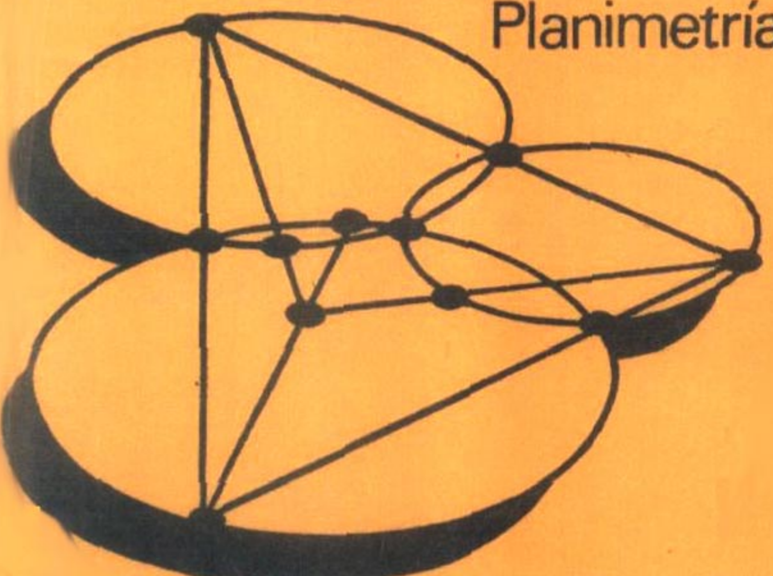
ciencia popular

Problemas de geometría

Planimetría



I.Shariguin

El libro contiene más de 600 problemas de planimetría. Es una colección de diversos hallazgos geométricos, cuyo objetivo consiste en hacer ver lo elegantes que son los procedimientos de geometría elemental que se pueden aplicar en la demostración y el cálculo.

Editorial · Mir · Moscú

Problemas de geometría
Planimetría

И. Ф. ШАРЫГИН

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ
ПЛАНИМЕТРИЯ

МОСКВА «НАУКА»

Ciencia popular

I. Shariguin

Problemas de geometría
Planimetría

Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por G. Lozhkin

Impreso en la URSS

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

На испанском языке

ISBN 5-03-000657-5

Indice

Prefacio

Hoy día, al estudiar la geometría, los alumnos aprenden diferentes conceptos y medios de resolución de los problemas, pero precisamente su variedad deja poco tiempo para adquirir hábitos en la solución de estos problemas. Sin duda, es discutible la cuestión de hasta qué grado es importante aprender a solucionar los problemas geométricos difíciles. Puede ser que, realmente, para los que enlazan su futuro con las profesiones de matemático o programador, es más útil ocuparse de los problemas de lógica combinatoria, estudiar los principios del análisis y aprender a componer programas para los ordenadores. Sin embargo, el autor considera que una imaginación geométrica desarrollada es una cualidad necesaria para el futuro matemático y útil para los futuros ingenieros, físicos, constructores, arquitectos y muchos otros especialistas.

En el primer apartado, sobre todo en su segunda mitad, se encuentran problemas bastante difíciles. En el segundo apartado, destinado para un lector apasionado por la geometría, la dificultad de los problemas crece, aunque también aquí cada párrafo empieza con problemas de introducción relativamente simples. Los criterios más importantes empleados al elegir los problemas fueron: el carácter natural de la enunciación, la solución por medio de la geometría, el carácter inesperado del resultado y la originalidad del problema.

Pese a la clasificación en lo fundamental según el objeto que figura en el problema, el autor no intentó sistematizar los problemas por tipos y métodos de solución, por su pertenencia a uno u otro apartado de la geometría. En esencia, casi cada problema geométrico (en comparación con los ejercicios rutinarios para solucionar las ecuaciones, las desigualdades, etc.) es original: para solucionar cada uno de éstos hay que hallar qué construcciones adicionales deben hacerse, qué fórmulas y teoremas es necesario usar. Por eso el presente libro de ningún modo puede considerarse como una colección de problemas del curso sistemático de geometría; más exactamente, es una colección de diferentes hallazgos geométricos, cuyo objetivo consiste en demostrar la elegancia de los procedimientos de geometría elemental aplicados con el fin de demostrar y calcular (sin recurrir al empleo del álgebra vectorial y usando al mínimo el método de coordenadas, las transformaciones geométricas y, quizás, un poco más la trigonometría).

El primer apartado empieza con un conjunto de hechos geométricos que confinan al curso de geometría que se estudia en 6—8 grados de secundaria. Muchos de ellos figuran en los manuales de escuela tradicionales. Además, en este apartado fueron reunidos los problemas (en lo fundamental para «calcular» los elementos de las figuras geométricas) destinados para reforzar el conocimiento de las fórmulas y los teoremas fundamentales estudiados, desarrollar la técnica de resolución de problemas geométricos. La práctica de resolución de problemas ayudará al lector a prepararse para los exámenes escolares y los de ingreso a la Universidad. La primera mitad de este apartado contiene unos problemas relativamente simples, por lo cual tienen sólo las respuestas, más adelante la complejidad de los problemas crece, a éstos acompañan indicaciones de cómo hay que solucionarlos o resoluciones detalladas.

Es difícil garantizar que el autor en cada caso logre encontrar la vía «óptima» de solución sin hablar ya de que algunos problemas (aunque, por lo visto, no muchos) el experto en geometría resolvería de manera más breve, aprovechando la inversión, los métodos de geometría proyectiva, etc. El autor premeditadamente no ha trazado todos los enlaces y generalizaciones posibles de los problemas, como lo hacen los matemáticos teóricos que desean descubrir en cada caso concreto el hecho general más transparente desde el punto de vista de la lógica, sino que ha actuado, más bien, como un físico práctico que debe resolver un problema concreto ateniéndose al criterio siguiente: si no se descubre una solución simple y elegante hace falta «calcular». Probablemente, algunos lectores no renunciarán al placer de hallar una solución mejor a algunos problemas propuestos por el autor. No obstante, hay que indicar que algunos problemas son bastante difíciles. Si se trata de resolverlos en la escuela, éstos pueden representar interés como tema de un informe en un círculo de interés.

Aunque la originalidad de los problemas reunidos en el libro es distinta, el autor, sin embargo, guarda la esperanza de que parte de la colección representada aquí interese también a los aficionados a la geometría.

Notemos que en algunos casos los problemas tienen sólo el plan de resolución o se examina uno de los casos posibles. La necesidad de analizar por turno los diferentes casos posibles en la disposición de las figuras es una inconveniencia que se encuentra con frecuencia en las demostraciones de geometría elemental; ésta desaparece, como regla, al pasar a los vectores, los «ángulos dirigidos», el método de coordenadas, etc.; es cierto que además a menudo desaparece también la misma geometría.

A fin de hacer el libro comprensible para los lectores de diferentes generaciones y con distintos niveles de preparación se ha elegido una terminología que no coincide completamente con la aceptada hoy día en la escuela. Las figuras congruentes se llaman simplemente «iguales», no se emplean los signos y las designaciones: $\cong$, $[AB]$, (AB), etc. En algunos casos particulares, cuando se trata, por ejemplo, del triángulo ABC, se emplean las designaciones: $\angle A$, sen A, lo cual significa $\angle BAC$, sen $\angle BAC$.

I. Hechos y teoremas geométricos fundamentales. Problemas de cálculo

I.1. Demostrar que las medianas en el triángulo se intersecan en un punto y se dividen por éste en razón de 1:2.

I.2. Demostrar que las medianas dividen el triángulo en seis partes equivalentes.

I.3. Demostrar que el diámetro de la circunferencia que circunscribe un triángulo es igual a la razón entre su lado y el seno del ángulo opuesto.

I.4. Supongamos que el vértice de un ángulo se encuentra fuera de un círculo y sus lados intersecan la circunferencia. Demostrar que la magnitud del ángulo es igual a la semidiferencia entre los arcos cortados por sus lados en la circunferencia, dispuestos en el interior del ángulo.

I.5. Supongamos que el vértice de un ángulo se halla dentro de un círculo. Demostrar que la magnitud del ángulo es igual a la semisuma de los arcos, uno de los cuales se encuentra entre sus lados, mientras que el otro se halla entre sus prolongaciones más allá del vértice del ángulo.

I.6. Sea AB la cuerda de una circunferencia; l, la tangente a la misma (A es el punto de tangencia). Demostrar que cada uno de los dos ángulos entre AB y l se determina como la mitad del arco de la circunferencia comprendida en el interior del ángulo examinado.

I.7. Por el punto M situado a la distancia a del centro de la circunferencia de radio R ($a > R$), está trazada una secante que corta la circunferencia en los puntos A y B. Demostrar que $|MA|\cdot|MB|$ es constante para todas las secantes y es igual a $a^2 - R^2$ (al cuadrado de la longitud de la tangente).

I.8. Por el punto M que se halla a una distancia a del centro de una circunferencia de radio R ($a < R$), pasa la cuerda AB. Demostrar que $|AM|\cdot|MB|$ es constante para todas las cuerdas y es igual a $R^2 - a^2$.

I.9. Sea AM la bisectriz del triángulo ABC. Demostrar que $|BM| : |CM| = |AB| : |AC|$. Lo mismo es cierto para la bisectriz del ángulo exterior del triángulo. (En este caso M se halla en la prolongación del lado BC).

I.10. Demostrar que la suma de las diagonales al cuadrado de un paralelogramo es igual a la suma de sus lados al cuadrado.

I.11. Los lados de un triángulo son a, b y c. Demostrar que la mediana m_a trazada hacia el lado a se calcula por la fórmula

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

I.12. Tenemos dos triángulos con un vértice A común, los demás vértices se encuentran en dos rectas que pasan por A. Demostrar que la razón entre las áreas de estos triángulos es igual a la razón entre los productos de los dos lados de cada triángulo que contienen el vértice A.

I.13. Demostrar que el área de un polígono circunscrito es igual a rp, donde r es el radio de la circunferencia inscrita, p, su semiperímetro (como caso particular, esta fórmula es válida para el triángulo).

I.14. Demostrar que el área del cuadrilátero es igual al semiproducto de las diagonales por el seno del ángulo comprendido entre éstas.

I.15. Demostrar la validez de las fórmulas siguientes para calcular el área del triángulo:

$$S = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}, \quad S = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C,$$

donde A, B, C son los ángulos del triángulo, a, el lado dispuesto frente al ángulo A, R, el radio del círculo circunscrito.

I.16. Demostrar que el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo se determina por la fórmula $r = \frac{a+b-c}{2}$, donde a y b son los catetos y c, la hipotenusa.

I.17 Demostrar que si a y b son dos lados de un triángulo, α es el ángulo entre éstos y l, la bisectriz de este ángulo, entonces

$$l = \frac{2ab \cos \frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

I.18. Demostrar que las distancias desde el vértice A del triángulo ABC hasta los puntos de tangencia de los lados AB y AC con la circunferencia inscrita son iguales a $p - a$, donde p es el semiperímetro del triángulo ABC, $a = |BC|$.

I.19. Demostrar que si en el cuadrilátero convexo $ABCD$ se cumple la relación $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, deberá existir una circunferencia que contacte con todos sus lados.

I.20. a) Demostrar que las alturas en un triángulo se intersecan en un punto. b) Demostrar que la distancia desde el vértice de un triángulo hasta el punto de intersección de sus alturas es dos veces mayor que la distancia desde el centro del círculo circunscrito hasta el lado opuesto.

* * *

I.21. En el lado de un ángulo recto con el vértice en el punto O se toman dos puntos A y B, siendo que $|OA| = a$, $|OB| = b$. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A y B, a la cual es tangente el otro lado del ángulo.

I.22. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a c y uno de los ángulos agudos es igual a 30°. Encontrar el radio de la circunferencia con el centro en el vértice del ángulo de 30° que divide el triángulo dado en dos partes equivalentes.

I.23. Los catetos de un triángulo rectángulo son a y b. Encontrar la distancia desde el vértice del ángulo recto hasta el punto de la circunferencia inscrita, más próximo a aquél.

I.24. La mediana de un triángulo rectángulo es igual a m y divide el ángulo recto en razón de 1:2. Hallar el área del triángulo.

I.25. Los lados del triángulo ABC son $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$. Determinar la relación, en la cual el punto de intersección de las bisectrices divide la bisectriz del ángulo B.

I.26. Demostrar que la suma de las distancias desde cualquier punto de la base del triángulo isósceles hasta sus lados es igual a la altura de este triángulo trazada hasta el lado de éste.

I.27. Demostrar que la suma de las distancias desde cualquier punto interior de un triángulo regular hasta sus lados es igual a la altura de este triángulo.

I.28. Sobre la base AC del triángulo isósceles ABC se toma un punto M de manera que $|AM| = a$, $|MC| = b$. En los triángulos ABM y CBM están inscritas circunferencias. Hallar la distancia entre los puntos de tangencia del lado BM con estas circunferencias.

I.29. Un paralelogramo con los lados a y b y el ángulo α tiene trazadas las bisectrices de los cuatro ángulos. Hallar el área del cuadrilátero limitado por las bisectrices.

I.30. Un rombo, cuya altura es h y el ángulo agudo α tiene inscrita una circunferencia. Hallar el radio de la circunferencia mayor de las dos posibles, cada una de las cuales se roza con la circunferencia dada y con dos lados del rombo.

I.31. Determinar el ángulo agudo de un rombo, cuyo lado es la media proporcional de sus diagonales.

I.32. Las diagonales de un cuadrilátero convexo son a y b, y los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos, son iguales. Hallar el área del cuadrilátero.

I.33. El lado AD del rectángulo $ABCD$ es tres veces mayor que el lado AB; los puntos M y N dividen AD en tres partes iguales. Hallar $\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB$.

I.34. Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A pasan las cuerdas AC y AD que tocan las circunferencias dadas. Demostrar que $|AC|^2 \cdot |BD| =$
$= |AD|^2 \cdot |BC|$.

I.35. Demostrar que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura bajadas sobre la hipotenusa.

I.36. En una circunferencia de radio r están elegidos tres puntos de manera que la circunferencia queda dividida en tres arcos que se relacionan como 3:4:5. Desde los puntos de división hasta la circunferencia están trazadas tangentes. Hallar el área del triángulo formado por estas tangentes.

I.37. Alrededor de una circunferencia está circunscrito un trapecio isósceles con el lado igual a l, siendo una de las bases de éste igual a a. Hallar el área del trapecio.

I.38. Dos rectas paralelas a las bases de un trapecio dividen cada uno de sus lados en tres partes iguales. Todo el trapecio se encuentra dividido por aquéllas en tres partes. Hallar el área de la parte media, si las áreas de las partes extremas son S_1 y S_2.

I.39. En el trapecio $ABCD$ $|AB| = a$, $|BC| = b$ $(a \neq b)$. Determinar si la bisectriz del ángulo A corta la base BC o el lado CD.

I.40. Hallar la longitud del segmento de una recta paralela a las bases de un trapecio, la cual pasa por el punto de intersección de las diagonales, si las bases del trapecio son a y b.

I.41. En un trapecio isósceles circunscrito alrededor de una circunferencia la razón de los lados paralelos es igual a k. Hallar el ángulo de la base.

I.42. La base AB del trapecio $ABCD$ es a y la base CD, b. Hallar el área del trapecio, si se sabe que sus diagonales son las bisectrices de los ángulos DAB y ABC.

I.43. La base media de un trapecio isósceles es a y las diagonales son mutuamente perpendiculares. Hallar el área del trapecio.

I.44. El área de un trapecio isósceles circunscrito alrededor de un círculo es igual a S y su altura, dos veces menor que su lado. Determinar el radio del círculo inscrito en el trapecio.

I.45. Las áreas de los triángulos formados por segmentos de las diagonales de un trapecio y sus bases son S_1 y S_2. Hallar el área del trapecio.

I.46. El ángulo ABC del triángulo ABC es igual a α. Hallar el ángulo AOC, donde

O es el centro de la circunferencia inscrita.

I.47. Un triángulo rectángulo tiene trazada la bisectriz del ángulo recto. Hallar la distancia entre los puntos de intersección de las alturas de los dos triángulos formados, si los catetos del triángulo dado son a y b.

I.48. Una recta perpendicular a dos lados de un paralelogramo divide éste en dos trapecios, en cada uno de los cuales se puede inscribir una circunferencia. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo, si sus lados son iguales a a y b ($a < b$).

I.49. Se da un semicírculo, cuyo diámetro es AB. Por el punto medio de la semicircunferencia se trazan dos rectas que dividen el semicírculo en tres partes de áreas equivalentes. ¿En qué razón dividen estas rectas el diámetro AB?

I.50. Se da el cuadrado $ABCD$, cuyo lado es a, y están construidas dos circunferencias. La primera circunferencia se encuentra totalmente en el interior del cuadrado $ABCD$ y es tangente al lado AB en E, así como con el lado BC y la diagonal AC. La segunda circunferencia con su centro en el punto A pasa por el punto E. Hallar el área de la parte común de los dos círculos limitados por estas circunferencias.

I.51. Los vértices de un hexágono regular con el lado a son los centros de circunferencias, cuyos radios son iguales a $a/\sqrt{2}$. Hallar el área de la parte del hexágono dispuesta fuera de estas circunferencias.

I.52. Fuera de una circunferencia de radio R se toma el punto A, desde el cual están trazadas dos secantes: una de éstas pasa por el centro, mientras que la otra pasa a una distancia $R/2$ del mismo. Hallar el área de la parte del círculo dispuesta entre estas secantes.

I.53. En el cuadrilátero $ABCD$ se conocen los ángulos: $\angle DAB = 90°$, $\angle DBC = 90°$. Además, $|DB| = a$, $|DC| = b$. Hallar la distancia entre los centros de dos circunferencias, una de las cuales pasa por los puntos D, A y B y la otra, por los puntos B, C y D.

I.54. En los lados AB y AD del rombo $ABCD$ se eligen dos puntos M y N de manera que las rectas MC y NC dividen el rombo en tres partes de áreas iguales. Hallar $|MN|$, si $|BD| = d$.

I.55. En el lado AB del triángulo ABC se toman dos puntos M y N de manera que $|AM| : |MN| : |NB| = 1:2:3$. Por los puntos M y N están trazadas rectas paralelas al lado AC. Hallar el área de la parte del triángulo comprendida entre estas rectas, si el área del triángulo ABC es igual a S.

I.56. Se da una circunferencia y un punto A fuera de ésta. AB y AC son tangentes a la circunferencia (B y C son los puntos de tangencia). Demostrar que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se halla en la circunferencia dada.

I.57. El triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia y en el arco BC se toma un punto arbitrario M. Demostrar que $|AM| = |BM| + |CM|$.

I.58. Sea H el punto de intersección de las alturas del $\triangle ABC$. Hallar los ángulos del $\triangle ABC$, si $\angle BAH = \alpha$ y $\angle ABH = \beta$.

I.59. El área de un rombo es S; la suma de sus diagonales, m. Hallar el lado del rombo.

I.60. Un cuadrado de lado a está inscrito en una circunferencia. Hallar el lado del cuadrado inscrito en uno de los segmentos obtenidos.

I.61. En un segmento con un arco de 120° y una altura h está inscrito el rectángulo $ABCD$ de manera que $|AB| : |BC| = 1:4$ (BC se halla sobre la cuerda). Encontrar el área del rectángulo.

I.62. El área de un anillo circular es igual a S. El radio de la circunferencia mayor es igual a la longitud de la menor. Hallar el radio de la circunferencia menor.

I.63. Expresar el lado de un decágono regular a través de R que es el radio de la circunferencia circunscrita.

I.64. Hacia una circunferencia de radio R desde el punto exterior M están trazadas las tangentes MA y MB que forman el ángulo α. Determinar el área de la figura limitada por las tangentes y el arco menor de la circunferencia.

I.65. Viene dado el cuadrado $ABCD$ de lado a. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por el punto medio del lado AB, el centro del cuadrado y el vértice C.

I.66. Se da un rombo con el lado a y el ángulo agudo α. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por dos vértices vecinos del rombo y toca el lado opuesto del rombo o su prolongación.

I.67. Se dan tres circunferencias de radio r que se rozan de dos en dos. Hallar el área del triángulo formado por tres rectas, cada una de las cuales es tangente a dos circunferencias y no corta la tercera.

I.68. Cierta recta tiene un punto de tangencia en M con una circunferencia de radio r. En esta recta, a ambos lados del punto M se toman los puntos A y B de manera que $|MA| = |MB| = a$. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por A y B y se roza con la circunferencia dada.

I.69. Viene dado el cuadrado $ABCD$ cuyo lado es a. En su lado BC se toma el punto M de manera que $|BM| = 3|MC|$ y en el lado CD, el punto N de modo que $2|CN| = |ND|$. Hallar el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo AMN.

I.70. Se da el cuadrado $ABCD$ de lado a. Determinar la distancia entre el punto medio del segmento AM, donde M es el punto medio de BC, y el punto N en el lado CD, que divide éste de tal manera, que $|CN| : |ND| = 3:1$.

I.71. Desde el vértice A del triángulo ABC sale una recta que divide por la mitad la mediana BD (el punto D se halla sobre el lado AC). ¿En qué razón esta recta divide el lado BC?

I.72. El cateto CA del triángulo rectángulo ABC es igual a b, el cateto CB, a a; CH es la altura, AM, la mediana. Hallar el área del triángulo BMH.

I.73. En el triángulo isósceles ABC $\angle A = \alpha > 90°$ y $|BC| = a$. Hallar la distancia entre el punto de intersección de las alturas y el centro de la circunferencia circunscrita.

I.74. Alrededor del triángulo ABC, en el cual $|BC| = a$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$, está circunscrita una circunferencia. La bisectriz del ángulo A corta la circunferencia en el punto K. Hallar $|AK|$.

I.75. En una circunferencia de radio R está trazado el diámetro y sobre éste se toma el punto A a una distancia a de su centro. Hallar el radio de la segunda circunferencia que entra en contacto con el diámetro en el punto A y es tangente por interior a la circunferencia dada.

I.76. Una circunferencia tiene trazadas tres cuerdas que se intersecan dos a dos. Cada cuerda está dividida por los puntos de intersección en tres partes iguales. Hallar el radio de la circunferencia, si una de las cuerdas es igual a a.

