Entonces la función

$$f_1^2 = \bar{x}_1 f_{01}^{1,2} \vee x_2 f_{11}^{1,2}$$

depende sustancialmente de x_1 y de todas las variables sustanciales de la subfunción $f_{11}^{1,2} = f_1^1$. Esto contradice a que f_1^1 tiene el mayor número de variables sustanciales.

5.22. 1) Es cierto. Se deduce del problema anterior. 2) No es cierto. INDICACIÓN. Examinar $f(\widetilde{x^3}) = x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$ y las variables x_1, x_2.

5.23. 1) $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$; 2) 1; 3) x_1, x_2; 4) $x_2 \overline{\rightarrow x_1}$, $x_1 \sim x_2$, 1. 5.25. 6. 5.26. Se puede; INDICACIÓN. Examinar la función $x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_4 \vee x_2x_3x_4$.

5.27. Los números de las coordenadas de las colecciones $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$ se pueden dividir en los cuatro grupos siguientes:

$$A_1 = \{i: \alpha_i = \beta_i = \gamma_i\}, \quad A_2 = \{i: \alpha_i = \beta_i, \beta_i < \gamma_i\},$$
$$A_3 = \{i: \alpha_i < \beta_i, \beta_i = \gamma_i\}, \quad A_4 = \{i: \alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 1\}.$$

Sean $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\gamma}) = \sigma$, $f(\widetilde{\beta}) = \widetilde{\sigma}$. Entonces si $f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{1}) = \sigma$, suponemos que $x_i = x$, si $i \in A_1 \cup A_2$; que $x_i = y$, si $i \in A_3 \cup A_4$. Si $f(\widetilde{0}) = \sigma$, $f(\widetilde{1}) = \widetilde{\sigma}$, entonces suponemos que $x_i = x$ si $i \in A_i$; que $x_i = y$ si $i \in A_2$; que $x_i = z$ si $i \in A_3 \cup A_4$. Si $f(\widetilde{0}) = \widetilde{\sigma}$, entonces suponemos que $x_i = x$ si $i \in A_1 \cup A_2$; que $x_i = y$ si $i \in A_3$; que $x_i = z$ si $i \in A_4$. La dependencia sustancial de las funciones obtenidas se deduce del problema 5.13.

5.29. $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$, $\sigma \in \{0, 1\}$ con $n \geqslant 2$; $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \vee \vee x_3^{\sigma_3} x_1^{\sigma_1}$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, 3}$ con $n = 3$; $x_1^{\sigma} x_2^{\bar{\sigma}}$, $x_1^{\sigma} \vee x_2^{\bar{\sigma}}$ con $n = 2$.

5.30. La función obtenida de $f(\widetilde{x^n})$ mediante la identificación de las variables x_i, x_j tiene la forma $x_i f_{11}^{i,j} \vee \bar{x}_i f_{00}^{i,j}$. De la condición se deduce que por lo menos uno de los componentes $f_{11}^{i,j}$, $f_{00}^{i,j}$ no es idénticamente igual a cero.

5.33. INDICACIÓN. Por lo menos una de las funciones f, g se convierte en unidad en un número impar de colecciones.

5.34. INDICACIÓN. Véase 5.30.

Capítulo II

§ 1

1.2. No, no se deduce. Se puede poner (por definición) para cualquier conjunto M de P_2 (incluyendo también el vacío) $[M] = P_2$, o sea introducir una operación tal de clausura. Entonces las relaciones 1) —3) del problema 1.1 se cumplirán evidentemente, y la relación 4) no se cumplirá.

1.3. 1) Sí. 2) No. 3) No. 4) Sí. 5) Sí. 6) No. 7) No.

1.4. 1) $\{1\}$. 2) $\{0, 1, x_1, \bar{x}_1\}$. 3) $\{x_1, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 \vee x_3\}$; 4) $\{1, x_1, x_1 \sim x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

1.5. Sea $f(\widetilde{x^n})$ una función de una clase cerrada que depende sustancialmente de todas sus variables ($n \geqslant 2$). Entonces la función $f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_2, \ldots, x_n) = f(f(y_1, y_2, \ldots, y_n), x_2, \ldots, x_n)$ depende sustancialmente de todas las $2n-1$ variables (aquí: $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \cap \{x_2, \ldots, x_n\} = \phi$). Después en la función f_1 en lugar de la variable y_1 se puede poner la función $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ y obtener una función dependiente sustancialmente de $3n-2$ variables, etc.

1.6. $[0]$, $[1]$, $[x]$, $[0, 1]$, $[0, x]$, $[1, x]$, $[x, \bar{x}]$, $[0, 1, x]$, $[0, 1, x, \bar{x}]$.

1.7. 1) Sí. 2) No, no siempre. 3) No, no siempre (son exclusiones sólo todos los P_2 y su complemento, la clase cerrada vacía ϕ).

1.8. 3) $(x \to y) \to y = x \vee y$, $\bar{x} = \overline{x \oplus x \oplus x}$. 4) De la segunda función mediante la identificación de todas las variables se obtiene la negación. 5) 5) $m(x, y, 0) = xy$, $x^0 \oplus 0 = \bar{x}$.

1.9. 1) $K_1 \subseteq K_2$ pero puede haber también una inclusión rigurosa $K_1 \subset K_2$. 2) $K_1 \not\supseteq K_2$; por ejemplo con $M_1 = \{xy, \bar{x}\}$ y $M_2 = \{\bar{x}\}$ tenemos $K_1 = [xy]$, y $K_2 = P_2 \setminus [\bar{x}]$. 5) Véase 1.9, 2).

1.10. 2) $M_1 = [x, 0]$, $M_2 = [x, 1]$. 3) $M_1 = [\bar{x}, 0]$, $M_2 = [0]$. 5) Véase 1.10, 2).

1.11. 1) $\{0, \bar{x}\}$. 2) $\{1, x \oplus y\}$. 3) $x \vee y$, $x \cdot y \cdot z\}$. 4) $\{x \oplus 1, m(x, y, z)\}$ puesto qe $x \oplus y \oplus z = m(m(x, y, \bar{z}), m(x, \bar{y}, z), m(\bar{x}, y, z))$ y en la clase cerrada $[m(x, y, z)]$ cualquier función que dependa sustancialmente de un argumento es igual a la función idéntica.

1.12. Sea M una clase precompleta (en P_2). Eso quiere decir que $[M] \neq P_2$ pero con cualquier función $f \in P_2 \setminus M$ tenemos $[M \cup \{f\}] = P_2$. Si $[M] \neq M$, entonces se podrá encontrar una función g de $[M] \setminus M$ tal que $[M] = [M \cup \{g\}] = P_2$. Resulta una contradicción.

1.13. Si $M_2^1 = M^1$, entonces la afirmación es evidente. Sean $M_2^1 \neq M^1$. Supongamos que $M_1^1 = M_2^1$. Como M_1 y M_2 son clases cerradas y $M_1^1 \subset M_1$ y $M_2^1 \subset M_2$, entonces cualquiera que sea la función f de M_1 (o de M_2), poniendo en el lugar de sus variables funciones de M_1^1 ($= M_2^1$), dependientes de la misma variable x, obtenemos de nuevo una función de M_1^1. Pero esto quiere decir que añadiendo a M_1 una función arbitraria g de $M_2 \setminus M_1$ ($\neq \phi$) tenemos $[M_1 \cup \{g\}] \cap M^1 = M_1^1 \neq M^1$, y eso contradice la precomplitud de la clase M_1 en la clase M.

1.14. 1) $[0, 1, x]$, $[\bar{x}]$. 2) $[0]$, $[1]$. 4) $[0, x]$, $[x \vee y]$.

1.15. 1) No, no es. 3) No, no es.

1.16. Si $x \in M$ entonces la afirmación es evidente. Sea $x \notin M$. Según la definición de la operación de superposición la sustitución de una función idéntica se puede considerar como una transformación que se hace sólo en el conjunto M en concordancia con la operación de superposición. Eso quiere decir que $[M \cup \{x\}] \subseteq M \cup \{x\}$. La inclusión inversa se deduce de las propiedades de la operación de clausura.

1.17. La afirmación se deduce de que la función $x \mid y$ forma en P_2 un sistema completo.

1.18. Sea $f(\widetilde{x^n}) \not\equiv$ const. Si identificando todas las variables en la función $f(\widetilde{x^n})$ obtenemos una función idéntica o una negación, entonces la afirmación es evidente. Sea $f(x, \ldots, x) \equiv$ const. Para que esté todo determinado pongamos que $f(x, \ldots, x) \equiv 0$. Como $f(\widetilde{x^n}) \not\equiv$ const, pues existe una colección $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal, que $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Pongamos que $x_i = x$ si $\alpha_i = 1$ y que $x_i = y$ si $\alpha_i = 0$. Entonces de la función f obtendremos la función $g(x, y)$ que satisface las condiciones: $g(0, 0) = g(1, 1) = 0$, $g(1, 0) = 1$. Si $g(0, 1) = 1$, entonces $g(x, y) = x \oplus y$; si $g(0, 1) = 0$ entonces $g(x, y) = \overline{x \to y}$. Es evidente que $|x \oplus y| \ni x$ y $|\overline{x \to y}| \ni x$.

1.20. Como el conjunto P_2 es infinito-numerable, pues el conjunto de todos sus subconjuntos finitos también es infinito-numerable. Por eso la potencia de todas las clases cerradas en P_2 que tienen sistemas completos finitos no es más que numerable.

1.21. Si una clase cerrada en P_2 es diferente de los conjuntos $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$: entonces contiene una función idéntica (véase el problema 1.18); consecuentemente no se le puede ampliar hasta una base.

1.22. Sea $\mathcal{P}$ un sistema completo en M. Tomemos $\mathcal{P}$ la función arbitraria f_1. Ella no pertenece a ninguna de las clases $K_1, \ldots, K_{r_1}$ precompletas en M. Después eligiremos en $\mathcal{P}$ la función f_2 que no pertenece aunque sea a una de las clases precompletas que quedan, etc. El número de funciones que se obtienen con este proceso en el sistema $\mathcal{P}'$ no es mayor que el número de clases precompletas en M. El sistema $\mathcal{P}'$ es completo en M puesto que en el caso contrario se ampliaría hasta alguna clase precompleta, y al construirlo, el sistema $\mathcal{P}'$ no se contiene totalmente en ninguna de las clases precompletas en M. Si $\mathcal{P}$ es una base, entonces en la construcción del sistema respectivo $\mathcal{P}'$ deben de ser utilizadas todas las funciones de $\mathcal{P}$ pues de otra manera llegaríamos a la contradicción con la irreducibilidad del sistema $\mathcal{P}$.

1.23. La demostración se puede hacer con inducción por el número de entradas del enlace $\to$ en las fórmulas que realizan las funciones de la clase cerrada $[x \to y]$. Si en la fórmula hay una entrada del enlace $\to$, entonces la fórmula (con exactitud hasta la designación de las variables) tiene una de las formas siguientes: $x \to x$ y $x \to y$. En este caso la afirmación es evidente. Luego, si $\mathfrak{A} = f_1 \to f_2$, entonces hay que examinar dos posibilidades.

(a) La fórmula que corresponde a la función f_2 tiene aunque sea una entrada del enlace $\longrightarrow$. Entonces $f_2 = y_j \vee \varphi_2(\widetilde{y^m})$ y $\mathfrak{A} = f_1 \vee f_2 = y_j \vee (f_1 \vee \varphi_2)$.

(b) La fórmula que responde a la función f_2 representa en sí una variable (digamos y). Entonces $\mathfrak{A} = f_1 \vee y$.

1.24. Utilicemos la inducción por el número de entradas del enlace $\to$. Si el enlace $\to$ entra una vez, entonces tendremos $x \to y$, y la afirmación será evidente. Sea $\mathfrak{A} = f_1(\widetilde{x^n}) \to f_2(\widetilde{x^n})$ y que la función f que responde a la fórmula $\mathfrak{A}$ depende sustancialmente de no menos que de dos variables. Si f_2 satisface la condición del problema, entonces $|N_{f_2}| > 2^{n-1}$ y $|N_f| \geqslant |N_{f_2}| > 2^{n-1}$. Sea ahora que f_2 depende sustancialmente de una variable. Supongamos, para que esté todo determinado, que $f_2 \equiv x_1$ (f_2 no puede ser igual a la negación de la variable, puesto que $\bar{x} \notin [x \to y]$). Con esta suposición $f = f_1 \vee x_1$. Es evidente que $f(1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 1$. Si fuese $f(0), x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$, entonces $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv x_1$ y esto contradice a que la función $f(\widetilde{x^n})$ depende sustancialmente de no menos que de dos variables. En consecuencia $f(0, x_2, \ldots,$

$\ldots, x_n) \not\equiv 0$ y $|N_f| > 2^{n-1}$. Por fin, si la función f_2 depende de todas las variables $x_1, \ldots, x_n$ insustancialmente, entonces $f_2 \equiv 1$, pero $f \equiv 1$, o sea que también depende insustancialmente de todas las variables $x_1, \ldots, x_n$.

1.25. Sea K una clase precompleta en P_2. Supongamos, que $x \notin K$. En virtud del problema 1.16 la añadidura de la función x a la clase K no lleva a un sistema completo en P_2 (pues $[K \cup \{x\}] = K \cup \{x\} \not\ni x \mid y$). Esto contradice la precomplitud de la clase K.

§ 2

2.1. 2) No. 5) Sí. 2.3. 1) $xz \vee yt$. 3) $xy \oplus y \oplus 1$.

2.4. Emplear inducción por el número de entradas de los enlaces del conjunto $\{0, 1, \neg, \&, \vee\}$ en la fórmula $\mathfrak{A}$.

2.6. Supongamos que $i=1$ o sea que la función $f(\widetilde{x^n})$ dependa sustancialmente de la variable x_1. Entonces se podrán encontrar las colecciones $\widetilde{\alpha}=(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $\widetilde{\alpha}'=(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tales, que $f(\widetilde{\alpha}) \neq f(\widetilde{\alpha}')$. Como $f^* \times \times (1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n) = \overline{f}(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $f^*(0, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n) = \overline{f}(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, entonces $f^*(1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n) \neq f^*(0, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, o sea que x_1 es una variable sustancial de la función $f^*(\widetilde{x^n})$.

2.8. 1) 0. 2) 2^{n-1}. 3) 1. 2.9. 1) Sí. 4) No. 5) Sí.

2.10. Emplear la descomposición: $f(\widetilde{x^n}) = \overline{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.11. Si $f(\widetilde{x^n})$ es una función autodual, entonces en cualesquiera dos colecciones contrapuestas de valores de las variables ella toma valores opuestos. En consecuencia, el número de colecciones en las que la función autodual $f(\widetilde{x^n})$ toma el valor 1 es igual al número de pares de colecciones contrapuestas (de longitud n), o sea $|N_f| = 2^{n-1}$.

2.13. $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_n^i 2^{2^{n-1-i}}$, $n \geqslant 1$.

2.14. $x \oplus y \oplus z$, $x \oplus y \oplus z \oplus 1$, $m(x, y, z)$, $m(x, y, z) \oplus 1$, $m(x, y, z) \oplus x \oplus y$, $m(x, y, z) \oplus x \oplus y \oplus 1$, $m(x, y, z) \oplus x \oplus z$, $m(x, y, z) \oplus x \oplus z \oplus 1$, $m(x, y, z) \oplus y \oplus z$, $m(x, y, z) \oplus y \oplus z \oplus 1$. Con facilidad se comprueba que $m(x, y, \overline{z}) = m(x, y, z) \oplus x \oplus y$, $m(x, \overline{y}, \overline{z}) = m(x, y, z) \oplus \oplus y \oplus z \oplus 1$, $m(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = m(x, y, z) \oplus 1$.

2.15. 1) Con $n = 3$. 2) Con $n = 4m + 3$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ 3) Con ningún $n \geqslant 2$ la función no es autodual pues $f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{1})$. 4) Con $n \geqslant 3$ impares.

2.16. Sólo con n impares.

2.17. 3) $g(\widetilde{y^5}) = y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 \oplus y_5 \in S$, $m(\overline{x}_1, x_3, f) \in S$ y $m(x_2, x_3, f) \in S$. Si $f \in S$. Sustituyendo en $g(\widetilde{y^5})$ en el lugar de y_1 la función $m(\overline{x}_1, x_3, f) = \overline{x}_1 f \oplus x_3 f \oplus \overline{x}_1 x_3$; en el lugar de y_2 la función $m(x_2, x_3, f) = x_2 f \oplus x_3 f \oplus x_2 x_3$; en el lugar de la variable y_3 la variable x_2, y en el lugar de y_4 y de y_5 las variables x_4 y x_5 respectivamente, obtendremos $\overline{x}_1 f \oplus x_3 f \oplus \oplus \overline{x}_1 x_3 \oplus x_2 f \oplus x_3 f \oplus x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 = \overline{x}_1 f \oplus \overline{x}_1 x_3 \oplus \overline{x}_2 f \oplus x_2 x_3 \oplus x_4 \oplus \oplus x_5$.

2.18. 1) Tenemos $\overline{f(\widetilde{x}^n) \vee f^*(\widetilde{x}^n)} = \overline{f(x_1, \ldots, x_n) \cdot f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} \equiv \text{const}$. Esta constante no puede ser 0, puesto que en el caso contrario se tiene que cumplir la relación $f(\widetilde{x}^n) \equiv 1$. Por eso $f(x_1, \ldots, x_n) \cdot f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \equiv 0$. Partiendo de la igualdad $|N_f| = |N_{f^*}|$, deducimos que cada una de las funciones $f(\widetilde{x}^n)$, $f^*(\widetilde{x}^n)$ y $f'(\widetilde{x}^n) = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ tiene un número de ceros igual al número de unidades, o sea, $|N_f| = |N_{f^*}| = |N_{f'}| = 2^{n-1}$. En consecuencia, en virtud de la relación $f \cdot f' \equiv 0$, $f(\widetilde{\alpha}^n) = 0$ si, y sólo si, $f'(\widetilde{\alpha}^n) = 1$. En consecuencia, $f(\widetilde{x}^n) \equiv f^*(\widetilde{x}^n)$.

2.19. 3) $(x \downarrow x) \to (x \oplus \bar{x}) = 1$.

2.20. Sea $f(\widetilde{x}^n)$ una función no autodual y todas sus n variables ($n \geqslant 3$) sustanciales. De la no autodualidad de f se deduce que existen dos colecciones contrapuestas, $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\widetilde{\alpha}' = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$, en las que la función f toma los mismos valores. Primero suponemos que $f(\widetilde{0}^n) \neq f(\widetilde{1}^n)$ y en consecuencia $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}^n$ y $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{1}^n$. Examinemos la función $g(x, y)$ la que se obtiene de $f(\widetilde{x}^n)$ como resultado de la sustitución por x de toda variable x_i tal, que $\alpha_i = 0$ y de la sustitución por y de cada una de las variables que quedan. Tenemos que $g(0, 0) \neq g(1, 1)$ y $g(0, 1) = g(1, 0)$. Es evidente que $g(x, y) \notin S$. Supongamos ahora que $f(\widetilde{0}^n) = f(\widetilde{1}^n)$. Como $f(\widetilde{x}^n) \not\equiv \text{const}$ (pues depende sustancialmente de no menos que de tres variables), entonces se podrá encontrar una colección $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tal, que $f(\widetilde{\beta}) \neq f(\widetilde{0}^n)$. Partiendo de la colección $\widetilde{\beta}$ construimos la función $h(x, y)$: si $\beta_i = 0$, entonces en $f(\widetilde{x}^n)$ sustituimos a la variable x_i por x, si $\beta_i = 1$, entonces sustituimos a x_i por y. La función $h(x, y)$ satisface las siguientes relaciones: $h(0, 0) = h(1, 1) \neq h(0, 1)$. Es evidente que $h(x, y)$ depende sustancialmente de dos variables y es no autodual.

2.21. Véase el problema anterior.

2.22. No es difícil mostrar (véase el problema 2.14) que $m(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma) = x^{m(\alpha, \beta, \gamma)}$. Si $m(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, entonces $m(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma) = \bar{x}$. En consecuencia colocando en $m(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)$ en el lugar de x, y y z esta misma función $m(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)$ obtendremos $m(x, y, z)$, o bien una de las funciones $m(x, y, z) \oplus x \oplus y$, $m(x, y, z) \oplus x \oplus z$, $m(x, y, z) \oplus y \oplus z$. Si tenemos una de las tres últimas funciones, entonces a la función $m(x, y, z)$ la construimos fácilmente. Por ejemplo $m(x, y, m(x, y, z) \oplus x \oplus y) \oplus x \oplus y = m(x, y, z)$. Ahora mostraremos que de la función $m(x, y, z)$ se puede obtener una función que dependa sustancialmente de n ($\geqslant 4$) variables. Si n es impar y $n \geqslant 5$, entonces tenemos que $g_5(\widetilde{x}^5) = m(x_1, x_2, m(x_3, x_4, x_5))$, ..., $g_{2l+1}(\widetilde{x}^{2l+1}) = g_{2l-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{2l-2}, m(x_{2l-1}, x_{2l}, x_{2l+1}))$, ... Es fácil demostrar (con inducción por l) que cada una de estas funciones depende sustancialmente de todos sus argumentos. Para un n par, sea $n = 2l \geqslant 4$, la función correspondiente se obtiene, por ejemplo, de la función g_{2l+1} si ponemos $x_{2l-1} = x_2$. En la demostración de la dependencia sustancial de las funciones $g_n(\widetilde{x}^n)$ de todos los argumentos que entran en ellas, es útil tener en cuenta que la mediana $m(x, y, z)$ es igual a 1 sólo en aquellas colecciones que contienen no menos de dos unidades.

2.24. Hay que tomar una colección arbitraria $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de valores de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y comparar en esta colección el valor de las partes izquierda y derecha de la relación dada en el enunciado del problema. Es útil hacer diferencia en dos casos: (1) entre los valores de α_1, α_2, y α_3 hay no menos de dos ceros, (2) entre α_1, α_2 y α_3 hay por lo menos dos unidades.

2.25. 1) En la resolución del problema 2.22 se mostró como de $\overline{m(x, y, \overline{z})}$ o de $m(x, \overline{y}, \overline{z})$ se construye la mediana $m(x, y, z)$. Luego, $\overline{m(x, x, x)} = m(x, \overline{x}, \overline{x}) = \overline{x}$, y por eso (véase el problema 2.23, 1)) de $\overline{m(x, y, z)}$ (o de $m(x, \overline{y}, \overline{z})$) se puede construir la función $x \oplus y \oplus z$. Las funciones autoduales de un lugar ($\overline{x}$ y x) evidentemente se contienen en $[\overline{m(x, y, z)}]$ (y en $[m(x, \overline{y}, \overline{z})]$. Como se deduce del problema 2.12 no existen funciones autoduales que dependan sustancialmente de dos variables. Finalmente, empleando el problema anterior, deducimos que para la construcción de cualquier función autodual de $n \geqslant 3$ variables es suficiente tener todas las funciones autoduales de $n - 1$ variables (y también las funciones $m(x, y, z)$ y $x \oplus y \oplus z$ si $n = 3$). Si $n = 3$, entonces se puede emplear el resultado que fue formulado en el problema 2.14. (OBSERVACIÓN. El problema 2,14 se puede resolver empleando el resultado del problema 2.24 y la función $\overline{x}$, $x \oplus y \oplus z$ y $m(x, y, z)$.) 2) Sea $f(\widetilde{x}^n)$ una función autodual arbitraria; y sean todas sus variables sustanciales ($n \geqslant 3$). Mostremos que si $n \geqslant 4$ y $f(\widetilde{x}^n)$ no es función lineal (o sea que no es representable en la forma $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$, donde $\sigma \in \{0, 1\}$), entonces de $f(\widetilde{x}^n)$ mediante la operación de identificación de las variables se puede obtener una función autodual, no lineal, sustancialmente dependiente de tres variables. (Si f es una función lineal autodual, entonces para ella la afirmación análoga es evidente). Así, supongamos que $f(\widetilde{x}^n)$ es una función no lineal sustancialmente dependiente de $n \geqslant 4$ variables. De la no linealidad de la función f se deduce que en el polinomio de Zhegalkin que representa esta función habrá aunque sea un término no lineal. Supongamos, para la determinación, que en este término no lineal entra la variable x_1. Entonces $f = x_1\varphi_1(x_2, \ldots, x_n) \oplus \varphi_0(x_2, \ldots, x_n)$ y $\varphi_1 \not\equiv$ const. Tomemos la colección $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ en la que φ_1 se vuelve 0. Tomemos $f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Veamos dos casos. Primero supondremos que $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$. Como x_1 es una variable sustancial de la función f, pues habrá dos colecciones $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\gamma}$ vecinas por el primer componente y tales que $f(\widetilde{\beta}) \neq f(\widetilde{\gamma})$. Es evidente que estas dos colecciones son diferentes de las colecciones $\widetilde{1}$ y $(0, 1, \ldots, 1)$. Sustituyamos aquellas variables x_i que en las colecciones $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\gamma}$ son ceros por la variable y, y todas las demás variables, excluyendo a x_1, por z. Obtendremos la función $g(x_1, y, z)$ que satisface las relaciones: $g(0, 0, 1) = \sigma$, $g(1, 0, 1) = \overline{\sigma}$ y en virtud de la autodualidad de la función g, $g(1, 1, 0) = \overline{\sigma}$ y $g(0, 1, 0) = \sigma$. Si $g(1, 1, 1) = \sigma$ (y $g(0, 1, 1) = \sigma$), entonces $g(x_1, y, z) = m(\overline{x}_1, y, z) \oplus \sigma$; y si $g(1, 1, 1) = \overline{\sigma} = g(0, 1, 1)$, entonces $g(x_1, y, z) = m(x_1, y, z) \oplus \sigma$. Examinemos ahora el caso cuando no todos los $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son iguales a 1. Además, debido a la autodualidad de la función f, no todos los α_i son iguales a 0. Tomamos las colecciones $\widetilde{1}$ y $\widetilde{\delta} = (0, 1, \ldots, 1)$. Si $f(\widetilde{1}) = f(\widetilde{\delta})$ entonces las colecciones mencionadas anteriormente $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\gamma}$ son diferentes de $\widetilde{\delta}$ y de $\widetilde{1}$, y todo se reduce al primer caso. Si $f(\widetilde{1}) \neq f(\widetilde{\delta})$, entonces hacemos la identificación de las variables en la función

$f(\widetilde{x}^n)$ partiendo de las colecciones $(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Obtenemos cierta función autodual $h(x_1, y, z)$ que satisface las relaciones $h(\widetilde{1}) = \sigma$, $h(0, 1, 1) = \bar{\sigma}$, $h(0, 0, 1) = h(1, 0, 1)$. Si $h(0, 0, 1) = \sigma$, entonces $h(x_1, y, z) = m(x_1, \bar{y}, z) \oplus \bar{\sigma}$. Y si $h(0, 0, 1) = \bar{\sigma}$, entonces $h(x_1, y, z) = m(x_1, y, \bar{z}) \oplus \bar{\sigma}$.

Como de una función lineal mediante la operación de superposición se puede obtener solamente una función lineal, pues cualquier sistema $\mathcal{P}$ completo en S tiene que contener la función autodual no lineal $f(\widetilde{x}^n)$ de la que, como mostramos, se construye la función del tipo $m(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)$, donde α, β y γ pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$. Si $f(x, x, \ldots, x) = \bar{x}$, entonces $[f(\widetilde{x}^n)]$ contiene $\overline{m(x, y, z)}$ (véase el problema 2.14) y por eso $[f(\widetilde{x}^n)] = S$ (véase el problema anterior). Supongamos ahora que $f(x, x, \ldots, x) = x$, o sea que f conserva el 0 (y el 1). Entonces en $\mathcal{P}$ tiene que haber una función $f_1(\widetilde{x}^m)$ que no conserve el 0. Si f_1 es una función no lineal, entonces $[f_1] = S$. Si f_1 es una función lineal, entonces $[f, f_1] = S$ y $\{f, f_1\}$ es una base en S (la función f genera sólo funciones que conservan el 0, y la f_1, sólo funciones lineales).

2.26. 1) No se puede, puesto que $f \in S$, y $g \notin S$. 2) Se puede.

2.27. El mayor n es igual a 4.

2.28. Hay dos tales funciones: $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus \sigma$, donde $\sigma \in \{0, 1\}$.

2.29. 1) No. 2) Sí. 3) No. 4) Sí.

§ 3

3.2. Supongamos que $f(\widetilde{x}^n)$ toma valores contrarios en cualesquiera dos colecciones vecinas. Sea $f(\widetilde{0}) = \sigma$, entonces $f(\widetilde{\alpha}) = \bar{\sigma}$, si el número $\|\widetilde{\alpha}\|$ es impar, y $f(\widetilde{\alpha}) = \sigma$, si el número $\|\widetilde{\alpha}\|$ es par. Supongamos que $l_\sigma(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$. Entonces $N_f = N_{l_\sigma}$. Por la unicidad de la representación de las funciones con polinomios, $f = l_\sigma$ y, en consecuencia, $f \in L$. Lo inverso no es cierto. Vease, por ejemplo, $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_3$.

3.6. 2^n. RESOLUCIÓN. Supongamos que $f(\widetilde{x}^n) = c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n \oplus c_{n+1}$. Puesto que $f \in S$ tenemos $c_1(x_1 \oplus 1) \oplus \ldots \oplus c_n(x_n \oplus 1) \oplus c_{n+1} \oplus 1 = f(\widetilde{x}^n)$. De aquí que $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$, o sea que el número de coeficientes c_i, $i = \overline{1, n}$, iguales a la unidad, es impar. En B^n, el número de vectores $(c_1, \ldots, c_n)$ de peso impar es igual a 2^{n-1}. Se puede escoger el coeficiente c_{n+1} arbitrariamente. De esto se deduce la afirmación.

3.10. Si $f(\widetilde{x}^n) \in L$ y $f(\widetilde{x}^n)$ depende sustancialmente de todas sus variables entonces $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$ donde $\sigma \in \{0, 1\}$. De esto fácilmente se deduce la necesidad de la afirmación. SUFICIENCIA. Supongamos que $f \notin L$. Entonces existen dos colecciones vecinas $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ tales que $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta})$ (véase 3.2). Sea i el número de la coordenada en la que $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ se diferencian. Entonces $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ ficticiamente depende de x_i.

3.11. Sea $P(\widetilde{x^n})$ un polinomio de grado $k \geqslant 3$. Sin limitación de generalidad se puede considerar que la c.e. $A = x_1x_2 \ldots x_k$ es un sumando del polinomio P. Suponiendo $x_k = x_{k+1} = \ldots = x_n$ obtendremos el polinomio Q en el que A es la única c.e. de rango k. Pueden haber varios casos. a) Todas las c.e. de rango $k - 1$ sobre el conjunto X^k entran en el polinomio Q. Pongamos $x_{k-1} = x_k$. b) Existen tales i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant k)$, que las c.e. $x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots \ldots x_k$ y $x_1 \ldots x_{j-1}x_{j+1} \ldots x_k$ faltan (no las hay) en Q. Entonces suponemos $x_i = x_j$. c) El número de sumandos de rango $k - 1$ es igual a $k - 1$. Supongamos que en Q faltan (no las hay) las c.e. $x_1 \ldots x_{k-1}$. Entonces identificaremos las variables x_1 y x_k. En todos los casos obtendremos un polinomio de grado $k - 1$.

3.12. Veamos el polinomio P que realiza la función f. Si el grado del polinomio P es mayor que 2, entonces, mediante la identificación de sus variables, se puede obtener un polinomio Q de grado 2 (véase 3.11). Sin limitación de generalidad se puede considerar que x_1x_2 entra en Q. Identificando todas las variables diferentes de x_1 y x_2 obtenemos una función no lineal de tres variables.

3.13. Del 3.12 se deduce que identificando ciertas variables de la función f se puede obtener una función de tres variables que se realiza con un polinomio de segundo grado. Es necesario sólo mostrar que si en este polinomio hay exactamente dos sumandos de segundo grado, entonces, con la identificación de las variables se puede disminuir en uno este número. Si, por ejemplo, en P entran x_1x_2 y x_1x_3 pero no entra x_2x_3, pondremos $x_1 = x_3$.

3.14. Si $f(\widetilde{x^n}) \notin L$ entonces existen i, j tales que $f(\widetilde{x^n}) = x_ix_jP_1 \oplus x_iP_2 \oplus \oplus x_jP_3 \oplus P_4$, donde P_s es una función no dependiente de x_i y de x_j y $P_1 \not\equiv 0$. Pongamos que $i = 1$, $j = 2$. Que $\widetilde{\alpha} = (\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ la colección de valores de las variables $x_3, \ldots, x_n$ tal que $P_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Entonces $\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = x_1x_2 \oplus l(x_1, x_2)$, donde $l(x_1, x_2)$ es cierta función lineal. La función $\varphi(x_1, x_2)$ se convierte en unidad en un número impar de colecciones. De esto se deduce que la cara $B^{n;\,3,\,\ldots,\,n}_{\alpha_3\ldots\alpha_n}$ es la buscada.

3.18. Sea $f \in L$. Si f forma una base en L, entonces $f(\widetilde{0}) \neq 0$ y $f(\widetilde{1}) \neq 1$, en consecuencia, f depende sustancialmente de un número impar de variables. Pero entonces ella es autodual y no puede formar base en L.

3.19. Si Φ es un sistema de funciones completo en L, entonces en Φ existe $f_1 \notin S$, o sea una función sustancialmente dependiente de un número par de variables. Entonces de él se puede obtener una constante. Que esta constante sea σ. En Φ también tiene que estar la función $f_2 \notin T_\sigma$. Colocando la constante σ en el lugar de las variables de la función f_2 obtendremos $\overline{\sigma}$. En Φ también está la función f_3 que depende sustancialmente de más que de una variable. Se puede fácilmente ver que $[0, 1, f_3] = L$. Así, de cualquier sistema completo en L siempre se puede formar un subsistema completo formado de tres funciones De esto se deduce la afirmación.

3.20. Hay tres clases $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{0, 1\}$ compuestas sólo por constantes, dos clases $\{x\}$ y $\{x, \overline{x}\}$ formadas de funciones dependientes sustancialmente exactamente de una variable, cuatro clases formadas de funciones de no más de una variable y que contienen constantes y funciones diferentes de constantes: $[0, x]$, $[1, x]$, $[0, 1, x]$, $[0, 1, x, \overline{x}]$. Si una clase de funciones lineales contiene una función que depende sustancialmente de más de una variable, entonces ella contiene una función de un número par de variables, o bien no contiene; contiene una función que no conserva 0, o bien no. De aquí se deduce que las clases $[x \oplus y \oplus z \oplus 1]$, $[x \oplus y \oplus z]$, $[x \oplus y]$, $[x \oplus y \oplus 1]$, L son sólo clases cerradas de funciones lineales que contienen una función que depende sustancialmente de más de una variable.

3.22. INDICACIÓN. Si $f(\widetilde{x}^3)$ satisface la condición y no es autodual, entonces para todo $\widetilde{\alpha} \in B^3$, $f(\widehat{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$, en consecuencia, f se puede dar por completo, dando su valor en las colecciones del tipo $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$. De la condición 1), además se deduce que la función f se convierte en unidad exactamente en dos colecciones de este tipo. Así, existen no más de seis funciones no autoduales que satisfacen las condiciones 1) y 2). Es fácil comprobar que todas ellas son lineales.

3.25. Para $n \neq 2$ tales funciones no existen. Todas las funciones del tipo $x_1x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\})$ y sólo ellas satisfacen las condiciones 1) y 2).

3.26. Dos con n impar, 0 con n par. 3.27. De cinco maneras. 3.28. $f(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1}, \alpha_n) = 1$. 3.29. Con n impar. 3.30. Véase 3.14. 3.31. Véase 3.13. 3.32. xy, $x \vee y$, $x \mid y$, $x \downarrow y$.

3.32. INDICACIÓN. Aunque sea una de las funciones f_1, f_2, f_3 no es lineal.

§ 4

4.2. 2) Con n pares. 4) Con $n \neq 4k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$

4.3. 1) Con todos los $n \geqslant 2$. 3) Con $n = 3k$, $k = 1, 2, \ldots$ 4.4. De 7 maneras. 4.5. 2) $3 \cdot 2^{2^n - 2}$; 5) $3 \cdot 2^{n-1}$; 8) $(2^{2^n} - 2^{2^{n-1}})/2$; 12) 0; 15) $2^{2^{n-1}-1}$. 4.7. 1). No se puede puesto que $x \oplus y \notin T_1$ y $x \rightarrow y \in T_1$.

4.8. 1) Si $f \notin T_0$ pues su polinomio no contiene 1 en calidad de sumando. Por eso se puede expresar f por xy y $x \oplus y$. La igualdad $T_0 = [x \vee y, x \oplus y]$ se deduce de lo anterior y de que $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$.

4.9. Sea Φ una base en T_0. Entonces existe $f_1 \in \Phi \setminus T_1$. Identificando todas sus variables obtendremos la constante 0. En Φ existe también la función f_2 que no es monótona. La función f_2 es también, evidentemente, no lineal. Mediante la identificación de las variables y la sustitución de 0 de f_2 se puede obtener la función $\varphi_1(x, y)$ del tipo $xy \oplus \sigma x \oplus \tau y$, $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$ (véase 3.13). Como f_2 no es monótona, entonces existen unas colecciones $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ tales, que $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ y $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$. Sea A (respectivamente B) el conjunto de las coordenadas de la colección $\widetilde{\alpha}$ $(\widetilde{\beta})$ que son iguales a la unidad. Examinemos la función $\varphi_2(x, y, z)$ que se obtiene de f_2 si se hace en ella $x_i = x$ con $i \in A$; $x_i = y$ con $i \in B$, y $x_i = z$ con $i \notin B$. Tenemos $\varphi_2(0, 0, 0) = \varphi_2(1, 1, 0) = 0$, $\varphi_2(1, 0, 0) = 1$. Si en este caso φ_2 es una función autodual, entonces, o bien $\varphi_2 = x \oplus y \oplus z$, o bien $\varphi_2 = x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y}z$. En ambos casos tendremos $[0, \varphi_1, \varphi_2] = T_0$. Si φ_2 no es autodual, entonces examinamos la función $\varphi_3(x, y) = \varphi_2(x, y, 0)$. Tenemos $\varphi_3 = x \oplus y$, o bien $\varphi_3 = x\bar{y}$. Si $\varphi_3 = x \oplus y$, entonces $[\varphi_1, \varphi_2] = T_0$. En el caso de que $\varphi_3 = x\bar{y}$ y $\varphi_1 \neq x \vee y$, todas las funciones obtenidas 0, φ_1, φ_3 pertenecen a una clase cerrada que es precisamente la clase G formada de todas las funciones f tales que para cualesquiera dos colecciones $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \ldots, \alpha_n)$ y $\tilde{\beta}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tales, que $f(\tilde{\alpha})=f(\tilde{\beta})$, existe un i para el cual $\alpha_i=\beta_i=1$. A causa de la plenitud de Φ en T_0 existe una función f_3 no perteneciente a la clase G. La función f_3 tiene la propiedad de que existen unas colecciones $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ tales, que $f(\tilde{\alpha})=f(\tilde{\beta})$ y en $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ no hay coordenadas unitarias comunes. Sea A (B) el conjunto de coordenadas unitarias de la colección $\tilde{\alpha}$ (respectivamente de $\tilde{\beta}$). Sea $\varphi_4(x, y)$ una función que se obtiene de f_3 sustituyendo a x_i por x cuando $i \in A$, con y en lugar de x_i si $i \in B$, a las x_i por 0 cuando $i \notin \notin A \cup B$. Entonces φ_4 es $x \vee y$ o bien $x \oplus y$. En los dos casos tendremos $[x\bar{y}, \varphi_4]=T_0$. Así, de la plenitud del sistema Φ en T_0 se deduce que en él existe un subsistema que contiene no más de tres funciones. Precisamente de esto se deduce la afirmación.

4.10. Análogo al problema anterior. Utilizar el hecho de que en un sistema completo existe una función monótona y una de las funciones f_σ, $\sigma \in \{0, 1\}$, que no pertenecen respectivamente a las clases G_σ compuestas de todas las funciones f tales, que para cualesquiera dos colecciones $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ en las que $f(\tilde{\alpha}) = = f(\tilde{\beta}) = \sigma$, existe tal i, que las i-ésimas coordenadas de las colecciones $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son iguales a σ. Ejemplo de base de una función es el conjunto $\{xy \oplus z \oplus u\}$.

4.11. INDICACION. Examinar la función $xy \oplus y \oplus z$.

4.12. 3) Haremos la demostración de la plenitud del sistema $\Phi = = \{xy \vee xz \vee yz, x \oplus y \oplus z\}$ en $T_0 \cap S$ por inducción. Las funciones de $T_0 \cap S$ que dependen de no más que de dos variables, se obtienen mediante la identificación de las variables y de las funciones de Φ. Supongamos que todas las funciones de $T_0 \cap S$ que dependen de menos que de n $(n \geqslant 3)$ variables son superposiciones de las funciones de Φ. Supongamos que $f(\tilde{x}^n) \in T_0 \cap S$. Entonces $f(x_1, x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n)$, $f(x_3, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$, $f(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_n)$ dependen de menos de n variables. Ahora utilizamos el resultado del problema 2.24.

4.13. $f(1, 1, 1)=0$, ya que $f \in T_1$; $f(1, 0, 1)=0$ puesto que $f \notin M$, $f(1, 0, 1)=f(0, 1, 0)=0$, puesto que $f \notin S$.

4.14. Si $f \in L$ entonces existe un $k \geqslant 1$ tal, que f es congruente a $x_1 \oplus \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_{2k+1} \oplus 1$. Si $f \notin L$, entonces mediante la identificación de las variables se puede obtener una función φ del tipo $xy \oplus \sigma(x \oplus y) \oplus 1$, $\sigma \in \{0, 1\}$, o bien $xy \oplus xz \oplus yz \oplus 1$. En los dos casos $L \cap S \subseteq [\varphi]$.

4.18. Mostremos, por ejemplo, que $T_0 \cap L$ es una clase precompleta en T_0. Supongamos que $f \in T_0 \setminus L$. Identificando las variables de f se puede obtener la función φ, que tiene el tipo $xy \oplus l(x, y)$, o el tipo $xy \oplus xz \oplus yz \oplus l(x, y, z)$, En ambos casos el sistema $\{x \oplus y, \varphi\}$ es completo en T_0, o sea que $[(T_0 \cap L) \cup \cup \{f\}] = T_0$.

4.19. INDICACION. $xy \oplus z \in T_0 \setminus (T_1 \cup L \cup S)$ y $\{1, xy \oplus z\}$ es un sistema completo en P_2.

4.21. $x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$. **4.22.** Indicación. Véase 3.20.

4.23. Demostremos que si $f \notin (T_0 \cap T_1) \cup S$, entonces de ella se puede obtener una constante. Si $f \in T_0 \setminus T_1$ o $f \in T_1 \setminus T_0$, entonces identificando todas las variables en la función f obtendremos una constante. Supongamos que $f \in T_0 \cup T_1$. Puesto que $f \notin S$ entonces f depende sustancialmente de más de una variable y las variables se pueden identificar de tal manera que se obtenga una función sustancia mente dependiente de dos variables, precisamente una de las funciones es $\overline{x}\overline{y}$ o $\overline{x} \vee \overline{y}$. En ambos casos se puede obtener una constante.

§ 5

5.2. 1) $n = 2, 3$. 2) Con n pares. 3) Con n impares.

5.4. Emplear la descomposición de 5.3.

5.5. Dos funciones, de las cuales una tiene variable ficticia.

5.8. 1) No es cierto. Examinar $f(\widetilde{x^3}) = x_3$ y las colecciones (110), (001).

5.12. $\overline{x}$, n funciones.

5.14. Supongamos que la implicante simple I de la función $f(\widetilde{x}^n)$ contiene una negación de la variable. Sea, por ejemplo, $I = \overline{x}_1 L$, donde L es cierta c.e. Examinemos $N_L = \{\widetilde{\alpha}: L(\widetilde{\alpha}) = 1\}$ y la colección arbitraria $0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de N_L. A causa de la monotonía de $f(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. De esto se deduce que xL, y, en consecuencia, también L, son implicantes de la función f. Esto contradice el que I es una implicante simple.

5.16. Siempre que $k = 4l + 2 \left(\frac{k-2}{4} \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{4}\right)$ y para $k = 4l + 1 \left(\frac{k-1}{4} \leqslant l \leqslant \frac{n-1}{4}\right)$.

5.18. 1) Existe. 2) No existe. INDICACIÓN. La f.n.d. abreviada $\mathscr{D}$ de la función f tiene una longitud igual a tres. La fórmula $\mathscr{D}^*$ que es dual a $\mathscr{D}$, es la f.n.c. abreviada de la función f^*. La f.n.d. abreviada de la función f se obtiene de $\mathscr{D}^*$ abriendo los paréntesis y aplicando las reglas $AA = A$, $A \vee A = A$, $A \vee AB = A$. Examínense todos los casos en los que la f.n.d. abreviada de la función f^* tiene una longitud igual a tres.

5.19. 1) Todas las unidades inferiores de una función monótona son incomparables de par en par. El número máximo de colecciones incomparables de par en par en B^n es igual a $\binom{n}{[n/2]}$ (véase I.1.15).

5.21. Todas las funciones $f(\widetilde{x}^n)$ tales que $f(\widetilde{\alpha}) = 1$ si $\|\widetilde{\alpha}\| > n/2$ y $f(\widetilde{\alpha}) = 0$ si $\|\widetilde{\alpha}\| < [(n-1)/2]$. Son monótonas.

5.22. 1) 2; 3) $n + 2$; 5) $2^{n+1} - 2n - 2$.

5.23. 1) Supongamos que $f(\widetilde{x^n}) \subset M \cap S$. Examinemos la descomposición $f = \overline{x}_n f_0^n \vee x_n f_1^n$. Como f es autodual, entonces $(f_1^n)^* = f_0^n$. A causa de la monotonía de f tenemos que $f_0^n \in M$, $f_1^n \in M$, $f_0^n \vee f_1^n = f_1^n$. Así que si la función f_1^n de M está dada, pues la función f también estará dada. Sólo queda convencerse de que con $n \geqslant 1$ existe una función $f \in M^{n-1}$ tal, que $f \vee f^* \neq f$. Se puede tomar, por ejemplo, la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0$. 3) Supongamos que $f(\widetilde{x}^n) \in M$. Si está dado el componente $f_{10}^{1,\,2}$ entonces f se determina por monotonía en por lo menos 2^{n-2} colecciones más: si $(\alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ es cierta colección y $f_{10}^{1,\,2}(1, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 0$, entonces $f(0, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 0$; si $f_{10}^{1,\,0}(1, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$, entonces $f(1, 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$. De este modo para dar $f(\widetilde{x^n}) \in M$ es suficiente dar los componentes $f_{10}^{1,2}$, $f_{01}^{1,2}$ y acabar de determinar la función por monotonía, entonces f quedará indeterminada para no más de 2^{n-2} colecciones.

5.25. $m_c(1) = 1$, $m_c(2) = 2$, $m_c(3) = 12$, $m_c(4) = 126$.

5.26. Tenemos $|M^4| = 186$ (véase 5.24), $|S^4| = 256$. Luego la afirmación se demuestra por inducción teniendo en cuenta que $|S^n| = |S^{n-1}|^2$, $|M^n| < |M^{n-1}|^2$.

5.27. Cuatro.

5.28. Sea $f(\widetilde{x}^n) \in M$. Para cada cadena creciente $Z \in B^n$, o bien $f(\widetilde{\alpha}) = 0$ para todos los $\widetilde{\alpha} \in B^n$, o bien existe una colección $\widetilde{\beta} \in Z$ tal, que $f(\widetilde{\beta}) = 1$ y $f(\widetilde{\alpha}) = 0$ para $\widetilde{\alpha} \in Z$, $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$. Sea dada la partición de B^n en $\binom{n}{[n/2]}$ cadenas crecientes. Entonces para representar la función $f(\widetilde{x}^n) \in M$ es suficiente indicar para cada cadena de la partición si hay en ella un vértice $\widetilde{\alpha}$ tal, que $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, y si lo hay, entonces dar aquel vértice $\widetilde{\beta}$ para el cual $\widetilde{f}(\beta) = 1$ y $f(\widetilde{\alpha}) = 0$ para todos los $\widetilde{\alpha} \in Z$ tales, que $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$. Puesto que la longitud de cada cadena creciente no supera a $n + 1$, no se tienen más de $n + 2$ posibilidades para cada cadena.

5.29. Examinemos la partición del cubo B^n en cadenas crecientes no intersecadas, indicada en el problema I. 1.18. Esta partición tiene las siguientes propiedades. 1) Las cadenas de menor longitud tienen no más de dos vértices. 2) Para cada cara bidimensional que contiene tres vértices de una cadena que tiene $k + 2$ vértices, el cuarto vértice de la cara se contiene en la cadena de partición que tiene k vértices. De la 1) se deduce que en cada cadena de longitud mínima una función monótona puede ser dada con no más de tres procedimientos. De la 2) se deduce que si una función monótona (parcial) está determinada en todas las cadenas que tienen k unidades, entonces en cada cadena de longitud $k + 2$ esta función está determinada por monotonía en todos los sitios menos, puede ser, en dos vértices. En consecuencia hay no más de tres maneras de acabar de determinarla en cada una de tales cadenas. Tomando en cuenta que el número de cadenas es igual a $\binom{n}{[n/2]}$, tendremos que $|M^n| \leqslant 3^{\binom{n}{[n/2]}}$.

5.32. $(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) \ldots (x_{2n-1} \vee x_{2n})$.

5.33. Toda función que depende sustancialmente de no más de una variable tiene no más de una unidad inferior.

5.34. INDICACIÓN. Véase la resolución del problema I.1.36, 4).

5.39. 1) No se puede. 2) No se puede. 3) Se puede.

5.40. La afirmación acerca de que cualquier función $f(\widetilde{x}^n) \in M$ es representable con ayuda de superposiciones sobre las funciones del conjunto $\{0, 1, xy, x \vee y\}$, se puede demostrar con inducción por n empleando 5.3. Después la afirmación se deduce de que $\{1, xy, x \vee y\} \subsetneq T_1$, $\{0, xy, x \vee y\} \subsetneq T_0$ y de que del conjunto $\{0, 1, x \vee y\}$ no se puede obtener la función xy y de $\{0, 1, xy\}$ no se obtiene la función $x \vee y$. 5.44. No se puede. 5.45. No se puede.

5.48. Toda base en M contiene constantes y también funciones que dependen sustancialmente de no menos que de dos variables. Por otra parte, sea Φ una base en M que contiene más de cuatro funciones. Entonces, por lo menos tres de ellas dependen de más de una variable. Entre estas funciones se encontrará la función f_1 que no es conjunción elemental. Entonces mediante la sustitución de las constantes obtendremos $x \vee y$. También está f_2 que no es disyunción elemental, de ella obtenemos xy. Entonces $\{0, 1, f_1, f_2\}$ es un subsistema completo en M.

5.49. Véase 5.48. 5.50. 2) $\{1, xy \vee z\}$. 5.51. Véase 2.24.

5.53. Mostremos, por ejemplo, que $M \cap T_0$ es precompleto. La única función $f \in M \setminus T_0$ es la constante 1. En $M \cap T_0$ se encuentran las funciones $0, xy, x \vee y$ las que junto con 1 forman un sistema completo en M. Sea que existe una clase cerrada Q más, que no se contiene en ninguna de las condiciones enumeradas anteriormente. Entonces existen $f_1 \notin M \cap T_0$, $f_2 \notin M \cap T_1$, $f_3 \in \in \mathscr{D} \cup \{0, 1\}$, $f_4 \notin \mathscr{K} \cup \{0, 1\}$. Entonces $f_1 \equiv 1$, $f_2 \equiv 0$ de f_3 mediante la sustitución de las constantes y la identificación obtenemos xy, y de f_4 la función $x \vee y$.