I.77. Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia, mientras que el otro está circunscrito alrededor de ésta. Hallar el radio de la circunferencia, si la diferencia de los perímetros de estos hexágonos es igual a a.

I.78. En el triángulo regular ABC, cuyo lado es igual a a, está trazada la altura BK. Los triángulos ABK y BCK tienen inscritas sendas circunferencias, a las cuales está trazada la tangente exterior común distinta del lado AC. Hallar el área del triángulo cortado por esta tangente del triángulo ABC.

I.79. Los ángulos del cuadrilátero inscrito $ABCD$ son $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BKC = \gamma$, donde K es el punto de intersección de las diagonales. Hallar $\angle ACD$.

I.80. Las diagonales del cuadrilátero inscrito $ABCD$ se intersecan en el punto K. Se sabe que $|AB| = a$, $|BK| = b$, $|AK| = c$, $|CD| = d$. Hallar $|AC|$.

I.81. Un trapecio está inscrito en una circunferencia. La base del trapecio forma con su lado el ángulo α y con la diagonal, el ángulo β. Hallar la razón entre el área del círculo y la del trapecio.

I.82. La base AD del trapecio isósceles $ABCD$ es igual a a, la base BC es igual a b, $|AB| = d$. La recta trazada por el vértice B divide por la mitad la diagonal AC y corta AD en el punto K. Hallar el área del triángulo BDK.

I.83. Hallar la suma de las distancias al cuadrado desde el punto M, tomado en el diámetro de cierta circunferencia, hasta los extremos de cualquiera de las cuerdas paralelas a este diámetro, si el radio de la circunferencia es igual a R y la distancia desde M hasta el centro de la circunferencia es igual a a.

I.84. Una cuerda común a dos circunferencias que se intersecan, se ve desde sus centros bajo los ángulos de 90° y 60°. Hallar los radios de las circunferencias, si la distancia entre sus centros es igual a a.

I.85. Viene dado el triángulo regular ABC. El punto K divide su lado AC en razón de 2:1 y el punto M divide el lado AB en razón de 1:2 (contando en ambos casos desde el vértice A). Demostrar que la longitud del segmento KM es igual al radio de la circunferencia descrita alrededor del triángulo ABC.

I.86. Dos circunferencias con radios R y $R/2$ tienen un contacto exterior. Uno de los extremos de un segmento de longitud $2R$ forma con la línea de centros un ángulo igual a $30°$ y coincide con el centro de la circunferencia de radio menor. ¿Qué parte del segmento se halla fuera de ambas circunferencias? (El segmento corta ambas circunferencias.)

I.87. El triángulo ABC tiene trazadas la mediana BK, la bisectriz BE y la altura AD. Hallar la longitud del lado AC, si se sabe que las rectas BK y BE dividen el segmento AD en tres partes iguales y $|AB| = 4$.

I.88. La relación entre el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo isósceles y el radio de la circunferencia circunscrita alrededor de este mismo triángulo es igual a k. Hallar el ángulo contiguo a la base del triángulo.

I.89. Hallar el coseno del ángulo contiguo a la base del triángulo isósceles, si el punto de intersección de sus alturas se halla en la circunferencia inscrita en el triángulo.

I.90. Hallar el área de un pentágono limitado por las rectas BC, CD, AN, AM y BD, donde A, B y D son tres vértices del cuadrado $ABCD$, N es el punto medio del lado BC y M divide el lado CD en razón de 2:1 (calculando a partir del vértice C), si el lado del cuadrado $ABCD$ es a.

I.91. En el triángulo ABC se dan: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Una circunferencia con el centro en B pasa por A y corta la recta AC en el punto K distinto de A, y la recta BC, en los puntos E y F. Hallar los ángulos del triángulo EKF.

I.92. Viene dado un cuadrado con el lado a. Hallar el área de un triángulo regular, uno de cuyos vértices coincide con el punto medio de uno de los lados del cuadrado y los otros dos se encuentran en las diagonales del cuadrado.

I.93. En los lados del cuadrado $ABCD$ se toman los puntos M, N y K, donde M es el punto medio del lado AB, N se halla en el lado BC, además, $2\,|BN| = |NC|$, K pertenece al lado DA, con la particularidad de que $2\,|DK| = |KA|$. Hallar el seno del ángulo comprendido entre las rectas MC y NK.

I.94. Por los vértices A y B del triángulo ABC pasa una circunferencia de radio r que corta el lado BC en el punto D. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, D y C, si $|AB| = c$ y $|AC| = b$.

I.95. El lado AB del triángulo ABC es igual a 3 y la altura CD bajada sobre el lado AB es igual a $\sqrt{3}$. La base D de la altura CD se encuentra sobre el lado AB, el segmento AD es igual al lado BC. Hallar $|AC|$.

I.96. En una circunferencia de radio R está inscrito el hexágono regular $ABCDEF$. Hallar el radio del círculo inscrito en el triángulo ACD.

I.97. El lado AB del cuadrado $ABCD$ es igual a 1 y es la cuerda de cierta circunferencia, estando los otros lados del cuadrado fuera de esta circunferencia. La longitud de la tangente CK trazada desde el vértice C a la misma circunferencia es igual a 2. ¿A qué es igual el diámetro de la circunferencia?

I.98. En un triángulo rectángulo el ángulo menor es α. Una recta que divide el triángulo en dos partes de áreas iguales, está trazada perpendicularmente a la hipotenusa. Determinar en qué razón esta recta divide la hipotenusa.

I.99. En el interior de un triángulo regular de lado igual a 1 se encuentran dos circunferencias que contactan entre sí y cada una de éstas es tangente a dos lados del triángulo (cada lado del triángulo es tangente por lo menos a una circunferencia). Demostrar que la suma de los radios de estas circunferencias no es menor de $(\sqrt{3}-1)/2$.

I.100. El triángulo rectángulo ABC con el ángulo agudo A igual a 30° tiene trazada la bisectriz BD del otro ángulo agudo. Hallar la distancia entre los centros de dos circunferencias inscritas en los triángulos ABD y CBD, si el cateto menor es igual a 1.

I.101. Los ángulos A y D del trapecio $ABCD$, contiguos a la base AD son de 60° y 30°, respectivamente. El punto N pertenece a la base BC, con la particularidad de que $|BN|:|NC|=2$. El punto M se halla sobre la base AD, la recta MN es perpendicular a las bases del trapecio y divide su área en dos partes iguales. Hallar $|AM|:|MD|$.

I.102. En el triángulo ABC se dan $|BC|=$

$= a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Hallar el radio de la circunferencia que tiene contacto con el lado BC, y a la que es tangente el lado AC en el punto A.

I.103. En el triángulo ABC $|AB| = c$, $|BC| = a$, $\angle B = \beta$. Sobre el lado AB se toma el punto M de manera que $2|AM| = 3|MB|$. Hallar la distancia desde M hasta el punto medio del lado AC.

I.104. En el lado AB del triángulo ABC se toma el punto M y en el lado AC, el punto N, con la particularidad de que $|AM| = 3|MB|$ y $2|AN| = |NC|$. Hallar el área del cuadrilátero $MBCN$, si la del triángulo ABC es igual a S.

I.105. Se dan dos circunferencias concéntricas con los radios R y r $(R > r)$ y el centro común O. La tercera circunferencia es tangente a las dos primeras. Hallar la tangente del ángulo comprendido entre las tangentes que parten del punto O, hacia la tercera circunferencia.

I.106. En el paralelogramo $ABCD$ $|AB| = a$, $|AD| = b$ $(b > a)$ y $\angle BAD = \alpha$ $(\alpha < 90°)$. Los puntos K y M en los lados AD y BC se toman de manera que $BKDM$ sea un rombo. Hallar el lado del rombo.

I.107. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a c. Los centros de tres circunferencias de radio $c/5$ se encuentran en sus vértices. Hallar el radio de una cuarta circunferencia tangente a las tres dadas que no las contiene en su interior.

I.108. Hallar el radio de una circunferencia que en ambos lados del ángulo de magnitud α

corta las cuerdas de longitud a, si se sabe que la distancia entre los extremos más próximos de estas cuerdas es igual a b.

I.109. Sobre el lado BC del triángulo ABC, como sobre el diámetro, está construida una circunferencia que corta los lados AB y AC en los puntos M y N. Hallar el área del triángulo AMN, si la del triángulo ABC es igual a S y $\angle BAC = \alpha$.

I.110. En una circunferencia de radio R están trazadas dos cuerdas mutuamente perpendiculares MN y PQ. Hallar la distancia entre los puntos M y P, si $|NQ| = a$.

I.111. Sobre el lado más grande BC del triángulo ABC, igual a b, se elige el punto M. Hallar la distancia mínima entre los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BAM y ACM.

I.112. En el paralelogramo $ABCD$ $|AB| = a$, $|BC| = b$, $\angle ABC = \alpha$. Hallar la distancia entre los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BCD y DAB.

I.113. En el triángulo ABC $\angle A = \alpha$, $|BA| = a$, $|AC| = b$. En los lados AC y AB se toman los puntos M y N, donde M es el punto medio de AC. Hallar la longitud del segmento MN, si se sabe que el área del triángulo AMN representa 1/3 parte de la del triángulo ABC.

I.114. Hallar los ángulos de un rombo, si el área del círculo inscrito en él es dos veces menor que la del rombo.

I.115. Hallar el área de la parte común de dos cuadrados, si cada uno de ellos tiene el lado igual a a y el segundo se obtiene girando el primero alrededor del vértice a un ángulo de $45°$.

I.116. Los dos lados opuestos de un cuadrilátero inscrito en un círculo son mutuamente perpendiculares y uno de ellos es igual a a; el ángulo agudo adyacente a éste se divide por la diagonal en las partes α y β. Determinar las diagonales (el ángulo α es contiguo al lado dado).

I.117. El paralelogramo $ABCD$ tiene el ángulo agudo DAB igual a α, $|AB| = a$, $|AD| = b$ $(a < b)$. Supongamos que K es la base de la perpendicular bajada desde el vértice B sobre AD, y M es el pie de la perpendicular bajada desde el punto K sobre la prolongación del lado CD. Hallar el área del triángulo BKM.

I.118. En el triángulo ABC desde el vértice C están trazados dos rayos que dividen el ángulo ACB en tres partes iguales. Hallar la relación entre los segmentos de los rayos comprendidos dentro del triángulo, si $|BC| = 3|AC|$, $\angle ACB = \alpha$.

I.119. En el triángulo isósceles ABC $(|AB| = |BC|)$ está trazada la bisectriz AD. Las áreas de los triángulos ABD y ADC son iguales a S_1 y S_2, respectivamente. Hallar $|AC|$.

I.120. Una circunferencia de radio R_1 está inscrita en un ángulo de magnitud α. Otra circunferencia de radio R_2 entra en contacto con uno de los lados del ángulo en el mismo punto que la primera y corta el segundo lado del ángulo en los puntos A y B. Hallar $|AB|$.

1.121. En una recta que pasa por el centro O de una circunferencia de radio 12, se toman los puntos A y B de manera que $|OA| = 15$, $|AB| = 5$. Desde los puntos A y B están trazadas tangentes a la circunferencia, cuyos puntos de tangencia se hallan a un mismo lado de la recta OAB. Encontrar el área del triángulo ABC, si C es el punto de intersección de estas tangentes.

1.122. En el triángulo ABC se conocen $|BC| = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Hallar el radio de la circunferencia que corta todos sus lados, formando en cada uno de ellos cuerdas de longitud d.

1.123. Los segmentos que unen los centros de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo, son iguales a a y b y se intersecan formando un ángulo de 60°. Hallar las diagonales del cuadrilátero.

1.124. En el lado BC del triángulo ABC se toma el punto M de manera que la distancia desde el vértice B hasta el centro de masas del triángulo AMC es igual a la distancia desde el vértice C hasta el centro de masas del triángulo AMB. Demostrar que $|BM| = |DC|$, donde D es la base de la altura bajada sobre BC desde el vértice A.

1.125. La bisectriz BE del ángulo recto B del triángulo rectángulo ABC se divide por el centro O de la circunferencia inscrita de manera que $|BO| : |OE| = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Hallar los ángulos agudos del triángulo.

1.126. En el segmento AB de longitud R está construida como sobre su diámetro una circunferencia. Una segunda circunferencia del mismo radio que la primera, tiene el centro en el punto A. Una tercera tiene contacto interior con la primera circunferencia y contacto exterior con la segunda; el segmento AB es tangente a esta tercera circunferencia. Hallar el radio de la tercera circunferencia.

1.127. Se da el triángulo ABC. Se sabe que $|AB| = 4$, $|AC| = 2$, $|BC| = 3$. La bisectriz del ángulo A corta el lado BC en el punto K. La recta que pasa por el punto B paralelamente a AC corta la prolongación de la bisectriz AK en el punto M. Hallar $|KM|$.

1.128. Una circunferencia con el centro dispuesto en el interior del ángulo recto, es tangente a un lado del ángulo, corta el otro lado en los puntos A y B e interseca la bisectriz del ángulo en los puntos C y D. La cuerda AB es igual a $\sqrt{6}$, la cuerda CD es igual a $\sqrt{7}$. Hallar el radio de la circunferencia.

1.129. En un paralelogramo hay dos circunferencias de radio 1, que entran en contacto entre sí y con tres lados del paralelogramo cada una. Se sabe también que el segmento de uno de los lados del paralelogramo entre el vértice y el punto de tangencia es igual a $\sqrt{3}$. Hallar el área del paralelogramo.

1.130. Una circunferencia de radio R pasa por los vértices A y B del triángulo ABC. La recta AC es tangente a dicha circunferencia en el punto A. Hallar el área del triángulo ABC, si se sabe que $\angle B = \alpha$, $\angle A = \beta$.

I.131. La bisectriz AK del triángulo ABC es perpendicular a la mediana BM y el ángulo B es igual a 120°. Hallar la razón entre el área del triángulo ABC y la del círculo circunscrito alrededor de este triángulo.

I.132. Por los centros de los lados AB y AC del triángulo rectángulo ABC está trazada una circunferencia, a la cual es tangente el lado BC Hallar la parte de la hipotenusa AC que se encuentra en el interior de esta circunferencia, si $|AB| = 3$, $|BC| = 4$.

I.133. Viene dado el segmento a. Tres circunferencias de radio R tienen los centros en los extremos y en el punto medio del segmento a. Hallar el radio de una cuarta circunferencia que es tangente a las tres circunferencias dadas.

I.134. Hallar el ángulo entre una tangente exterior común y una tangente interior común a dos circunferencias, si sus radios son R y r y la distancia entre sus centros es igual a $\sqrt{2(R^2 + r^2)}$ (los centros de las circunferencias se encuentran a un mismo lado de la tangente exterior común y a diferentes lados de la tangente interior común).

I.135. El segmento AB es el diámetro de un círculo y el punto C se encuentra fuera de él. Los segmentos AC y BC se intersecan con la circunferencia en los puntos D y E, respectivamente. Hallar el ángulo CBD, si las áreas de los triángulos DCE y ABC se relacionan como 1:4.

I.136. El ángulo en el vértice A del rombo $ABCD$ de lado a es igual a 120°. Los puntos E

y F pertenecen a los lados BC y AD, respectivamente, el segmento EF y la diagonal del rombo AC se intersecan en el punto M. Las áreas de los cuadriláteros $BEFA$ y $ECDF$ se relacionan como 1:2. Hallar $|EM|$, si $|AM|:|MC| = 1:3$.

I.137. Una circunferencia de radio R tiene su centro en el punto O. Desde el extremo del segmento OA que interseca la circunferencia en el punto M, está trazada la tangente a la circunferencia AK. Hallar el radio de la circunferencia que roza el arco MK, y a la cual son tangentes los segmentos AK, AM si $\angle OAK = 60°$.

I.138. El triángulo isósceles ABC está inscrito en un círculo. $|AB| = |BC|$ y $\angle B = \beta$. La línea media del triángulo se prolonga hasta la intersección con la circunferencia en los puntos D y E ($DE \parallel AC$). Hallar la razón entre las áreas de los triángulos ABC y DBE.

I.139. El ángulo α tiene su vértice en el punto O. En uno de sus lados se toma el punto M, del cual se levanta una perpendicular hasta la intersección con el otro lado en el punto N. Precisamente de la misma manera del punto K en el otro lado se levanta una perpendicular hasta la intersección con el primer lado en el punto P. B es el punto de intersección de las rectas MN y KP, y A, el punto de intersección de las rectas OB y NP. Hallar $|OA|$, si $|OM| = a$, $|OP| = b$.

I.140. Dos circunferencias de radios R y r tienen contacto con los lados de un ángulo dado y entre sí. Hallar el radio de una tercera circunferencia, a la cual son tangentes los lados del mismo ángulo, y cuyo centro se encuentra en el punto de tangencia de las circunferencias dadas.

I.141. La distancia entre los centros de dos circunferencias que no se intersecan, es igual a a. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de las tangentes exteriores comunes con las tangentes interiores comunes se encuentran en una misma circunferencia. Hallar el radio de esta circunferencia.

I.142. Demostrar que el segmento de una tangente exterior común a dos circunferencias, comprendido entre las tangentes interiores comunes, es igual a la longitud de la tangente interior común.

I.143. Un círculo con el centro en O tiene dos radios OA y OB mutuamente perpendiculares, C es un punto del arco AB, en el cual $\angle AOC = 60°$ ($\angle BOC = 30°$). Una circunferencia con el centro en A y de radio AB corta la prolongación de OC más allá del punto C en el punto D. Demostrar que el segmento CD es igual al lado del decaedro regular inscrito en la circunferencia.

Tomemos ahora el punto M diametralmente opuesto al punto C. El segmento MD aumentado en una quinta parte de su longitud se considera aproximadamente igual a la semicircunferencia. Estimar el error de esta igualdad aproximada.

I.144. Un rectángulo tiene los lados 7 y 8. Un vértice de un triángulo regular coincide con el del rectángulo y los otros dos se encuentran en sus lados que no contienen el primer vértice. Hallar el lado del triángulo regular.

I.145. Hallar el radio de la circunferencia mínima en la que está inscrito un trapecio isósceles, cuyas bases son de 15 y 4 y los lados, de 9.

I.146. $ABCD$ es un rectángulo, en el cual $|AB| = 9$, $|BC| = 7$. En el lado CD se elige el punto M de manera que $|CM| = 3$, y en el lado AD, el punto N de manera que $|AN| = 2{,}5$. Hallar el radio de la circunferencia máxima que se inscriba en el pentágono $ABCMN$.

I.147. Hallar el ángulo máximo del triángulo, si se sabe que el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo con vértices ubicados en los pies de las alturas del triángulo dado, es dos veces menor que la altura mínima del triángulo dado.

I.148. En el triángulo ABC, la bisectriz del ángulo C es perpendicular a la mediana trazada desde el vértice B. El centro de la circunferencia inscrita se encuentra en la circunferencia que pasa por los puntos A, C y el centro de la circunferencia circunscrita. Hallar $|AB|$, si $|BC| = 1$.

I.149. El punto M está alejado de los lados de un triángulo regular (de las rectas a las cuales pertenecen sus lados) a las distancias 2, 3 y 6. Hallar el lado del triángulo regular, si se sabe que su área es menor de 14.

I.150. El punto M se encuentra alejado de los lados del ángulo de 60° a las distancias $\sqrt{3}$ y $3\sqrt{3}$ (los pies de las perpendiculares bajadas desde el M sobre los lados del ángulo se encuentran en los lados y no en sus prolongaciones). La recta que pasa por M, interseca los lados del ángulo y corta un triángulo con un perímetro igual a 12. Hallar el área de este triángulo.

I.151. En el rectángulo $ABCD$ $|AB| = 4$, $|BC| = 3$. Hallar el lado del rombo, uno de cuyos vértices coincide con A, y los otros tres se encuentran en los segmentos AB, BC y BD, respectivamente.

I.152. El lado del cuadrado $ABCD$ es igual a 1. Hallar el lado del rombo, uno de cuyos vértices coincide con A, el opuesto se encuentra sobre la recta BD y los dos restantes, sobre las rectas BC y CD.

I.153. El ángulo agudo del paralelogramo $ABCD$ es igual a α. Una circunferencia de radio r pasa por los vértices A, B y C y corta las rectas AD y CD en los puntos M y N. Hallar el área del triángulo BMN.

I.154. La circunferencia que pasa por los vértices A, B y C del paralelogramo $ABCD$ corta las rectas AD y CD en los puntos M y N. El punto M está alejado de los vértices B, C y D a las distancias 4, 3 y 2, respectivamente. Hallar $|MN|$.

I.155. En el triángulo ABC $\angle BAC = \pi/6$. Una circunferencia con el centro en A y el radio igual a la altura bajada sobre BC, divide el área del triángulo por la mitad. Hallar el ángulo máximo del triángulo ABC.

I.156. En el triángulo isósceles ABC $\angle B = 120°$. Hallar la cuerda común de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, y de la circunferencia que pasa por el centro del círculo inscrito y los pies de las bisectrices de los ángulos A y C, si $|AC| = 1$.

I.157. El lado BC del triángulo ABC es igual a a, el radio de la circunferencia inscrita es igual a r. Determinar los radios de dos circunferencias iguales que son tangentes una a otra; además, una de éstas entra en contacto con los lados BC y BA, mientras que los lados BC y CA son tangentes a la otra.

I.158. Una circunferencia de radio R tiene inscrito un trapecio. Las rectas que pasan por los extremos de una de las bases paralelamente a los lados, se intersecan en el centro de la circunferencia. El lado se ve desde el centro bajo un ángulo α. Hallar el área del trapecio.

I.159. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a c. ¿Dentro de qué límites puede cambiar la distancia desde el centro del círculo inscrito hasta el punto de intersección de las medianas?

I.160. Los lados de un paralelogramo son iguales a a y b ($a \neq b$). ¿Dentro de qué límites puede variar el coseno del ángulo agudo entre las diagonales?

I.161. Por el punto M en el interior del triángulo ABC pasan tres rectas paralelas a los lados del triángulo. Los segmentos de rectas comprendidos en el interior del triángulo son iguales entre sí. Hallar las longitudes de estos segmentos, si los lados del triángulo son a, b y c.