§ 6

6.1. Suponer lo inverso y utilizar el criterio de plenitud.

6.2. 4) Es completo. 6) No es completo. 7) Es completo. 8) No es completo.

6.3. Mostrar que $\overline{f} \notin T_0 \cup T_1 \cup L \cup M$.

6.4. 1) Puede ser que no sea completo, por ejemplo, $f_1(\widetilde{x}^3) = m(x_1, x_2, x_3) \oplus x_1 \oplus x_2$, $f_2(\widetilde{x}^3) = (x_1 \sim x_3) \vee x_3$ y que sea completo, por ejemplo, $f_1(\widetilde{x}^3) = \overline{m(x_1, x_2, x_3)}$, $f_2(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee x_2x_3$. 2) Es completo. 3) No es completo.

6.5. Es completo. Muestre que $f_1 \notin T_1 \cup L \cup S \cup M$ y $f_3 \notin T_0$.

6.6. 1) $\{xy \oplus z, (x \oplus y) \sim z\}$, $\{(x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y}), (x \oplus y) \sim z, m(x, y, z)\}$. 3) $\{\underline{0}, (x \mid (xy)) \to \overline{z}\}$, $\{x \oplus y, (x \mid (xy)) \to \overline{z}\}$ $\{(x \to y) \downarrow (y \sim z), (x \mid (xy)) \to \overline{z}\}$.

6.7. $\{x \downarrow y\}$, $\{x \mid y\}$, $\{x \oplus yz \oplus z \oplus 1\}$; $\{\overline{x}, xy\}$, $\{\overline{x}, x \vee y\}$, $\{\overline{x}, x \to y\}$; $\{1, x \oplus y, xy\}$, $\{1, x \oplus y, x \vee y\}$, $\{0, 1, x \oplus y \oplus yz\}$; $\{0, 1, x \oplus y \oplus z, xy\}$, $\{0, 1, x \oplus y \oplus z, x \vee y\}$, $\{0, 1, x \oplus y \oplus z, m(x, y, z)\}$.

6.8. Hay 7 bases de estas: dos de ellas contienen una función cada una, tres contienen dos funciones y además dos bases cada una de ellas, las que contienen tres bases pueden ser seleccionadas del sistema completo $\{xy, x \vee y, x \oplus y, x \sim y\}$;

6.9. 1) — 3) Se puede. 4) No se puede.

6.10. No existe. Supongamos que $f_1 \not\equiv 1$. Entonces $f_1 \notin M$ y $f_1 \notin T_1$ o bien $f_1 \notin S$. En el primer caso se puede «extraer» la función f_2 y en el segundo, la función f_4. En forma análoga se investiga la posibilidad ligada a la relación $f_2 \not\equiv 0$. Supongamos ahora que $f_1 \equiv 1$ y $f_2 \equiv 0$. Si $f_3 \notin M$ entonces el sistema $\{f_1, f_2, f_3\}$ es completo. Sea $f_3 \in M$; entonces la función f_4 tiene que no pertenecer a la clase M. Si $f_4 \notin L$, entonces el sistema $\{f_1, f_2, f_4\}$ es completo. Queda examinar el caso cuando $f_4 \in L \setminus M$. Como $f_4 \notin S \cup M$ y $f_4 \in L$, entonces f_4 depende sustancialmente de un número par de variables (y es diferente de las constantes 0 y 1). En consecuencia, o $f_4 \notin T_1$, o bien $f_4 \notin T_0$. Por eso uno de los sistemas $\{f_1, f_3, f_4\}$ o $\{f_2, f_3, f_4\}$ forzosamente será completo.

6.11. 1) P_2. 2) $M \setminus (T_0 \cup L) = \varnothing$. 3) $M \setminus (T_0 \cap T_1) = \{0, 1\}$. 4) $M \cap \cap T_0 \cap T_1$. 5) $T_0 \cap L$. 6) S. 7) $L \cap S$. 8) T_0. 9) $T_0 \cap T_1$.

6.12. 1) $K_1 \subset K_2$. 2) $K_1 \not\supseteq\not\subseteq K_2$. 3) $K_1 \not\supseteq\not\subseteq K_2$. 4) $K_1 \not\supseteq\not\subseteq K_2$. 5] $K_1 = K_2$. 6) $K_1 \not\supseteq\not\subseteq K_2$.

6.13. 2) 56.

6.14. 1) Si $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$, entonces $f \not\equiv$ const, $f(\widetilde{0}) = 1$ y $f(\widetilde{1}) = 0$. Significa que $f \notin M$. Si fuese $f \in L$, entonces en virtud de la relación $f \notin T_0 \cup T_1$ la función f tendrá que haber dependido sustancialmente de un número impar de variables (y que haber tenido un término libre igual a 1). No obstante, entonces $f \in S$. 2) El número de funciones de Sheffer en el conjunto $P_2(X^n)$ es igual a la diferencia entre el número de todas las funciones $f(\widetilde{x}^n)$ que satisfacen la condición: $f(\widetilde{0}) = 1$ y $f(\widetilde{1}) = 0$, y el número de funciones autoduales que se someten a esa misma condición. Así que en $P_2(X^n)$ se contienen $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ funciones de Sheffer ($n \geqslant 2$).

6.15. Sea $f(\widetilde{x}^n)$ una función de Sheffer (aquí $n \geqslant 3$ y todas las variables son sustanciales). Como $f(\widetilde{x}^n) \in S$, entonces habrá dos colecciones contrapuestas $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\widetilde{\alpha}' = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ en las que la función f toma los mismos valores $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha}') = \sigma$. Es evidente que $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{0}$ y $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{1}$ (puesto que $f(\widetilde{0}) = 1$ y $f(\widetilde{1}) = 0$). Sustituimos por x aquellas variables x_i a las que en la colección $\widetilde{\alpha}$ les corresponden componentes nulos, y por y las demás variables. Obtenemos la función $g(x, y)$ que satisface las relaciones $g(0, 0) = 1$, $g(1, 1) = 0$, $g(0, 1) = g(1, 0) = \sigma$. Si $\sigma = 0$, entonces $g(x, y) = x \downarrow y$, y si $\sigma = 1$, entonces $g(x, y) = x \mid y$.

6.16. 1) Para $n = 4m + 2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ 2) — 5) Para ninguna n. 6) Para toda $n \geqslant 2$.

6.18. Las funciones que tienen las propiedades indicadas en el enunciado del problema dependen sustancialmente de no menos que de tres variables.

6.21. Véase la resolución do problema 2.25, 2)

6.23. $x\overline{y}$. De ella no se puede obtener, por ejemplo, la función $x \vee y$. En general, en la clase $[x\overline{y}]$ no hay funciones que tomen el valor 1 en la mayoría (más de la mitad) de las colecciones de valores de las variables.

6.24. Una función que satisfazga la exigencia indicada en el enunciado del problema depende sustancialmente de no menos que de cuatro variables. Un ejemplo de tal función puede ser: $x_1 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_4$.

6.25. La demostración se puede hacer por inducción por n. La *base de la inducción*: $n = 4$ (véase el problema 3.12). *Paso de la inducción*. Supongamos que la afirmación es válida para $n = s \geqslant 4$ y la demostremos para $n = s + 1$. Supongamos que la función $f(\widetilde{x}^{s+1})$ depende sustancialmente de todos sus argumentos y no pertenece a la clase L. Presentaremos la función f en la forma siguiente: $g(\widetilde{x}^s) \oplus x_{s+1}h(\widetilde{x}^s)$. Como x_{s+1} es una variable sustancial de la función f, entonces $h(\widetilde{x}^s) \not\equiv 0$. Examinemos varias posibilidades. (a) En la función g, cierta variable x_i es ficticia, y en la función h, lo es la variable x_j ($i \neq j$). Entonces, es suficiente poner $x_i = x_j$. (b) No hay variables ficticias ni en g ni en h. Si $h \notin L$, aplicamos la suposición inductiva a la función h. Si $h \notin L$ pero $g \in L$

entonces la suposición inductiva se aplica a la función g. Si $\{g, h\} \subset L$, luego $f = (x_1 \oplus \ldots \oplus x_s)\,\overline{x}_{s+1} \oplus c_1 \oplus c_2 x_{s+1}$, y se puede, por ejemplo, identificar x_s con x_{s+1}. (c) En h no hay variables ficticias y en g las hay. Sea x_i una de ellas. Si $h \notin L$, aplicaremos la suposición inductiva a h. Si $h \in L$, entonces identificaremos x_i con x_{s+1}. (d) Supondremos, por fin, que en g no hay variables ficticias y en h ellas existen. Sea x_1 una de ellas. Si $g \in L$ (lo que quiere decir que $h \not\equiv 1$), entonces identificamos x_1 con la variable de la que h depende sustancialmente (para la determinación, pongamos que esa variable es x_2). Obtendremos $f(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_{s+1}) = x_3 \oplus \ldots \oplus x_s \oplus c \oplus x_{s+1} h(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_s)$. Es evidente que esta función no es lineal y que en ella $x_2, \ldots, x_{s+1}$ son variables sustanciales. Examinemos ahora el caso cuando $g \notin L$. Por presupuesto de la inducción, en g habrán dos variables x_i y x_j, que al identificarlas obtendremos de la función g una función no lineal que depende sustancialmente de $s - 1$ variables. Si al identificar x_i y x_j la función h no degenera en un cero idéntico, entonces x_{s+1} se queda como variable sustancial en la función nueva. Supongamos que ahora al identificar x_i con x_j la función h se convierte en un cero idéntico. Entonces las dos variables, x_i y x_j, son sustanciales en h. Para la determinación pongamos que $x_i = x_2$ y $x_j = x_3$. Tenemos $h(\widetilde{x}^s) = x_2 x_3 h_1(x_4, \ldots, x_s) \oplus x_2 h_2(x_4, \ldots, x_s) \oplus x_3 h_3(x_4, \ldots, x_s)$, y además $h_3 \equiv h_1 \oplus h_2$. Hagamos $x_1 = x_{s+1}$ en la función f. Si con todo esto resulta que la función φ es sustancialmente dependiente de s argumentos, entonces está todo demostrado. (La no linealidad de φ es evidente puesto que $\varphi(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_s) = g(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_s) \in L$). No obstante, puede ocurrir que con $x_1 = x_{s+1}$, en la función φ alguna variable se haga ficticia. Tal variable solamente puede ser una de las variables x_2 o x_3 (puesto que al identificar en φ las variables x_2 y x_3 tenemos que obtener la función $g(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_s)$ que depende sustancialmente de $s - 1$ variables). Supongamos que la variable ficticia de la función φ es x_2. Como $f = x_1(x_2 x_3 g_1 \oplus x_2 g_2 \oplus x_3 g_3 \oplus g_4) \oplus x_2 x_3 g_5 \oplus x_2 g_6 \oplus x_3 g_7 \oplus g_8 \oplus x_{s+1} \times (x_2 x_3 h_1 \oplus x_2 h_2 \oplus x_3 h_3)$, donde cada una de las funciones $g_1, \ldots, g_7, g_8, h_1, h_2, h_3$ depende de las varibles $x_4, \ldots, x_s$ y $h_3 \equiv h_1 \oplus h_2$, entonces, según la suposición hecha sobre la variable ficticia x_2 en la función φ, tendremos que $\varphi = f(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_1) = x_1(x_3 g_3 \oplus g_4) \oplus x_3 g_7 \oplus g_8 \oplus x_1 x_3 h_3$, o sea que $g_1 \equiv h_1$, $g_2 \equiv h_2$ y $g_5 \equiv g_6 \equiv 0$. En consecuencia, $f(\widetilde{x}^n) = x_2(x_1 \oplus x_{s+1}) \times (x_3 h_1 \oplus h_2) \oplus x_1 x_3 g_3 \oplus x_1 g_4 \oplus x_3 g_7 \oplus g_8 \oplus x_{s+1} x_3 h_3$. Pongamos que $x_2 = x_{z+1}$. Obtendremos la función $\psi = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_s, x_2) = (x_1 \oplus 1) \times x_2(x_3 h_1 \oplus h_2) \oplus x_1 x_3 g_3 \oplus x_1 g_4 \oplus x_3 g_7 \oplus g_8 \oplus x_2 x_3 h_3$. Como la función $f(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_s, x_2) = g(x_1, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_s)$ depende sustancialmente de todos sus argumentos, entonces en la función ψ puede ser ficticia sólo una de las variables x_2 y x_3. Pero eso es posible sólo con $h_1 \equiv 0$ (y ciertas condiciones complementarias). Entonces $h_3 \equiv h_2$ y $f = x_2(x_1 \oplus x_{s+1}) h_2 \oplus x_1 x_3 g_3 \oplus x_1 g_4 \oplus x_3 g_7 \oplus g_8 \oplus x_{s+1} x_2 h_2$. Como $h \not\equiv 0$, entonces para $h_1 \equiv 0$ la función h_2 no puede «degenerar» en 0, o sea, $h_2 \equiv 0$. Por consiguiente, incluso con $h_1 \equiv 0$ la función $\psi = x_2(x_1 \oplus 1) h_2 \oplus x_1 x_3 g_3 \oplus x_1 g_4 \oplus x_3 g_7 \oplus g_8 \oplus x_2 x_3 h_2$ depende sustancialmente de x_2 y de x_3. Así, que si ninguna de las identificaciones $x_2 = x_3$ o $x_1 = x_{s+1}$ no da la función exigida, entonces es suficiente poner $x_2 = x_{s+1}$. Con esto se termina el examen de todas las posibilidades. Está establecida la posibilidad de hacer un paso inductivo.

6.28. 1) — 4) No, no es cierto. En el problema 4) se puede tomar $f(x, y) = x \to y$.

6.29. Como $|T_0^n| = |T_1^n| = 2^{2^n-1}$, $|L^n| = 2^{n+1} \leqslant 2^{2^n-1}$ (con $n \geqslant 2$) $|S^n| = 2^{2^{n-1}}$ y $|M^n| \leqslant 2^{2^n-2}+2 \leqslant 2^{2^n-1}$ (con $n \geqslant 2$), entonces el conjunto $\mathfrak{A}$ no se contiene por entero en ninguna de las clases T_0, T_1, S, L, M.

6.30. Una función idéntica no está contenida en ninguna base en P_2 (véase el problema 1.18). Cualquiera de las demás funciones del álgebra lógica de un lugar y de cero lugares no pertenece a alguna clase precompleta en P_2. Al mismo tiempo el sistema hereditario de cualquier tal función es un conjunto vacío, lo que quiere decir que se contiene en cada clase precompleta (en P_2). Sea ahora $f(\tilde{x}^n)$ alguna función de cierta base simple $\mathfrak{B}$ y $n \geqslant 2$ (todas las variables son sustanciales). En virtud de la definición de base simple, el sistema $\mathfrak{C} = (\mathfrak{B}\setminus\{f\}) \cup \mathfrak{N}(f)$ no es completo en P_2, o sea que se contiene por entero aunque sea en una clase precompleta K. Si tuviese lugar el que $f \in K$, entonces el sistema $\mathfrak{B}$ $(\subseteq \mathfrak{C} \cup \{f\})$ no sería completo.

6.31. 1) $1, \bar{x}$. 2) $0, 1, xy, x \vee y, x \downarrow y, x|y, m(x, y, z), m(x, y, \bar{z})$, $m(x, \bar{y}, \bar{z})$, $m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. 3) $\bar{x}$, $x \oplus y$, $x \oplus y \oplus 1$, xy, $x \vee y$, $x \to y$, $\overline{x \to y}$, $x \oplus y \oplus z$, $m(x, y, z)$, $m(x, y, \bar{z})$. 4) $x \oplus y$, $x \sim y$, xy, $x \vee y$, $x \to y$, $\overline{x \to y}$, $x \downarrow y$, $x|y$, $x \oplus y \oplus z$, $\overline{x \oplus y \oplus z}$, $m(x, y, z)$, $m(x, y, \bar{z})$, $m(x, \bar{y}, \bar{z})$, $m(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Al resolver los problemas 2)—4) es útil emplear los resultados formulados en los problemas 2.14, 2.20 y 3.12.

6.33. 2) Tomando en cuenta los problemas 2.20, 3.12 y 5.38 deducimos que cualquier base simple en P_2 consiste sólo de funciones sustancialmente dependientes de no más que de tres variables. Examinemos primero las funciones que dependen sustancialmente de dos argumentos y no son shefferianas: $x \oplus y$, $x \sim y$, $x \to y$, $\overline{x \to y}$, xy, $x \vee y$. Aclararemos cuáles de ellas pueden entrar en una base de cuatro elementos en P_2. Vemos que $x \oplus y \notin T_1 \cup S \cup M$, $x \sim y \notin T_0 \cup S \cup M$, $x \to y \notin T_0 \cup S \cup L \cup M$ y $\overline{x \to y} \notin T_1 \cup S \cup L \cup M$. En consecuencia todas estas funciones no sirven para nuestros fines. Supongamos que hay una base simple de cuatro elementos que contiene xy. Como $xy \in (T_0 \cap T_1 \cap M)\setminus(L \cup S)$, entonces las otras tres funciones en la base tienen que ser así: $f_1 \in (T_1 \cap M)\setminus T_0$, $f_2 \in (T_0 \cap M)\setminus T_1$ y $f_3 \in (T_0 \cap T_1)\setminus M$. Es evidente que $f_1 \equiv 1$, $f_2 \equiv 0$. Si fuese $f_3 \notin L$, entonces el sistema $\{f_1, f_2, f_3\}$ sería completo. En consecuencia, $f_3 \in L$, lo que quiere decir que $f_3 = x \oplus y \oplus z$. El caso con la función $x \vee y$ se estudia en forma análoga. Ahora aclararemos qué funciones no lineales, sustancialmente dependientes de tres argumentos, pueden contenerse en una base simple de cuatro elementos. Si $f(x, y, z) \notin L \cup S$, entonces identificando en f las variables se puede obtener una función no autodual que depende sustancialmente de dos argumentos (véase el problema 2.20). Pero entonces $f(x, y, z)$ no puede entrar en una base simple de cuatro elementos (véanse las posibilidades estudiadas anteriormente con funciones dependientes de dos argumentos). Queda por considerar el caso en el que $f(x, y, z) \in S\setminus L$. Si $f \notin T_0 \cap T_1$ y eso quiere decir que $f \in M$, entonces con cualquier función $g \notin S$ el sistema $\{f, g\}$ es completo en P_2. Por eso supondremos que $f \in T_0 \cap T_1$. Si $f \notin M$ entonces (con una exactitud hasta la redenominación de las variables) $f = m(x, y, \bar{z})$; pero si $f \in M$, entonces $f = m(x, y, z)$. En el primer subcaso $f \in (T_0 \cap T_1 \cap S) \setminus (L \cup M)$, y en consecuencia, en la respectiva base simple de cuatro elementos (si ella existe), las tres funciones restantes tienen que satisfacer las condiciones $f_1 \in (T_1 \cap S) \setminus T_0$, $f_2 \in (T_0 \cap S) \setminus T_1$ y $f_3 \in (T_0 \cap T_1) \setminus S$. Sin embargo, $(T_1 \cap S) \setminus T_0 = (T_0 \cap S) \setminus T_1 = \varnothing$, o sea que no existe ni una función f_1, ni una función f_2 con las propiedades indicadas. Así que el primer subcaso es imposible. En el segundo subcaso $f \in (T_0 \cap T_1 \cap S \cap M) \setminus L$. En consecuencia, las otras tres funciones en la base tienen que ser lineales (pues de otra forma se podría eliminar la función f de la base). Las funciones lineales que dependen sustancialmente de un número par de variables y son diferentes de constantes no pueden pertenecer a una base tal, puesto que cada tal función no se contiene, o bien en el conjunto $T_0 \cup S \cup M$, o bien en el conjunto $T_1 \cup S \cup M$. Una función lineal que depende sustancialmente de un número impar de variables, puede pertenecer a una base así solamente en el caso de que ella conserve el 0 y el 1. Eso quiere decir que eso puede ser solamente la función $x \oplus y \oplus z$. Y quedan además las constantes.

Capítulo III

§ 1

1.3. De $k - 1$ hay que «restar» (mediante la función $x \dot{-} y$) la función $x + 2$ un número determinado de veces.

1.4. Si, y sólo si, α y k son primos entre sí.

1.5. Si $k = 2m \geqslant 4$, entonces se puede tomar $y = m - 1$. Con $k = 2m + 1 \geqslant 3$ examinar la función $1 \dot{-} 2x$.

1.7. Con $k = 4, 6, 8, 9, 10$ el número de diferentes funciones del tipo exigido es respectivamente igual a 3, 2, 5, 3, 4.

1.8. Con $k \neq 3, 4, 6, 12$. Primero comparar los valores de estas funciones con $x = 2$.

1.9. Tenemos: la función $J_{k-1}(x) + \ldots + J_{k-1}(x)$ ($k - 1$ sumandos) es igual a $j_{k-1}(x)$; $j_i(x) = j_{k-1}(x - i - 1)$, $0 \leqslant i \leqslant k - 2$. Si $g(x) \in P_k^{(1)}$ entonces $g(x) = g(0) \cdot j_0(x) + \ldots + g(i) \cdot j_i(x) + \ldots + g(k-1) \cdot j_{k-1}(x)$ (aquí $l \cdot j_i(x) = j_i(x) + \ldots + j_i(x)$ — l sumandos).

1.14. 2) La función $1 \dot{-} x = j_0(x)$ no es presentable con un polinomio por módulo k, si k es compuesto. 4) $\{\text{máx}(x, y), x + 1\}$ es un sistema completo para cualquier k. En consecuencia, si la función máx (x, y) fuese presentable con un polinomio por módulo k con un k compuesto, entonces el sistema de polinomios sería completo para todos los $k \geqslant 3$.

1.16. 1) Es no representable. 2) Es no representable. 3) Es representable.

1.18. O bien $a_1 = 0$, o bien $a_0 \neq 0$ y $a_1 \neq 0$.

1.20. 2) No, es injusta. Ejemplo: $f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 + 1$, $k = 6$.

1.22. 2) Si $g(x) \in P_4$ y toma su valor solamente del conjunto $\{0, 2\}$, entonces se la puede representar en forma de suma (por mód 4) de las funciones $2j_i(x)$ escogidas de manera correspondiente. Si $g(E_4) \subseteq \{1, 3\}$, entonces la función $h(x) = g(x) + 1$ toma su valor del conjunto $\{0, 2\}$.

1.24. Al hacer la cuenta es útil considerar que $2x^3 = 2x^2 = 2x$ y $3x^3 = 2x + x^3$. Respuesta: 64.

1.26. O bien $b = 0$ y $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, o bien $b = 2$ y $a = 2, 5$, o bien $b = 4$ y $a = 1, 4$.

1.29. 3) a) Si $k = 2m + 1 \geqslant 3$, entonces la función f es autodual solamente con $a = 2m$. Si $k = 2m \geqslant 4$, hay dos posibilidades: $a = 2m - 1$ y $a = m - 1$.

1.30. Si la función $f(\tilde{x}^n)$ de P_k es autodual con relación a la sustitución cíclica $s(x)$, entonces ella se define unívocamente con su subfunción $f(0, x_2, \ldots, x_n)$.

1.31. Todas las colecciones de valores de las variables $x_1, \ldots, x_n$ se pueden dividir de una manera especial en k^n/r subconjuntos no intersecados. Al hacer esto, en cada uno de los subconjuntos de partición existe una colección $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ que satisface la condición: cualquiera que sea la colección $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ diferente de la colección $\tilde{\alpha}$ y perteneciente al subconjunto de partición examinado, habrá tal i $(1 \leqslant i \leqslant r - 1)$, que $s^i(\alpha_j) = \beta_j$, $j = \overline{1, n}$. La función $f(\tilde{x}^n)$, autodual con relación a la sustitución $s(x)$, se determina unívocamente con la expresión de f en una colección «seleccionada» $\tilde{\alpha}$ de cada subconjunto de partición.

§ 2

2.2. 3) $2^k - 1$. 4) $m^{m^n} k^{k^n - m^n}$ $(n \geqslant 0,\ 1 \leqslant m = |\mathscr{E}| \leqslant k - 1)$.

2.3. 4) Si D es una partición no trivial del conjunto E_k, entonces $1 < s < k$. En consecuencia, se encontrará tal subconjunto $\mathscr{E}_i$ con no menos de dos elementos, y además cierto subconjunto $\mathscr{E}_j$ distinto de $\mathscr{E}_i$. Sean b_1, b_2 algunos elementos de $\mathscr{E}_i$ y c, cierto elemento de $\mathscr{E}_j$. Entonces la función $g(x)$, que es igual a c para $x = b_1$ e igual a b_1 si $x \neq b_1$, no pertenece a la clase $U(D)$, puesto que $b_1 \sim b_2$ (mód D), c no es equivalente a b_1 (por el mód D) y $g(b_1) = c$, $g(b_2) = b_1$. 4) Sea $(i_1, \ldots, i_n)$ una colección de números del conjunto $\{1, 2, \ldots, s\}$. En total hay s^n colecciones así. Las ordenamos lexicográficamente y las reenumeramos inscribiendo los números del 1 al s^n. La colección $(1, 1, \ldots, 1, 1)$ tendrá el número 1; la colección $(1, 1, \ldots, 1, 2)$, el número 2; la colección $(1, 1, \ldots, 2, 1)$ el número $s + 1$, etc. Si la colección $(i_1, \ldots, i_n)$ tiene el número m, entonces el número $|\mathscr{E}_{i_1}| \cdot \ldots \cdot |\mathscr{E}_{i_n}|$ lo designaremos por d_m. El número de funciones en el conjunto $P_k(X^n)$ que conservan la partición $D = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_s\}$ es igual a $\sum\limits_{(j_1, \ldots, j_r)} |\mathscr{E}_{j_1}|^{d_1} |\mathscr{E}_{j_2}|^{d_2} \cdot \ldots \cdot |\mathscr{E}_{j_r}|^{d_r}$, donde $r = s^n$ y la suma se hace por todas las colecciones posibles de longitud s^n que estén formadas con números pertenecientes al conjunto $\{1, 2, \ldots, s\}$.

2.4. 2) Designemos el conjunto $\mathscr{E}$ por $\mathscr{E}_1$, el $E_k \setminus \mathscr{E}$ por $\mathscr{E}_2$, y como en el problema 2.3, 4), d_m indicará el número $|\mathscr{E}_{i_1}| \ldots |\mathscr{E}_{i_n}|$, donde $(i_1, \ldots, i_n)$ es una colección de longitud n formada por números pertenecientes, al conjunto $\{1, 2\}$ y m es el número de la colección en una ordenación lexicográfica. El número de funciones de $P_k(X^n)$ que se contienen en el conjunto $U(D)\setminus T(\mathscr{E})$ es igual a

$$\sum_{\substack{j_1\\(j_2,\ \dots,\ j_r)}} |\mathscr{E}_{j_1}|^{d_1}\cdot|\mathscr{E}_{j_2}|^{d_2}\cdot\ldots\cdot|\mathscr{E}_{j_r}|^{d_r},$$

donde $r = 2^n$, y la suma se toma en las colecciones de longitud 2^n que están formadas por números pertenecientes al conjunto $\{1, 2\}$ y que tienen el primer componente igual a 2. La fórmula indicada es válida para $n \geqslant 1$. Si $n = 0$, entonces en el conjunto $U(D)\setminus T(\mathscr{E})$ entrarán todas aquellas constantes que no se contienen en la clase $T(\mathscr{E})$, o sea que en este caso el número de funciones es igual a $|E_k\setminus\mathscr{E}|$.

2.5. 3) Esos sólo son los predicados de un lugar del tipo $x \neq i$ $(i = 0, 1, \dots, k-1)$.

2.6. 3) Emplear el lema básico sobre las funciones sustanciales (véase el lema 7 en [10] en la pág. 46) y mostrar que con $2 \leqslant s \leqslant k-1$ la clase $T(\varnothing, s)$ está formada por todas las funciones sustancialmente dependientes de no más que de una variable y de todas las funciones que toman no más de s valores diferentes.

2.7. 2) $2\cdot(k-3)!$. **2.10.** Examinar, por ejemplo, la función $s(x) = x + j_0(x) - j_1(x)$ con $k = 3$. **2.12.** 1) b) $J_1(x) \in M(\rho_2)\setminus M(\rho_1)$. d) $x + j_0(x) + J_1(x) \in M(\rho_1)\setminus M(\rho_2)$. f) $x \dot{-} y \in M(\rho_2)\setminus M(\rho_1)$. **2.13.** 1) $T(\{0, k-1\})$. 2) $U(\{0, 1\}, \{2, \dots, k-1\})$. 5) $T(\{1, 2\})$.

2.14. 2) Con $k \geqslant 4$ se puede examinar la partición $D = \{0, 1\} \cup \{2, \dots, k-3\} \cup \{k-2, k-1\}$. Con $k = 3$ no se puede encontrar una partición adecuada. 3) Para todo $k \geqslant 3$ es suficiente limitarse a una clase del tipo $M(\rho)$.

2.15. 1) Se puede. 2) Se puede. 5) No se puede; es suficiente examinar el caso en que $k = 3$.

2.17. La demostración se hace análogamente a la de la segunda parte de la afirmación formulada en el problema II.1.13.

2.20. No, no es cierto. Se puede examinar, por ejemplo, la clase $[j_1(x)\cdot j_2(y)]$ en P_3.

2.21. No, no es cierto. Es suficiente tomar en P_3 la clase cerrada engendrada por la función x^2y^2.

2.23. Establecemos alguna correspondencia biunívoca entre todos los números racionales del segmento $[0, 1]$ y el conjunto de las funciones $\{f_2, f_3, \dots, f_m, \dots\}$. Tomemos un número real arbitrario $\gamma \in [0, 1]$ y designemos por C_γ el subconjunto de todas aquellas funciones de $\{f_2, f_3, \dots, f_m, \dots\}$ que, con la correspondencia indicada anteriormente, responden a todos los números naturales menores que γ. Con $\gamma_1 < \gamma_2$ tenemos $C_{\gamma_1} \subset C_{\gamma_2}$ (¡la inclusión es rigurosa!). Sea $B_\gamma = [C_\gamma]$. Es evidente que $B_{\gamma_1} \subset B_{\gamma_2}$ con $\gamma_1 < \gamma_2$ (la inclusión es rigurosa).

§ 3

3.1. 1) Tal sistema es el conjunto $\{j_0(x), x + y\}$ (véase el problema 1.9 y empléese el criterio de Slupetsky).

3.2. 4) Se puede extraer la función $0, k-1, J_0(x)$ y $J_{k-1}(x)$.

3.5. 3) Sea k un número primo no menor de 3. Como $x^k = x$, entonces $1 + x - x + x^k = 1 + x$. A continuación tenemos $1 + x - (x + 1) + x \times \times (x + 1)(x + 2) \ldots (x + k - 1) = 0$, lo que quiere decir que también se puede construir cualquiera de las constantes $1, 2, \ldots, k - 1$. Después hacemos $x_2 = x_4 = \ldots = x_k = 1$, $x_1 = x$ y $x_3 = y$. Entonces $1 + x - 1 + x \cdot 1 \cdot y \cdot 1 \ldots \ldots 1 = x + xy = x(y + 1)$. Suponiendo aquí $y = z + k - 1$, obtenemos el producto xz. Queda por construir la suma de dos sumandos. Tomamos $x_1 = k - 1$, $x_2 = x$ y $x_3 = \ldots = x_k = 0$. Tenemos $1 + (k - 1) - x + (k - 1) \cdot \cdot x \cdot 0 = -x$. Después, suponemos $x_1 = x + k - 1$, $x_2 = -y$, $x_3 = \ldots = x_k = 0$ y obtenemos la suma $1 + (x + k - 1) + y + (x + k - 1)(-y)\, 0 = x + y$.

3.6. 2) $x \dot{-} (x \dot{-} y) = \text{mín}\,(x, y)$; $\sim x = (k - 1) \dot{-} x$; $\text{máx}\,(x, y) = \sim \text{mín}\,(\sim x, \sim y)$; $(k - 1) + \ldots + (k - 1) = 1$ ($k - 1$ sumandos); en consecuencia llegamos a un sistema que a ciencia cierta es completo $\{x + 1, \text{máx}\,(x, y)\}$. 6) $x \dot{-} x = 0$; $1 \dot{-} 0^2 = 1$; $-1 = k - 1$; $(k - 1) \dot{-} x = \sim x$; $x \dot{-} (x \dot{-} y) = \text{mín}\,(x, y)$; $\sim \text{mín}\,(\sim x, \sim y) = \text{máx}\,(x, y)$; con ayuda de $k - 1$, 1 y $x \dot{-} y$, obtenemos las constantes $k - 2, k - 3, \ldots, 2$; $((((k - 1) \dot{-} x) \dot{-} x) \dot{-} \ldots \dot{-} x) = J_{k-1}(x)$ (aquí x se resta $k - 1$ veces); $J_0(x) = J_{k-1} \times \times (\sim x)$; $J_{k-2}(x) = J_0((k - 2) \dot{-} x) \dot{-} J_{k-1}(x)$; $J_{k-3}(x) = J_0((k - 3) \dot{-} x) \dot{-} J_0((k - 2) \dot{-} x)$, etc. Así que se pueden construir todas las funciones del sistema de Rosser—Turquette.

3.7. 3) Es evidente que la función $\varphi(x, y) = \bar{x} j_0(y) + y j_0(x)$ toma todos los k valores de E_k. Tenemos $\varphi(x, x) = j_0(x)$, $j_0(j_0(x)) = 1 - j_0(x)$, $\varphi j_0(x)$, $1 - j_0(x)) = 1 + j_0(x)$, $j_0(1 + j_0(x)) = 0$, $\varphi(0, x) = x + j_0(x)$, $\varphi(x, 0) = x + 1$, $\varphi(j_1(x), x + j_0(x)) = x + j_0(x) - j_1(x)$. Según el teorema de S. Picard el sistema $\{x + j_0(x), x + 1, x + j_0(x) - j_1(x)\}$ es completo en $P_k^{(1)}$. Además hay que emplear el criterio de Slupetsky.

3.8. 1) Con $k = 2m \geqslant 4$ el sistema no es completo. Con $k = 2m + 1 \geqslant 3$ el sistema es completo. 2) El sistema no es completo. 3) El sistema no es completo. 6) El sistema no es completo.

3.9. 1) La plenitud (en S_k) del sistema dado se puede demostrar de la manera siguiente: con inducción por i ($i \geqslant 1$) establecemos que cualquier función g de S_k que satisface la condición: $g(x) \equiv x$ con $x > i$, se genera con las funciones del conjunto $\{h_{01}(x), h_{02}(x), \ldots, h_{0i}(x)\}$. Entonces haciendo $i = k - 1$ obtenemos lo exigido. El paso inductivo se realiza de la siguiente manera. Sea $g(x) \equiv x$, con $x > i + 1$ y $g(i + 1) = j$, $g(l) = i + 1$ (aquí $j \neq i + 1$ y $0 \leqslant l \leqslant i$). Tomamos la función $h(x)$, que coincide con $g(x)$ en todos los puntos excepto en $x = l$ y $x = i + 1$, y con estos dos valores del argumento de la función h es: $h(l) = j$ y $h(i + 1) = i + 1$. Es evidente que la función $h(x)$ ya está construida (por presupuesto de la inducción). No es difícil convencerse de que $g(x) = h(h_{0(i+1)}(h_{0l}(h_{0(i+1)}(x))))$. 2) y 3) Reducir estos sistemas a un sistema del problema anterior.

3.10. Como se deduce del problema 3.9, 1) el sistema dado genera el conjunto S_k. Empleando la función $x + j_0(x)$ no será difícil construir cualquier función que saca exactamente un valor (de E_k). Después de esto, suponiendo que se tienen todas las funciones que sacan no más de i valores ($1 \leqslant i \leqslant k - 2$) hay que mostrar cómo se puede construir una función arbitraria de $P_k^{(1)}$ que saca $i + 1$ valores. Sea $g(x)$ una función arbitraria que saca sólo un valor. Entonces existen exactamente dos valores del argumento, e_0 y e_1 en los que los valores de la función $g(x)$ son iguales, o sea, que $g(e_0) = g(e_1)$. Los elementos del conjunto $E_k \setminus \{e_0, e_1\}$ se designan por $e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}$. Tomemos dos funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ del conjunto S_k : $g_1(e_r) = r$, $r = 0, 1, \ldots, k-1$; $g_2(s) = g(e_s)$, $s = 1, 2, \ldots, k-1$, y $g_2(0) = e \in E_k \setminus g(E_k)$. Designemos la función $x + j_0(x)$ por $h_0(x)$. Tenemos $g(x) = g_2(h_0(g_1(x)))$. Tomemos ahora la función arbitraria $g'(x)$ que saca $i+1$ valores $(1 \leqslant i \leqslant k-2)$. Sea e_0' uno de estos valores. Supongamos que $g'(b_0) = g'(b_1)$. Examinemos la función $f_1(x)$ que coincide con $g'(x)$ en todos los puntos menos en $x = b_0$, y que $f_1(b_0) = e_0'$. Es evidente que la función $f(x)$ ya la tenemos construida (por presupuesto de la inducción). Sean $a_1, \ldots, a_s$ todos los diferentes valores que toma la función $g'(x)$ (aquí $s = k - i - 1 \geqslant 1$), y $E_k \setminus \{a_1, \ldots, a_s\} = \{e_0', e_1', \ldots, e_i'\}$. Tomemos la función $f_2(x)$ que tiene la siguiente forma:

$$f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \neq e_0', \\ g'(b_0), & \text{si } x = e_0'. \end{cases}$$

Se ve fácilmente que la función $f_2(x)$ saca sólo un valor, lo que quiere decir que sabemos construirla. Tenemos $g'(x) = f_2(f_1(x))$.

3.14. 1) $s(x) = \sim x$. 2) $s(x) = \sim x$. 3) $s(x) = x - 1$.

3.15. Esta afirmación contradice a que en P_k el número de clases precompletas no es mayor que 2^{k^k} (véanse los problemas 2.17 y 3.11).

3.16. $f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy - x^2 - x - y - 1$ es una función de Sheffer, y $f(x, y) + x \in T(\{1\})$. Para la demostración de que $[f(x, y)] = P_3$ es suficiente construir tres funciones: $x + 1$, $x + j_0(x)$ y $x + j_0(x) - j_1(x)$ y emplear los teoremas de S. Picard y E. Slupetsky. Sea $\varphi(x) = f(x, x)$, entonces $\varphi(\varphi(x)) = x + 1$, $g(x) = f(x, x+1) = x + j_0(x)$, $f(g(x), g(x)) = x^2 - j_1(x)$, $g(x^2 - j_1(x)) \equiv 1$, $f(x, 1) = x + j_0(x) - j_1(x)$.

3.18. Con ninguno de los valores $k \geqslant 3$.

3.22. Este conjunto no es más que numerable. Al mismo tiempo existe un conjunto numerable-infinito $\{K_n\}$ de clases cerradas, cada una de las cuales contiene un número finito de funciones no congruentes de par en par: $K_n = [f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, $n = 2, 3, \ldots$, donde $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = j_1(x_1) \times j_2(x_2) j_2(x_3) \ldots j_2(x_n)$.

3.24. Tal clase es, por ejemplo, la clase $K = [f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2, x_3), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots]$, donde $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = j_1(x_1) j_2(x_2) j_2(x_3) \ldots j_2(x_n)$.

3.25. 1) $B = \{k-1, j_0(x), x \dot{-} y\}$. Realmente $[B] \supset \{0, 1, \ldots, k-2, k-1\}$, $j_{k-1}(x) = j_0((k-1) \dot{-} x)$, $j_{k-2}(x) = j_0((k-2) \dot{-} x) \dot{-} j_{k-1}(x)$, $j_{k-3}(x) = j_0((k-3) \dot{-} x) \dot{-} j_0((k-2) \dot{-} x)$, ... Continuando, cualquier función $g(x)$ de $P_k^{(1)}$ se puede construir de la forma siguiente. Primero construimos la función $g_0(x) = ((((k-1) \dot{-} j\ (x)) \dot{-} j_0(x)) \dot{-} \ldots \dot{-} j_0(x))$ donde $j_0(x)$ se resta de $k-1$ un número de veces r_0 tal, que $g_0(0) = g(0)$, o sea, $r_0 = k - 1 - g(0)$. Después, de $g_0(x)$ restamos $r_1 = k - 1 - g(1)$ veces la función $j_1(x)$, etc. En particular se puede construir $\bar{x}$. Para la demostración de la plenitud del sistema B queda recordar que $\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$, $\max(x, y) = \sim \min(\sim x, \sim y)$ y que el sistema $\{\bar{x}, \max(x, y)\}$ es completo en P_k. Continuando, es evidente que no se puede extraer la función $x \dot{-} y$ de B

puesto que entonces se quedarán sólo las funciones que dependen sustancialmente de no más que de una variable). Observaremos además que $\{j_0(x), x \dot{-} y\} \subset T(\{0, 1\})$, y $\{k-1, x \dot{-} y\} \subset T(\{0, k-1\})$. 3) $\{\sim x, \text{mín}(x, y), x + y\}$. Es bueno tener en cuenta que $\{\sim x, \text{mín}(x, y)\} \subset T(\{0, k-1\})$, $\{\sim x, x+y\} \subset L$ y $\text{mín}(x, y), x + y\} \subset T(\{0\})$. 5) $\{j_0(x), x + y^2\}$. Aquí conviene tener en cuenta que $j_0(j_0(x)) + (j_0(x))^2 = 1$, y que $x + y^2$ se puede emplear para la construcción de todas las funciones de un lugar (mediante $j_0(x), j_1(x), \ldots, j_{k-1}(x)$) casi de la misma manera que se empleó la función $x + y$ en el problema 1.9.

Capítulo IV

§ 1

1.1. Se deduce del cálculo de los pares del tipo (v, x), donde $v \in V$, $x \in X$ v y x son incidentes.

1.2. 2) Ninguno. **1.3.** La inducción por el número de aristas.

1.5. 1) Sea $O(v)$ el conjunto de vértices adyacentes a v y $O'(v) = \{v\} \cup O(v)$. Según la condición: $|O'(v)| \geqslant (n+1)/2$ y $|V \setminus O'(v)| \leqslant (n-1)/2$. De esto se deduce que cada vértice de $V \setminus O'(v)$ es contigua a cierto vértice de $O'(v)$, en consecuencia, el grafo es conexo. 2) Con un n par no se puede. Con un n impar se puede.]

1.10. Sean $[v, u]$, $[w, t]$ dos cadenas de longitud máxima, que no tienen vértices comunes en G. El grafo G es conexo. En consecuencia, existe la cadena Z que uno, por ejemplo, los vértices v y w. Sea v_1 el último vértice de la cadena $[v, u]$ que se encuentra en el camino de v a w a lo largo de la cadena Z, y w_1 el primer vértice de la cadena $[w, t]$ que se encuentra por este camino después de v_1. El vértice v_1 de la cadena $[v, u]$ la divide en dos partes: $[v, v_1]$ y $[v_1 u]$. Supongamos que la cadena $[v, v_1]$ no sea más corta que $[v_1, u]$. Análogamente el vértice w_1 divide la cadena $[w, t]$ en dos partes. Supongamos que $[w, w_1]$ no sea más corta que $[w_1, t]$. Entonces la cadena $[v, v_1; w_1, w]$ será más larga que cada una de las cadenas $[v, u]$ y $[w, t]$. Es una contradicción.

1.18. INDICACIÓN. Examinar el complemento de los grafos G y H. **1.20**. $2p$. **1.22.** Seis.

1.24. 1) Sean v, u, w tres vértices del mismo grado de cierto grafo G de R_n. Supongamos que v y u son adyacentes y v y w no lo son. Para los vértices u y w es válida aunque sea una de las inclusiones: $O(u) \subseteq O(w)$ o $O(w) \subseteq O(u)$. De esto y de la igualdad $|O(u)| = |O(w)|$ se deduce que $O(u) = O(w)$ y, en consecuencia, $v \in O(w)$. Veamos ahora el par v y w. Según lo demostrado, v y w son adyacentes. Pero la inclusión $O'(v) \subseteq O'(w)$ no tiene lugar, puesto que $u \in O'(v) \setminus O(w)$. Tampoco es válido que $O'(w) \subset O'(v)$, puesto que $|O'(w)| = |O'(v)|$. Obtenemos una contradicción.

1.26. 1) El número de aristas del grafo G es igual a la suma de los números de aristas de los grafos H_i dividida por $n-1$. 2) Se deduce de 1). **1.28.** Dos.

1.34. 1) Existe. 2) No existe. **1.35.** Es cierto. **1.39.** 2) No es cierto.

2.5. Sea G un grafo plano doblemente conexo con no menos de dos caras internas. Si existe una cara interna separada de la cara externa por una cadena única simple, entonces extrayendo esta cadena se obtiene un grafo biconexo (demostrar esta afirmación). Supóngamos que no existe una cara así. Entonces, toda cara interior que tiene una cadena común con la cara exterior además tiene con ella aunque sea un vértice común que no se encuentra en esa cadena. Mostremos que este caso es imposible. Numeraremos todas las caras interiores. Marcaremos con el índice i los trozos conexos de frontera de las caras exteriores que pertenecen al mismo tiempo a las caras interiores que tienen número i. Entonces habrá tales índices i, j que se encontrarán al rodear las fronteras de las caras exteriores en el orden de i, j, i, j. Designaremos los trozos de frontera respectivos por Γ_{i1}, Γ_{j1}, Γ_{i2}, Γ_{j2}. Seleccionamos en cada uno de los trozos un punto del plano: a_1, b_1, a_2, b_2. Entonces se pueden unir los puntos a_1 y a_2 con una curva, todos los puntos de la cual, excluyendo a_1 y a_2, son puntos interiores de la cara con el número i, y los puntos b_1 y b_2 se pueden unir con una curva, cuya parte interior se encuentra en la cara con el número i. Las curvas se intersecan en cierto punto d que así resulta punto interior de dos caras diferentes. Ha resultado una contradicción.

2.9. Sean G un grafo planar biconexo, y G' su realización plana. Sean además, n, el número de vértices; m, el número de aristas; r, el número de caras del grafo G' (incluyendo también la exterior). En virtud del problema 2.6 tenemos $r = m - n + 2$. El número de pares del tipo (v, x) donde v es el vértice incidente a la arista x, es igual a $2m$. Por otra parte, este número es igual a la suma de los grados de los vértices del grafo. Como cada grado, por el enunciado, es no menor que seis, entonces $2m \geqslant 6n$, o sea, $m \geqslant 3n$. La frontera de cada cara tiene no menos de tres aristas y cada arista pertenece a la frontera de no más de dos caras. De ahí que $3r \leqslant 2m$. No es dijícil convencerse de que el sistema $r = m - n + 2$, $m \geqslant 3n$, $3r \leqslant 2m$ es incompatible.

2.14. Suponemos que el grafo K_5 es planar. Sea K_5' su realización plana. Entonces el número r de caras del grupo K_5' es igual a $r = m - n + 2$, donde m es el número de aristas y n, el número de vértices. En forma análoga al problema 2.9, tenemos $3r \leqslant 2m$. De aquí que $m \leqslant 3n - 6$. Pero $m = 10$ y $n = 5$. Se obtuvo una contradicción. Al demostrar la no planicidad del grafo $K_{3,3}$, observar que cada uno de sus ciclos contiene no menos de cuatro aristas y, suponiendo que $K_{3,3}$ es planar, utilizar 2.11.

2.22. Cada vértice de un grafo sexticonexo tiene un grado no menor de 6 (véase 2.9).

2.27. 3) $\chi(B^n) = 2$, $\chi'(B^n) = n$.

2.28. Dos.

2.45. 1) Sea $\tau(m)$ el número de encubrimientos sin salida de una cadena de longitud m. Entonces $\tau(m) = \tau(m-2) + \tau(m-3)$, $\tau(1) = \tau(2) = \tau(3)$. Véase en el párrafo 3 del capítulo VIII la resolución de relaciones recurrentes de este tipo.

2.49. 1) $\overline{\nu}_k(G)$ es igual al número medio de vértices no contiguos a los vértices del subconjunto $U \subseteq V$ de potencia k. En consecuencia, existe tal subconjunto U_0, $|U_0| = k$, que $\nu(U_0) \leqslant \bar{\nu}_k(G)$. Si W es el conjunto de vértices no adyacentes a los vértices de U_0, entonces $W \cup U_0$ es el encubrimiento de los vértices de una potencia que no supera a $k + \bar{\nu}_k(G)$. 2) Sea $e(v, u) = 1$, si los vértices v y u no son adyacentes, y $e(v, u) = 0$, si v y u lo son. Sea $S_k(v)$ el número de subconjuntos $U \subseteq V$ compuestos de k vértices, ninguno de los cuales es adyacente a v, y $d(v)$ es el grado del vértice v. Entonces

$$\sum_{U \subseteq V,\ |U|=k} \nu(U) = \sum_{U \subseteq V,\ |V|=k} \sum_{v \in V} e(v, u) =$$

$$= \sum_{v \in V} S_k(v) = \sum_{v \in V} \binom{n-d(v)}{k} \leqslant |V| \binom{n-d_0}{k},$$

de lo que

$$\bar{\nu}_k(G) \leqslant |V| \prod_{i=0}^{|V|-1} \left(1 - \frac{d_0}{|V|-i}\right).$$

§ 3

3.2. Se puede hacer la demostración con inducción por el número de vértices del orgrafo. En el paso inductivo será útil extraer del orgrafo uno de los vértices: v_1 o v_2.

3.5. Emplear la inducción por el número k.

3.8. La afirmación se puede demostrar con inducción por el número de vértices en el torneo.

3.10. La desigualdad es evidente con $n = 1$. Sea válida para tales n, que $1 \leqslant n \leqslant m$. Examinemos el torneo T con $m + 1$ vértices. Como en todo torneo con $m + 1$ vértices hay exactamente C^2_{m+1} arcos, entonces se podrá encontrar un vértice v_0 con un semigrado de salida $\geqslant [(m + 1)/2]$. Extrayendo de T el vértice v_0 obtenemos el torneo T' que tiene m vértices y contiene el conjunto S formado de no menos que de $f(m)$ arcos concordados. Los arcos que salen de v_0 y los arcos que pertenecen a S están concordados. Aprovechando la suposición inductiva, tenemos

$$f(m+1) \geqslant \left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m+1}{2}\right] = \left[\frac{m+1}{2}\right]\left[\frac{m+2}{2}\right].$$

3.12. Cualquier grupo de orden par contiene aunque sea un elemento inverso a sí mismo y diferente del elemento unitario del grupo. Si el grupo del torneo T fuese par, entonces en él se podría encontrar un elemento α que satisfaciese la propiedad indicada anteriormente. Como α no es elemento unitario, entonces existen dos vértices v_1 y v_2 tales que $\alpha(v_1) = v_2$ y $\alpha(v_2) = v_1$. Supongamos que T contiene el arco (v_1, v_2). Entonces el arco $(\alpha(v_1), \alpha(v_2))$ también tendría que pertenecer a T. Hemos obtenido una contradicción.

3.15. La demostración se puede hacer con inducción por el número de componentes fuertes del torneo. Si en la condensación hay bien sólo un vértice, o bien dos vértices, entonces, ella es un orgrafo transitivo, por definición.

3.19. Emplear la inducción por el número de vértices en el orgrafo. En el paso inductivo hay que extraer uno de los vértices con semigrado nulo de salida, estableciendo de antemano la existencia de tal vértice en el orgrafo dado.