I.162. En el triángulo ABC se encuentran tres circunferencias iguales, cada una de las cuales es tangente a dos lados del triángulo. Las tres circunferencias tienen un punto común. Hallar los radios de estas circunferencias, si los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo ABC son iguales a r y R.

I.163. La mediana del triángulo ABC es AD, $\angle DAC + \angle ABC = 90°$. Hallar $\angle BAC$, si se sabe que $|AB| \neq |AC|$.

I.164. Tres circunferencias de radios 1, 2 y 3 entran en contacto entre sí exteriormente. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por los puntos de tangencia de estas circunferencias.

I.165. Un triángulo isósceles tiene inscrito un cuadrado de área unitaria, cuyo lado se encuentra sobre la base del triángulo. Hallar el área del triángulo, si se sabe que los centros de masas del triángulo y del cuadrado coinciden.

I.166. El lado del triángulo equilátero ABC es igual a a. Sobre el lado BC se halla el punto D y sobre el AB se encuentra el punto E de manera que $|BD| = a/3$, $|AE| = |DE|$. Hallar $|CE|$.

I.167. En el triángulo rectángulo ABC desde el vértice del ángulo recto C están trazadas la bisectriz CL ($|CL| = a$) y la mediana CM ($|CM| = b$). Hallar el área del triángulo ABC.

I.168. Una circunferencia está inscrita en un trapecio. Hallar el área del trapecio, si se conocen la longitud a de una de las bases y los segmentos b y d, en los cuales se encuentra dividido por el punto de tangencia uno de los lados (el segmento b es adyacente a la base dada a).

I.169. Las diagonales de un trapecio son iguales a 3 y 5 y el segmento, que une los puntos medios de las bases, es igual a 2. Hallar el área del trapecio.

I.170. Una circunferencia de radio 1 está inscrita en el triángulo ABC, en el cual $\cos B = 0{,}8$. Esta circunferencia entra en contacto con la línea media del triángulo ABC, paralela al lado AC. Hallar la longitud del lado AC.

I.171. El área del triángulo regular ABC es igual a S. Paralelas a sus lados y a una distancia igual de éstos están trazadas tres rectas que se intersecan en el interior del triángulo y forman en la intersección el triángulo $A_1B_1C_1$ de área Q. Hallar la distancia entre los lados paralelos de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$.

I.172. Los lados AB y CD del cuadrilátero $ABCD$ son perpendiculares y representan los diámetros de dos circunferencias iguales de radio r que entran en contacto. Encontrar el área del cuadrilátero $ABCD$, si $|BC| : |AD| = k$.

I.173. Un ángulo, cuya magnitud es α, tiene inscritas dos circunferencias que entran en contacto entre sí. Determinar la razón entre el radio de la circunferencia menor y el de la tercera circunferencia, tangente a las dos primeras y uno de los lados del ángulo.

I.174. En el triángulo ABC sobre la línea media DE que es paralela a AB, como sobre el diámetro, está construida una circunferencia que corta los lados AC y BC en los puntos M

y N. Hallar $|MN|$, si $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$.

I.175. La distancia entre los centros de dos circunferencias es igual a a. Hallar el lado del rombo, cuyos dos vértices opuestos pertenecen a una circunferencia y los dos restantes, a la otra, si los radios de estas circunferencias son iguales a R y r.

I.176. Hallar el área del rombo $ABCD$, si los radios de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos ABC y ABD son iguales a R y r.

I.177. Se da un ángulo de magnitud α con el vértice en A, y el punto B a las distancias a y b de los lados del ángulo. Hallar $|AB|$.

I.178. Las alturas h_a y h_b del triángulo ABC están bajadas desde los vértices A y B; l es la longitud de la bisectriz del ángulo C. Hallar $\angle C$.

I.179. Alrededor de un triángulo rectángulo está circunscrita una circunferencia. Otra del mismo radio entra en contacto con los catetos de este triángulo: además, uno de los puntos de tangencia es el vértice del triángulo. Hallar la razón entre el área del triángulo y la de la parte común de los dos círculos dados.

I.180. En el trapecio $ABCD$ $|AB| = |BC| = |CD| = a$, $|DA| = 2a$. En las rectas AB y AD se toman los puntos E y F, distintos de los vértices del trapecio, de manera que el punto de intersección de las alturas del triángulo CEF coincida con el punto de intersección de las diagonales del trapecio $ABCD$. Hallar el área del triángulo CEF.

* * *

I.181. La altura del triángulo rectángulo ABC, bajada sobre la hipotenusa AB, es igual a h, D es la base de la altura, M y N, los puntos medios de los segmentos AD y DB. Hallar la distancia desde el vértice C hasta el punto de intersección de las alturas del triángulo CMN.

I.182. $ABCD$ es un trapecio isósceles con las bases AD y BC; $|AB| = |CD| = a$, $|AC| = |BD| = b$, $|BC| = c$, M es un punto arbitrario del arco BC de la circunferencia circunscrita alrededor de $ABCD$. Hallar la razón $\frac{|BM| + |MC|}{|AM| + |MD|}$.

I.183. Los lados de un triángulo isósceles son iguales a 1, la base es a. El triángulo está inscrito en una circunferencia. Hallar la cuerda que corta los lados del triángulo y se divide por los puntos de intersección en tres segmentos iguales.

I.184. MN es el diámetro de una circunferencia, $|MN| = 1$, A y B son puntos de circunferencia dispuestos a un lado de MN, C se encuentra en la otra semicircunferencia. A es el punto medio de la semicircunferencia. $|MB| = 3/5$, la longitud del segmento formado por la intersección del diámetro MN con las cuerdas AC y BC es a. ¿A qué es igual la magnitud máxima de a?

I.185. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo, M, el punto medio de AB, N, el punto medio de CD. Las áreas de los triángulos ABN y CDM son iguales y el área de su parte común es k veces menor que la de cada uno de éstos. Hallar la relación entre los lados BC y AD.

I.186. $ABCD$ es un trapecio isósceles ($AD \parallel BC$), en el cual el ángulo agudo de la base mayor es igual a $60°$ y la diagonal es igual a $\sqrt{3}$. El punto M está alejado de los vértices A y D a las distancias 1 y 3, res ectivamente. Hallar $|MC|$.

I.187. La bisectriz de cada uno de los ángulos de un triángulo corta el lado opuesto en un punto equidistante de los puntos medios de los otros dos lados del triángulo. ¿Se deduce de esto que el triángulo es regular?

I.188. Dos lados de un triángulo son iguales a a y b ($a > b$). Hallar el tercer lado, si se sabe que $a + h_a \leqslant b + h_b$, donde h_a y h_b son las alturas bajadas sobre los lados correspondientes.

I.189. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo circunscrito alrededor de una circunferencia de diámetro 1. En el interior del cuadrilátero $ABCD$ existe un punto M tal, que $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2 = 2$. Hallar el área del cuadrilátero $ABCD$.

I.190. $ABCD$ es un cuadrilátero: $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$; $a^2 + c^2 \neq b^2 + d^2$, $c \neq d$, M es un punto de la recta BD, equidistante de A y C. Hallar la relación $|BM| : |MD|$.

I.191. El lado menor del rectángulo $ABCD$ es igual a 1. Examinemos cuatro circunferencias concéntricas con el centro en A que pasan por B, C, D, respectivamente, y el punto de intersección de las diagonales del rectángulo

$ABCD$. Se sabe que existe un rectángulo con vértices dispuestos en las circunferencias trazadas (un vértice en cada una). Demostrar que existe un cuadrado con vértices en las circunferencias trazadas. Hallar el lado de este cuadrado.

I.192. Se da el triángulo ABC. Las perpendiculares levantadas hacia AB y BC en sus puntos medios, cortan la recta AC en los puntos M y N de manera que $|MN| = |AC|$. Las perpendiculares trazadas a AB y AC en sus puntos medios cortan BC en los puntos K y L de manera que $|KL| = \frac{1}{2}|BC|$. Hallar el ángulo mínimo del triángulo ABC.

I.193. En el lado AB del triángulo ABC se toma un punto M de tal manera que la recta que une el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de ABC con el punto de intersección de las medianas del triángulo BCM, es perpendicular a CM. Hallar la relación $|BM| : |BA|$, si $|BC| : |BA| = k$.

I.194. En el cuadrilátero inscrito $ABCD$, en el que $|AB| = |BC|$, K es el punto de intersección de las diagonales. Hallar $|AB|$, si $|BK| = b$, $|DK| = d$.

I.195. Interpretar geométricamente la ecuación 1 y los sistemas 2, 3 y 4. Solucionar la ecuación 1 y los sistemas 2 y 3. En el sistema 4 hallar $x + y + z$:

$$1)\ \sqrt{x^2+a^2-ax\sqrt{3}}+\sqrt{y^2+b^2-by\sqrt{3}}+$$
$$+\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}=\sqrt{a^2+b^2}\ (a>0, b>0).$$

2) $\begin{cases} x=\sqrt{z^2-a^2}+\sqrt{y^2-a^2}, \\ y=\sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2}, \\ z=\sqrt{y^2-c^2}+\sqrt{x^2-c^2}. \end{cases}$

3) $x^2+y^2=(a-x)^2+b^2=a^2+(b-y)^2$

4) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2, \\ y^2+yz+z^2=b^2, \\ z^2+zx+x^2=a^2+b^2. \end{cases}$

I.196. El lado de un cuadrado es igual a a, los productos de las distancias desde los vértices opuestos hasta la recta l son iguales entre sí. Hallar la distancia desde el centro del cuadrado hasta la recta l, si se sabe que ninguno de los lados del cuadrado es paralelo a l.

I.197. Uno de los lados del triángulo ABC es dos veces mayor que otro, además, $\angle B = 2\angle C$. Hallar los ángulos del triángulo.

I.198. Los lados iguales AB y AC del triángulo isósceles ABC son tangentes a una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia del lado AB y N, el punto de intersección de la circunferencia con la base BC. Hallar $|AN|$, si $|AM| = a$, $|BM| = b$.

I.199. $ABCD$ es un paralelogramo, en el cual $|AB| = k|BC|$, K y L, puntos de la recta CD (K pertenece al lado CD), y M, un punto de BC, además, AD es la bisectriz del ángulo KAL, AM, la bisectriz del ángulo KAB, $|BM| = a$, $|DL| = b$. Hallar $|AL|$.

I.200. Se da un paralelogramo $ABCD$. La recta que pasa por el vértice C, corta las rectas AB y AD en los puntos K y L. Las áreas de los triángulos KBC y CDL son iguales a p y q. Hallar el área del paralelogramo $ABCD$.

I.201. Se da una circunferencia de radio R y dos puntos A y B dispuestos en ella $|AB| = a$. Dos circunferencias de radios x e y entran en contacto con la dada en los puntos A y B. Hallar: a) el segmento de la tangente exterior común a las dos últimas circunferencias, si ambas tienen contacto (interior o exterior) con la dada de manera igual; b) el segmento de la tangente interior común, si la circunferencia de radio x tiene contacto exterior con la dada y la circunferencia de radio y tiene contacto con la dada interiormente.

I.202. En el triángulo ABC $|AB| = 12$, $|BC| = 13$, $|CA| = 15$. Sobre el lado AC se toma el punto M de manera que los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABM y BCM sean iguales. Hallar la relación $|AM| : |MC|$.

I.203. Los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo son iguales a r y R, respectivamente. Hallar el área de éste, si se sabe que la circunferencia que pasa por los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita y por el punto de intersección de las alturas del triángulo, pasa, por lo menos, por uno de los vértices del triángulo.

I.204. En el rectángulo $ABCD$ $|AB| = 2a$, $|BC| = a\sqrt{2}$. Sobre el lado AB

como sobre el diámetro está construido un semicírculo orientado hacia el exterior. Supongamos que M es un punto arbitrario de la semicircunferencia, que la recta MD corta AB en el punto N, y la recta MC, en el punto L. Hallar $|AL|^2 + |BN|^2$ (*problema de Fermat*).

I.205. Dos circunferencias de radios R y r son tangentes una a otra por interior. Hallar el lado de un triángulo regular, uno de cuyos vértices coincide con el punto de tangencia y los otros dos se encuentran sobre cada una de las circunferencias dadas.

I.206. Dos circunferencias de radios R y r $(R > r)$ tienen contacto exterior en el punto A. Por el punto B tomado en la circunferencia mayor pasa una línea recta tangente a la circunferencia menor en el punto C. Hallar $|BC|$, si $|AB| = a$.

I.207. En el paralelogramo $ABCD$ se encuentran tres circunferencias que entran en contracto entre sí de dos en dos, además, una de éstas también es tangente a los lados AB y BC, la otra, con AB y AD, y la tercera, con BC y AD. Hallar el radio de la tercera circunferencia, si la distancia entre los puntos de tangencia del lado AB es igual a a.

I.208. Las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ se cortan en el punto M y el ángulo entre éstas es igual a α. Sean O_1, O_2, O_3, O_4 los centros de las cuatro circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos ABM, BCM, CDM, DAM, respectivamente. Determinar la relación entre las áreas de los cuadriláteros $ABCD$ y $O_1O_2O_3O_4$.

I.200. Se da un paralelogramo $ABCD$. La recta que pasa por el vértice C, corta las rectas AB y AD en los puntos K y L. Las áreas de los triángulos KBC y CDL son iguales a p y q. Hallar el área del paralelogramo $ABCD$.

I.201. Se da una circunferencia de radio R y dos puntos A y B dispuestos en ella $|AB| = a$. Dos circunferencias de radios x e y entran en contacto con la dada en los puntos A y B. Hallar: a) el segmento de la tangente exterior común a las dos últimas circunferencias, si ambas tienen contacto (interior o exterior) con la dada de manera igual; b) el segmento de la tangente interior común, si la circunferencia de radio x tiene contacto exterior con la dada y la circunferencia de radio y tiene contacto con la dada interiormente.

I.202. En el triángulo ABC $|AB| = 12$, $|BC| = 13$, $|CA| = 15$. Sobre el lado AC se toma el punto M de manera que los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABM y BCM sean iguales. Hallar la relación $|AM| : |MC|$.

I.203. Los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo son iguales a r y R, respectivamente. Hallar el área de éste, si se sabe que la circunferencia que pasa por los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita y por el punto de intersección de las alturas del triángulo, pasa, por lo menos, por uno de los vértices del triángulo.

I.204. En el rectángulo $ABCD$ $|AB| = 2a$, $|BC| = a\sqrt{2}$. Sobre el lado AB

igual a a, el radio del círculo inscrito es r. Hallar el área del triángulo, si el círculo inscrito tiene contacto con la circunferencia construida sobre BC como sobre el diámetro.

I.216. Se da un triángulo regular ABC con el lado a; BD es su altura. Sobre BD está construido el triángulo regular BDC_1 y sobre la altura BD_1 de este triángulo, el tercer triángulo regular BD_1C_2. Hallar el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo CC_1C_2. Demostrar que su centro se encuentra en el lado del triángulo ABC (C_2 se encuentra fuera del triángulo ABC).

I.217. Los lados de un paralelogramo son iguales a a y b ($a \neq b$). Por los vértices de los ángulos obtusos de este paralelogramo se trazaron las rectas perpendiculares a los lados. Estas rectas forman como resultado de la intersección un paralelogramo semejante al de partida. Hallar el coseno del ángulo agudo del paralelogramo dado.

I.218. En el triángulo KLM se trazaron las bisectrices KN y LP que se cortan en el punto Q. El segmento PN tiene una longitud igual a 1 y el vértice M se encuentra sobre la circunferencia que pasa por los puntos N, P, Q. Hallar los lados y los ángulos del triángulo PNQ.

I.219. Sobre la diagonal AC de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se encuentra el centro de una circunferencia de radio r, la cual tiene contacto con los lados AB, AD y BC. En la diagonal BD se encuentra el centro de una circunferencia del mismo radio r que entra en contacto con los lados BC, CD y AD. Hallar el área del cuadrilátero $ABCD$, sabiendo que las circunferencias indicadas son tangentes entre sí exteriormente.

I.220. El radio de una circunferencia circunscrita alrededor del triángulo acutángulo ABC es igual a 1. Se sabe que en esta circunferencia se encuentra el centro de una circunferencia que pasa por los vértices A, C y el punto de intersección de alturas del triángulo ABC. Hallar $|AC|$.

I.221. En el triángulo ABC se toman los puntos M, N y P; M y N, en los lados AC y BC; P, en el segmento MN, además, $|AM|:$ $:|MC| = |CN|:|NB| = |MP|:|PN|$. Hallar el área del triángulo ABC, si las áreas de los triángulos AMP y BNP son iguales a T y Q.

I.222. Se da una circunferencia de radio R y el punto A a la distancia a de su centro ($a > R$). Sea K el punto más próximo a A de la circunferencia. La secante que pasa por A, corta la circunferencia en los puntos M y N. Hallar $|MN|$, si el área del triángulo KMN es igual a S.

I.223. En el triángulo isósceles ABC ($|AB| = |BC|$) por el extremo E de la bisectriz AE se trazó una perpendicular a AE hasta la intersección con la prolongación del lado AC en el punto F (C se encuentra entre A y F). Se sabe que $|AC| = 2m$, $|FC| =$ $= m/4$. Hallar el área del triángulo ABC.

I.224. Dos triángulos regulares iguales ABC y CDE con el lado igual a 1 están dispuestos en un plano de tal manera que tienen un solo punto común C y el ángulo BCD es menos de $\pi/3$. K es el punto medio de AC, L, el punto medio de CE, M, el punto medio de BD. El área del triángulo KLM es igual a $\sqrt{3}/5$. Hallar $|BD|$.

I.225. Desde el punto K dispuesto fuera de la circunferencia, cuyo centro se encuentra en O, están trazadas dos tangentes KM y KN a esta circunferencia (M y N son los puntos de tangencia). En la cuerda MN se toma el punto C ($|MC| < |CN|$). Por el punto C, perpendicularmente al segmento OC, está trazada una recta que corta el segmento NK en el punto B. Se sabe que el radio de la circunferencia es igual a R, $\angle MKN = \alpha$ y $|MC| = b$. Hallar $|CB|$.

I.226. El pentágono $ABCDE$ está inscrito en una circunferencia. Los puntos M, Q, N y P son los pies de las perpendiculares bajadas desde el vértice E, respectivamente, sobre los lados AB, BC, CD (o sobre sus prolongaciones) y la diagonal AD. Se sabe que $|EP| = d$ y la relación entre el área del triángulo MQE y el área del triángulo PNE es igual a k. Hallar $|EM|$.

I.227. Se da un trapecio rectangular. Cierta recta paralela a sus bases lo corta en dos trapecios, en cada uno de los cuales se puede inscribir una circunferencia. Determinar las bases del trapecio de partida, si sus lados son iguales a c y d ($d > c$).

I.228. En los lados KL y MN del trapecio isósceles $KLMN$ se eligen respectivamente los puntos P y Q de tal manera que el segmento PQ resulte paralelo a las bases del trapecio. En cada uno de los trapecios $KPQN$ y $PLMQ$

se puede inscribir una circunferencia, cuyos radios son iguales a R y r, respectivamente. Determinar las bases $|LM|$ y $|KN|$.

I.229. La bisectriz del ángulo A del triángulo ABC corta el lado BC en el punto D. Se sabe que $|AB| - |BD| = a$, $|AC| + |CD| = b$. Hallar $|AD|$.

I.230. Aprovechando el resultado del problema anterior, demostrar que el cuadrado de la bisectriz del triángulo es igual al producto de los lados que la comprenden, menos el producto de los segmentos del tercer lado, en los cuales ésta se encuentra dividida por la bisectriz.

I.231. Se da una circunferencia de diámetro AB. La segunda circunferencia con el centro en A corta la primera circunferencia en los puntos C y D y el diámetro, en el punto E. El punto D no pertenece al arco CE; en éste se toma el punto M distinto de los puntos C y E. El rayo BM corta la primera circunferencia en el punto N. Se sabe que $|CN| = a$, $|DN| = b$. Hallar $|MN|$.

I.232. El ángulo B del triángulo ABC es igual a $\pi/4$, el ángulo C es igual a $\pi/6$. En las medianas BN y CN como sobre un diámetro están construidas las circunferencias que se cortan en los puntos P y Q. La cuerda PQ corta el lado BC en el punto D. Hallar la relación $|BD| : |DC|$.

I.233. Sea AB el diámetro de una circunferencia; O, su centro, $|AB| = 2R$; C, un punto sobre la circunferencia; M, un punto sobre la cuerda AC. Desde M se baja la perpendicular MN al diámetro AB y se levanta la perpendicular a AC que corta la circunferencia en el punto L (el segmento CL corta AB). Hallar la distancia entre el punto medio de AO y el punto medio de CL, si $|AN| = a$.

I.234. Alrededor del triángulo ABC está circunscrita una circunferencia. Una tangente a la circunferencia, que pasa por el punto B, corta la recta AC en el punto M. Hallar la relación $|AM| : |MC|$, si $|AB| : |BC| = k$.

I.235. En una recta se encuentran sucesivamente los puntos A, B, C y D, además, $|AC| = \alpha |AB|$, $|AD| = \beta |AB|$. Por A y B está trazada una circunferencia arbitraria, CM y DN son dos tangentes a esta circunferencia (M y N son los puntos sobre la circunferencia, ubicados a distintos lados de la recta AB). ¿En qué razón la recta MN divide el segmento AB?

I.236. $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito; los segmentos desde A hasta los puntos de tangencia son iguales a a; los segmentos desde C hasta los puntos de tangencia son iguales a b. ¿En qué razón la diagonal BD divide la diagonal AC?

I.237. El punto K pertenece a la base AD del trapecio $ABCD$, con la particularidad de que $|AK| = \lambda |AD|$. Hallar la razón $|AM| : |MD|$, donde M es el punto de intersección de AD con la recta que pasa por los puntos de intersección de las rectas AB y CD y las rectas BK y AC.

Tomando $\lambda = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, establecer el método de partición del segmento dado en n partes iguales sólo con una regla, si se da una recta paralela a éste.

I.238. En el triángulo rectángulo ABC, cuya hipotenusa AB es igual a c, sobre la altura CD como sobre el diámetro está construida una circunferencia. Las tangentes a esta circunferencia que pasan por los puntos A y B entran en contacto con ésta en los puntos M y N y se cortan con su prolongación en el punto K. Hallar $|MK|$.