3.21. La demostración se puede realizar con inducción por el número de vértices del orgrafo.

3.25. Emplear la inducción por la longitud del contorno.

3.29. La demostración se puede hacer con inducción por el orden del determinante.

§ 4

4.2. Partiendo de un vértice arbitrario del árbol, construiremos una cadena añadiéndole en cada paso un vértice nuevo hasta que eso sea posible. En el momento cuando ya no se puede hacer eso, los vértices finales de la cadena resultarán vértices colgantes del árbol. El proceso de construcción de la cadena se interrumpe a causa de que el conjunto de los vértices es finito y de la falta de ciclos en el árbol.

4.4. 1) Según el problema 1.26 por el sistema $F(G)$ se puede restablecer el número de aristas del grafo G y su conexidad.

4.9. Se puede hacer la inducción por la dimensión del radio del árbol.

4.12. La potencia es continual. 4.14. 2. 4.23. Hacer la demostración con inducción por la longitud del vector. 4.28. Es cierto. 4.30. Es cierto. 4.31. Hablando en general, no es cierto. 4.32. Hablando en general, no es cierto. 4.33. $n-1$.

4.34. Una red no descomponible no tiene aristas paralelas y no es p-descomponible. De aquí que $m \leqslant \binom{n}{2} - 1$. En una red no descomponible cada vértice interior tiene un grado no inferior a 3, y los polos, un grado no inferior a 2, con $n > 2$.

4.40. 1) a), b), c). Se puede. 3) a), b). No se puede. 4.43. Examinar Γ_m^p, $m > 3$. 4.52. No es cierto.

§ 5

5.2. 1) $2^{\binom{n}{2}}$. 2) $\binom{n^2}{m}$. 5.3. 2) Emplear la fórmula «de inclusiones y exclusiones». 5.5. 1) Emplear el que en un grafo conexo, $m \leqslant \binom{n}{2}$ y $m \geqslant n-1$. 2) En un grafo conexo con m aristas hay no más de $m+1$ vértices. El número de pares de vértices no iguales es no más de $\binom{m+1}{2}$. De aquí que $\psi(m) \leqslant \binom{\binom{m+1}{2}}{m}$. A continuación se emplea la fórmula de Stirling.

5.6. Observar que el número de vértices en el grafo no es mayor que $2m$. Luego es análogo al problema 5.5, 2).

5.7. Véanse 5.5, 2) y 5.6.

5.9. 1) El código de un árbol con m aristas es un vector binario de longitud $2m$ con m coordenadas unitarias. 2) Véase 4.24.

5.10. Emplear 5.4 y la fórmula de Stirling. 5.14. Véanse VIII. 3.18 y VIII.3.19.

5.16. La red $\Gamma(a, b)$ que tiene las propiedades I y II es el resultado de la sustitución de las aristas de la red Γ_k^p, $k = \overline{1, m+1}$ en lugar de las redes del tipo $\Gamma_{n-1}^s(a, b)$. El número de estas redes es igual al número de arreglos de m objetos en $n - 1$ cajones de tal manera que ninguno de los cajones en ningún arreglo se encuentre vacío, y es igual a $\binom{m-1}{n-1}$.

5.17. 2) Utilizar el problema 5.14.

5.19. Si el grafo no es conexo, entonces se puede dividir el conjunto de sus vértices en dos fracciones tales, que no existen aristas que unen vértices de diferentes partes. Una de las fracciones tiene un número de vértices que se comprende entre los límites de 1 y $[n/2]$. Un grafo con los vértices numerados se define por completo con la elección de las aristas. El número de aristas que no se permite elegir es igual a $k(n - k)$, donde k es el número de vértices en una de las partes.

5.22. Todo subgrafo del cubo B^n se determina por completo dando un conjunto de vértices. El conjunto de vértices de un subgrafo conexo se determina dando su soporte (un árbol que contiene todos los vértices). Para presentar un árbol que sea subgrafo del cubo B^n se puede elegir algún vértice del cubo, perteneciente a un árbol (hay no más de 2^n maneras). Para dar un árbol con k vértices no hay más de 4^{k-1} procedimientos. Para cada arista del árbol se puede indicar su dirección como arista del cubo B^n de no más que de n maneras. De esto se deduce la evaluación

5.26. $\binom{n}{3}\dfrac{\binom{\binom{n}{2}-3}{m-3}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}$. 5.29. $\binom{n}{k}2^{-\binom{k}{2}}$.

5.31. Sea $\delta(n)$ la parte de aquellos grafos que tienen $p(G) \geqslant 1$. En virtud de la desigualdad (1) tenemos que $\delta(n) \leqslant \bar{p}(n) \to 0$ con $n \to \infty$. De esto se deduce el resultado.

5.32. 2) $Z(\Gamma(K_{2,3}), t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \dfrac{1}{2!\,3!}(t_1^2 + t_2)(t_1^3 + 3t_1t_2 + 2t_3)$.

5.33. 1) Tomemos una permutación arbitraria $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de números del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ y coloquemos en ella paréntesis de tal manera que resulte una sustitución con estructura cíclica $(j) = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$; en este caso primero se dispondrán j_1 ciclos de longitud 1, después j_2 ciclos de longitud 2, etc. (o sea que la sustitución tendrá la forma siguiente: $(a_1)(a_2)\ldots(a_{j_1}) \times \times (a_{j_1+1}a_{j_1+2})\ldots$). Supongamos ahora que de dos permutaciones diferentes de los elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ se han construido de la manera indicada anteriormente dos sustituciones π_1 y π_2 con una estructura cíclica (j).

Se plantea la pregunta: ¿cuándo π_1 coincidirá con π_2? La coincidencia puede tener lugar por dos causas: (1) en las sustituciones π_1 y π_2 hay ciclos iguales que se encuentran en diferentes lugares; (2) ciclos, que aunque son iguales (como los ciclos de sustitución) pero con la construcción indicada anteriormente ellos comienzan con diferentes elementos (por ejemplo (123) y (231)). La primer causa lleva la repetición de la misma sustitución $\prod_{k=1}^{n} j_k!$ veces, y la segunda, a la repetición $\prod_{k=1}^{n} k^{j_k}$ veces; además, estas causas actúan independientemente uno del otro. 4) La demostración se puede hacer con inducción por n, empleando las relaciones de los puntos 1) y 2) de este problema.

5.34. Es útil emplear el siguiente hecho evidente: el ciclo es una sustitución par si, y sólo si, su longitud es impar.

5.36. Se deduce del teorema enumeracionable de Polya.

5.37. Interpretar de una manera adecuada los coeficientes del binomio $1 + x$ y emplear el teorema enumeracionable de Polya.

5.40. A cada grafo cotejarle una colección de grafos conexos, que sea colección de todos sus componentes de conexión. Después emplear el teorema enumeracionable de Polya.

5.42. Todo torneo se define unívocamente con su condensación (con los vértices numerados) y colección de componentes fuertes. La numeración de los vértices hace falta solamente para cotejarlos con los respectivos componentes fuertes del torneo.

§ 6

6.3. Catorce. 6.4. Véase 6.2. 6.6. Se deduce de que cualquier función $f(\tilde{x}^n)$ tiene una f.n.d. de complejidad no mayor que $n2^{n-1}$. 6.16. Véase 6.15.

6.20. Se deduce de que la complejidad del esquema dual al dado, es igual a la complejidad del esquema incial, y de 6.18.

6.21. Si un esquema contiene no más de siete contactos, se lo puede dibujar en un plano de tal manera, que sigue siendo plano después de añadir una arista entre los polos. En consecuencia, existe un esquema dual a él. La sustitución en los últimos dos contactos del tipo x^{σ} por $x^{\bar{\sigma}}$ lleva a un esquema que efectúa la negación de la función que se realiza en el esquema inicial.

6.22. Escojamos un contacto arbitrario de un esquema sin repetición y que realiza la función booleana f, y examinemos la cadena que pasa por este contacto. Los valores de las variables, diferentes de aquellas que entran en la cadena elegida, se pueden fijar de tal manera, que todos los contactos que no entran en la cadena resultarán desconectados. El esquema obtenido realiza la c.e. dependiente de la variable elegida. De este modo, resulta que cierto componente de la función f, y en consecuencia la propia función f, depende sustancialmente de la variable elegida.

6.25. El esquema Σ representado en la fig. 21 tiene entre sus secciones los conjuntos $\{x, y\}$, $\{r, w\}$, $\{x, r, v, z\}$ y $\{x, w, t, u\}$. Entonces, si existe un esquema irrepetible Σ_1 que realiza la función f^*, pues en él habrá cadenas con las conductibilidades xy, rw, $xrvz$, $xwtu$. Sin limitación de generalidad, se puede considerar que el contacto x confluye al polo a de la red Σ_1. Entonces a este polo también confluye el contacto r, o bien el contacto w. En el primer caso, en Σ_1 no existe la red $xrvz$, y en el segundo, la red $xwtu$.

6.26. No es cierto. Utilizar el que $\overline{f}(x_1, \ldots, x_n) = f^*(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ y el resultado del problema 6.25.

Capítulo V

§ 1

1.1. Sea $\rho(v, w) \leqslant 2t$ para ciertos v y w de C. Entonces $S_t^n(v) \cap S_t^n(w) \neq \neq \varnothing$. En consecuencia, cualquier transformación ψ: $B^n \to C$ tal, que $S_t^n(u) \subseteq \subseteq \psi^{-1}(u)$ para todo $u \in C$ no es unívoca.

1.2. 1) Hablando en general: no es cierto. 2) Es cierto. 3) Hablando en general, no es cierto.

1.3. Los conjuntos $C_0 = \{\widetilde{\alpha} \in C, \|\alpha\|$ es par$\}$ y $C_1 = \{\widetilde{\alpha} \in C, \|\widetilde{\alpha}\|$ es impar$\}$, son códigos que descubren un error. Aunque sea uno de ellos contiene no menos de la mitad de palabras de C.

1.4. 1] Descubre uno y corrige 0 errores. 2) Descubre $n - 1$ y corrige $[(n-1)/2]$ errores.

1.7. 2) 16. 1.8. 2^{n-1}. 1.9. 2. 1.12. No existe.

1.13. Supongamos que para cierto $n > 7$ existe un $(n, 3)$-código densamente empaquetado. Entonces, según el 1.11, para esta n el número $\sum_{i=0}^{3}\binom{n}{i}$ es el exponente del dos. En consecuencia, para cierta k se cumple la igualdad $(n+1)(n^2-n-6) = 3\cdot 2^k$. Entonces, o bien $n+1$ es el exponente del dos, o bien $n+1$ tiene la forma $3\cdot 2^r$ para cierto r natural. Si $n+1=2^r$, entonces $n^2-n+6 = 3\cdot 2^{k-r}$. Sustituyendo en la última igualdad $n = 2^r - 1$, tenemos $2^{2r-3} - 3\cdot 2^{r-3} + 1 = 3\cdot 2^{k-r-3}$. Para $r > 3$, el primer miembro es un número impar mayor que 3 y en el segundo habrá, o bien un número par, o bien 3. El segundo caso se examina de manera análoga.

1.14. Supongamos que los vértices $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ forman un (n, d)-código. Sin limitación de generalidad, $\widetilde{\alpha} = \widetilde{0}$ y $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = d$. Pongamos que $A_{\sigma\tau} = \{i : \beta_i = \sigma, \gamma_i = \tau\}$, $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$. Examinemos el vértice $\widetilde{\delta}$ tal que $\delta_i = 0$ con $i \in A_{11}$ y $\delta_i = 1$ con $i \notin A_{11}$. Tenemos $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}) = \|\widetilde{\delta}\| = |A_{01} \cup A_{10} \cup A_{00}| \geqslant |A_{01} \cup A_{10}| = \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \geqslant d$, $\rho(\widetilde{\delta}, \widetilde{\beta}) \geqslant \geqslant \|\widetilde{\gamma}\| \geqslant d$, $\rho(\widetilde{\delta}, \widetilde{\gamma}) \geqslant \|\widetilde{\beta}\| = d$.

1.16. Sin limitación de generalidad consideramos que $\widetilde{0} \in C$. Para cada $\widetilde{\alpha} \in B_{d+1}^n$ existe, y además es único, un vértice $\widetilde{\gamma} \in C$ tal, que $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) \leqslant d$. Como el peso de cualquier palabra de código no nula es no menor que $2d+1$, entonces $\widetilde{\gamma} \in B_{2d+1}^n$. Sea $A(\widetilde{\gamma}) = \{\widetilde{\alpha}: \widetilde{\alpha} \in B_{d+1}^n, \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = d\}$. Entonces,

$\bigcup\limits_{\tilde{\gamma}\in C\cap B^n_{2d+1}} A(\tilde{\gamma}) = B^n_{d+1}$ y para cualesquiera $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ de $C \cap B^n_{2d+1}$, tenemos $A(\tilde{\gamma}_1) \cap A(\tilde{\gamma}_2) = \varnothing$.

1.17. La distancia de código de cualquier código equidistante que tiene una potencia mayor que 2, es par.

1.20. 1) En cada una de las caras $B^{n+d,\,1,\,\ldots,\,d}_{0\,\ldots\,0}$ y $B^{n+d,\,1,\,\ldots,\,d}_{1\,\ldots\,1}$ construimos los códigos C_0 y C_1 de potencia $m(n, d)$. Entonces $C_0 \cup C_1$ es el $\langle n+d, d\rangle$-código de potencia $2m(n, d)$. 3) INDICACIÓN. Si C es un $\langle n, d\rangle$-código en B^n, entonces para cada cara $(n-1)$-dimensional g, el conjunto $C \cap g$ es un $\langle n-1, d\rangle$-código.

1.23. Sean $n < 2d$, y C un $\langle n, d\rangle$-código arbitrario de potencia $m \geqslant 2$. Compongamos la matriz M, cuyas filas son palabras en código. Sea R la suma de distancias de par en par entre los pares (no ordenados) de palabras en código. Por una parte $R \geqslant \binom{m}{2} d$. Por otra parte $R = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(m-h_i)$, donde h_i es el número de unidades en la i-ésima columna de la matriz M. Como $h(m-h) \leqslant \frac{m^2}{4}$, entonces $\frac{m(m-1)}{2} d \leqslant n\frac{m^2}{4}$. De aquí que $m \leqslant \leqslant \frac{2d}{2d-n}$.

1.25. 3) Sea C un $\langle n, k, d\rangle$-código máximo. Entonces, el conjunto $C_i = \{\tilde{\alpha}: \tilde{\alpha} \in C, \alpha_i = 0\}$ es un $\langle n-1, k, d\rangle$-código. El número de pares de tipo $(i, \tilde{\beta})$, tales que $1 \leqslant i \leqslant n$, $\tilde{\beta} \in C_i$ no supera $n \max\limits_i |C_i| \leqslant n \cdot m(n-1, k, d)$. Por otra parte, cada vector $\tilde{\alpha} \in C$ genera $n-k$ tales pares. De aquí que

$$(n-k)\, m(n, k, d) \leqslant nm(n-1, k, d).$$

1.26. Supongamos que $\tilde{\alpha} \in B^n$, $C \subseteq B^n$ y $C_{\tilde{\alpha}} = \{\tilde{\gamma}: \tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta},\ \tilde{\beta} \in C\}$. Entonces, si C es un $\langle n, d\rangle$-código y $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) < d$, entonces $C_{\tilde{\alpha}} \cap C_{\tilde{\beta}} = \varnothing$. Efectivamente, supongamos que $\tilde{\gamma} \in C_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\delta} \in C_{\tilde{\beta}}$ y $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta} \oplus \tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} \oplus \tilde{\alpha}$. Entonces, $\rho(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) = \rho(\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\gamma}', \tilde{\beta} \oplus \tilde{\delta}') = \| \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\gamma}' \oplus \tilde{\beta} \oplus \tilde{\delta}' \| = \| (\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}) \oplus \oplus (\tilde{\gamma}' \oplus \tilde{\delta}') \| \neq 0$, puesto que en el caso contrario $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta} = \tilde{\gamma}' \oplus \tilde{\delta}'$ y, en consecuencia, $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \rho(\tilde{\gamma}', \tilde{\delta}')$. Pero $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) < d$ y $\rho(\tilde{\gamma}', \tilde{\delta}') \geqslant d$, puesto que $\tilde{\gamma}', \tilde{\delta}' \in C$. De esto se deduce la afirmación.

1.27. Se deduce de 1.26, teniendo en cuenta que en cualquier cara $(d-1)$-dimensional del cubo B^n las distancias de par en par entre los vértices no supera $d-1$ y el número de vértices es igual a 2^{d-1}.

§ 2

2.2. Un sistema linealmente independiente es, por ejemplo, B^n_1. Si s vectores de B^n son linealmente independientes, entonces todas sus combinaciones del tipo (1) representan en sí vectores diferentes de par en par. Si se encontrase un subconjunto formado de $n+1$ vectores linealmente independientes, entonces se realizaría la igualdad $|B^n| = 2^{n+1}$.

2.4. Se deduce de que el (n, k)-código es un subespacio B^n k-dimensional, o sea que en él el número máximo de vectores linealmente independientes es igual a k y toda combinación lineal de vectores de código pertenece al código.

2.5. Si en el código existe un vector de peso impar, entonces, la mitad de palabras de código tiene un peso impar y la otra mitad, par. En el caso contrario, todos los vectores tienen peso par. La primera afirmación se deduce de que el número de combinaciones lineales, en las que entra el vector dado de peso impar, es igual al número de las combinaciones en las que él falta. Todas las combinaciones se dividen en pares en los que exactamente uno tiene peso impar.

2.6. Un vector no nulo en B^n se puede elegir de $2^n - 1$ maneras. Si se eligen i vectores linealmente independientes, entonces el subespacio correspondiente tiene 2^i vectores. Todo vector del complemento a este subespacio forma, con los i vectores elegidos, un conjunto lineal independiente y todo vector del subespacio se expresa con una combinación lineal de los vectores escogidos. De este modo, el $(i+1)$-ésimo vector se puede elegir de $2^n - 2^i$ maneras.

2.7. Véase 2.6. 2.8. 2^{n-1}. 2.10. Es cierto.

2.11. 1) $m(C(H)) = 8$, $d(C(H)) = 2$; 5) $m(C(H)) = 32$, $d(C(H)) = 7$.

2.14. La matriz generadora $M(C)$ del (n, k)-código C se puede reducir al tipo (I_kP) mediante la sustitución de filas por sus combinaciones lineales y la permutación de columnas. Si el vector $\widetilde{\alpha}$ es ortogonal a cada fila de la matriz $M(C)$, entonces el vector $\widetilde{\beta}$, obtenido de $\widetilde{\alpha}$ mediante la permutación correspondiente de las coordenadas, es ortogonal a cada fila de la matriz $M(C)$, y viceversa. Una de las matrices generatrices del código C^*, dual al código C, engendrado por la matriz (I_kP) tiene la forma (P^TI_{n-k}), o sea, que C^* es $(n, n-k)$-código. De esto se deduce que también el código C^* es dual al C y es un $(n, n-k)$-código.

2.15. Análoga a 2.5.

2.16. Es evidente que la distancia d de código no es menor que el peso mínimo de un vector de código. Si $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) < d$ para ciertas palabras de código $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$, entonces, como $\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}$, también es un vector de código y $\rho(\widetilde{0}, \widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}) < d$; se llega a una contradicción con el enunciado del problema

2.17. Se deduce del 2.15 y del 2.16.

2.18. El número de unidades en la matriz del código C es igual a $\frac{1}{2}|C|n$; por otra parte, este número es no menor que $d(|C| - 1)$.

2.20. Sea $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ el vector del peso d, ortogonal a la matriz H. Designemos la i-ésima columna de la matriz H por h_i. De la ortogonalidad de $\widetilde{\alpha}$ a cada fila de la matriz H, se deduce que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i h_i = \widetilde{0}$. De esto se deduce la relación de dependencia lineal entre aquellas columnas h_i que entran en combinación lineal. En consecuencia, a cada $\widetilde{\alpha}$ de peso d del espacio nulo de la matriz H le corresponde la reunión d de columnas linealmente dependientes de esta matriz. De este modo, si cada $d-1$ columnas de la matriz H son linealmente dependientes, entonces el peso mínimo del vector de código será no menor que d, y viceversa, si existe un conjunto de $d-1$ filas linealmente dependientes, pues existe un vector de peso menor que d en el subespacio ortogonal.

2.21. Consecuencia de 2.20.

2.24. 1) De 2.18 se deduce que $g(9, 5) \leqslant 10$. No es difícil construir un $\langle 9, 5\rangle$-código lineal de potencia 4. De aquí que $g(9, 5) \in \{4, 8\}$. Supongamos que C es un $\langle 9, 5\rangle$-código lineal de potencia 8. Entonces cuatro vectores de código tienen peso impar. Ningunos dos de estos cuatro se encuentran fuera de B_5^g. Pero entre tres vectores de B_5^g siempre existen dos con una distancia no mayor que 4 entre los mismos.

§ 3

3.4. Examinar el código $\{a, aabb, bb\}$.

3.8. Véase el 3.7.

3.10. El número de palabras de longitud menor que l, en un alfabeto de k letras, es igual a $\sum_{i=0}^{l-1} k^i = \frac{k^l-1}{k-1}$. De aquí que si $k^l - 1 < m(k-1)$, en M existe una palabra de longitud no menor que $\log_k(1+m(k-1))$.

3.11. 1) Hacer la demostración con inducción por n. 2) Para todo código divisible existe un código prefijo con la misma colección de longitudes de las palabras de código (véase [10], parte 5).

3.18. 1) Hacer la demostración con inducción por m.

3.19. Se deduce de 3.18.

3.22. 1) Sea $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ un código binario prefijo y la longitud máxima de la palabra código, igual a n. Sea $w = \alpha_1 \ldots \alpha_{\lambda(w)}$ una palabra de C. Sea $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ un vector en el que $\gamma_i = \alpha_i$, $i = \overline{1, \lambda(w)}$ y en las demás coordenadas haya tachaduras. Entonces el vector $\tilde{\gamma}$ es un código $(n-\lambda(w))$-dimensional de la cara del cubo B. De la prefijación del código se deduce que las caras que corresponden a diferentes palabras de código no se intersecan. De aquí que $\sum_{j=1}^{m} 2^{n-\lambda(w_j)} \leqslant 2^n$. 2) De la plenitud del código se deduce que para cada $\tilde{\alpha} \in B^n$ existe una palabra de código w, que es un prefijo de $\tilde{\alpha}$. Eso quiere decir que la colección $\tilde{\alpha}$ se contiene en la cara correspondiente a la palabra w. De la prefijación del código se deduce que las caras que corresponden a diferentes palabras de código no se intersecan. Así que la totalidad de caras, que corresponden a las palabras de un código prefijo completo, da la partición del cubo B^n en caras que no se intersecan. De esto se deduce una igualdad. 3) La demostración es análoga a 1.1.34.

3.23. 1) Es cierto. La afirmación se deduce de que todo código óptimo es código prefijo completo.

3.24. Inducción por m.

3.25. Un código prefijo con una longitud de las palabras de código $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ existe si, y sólo si, $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$ (véase el 3.22). De aquí que $L_m = \min \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$, donde el mínimo se toma en todos los conjuntos $\{\lambda_1, \ldots$

$\ldots, \lambda_m\}$ de números naturales que satisfacen la condición $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$. El mínimo de $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ se alcanza en tales conjuntos $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ que $|\lambda_i - \lambda_j| \leqslant 1$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Efectivamente, si existen tales λ_i, λ_j que $\lambda_i - \lambda_j \geqslant 2$ entonces después de la sustitución de λ_i por $\lambda_i - 1$, y de λ_j por $\lambda_j + 1$, la magnitud $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ no cambia, y la condición $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\lambda_i} \leqslant 1$ se sigue cumpliendo. Sea $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ un conjunto de números tal, que $\lambda_i = \lambda$ con $i = \overline{1, m-r}$, $\lambda_i = \lambda + 1$ con $m - r < i \leqslant m$, λ es un número entero. Entonces, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = m\lambda + r$, y la condición toma la forma $m2^{-\lambda} - r2^{-\lambda-1} \leqslant 1$. De la condición se deduce que $\lambda > (\log_2 m) - 1$ y, en consecuencia, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \geqslant m\,[\log_2 m]$.

3.27. 1) Para $m = 3$, suponiendo $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 > 0$, tenemos $L(P) = p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 1 + p_2 + p_3 > 1$. Luego la afirmación se deduce de que con la operación de ampliación el coste del código no disminuye. 2) Para los $\varepsilon > 0$ y $m \geqslant 2$ dados véase la distribución $\mathbf{P} = \left(1 - \delta, \frac{\delta}{m-1}, \ldots, \frac{\delta}{m-1}\right)$, donde $\delta = \frac{\varepsilon}{]\log_2 m[}$.

Capítulo VI

§ 1

1.1. 1) No lo es, puesto que la señal de salida en el momento de tiempo t depende de la señal de entrada en el momento siguiente. 3) Sí, lo es.

1.2. 3) No lo es. 4) Lo es.

1.3. 2) Lo es. 3) Lo es. 5) Lo es: la salida en el momento de tiempo t es igual a la negación de la entrada en este mismo momento.

1.4. 2) No lo es. 4) No lo es.

1.5. 1) No se puede determinar hasta una función determinada. 2) La función φ admite continuar la determinación hasta una función determinada. 3) Es posible continuar la determinación.

1.6. Es suficiente examinar la función

$$\varphi(X_1, X_2) = \begin{cases} \tilde{1}^w, & \text{si} \quad X_2 = \tilde{0}^w, \\ \tilde{x}_1^w, & \text{si} \quad X_2 \neq \tilde{0}^w \ \text{y} \ X_1 = \tilde{x}_1^w. \end{cases}$$

1.9. 2) El peso de la función φ es igual a 2. 1.10. 1) Son equivalentes. 2) No son equivalentes. 1.11. 2) Sí, lo es. Por ejemplo, $\varphi_1 = \varphi_{\tilde{x}^s}$ con $s = 1$ y $\tilde{x}^s = 0$. 3) No lo es. 1.12. Sí, lo es. El peso es igual a 4. 3) Sí, lo es. El peso es igual a 7. 1.13. 2) Si $r = 3$, entonces en calidad de función adecuada se puede tomar $\varphi(\tilde{x}^w) = \langle 3/4 \rangle$.

1.16. Con $r = 3$ en calidad de tal función se puede tomar

$$\varphi: \begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(t) = (x(t) \oplus x(t-1)) \ \text{ y } \ (t-1), \ t \geqslant 2. \end{cases}$$

1.18. Véase la indicación al problema 1.6, 1).

1.20. 2) Para obtener la respuesta es suficiente examinar la función

$$\varphi(\widetilde{x^w}) = 00\, x(2)\, x(3) \ldots x(t) \ldots$$

1.22. Es un operador engendrado.

1.24. 2) Si $|A| = 1$ y $|B| \geqslant 2$, entonces $|\Phi_{A,B}| = c$. Si $|B| = 1$ y $|A| \geqslant 1$ entonces $|\Phi_{A,B}| = 1$.

1.25. 1) Si $|A| > 1$, entonces cada clase $K_j(s)$ tiene una potencia c. 2) El número de diferentes clases es igual a $|A|^s$.

1.26. 2) Si $|B| = 1$ y $|A| \geqslant 1$, entonces $|\hat{\Phi}_{A,B}| = 1$.

§ 2

2.1. 4) Las ecuaciones canónicas tienen la forma siguiente:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \vee \bar{x}(t))\, \bar{q}(t-1), \\ q(t) = (x(t) \vee \bar{x}(t)\, \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

la señal de entrada $x(t)$ puede ser omitida puesto que la función φ no depende sustancialmente de ella.

2.2. 1) Se puede acabar de determinar el operador de peso 4, descrito con las ecuaciones canónicas siguientes.

$$\begin{cases} y(t) = \bar{x}(t)\, q_1(t-1)\, q_2(t-1) \oplus (t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_1(t) = m(x(t),\, q_1(t-1),\, q_2(t-1)) \oplus x(t) \oplus q_1(t-1), \\ q_2(t) = \bar{x}(t)\, (\bar{q}_1(t-1) \vee \bar{q}_2(t-1)) \oplus q_1(t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

2.3. 4) El peso del operador es igual a 3 (se pueden identificar los estados que responden a los pares $(q_1, q_2) = (1, 0)$ y $(q_1, q_2) = (1, 1)$.

2.4. A cada función de peso w (del conjunto indicado de funciones) le corresponde una tabla canónica que contiene $n + 1$ columnas «de entrada» (también se incluye la columna que describe el estado de la función) y $m + 1$ columnas «de salida» (aquí también se toman en cuenta las funciones de transición). En esta tabla hay wk^n colecciones «de entrada». «A la salida» de la tabla tienen que haber algunas colecciones del conjunto que contiene wk^m elementos (colecciones «de salida»). Para obtener la evaluación superior necesaria hay que considerar que a cada colección «de entrada» se le puede cotejar cualquier colección «de salida».

2.8. 3) Las ecuaciones canónicas del operador ψ tienen la forma

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = \bar{q}(t-1), \\ q(0) = 0, \end{cases}$$

o sea que el operador ψ es autónomo.

2.9. 1) La ecuación canónica del operador obtenido del operador φ mediante la introducción de la retroacción por las variables x_2 e y_1 tiene la forma siguiente:

$$\begin{cases} y'(t)=1 \\ q'(t)=x_1(t)\,\overline{x}_3(t)\,q'(t-1), \\ q'(0)=0. \end{cases}$$

2.10. 1) El peso del operador es igual a 2.

2.11. 1) En calidad de φ se puede tomar el siguiente a.-d. operador:

$$\varphi: \begin{cases} y(t)=x_1(t)\vee\overline{q}(t-1), \\ q(t)=x_1(t)\oplus x_2(t), \\ q(0)=0. \end{cases}$$

2.14. 1) y 2) Examinar el operador φ_3 (φ_3). 5) Es útil investigar el operador φ_3 ($\varphi_{\equiv 0}$), donde $\varphi_{\equiv 0}$ es un operador engendrado por la constante 0.

2.15. 3) El peso de la superposición es igual a 4. 2.16. 2) El operador es autónomo. 3) El operador no es autónomo. 2.19. 2) Tal esquema existe.

2.22. Primero represente todos los orgrafos posibles de tres vértices, siendo éstos numerados, que satisfacen la condición c) y que tienen el semigrado de salida de cada vértice igual a 2. En calidad de números para los vértices de los orgrafos se pueden coger las cifras 0, 1, 2. Es cómodo considerar inicial al vértice marcado con la cifra 0. Después hay que «cargar» con todos los procedimientos admisibles posibles los arcos de todos los orgrafos construidos de tal manera que resulten diagramas de Moore de algunos a.-d. operadores.

§ 3

3.1. 1) M es una clase cerrada. 2) El conjunto M no es una clase cerrada.

3.3. Con inducción por el número de demoras se puede mostrar que cualquier operador ψ de $[\varphi_0, \varphi_3]_{\mathfrak{S}}$ que tiene una entrada transforma la palabra $\widetilde{0}^{\omega}$, o bien en una palabra del tipo $y(1)\ \ldots\ y(n_0)\,[0]^{\omega}$, o bien en una palabra del tipo $y(1)\ \ldots\ y(n_0)\,[1]^{\omega}$ donde, n_0 es la longitud del preperíodo (que depende de la elección del operador ψ).

3.7. 1) El sistema no es completo. 2) El sistema es completo.

3.8. 2) $\{\varphi_3(X),\ \varphi_{j_0(x)}(X),\ \varphi_{x_1+x_2}(X_1,\ X_2)\}$.

3.10. La demostración de esta afirmación se puede hacer de la manera siguiente. Sea M una clase cerrada en $\hat{\Phi}_{(k)}$ diferente de todo el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$. Supongamos que M es una clase precompleta y examinemos la reunión de todos aquellos subconjuntos M' de $\hat{\Phi}_{(k)}\setminus M$ que satisfacen la condición: $[M \cup M']_{\mathfrak{S}} \neq \hat{\Phi}_{(k)}$. Esta no es una unión vacía. Elijamos en ella alguna cadena máxima (por inclusión), cuya existencia se puede establecer mediante el teorema de Tsermelo o bien directamente teniendo en cuenta la numerabilidad del conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}$ (ordenando el conjunto $\hat{\Phi}_{(k)}\setminus M$ por el tipo de una serie natural). La unión de todos los conjuntos de la cadena máxima elegida se denotará por M_0. Entonces $M \cup M_0$ será una clase precompleta en $\tilde{\Phi}_{(k)}$. En la demostración se emplea sustancialmente el hecho de que en el conjunto $\tilde{\Phi}_{(k)}$ existe un sistema completo finito con relación al conjunto de operaciones $\Theta = \{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$.

3.13. Este hecho se puede demostrar casi de la misma forma con la que se estableció la veracidad de una afirmación análoga en el álgebra lógica (véase el problema II.1.16).

3.14. Sí, existe (véanse los problemas 3.13 y II.1.25). **3.15.** Compárese con el problema II.1.17.

3.16. Con $k \geqslant 3$ la afirmación se deduce directamente del resultado respectivo en P_k. En el caso general (con $k \geqslant 2$) se puede emplear el subconjunto de operadores autónomos.

3.17. Es numerable. **3.19.** Esto es una potencia continual.

3.20. Es útil emplear «puntos de vista potenciales» o sea comparar las potencias de los respectivos conjuntos.

Capítulo VII

§ 1

1.1. 1) a) $T(P) = 1^3 0^2 1^2$. b) La máquina T no es utilizable para la palabra $1^3 0 1^3$. c) $T(P) = 10\,[01]^2\,1$.

1.2. 4) El programa de una de las posibles máquinas tiene la forma

	q_1	q_2	q_3
0	$q_0 0 S$	$q_2 0 S$	$q_3 0 S$
1	$q_2 1 R$	$q_3 1 R$	$q_1 1 R$

1.3. 2) a) $1^2 0^2 1 q_0 0 1$; b) $[10]^2\, 0 q_0 1^2$.

1.4. 3) Una de las máquinas de Turing que transforma la configuración K_1 en K_0 se da con el programa siguiente:

$$\begin{array}{ll} q_1 0 q_2 0 R & q_4 1 q_4 1 L \\ q_1 1 q_1 1 R & q_5 0 q_6 0 R \\ q_2 0 q_3 1 R & q_5 1 q_5 1 L \\ q_2 1 q_2 1 R & q_6 1 q_7 0 R \\ q_3 0 q_4 1 L & q_7 0 q_0 0 R \\ q_4 0 q_5 0 L & q_7 1 q_1 1 R \end{array}$$

1.5. Se puede hacer lo siguiente: en el programa de la máquina de Turing sustituir cada instrucción del tipo $q_i \alpha q_j \beta S$ (donde α y β pertenecen al alfabeto exterior A) por $|A| + 1$ instrucciones: $q_i \alpha q'_j \beta R$, $q'_j \gamma q_j \gamma L$ (γ recorre todo el alfabeto A); q'_j es el estado nuevo (cada estado tiene su q_j).

1.7. Para la construcción de una máquina T_m es suficiente añadir m estados complementarios (nuevos) $q'_1, \ldots, q'_m$ y «completar» el programa de la máquina

T, por ejemplo, con las instrucciones: $q'_1 aq'_1aS, \ldots, q'_m aq'_m aS$ donde a es cierto símbolo fijo del alfabeto exterior.

1.9. 1) a) La composición T_1T_2 no es utilizable para la palabra $1^30^21^2$. b) T_1T_2 es utilizable para la palabra 1^401 y el resultado de su utilización es 1010^31^2.

1.10. 1) a) La iteración indicada no es utilizable para las palabras del tipo 1^{3k} $(k \geqslant 1)$. b) Tampoco es utilizable para las palabras del tipo 1^{3k+1} $(k \geqslant 1)$. c) La iteración es utilizable para cualquier palabra del tipo 1^{3k+2} $(k \geqslant 1)$ y como resultado se obtendrá la palabra 1.

1.11. 1) a) $T(P) = 10^41$. b) $T(P) = 1^501$.

1.14. 3) Una de las posibles máquinas de Turing

$$\begin{array}{ll} q_10q_00R & q_40q_51L \\ q_11q_20R & q_41q_41R \\ q_20q_01S & q_50q_60L \\ q_21q_30R & q_51q_51L \\ q_30q_40R & q_60q_10R \\ q1_3q_31R & q_61q_61L \end{array}$$

1.16. 3) He aquí una de las posibles máquinas

$$\begin{array}{ll} q_10q_01L & q_31q_40R \\ q_11q_20R & q_40q_40S \\ q_20q_20S & q_41q_50R \\ q_21q_30R & q_50q_11R \\ q_30q_30S & q_51q_51S \end{array}$$

1.17. 1) $f(x) = x + 1$, $f(x, y) = x + y + 2$.

1.18. Si se considera, como se hace corrientemente, que las máquinas comienzan a funcionar en el estado q_1 y en el momento inicial se observa la unidad que está más a la izquierda del código del número x, entonces las máquinas indicadas en las condiciones del problema podrán calcular una de las tres funciones siguientes: x, $x - 1$ y una función indeterminada en todos sus puntos.

1.19. Sí, esta afirmación es verdadera.

1.20. 1) Habiendo un conjunto fijo (¡infinito!) de estados existe sólo un número finito de máquinas de Turing no equivalentes de par en par (con un alfabeto exterior dado). 2) Existe tal l que cualquiera que sea $n \geqslant 1$, el subconjunto de todas las funciones de n lugares en M contiene no más de l elementos.

§ 2

2.1. 2) $x_1 + x_2 - sgx_2$.

2.2. 1) Primero se puede demostrar la recursividad primitiva de las funciones $x_1 \dot{-} x_2$ y x^2 y después emplear la operación de superposición. La «demostración directa» de la recursividad primitiva de la función $g(x) = x^2$ tiene este aspecto:

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ g(x+1) = h_1(x, g(x)) = x^2 + 2x + 1, \end{cases}$$

o sea que $h_1(x, y) = 2x + y + 1$;

$$\begin{cases} h_1(x, 0) = 2x + 1 = g_1(x), \\ h_1(x, y+1) = s(h_1(x, y)) = (2x + y + 1) + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(0) = 1 \\ g_1(x+1) = h_2(x, g_1(x)) = 2x + 3, \end{cases}$$

o sea que $h_2(x, y) = y + 2$;

$$\begin{cases} h_2(x, 0) = 2, \\ h_2(x, y+1) = s(h_2(x, y)) = (y+2) + 1. \end{cases}$$

2.5. $f(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}\, x \cdot g_1(y) + g_2(x \dot{-} 1) \cdot \mathrm{sg}\, x \cdot \overline{\mathrm{sg}}\, y + g_3(x \dot{-} 1, y \dot{-} 1) \times \times \mathrm{sg}\, x \cdot \mathrm{sg}\, y$.

2.7. 2) $\mu_{x_1}([x_1/2]) = 2x_1$. 4) $\mu_{x_1}(x_1 \dot{-} x_2) = (x_1 + x_2)\,\mathrm{sg}\, x_1$, $\mu_{x_2} \times \times (x_1 \dot{-} x_2) = x_1 - x_2$.

2.8. 4) $f(x_1, x_2) = x_1(1 \dot{-} x_2)$.

2.9. No, no es cierto. **2.10.** 1) No se puede. 2) $1 + \mathrm{sg}\, x$. **2.12.** Todas estas clases son numerables-infinitas. **2.17.** No, no es cierto: la función $f_3(x, y)$ puede ser incluso idénticamente igual a 0. **2.18.** 1) No, no es justo. **2.19.** 3) Es justo. 4) Es justo.

2.20. 1) Sí, puede ser cierto. 2) Esta afirmación es falsa para cualquier función f_1 de $K_{\mathrm{rg}} \setminus K_{\mathrm{pr}}$. 3) La afirmación es justa para ciertas funciones f_1 y f_2 del conjunto $K_{\mathrm{rg}} \setminus K_{\mathrm{pr}}$.

2.21. 1) No, no siempre. 2) Esta inclusión es falsa para cualquier función $f(x)$ de $K_{\mathrm{rg}} \setminus K_{\mathrm{pr}}$. 3) Sí, la relación es justa para cualquier función $f(x)$ de $K_{\mathrm{rg}} \setminus K_{\mathrm{pr}}$.

2.24. 2) No puede. **2.26.** Sí, es cierto.

§ 3

3.1. a) Se deduce de que en K_{pr} existe una función que toma todos los valores.

3.2. A toda función primitivamente recursiva se le puede cotejar un conjunto infinito de términos que reflejan el procedimiento de obtención de la función de las funciones simplísimas.

3.3. Si existe una función universal parcialmente recursiva $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ pues ella está siempre determinada. Entonces la función $F(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1$ es recursiva en general y tiene cierto número y en la numeración que responde a la función universal $F^{(n+1)}$. Pero entonces $F(y, y, \ldots, y) = F(y, y, \ldots, y) + 1$.

3.6. Hacer la demostración con el método de «diagonalización». **3.7.** 1) — 4) No. 5) Sí. **3.8.** Analógicamente al 3.3.

3.11. Examinar la función

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } h(x) = 0, \\ 1, & \text{si } h(x) = 1. \end{cases}$$

3.12. Examinar una sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ tal, que $\alpha_i = 1$, si $\varphi_i(i)$ está determinado, y $\alpha_i = 0$, si $\varphi_i(i)$ no está determinado, $i = 0, 1, \ldots$

3.13. Para todo autómata finito autónomo su sucesión de salida es casi periódica.

3.15. Por ejemplo, palabras invertidas.

3.21. Se deduce, de que existe no más de $c^{S_T(P)}$ diferentes configuraciones de longitud $S_T(P)$ para cierto c, que depende del alfabeto de los estados y del alfabeto exterior de la máquina T. Si se repite cierta configuración, entonces la máquina T trabaja un tiempo infinito.

Capítulo VIII

§ 1

1.1. 1) Cada uno de los términos de la permutación puede ser elegido independientemente de los demás de n maneras. Por eso, $\hat{P}(n, r) = n^r$. 2) El primero de los términos de una (n, r)-permutación se puede elegir de n maneras. Si ya se han elegido i elementos, entonces el $(i+1)$-ésimo se puede elegir de $n-i$ maneras. Aplicando varias veces la regla de la multiplicación se obtiene $P(n, r) = (n)_r$, $n \geqslant r$. 3) Es suficiente observar que de cada (n, r)-combinación mediante $r!$ permutaciones de sus términos se pueden obtener $r!$ diferentes (n, r)-permutaciones y cada (n, r)-permutación puede ser obtenida de esa manera. 4) A cada (n, r)-combinación A con repeticiones, compuesta de elementos del conjunto $U = \{a_1, \ldots, a_n\}$ le cotejaremos el vector $\widetilde{\alpha}(A)$ de longitud $n+r-1$ de r ceros y $n-1$ unidades tal, que el número de ceros que se encuentran entre las unidades $(i-1)$-ésima e i-ésima es igual al número de elementos a_i que entran en la combinación A, $i = \overline{2, n-1}$ y el número de ceros que hay delante de la primera unidad (después de la $(n-1)$-ésima unidad), es igual al número de elementos a_1 (respectivamente, de elementos a) que entran en la combinación A Esta correspondencia entre las combinaciones y los vectores es recíprocamente unívoca. Por otra parte el número de vectores con $n-1$ unidades y r ceros es igual al número de subconjuntos de $(n-1)$-elementos de un conjunto de $(n+r-1)$-elementos. Este número es igual a $\binom{n+r-1}{n-1}$.

1.2. 1) k^n; 2) $k_1 k_2 \ldots k_n$; 3) $\binom{n}{r}$. 1.3. 1) 2^{mn}; 2) $(2^m)_n$.

1.4. Para cada $n \geqslant 1$ harán falta $n \cdot 10^{n-1}$ cifras para cada cifra diferente de cero y $(n-1) \cdot 10^{n-1}$ ceros. 1.5. $2^{p+k}3^{n-p-k} - 1$.

1.6. 1) 147; 2) 126; 3) $300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 = 26820600$, si se diferencian los nombres, y $300 + 300^2 + 300^3$, si los nombres no son forzosamente diferentes.

1.7. $\binom{m}{r}\binom{n}{s}$.

1.8. 1) $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_r)$. A cada divisor $p_{i_1}^{\beta_1} \ldots p_{i_r}^{\beta_r}$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, $i = \overline{1, r}$ se le puede cotejar el vector $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$; 2) 2^r; 3) $\prod_{k=1}^{r} \frac{1-p_k^{\alpha_k - 1}}{1-p_k}$.

Abriendo los paréntesis en la expresión $(1+p_1+\ \dots\ +p_1^{\alpha_1})\ \dots\ (1+p_r+$ $+\ \dots\ +p_r^{\alpha_r})$ convencerse de que cada divisor está presente en la suma exactamente una vez.

1.9. 1) $\binom{n-\alpha-\beta}{p-n-k}$; 2) $\frac{p!}{h!\,k!}\binom{n-\alpha-\beta}{p-h-k}$.

1.10. 1) $\binom{n+k-1}{k-1}$. El número de maneras es igual al número de vectores binarios de longitud $n+k-1$ con n unidades y $k-1$ ceros. La correspondencia se establece de la manera siguiente: a cada suma se le coteja un vector tal que el primer sumando en la suma es igual al número de unidades que hay en el vector ante el primer cero, el segundo sumando, al número de unidades que hay entre el primero y el segundo cero, etc. 2) $\binom{n-1}{k-1}$. Colocamos k unidades en cada intervalo entre los ceros de tal manera que haya una unidad entre cada dos ceros (el lugar que está a la izquierda del primer cero y a la derecha del último también se consideran intervalos). Las demás $n-k$ unidades se distribuyen arbitrariamente. El problema se reduce al anterior.

1.11. 1) $\binom{n-1}{k-2}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$, véase el problema 1.10, 2); 2) $\binom{n+9}{9}-1$, reducir el problema al 1.10, 1); 3) $\binom{n+k}{n}$, reducir el problema al 1.10, 1).

1.12. 1) $\binom{n+2}{2}$; 2) $\frac{1}{6}\binom{n+2}{2}^2+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)^2$.

1.13. 1) $k!$; 2) $\binom{k}{p}\cdot k!$; 3) $(n)_k\,(m)_k$; 4) $\frac{(n)_k\,(m)_k}{k_1!\ \dots\ k_s!}$.

1.14. 1) $4(n-4)$; 2) $4(n-1)n$; 3) $24n(n-1)$; 4) $4\binom{n}{5}$; 5) $4^5(n-4)$; 6) $4n\times$ $\times\binom{4n-4}{2}$; 7) $6\cdot 4^3\cdot n\binom{n-1}{3}$.

1.15. 5) Utilizar el 3).

1.16. 3) Examinar la relación $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}=\frac{n-k+1}{k}$. Esta relación es mayor que 1 con $k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$, y menor que 1 con $k>\left]\frac{n}{2}\right[$. 5) Si en la suma están presentes dos coeficientes binominales $\binom{n_i}{k}$ y $\binom{n_j}{k}$ tales, que n_i- $-n_j>1$, entonces, sustituyéndolos por $\binom{n_i-1}{k}$ y $\binom{n_j+1}{k}$ respectivamente, obtendremos una suma menor que la inicial.

1.17. 1) Resolución. Pondremos que $\alpha_{n-1}=\left[\frac{m}{(n-1)!}\right]$. Supongamos que los coeficientes $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_{n-i}$ ya están determinados, entonces $\alpha_{n-(i+1)}=$

$$=\left[\frac{m-\alpha_{n-1}(n-1)!-\alpha_{n-2}(n-2)!-\dots-\alpha_{n-i}(n-i)!}{(n-i-1)!}\right].$$

Demostremos la unicidad de la representación razonando por el contrario. Supongamos que a cierto m le corresponden dos vectores $\tilde{\alpha}(m) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ y $\tilde{\beta}(m) = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$. Supongamos que j es el mayor de los números de los órdenes en los que los vectores se diferencian. Sin limitación de generalidad se puede considerar que $\alpha_j < \beta_j$. Tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i i! - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i i! \geqslant (\beta_j - \alpha_j)\, j! - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i i! \geqslant j! - \sum_{j=1}^{j=1} i \cdot i! > 0.$$

Hemos llegado a una contradicción. 2) (1, 1, 2), (1, 2, 3), (1, 0, 2, 1). 3) $\tilde{\alpha}_1$ a ninguno, $\tilde{\alpha}_2$ le corresponde el número 109. 4) A cada número entero m $(0 \leqslant m < n!)$ le cotejamos una permutación π_m de los números $1, \ldots, n$. Mediante el vector $\tilde{\alpha}(m) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ indicamos el lugar de los números $1, \ldots, n$ en la permutación π_m. Ponemos el número 1 en el lugar con el número $1 + \alpha_{n-1}$. Supongamos que los números $1, \ldots, i$, $i = \overline{1, n-1}$ ya están colocados. Quedan todavía libres $n - i$ lugares. Numeramos los lugares libres con los números $1, 2, \ldots, n - i$. Ponemos el número $i + 1$ en el lugar con el número $1 + \alpha_{n-i-1}$. Después de que todos los números $1, 2, \ldots, n - 1$ ya están colocados, el lugar de los números n en π_m se determina unívocamente. EJEMPLO. $m = 15$, $n = 4$, $\tilde{\alpha}(m) = (1, 1, 2)$, $\pi_m = (4, 2, 1, 3)$. El algoritmo de la enumeración sin repetición de todas las permutaciones consiste en la generación secuencial de los números m $(0 \leqslant m < n!)$ y las permutaciones π_m que les corresponden.

1.18. 1) Las coordenades del vector $\tilde{\beta}(m) = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ se determinan de la manera siguiente: β_1 es el mayor número entero tal, que $m \geqslant \binom{\beta_1}{k}$. Si $\beta_1, \ldots, \beta_i$ ya están determinados, entonces β_{i+1} es el mayor número entero tal, que $m - \binom{\beta_1}{k} - \binom{\beta_2}{k-1} - \ldots - \binom{\beta_i}{k-i+1} \geqslant \binom{\beta_{i+1}}{k-1}$. La unicidad se demuestra de la misma manera que en 1.17, 1). 2) 23. 3) (6, 4, 1, 0).

4) Cotejaremos a cada número entero m $\left(0 \leqslant m < \binom{n}{k}\right)$ un vector binario $\tilde{\alpha}_m = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mediante el vector $\tilde{\beta}(m) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ (véase 1). Supongamos que en $\tilde{\alpha}_m$ las unidades están en las coordenadas con los números $\beta_1 + 1, \beta_2 + 1, \ldots, \beta_k + 1$. EJEMPLO. $m = 17$, $n = 6$, $k = 3$, $\beta(m) = (5, 4, 1)$, $\tilde{\alpha}_m = (010011)$. El algoritmo consiste en generar números m y los vectores que les corresponden. Otro algoritmo. Comenzaremos la enumeración desde el vector $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, cuyas primeras k coordenadas son iguales a 1 y las restantes a cero. Examinemos el vector binario arbitrario $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e indiquemos el que le sigue en el proceso de enumeración $\tilde{\alpha}' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$. Hallaremos el menor número j tal, que $\alpha_j = 1$, $\alpha_{j+1} = 0$. Entonces hacemos $\alpha_j' = 0$, $\alpha_{j+1}' = 1$ (desplazamos una unidad a la derecha) y todas las unidades que están en las coordenadas con números menores que j, las desplazamos a la izquierda todo lo que se pueda. EJEMPLO. $\tilde{\alpha} = (001101)$, $j = 4$, $\tilde{\alpha}' = (100011)$.