I.239. En los lados AB, BC y CA del triángulo ABC se toman los puntos C_1, A_1 y B_1 de manera que $|AC_1|:|C_1B| = |BA_1|:$ $:|A_1C| = |CB_1|:|B_1A| = k$. En los lados A_1B_1, B_1C_1 y C_1A_1 se toman los puntos C_2, A_2 y B_2 de manera que $|A_1C_2|:|C_2B_1| =$ $= |B_1A_2|:|A_2C_1| = |C_1B_2|:|B_2A_1| =$ $= 1/k$. Demostrar que el triángulo $A_2B_2C_2$ es semejante al triángulo ABC y hallar la razón de semejanza.

I.240. En el triángulo ABC se dan los radios R y r de las circunferencias circunscrita e inscrita. Sean A_1, B_1, C_1 los puntos de intersección de las bisectrices del triángulo ABC con la circunferencia circunscrita. Hallar la razón entre las áreas de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$.

I.241. Dos triángulos tienen los lados correspondientemente paralelos y sus áreas son S_1 y S_2; además, uno de ellos está inscrito en el triángulo ABC y el otro está circunscrito alrededor del mismo. Hallar el área del triángulo ABC.

I.242. Determinar el ángulo A del triángulo ABC, si se sabe que la bisectriz de este ángulo es perpendicular a la recta que pasa por el punto de intersección de las alturas y el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de este triángulo.

I.243. Hallar los ángulos de un triángulo, si se sabe que la distancia entre el centro de una circunferencia circunscrita y el punto de intersección de las alturas es dos veces menor que el lado máximo y es igual al lado mínimo.

I.244. Se da el triángulo ABC. Tomemos en el rayo BA un punto D de tal manera que $|BD| = |BA| + |AC|$. Sean K y M dos puntos en los rayos BA y BC, respectivamente, tales que el área del triángulo BDM es igual al área del triángulo BCK. Hallar $\angle BKM$, si $\angle BAC = \alpha$.

I.245. En el trapecio $ABCD$ el lado AB es perpendicular a AD y BC; además, $|AB| = \sqrt{|AD|\cdot|BC|}$. Sea E el punto de intersección de los lados no paralelos del trapecio; O, el punto de intersección de las diagonales; M, el punto medio de AB. Hallar $\angle EOM$.

I.246. En un plano se dan dos rectas que se intersecan en el punto O, y dos puntos A y B. Designemos los pies de las perpendiculares bajadas desde A sobre las rectas dadas a través de M y N y los pies de las perpendiculares bajadas desde B, a través de K y L, respectivamente. Hallar el ángulo entre las rectas MN y KL, si $\angle AOB = \alpha \leqslant 90°$.

I.247. Dos circunferencias entran en contacto entre sí interiormente en el punto A. Desde O, que es el centro de la circunferencia mayor, está trazado el rayo OB tangente a la circunferencia menor en el punto C. Hallar $\angle BAC$.

I.248. En el interior del cuadrado $ABCD$ se toma el punto M de manera que $\angle MAB = 60°$, $\angle MCD = 15°$. Hallar $\angle MBC$.

I.249. En el triángulo ABC se conocen los ángulos: $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$. En la prolongación del lado AC más allá del punto C se toma el punto M de manera que $|CM| = 2|AC|$. Hallar $\angle AMB$.

I.250. En el triángulo ABC, cuyo $\angle B = 60°$, la bisectriz del ángulo A corta BC en el punto M. En el lado AC se toma un punto K de modo que $\angle AMK = 30°$. Hallar $\angle OKC$, donde O es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo AMC.

I.251. En el triángulo ABC $|AB| = |AC|$, $\angle A = 80°$. a) En el interior del triángulo se toma el punto M tal que $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$. Hallar $\angle AMC$. b) Fuera del triángulo se toma el punto P de manera que $\angle PBC = \angle PCA = 30°$ y el segmento BP corta el lado AC. Hallar $\angle PAC$.

I.252. En el triángulo ABC $\angle B = 100°$, $\angle C = 65°$; sobre AB se toma el punto M de modo que $\angle MCB = 55°$ y sobre AC, el punto N de tal manera que $\angle NBC = 80°$. Hallar $\angle NMC$.

I.253. En el triángulo ABC $|AB| = |BC|$, $\angle B = 20°$; sobre AB se toma el punto M de manera que $\angle MCA = 60°$ y sobre CB, el punto N de modo que $\angle NAC = 50°$. Hallar $\angle NMC$.

I.254. En el triángulo ABC $\angle B = 70°$, $\angle C = 50°$; sobre AB se toma el punto M

de manera que $\angle MCB = 40°$, y sobre AC, el punto N de manera que $\angle NBC = 50°$. Hallar $\angle NMC$.

I.255. Supongamos que M y N son los puntos de tangencia de una circunferencia inscrita con los lados BC y BA del triángulo ABC; K, el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con la recta MN. Demostrar que $\angle AKC = 90°$.

I.256. Sean P y Q dos puntos diferentes de una circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, tales que $|PA|^2 = |PB| \times \times |PC|$, $|QA|^2 = |QB| \cdot |QC|$ (uno de los puntos se sitúa sobre el arco AB y el otro, sobre el arco AC). Hallar la diferencia $\angle PAB - \angle QAC$, si la diferencia de los ángulos B y C del triángulo ABC es igual a α.

I.257. En una circunferencia se toman dos puntos fijos A y B, $\cup AB = \alpha$. Una circunferencia arbitraria pasa por los puntos A y B. Por A también está trazada una recta arbitraria l, que corta las circunferencias en los puntos C y D distintos a B (C se encuentra sobre la circunferencia dada). Las tangentes a las circunferencias en los puntos C y D (C y D son los puntos de tangencia) se intersecan en el punto M; N es un punto sobre l tal que $|CN| = |AD|$, $|DN| = |CA|$. ¿Qué valores puede tomar $\angle CMN$?

I.258. Demostrar que si en el triángulo un ángulo es igual a 120°, el triángulo formado por las bases de sus bisectrices es rectángulo.

I.259. En el cuadrilátero $ABCD$ $\angle DAB = = 150°$, $\angle DAC + \angle ABD = 120°$, $\angle DBC - - \angle ABD = 60°$. Hallar $\angle BDC$.

* * *

I.260. En el triángulo ABC $|AB| = 1$, $|AC| = 2$. Hallar $|BC|$, si se sabe que las bisectrices de los ángulos exteriores A y C son iguales entre sí (se examinan los segmentos a partir del vértice hasta el punto de intersección de la bisectriz correspondiente con la recta, en la cual se encuentra el lado opuesto del triángulo).

I.261. En el lado CB del triángulo ABC se toma el punto D de forma que $|CD| = \alpha |AC|$. El radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC es R. Hallar la distancia entre el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC y el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ADB.

I.262. El triángulo rectángulo ABC ($\angle C = 90°$) tiene una circunferencia circunscrita. Sea CD la altura del triángulo. La circunferencia con el centro en D pasa por el punto medio del arco AB y corta AB en el punto M. Hallar $|CM|$, si $|AB| = c$.

I.263. Hallar el perímetro del triángulo ABC, si $|BC| = a$ y el segmento de la recta tangente al círculo inscrito y paralela a BC, estando aquél comprendido en el interior del triángulo, es igual a b.

I.264. En un triángulo se trazan tres rectas paralelas a sus lados y tangentes a la circunferencia inscrita. Estas separan del triángulo dado tres triángulos. Los radios de sus circunferencias circunscritas son iguales a R_1, R_2, R_3. Hallar el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo dado.

I.265. En una circunferencia de radio R están trazadas las cuerdas AB y AC. En AB o en su prolongación más allá del punto B se toma el punto M; la distancia entre éste y la recta AC es igual a $|AC|$. Análogamente, en AC o en su prolongación más allá del punto C se toma un punto N; la distancia de éste hasta la recta AB es $|AB|$. Hallar $|MN|$.

I.266. Se da una circunferencia de radio R con el centro O. Las otras dos circunferencias son tangentes a la dada por el interior y se intersecan en los puntos A y B. Hallar la suma de los radios de dos últimas circunferencias, si se conoce que $\angle OAB = 90°$.

I.267. En un círculo de radio R se trazan dos cuerdas que se intersecan perpendicularmente. Hallar: a) la suma de los cuadrados de los cuatro segmentos de estas cuerdas, resultantes al dividirlas por el punto de intersección; b) la suma de los cuadrados de las cuerdas, si la distancia entre el centro de círculo y el punto de su intersección es igual a a.

I.268. Vienen dadas dos circunferencias concéntricas con radios r y R $(r < R)$. Por cierto punto P de la circunferencia menor se traza una recta que corta la circunferencia mayor en los puntos B y C. La perpendicular a BC en el punto P corta la circunferencia menor en el punto A. Hallar $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$.

I.269. En un semicírculo, desde los extremos del diámetro se trazan dos cuerdas que se intersecan. Demostrar que la suma de los productos resultantes al multiplicar toda la cuerda por el segmento de cada cuerda, adyacente al diámetro, es igual al cuadrado de este último.

I.270. Sean a, b, c y d las longitudes de los lados de un cuadrilátero inscrito (a y c son los lados opuestos), h_a, h_b, h_c y h_d son las distancias desde el centro del círculo circunscrito hasta los lados correspondientes. Demostrar que si el centro del círculo se encuentra en el interior del cuadrilátero, $ah_c + ch_a = bh_d + dh_b$.

I.271. Los lados opuestos del cuadrilátero inscrito en una circunferencia se intersecan en los puntos P y Q. Hallar $|PQ|$, si las tangentes a la circunferencia trazadas desde P y Q, son iguales a a y b.

I.272. En una circunferencia de radio R está inscrito un cuadrilátero. Sean P, Q y M, respectivamente, los puntos de intersección de las diagonales de este cuadrilátero y de las prolongaciones de sus lados opuestos. Hallar los lados del triángulo PQM, si las distancias desde P, Q y M hasta el centro de la circunferencia son a, b y c.

I.273. El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito alrededor de una circunferencia de radio r. El punto de tangencia de la circunferencia con el lado AB parte este lado en los segmentos a y b, y el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AD parte éste en los segmentos a y c. ¿En qué límites puede variar r?

I.274. Una circunferencia de radio r toca interiormente la circunferencia con radio R; A es el punto de tangencia. Una recta perpendicular a la línea de centros atraviesa una de las circunferencias dadas en el punto B y la otra, en el punto C. Hallar el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC.

I.275. Dos circunferencias con radios R y r se intersecan; A es uno de los puntos de intersección, BC, la tangente común (B y C son los puntos de tangencia). Hallar el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC.

I.276. En el cuadrilátero $ABCD$ $|AB| = a$, $|AD| = b$; los lados BC, CD y AD entran en contacto con cierta circunferencia, cuyo centro se encuentra en el punto medio de AB. Hallar $|BC|$.

I.277. En el cuadrilátero inscrito $ABCD$ $|AB| = a$, $|AD| = b$ $(a > b)$. Hallar $|BC|$, si se sabe que BC, CD y AD son tangentes a cierta circunferencia, cuyo centro se encuentra sobre AB.

* * *

I.278. En el cuadrilátero convexo $ABCD$ $|AB| = |AD|$. En el interior del triángulo ABC se toma el punto M tal que $\angle MBA = \angle ADC$, $\angle MCA = \angle ACD$. Hallar $\angle MAC$, si $\angle BAC = \alpha$, $\angle ADC - \angle ACD = \varphi$, $|AM| < |AB|$.

I.279. Dos circunferencias que se intersecan, están inscritas en un ángulo; A es el vértice del ángulo, B, uno de los puntos de intersección de las circunferencias, C, el punto medio de la cuerda, cuyos extremos son los puntos de tangencia de la primera circunferencia con los lados del ángulo. Hallar $\angle ABC$, si se sabe que la cuerda común se ve desde el centro de la segunda circunferencia bajo el ángulo α.

I.280. ABC es un triángulo isósceles: $|AC| = |BC|$, BD es la bisectriz y $BDEF$, un rectángulo. Hallar $\angle BAF$, si $\angle BAE = 120°$.

I.281. El triángulo ABC tiene circunscrita una circunferencia con el centro en el punto O. La tangente a la circunferencia en el punto C se interseca en el punto K con la recta que divide por la mitad el ángulo B; además, el ángulo BKC es igual a la mitad de la diferencia del ángulo A triplicado y del ángulo C del triángulo. La suma de los lados AC y AB es igual a $2 + \sqrt{3}$ y la de las distancias entre el punto O y los lados AC y AB es igual a 2. Hallar el radio de la circunferencia.

I.282. Unos puntos simétricos a los vértices de un triángulo respecto de los lados opuestos, son vértices de un triángulo con los lados de $\sqrt{8}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{14}$. Determinar los lados del triángulo de partida, si se sabe que sus longitudes son diferentes.

I.283. El ángulo comprendido entre la mediana y la altura que salen del ángulo A del triángulo ABC, es igual a α; el ángulo entre la mediana y la altura que parten del ángulo B, es igual a β. Hallar el ángulo entre la mediana y la altura que salen del ángulo C.

I.284. El radio del círculo circunscrito alrededor de un triángulo es R. La distancia desde el centro de este círculo hasta el punto de intersección de las medianas del triángulo es d. Hallar el producto del área del triángulo dado y del triángulo formado por las rectas que pasan por sus vértices perpendicularmente a las medianas, las cuales parten de estos vértices.

I.285. Los puntos A_1, A_3 y A_5 están sobre una misma recta, y los puntos A_2, A_4, A_6, sobre otra recta que se interseca con la primera. Hallar el ángulo comprendido entre estas rectas, si se sabe que los lados del hexágono (posiblemente, con puntos múltiples) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ son iguales entre sí.

I.286. Dos circunferencias con los centros O_1 y O_2 tienen puntos de tangencia por interior con una circunferencia de radio R y centro O. Se sabe que $|O_1O_2| = a$. La recta tangente a las dos primeras circunferencias que corta el segmento O_1O_2, se interseca con sus tangentes exteriores comunes en los puntos M y N y con la circunferencia mayor en los puntos A y B. Hallar la razón $|AB| : |MN|$, si: a) el segmento O_1O_2 contiene el punto O; b) las circunferencias con los centros O_1 y O_2 entran en contacto una con otra.

I.287. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene contacto con el lado AC en el punto M y el lado BC en el punto N; La bisectriz del ángulo A corta la recta MN en el punto K, y la bisectriz del ángulo B corta la recta MN en el punto L. Demostrar que con ayuda de los segmentos MK, NL y KL se puede formar un triángulo. Hallar el área de este triángulo, si el área del triángulo ABC es S y el ángulo C es α.

I.288. En los lados AB y BC del cuadrado $ABCD$ se toman dos puntos M y N de manera que $|BM| + |BN| = |AB|$. Demostrar que las rectas DM y DN dividen la diagonal AC en tres segmentos que pueden formar un triángulo; además, uno de los ángulos de este triángulo es igual a 60°.

I.289. Viene dado el triángulo isósceles ABC; $|AB| = |BC|$, AD es la bisectriz. La perpendicular levantada hacia AD en el punto D corta la prolongación de AC en el punto E y los pies de las perpendiculares bajadas desde B y D sobre AC, en M y N, respectivamente. Hallar $|MN|$, si $|AE| = a$.

I.290. Desde el punto A bajo el ángulo α parten dos rayos. En un rayo se toman dos puntos B y B_1 y en el otro, C y C_1. Hallar la cuerda común de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos ABC y AB_1C_1, si $|AB| - |AC| = |AB_1| - - |AC_1| = a$.

I.291. Supongamos que O es el centro de una circunferencia; C, un punto tomado en la circunferencia; M, el punto medio de OC. Los puntos A y B se encuentran en la circunferencia por un lado de la recta OC de manera que $\angle AMO = \angle BMC$. Hallar $|AB|$, si $|AM| - |BM| = a$.

I.292. Sean A, B y C tres puntos señalados sobre una recta. En AB, BC y AC como sobre diámetros están construidos tres semicírculos por un lado de la recta. El centro de la circunferencia que toca los tres semicírculos, se encuentra a la distancia d de la recta AC. Hallar el radio de esta circunferencia.

I.293. En una circunferencia de radio R está trazada la cuerda AB. Sea M un punto arbitrario de la circunferencia. Tracemos en el rayo MA el segmento MN ($|MN| = R$) y en el rayo MB, el segmento MK, igual a la distancia desde M hasta el punto de intersección de las alturas del triángulo MAB. Hallar $|NK|$, si el menor de los arcos subtensados por AB es igual a 2α.

I.294. La altura bajada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo sobre la hipotenusa divide el triángulo en dos triángulos, en cada uno de los cuales están inscritas sendas circunferencias. Determinar los ángulos y el área del triángulo formado por los catetos del triángulo inicial y la recta que pasa por los centros de circunferencias, si la altura del triángulo de partida es h.

I.295. La altura de un triángulo rectángulo bajada sobre la hipotenusa es h. Demostrar que los vértices de los ángulos agudos del triángulo y las proyecciones del pie de la altura sobre los catetos se hallan en una misma circunferencia. Determinar la longitud de la cuerda cortada por esta circunferencia en la recta que contiene la altura, y los segmentos de la cuerda, en los cuales la divide la hipotenusa.

I.296. Una circunferencia de radio R es tangente a la recta l en el punto A; AB es el diámetro de esta circunferencia, BC, una cuerda arbitraria. Sea D el pie de la perpendicular bajada desde C sobre AB. El punto E se encuentra en la prolongación de CD más allá del punto D, además, $|ED| = |BC|$. Las tangentes a la circunferencia, que pasan por E, cortan la recta l en los puntos K y N. Hallar $|KN|$.

I.297. En el cuadrilátero convexo $ABCD$ $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|BC| = p - a$, $|DC| = p - b$. Sea O el punto de intersección de las diagonales. Designemos por α el ángulo BAC. ¿A qué tiende $|AO|$, si $\alpha \to 0$?

II. Problemas y teoremas selectos de planimetría

§ 1. Teorema de Carnot

II.1. Se dan dos puntos A y B. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos M tales que $|AM|^2 - |MB|^2 = k$ (donde k es un número dado), es una recta perpendicular a AB.

II.2. Supongamos que las distancias desde cierto punto M hasta los vértices A, B y C del triángulo ABC se expresan con los números a, b y c. Demostrar que cualquiera que sea $d \neq 0$, no hay puntos del plano, cuyas distancias hasta los vértices se expresen en el mismo orden con los números $\sqrt{a^2 + d}$, $\sqrt{b^2 + d}$, $\sqrt{c^2 + d}$.

II.3. *Teorema de Carnot.* Demostrar que para que las perpendiculares bajadas desde los puntos A_1, B_1 y C_1 sobre los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se intersequen en un punto, es necesario y suficiente que $|A_1B|^2 - |BC_1|^2 + |C_1A|^2 - |AB_1|^2 + |B_1C|^2 - |CA_1|^2 = 0$.

II.4. Demostrar que si las perpendiculares bajadas desde los puntos A_1, B_1 y C_1 sobre los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, respectivamente, se intersecan en un punto, asimismo las perpendiculares bajadas desde los puntos A, B y C sobre las rectas B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1 también se intersecan en un punto.

II.5. Viene dado el cuadrilátero $ABCD$. Sean A_1, B_1 y C_1 los puntos de intersección de las alturas de los triángulos BCD, ACD y ABD. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde A, B y C sobre las rectas B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, se intersecan en un punto.

II.6. Se dan dos puntos A y B. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos M tales que $k\,|AM|^2 + l\,|BM|^2 = d$ (k, l, d son números dados, $k + l \neq 0$) es una circunferencia con el centro en la recta AB, un punto o un conjunto vacío.

II.7. Supongamos que A_1, A_2, . . ., A_n son puntos fijos; k_1, k_2, . . ., k_n, números dados. Entonces el lugar geométrico de los puntos M tales que la suma $k_1\,|A_1M|^2 + k_2\,|A_2M|^2 + \ldots + k_n\,|A_nM|^2$ es constante, será: a) una circunferencia, un punto o un conjunto vacío, si $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$; b) una recta, un conjunto vacío o todo el plano, si $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0$.

II.8. Se dan una circunferencia y el punto A fuera de ésta. Supongamos que una circunferencia que pasa por A, entra en contacto con la dada en el punto arbitrario B, y las tangentes a la segunda trazadas por los puntos A y B se intersecan en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.

II.9. Se dan dos puntos A y B. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que $|AM| : |MB| = k \neq 1$.

II.10. Tres puntos A, B y C están en una recta (B se encuentra entre A y C). Tomemos una circunferencia arbitraria con el centro en B y designemos con M el punto de intersección de las tangentes trazadas desde A y C a esta circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que los puntos de tangencia de AM y CM con la circunferencia pertenezcan a los intervalos AM y CM.

II.11. Se dan dos circunferencias. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que la razón entre las longitudes de las tangentes trazadas desde M a las circunferencias dadas sea igual a la magnitud constante k.

II.12. Supongamos que una recta corta una circunferencia en los puntos A y B y otra circunferencia lo hace en los puntos C y D. Demostrar que los puntos de intersección de las tangentes a la primera circunferencia, trazadas en los puntos A y B, con las tangentes trazadas a la segunda circunferencia en los puntos C y D (se examinan los puntos, en los cuales se intersecan las tangentes a diferentes circunferencias) se hallan en una circunferencia, cuyo centro se encuentra en la recta que pasa por los centros de las circunferencias dadas.

II.13. Tomemos tres circunferencias, cada una de las cuales entra en contacto con un lado de un triángulo y las prolongaciones de los otros dos lados. Demostrar que las perpendiculares levantadas hacia los lados del triángulo en los puntos de tangencia de estas circunferencias concurren en un punto.

II.14. En el triángulo ABC examinemos todos los pares posibles de los puntos M_1 y M_2 tales que $|AM_1| : |BM_1| : |CM_1| = |AM_2| : |BM_2| : |CM_2|$. Demostrar que todas las rectas M_1M_2 pasan por un mismo punto fijo del plano.

II.15. Las distancias del punto M hasta los vértices A, B y C del triángulo son iguales a 1, 2 y 3, respectivamente, y del punto M_1, a 3, $\sqrt{15}$ y 5, respectivamente. Demostrar que la recta MM_1 pasa por el centro de un círculo circunscrito alrededor del triángulo ABC.