1.20. 2) Poner en (1) $t=-1$. 3) Derivar (1) y hacer $t=1$. 6) Integrar la identidad (1) de 0 a 1. 7) Véase el 6). 8) Efectuar la inducción por n empleando el 7); otro procedimiento: examinar $\int\limits_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt$. 9) Comparar los coeficientes de t^k de la parte izquierda y derecha de la identidad $(1+t)^n(1+t)^m = (1+t)^{n+m}$. 10) En 9) hacer $m=n$. 13) Emplear la identidad $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. 14) Se reduce al 9),

1.21. 1) $2\sum\limits_k \binom{n}{2k} = (1+1)^n+(1-1)^n = 2^n$

2) $4\sum\limits_k \binom{n}{4k} = (1+1)^n+(1+i)^n+(1+i^2)^n+(1+i^3)^n = 2^n+2^{n/2+1}\cos\times$ $\times\frac{\pi n}{4}$;

3) $$\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i r}{m}\nu}\left(1+e^{\frac{2\pi i\nu}{m}}\right)^n =$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\frac{2\pi i r}{m}\nu}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_k \binom{n}{mk+s} e^{\nu\frac{2\pi i(lk+s)}{m}} =$$

$$=\sum_k\sum_{s=0}^{r-1}\binom{n}{mk+s}\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i(lk+s-r)}{m}\nu} = m\sum_k\binom{n}{mk+r};$$

en el último caso se ha empleado la identidad

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i n}{m}\nu} = \begin{cases} m, & \text{si } n \text{ es múltiplo de } m,\\ 0 & \text{en el caso contrario.}\end{cases}$$

1.22. 1) $\frac{1}{2}[(1+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})^n]$.

2) $$\frac{(1+\sqrt[4]{-2})^n+i(1+i\sqrt[4]{-2})^n-(1-\sqrt[4]{-2})^n-i(1-i\sqrt[4]{-2})^n}{4\sqrt[4]{-2}}.$$

3) RESOLUCIÓN. Empleando la identidad del problema 1.15, 2) se transforma la expresión inicial en

$$\binom{n}{r}\sum_k (-3)^k\binom{n-r}{2k+1-r} =$$

$$=(-3)^{\frac{r-1}{2}}\binom{n}{r}\sum_k(-3)^{\frac{2k+1-r}{2}}\binom{n-r}{2k+1-r}.$$

Examinemos el caso en el que r es par (el caso en el que r es impar es análogo). Ponemos $2\nu = 2k - r$. Entonces llegamos a la expresión

$$(-1)^{\frac{r-1}{2}} \binom{n}{r} \sum_{\nu} (\sqrt{-3})^{2\nu+1} \binom{n-r}{2\nu+1} =$$

$$=(-1)^{\frac{r-1}{2}} \binom{n}{r} \frac{(1+\sqrt{-3})^{n-r}-(1-\sqrt{-3})^{n-r}}{2}.$$

1.24. 2) Con $|t|<1$ la serie converge. La identidad se establece mediante la descomposición de la función $f(t)=(1+t)^a$ por los grados t. Hay que convencerse de que $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\binom{a}{k}$.

3) $\binom{-a}{k}=\frac{(-a)(-a-1)\ \dots\ (-a-k+1)}{k!}=(-1)^k\binom{a+k-1}{k}$.

4) $\sum_{k=0}^{n}\binom{a-k}{r}=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{a-k+1}{r+1}-\binom{a-k}{r+1}\right]=\binom{a+1}{r+1}-\binom{a-n}{r+1}$.

5) Emplear la identidad $(1+t)^a(1+t)^b=(1+t)^{a+b}$. 6) Se deduce del 5). Si se pone $b=-1$. 7) Consecuencia de las identidades de los problemas 3) y 5). 9) Emplear la identidad $(-4)^k\binom{2k}{k}=\binom{-1/2}{k}$. 10) y 11) Véase el problema 1.22.

1.25. 1) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}$. 2) $\frac{n!}{k_1!\ \dots\ k_s!}$. 3) Calculamos con dos procedimientos el número $A_n(k_1, \dots, k_s)$ de ordenaciones de n objetos entre los cuales hay k_1 objetos del primer tipo, k_2 del segundo tipo, etc., y, por fin k_s objetos del tipo s. PRIMER PROCEDIMIENTO. En principio elegimos k_1 lugares entre n para colocar los objetos del primer tipo. Esto se puede hacer de $\binom{n}{k_1}$ maneras. Después se escogerán k_2 lugares para ubicar los objetos del segundo tipo. Eso se puede hacer de $\binom{n-k_1}{k_2}$ maneras, etc. Utilizando la «regla de la multiplicación» obtendremos que

$$A_n(k_1, \dots, k_s)=\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\ \dots\ -k_{s-1}}{k_s}.$$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO. Calculamos el número de ordenaciones n de objetos diferentes de par en par. Consideramos que los objetos están divididos en s grupos de tal manera, que en el i-ésimo grupo hay k_i objetos ($i=\overline{1, s}$). La elección de k_1 lugares para los objetos del primer grupo, de k_2 lugares para los objetos del segundo grupo, etc., se puede realizar de $A_n(k_1, \dots, k_s)$ maneras. En el grupo i los objetos se pueden situar de k_i maneras ($i=\overline{1, s}$). De ahí que $A_n(k_1, \dots, k_s)\, k_1! \dots k_s! = n!$

§ 2

2.1. 1) DEMOSTRACION. Para $n = 1$, $\hat{N}_0 = N - N(\alpha_1) = S_0 - S_1$ y la fórmula (2), evidentemente, es válida. Supongamos que la fórmula es válida para $n-1$ propiedades y que $N(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1})$ es el número de objetos que no poseen ninguna de las propiedades $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Tenemos:

$$\hat{N}_0 = N(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1}) =$$
$$= N - \sum_{i=1}^{n-1} N(\alpha_i) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} N(\alpha_i, \alpha_j) - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) - \ldots -$$
$$-(-1)^{n-1} N(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}). \quad (*)$$

Esta fórmula también es válida para el conjunto de objetos que poseen la propiedad α_n:

$$N(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1}, \alpha_n) = N(\alpha_n) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} N(\alpha_i, \alpha_n) + \ldots +$$
$$+(-1)^{n-1} N(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n), \quad (**)$$

donde $N(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1}, \alpha_n)$ es el número de objetos que poseen la propiedad α_n pero no poseen ninguna de las propiedades $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Está claro que

$$N(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1}, \overline{\alpha}_n) = N(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1}) -$$
$$- N(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1}, \alpha_n).$$

Restando la fórmula (**) de la fórmula (*) obtenemos la fórmula (2). 2) Demostración con inducción por el número de propiedades. 3) Al observar que $\hat{N}_{k+1} = \hat{N}_k - N_k$ emplear inducción por k. 4) Deducimos, por ejemplo, el (5) del (3). Suponiendo que en (3) $m = n$, obtenemos $\hat{N} = S_n$ en concordancia con (5). Supongamos que la fórmula (5) es válida para todos los $k \geqslant n - \nu + 1$, $\nu \geqslant 1$. Sustituyendo en (3) m por $n - \nu$ y empleando una suposición inductiva, ponemos en lugar de $S_{n-\nu+k}$ para cualquier $k \geqslant 1$ el segundo miembro de la igualdad (5) en la que k está sustituido por $n - \nu + k$. Entonces

$$S_{n-\nu} = \hat{N}_{n-\nu} - \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^k \binom{n-\nu+k}{n-\nu} \sum_{m=n-\nu+1}^{n} \binom{m}{n-\nu+k} \hat{N}_m =$$
$$= N_{n-\nu} - \sum_{m=n-\nu+1}^{n} \binom{m}{n-\nu} \hat{N}_m \sum_{k=1}^{m-n+\nu} (-1)^k \binom{m-n+\nu}{k} =$$
$$= \sum_{m=n-\nu}^{n} \binom{m}{n-\nu} \hat{N}_m.$$

Así que la fórmula (5) está demostrada. La fórmula (6) se demuestra de manera análoga, para eso es suficiente convencerse de que $R(n, r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{m} \times$

$\times\, S_k \geqslant 0$, para todos los r. Emplearemos la fórmula (5). Tenemos

$$R(n, r) = \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{k}{m} \sum_{\nu=k}^{n} \binom{\nu}{k} \hat{N}_\nu = \sum_{\nu=r}^{n} \hat{N}_\nu \sum_{k=r}^{\nu} (-1)^{k-r} \binom{k}{m} \binom{\nu}{k} =$$

$$= \sum_{\nu=r}^{n} \hat{N}_\nu \binom{\nu}{m} \sum_{k=r}^{\nu} (-1)^{k-r} \binom{\nu-m}{k-m} = \sum_{\nu=r}^{n} \hat{N}_\nu \binom{\nu}{m} \binom{\nu-m-1}{r-m-1} \geqslant 0.$$

2.2. Para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ las probabilidades son respectivamente $\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{24}$.

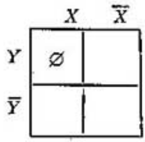
2.3. 1) El número de distribuciones de objetos, en las que k cajas dadas se quedarán vacías, es igual a $(n-k)^r$, $S_k = \binom{n}{k}(n-k)^r$. Ahora queda emplear la fórmula (2). 2) Utilizar el resultado del problema 2.1, 2). 3) aplicar la fórmula (4) de 2.1, 3).

2.4. 1) 20%; 2) 60%; 3) 70%.

2.5. 1) RESOLUCIÓN. $S_0 = 13$, $S_1 = 23$, $S_2 = 12$, $\hat{N} = 0$. Según la fórmula (2) $0 = 13 - 23 + 12 - S_3$, de donde $S_3 = 2$; 2) 6; 3) 3.

2.6. 2) 542; 3) 734; 6) 53.

2.7. 1) 3^n. RESOLUCIÓN. Examinemos el diagrama de Venn; Cada uno de los n elementos del conjunto U puede pertenecer o no pertenecer a cada uno de

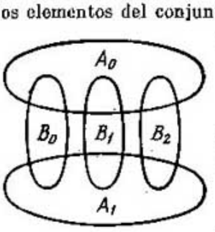


los conjuntos X, Y, teniendo en cuenta que según el enunciado $X \cap Y = \phi$. De esto se deduce que el número de los pares buscados (X, Y) es igual al número de n disposiciones de diferentes objetos en tres cajones (el papel de los cajones lo cumplen las casillas $X\overline{Y}$, $\overline{X}Y$, $\overline{XY}$ del diagrama). Pero el número de tales disposiciones es, evidentemente, igual a 3^n. 2) $n2^n$.

3) 3^n. INDICACIÓN. Observar que de la condición se deduce que

$$\overline{X} \cap Y \cap \overline{Z} \cup X \cap \overline{Y} \cap Z \cup X \cap \overline{Y} \cap \overline{Z} = U.$$

De este modo, el problema se reduce al cálculo del número de las colocaciones de los elementos del conjunto U por tres casillas $\overline{X}Y\overline{Z}$, $X\overline{Y}Z$, $X\overline{YZ}$ del diagrama correspondiente.



4) $3^n - \frac{n^2+7n+16}{8} \cdot 2^n + \frac{n(n^2+3)}{2} + 1$.

Resolución. Del número total 3^n de pares (X, Y) que satisfacen la condición del problema 1) hay que excluir los pares que pertenecen al conjunto $C = A_0 \cup A_1 \cup B_0 \cup \cup B_1 \cup B_2$, donde $A_0 = \{(X, Y) : |X| = 0\}$, $A_1 = \{(X, Y) : : |X| = 1\}$, $B_0 = \{(X, Y) : |Y| = 0\}$, $B_1 = \{(X, Y) : |Y| = 1\}$, $B_2 = \{(X, Y) : |Y| = 2\}$. Es evidente que

$A_0 \cap A_1 = \varnothing$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ $(0 \leqslant i < j \leqslant 2)$. Por eso $|C| = |A_0| + |A_1| + |B_0| + |B_1| + |B_2| - |A_0 \cap B_0| - |A_0 \cap B_1| - |A_0 \cap B_2| - |A_1 \cap B_0| - |A_1 \cap B_1| - |A_1 \cap B_2|$ (véase la figura). No es difícil notar que $|A_0| = 2^n$ (n elementos del conjunto U se distribuyen por las casillas $\bar{X}Y$ y XY. Las casillas XY y $X\bar{Y}$ son vacías puesto que $X = \varnothing$). Analógicamente, $|A_1| = n \cdot 2^{n-1}$, $|B_0| = 2^n$, $|B_1| = n \cdot 2^{n-1}$, $|B_2| = \binom{n}{2} 2^{n-2}$. Continuando, tenemos $|A_0 \cap B_0| = 1$, $|A_0 \cap B_1| = |A_1 \cap B_0| = n$, $|A_1 \cap B_1| = n(n-1)$, $|A_0 \cap B_2| = \binom{n}{2}$, $|A_1 \cap B_2| = n\binom{n-1}{2}$. De aquí que $|C| = (n+2)\,2^n + n(n-1)\,2^{n-3} - \frac{n(n^2+3)}{2} - 1$, y el número de los pares buscados es igual a $3^n - |C|$. 5) $2n(2^n - 1)$. 6) $(n+2)\,2^{n-1} - 4n - 2$.

2.8. Calculamos el número $N_{n,k}$ de maneras de acomodar a los invitados de tal forma, que los k pares dados de caballeros enemigos no estén separados. Unimos cada uno de los k pares enemigos dados en un «objeto». Entonces habrá $2n - k$ objetos que se pueden colocar de $(2n-k)!$ maneras. En cada uno de los k pares enemigos dados se pueden cambiar de sitio los enemigos. Así que $N_{n,k} = 2^k(2n-k)!$ y $S_k = \binom{n}{k} N_{n,k}$. Empleando la fórmula (2) obtenemos que el número buscado es igual a $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^k (2n-k)!$

2.9. $2\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2n-k)_k[(n-k)!]^2$.

§ 3

3.2. 1) $c_1 + c_2 3^n$; 2) $c_1(\sqrt{-3})^n + (-1)^n c_2(\sqrt{-3})^n$; 3) $c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$; 4) $(-1)^n(c_1 + c_2 n)$; 5) $(c_1 + c_2 n)(-4)^n + c_3(-2)^n$; 6) $(-1)^n(c_1 + c_2 n + c_3 n^2)$.

3.3. 1) La solución general tiene la forma $a_n = c_1 + c_2 3^n$. De las condiciones iniciales tenemos $c_1 + 3c_2 = 10$, $c_1 + 9c_2 = 16$, de donde $c_1 = 7$, $c_2 = 1$. Así que $a_n = 7 + 3^n$. 2) $3^n + i^n + (-i)^n$. 3 $c_1 + c_2 n + c_3(-2)^n$, donde $c_1 = \frac{14 - b - 4c}{9}$, $c_2 = \frac{b + c - 2a}{3}$, $c_3 = \frac{2b - c - a}{18}$. 4) $\cos \alpha n$.

3.4. 1) $a = \frac{\alpha}{1+p+q}$, $b = \frac{(1+p+q)\beta - \alpha(2+p)}{(1+p+q)^2}$; 2) $a = \frac{\alpha}{2p+4}$, $b = \frac{\alpha(-p-4) + 2\beta(p+2)}{2(2+p)^2}$; 3) $a = \frac{\alpha}{6}$, $b = \frac{\beta - \alpha}{2}$.

3.5. 1) $1 + \frac{n(n-1)}{2}$. Se busca una solución parcial de la ecuación $a_{n+1} - a_n = n$ en forma de $a_n^* = n(an + b)$. Sustituyendo a_n^* en la relación inicial, encontraremos que $a_n^* = \frac{n(n-1)}{2}$. Hagamos la sustitución $a_n = \frac{n(n-1)}{2} + b_n$, entonces, $b_{n+1} - b_n = 0$. De aquí que $b_n = c$, donde c es una constante y $a_n = \frac{n(n-1)}{2} + c$. De las condiciones iniciales se encuentra que $c = 1$. 2) $-2(-4)^n + 3 \cdot 2^n + 5^n$.

INDICACIÓN. Se busca la solución parcial en forma de $a_n^* = c \cdot 5^n$. 3) $0,5 + 50 \cdot 2^n + 6,5 \cdot 3^n - 4n^3 - 13n^2 - 50n$.

3.6. 1) No degenerado es el caso en el que, o bien $q_1 \neq 0$ o bien $p_2 \neq 0$. Si $q_1 = p_2 = 0$, entonces es evidente que $a_n = c_1 p_1^n$, $b_n = c_2 q_2^n$. Sea $q_1 \neq 0$. Entonces $b_n = \frac{1}{q_1}(a_{n+1} - p_1 a_n)$, $b_{n+1} = \frac{1}{q_1}(a_{n+2} - p_1 a_{n+1})$. Sustituyendo b_{n+1} y b_n en la segunda relación, obtenemos $a_{n+2} + (-p_1 - q_2) a_{n+1} + (p_1 q_2 - p_2 q_1) a_n = 0$. El problema se ha reducido al 3.1. 2) $a_n = (5 + 2n) 2^n$, $b_n = -(1 + 2n) 2^n$. 3) $a_n = c_1 + (-1)^{n+1} c_2 + 5,5n$, $b_n = c_1 + 0,5 + (-1)^n c_2 + 5,5n$.

3.7. 1) INDUCCIÓN POR n. Con $n = 2$ la relación $F_{2+m} = F_1 F_m + F_2 F_{m+1} = F_m + F_{m+1}$, es válida para todos los $m \geqslant 1$. El paso inductivo $n \to n+1$: $F_{n+1+m} = F_{n+m} + F_{n+m-1} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1} + F_{n-2}F_m + F_{n-1}F_{m+1} = F_n F_m + F_{n+1}F_{m+1}$. 2) Hacer inducción por k empleando el 1). 4) PROCEDIMIENTO DE REPRESENTACIÓN. Seleccionamos el mayor n_1 tal, que $F_{n_1} \leqslant N$; después el mayor n_2 tal, que $F_{n_2} \leqslant N - F_{n_1}$, etc. La unicidad y otras propiedades de la representación se demuestran directamente o por inducción. 5) INDICACIÓN. Hallar la solución de la relación $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con las condiciones iniciales $F_1 = F_2 = 1$. 6), 7), 8) Demostrar con inducción por n.

3.8. 1) La función generatriz de la sucesión a^n es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n$. Si $|at| < 1$, entonces la serie converge a la función $A(t)$. En consecuencia, con $|at| < 1$ la función $A(t)$ es generatriz para $\{a^n\}$. La función exponencial generatriz de la sucesión a^n es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}$. Esta serie converge a la función e^{at} con todos los t. 2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ que es una función generadora para $a_n = n$ se obtiene al diferenciar cada término de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ y multiplicarlo a continuación por t. Con $|t| < 1$ es admisible emplear estas operaciones y eso lleva a la función $t(1-t)^{-2}$. La función generatriz exponencial es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^n}{n!} = t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = t \exp t$.

3.9. 1) $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (xt)^n \, dx = \int_0^{\infty} e^{-x} E(xt) \, dx$;

2) $\int\limits_0^\infty e^{-x}e^{xt}\,dx=\frac{1}{1-t}\int\limits_0^\infty e^{-u}\,du=(1-t)^{-1}$.

3.11. 1) Multipliquemos la igualdad $a_n=b_n-b_{n-1}$ por t^n y la sumamos por n. En el dominio de la convergencia de las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nt^n$ son válidas las identidades $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nt^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(b_n-b_{n-1})\,t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nt^n-$ $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{n-1}t^n=B(t)(1-t)$. 3) Observar que $b_n=a_{n-1}-a_n$. De aquí que $B(t)=$ $=-A(t)(1-t)+a_0,\ a_0=B(1)$.

3.12 1) PRIMER PROCEDIMIENTO. Sea $C(t)$ una función generatriz de la sucesión 1, 0, 0, ... Según el enunciado $C(t)=A(t)\,B(t)$. En consecuencia, se tienen que cumplir las igualdades $1=a_0b_0,\ 0=a_0b_1+a_1b_0,\ \ldots,\ 0=\sum\limits_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i$, ... Como $a_n=\binom{m}{n}$, entonces para todos los $n=1,\ 2,\ \ldots\ \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{m}{n-i}b_i=0$, y para $n=0$ $\binom{m}{0}b_0=1$. Hallamos sucesivamente $b_0=1,\ b_1=-m,\ b_2=$ $=\frac{m(m+1)}{2},\ b_3=-\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$. Con inducción por n no es difícil mostrar que $b_n=\binom{-m}{n}$. Así que $B(t)=(1+t)^{-m}$. SEGUNDO PROCEDIMIENTO. $A(t)=(1+t)^m,\ B(t)=[A(t)]^{-1}=(1+t)^{-m}$. De aquí que $b_n=\binom{-m}{n}$. 2) $B(t)=$ $=1-at,\ b_0=1,\ b_1=a,\ b_n=0$ con $n\geqslant 2$. 3) $B(t)=(1-t)^2,\ b_0=b_2=1,\ b_1=-$ $-2,\ b_n=0$ con $n\geqslant 3$. 4) $B(t)=(1+t^2)^{-1},\ b_{2n}=(-1)^n,\ b_{2n+1}=0$. 5) $B(t)=$ $=\frac{t}{e^t-1};\ b_0=1,\ b_1=-\frac{1}{4},\ b_{2n+1}=0,\ n\geqslant 1,\ b_{2n}=\frac{(-1)^nB^n}{n!}$, donde B_n es el número de Bernoulli con el número de orden n. 6) $B(t)=\sqrt{1+t},\ b_n=$ $=\binom{1/2}{n}$.

3.14. 1) $\binom{m}{n}q^{m-n}p^n$; 2) 1; 3) $(-1)^n\binom{1/2}{n}$; 4) $(-1)^{n-m}\binom{m}{n-m}$; 5) $(-1)^{n-m}\sum\limits_{k}(-1)^{k(r-1)}\binom{m}{k}\binom{-m}{n-m-kr}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}\binom{-m}{n/2}$ con n par, y 0 con n impar; 7) $\binom{-m}{n-2}2^{n-2}-\binom{-m}{n-3}2^{n-3}$; 9) $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$; 10) $\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. INDICACIÓN. Aprovechar que $\int\limits_0^t\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} t$; 11) $\frac{1\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot 2n}\times$

$\times \frac{1}{2n+1}$. INDICACIÓN. $\int\limits_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}}=$ arc sen t; 12) $(-2)^{n/2}_n \frac{1}{(n/2)!}$ con n par, y 0 con n impar; 13) $\frac{(-1)^{n/2}}{(n/2+1)!}$ con n par, y 0 con n impar; 14) $(-1)^n \frac{n!}{m!} \times$ $\times \binom{n-1}{m-1}$.

3.15. 1) Comparemos los coeficientes de t^{n-1} en la identidad $(1+t)^n (1+$ $+t)^{-m-2}=(1+t)^{n-m-2}$. Por una parte este coeficiente es igual a $\sum\limits_s \binom{n}{n-s} \times$ $\times \binom{-m-2}{s-1}=\sum\limits_s (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \binom{m+s}{m+1}$, y por otra, $\binom{n-m-2}{n-1}=(-1)^{n-1} \times$ $\times \binom{m}{n-1}$. 2) INDICACIÓN. $\binom{m}{s}\binom{s}{n}=\binom{m}{n}\binom{m-n}{m-s}$. 3) Examinar la identidad $\left(1-\frac{1}{t}\right)^m (1-t)^{-n-1}=\frac{(-1)^m}{t^m}(1-t)^{m-n-1}$. Examinar la identidad $[(1+$ $+t)^n+(1-t)^n]^2=(1+t)^{2n}+(1-t)^{2n}+2(1-t^2)^n$. 5) Examinar la identidad $[(1+t)^n+(1-t)^n][(1+t)^n-(1-t)^n]=(1+t)^{2n}-(1-t)^{2n}$. 6) Examinar la identidad $\sum\limits_{h=0}^{n} (1+2t)^{n+h+1}(-t^2)^{n-h}=(1+2t)^{n+1}\frac{(1+2t)^{n+1}-(-t^2)^{n+1}}{(1+t)^2}$ y comparar los coeficientes para t^{2n+1}.

3.16. 1) Multiplicando por t^{n+2} y sumando, obtendremos $A(t)=a_1t-a_0+$ $+ptA(t)-pa_0t+qA(t)t^2$. 2) Presentaremos $A(t)$ en la forma $\frac{c_1}{1-\lambda_1 t}+$ $+\frac{c_2}{1-\lambda_2 t}$. Hallando c_1 y c_2 obtendremos que $A(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{a_1+pa_0+\lambda_1 a_0}{1-\lambda_1 t}-\right.$ $\left.-\frac{a_1+pa_0+\lambda_2 a_0}{1-\lambda_2 t}\right)$. Al hallar el coeficiente de t^n en la descomposición de $A(t)$ en serie por el exponente t obtendremos la expresión para a_n. 3) Presentemos $A(t)$ en la forma $\frac{c_1}{1-\lambda t}+\frac{c_2}{(1-\lambda t)^2}$. De la igualdad $\frac{c_1}{1-\lambda t}+$ $+\frac{c_2}{(1-\lambda t)^2}=\frac{a_0+(a_1-2\lambda a_0)t}{(1-\lambda t)^2}$ hallamos que $c_1=-\frac{a_1}{\lambda}+2a_0$, $c_2=\frac{a_1}{\lambda}-a_0$. Descomponiendo $A(t)$ en serie, obtendremos $A(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(c_1\lambda^n+c_2(n+1)\lambda^n)t^n$, $a_n=$ $=\left(a_0+n\left(\frac{a_1}{\lambda}-a_0\right)\right)\lambda^n$.

3.17. 3) $A(t)=\frac{1-t}{1-3t+t^2}$, $B(t)=\frac{t}{1-3t+t^2}$; 4) Deducir de 3) que

$$a_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3.18. 1) Multiplicando por t^n y sumando la relación inicial obtenemos $A(t) - a_0 = tA^2(t)$.

3.19. 1) Numeramos los vértices del $(n+2)$-ágono con las cifras 1, 2, ..., $n+2$ en el sentido de las agujas del reloj. Son posibles dos casos. PRIMER CASO. Por el vértice $n+2$ no pasa ninguna diagonal. Entonces tiene que existir una diagonal entre los vértices 1 y $n+1$ y el número de maneras de partición es igual a a_{n-1}. SEGUNDO CASO. Existe una diagonal que sale del vértice $n+2$. Sea k un número menor tal, que el vértice $k+1$ está unido con una diagonal al vértice $n+2$. Si $k \geqslant 2$, entonces existe una diagonal del tipo $(1, k+1)$. Entonces el número de particiones del $(n+2)$-ágono inicial es igual al número de particiones del $(k+1)$-ágono con vértices $1, 2, \ldots, k+1$, multiplicado por el número de particiones del $(n-k+2)$-ágono con vértices $k+1, k+2, \ldots, n+2$, o sea que es igual a $a_{k-1}a_{n-k}$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$. Es natural considerar que $a_0=1$. Entonces tendremos $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k-1}a_{n-k}$. Lo mismo que en el problema 3.18, hallamos que $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. 2) $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Se resuelve en forma análoga al problema 1);

3.20. 1) Multiplicando por t^n y sumando por n obtendremos para la función generatriz $A(t) \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ la ecuación funcional $A^2(t) = A(2t)$. Buscaremos su solución en la forma $A(t) = e^{\alpha t}$. Evidentemente esta función satisface la ecuación funcional. Teniendo en cuenta que $a_1 = 1$ hallamos que $\alpha = 1$, de donde $a_n = \frac{1}{n!}$. La unicidad de la solución se deduce de las relaciones iniciales. 4) $a_{2n+1} = 0$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 4^{-n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

3.22. 1) De $A(t) = (1-qt)A(qt)$ se deduce que $a_n = a_n q^n - a_{n-1}q^n$, de donde $a_n = q^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n} (q^k-1)^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $a_0 = 1$.

3.26. [1) y 2) $S(n, k, l+1) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu}\left[\binom{n+1}{\nu+1} - \binom{n}{\nu+1}\right] \times$

$\times (\nu+1+l)^k = \sum\limits_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{n+1-\nu}\binom{n+1}{\nu}(\nu+l)^k + \sum\limits_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}(\nu+l)^k =$

$= S(n+1, k, l) + S(n, k, l)$. 4) Demostración con inducción por k empleando el 3). Para cualesquiera l y $n > 0$ $S(n, 0, l) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu}\binom{n}{\nu} = 0$. Supongamos que la afirmación es justa para cierto $k \geqslant 0$, cualesquiera $n > k$ y cualesquiera l. Sea $k+1 < n$. Del 3) tenemos $S(n, k+1, l) = (n+l)\,S(n, k, l) + nS \times \times (n-1, k, l)$. Como $k < n-1$, entonces, por presupuesto de la inducción, $S(n, k, l) = S(n-1, k, l) = 0$ y, en consecuencia, $S(n, k+1, l) = 0$. 5) Emplear 3) y 4). 6) Emplear 3) y 5). 7) Consecuencia de 2), 3) y 6).

3.27. 1) Mostrar que $\sigma_1(t) = t(1-t)^{-1}$ y que $(1-nt)\ \sigma_n(t) = nt\sigma_{n-1}(t)$.

§ 4

4.1. 1) Se deduce de que para $n > 2$ y $0 \leqslant i < n$ son válidas las desigualdades $n \leqslant (i+1)(n-i) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. 3) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \leqslant$ $\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 2 + \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} < 3$. 4) Hacerlo con inducción por n empleando el 3). 6) Utilizar la desigualdad de Cauchy: $\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$, $a_i \geqslant 0$, y el hecho de que la media aritmética da los factores que se encuentran en el primer miembro de la desigualdad es igual a $\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i^2 =$ $= \frac{2n+1}{3}$. 7) Poner $a_n = \frac{(2n-1)!!\ \sqrt{3n+1}}{(2n)!!}$ y mostrar que $\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)^2 > 1$, $a_1 > 1$. 9) $e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} > \frac{n^n}{n!}$.

4.2. 1) Emplear los 4.1, 1) y 4.1, 4). 2) Al demostrar la segunda desigualdad poner $a_k = \frac{n^n}{\binom{n}{k} k^k (n-k)^{n-k}}$ y mostrar que $a_1 = 1$, $\frac{a_{k+1}}{a_k} =$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n-k-1}\right)^{n-k-1}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} > 1 \text{ para } k < \frac{n-1}{2}.$$

3) $\binom{2(n+1)}{n+1} = 2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n} >$

$> \frac{2(2n+1)\,4^n}{2\sqrt{n(n+1)}\ \sqrt{n+1}} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$; para la 2a. desigualdad emplear 4.1 7).

4.4. 5) $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$. 4.5. 1) Sí. 2) No.

4.6. 1) Da $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (a_i - \overline{a})^2 \geqslant \frac{1}{n} \sum_{a_i:\ |a_i - \overline{a}| \geqslant t} (a_i - \overline{a})^2 \geqslant \delta_t t^2$. 2) INDICACION. Evaluar la fracción de aquellos vectores binarios de longitud n, cuyo número de coordenadas iguales a la unidad satisface la desigualdad $\left|k - \frac{n}{2}\right| \geqslant t\sqrt{n}$.

3) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k} < \sum_{k:\ |k-n/2| < (\log_2 n)\sqrt{n}} \frac{1}{k}\binom{n}{k} <$

$< \frac{1}{(n/2) - \sqrt{n}\log_2 n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}}{n - 2\sqrt{n}\log_2 n}$. Ver 4.4, 1) y 4.6, 2).

4.7. 1) Empleando la fórmula (13) obtendremos

$$\binom{n}{k}=\frac{\sqrt{n}\,n^n\,(1+O\,(1/n))}{\sqrt{2\pi k\,(n-k)}\,k^k\,(n-k)^{n-k}}.$$

Pongamos $x=\frac{n}{2}-k$; entonces la expresión obtenida se puede escribir en la forma

$$\binom{n}{k}=\frac{(1+O\,(1/n))\,2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n\left(1-\frac{2x}{n}\right)\left(1+\frac{2x}{n}\right)}\left(1-\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}-x}\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}+x}}$$

A continuación tenemos

$$\ln\left[\left(1-\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}-x}\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}+x}\right]=\left(\frac{n}{2}-x\right)\ln\left(1-\frac{2x}{n}\right)+$$
$$+\left(\frac{n}{2}+x\right)\ln\left(1+\frac{2x}{n}\right)=\left(\frac{n}{2}-x\right)\left(-\frac{2x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n}\right)^2-\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{n}{2}+x\right)\left(\frac{2x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n}\right)^2+\ldots\right)=\frac{2x^2}{n}+\frac{16x^4}{3n^3}+O\left(\frac{x^6}{n^4}\right).$$

De aquí que $\binom{n}{k}\sim\frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}}\,e^{-\frac{(2k-n)^2}{n}}$ 2), 3) Cambio del enunciado del teorema de Moivre y Laplace. Véase por ejemplo [32].

4.8. 2) EVALUACIÓN DESDE ARRIBA. Empleando la desigualdad (13) obtenemos

$$\frac{n!}{(\lambda n)!\,(\mu n)!}<\frac{1}{\sqrt{2\pi n\lambda\mu}}\,\frac{1}{\lambda^{\lambda n}\mu^{\mu n}}\,\exp\left\{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12\lambda n}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{12\mu n}+\frac{1}{360\,(\lambda n)^3}+\frac{1}{360\,(\mu n)^3}\right\}.$$

Sin limitación de generalidad se puede considerar que $\lambda\geqslant\mu$. Entonces $\frac{1}{12n}<\frac{1}{12\lambda n}$, $\frac{1}{360\,(\lambda n)^3}+\frac{1}{360\,(\mu n)^3}\leqslant\frac{1}{180\mu^3n^3}<\frac{1}{12\mu n}$. De aquí que $\binom{n}{\lambda n}<$ $<G\,(n,\ \lambda)$. La evaluación inferior se demuestra en forma análoga. 3) Empleamos la evaluación inferior del problema 2). Si $\lambda n\geqslant 3$ o $\mu n\geqslant 3$, entonces $\frac{1}{12\lambda n}+\frac{1}{12\mu n}<\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$, pero $\exp\left\{-\frac{1}{9}\right\}>\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si $\lambda n<3$ y $\mu n<3$, entonces $1\leqslant\mu n\leqslant\lambda n\leqslant 2$ y desigualdad se comprueba directamente. Para $\lambda n=\mu n=1$ tenemos $\binom{n}{n\lambda}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}G\,(n,\ \lambda)$. 4) La evaluación desde arriba $\sum\limits_{k=\lambda n}^{n}\binom{n}{k}\leqslant\binom{n}{\lambda n}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\times\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^i=\frac{\lambda}{2\lambda-1}\binom{n}{\lambda n}$.

4.9. 1) $(n)_k=n^k\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)=n^k\exp\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1-\frac{i}{n}\right)$, pero $\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1-\frac{i}{n}\right)=$ $=-\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{i}{n}\right)^{\nu}=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu n^{\nu}}\sum_{i=1}^{k-1}i^{\nu}$. 3) INDICACIÓN. Demostrar que $\sum_{\nu=1}^{k-1}\nu^i=\frac{k^{i+1}}{i+1}+O(k^i)$ Véase 4.13, 2).

4.12. INDICACIÓN. Para $\int_n^m f(x)\,dx$ la suma integral superior es $\sum_{k=n+1}^{m} f(k)$ y la inferior es $\sum_{k=n}^{m-1} f(k)$.

4.15. 1) Descomponemos $A(t)$ en las fracciones simples: $A(t)=\frac{c_1}{\lambda_1-t}+\frac{c_2}{\lambda_2-t}+\ldots+\frac{c_m}{\lambda_m-t}+B(t)$, donde $B(t)$ es polinomio. Para hallar el coeficiente c_1 multiplicamos $A(t)$ por λ_1-t. Entonces $(\lambda_1-t)A(t)=$ $=\frac{-Q(t)}{(t-\lambda_2)\ldots(t-\lambda_m)}$ Para $t=\lambda_1$ el primer miembro será igual a c_1 y el segundo, a $\frac{-Q(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)}$ Así que $c_1=\frac{-Q(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)}$. También se pueden calcular análogamente los coeficientes c_i $(i=\overline{2, m})$. La fracción $\frac{1}{1-t/\lambda_k}$ se puede descomponer en una progresión geométrica $\left(1-\frac{t}{\lambda_k}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda_k}\right)^n$. Obtenemos $A(t)=\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{\lambda_i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda_i}\right)^n+B(t)$. De aquí que para n grandes $a_n\sim$ $\sim\frac{c_1}{\lambda_1^{n+1}}+\frac{c_2}{\lambda_2^{n+1}}+\ldots+\frac{c_m}{\lambda_m^{n+1}}\sim c_1\lambda_1^{-n-1}$.

4.16. 1) $a_n\sim 2\cdot 3^n$; 2) $a_n\sim\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$ 3) $a_n\sim\left(-\frac{8}{13}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$; 4) $a_{2n}=0$, $a_{2n+1}\sim(-1)^n\,2^{n+3}$.

5) INDICACIÓN. $6t^4-17t^3+35t^2-22t+4=6\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)\times$ $\times(t-1+i\sqrt{3})(t-1-i\sqrt{3})$, $a_n\sim\frac{2}{31}3^n$.

4.17. 1) $a_n\sim(-3(-2)^n)$. 2) Sea $A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$. Multiplicando los dos miembros de la relación por t^n y sumando, obtendremos $A(t)-1=qtA(t)+$ $+pt(1-t)^{-1}-ptA(t)$. De aquí que $A(t)=\frac{1}{2}(1-t)^{-1}+\frac{1}{2}(1-(q-p)t)^{-1}$, $a_n=$

$=\frac{1}{2}-\frac{(q-p)^n}{2}\sim 1/2$. 3) $a_n=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{3}-\operatorname{sen}\frac{4\pi n}{3}\right)$. 4) $a_n\sim 3^n$. 5) $a_n\sim n^2 2^{n-5}$.

4.18. 1) Anotamos nuevamente la ecuación en la forma $x=\ln t-\ln x\,(*)$. Puesto que $t\to\infty$, pues se puede considerar que $t>e$ y, en consecuencia, $x>1$. Entonces de (*) se deduce que $x<\ln t$, o sea que $1<x<\ln t$. De aquí que $\ln x=O(\ln\ln t)$. De este modo $x=\ln t+O(\ln\ln t)$ con $t\to\infty$. Aplicando logaritmos tendremos que $\ln x=\ln\ln t+\ln\left(1+O\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)\right)=$ $=\ln\ln t+O\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)$. Sustituyendo en (*), obtendremos una nueva aproximación: $x=\ln t-\ln\ln t+O\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)$. De nuevo hallando por logaritmos y sustituyendo el resultado en el segundo miembro de (*), obtendremos una aproximación más que da la exactitud exigida (véase *N. G. de Brein.* Métodos asintóticos en el análisis. M. Literatura Extranjera, 1961).

4.19. INDICACIÓN. Primero mostrar que $f(t)=o(t)$ para $t\to\infty$. Entonces la igualdad inicial se puede escribir de la forma siguiente: $e^{tf(t)}=t+o(t)=O(1)$. Empleando esta igualdad mostrar que $f_1(t)=o(1)$ y transformar la igualdad inicial en $e^{tf(t)}=t+O(1)$. Por fin demostrar que $f(t)=$ $=\frac{\ln t}{t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

4.20. 1) Por medio de las relaciones (14) y (15) obtenemos que $a_3=\frac{9}{128}$, $a_4\leqslant\frac{11}{128}$. Con $n\geqslant 3$ la desigualdad (15) se puede escribir en la forma: $a_{n+2}\leqslant\frac{17}{1024}+a_n\left(\frac{323}{1024}+a_n\right)$. De esto se deduce que si $a_n\leqslant 1/8$, entonces también $a_{n+2}\leqslant 1/8$ para $n\geqslant 3$. Aprovechando el que $a_n\leqslant 1/8$ deduciremos de (15) una desigualdad nueva: $a_{n+2}\leqslant\frac{1}{2^{n+3}}+\frac{n+1}{4^{n+1}}+\frac{1}{8}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}+\right.$ $\left.+\frac{n+2}{2^{n+2}}+4a_n\right)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}+\frac{1}{2}a_n$. De aquí, por inducción, $a_n\leqslant 9\left(\frac{3}{4}\right)^n$. Empleando esta nueva aproximación deduciremos de (15) la desigualdad $a_{n+2}\leqslant\frac{1}{2^{n+3}}+66a_n\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}$. Utilizando esta última obtendremos que $a_n=$ $=2^{n-1}\left(1+O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right)$.

4.21. 1) Veamos la relación $a_k=\frac{f(n,\,k+1)}{f(n,\,k)}=\frac{n-k}{k+1}2^{-2^k}$. Si $k<$ $<[\log_2\log_2 n]$, entonces $a_k>1$, si $k>[\log_2\log_2 n]$, entonces $a_k<1$. En consecuencia el valor máximo de $f(n,k)$ se alcanza, o bien con $k=[\log_2\log_2 n]$, o bien con $k=[\log_2\log_2 n]+1$. 2) El mismo resultado que en 1).

4.22. $\max\limits_r f(n,r,k)=\binom{n}{k}2^{-k+2^k}$, $\min\limits_r (n,r,k)=2\binom{n}{k}$.

4.23. 1) La función $2^{n-k}+2^{2^k}$ como función del argumento real k es convexa hacia las y negativas y además el mínimo se alcanza con $k=$

$=\log_2 \left(n-2\log_2 n+o\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)\right)$. De esto se deduce que con valores enteros de k y n suficientemente grandes, el mínimo de $f(n, k)$ se alcanza, o bien con $k=[\log_2 n]$, o bien con $k=[\log_2 n]-1$. Examinamos la función $\psi(n)=n-2^{[\log_2 n]}$. Está claro que $\psi(n)<n/2$. Examinemos varios casos: a) $\psi(n)=cn$, $0<c<1/2$; entonces

$$2^{n-[\log_2 n]}=\frac{2^n}{n-\psi(n)}=\frac{2^n}{(1-c)\,n},$$

$$2^{2\,[\log_2 n]}=2^{n-\psi(n)}\quad 2^{(1-c)\,n},$$

$$g(n)=f(n,\ [\log_2 n])\sim\frac{2^n}{(1-c)\,n};$$

b) $\psi(n)=\log_2 n+\varphi(n)$, donde $\varphi(n)=o(n)$, $\varphi(n)\longrightarrow\infty$ cuando $n\longrightarrow\infty$; entonces $g(n)=f(n,\ [\log_2 n])\sim\frac{2^n}{n}$; c) $\psi(n)=\log_2 n+c$, $c>0$; entonces $g(n)=f(n,\ [\log_2 n])\sim\frac{2^n\,(1+2^{-c})}{n}$; d) $\psi(n)<\log_2 n$; entonces $g(n)=f(n,\ [\log_2 n]-1)\sim\frac{2^{n+1}}{n}$

BIBLIOGRAFIA

1. Automata. Studies. *Shennon C., Mackarty J.*, a.o., Princeton, 1956.
2. *Алферова З. В.*, Теория алгоритмов, М., «Статистика», 1973. (*Alférova Z. V.*, Teoría de los algoritmos). (VII).
3. *Арбиб М.*, Мозг, машина и математика, М., «Наука», 1968. (*Arbib M.*, El cerebro, la máquina y las matemáticas). (VI, VII).
4. *Berge C.*, Theorie des graphes et ses applicationes. París, 1958. (IV).
5. *Berlekamp E.*, Algebraic Coding Theory. N.Y., 1968. (*Берлекемп Э.* (V).
6. *Виленкин Н. Я.*, Комбинаторика, М., «Наука», 1969. (*Vilenkin N. Ya.*, Combinatoria). (VIII).
7. *Гилл А.*, Введение в теорию конечных автоматов, М. «Наука», 1966. (*Guill A.*, Introducción a la teoría de los autómatas finitos). (VI).
8. *Гиндикин С. Г.*, Алгебра логики в задачах, М., «Наука», 1972. (*Guindikin S. G.*, El álgebra de la lógica en problemas). (I — IV, VI, VII).
9. *Глушков В. М.*, Синтез цифровых автоматов, М., «Физматгиз», 1962. (*Glushkov V. M.*, Síntesis de autómatas digitales). (VI).
10. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. I, М., «Наука», 1974. (Matemática discreta y problemas matemáticos de cibernética). (I — V).
11. *Захарова Е. Ю.*, Критерий полноты систем функций из P_k. Сб. Проблемы кибернетики, вып. 18, М., «Наука», 1967. (*Zajárova E. Yu.*, Criterios de completitud de sistemas de funciones de P_k). (III).
12. *Захарова Е. Ю.*, *Яблонский С. В.*, О некоторых свойствах существенных функций из P_k, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 12, с. 247—252, М. «Наука», 1964. (*Zajárova E. Yu.*, *Yablonsky S. V.*, Sobre algunas propiedades de las funciones sustanciales de P_k). (VIII).
13. *Зыков А. А.*, Теория конечных графов, т. I, Новосибирск, «Наука», 1969. (*Zíkov A. A.*, Teoría de los grafos finitos). (IV).
14. *Kemeny J.* a.o., Introduction to Finite Mathematics. (IV, VIII).
15. *Кобринский Н. Е.*, *Трахтенброт Б. А.*, Введение в теорию конечных автоматов, М. «Физматгиз», 1962. (*Kobrinski N. E.*, *Trajtenbrot B. A.*, Introducción a la teoría de autómatas finitos). (VI).

[1]) Los números romanos que se indican entre paréntesis señalan los capítulos recomendados de los respectivos libros.

16. *Кофман А.*, Введение в прикладную комбинаторику, М., «Наука», 1975. (*Kofman A.*, Introducción a la combinatoria aplicada). (IV, VIII).
17. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.*, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М., «Наука», 1975. (*Lavrov J. A., Maksímova L. L.*, Problemas de la teoría de conjuntos, de lógica matemática y de la teoría de algoritmos). (I, II, VII).
18. *Леонтьев В. К.*, Задачи по вычислительным системам (ч. III. Дискретный анализ) МФТИ, 1975. (*Leóntiev V. C.*, Problemas de sistemas de cálculo). (V, VIII).
19. *Лупанов О. Б.*, О синтезе некоторых классов управляющих систем, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 10, М., Физматгиз, 1963. (*Lupánov O. B.*, Sobre la síntesis de algunas clases de sistemas directrices). (I, IV).
20. *Мальцев А. И.*, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., «Наука», 1965. (*Máltzev A. I.*, Algoritmos y funciones recursivas). (VII).
21. *Марков Ал. А.* Нерекуррентное кодирование, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 8, М., Физматгиз, 1962. (*Márkov A. A.*, Codificación no recurrente). (V).
22. *Мендельсон Э.*, Введение в математическую логику, М., «Наука», 1971. (*Mendelsón E.*, Introducción a la lógica matemática). (I, VII).
23. *Minsky M.*, Calculation and Automata. N.Y., 1967. (*Минский М.* (VI, VII).
24. *Мощенский В. А.*, Лекции по математической логике, Минск, Изд-во БГУ, 1973. (*Moschenski V. A.*, Lecciones de lógica matemática). (I, II, VII).
25. *Ore O.*, Theory of Graphs. N.Y., 1963. (IV).
26. *Peterson W.*, Error-Correting Codes. N.Y., 1961. (V).
27. *Riordan J.*, An Introduction to Combinatorial Analysis. N.Y., 1958. (IV, VIII).
28. *Rogers H. Jr.*, Theory of Recursive Functions and Effective Computability. N.Y., 1967. (VII).
29. *Рыбников К. А.*, Введение в комбинаторный анализ, М., Изд-во МГУ, 1972. (*Ríbnikov C. A.*, Introducción al análisis combinatorio). (IV, VIII).
30. *Трахтенброт Б. А.*, Алгоритмы и вычислительные автоматы, М., «Советское радио», 1974. (*Trajtenbrot B. A.*, Algoritmos y autómatas calculadores). (VI, VIII).
31. *Трахтенброт Б. А., Берздинь Я. М.*, Конечные автоматы, М., «Наука», 1970. (*Trajtenbrot B. A., Barzdin Ya. M.* Autómatas finitos). (VI).
32. *Feller W.*, An Introduction to Probability Theory and Its Applications. N.Y., 1966. (VIII).
33. *Harary F.*, Graph Theory. Rending, 1969. (IV).
34. *Hall M. Jr.*, Combinatorial Theory. Toronto, 1967. (IV, VIII).
35. *Яблонский С. В.*, Функциональные построения в k-значной логике, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 51, Изд-во АН СССР, 1958, 5—142. (*Yablonsky S. V.*, Construcciones funcionales en la lógica k-valente). (I, IV).
36. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.*, Функции алгебры логики и классы Поста, М., «Наука», 1966. (*Yablonsky S. V., Gavrilov G. P., Kudriávtsev V. B.*, Funciones del álgebra de la lógica y las clases de Post). (I, II).

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS

A nuestros lectores:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

LA EDITORIAL « MIR » PUBLICARA EN 1980 LOS SIGUIENTES LIBROS

Kisoliov A., Krasnov., Makárenko G.

Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Los autores de este libro son candidatos a doctores en ciencias fisicomatemáticas.

En esta obra se han recopilado cerca de 1000 problemas y ejercicios del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se han incuido también el método de isoclinas para las ecuaciones del primer y segundo orden, problemas para hallar las trayectorias ortogonales, dependenciae independencia lineales, de los sistemas de funciones. Además, contiene problemas para hallar la estabilidad de las soluciones, el método del parámetro pequeño, el método para resolver ecuaciones y sistemas.

Cada parágrafo comienza con una breve introducción teórica; después se exponen las determinaciones y métodos principales para la solución de los problemas. Todos los problemas van acompañados de sus resultados; para alguno de ellos hay indicaciones sobre cómo resolverlos.

Este es un libro de texto destinado a los estudiantes de los centros de enseñanza superior.

Gordón V. y otros

Problemas de geometría descriptiva

Este libro ha sido elaborado de acuerdo con el material expuesto en el manual de V. O. Gordón «Curso de geometría descriptiva», siendo su complemento. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de utilizar otros manuales, puesto que para comprender los problemas de dicho libro solamente se requiere conocer las tesis fundamentales que debe poseer todo manual.

Esta recopilación muestra el proceso utilizado para resolver problemas tipo, que aclaran tesis fundamentales del curso de geometría descriptiva, dando soluciones detalladas de una serie de problemas.

Al final del libro se encuentran las respuestas a los problemas propuestos. Estas respuestas se dan en forma textual o gráfica, en función del carácter de los problemas.

La selección de problemas, hecha considerando su cantidad y contenido, garantiza el aprendizaje del material teórico del curso general de geometría descriptiva.

Los problemas de geometría han sido elegidos según programas que sirven para los estudiantes de las especialidades de construcción de maquinarias, de aparatos y mecánico-tecnológicas de los centros de enseñanza técnica superior.

Faddéev D., Sominski I.

Problemas de álgebra superior

En la primera parte del libro se exponen 980 problemas de álgebra superior, comprendidos en los 7 capítulos siguientes: números complejos, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, matrices, polinomios y funciones racionales de una variable, funciones simétricas y álgebra lineal. En la segunda parte se dan algunas indicaciones breves para resolver los problemas más difíciles.

La tercera parte está dedicada a las respuestas; en algunos casos se da el método de solución. La aparición de este libro es fruto de la experiencia adquirida en las clases impartidas por los autores en la Universidad Estatal de Leningrado y en el Instituto Pedagógico Hertzen.

En 1975 nuestra Editorial publicó la versión española del libro del profesor A. Kurosch «Curso de álgebra superior». A pesar de que la presente obra fue hecha independientemente del libro del citado autor, al resolver los problemas conviene consultar la teoría correspondiente en el citado texto.

Esta recopilación de problemas está dedicada a los estudiantes de los primeros cursos de las universidades e institutos pedagógicos; la solución de los problemas propuestos facilitará la comprensión y asimilación del curso de álgebra superior.