II.16. Sean A_1, B_1, C_1 los pies de las perpendiculares bajadas desde los vértices A, B y C del triángulo ABC sobre la recta l. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde A_1, B_1 y C_1 sobre BC, CA y AB, respectivamente, se intersecan en un punto.

II.17. Se dan el triángulo regular ABC y el punto arbitrario D; A_1, B_1 y C_1 son los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos BCD, CAD y ABD. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde los vértices A, B y C sobre B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, concurren en un punto.

II.18. Se dan tres circunferencias que se intersecan de dos en dos. Demostrar que tres cuerdas comunes de estas circunferencias pasan por un mismo punto.

II.19. Sobre las rectas AB y AC se toman los puntos M y N, respectivamente. Demostrar que la cuerda común de las dos circunferencias con diámetros CM y BN pasa por el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC.

II.20. En un plano se da una circunferencia y el punto N. Sea AB una cuerda arbitraria de la circunferencia. Designemos con M el punto de intersección de la recta AB y de la tangente en el punto N a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABN. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.

II.21. En el interior de una circunferencia se toma el punto A. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las tangentes trazadas a la circunferencia en los extremos de todas las cuerdas posibles que pasan por el punto A.

II.22. Se dan los números α, β, γ y k. Sean x, y, z las distancias del punto M tomado en el interior de un triángulo hasta sus lados. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos M tales que $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ es vacío, es un segmento o coincide con el conjunto de todos los puntos del triángulo.

II.23. Hallar el lugar geométrico de los puntos M en el interior del triángulo dado y tales que las distancias desde M hasta los lados del triángulo dado pueden servir de lados de cierto triángulo.

II.24. Sean A_1, B_1 y C_1 los puntos medios de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC. En las perpendiculares bajadas desde cierto punto M sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, se toman los puntos A_2, B_2 y C_2. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde A_1, B_1 y C_1, respectivamente, sobre las rectas B_2C_2, C_2A_2 y A_2B_2 se intersecan en un punto.

II.25. Se da la recta l y tres rectas l_1, l_2

y l_3 perpendiculares a l. Sean A, B y C tres puntos fijos en la recta l; A_1 es un punto arbitrario en l_1; B_1, en l_2; C_1, en l_3. Demostrar que si para cierta posición de los puntos A_1, B_1 y C_1 las perpendiculares bajadas desde A, B y C sobre las rectas B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, concurren en un punto, entonces estas perpendiculares siempre se intersecarán en un punto.

II.26. AA_1, BB_1, CC_1 son las alturas del triángulo ABC, A_2, B_2 y C_2 son las proyecciones de A, B y C, respectivamente, sobre B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1. Demostrar que las perpendiculares bajadas desde A_2, B_2 y C_2, respectivamente, sobre BC, CA y AB se intersecan en un punto.

§ 2. Teoremas de Ceva y de Menelao. Problemas afines

II.27. Demostrar que el área del triángulo, cuyos lados son iguales a las medianas del triángulo dado, constituye 3/4 de área del triángulo dado.

II.28. En el paralelogramo $ABCD$, la recta paralela a BC corta AB y CD, respectivamente, en los puntos E y F; la recta paralela a AB corta BC y DA, respectivamente, en los puntos G y H.

Demostrar que las rectas EH, GF y BD se intersecan en un punto o son paralelas.

II.29. A, B, C y D son cuatro puntos fijos en la recta l. Por A y B están trazadas arbitrariamente dos rectas paralelas; por C y D, otras dos rectas paralelas. Las rectas trazadas forman un paralelogramo. Demostrar que las diagonales de este paralelogramo cortan l en dos puntos fijos.

II.30. En el cuadrilátero $ABCD$ O es el punto de intersección de las diagonales AC y BD; M, un punto en AC tal, que $|AM| = |OC|$; N, un punto en BD tal, que $|BN| = |OD|$; K y L son los puntos medios de AC y BD. Demostrar que las rectas ML, NK, así como la recta que une los puntos de intersección de las medianas de los triángulos ABC y ACD, se intersecan en un punto.

II.31. En el lado BC del triángulo ABC se toman los puntos A_1 y A_2, simétricos respecto al punto medio de BC. De la misma manera, en el lado AC se toman los puntos B_1 y B_2 y en el lado AB, C_1 y C_2. Demostrar que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son equivalentes y los centros de masas de los triángulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ y ABC se hallan en una misma recta.

II.32. Por M que es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC, está trazada una recta que corta los lados AB y AC en los puntos K y L, respectivamente, y la prolongación de BC en el punto P (C se encuentra entre P y B). Demostrar que $\frac{1}{|MK|} = \frac{1}{|ML|} + \frac{1}{|MP|}$.

II.33. Por el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ se traza una recta que corta AB en el punto M y CD en el punto N. Por M y N se trazan las rectas paralelas a CD y AB, respectivamente, que cortan AC y BD en los puntos E y F. Demostrar que $BE \parallel CF$.

II.34. En el cuadrilátero $ABCD$, en las rectas AC y BD se toman, respectivamente, los puntos K y M de manera que $BK \parallel AD$, $AM \parallel BC$. Demostrar que $KM \parallel CD$.

II.35. Sea E un punto arbitrario en el lado AC del triángulo ABC. Por el vértice B tracemos una recta arbitraria l. La recta que pasa por E en paralelo a BC, corta l en el punto N y la paralela a AB atraviesa l en el punto M. Demostrar que $AN \parallel CM$.

* * *

II.36. Los lados de un cuadrilátero convexo están divididos en $(2n+1)$ partes iguales cada uno. Los puntos correspondientes de división de los lados opuestos están unidos entre sí. Demostrar que el área del cuadrilátero central constituye $1/(2n+1)^2$ parte del área de todo el cuadrilátero.

II.37. La recta que pasa por los puntos medios de las diagonales AC y BC del cuadrilátero $ABCD$ corta los lados AB y DC, respectivamente en los puntos M y N. Demostrar que $S_{DCM} = S_{ABN}$. Aquí y más adelante S designa el área de la figura señalada en el subíndice.

II.38. En el paralelogramo $ABCD$, los vértices A, B, C y D están unidos con los puntos medios de los lados CD, AD, AB y BC, respectivamente. Demostrar que el área del cuadrilátero formado por estas rectas constituye 1/5 parte del área del paralelogramo.

II.39. Demostrar que el área del octágono formado por las rectas que unen los vértices de un paralelogramo con los puntos medios de los lados opuestos, es igual a 1/6 parte del área del paralelogramo.

II.40. En los lados AC y BC del triángulo ABC hacia el exterior están construidos dos paralelogramos $ACDE$ y $BCFG$. Las prolongaciones de DE y FD se intersecan en el punto H. Sobre el lado AB está construido el paralelogramo $ABML$, cuyos lados AL y BM son iguales y paralelos a HC. Demostrar que el paralelogramo $ABML$ es equivalente a la suma de los paralelogramos construidos sobre AC y BC.

II.41. Por los extremos de la base menor de un trapecio están trazadas dos rectas paralelas que cortan la base mayor. Las diagonales del trapecio y estas rectas dividen el trapecio en siete triángulos y un pentágono. Demostrar que la suma de las áreas de tres triángulos adyacentes a los lados y a la base menor del trapecio, es igual al área del pentágono.

II.42. Sea $ABCD$ un paralelogramo; el punto E se halla en la recta AB; F, en la recta AD (B, en el segmento AE; D, en el segmento AF), K es el punto de intersección de las rectas ED y FB. Demostrar que los cuadriláteros $ABKD$ y $CEKF$ son equivalentes.

* * *

II.43. Examinemos el triángulo arbitrario ABC. Sean A_1, B_1, C_1 tres puntos en las rectas BC, CA, AB, respectivamente. Introduzcamos las designaciones siguientes:

$$R = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

$$R^* = \frac{\operatorname{sen} \angle ACC_1}{\operatorname{sen} \angle C_1CB} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle BAA_1}{\operatorname{sen} \angle A_1AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle CBB_1}{\operatorname{sen} \angle B_1BA}.$$

Demostrar que $R = R^*$.

II.44. *Teorema de Ceva.* Para que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 se intersequen en un punto (o las tres sean paralelas), es necesario y suficiente que $R = 1$ (véase el problema II.43) y, además, entre los tres puntos A_1, B_1, C_1 uno o los tres puntos se hallen en los lados del triángulo ABC, y no en las prolongaciones de sus lados.

II.45. *Teorema de Menelao.* Para que los puntos A_1, B_1, C_1 se hallen en una recta, es necesario y suficiente que $R = 1$ (véase el problema II.43) y, además, entre los tres puntos A_1, B_1, C_1 ninguno o dos puntos se sitúen en los lados del triángulo ABC y no en sus prolongaciones.

Observación. Es posible en vez de la relación $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}$ y otras examinar la razón entre los segmentos dirigidos, que designaremos con $\frac{AC_1}{C_1B}$, y determinar de la manera siguiente: $\left|\frac{AC_1}{C_1B}\right| = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}$, $\frac{AC_1}{C_1B}$ es positiva cuando los vectores $\overrightarrow{AC_1}$ y $\overrightarrow{C_1B}$ tienen la dirección igual, y negativa, si éstos tienen direcciones opuestas. $\Bigl(\frac{AC_1}{C_1B}$ tiene sentido sólo para los puntos dispuestos en una recta.) Es fácil ver que la razón $\frac{AC_1}{C_1B}$ es positiva, si el punto C_1 se halla en el segmento AB, y negativa, si C_1 se encuentra fuera de AB. Respectivamente, en vez de R examinaremos el producto de las razones de los segmentos dirigidos que designaremos con $\widetilde{R}$. Luego introduzcamos los ángulos dirigidos. Por $\measuredangle ACC_1$, etc. entenderemos un ángulo, al cual debe girar CA alrededor de C en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj hasta que el rayo CA coincida con el rayo CC_1. Ahora, en vez de R^* examinemos $\widetilde{R}^*$, o sea, el producto correspondiente de las razones de los senos de los ángulos dirigidos.

Ahora hace falta formular de nuevo los problemas II.43, II.44 y II.45.

43*. Demostrar que $\widetilde{R} = \widetilde{R}^*$.

44*. *Teorema de Ceva.* Para que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 se intersequen en un punto (o sean paralelas), es necesario y suficiente que $\widetilde{R} = 1$.

45*. *Teorema de Menelao.* Para que los puntos A_1, B_1, C_1 se hallen en una recta, es necesario y suficiente que $\widetilde{R} = -1$.

II.46. Demostrar que si tres rectas que pasan por los vértices de un triángulo, se intersecan en un mismo punto, entonces las rectas simétricas a aquéllas respecto a las bisectrices correspondientes del triángulo, también concurren en un mismo punto o son paralelas.

II.47. Supongamos que O es un punto arbitrario en un plano, M y N, los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto O sobre las bisectrices de los ángulos interior y exterior A del triángulo ABC; P y Q están definidos de manera análoga para el ángulo B; R y T, para el ángulo C. Demostrar que las rectas MN, PQ y RT se intersecan en un punto o son paralelas.

II.48. Supongamos que O es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, A_0, B_0, C_0 son los puntos de tangencia de esta circunferencia con los lados BC, CA, AB, respectivamente. En los rayos OA_0, OB_0, OC_0, se toman, respectivamente, los puntos L, M, K que se encuentran a distancia igual de O. a) Demostrar que las rectas AL, BM y CK concurren en un punto. b) Sean A_1, B_1, C_1 las proyecciones de A, B, C sobre una recta arbitraria l que pasa por O. Demostrar que las rectas A_1L, B_1M y C_1K se intersecan en un punto.

II.49. Para que las diagonales AD, BE y CF del hexágono $ABCDEF$ inscrito en una circunferencia concurran en un punto, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad $|AB|\cdot|CD|\cdot|EF| = |BC|\cdot|DE|\cdot|FA|$.

II.50. Demostrar que: a) las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo cortan las prolongaciones de los lados opuestos de éste en tres puntos dispuestos en una recta; b) las tangentes a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo, trazadas por los vértices de éste, cortan sus lados opuestos en tres puntos dispuestos en una recta.

II.51. Una circunferencia corta el lado AB del triángulo ABC en los puntos C_1 y C_2, el lado CA, en los puntos B_1 y B_2, el lado BC, en los puntos A_1 y A_2. Demostrar que si las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 se intersecan en un punto, las rectas AA_2, BB_2 y CC_2 también lo hacen en un punto.

II.52. En los lados AB, BC y CA del triángulo ABC se toman los puntos C_1, A_1 y B_1. Supongamos que C_2 es el punto de intersección de las rectas AB y A_1B_1; A_2 es el punto de intersección de las rectas BC y B_1C_1; B_2 es el punto de intersección de las rectas AC y A_1C_1. Demostrar que si las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 concurren en un punto, los puntos A_2, B_2 y C_2 se hallan en una recta.

• II.53. Una recta corta los lados AB, BC y la prolongación del lado AC del triángulo ABC, respectivamente, en los puntos D, E y F. Demostrar que los puntos medios de los segmentos DC, AE y BF se encuentran en una recta (*recta de Gauss*).

II.54. Viene dado el triángulo ABC. Definamos en el lado BC el punto A_1 de la manera siguiente: A_1 es el punto medio del lado KL del pentágono regular $MKLNP$, cuyos vértices K y L se hallan en BC y los vértices M y N, en AB y AC, respectivamente. De manera análoga, en los lados AB y AC están definidos los puntos C_1 y B_1. Demostrar que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 concurren en un punto.

II.55. Se dan tres círculos que no se intersecan, y entre los cuales no hay dos que se corten. Designemos con A_1, A_2, A_3 tres puntos de intersección de las tangentes interiores comunes a dos cualesquiera de aquéllos, y con B_1, B_2, B_3, los puntos correspondientes de intersección de las tangentes exteriores. Demostrar que estos puntos se sitúan en cuatro rectas, tres puntos en cada una (A_1, A_2, B_3; A_1, B_2, A_3; B_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3).

II.56. Demostrar que si las rectas que pasan por los vértices A, B y C del triángulo ABC paralelamente a las rectas B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1, respectivamente, se intersecan en un punto, entonces también las rectas que pasan por A_1, B_1 y C_1 paralelamente a las rectas BC, CA y AB, igualmente se intersecan en un punto (o son paralelas).

II.57. En el triángulo ABC, M es un punto arbitrario del plano. Las bisectrices de los dos ángulos formados por las rectas AM y BM cortan la recta AB en los puntos C_1 y C_2 (C_1 se halla en el segmento AB); de la misma manera en BC y CA se definen los puntos A_1 y A_2, B_1 y B_2. Demostrar que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 se sitúan por tres en cada una de las cuatro rectas.

II.58. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman los puntos A_1, B_1, C_1, respectivamente, y en los lados B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 del triángulo $A_1B_1C_1$, A_2, B_2, C_2. Se sabe que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 concurren en un punto, así como las rectas A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 se intersecan en un punto. Demostrar que las rectas AA_2, BB_2, CC_2 concurren en un punto (o son paralelas).

II.59. Supongamos que $ABCD$ es un cuadrilátero, P, el punto de intersección de BC y AD, Q, el punto de intersección de CA y BD,

R es el punto de intersección de AB y CD. Demostrar que los puntos de intersección de BC y QR, de CA y RP, de AB y PQ se hallan en una recta.

II.60. En un lado del ángulo con el vértice O se toman los puntos A_1, A_2, A_3, A_4 y en otro, B_1, B_2, B_3, B_4. Las rectas A_1B_1 y A_2B_2 concurren en el punto N y las rectas A_3B_3 y A_4B_4, en el punto M. Demostrar que para que los puntos O, N y M se hallen en una recta, es necesario y suficiente el cumplimiento de la igualdad

$$\frac{OB_1}{OB_3}\cdot\frac{OB_2}{OB_4}\cdot\frac{B_3B_4}{B_1B_2}=\frac{OA_1}{OA_3}\cdot\frac{OA_2}{OA_4}\cdot\frac{A_3A_4}{A_1A_2}.$$

(Véase la observación a los problemas II.43, II.44, II.45).

II.61. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman los puntos A_1 y A_2, B_1 y B_2, C_1 y C_2, respectivamente, de manera que AA_1, BB_1 y CC_1 concurren en un punto y AA_2, BB_2 y CC_2 también se intersecan en un punto. Demostrar que: a) los puntos de intersección de las rectas A_1B_1 y AB, B_1C_1 y BC, C_1A_1 y CA se sitúan en la recta l_1. De la misma manera los puntos A_2, B_2 y C_2 definen la recta l_2; b) el punto A, punto de intersección de las rectas l_1 y l_2, así como el de intersección de las rectas B_1C_1 y B_2C_2 se hallan en una recta; c) los puntos de intersección de las rectas BC y B_2C_1, CA y C_2A_2, AB y A_1B_1 se sitúan en una recta.

II.62. Una recta arbitraria corta las rectas AB, BC y CA en los puntos K, M y L, respectivamente, y las rectas A_1B_1, B_1C_1 y C_1A_1, en los puntos K_1, M_1 y L_1. Demostrar que si las rectas A_1M, B_1L y C_1K concurren en un punto, entonces las rectas AM_1, BL_1 y CK_1 también se intersecan en un punto.

II.63. Se dan el triángulo ABC y el punto D. Los puntos E, F y G se hallan, respectivamente, en las rectas AD, BD y CD, K es el punto de intersección de AF y BE, L, el punto de intersección de BG y CF, M, el punto de intersección de CE y AG. En los puntos P, Q y R se intersecan DK y AB, DL y BC, DM y AC, respectivamente. Demostrar que las seis rectas AL, EQ, BM, FR, CK y GP se intersecan en un punto.

II.64. Los puntos designados con letras iguales A y A_1, B y B_1, C y C_1 se sitúan simétricamente respecto a la recta l; N es un punto arbitrario en l. Demostrar que las rectas AN, BN, CN cortan respectivamente las rectas B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 en tres puntos dispuestos en una recta.

II.65. Sean A_1, A_3, A_5 tres puntos en una recta; A_2, A_4, A_6, en otra. Demostrar que tres puntos, en los cuales se intersecan de dos en dos las rectas A_1A_2 y A_4A_5, A_2A_3 y A_5A_6, A_3A_4 y A_6A_1 se hallan en una recta (*teorema de Pappus*).

§ 3. Lugares geométricos de puntos

II.66. Por el punto de intersección de dos circunferencias se traza una recta que por segunda vez corta las circunferencias en dos puntos A y B. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos AB.

II.67. Se dan el punto A y la recta l; B es un punto arbitrario de l. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que ABM sea un triángulo regular.

II.68. Se da el triángulo regular ABC. En las prolongaciones de sus lados AB y AC más allá de los puntos B y C se toman los puntos D y E de tal manera que $|BD|\cdot|CE| = |BC|^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas DC y BE.

II.69. Se dan tres puntos A, B y C en una recta; D es un punto arbitrario del plano que no se encuentra en esta recta. Tracemos por C las rectas paralelas a AD y BD hasta la intersección con las rectas BD y AD en los puntos P y Q. Hallar el lugar geométrico de los pies M de las perpendiculares bajadas desde C sobre PQ, y encontrar todos los puntos D, para los cuales M es un punto fijo.

II.70. En el lado AC del triángulo ABC se toma el punto K y en la mediana BD, el punto P de tal manera que el área del triángulo APK es igual al área del triángulo BPC. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas AP y BK.

II.71. Por el punto dado O en el interior de un ángulo prefijado pasan dos rayos que forman el ángulo establecido α. Supongamos que el primer rayo corta un lado del ángulo en el punto A, mientras que el segundo corta el otro lado del ángulo en el punto B. Hallar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares bajadas desde O sobre la recta AB.

II.72. En una circunferencia están trazados dos diámetros AC y BD mutuamente perpendiculares. P es un punto arbitrario de la circunferencia, PA corta BD en el punto E. La recta que pasa por E paralelamente a AC concurre con la recta PB en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.

II.73. Se dan un ángulo, cuyo vértice se encuentra en el punto M, y el punto B. Una circunferencia arbitraria que pasa por M y B, corta los lados del ángulo en los puntos C y D (distintos de M). Hallar el lugar geométrico de los centros de masas de los triángulos MCD.

II.74. Uno de los vértices de un rectángulo se encuentra en un punto dado, los otros dos que no pertenecen a un lado, en dos rectas prefijadas mutuamente perpendiculares. Hallar el lugar geométrico de los cuartos vértices de semejantes rectángulos.

II.75. Sea A uno de los dos puntos de intersección de dos circunferencias dadas; por el otro punto de intersección está trazada una recta arbitraria que corta una circunferencia en el punto B y a la otra, en el punto C, diferentes de los puntos comunes de estas circunferencias. Hallar el lugar geométrico: a) de los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de ABC; b) de los centros de masas del triángulo ABC; c) de los puntos de intersección de las alturas del triángulo ABC.

II.76. Sean B y C dos puntos fijos de una circunferencia dada; A es un punto variable de la misma circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto medio de AB sobre AC.

II.77. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las diagonales en los rectángulos, cuyos lados (o sus prolongaciones) pasan por cuatro puntos dados del plano.

II.78. Se dan dos círculos tangentes interiormente en el punto A. La tangente al círculo menor corta la circunferencia mayor en los puntos B y C. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC.

II.79. Vienen dadas dos circunferencias que se intersecan. Hallar el lugar geométrico de los centros de los rectángulos con vértices en estas circunferencias.

II.80. Sobre la mesa de billar redonda, en el punto A distinto del centro, se halla una bola elástica, cuyas dimensiones pueden despreciarse. Indicar el lugar geométrico de los puntos A, desde los cuales se pueda dirigir la bola elástica de manera que ésta, evitando el centro de la mesa de billar, acierte en el punto A después de tres rebotes de su baranda.

II.81. Por un punto equidistante de dos rectas paralelas dadas está trazada una recta que corta estas rectas en los puntos M y N. Hallar el lugar geométrico de los vértices P de los triángulos equiláteros MNP.

II.82. Se dan dos puntos A y B y la recta l. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A y B y cortan la recta l.

II.83. Se dan dos puntos O y M. Determinar: a) el lugar geométrico de los puntos del plano, que puedan servir de uno de los vértices de un triángulo con el centro del círculo circunscrito en el punto O y con el centro de masas en el punto M; b) el lugar geométrico de los puntos del plano, que puedan servir de uno de los vértices de un triángulo obtusángulo con el centro del círculo circunscrito en el punto O y el centro de masas en el punto M.

II.84. Una circunferencia tiene inscrito un triángulo regular. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las alturas de todos los triángulos posibles inscritos en esta misma circunferencia, cuyos dos lados sean paralelos a dos lados del triángulo regular dado.

II.85. Hallar el lugar geométrico de los centros de todos los rectángulos posibles circunscritos alrededor de un triángulo dado. (Llamaremos *circunscrito* al rectángulo, si uno de los vértices del triángulo coincide con el vértice del rectángulo, mientras que los dos otros se hallan en dos lados del rectángulo que no contienen este vértice.)

II.86. Se dan dos cuadrados con los lados correspondientemente paralelos. Determinar el lugar geométrico de los puntos M, tales que para cualquier punto P del primer cuadrado se encuentre un punto Q del segundo, tal que el triángulo MPQ sea regular. Sean a y b los lados del primero y del segundo cuadrados, respectivamente. ¿Para qué relación entre a y b el lugar geométrico buscado de los puntos no es vacío?

II.87. En el interior de un triángulo dado hallar el lugar geométrico de los puntos M, para cada uno de los cuales para cualquier punto N que yace en la frontera del triángulo, pueda encontrarse un punto P en su interior o en la frontera, tal que el área del triángulo

MNP no sea inferior a 1/6 parte del área del triángulo dado.

II.88. Se dan dos puntos A e I. Hallar el lugar geométrico de los puntos B tales que exista el triángulo ABC con el centro del círculo inscrito ubicado en el punto I, todos los ángulos del cual son inferiores a α ($60° < \alpha < 90°$).

II.89. Los puntos A, B y C se encuentran en una recta (B se encuentra entre A y C). Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que $\operatorname{ctg} \angle AMB + \operatorname{ctg} \angle BMC = k$.

II.90. Se dan dos puntos A y Q. Hallar el lugar geométrico de los puntos B tales que exista el triángulo acutángulo ABC, para el cual Q es el centro de masas.

II.91. Se dan dos puntos A y H. Hallar el lugar geométrico de los puntos B tales que exista el triángulo ABC, para el cual H es el punto de intersección de las alturas y todos los ángulos del cual son superiores a α ($\alpha < \pi/4$).

II.92. En un plano vienen dados dos rayos. Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de estos rayos. (La distancia desde un punto hasta el rayo es igual a la distancia desde este punto hasta el punto del rayo, más próximo a aquél.)

II.93. Se dan un ángulo y una circunferencia con el centro en el punto O, inscrita en este ángulo. Una recta arbitraria es tangente a la circunferencia y corta los lados del ángulo en los puntos M y N. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos MON.

II.94. Se dan dos circunferencias, con sendos puntos A y B equidistantes del punto medio del segmento que une sus centros. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos AB.

II.95. Sobre el segmento dado AB tomemos un punto arbitrario M y examinemos dos cuadrados $AMCD$ y $MBEF$ dispuestos por un lado de AB. Circunscribamos alrededor de estos cuadrados las circunferencias y designemos con N su punto de intersección, distinto de M. Demostrar que: a) AF y BC se intersecan en N; b) MN pasa por un punto fijo del plano. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que unen los centros de los cuadrados.

II.96. Se dan una circunferencia y el punto A. Sea M un punto arbitrario de la circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de la mediatriz trazada al segmento AM y la tangente a la circunferencia que pasa por M.

II.97. Dos circunferencias entran en contacto en el punto A. Una recta que pasa por A, corta por segunda vez estas circunferencias en los puntos B y C, la otra, en los puntos B_1 y C_1 (B y B_1 se sitúan en una misma circunferencia). Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos AB_1C y ABC_1.

II.98. Hallar el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos de todos los triángulos rectángulos isósceles posibles, los extremos de cuyas hipotenusas se sitúan en dos circunferencias dadas.

II.99. Los lados de un triángulo dado son diagonales de tres paralelogramos. Los lados de estos paralelogramos son paralelos a dos rectas: l y p. Demostrar que las tres diagonales de estos paralelogramos, distintas de los lados del triángulo, concurren en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos M, si l y p son dos rectas arbitrarias mutuamente perpendiculares.

II.100. Supongamos que B y C son dos puntos fijos de una circunferencia, A, un punto arbitrario de esta circunferencia, H, el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC y M, la proyección de H sobre la bisectriz del ángulo BAC. Hallar el lugar geométrico de puntos M.

II.101. En el triángulo dado ABC sea D un punto arbitrario en la recta BC. Las rectas que pasan por D paralelamente a AB y AC, cortan AC y AB en los puntos E y F. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos D, E y F.

II.102. En el triángulo regular dado ABC hallar el lugar geométrico de los puntos M en el interior de este triángulo tales, que $\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \pi/2$.

II.103. En el interior de un triángulo se toma un punto M tal, que existe una recta l que pasa por M y divide el triángulo dado en dos partes de manera que, dada la transformación simétrica respecto a l, una parte se encuentra en el interior o en la frontera de la otra. Hallar el lugar geométrico de puntos M.

§ 4. Triángulo. Triángulo y circunferencia

II.104. Desde el vértice A del triángulo ABC están bajadas las perpendiculares AM y AN sobre las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo (B y C). Demostrar que el segmento MN es igual al semiperímetro del triángulo ABC.

II.105. En el triángulo ABC está trazada la altura BD, AN es la perpendicular a AB y CM, la perpendicular a BC; además, $|AN| = |DC|$, $|CM| = |AD|$. Demostrar que M y N son equidistantes del vértice B.

II.106. Demostrar que para cualquier triángulo rectángulo el radio de la circunferencia que entra en contacto con sus catetos y la circunferencia circunscrita (por dentro) es igual al diámetro de la circunferencia inscrita.

II.107. Demostrar que si un lado del triángulo yace sobre un plano recto fijo y el punto de intersección de las alturas coincide con el punto fijo, la circunferencia circunscrita alrededor de este triángulo también pasa por el punto fijo.

II.108. En el triángulo dado ABC sean A_1, B_1 y C_1 los puntos de la circunferencia circunscrita alrededor de ABC, diametralmente opuestos a los vértices A, B y C. Tracemos por A_1, B_1 y C_1 unas rectas paralelas a BC, CA y AB. Demostrar que el triángulo formado por estas rectas es homotético al triángulo ABC con la razón 2 y el centro en el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC.

II.109. Demostrar que las proyecciones del pie de la altura del triángulo sobre los lados que la comprenden, y sobre las otras dos alturas se hallan en una recta.

II.110. En la prolongación del lado AB del triángulo ABC más allá del punto B se toma el punto D de tal manera que $|BD| = |CB|$. De la misma manera, en la prolongación del lado CB más allá del punto B se toma el punto F de modo que $|BF| = |AB|$. Demostrar que los puntos A, C, D y F se hallan en una circunferencia, cuyo centro se encuentra en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC.

II.111. Tres circunferencias que se intersecan, pasan por el punto H. Demostrar que H es el punto de intersección de las alturas de un triángulo, cuyos vértices coinciden con los otros tres puntos de intersección de dos en dos de las circunferencias.

II.112. Sea P un punto arbitrario de la circunferencia circunscrita alrededor de un rectángulo. Dos rectas que pasan por P en paralelo a los lados del rectángulo, cortan los lados de éste o sus prolongaciones en los puntos K, L, M y N. Demostrar que N es el punto de intersección de las alturas del triángulo KLM. Demostrar también que los pies de las alturas del triángulo KLM, distintas de P, se hallan en las diagonales del rectángulo.

II.113. El triángulo ABC tiene trazadas las bisectrices AD, BE y CF. Una recta perpendicular a AD, que pasa por el punto medio de AD, corta AC en el punto P. Otra recta perpendicular a BE, que pasa por el punto medio de BE, corta AB en el punto Q. Por fin, la tercera recta perpendicular a CF, que pasa por el punto medio de CF, corta CB en el punto R. Demostrar que los triángulos DEF y PQR son equivalentes.

II.114. En el triángulo isósceles ABC ($|AB| = |BC|$), D es el punto medio de AC, E, la proyección de D sobre BC, F, el punto medio de DE. Demostrar que las rectas BF y AE son perpendiculares.

II.115. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC entra en contacto con los lados AB y AC en los puntos C_1 y B_1, mientras que la circunferencia que tiene contacto con el lado BC y las prolongaciones de AB y AC, es tangente a las rectas AB y AC en los puntos C_2 y B_2. Sea D el punto medio de BC. La recta AD se interseca con las rectas B_1C_1 y B_2C_2 en los puntos E y F. Demostrar que $BECF$ es un paralelogramo.

II.116. El triángulo ABC tiene trazada la bisectriz del ángulo interior AD. Construyamos una tangente l al círculo circunscrito en el punto A. Demostrar que la recta trazada por D paralelamente a l es tangente a la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

II.117. En el triángulo ABC se traza una recta que corta los lados AC y BC en los puntos M y N de manera que $|MN| = |AM| + |BN|$. Demostrar quetodas las rectas de este género son tangentes a una misma circunferencia.

II.118. Demostrar que los puntos simétricos al centro del círculo circunscrito alrededor de un triángulo, respecto a los puntos medios de sus medianas, se hallan en las alturas del triángulo.

II.119. Demostrar que si la altura de un triángulo es $\sqrt{2}$ veces mayor que el radio del círculo circunscrito, la recta que une los pies de las perpendiculares bajadas desde el pie de esta altura sobre los lados que la comprenden, pasa por el centro del círculo circunscrito.

II.120. Supongamos que ABC es un triángulo rectángulo ($\angle C = 90°$), CD, la altura, K, un punto del plano; además, $|AK| = |AC|$. Demostrar que el diámetro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABK, el cual pasa por el vértice A, es perpendicular a la recta DK.

II.121. Por el vértice A del triángulo ABC se traza una recta paralela a BC; en esta recta se toma el punto D de modo que $|AD| = |AC| + |AB|$; el segmento DB corta el lado AC en el punto E. Demostrar que la recta trazada por E paralelamente a BC, pasa por el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

II.122. Dos circunferencias pasan por el vértice de un ángulo y un punto que se halla en la bisectriz. Demostrar que los segmentos de los lados del ángulo, comprendidos entre las circunferencias, son iguales.

II.123. Se dan el triángulo ABC y el punto D. Las rectas AD, BD y CD se intersecan por segunda vez con la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC en los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Examinemos dos circunferencias: la primera pasa por A y A_1

y la segunda, por B y B_1. Demostrar que los extremos de la cuerda común de estas dos circunferencias y los puntos C y C_1 se hallan en una circunferencia.

II.124. Por los vértices A, B y C del triángulo ABC están trazadas tres rectas paralelas l_1, l_2 y l_3. Demostrar que las rectas simétricas a l_1, l_2 y l_3, respectivamente, en cuanto a las bisectrices de los ángulos A, B y C, concurren en un punto dispuesto en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC.

II.125. Demostrar que si M es un punto en el interior del triángulo ABC y las rectas AM, BM y CM pasan, respectivamente, por los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BMC, CMA y AMB, M es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

II.126. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Sea M un punto arbitrario del plano. La recta BM corta por segunda vez la circunferencia que pasa por A_1, B y C_1 en el punto B_2, la recta CM corta la circunferencia que pasa por A_1, B_1 y C, en el punto C_2, y la recta AM corta la circunferencia que pasa por A, B_1 y C_1, en el punto A_2. Demostrar que los puntos A_2, B_2, C_2 y M se encuentran en una circunferencia.

II.127. Sea A_1 un punto simétrico al punto de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC con el lado BC, respecto a la bisectriz del ángulo A. De manera análoga se determinan los puntos B_1 y C_1. Demostrar que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 y la recta que pasa por los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo ABC, concurren en un punto.

II.128. Sean AA_1, BB_1, CC_1 las alturas del triángulo ABC. Una recta perpendicular a AB corta AC y A_1C_1 en los puntos K y L. Demostrar que el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo KLB_1 se halla en la recta BC.

II.129. Cuatro circunferencias iguales que se intersecan, pasan por el punto A. Demostrar que tres segmentos, los extremos de cada uno de los cuales difieren de A y son puntos de intersección de dos circunferencias (los lados opuestos de cada segmento no pertenecen a una circunferencia), concurren en un punto.

II.130. En el triángulo rectángulo ABC el ángulo C es recto, O es el centro de la circunferencia inscrita, M, el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con la hipotenusa; la circunferencia con el centro en M que pasa por O, se interseca con las bisectrices de los ángulos A y B en los puntos K y L distintos de O. Demostrar que K y L son centros de las circunferencias inscritas en los triángulos ACD y BCD, donde CD es la altura del triángulo ABC.

II.131. Demostrar que en el triángulo ABC la bisectriz del ángulo A, la línea media, paralela a AC, y la recta que une los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados CB y CA, se cortan en un punto.

II.132. Demostrar que tres rectas que pasan por los pies de dos alturas del triángulo, los extremos de dos de sus bisectrices y dos puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con sus lados (todos los puntos se hallan en dos lados del triángulo), se cortan en un punto.

II.133. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente, de tal manera que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 se corten en un punto. Demostrar que si AA_1 es la bisectriz del ángulo $B_1A_1C_1$, entonces AA_1 es la altura del triángulo ABC.

II.134. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman, respectivamente, los puntos A_1, B_1 y C_1 de manera que $\angle AA_1C = \angle BB_1A = \angle CC_1B$ (los ángulos se miden en un solo sentido). Demostrar que el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo limitado por las rectas AA_1, BB_1 y CC_1, coincide con el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC.

II.135. Los vértices del triángulo $A_1B_1C_1$ se hallan en las rectas BC, CA y AB (A_1 se encuentra en BC; B_1, en CA; C_1, en AB). Demostrar que si los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son semejantes (son homólogos los vértices A y A_1, B y B_1, C y C_1), el punto de intersección de las alturas del triángulo $A_1B_1C_1$ es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC. ¿Será cierta la afirmación inversa?

II.136. En cada lado de un triángulo se toman dos puntos de manera que los seis segmentos que unen cada punto con el vértice opuesto, son iguales entre sí. Demostrar que los puntos medios de estos seis segmentos se hallan en una circunferencia.

II.137. En los rayos AB y CB del triángulo ABC están trazados los segmentos $|AM| = |CN| = p$, donde p es el semiperímetro del triángulo (B se halla entre A y M, así como entre C y N). Sea K el punto de la circunferencia circunscrita alrededor de ABC, diametralmente opuesto a B. Demostrar que la perpendicular bajada desde K sobre MN pasa por el centro de la circunferencia inscrita.

II.138. Desde cierto punto de la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo equilátero ABC están trazadas las rectas paralelas a BC, CA y AB, que cortan CA, AB y BC en los puntos M, N y Q, respectivamente. Demostrar que M, N y Q se hallan en una recta.

II.139. Demostrar que tres rectas simétricas a una recta arbitraria que pasa por el punto de intersección de las alturas de un triángulo, respecto a los lados de éste, se cortan en un punto.

II.140. *Teorema de Leibniz.* Supongamos que M es un punto arbitrario del plano, G, el centro de masas del triángulo ABC. Entonces se cumple la igualdad $3|MG|^2 = |MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 - \frac{1}{3}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2)$.

II.141. Supongamos que ABC es un triángulo regular con el lado a, M, cierto punto del plano que se halla a la distancia d del centro del triángulo ABC. Demostrar que el área del triángulo, cuyos lados son iguales a los segmentos MA, MB y MC, se expresa por medio de la fórmula $S = \frac{\sqrt{3}}{12} \mid a^2 - 3d^2 \mid$.

II.142. Se dan dos triángulos regulares: ABC y $A_1B_1C_1$. Hallar el lugar geométrico de los puntos M tales que dos triángulos formados por los segmentos MA, MB, MC y MA_1, MB_1, MC_1, respectivamente, sean equivalentes.

II.143. En los rayos AB y CB del triángulo ABC se trazan los segmentos AK y CM iguales a AC. Demostrar que el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo BKM, es igual a la distancia entre los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo ABC, mientras que la recta KM es perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita.

II.144. Por un vértice del triángulo está trazada una recta perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita. Demostrar que esta recta forma con los lados del triángulo dado dos triángulos, sin incluir el de partida, para los cuales la diferencia de los radios de las circunferencias circunscritas es igual a la distancia entre los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo inicial.

II.145. Demostrar que si las longitudes de los lados del triángulo forman la progresión aritmética, entonces: a) el radio del círculo inscrito es igual a 1/3 de la altura bajada sobre el lado medio; b) la recta que une el centro de masas del triángulo con el centro del círculo inscrito, es paralela al lado medio; c) la bisectriz del ángulo interior, opuesto al lado medio, es perpendicular a la recta que une los centros de los círculos inscrito y circunscrito; d) para todos los puntos de esta bisectriz, la suma de las distancias hasta los lados del triángulo es constante; e) el centro de la circunferencia inscrita, los puntos medios de los lados máximo y mínimo y el vértice del ángulo formado por éstos, se hallan en una circunferencia.

II.146. Sea K el punto medio del lado BC del triángulo ABC, M, el pie de la altura bajada sobre BC. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene contacto con el lado BC en el punto D; la circunferencia exinscrita que entra en contacto con las prolongaciones de AB y AC y el lado BC, es tangente a BC en el punto E. La tangente común a estas circunferencias, distinta de los lados del triángulo, corta la circunferencia que pasa por K y M, en los puntos F y G. Demostrar que los puntos D, E, F y G se hallan en una circunferencia.

* * *

II.147. Demostrar que el centro de masas del triángulo, el punto de intersección de las alturas y el centro del círculo circunscrito se hallan en una recta (*recta de Euler*).

II.148. ¿Qué lados corta la recta de Euler en los triángulos acutángulo y obtusángulo?

II.149. Sea K un punto simétrico al centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$, respecto al lado BC. Demostrar que la recta de Euler en el triángulo ABC divide el segmento AK por la mitad.

II.150. Demostrar que en la recta de Euler en el triángulo ABC existe un punto P tal, que las distancias desde los centros de masas de los triángulos ABP, BCP, CAP, respectivamente, hasta los vértices C, A y B son iguales entre sí.

II.151. Sea P un punto interior al triángulo ABC, tal que los ángulos APB, BPC y CPA son iguales a $120°$ (suponemos que los ángulos del triángulo ABC son menores de $120°$). Demostrar que las rectas de Euler en los triángulos APB, BPC y CPA se cortan en un punto.

Observación. Al resolver este problema, se aprovecha el resultado del problema II.296.

II.152. Demostrar que la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo dado, es la recta de Euler en el triángulo con vértices en los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo dado.

* * *

II.153. Demostrar que los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto arbitrario de la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo, sobre los lados de éste, se hallan en una recta (*recta de Simson*).

II.154. Demostrar que el ángulo comprendido entre las rectas de Simson que corresponden a dos puntos de una circunferencia, se mide por la mitad del arco entre estos puntos.

II.155. Sea M un punto de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC. La recta que pasa por M es perpendicular a

BC y corta por segunda vez la circunferencia en el punto N. Demostrar que la recta de Simson que corresponde al punto M, es paralela a la recta AN.

II.156. Demostrar que la proyección del lado AB del triángulo ABC sobre la recta de Simson que corresponde al punto M, es igual a la distancia entre las proyecciones del punto M sobre los lados AC y BC.

II.157. Sean AA_1, BB_1, CC_1 las alturas del triángulo ABC. Las rectas AA_1, BB_1, CC_1 cortan por segunda vez la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC en los puntos A_2, B_2, C_2, respectivamente. Las rectas de Simson que corresponden a los puntos A_2, B_2, C_2, forman el triángulo $A_3B_3C_3$ (A_3 es el punto de intersección de las rectas de Simson que corresponden a los puntos B_2 y C_2, etc.). Demostrar que los centros de masas de los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_3B_3C_3$ coinciden, mientras que las rectas A_2A_3, B_2B_3 y C_2C_3 se cortan en un punto.

II.158. Supongamos que A_1, B_1 y C_1 son puntos en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, tales que $\cup AA_1 + \cup BB_1 + \cup CC_1 = 2k\pi$ (todos los arcos se miden en un sentido; k es un número entero). Demostrar que las rectas de Simson de los puntos A_1, B_1 y C_1 respecto al triángulo ABC se cortan en un punto.

II.159. Demostrar que la tangente a una parábola en su vértice es la recta de Simson en un triángulo formado al intersecar tres otras tangentes cualesquiera a la misma parábola.

* * *

II.160. Demostrar que los puntos medios de los lados del triángulo, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos de las alturas desde los vértices hasta el punto de su intersección se hallan en una circunferencia, o sea, en «la circunferencia de los nueve puntos» (*teorema de Euler*).

II.161. Supongamos que H es el punto de intersección de las alturas de un triángulo, D, el punto medio de cualquier lado, K, uno de los puntos de intersección de la recta HD con la circunferencia circunscrita (D se encuentra entre H y K). Demostrar que D es el punto medio del segmento HK.

II.162. Supongamos que M es el punto de intersección de las medianas de un triángulo, E, el pie de cualquier altura, F, uno de los puntos de intersección de la recta ME con la circunferencia circunscrita (M se encuentra entre E y F). Demostrar que $|FM| = 2|EM|$.

II.163. La altura bajada sobre el lado BC del triángulo ABC corta la circunferencia circunscrita en el punto A_1. Demostrar que la distancia desde el centro de la circunferencia de los nueve puntos hasta el lado BC es igual a $\frac{1}{4}|AA_1|$.

II.164. En el triángulo ABC, AA_1 es la altura, H, el punto de intersección de las alturas. Sea P un punto arbitrario de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, M, un punto en la recta HP, tal que

$|HP|\cdot|HM| = |HA_1|\cdot|HA|$ (H se halla en el segmento MP, si el triángulo ABC es acutángulo y fuera de éste, si es un triángulo obtusángulo). Demostrar que M se sitúa en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

II.165. En el triángulo ABC, BK es la altura, BL, la mediana, M y N, proyecciones de los puntos A y C sobre la bisectriz del ángulo B. Demostrar que los puntos K, L, M y N se hallan en una circunferencia, cuyo centro se dispone en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

II.166. Sean H el punto de intersección de las alturas de un triángulo, F, un punto arbitrario de la circunferencia circunscrita. Demostrar que la recta de Simson, la cual corresponde al punto F, pasa por uno de los puntos de intersección de la recta FH con la circunferencia de los nueve puntos (véanse los problemas II.153, II.159).

II.167. Supongamos que l es una recta arbitraria que pasa por el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC; A_1, B_1 y C_1 son las proyecciones de A, B y C sobre l. Tracemos por A_1 una recta perpendicular a BC, por B_1, otra recta perpendicular a AC y por C_1, la tercera recta perpendicular a AB. Demostrar que estas tres rectas se intersecan en un punto dispuesto en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

II.168. En el triángulo ABC, AA_1, BB_1 y CC_1 son sus alturas. Demostrar que las rectas de Euler de los triángulos AB_1C_1, A_1BC_1,

A_1B_1C se cortan en un punto P tal de la circunferencia de los nueve puntos, para el cual uno de los segmentos PA_1, PB_1, PC_1 es igual a la suma de otros dos segmentos (*problema de Victor Thebault*).

II.169. Demostrar que tres circunferencias, cada una de las cuales pasa por el vértice de un triángulo, por el pie de la altura, bajada desde este vértice, y es tangente al radio del círculo circunscrito alrededor del triángulo, trazado hacia este vértice, se cortan en dos puntos dispuestos en la recta de Euler del triángulo dado.

II.170. Examinemos tres circunferencias, cada una de las cuales pasa por un vértice de un triángulo y los pies de dos bisectrices, interior y exterior, que salen de este vértice (semejantes circunferencias llevan el nombre de *circunferencias de Apolonio*). Demostrar que: a) estas tres circunferencias se intersecan en dos puntos (M_1 y M_2); b) la recta M_1M_2 pasa por el centro del círculo circunscrito alrededor del triángulo dado; c) los pies de las perpendiculares bajadas desde los puntos M_1 y M_2 sobre los lados del triángulo sirven como vértices de dos triángulos regulares.

II.171. Una recta, simétrica a la mediana de un triángulo con respecto a la bisectriz del mismo ángulo, del cual parte la mediana, se llama *simediana*. Supongamos que la simediana que parte del vértice B del triángulo ABC, corta AC en el punto K. Demostrar que $|AK|:|KC| = |AB|^2:|BC|^2$.

II.172. Supongamos que D es un punto arbitrario tomado en el lado BC, E y F son puntos en AC y AB tales, que DE es paralela a AB y DF es paralela a AC. Una circunferencia que pasa por D, E y F, corta por segunda vez BC, CA y AB en los puntos D_1, E_1 y F_1, respectivamente. Sean M y N los puntos de intersección de DE y E_1D_1, DF y D_1E_1. Demostrar que M y N se hallan en la simediana que parte del vértice A. Además, si D coincide con el pie de la simediana, la circunferencia que pasa por D, E y F, entra en contacto con el lado BC. (Esta circunferencia se llama *circunferencia de Tucker*).

II.173. Demostrar que las cuerdas comunes de la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo dado y de las circunferencias de Apolonio son simedianas de este triángulo (véanse los problemas II.170, II.171).

* * *

II.174. En el trapecio $ABCD$, el lado CD es perpendicular a las bases AD y BC. Una circunferencia con diámetro AB corta AD en el punto P (P difiere de A). La tangente a la circunferencia en el punto P corta CD en el punto M. A partir de M, hacia la circunferencia, está trazada una segunda tangente que tiene contacto con ella en el punto Q. Demostrar que la recta BQ parte CD por la mitad.

II.175. Sean M y N las proyecciones del punto de intersección de las alturas del triángulo ABC sobre las bisectrices de los ángulos interior y exterior B. Demostrar que la recta MN parte el lado AC por la mitad.

II.176. Se da una circunferencia y dos puntos A y B en ésta. Las tangentes a la circunferencia que pasan por A y B, se cortan en el punto C. La circunferencia que pasa por C, es tangente a la recta AB en el punto B y se interseca por segunda vez con la dada en el punto M. Demostrar que la recta AM divide el segmento CB por la mitad.

II.177. Desde el punto A, dispuesto fuera de una circunferencia, están trazadas a ésta dos tangentes AM y AN (M y N son puntos de tangencia) y una secante que corta la circunferencia en los puntos K y L. Tracemos una recta arbitraria l paralela a AM. Supongamos que KM y LM cortan l en los puntos P y Q. Demostrar que la recta: MN divide el segmento PQ por la mitad.

II.178. El triángulo ABC tiene inscrita una circunferencia, cuyo diámetro pasa por el punto de tangencia con el lado BC y corta la cuerda que une los otros dos puntos de tangencia, en el punto N. Demostrar que AN parte BC por la mitad.

II.179. El triángulo ABC tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AC, MK es el diámetro. La recta BK corta AC en el punto N. Demostrar que $|AM| = |NC|$.

II.180. El triángulo ABC tiene inscrita una circunferencia, M es el punto de tangencia que tiene la circunferencia con el lado BC, MK es el diámetro. La recta AK corta la circunferencia en el punto P. Demostrar que la tangente a la circunferencia en el punto P divide el lado BC por la mitad.

II.181. La recta l es tangente a la circunferencia en el punto A; supongamos que CD es la cuerda de una circunferencia, paralela a l, B, un punto arbitrario tomado en la recta l. Las rectas CB y DB cortan por segunda vez la circunferencia en los puntos L y K. Demostrar que la recta LK parte el segmento AB por la mitad.

II.182. Se dan dos circunferencias que se intersecan. Sea A uno de los puntos de su intersección. Desde un punto arbitrario que se halla en la prolongación de la cuerda común de las circunferencias dadas, están trazadas hacia una de éstas dos tangentes que tienen contacto con ésta en los puntos M y N. Sean P y Q los puntos de intersección (distintos de A) de las rectas MA y NA, respectivamente, con la segunda circunferencia. Demostrar que la recta MN parte el segmento PQ por la mitad.

II.183. La altura BD del triángulo ABC sirve de diámetro de una circunferencia que corta los lados AB y BC en los puntos K y L, respectivamente. Las rectas tangentes a la circunferencia en los puntos K y L, concurren en el punto M. Demostrar que la recta BM divide el lado AC por la mitad.

II.184. La recta l es perpendicular al segmento AB y pasa por B. La circunferencia con el centro situado en l pasa por A y corta l en los puntos C y D y las tangentes a la circunferencia en los puntos A y C se intersecan en N. Demostrar que la recta DN divide el segmento AB por la mitad.

II.185. El triángulo ABC tiene circunscrita una circunferencia. Supongamos que N es el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia que pasan por los puntos B y C, M, un punto tal de la circunferencia que $AM \parallel BC$, K, el punto de intersección de MN con la circunferencia. Demostrar que KA divide BC por la mitad.

II.186. Sea A la proyección del centro de una circunferencia dada sobre la recta l. En esta recta se toman dos puntos más B y C de manera que $|AB| = |AC|$. Por B y C están trazadas dos secantes arbitrarias que cortan la circunferencia en los puntos P, Q y M, N, respectivamente. Supongamos que las rectas NP y MQ cortan la recta l en los puntos R y S. Demostrar que $|RA| = |AS|$.

II.187. En el triángulo ABC, A_1, B_1, C_1 son los puntos medios de los lados BC, CA y AB, K y L, los pies de las perpendiculares bajadas desde los vértices B y C sobre las rectas A_1C_1 y A_1B_1, respectivamente, O, el centro de la circunferencia de los nueve puntos. Demostrar que la recta A_1O parte el segmento KL por la mitad.

* * *

II.188. Sean los puntos A_1, B_1, C_1 simétricos a cierto punto P, respectivamente, con respecto a los lados BC, CA y AB del triángulo ABC. Demostrar que: a) las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos A_1BC, AB_1C, ABC_1 tienen un punto común; b) las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos A_1B_1C, A_1BC_1, AB_1C_1 tienen un punto común.

II.189. Supongamos que AB es el diámetro de un semicírculo, M, un punto tomado en el diámetro AB. Los puntos C, D, E y F se hallan en la semicircunferencia de manera que $\angle AMD = \angle EMB$, $\angle CMA = \angle FMB$. Sea P el punto de intersección de las rectas CD y EF. Demostrar que la recta PM es perpendicular a AB.

II.190. Una perpendicular levantada hacia el lado AB del triángulo ABC en su punto medio D, corta la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, en el punto E (C y E se encuentran a un lado de AB); F es la proyección de E sobre AC. Demostrar que la recta DF divide el perímetro del triángulo ABC por la mitad y que semejantes tres rectas construidas para cada lado del triángulo, se intersecan en un punto.

II.191. Demostrar que la recta que divide el perímetro y el área de un triángulo en razón igual, pasa por el centro de la circunferencia inscrita.

II.192. Demostrar que tres rectas que pasan por los vértices de un triángulo y dividen su perímetro por la mitad, se cortan en el punto N (*punto de Nagell*). Supongamos que M es el centro de masas del triángulo, I, el centro de la circunferencia inscrita, S, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo con vértices en los puntos medios de los lados del triángulo dado. Demostrar que los puntos N, M, I y S se hallan en una recta, siendo que $|MN| = 2|IM|$, $|IS| = |SN|$.

* * *

II.193. Designemos con a, b y c los lados del triángulo ABC; $a + b + c = 2p$; G es el punto de intersección de sus medianas, O, I, I_a, respectivamente, son los centros de los círculos circunscrito, inscrito y exinscrito (el círculo exinscrito tiene como tangentes el lado BC y las prolongaciones de los lados AB y AC), R, r, r_a son sus radios. Demostrar la validez de las relaciones siguientes:

a) $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$;

b) $|OG|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$;

c) $|IG|^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$;

d) $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$ (*Euler*);

e) $|OI_a|^2 = R^2 + 2Rr_a$;

f) $|II_a|^2 = 4R(r_a - r)$.

II.194. Sean BB_1 y CC_1 las bisectrices de los ángulos B y C del triángulo ABC. Demostrar (usando las designaciones del problema anterior) que $|B_1C_1| = \frac{abc}{(b+a)(c+a)R} \times$ $\times |OI_a|$.

II.195. Demostrar que los puntos simétricos a los centros de las circunferencias exinscritas con respecto al centro de la circunferencia circunscrita, se hallan en la circunferencia, concéntrica con respecto a la circunferencia inscrita, cuyo radio es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita.

II.196. Se da el triángulo ABC. Demostrar que la suma de las áreas de tres triángulos, los vértices de cada uno de los cuales son tres puntos de tangencia de la circunferencia exinscrita con el lado correspondiente del triángulo

ABC y las prolongaciones de otros dos lados, es igual al área duplicada del triángulo ABC, sumada con el área del triángulo con los vértices dispuestos en los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en $\triangle ABC$.

II.197. Hallar la suma de los cuadrados de las distancias desde los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en un triángulo dado, con los lados de éste, hasta el centro de la circunferencia circunscrita, si el radio de la circunferencia inscrita es igual a r y el de la circunscrita, a R.

II.198. Por los pies de las bisectrices del triángulo ABC está trazada una circunferencia. Demostrar que una de las cuerdas formadas al intersecar esta circunferencia los lados del triángulo, es igual a la suma de las otras dos.

II.199. Supongamos que AA_1, BB_1 y CC_1 son las bisectrices del triángulo ABC, L, el punto de intersección de las rectas AA_1 y B_1C_1, K, el punto de intersección de CC_1 con A_1B_1. Demostrar que BB_1 es la bisectriz del ángulo LBK.

II.200. En los lados AB y BC del triángulo ABC se toman los puntos K y L de manera que $|AK| = |KL| = |LC|$. Por el punto de intersección de las rectas AL y CK se traza una recta paralela a la bisectriz del ángulo B que corta la recta AB en el punto M. Demostrar que $|AM| = |BC|$.

II.201. En el triángulo ABC, la bisectriz del ángulo B corta la recta que pasa por el punto medio de AC y el punto medio de la altura, bajada sobre AC, en el punto M; N es el punto medio de la bisectriz del ángulo B. Demostrar que la bisectriz del ángulo C también es la bisectriz del ángulo MCN.

II.202. a) Demostrar que si en un triángulo dos bisectrices son iguales, éste es un triángulo isósceles (*teorema de Steiner*).

b) Demostrar que si en el triángulo ABC las bisectrices de los ángulos adyacentes a los ángulos A y C son iguales entre sí y ambas se sitúan simultáneamente en el interior o fuera del ángulo ABC, entonces $|AB| = |BC|$. ¿Será cierto que a partir de la igualdad de dos bisectrices exteriores de un triángulo se deduce que éste es isósceles?

II.203. Un triángulo tiene en su interior otro triángulo, cuyos vertices son los pies de las bisectrices del primero. Se sabe que el triángulo interior es isósceles. ¿Es cierta la afirmación de que también el primer triángulo es isósceles?

* * *

II.204. Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito. Designemos con K el punto de intersección de AC y BF y con L, el punto de intersección de CE y FD. Demostrar que las diagonales AD, BE y la recta KL se cortan en un punto (*teorema de Pascal*).

II.205. Se dan el triángulo ABC y el punto M. La recta que pasa por M, corta las rectas AB, BC y CA, respectivamente, en los puntos C_1, A_1 y B_1. Las rectas AM, BM y CM cortan la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC en los puntos A_2, B_2 y C_2, respectivamente. Demostrar que las rectas A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2 se intersecan en un punto dispuesto en la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$.

II.206. Por el punto de intersección de las alturas de un triángulo están trazadas dos rectas mutuamente perpendiculares. Demostrar que los puntos medios de los segmentos cortados por estas rectas en los lados del triángulo (más exactamente, en las rectas que forman el triángulo), se hallan en una recta.

* * *

II.207. Se dan el triángulo ABC y el punto arbitrario P. Los pies de las perpendiculares bajadas desde P sobre los lados del triángulo ABC, sirven en calidad de los vértices del triángulo $A_1B_1C_1$. Como vértices del triángulo $A_2B_2C_2$ sirven los puntos de intersección de las rectas AP, BP y CP con la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, distintos de los puntos A, B y C. Demostrar que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son semejantes. ¿Cuántos puntos P habrá para el triángulo escaleno ABC para que los triángulos correspondientes $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ sean semejantes al triángulo ABC?

II.208. Sean A_1, B_1, C_1 los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto arbitrario M sobre los lados BC, CA, AB, respectivamente, del triángulo ABC. Demostrar que tres rectas que pasan por los puntos medios de los segmentos B_1C_1 y MA, C_1A_1 y MB, A_1B_1 y MC se intersecan en un punto.

II.209. Supongamos que S es el área de un triángulo dado; R, el radio del círculo circunscrito alrededor de éste. Supongamos, luego, que S_1 es el área del triángulo, cuyos vértices son los pies de las perpendiculares bajadas sobre los lados del triángulo dado desde un punto alejado respecto del centro del círculo circunscrito a una distancia d. Demostrar que $S_1 =$ $= \frac{S}{4}\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right|$ (*teorema de Euler*).

II.210. Demostrar que si A, B, C y D son puntos arbitrarios de un plano, entonces cuatro circunferencias, cada una de las cuales pasa por tres puntos: los puntos medios de los segmentos AB, AC y AD; BA, BC y BD; CA, CB y CD; DA, DB y DC, tienen un punto común.

II.211. Sea ABC un triángulo, D, un punto arbitrario del plano. Llamaremos *triángulo de pedal del punto D respecto al triángulo ABC* al triángulo formado por los pies de las perpendiculares bajadas desde D sobre los lados del triángulo ABC, y a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo de pedal, *circunferencia de pedal*. Designemos con D_1 el punto en que se cortan las rectas simétricas a las rectas AD, BD y CD en cuanto a las bisectrices de los ángulos A, B y C (respectivamente) del triángulo ABC. Demostrar que las circunferencias de pedal de los puntos D y D_1 coinciden.

II.212. Examinemos cuatro puntos de un plano, entre los cuales no hay tres que se hallen en una recta. Demostrar que cuatro circunferencias de pedal, cada una de las cuales corresponde a uno de los puntos examinados respecto al triángulo, cuyos vértices son los tres puntos restantes, tienen un punto común.

II.213. Una recta que pasa por el centro de una circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, corta AB y AC en los puntos C_1 y B_1, respectivamente. Demostrar que las circunferencias construidas sobre BB_1 y CC_1 como sobre diámetros, se cortan en dos puntos, uno de los cuales se halla sobre la circunferencia circunscrita alrededor de ABC, mientras que el otro, sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

§ 5. Cuadrilátero

II.214. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito y AB, su diámetro. Demostrar que las proyecciones de los lados AD y BC sobre la recta CD son iguales.

II.215. Supongamos que $ABCD$ es un cuadrilátero convexo, O, el punto de intersección de sus diagonales; E, F y G, las proyecciones de B, C, y O sobre AD. Demostrar que el área del cuadrilátero es igual a $\frac{|AD|\cdot|BE|\cdot|CF|}{2|OG|}$.

II.216. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Examinemos cuatro circunferencias, cada una de las cuales tiene como tangentes los tres lados de este cuadrilátero.

a) Demostrar que los centros de estas circunferencias se hallan en una circunferencia.

b) Sean r_1, r_2, r_3, r_4 los radios de estas circunferencias (r_1 no tiene contacto con el lado DC, de manera análoga r_2 no tiene con-

tacto con el lado DA, r_3 no lo tiene con AB, r_4, con BC). Demostrar que $\frac{|AB|}{r_1}+\frac{|CD|}{r_3}=$
$=\frac{|BC|}{r_2}+\frac{|AD|}{r_4}$.

II.217. Demostrar que para el área S de un cuadrilátero inscrito es válida la fórmula $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ (p es el semiperímetro, a, b, c, d son los lados).

II.218. Supongamos que 2φ es la suma de dos ángulos opuestos de un cuadrilátero circunscrito, a, b, c y d son sus lados, S, el área. Demostrar que $S=\sqrt{abcd}\operatorname{sen}\varphi$.

II.219. En los lados AB y CD del cuadrilátero convexo $ABCD$ se toman los puntos M y N que dividen aquéllos en razón igual (contando a partir de los vértices A y C). Estos puntos están unidos con todos los vértices del cuadrilátero, a consecuencia de los cual $ABCD$ está dividido en seis triángulos y un cuadrilátero. Demostrar que el área del cuadrilátero obtenido es igual a la suma de las áreas de dos triángulos adyacentes a los lados BC y AD.

II.220. En una circunferencia están trazados el diámetro AB y la cuerda CD que no lo corta. Sean E y F los pies de las perpendiculares bajadas desde los puntos A y B sobre la recta CD. Demostrar que el área del cuadrilátero $AEFB$ es igual a la suma de las áreas de los triángulos ACB y ADB.

II.221. Se da el cuadrilátero convexo Q_1. Las rectas perpendiculares a sus lados, las cuales pasan por los puntos medios de los lados, forman el cuadrilátero Q_2. Precisamente de la misma manera, para el cuadrilátero Q_2

está formado el cuadrilátero Q_3. Demostrar que el cuadrilátero Q_3 es semejante al cuadrilátero inicial Q_1.

II.222. En los lados opuestos BC y DA de un cuadrilátero convexo se toman los puntos M y N de tal manera que $|BM| : |MC| = |AN| : |ND| = |AB| : |CD|$. Demostrar que la recta MN es paralela a la bisectriz del ángulo formado por los lados AB y CD.

II.223. Las diagonales dividen un cuadrilátero convexo en cuatro triángulos. Los radios de las circunferencias inscritas en estos triángulos son iguales. Demostrar que el cuadrilátero dado es un rombo.

II.224. Las diagonales de un cuadrilátero lo parten en cuatro triángulos de perímetro igual. Demostrar que el cuadrilátero dado es un rombo.

II.225. Se sabe que en el cuadrilátero $ABCD$ los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC, BCD, CDA, DAB son iguales. Demostrar que $ABCD$ es un rectángulo.

II.226. En una circunferencia está inscrito el cuadrilátero $ABCD$. Supongamos que M es el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia que pasan por A y C, N es el punto de intersección de las tangentes trazadas por B y D, K es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos A y C del cuadrilátero, L es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos B y D. Demostrar que, si se cumple una de las afirmaciones: a) M pertenece a la recta BD, b) N pertenece a la recta AC, c) K se halla en BD, d) L se halla en

AC, entonces son ciertas las demás tres afirmaciones.

II.227. Demostrar que las cuatro rectas, cada una de las cuales pasa por los pies de dos perpendiculares bajadas desde el vértice de un cuadrilátero inscrito sobre los lados que no comprenden dicho vértice, concurren en un punto.

II.228. Supongamos que AB y CD son dos cuerdas de una circunferencia, M, el punto de intersección de las perpendiculares levantadas hacia AB en el punto A y hacia CD en el punto C, N es el punto de intersección de las perpendiculares levantadas hacia AB y CD en los puntos B y D. Demostrar que la recta MN pasa por el punto de intersección de BC y AD.

II.229. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Por los puntos A y B pasa una circunferencia de radio R. Otra circunferencia del mismo radio pasa por los puntos B y C. Sea M el segundo punto de intersección de estas circunferencias. Demostrar que los radios de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos AMD y CMD son iguales a R.

II.230. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Una circunferencia es tangente a las rectas AB y AD y corta BD en los puntos M y N. Demostrar que existe una circunferencia que pasa por M y N y tiene como tangentes las rectas CB y CD.

II.231. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Sobre la diagonal AC, como sobre diámetro, construyamos una circunferencia y designemos con M y N los puntos de intersección de las rectas AB y AD con esta circunferencia. Demostrar que las rectas BD, MN y la tangente a la circunferencia en el punto C se intersecan en un punto.

II.232. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia; O_1, O_2, O_3, O_4 son los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC, BCD, CDA, DAB, y H_1, H_2, H_3, H_4 son los puntos de intersección de las alturas de los mismos triángulos. Demostrar que $O_1O_2O_3O_4$ es un rectángulo y el cuadrilátero $H_1H_2H_3H_4$ es igual al cuadrilátero $ABCD$.

II.233. Se dan el triángulo ABC y el punto arbitrario D del plano. Demostrar que los puntos de intersección de las alturas de los triángulos ABD, BCD, CAD son los vértices de un triángulo equivalente al dado.

II.234. Demostrar que, si en un cuadrilátero se puede inscribir una circunferencia, entonces: a) las circunferencias inscritas en dos triángulos, en los cuales el cuadrilátero dado se divide por una diagonal, son tangentes una a otra; b) los puntos de tangencia de estas dos circunferencias con los lados del cuadrilátero son los vértices del cuadrilátero inscrito.

II.235. Demostrar que, si $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito, la suma de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC y ACD es igual a la suma de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos BCD y BDA.

* * *

II.236. *Teorema de Bretschneider* (teorema de los cosenos para el cuadrilátero). Sean a, b, c, d los lados sucesivos de un cuadrilátero; m

y n, sus diagonales; A y C, dos ángulos opuestos. Entonces se cumple la relación

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cos (A + C).$$

II.237. *Teorema de Tolomeo.* Sean a, b, c, d los lados sucesivos de un cuadrilátero inscrito y m y n, sus diagonales. Demostrar que $mn = ac + bd$.

II.238. Demostrar que, si ABC es un triángulo regular, M, un punto arbitrario del plano que no se encuentra en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, existirá un triángulo, cuyos lados son iguales a $|MA|$, $|MB|$ y $|MC|$ (*teorema de Pompeiu*). Hallar el ángulo de este triángulo que se sitúa frente al lado igual a $|MB|$, si $\angle AMC = \alpha$.

II.239. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito. Cuatro circunferencias α, β, γ y δ son tangentes a la circunferencia circunscrita alrededor del cuadrilátero $ABCD$ en los puntos A, B, C y D, respectivamente. Designemos con $t_{\alpha\beta}$ un segmento de la tangente a las circunferencias α y β, además, $t_{\alpha\beta}$ es un segmento de la tangente exterior común, si α y β tienen puntos de tangencia con la circunferencia dada de una manera igual (por dentro o por fuera), y es un segmento de la tangente interior común, si α y σ son tangentes a la circunferencia dada de maneras distintas (en forma análoga se determinan las magnitudes $t_{\beta\gamma}$, $t_{\alpha\delta}$, etc.). Demostrar que

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta} \qquad (*)$$

(*teorema generalizado de Tolomeo*).

II.240. Sean α, β, γ y δ cuatro circunferencias en el plano. Demostrar que, si se cumple la relación

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta}, \qquad (*)$$

donde $t_{\alpha\beta}$, etc. son segmentos de las tangentes exteriores o interiores comunes a las circunferencias α y β, etc.; además, para cualesquiera tres circunferencias se toman tres tangentes exteriores o una exterior y dos interiores, entonces las circunferencias α, β, γ y δ son tangentes a una circunferencia.

* * *

II.241. Las prolongaciones de los lados AB y DC de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en el punto K y las prolongaciones de los lados AD y BC, en el punto L; además, los segmentos BL y DK se intersecan. Demostrar que, si se cumple una de las tres relaciones $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, $|BK| + |BL| = |DK| + |DL|$, $|AK| + |CL| = |AL| + |CK|$, se cumplen también las dos otras.

II.242. Las prolongaciones de los lados AB y DC de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en el punto K y las prolongaciones de los lados AD y BC, en el punto L; además, los segmentos BL y DK se intersecan. Demostrar que, si se cumple una de las tres relaciones $|AD| + |DC| = |AB| + |CB|$, $|AK| + |CK| = |AL| + |CL|$, $|BK| + |DK| = |BL| + |DL|$, se cumplen también las dos otras.

II.243. Demostrar que, si existe una circunferencia que tiene como tangentes las rectas AB, BC, CD y DA, su centro y los puntos medios de AC y BD se hallan en una recta.

II.244. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito. La perpendicular respecto a BA, levantada desde el punto A, corta la recta CD en el punto M, la perpendicular hacia DA, levantada desde el punto A, corta la recta BC en el punto N. Demostrar que MN pasa por el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del cuadrilátero $ABCD$.

II.245. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito, E, un punto arbitrario de la recta AB, F, un punto arbitrario de la recta DC. La recta AF corta la circunferencia en el punto M, la recta DE, en el punto N. Demostrar que las rectas BC, EF y MN se intersecan en un punto o son paralelas.

II.246. Demostrar que los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero inscrito en sus lados, son vértices del cuadrilátero, en el cual se puede inscribir una circunferencia. Hallar el radio de esta circunferencia, si las diagonales del cuadrilátero inscrito son perpendiculares, el radio de la circunferencia dada es R y la distancia desde su centro hasta el punto de intersección de las diagonales es d.

II.247. Las diagonales de un cuadrilátero inscrito son perpendiculares. Demostrar que los puntos medios de sus lados y los pies de las perpendiculares bajadas sobre los lados desde el punto de intersección de las diagonales se encuentran en una circunferencia. Hallar el radio de esta circunferencia, si el de la circunferencia dada es R y la distancia desde su centro hasta el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero es d.

II.248. Demostrar que, si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia con radio R y simultáneamente está circunscrito alrededor de una circunferencia con radio r, siendo d la distancia entre centros de estas circunferencias, entonces se cumple la relación $\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=1/r^2$; al mismo tiempo existe un número infinitamente grande de cuadriláteros simultáneamente inscritos en una circunferencia mayor y circunscritos alrededor de una circunferencia menor (como uno de los vértices puede tomarse cualquier punto de la circunferencia mayor).

II.249. Un cuadrilátero convexo está dividido por las diagonales en cuatro triángulos. Demostrar que la recta que une los centros de masas de dos triángulos opuestos, es perpendicular a la que une los puntos de intersección de las alturas de los demás dos triángulos.

II.250. Supongamos que $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito, M y N son los puntos medios de AC y BD. Demostrar que, si BD es la bisectriz del ángulo ANC, también AC es la bisectriz del ángulo BMD.

II.251. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito. Los lados opuestos AB y CD, al ser prolongados, se cortan en el punto K y los lados BC y AD, en el punto L. Demostrar que las bisectrices de los ángulos BKC y BLA son perpendiculares y se intersecan en la recta que une los puntos medios de los lados AC y BD.

II.252. Las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares. Demostrar que cuatro rectas, cada una de las cuales une uno de los vértices del cuadrilátero y el centro de la circunferencia que pasa por este vértice y dos vértices adyacentes a éste del cuadrilátero, se cortan en un punto.

II.253. Sean P, Q y M, respectivamente, los puntos de intersección de las diagonales de un cuadrilátero inscrito y de las prolongaciones de sus lados opuestos. Demostrar que el punto de intersección de las alturas del triángulo PQM coincide con el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del cuadrilátero dado (*teorema de Brocard*).

II.254. Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito, K, el punto de intersección de las rectas AB y CD, L, el punto de intersección de las rectas AD y BC. Demostrar que el punto de intersección de las alturas del triángulo formado por las rectas KL, AC y BD coincide con el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero $ABCD$.

II.255. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo; $\angle ABC = \angle ADC$; M y N son los pies de las perpendiculares bajadas desde A sobre BC y CD, respectivamente, K, el punto de intersección de las rectas MD y NB. Demostrar que las rectas AK y MN son perpendiculares.

* * *

II.256. Demostrar que cuatro circunferencias circunscritas alrededor de cuatro triángulos formados por cuatro rectas que se intersecan y pertenecen a un plano, tienen un punto común (*punto de Michell*).

II.257. Demostrar que los centros de cuatro circunferencias circunscritas alrededor de cuatro triángulos formados por cuatro rectas que se intersecan, pertenecientes a un plano, se hallan en una circunferencia.

II.258. Se dan cuatro rectas que se intersecan dos a dos. Sea M el punto de Michell correspondiente a estas rectas (véase el problema II.256). Demostrar que, si cuatro de los seis puntos de intersección dos a dos de las rectas dadas se hallan en la circunferencia con el centro en O, entonces la recta que pasa por dos puntos restantes, contiene el punto M y es perpendicular a la recta OM.

II.259. Cuatro rectas que se intersecan dos a dos, forman cuatro triángulos. Demostrar que, si una recta es paralela a la recta de Euler (véase el problema II.147) del triángulo formado por tres otras rectas, tiene esta misma propiedad cualquier otra recta.

II.260. Viene dado el triángulo ABC. Una recta corta las rectas AB, BC y CA, respectivamente, en los puntos D, E y F. Las rectas DC, AE y BF forman el triángulo KLM. Demostrar que las circunferencias construidas sobre DC, AE y BF usándolas como diámetros, concurren en dos puntos P y N (se supone que estas circunferencias se intersecan dos a dos); además, la recta PN pasa por el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo KLM, así como por los puntos de intersección de las alturas de los triángulos ABC, BDE, DAF y CEF.

II.261. Viene dado el triángulo ABC. Una recta arbitraria corta las rectas AB, BC y CA, respectivamente, en los puntos D, E y F. Demostrar que los puntos de intersección de las alturas de los triángulos ABC, BDE, DAF y CEF se hallan en una recta perpendicular a la recta de Gauss (véase el problema II.53).

II.262. Demostrar que las mediatrices levantadas hacia los segmentos que unen los puntos de intersección de las alturas y los centros de las circunferencias circunscritas de cuatro triángulos formados por cuatro rectas arbitrarias de un plano, concurren en un punto (*punto de Hervé*).

II.263. Examinemos dieciséis puntos que son centros de todas las posibles circunferencias inscritas y exinscritas para cuatro triángulos formados por cuatro rectas que se intersecan, pertenecientes a un plano. Demostrar que estos dieciséis puntos pueden dividirse en cuatro cuaternas empleando dos procedimientos de manera que cada cuaterna quedará en una circunferencia. Al emplear el primer procedimiento, los centros de estas circunferencias quedarán en una recta y al hacer uso del segundo, en otra recta. Estas rectas son perpendiculares y se intersecan en el punto de Michell que es el punto común de las circunferencias circunscritas alrededor de cuatro triángulos.

§ 6. Circunferencias y tangentes. Teorema de Feuerbach

II.264. En una recta se sitúan sucesivamente los puntos A, B, C y D de manera que $|BC| = 2|AB|$, $|CD| = |AC|$. Una circunferencia pasa por los puntos A y C, mientras que la otra, por los puntos B y D. Demostrar que la cuerda común de estas circunferencias divide el segmento AC por la mitad.

II.265. Sea B un punto del segmento AC. La figura limitada por los arcos de tres semicircunferencias con diámetros AB, BC y CA, dispuestas a un lado de la recta AC, lleva el nombre la *cuchilla de zapatero* o *arbelos de Arquímedes*. Demostrar que los radios de dos circunferencias, cada una de las cuales es tangente a dos semicircunferencias y la recta que es perpendicular a AC y pasa por B, son iguales entre sí (*problema de Arquímedes*).

II.266. Cada una de tres circunferencias pasa por dos puntos dados de un plano. Sean O_1, O_2, O_3 sus centros. La recta que pasa por uno de los puntos común a todas las tres circunferencias, las corta por segunda vez en los puntos A_1, A_2, A_3, respectivamente. Demostrar que $|A_1A_2| : |A_2A_3| = |O_1O_2| : : |O_2O_3|$.

II.267. Se dan dos circunferencias que no se intersecan. Demostrar que cuatro puntos de tangencia de las tangentes exteriores comunes a estas circunferencias se hallan en una circunferencia; de la misma manera, cuatro puntos de tangencia de las tangentes interiores comunes se hallan en una circunferencia y cuatro puntos de intersección de las tangentes interiores comunes con las tangentes exteriores comunes se hallan en una tercera circunferencia; además, las tres circunferencias son concéntricas.

II.268. Se dan dos circunferencias que no se intersecan. Una tercera circunferencia es tangente exterior a ambas y tiene el centro en una recta que pasa por los centros de las dadas. Demostrar que la tercera circunferencia corta las tangentes interiores comunes a las circunferencias dadas en cuatro puntos que forman un cuadrilátero, cuyos dos lados son paralelos a las tangentes exteriores comunes a las circunferencias dadas.

II.269. Se dan dos circunferencias. Por el centro de una de éstas está trazada una recta que corta esta circunferencia en los puntos A y C, intersecando la otra circunferencia en los puntos B y D. Demostrar que, si $|AB| : |BC| = |AD| : |DC|$, las circunferencias son perpendiculares, es decir, el ángulo entre las tangentes a éstas en el punto de su intersección es recto.

II.270. Los puntos A, B, C y D se hallan en una circunferencia o en una recta; por los puntos A y B, B y C, C y D, D y A están trazadas cuatro circunferencias. Designemos con B_1, C_1, D_1 y A_1 los puntos de intersección (distintos de A, B, C y D) de las circunferencias primera y segunda, segunda y tercera, tercera y cuarta, cuarta y primera, respectivamente. Demostrar que los puntos A_1, B_1, C_1 y D_1 se encuentran en una circunferencia (o una recta).

II.271 Supongamos que a partir del punto A, tomado fuera de una circunferencia, están trazadas dos tangentes AM y AN a la circunferencia (M y N son dos puntos de tangencia) y dos secantes y que P y Q son los puntos de intersección de la circunferencia con la primera secante, mientras que K y L son los puntos de intersección con la segunda. Demostrar que las rectas PK, QL y MN se cortan en un punto o son paralelas.

Obtener de aquí el método de construcción de una tangente a la circunferencia dada que pasa por el punto dado, usando una regla.

II.272. Se da una circunferencia con el centro O y el punto A. Sea B un punto arbitrario de la circunferencia. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las tangentes a la circunferencia en el punto B con la recta que pasa por O perpendicularmente a AB.

II.273. Se dan una circunferencia y dos puntos A y B en ésta. Sea N un punto arbitrario de la recta AB. Construyamos dos circunferencias, cada una de las cuales pasa por el punto N y es tangente a la dada: una, en el punto A y la otra, en el punto B. Designemos con M el segundo punto de intersección de estas circunferencias. Hallar el lugar geométrico de puntos M.

II.274. Por el punto fijo A, situado en el interior de una circunferencia, están trazadas dos cuerdas arbitrarias PQ y KL. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas PK y QL.

II.275. Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Una recta arbitraria pasa por B y corta por segunda vez la primera circunferencia en el punto C y la segunda, en el punto D. Las tangentes a la primera circunferencia en C y a la segunda en D se cortan en el punto M. Por el punto de intersección de AM y CD pasa una recta paralela a CM, que corta AC en el punto K. Demostrar que KB es tangente a la segunda circunferencia.

II.276. Se dan una circunferencia y la tangente a ésta l. Sea N el punto de tangencia, NM, el diámetro. En la recta NM se toma el punto fijo A. Examinemos una circunferencia arbitraria que pasa por A con el centro en l. Supongamos que C y D son los puntos de intersección de esta circunferencia con l, mientras que P y Q, los puntos de intersección de las rectas MC y MD con la circunferencia dada. Demostrar que la cuerda PQ pasa por el punto fijo del plano.

II.277. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de dos circunferencias que se intersecan, A es uno de los puntos de su intersección. Las circunferencias tienen dos tangentes comunes; BC y EF son cuerdas de estas circunferencias con extremos en los puntos de tangencia (C y F son los puntos más alejados respecto de A), M y N son los puntos medios de BC y EF. Demostrar que $\angle O_1AO_2 = \angle MAN = 2\angle CAE$.

II.278. En una circunferencia está trazado el diámetro AB y la cuerda CD, perpendicular a AB. Una circunferencia arbitraria toca la cuerda CD y el arco CBD. Demostrar que la tangente a esta circunferencia trazada a partir del punto A es igual a AC.

II.279. Se da un segmento circular. Dos circunferencias arbitrarias son tangentes a la cuerda y el arco de este segmento y se intersecan en los puntos M y N. Demostrar que la recta MN pasa por un punto fijo del plano.

* * *

II.280. Se dan dos círculos iguales que no se intersecan. En dos tangentes interiores comunes se toman dos puntos arbitrarios F y F'. Además, desde ambos puntos se puede trazar sendas tangentes a los círculos dados. Supongamos que las tangentes trazadas a partir de los puntos F y F' hacia uno de los círculos concurren en el punto A y las trazadas hacia el otro, en el punto B. Hay que demostrar que: 1) la recta AB es paralela a la recta que une los centros de los círculos (en caso de círculos desiguales ésta pasa por el punto de intersección de las tangentes exteriores); 2) la recta que une los puntos medios de FF' y AB, pasa por el punto medio del segmento que une los centros de los círculos. (Este problema fue propuesto a los lectores de la revista «Boletín de física experimental y matemáticas elementales» por el profesor V. Yermakov. Este boletín se editaba en Rusia en el siglo pasado. El problema se publicó en el número 14 (2°) de la revista del año 1887. Por la solución del problema se prometió un premio a los lectores: un conjunto de libros de matemáticas.)

II.281. Se dan tres circunferencias α, β y γ. Supongamos que l_1 y l_2 son tangentes interiores comunes a las circunferencias α y β, m_1 y m_2, tangentes interiores comunes a las circunferencias β y γ, n_1 y n_2, tangentes interiores comunes a las circunferencias γ y α. Demostrar que, si las rectas l_1, m_1 y n_1 se cortan en un punto, las rectas l_2, m_2 y n_2 también se cortan en un punto.

II.282. El arco AB de una circunferencia está dividido en tres partes iguales mediante los puntos C y D (C es el punto más próximo a A). Después de girar alrededor de A a un ángulo $\pi/3$, los puntos B, C y D pasarán, respectivamente, a los puntos B_1, C_1 y D_1; F es el punto de intersección de las rectas AB_1 y DC_1; E, un punto tal en la bisectriz del ángulo B_1BA, que $|BD| = |DE|$. Demostrar que el triángulo CEF es regular (*teorema de Finlay*).

*

* *

II.283. Se dan un ángulo con el vértice A y la circunferencia inscrita en éste. Una recta arbitraria, tangente a la circunferencia dada, corta los lados del ángulo en los puntos B y C. Demostrar que la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, contacta con la circunferencia fija inscrita en el ángulo dado.

II.284. En el lado AC del triángulo ABC se toma el punto D. Examinemos una circunferencia que es tangente al segmento AD en el punto M, al segmento BD y la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC. Demostrar que la recta que pasa por M paralelamente a BD, es tangente a la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

II.285. En el lado AC del triángulo ABC se toma el punto D. Supongamos que O_1 es el centro de una circunferencia tangente a los segmentos AD, BD y a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo ABC, mientras que O_2 es el centro de una circunferencia tangente a los segmentos CD, BD y a la circunferencia circunscrita. Demostrar que la recta O_1O_2 pasa por el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC— el punto O—; además, $|O_1O| : |OO_2| = \operatorname{tg}^2 (\varphi/2)$, donde $\varphi = \angle BDA$ (*teorema de Victor Thebault*).

II.286. Cada una de las cuatro circunferencias toca interiormente la circunferencia dada y dos cuerdas suyas que se intersecan. Demostrar que las diagonales del cuadrilátero con vértices en los centros de estas circunferencias son mutuamente perpendiculares.

* * *

II.287. Demostrar que la circunferencia de los nueve puntos (véase el problema II.160) es tangente a la circunferencia inscrita en un triángulo y a todas las circunferencias exinscritas (*teorema de Feuerbach*).

II.288. Sea H el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC. Demostrar que la circunferencia de los nueve puntos es tangente a todas las circunferencias inscritas y exinscritas de los triángulos AHB, BHC, CHA.

II.289. Demostrar que el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero con vértices en los puntos, en los que la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC toca las circunferencias inscrita y exinscritas de este triángulo, se halla en su línea media.

II.290. Designemos con F, F_a, F_b y F_c los puntos, en los cuales la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC toca la circunferencia inscrita y tres circunferencias exinscritas (F_a es el punto de tangencia con la circunferencia, cuyo centro es I_a, etc.). Supongamos también que A_1 y A_2, B_1 y B_2, C_1 y C_2 son los puntos, en los que las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores A, B y C, respectivamente, intersecan los lados opuestos. Demostrar la semejanza de los triángulos siguientes: $\triangle F_aF_bF_c$ y $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle FF_bF_c$ y $\triangle A_1B_2C_2$, $\triangle FF_cF_a$ y $\triangle B_1C_2A_2$, $\triangle FF_aF_b$ y $\triangle C_1A_2B_2$ (*teorema de Victor Thebault*).

§ 7. Combinaciones de figuras. Desplazamientos por el plano. Polígonos

II.291. Sobre los lados BC, CA y AB del triángulo ABC hacia el exterior están construidos los cuadrados $BCDE$, $ACFG$, $BAHK$. Sean $FCDQ$ y $ENKP$ dos paralelogramos. Demostrar que el triángulo APQ es rectángulo e isósceles.

II.292. Supongamos que $ABCD$ es un rectángulo, E es un punto tomado en BC, F, en DC; E_1 es el punto medio de AE_1, F_1, el punto medio de AF. Demostrar que, si $\triangle AEF$ es regular, los triángulos DE_1C y BF_1C lo son también.

II.293. Sobre los catetos AC y BC de un triángulo rectángulo hacia el exterior están construidos los cuadrados $ACKL$ y $BCMN$. Demostrar que el cuadrilátero acotado por los catetos y las rectas LB y NA es equivalente al triángulo formado por las rectas LB, NA y la hipotenusa AB.

II.294. Sobre los lados de un cuadrilátero convexo hacia el exterior están construidos sendos cuadrados. Demostrar que, si las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares, los segmentos que unen los centros de los cuadrados opuestos, pasan por el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero.

II.295. Demostrar que si los centros de los cuadrados, construidos sobre los lados de un triángulo dado hacia el exterior, sirven como vértices del triángulo, cuya área es dos veces mayor que la del dado, los centros de los cuadrados, construidos sobre los lados del triángulo hacia el interior de éste, se hallan en una recta.

II.296. Sobre los lados BC, CA y AB del triángulo ABC hacia el exterior están construidos los triángulos A_1BC, B_1CA y C_1AB de manera que $\angle A_1BC = \angle C_1BA$, $\angle C_1AB = \angle B_1AC$, $\angle B_1CA = \angle A_1CB$. Demostrar que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 se cortan en un punto.

II.297. Supongamos que ABC es un triángulo isósceles ($|AB| = |BC|$); BD es su altura. Un círculo de radio BD rueda por la recta AC. Demostrar que mientras el vértice B se encuentre en el interior del círculo, el arco de la circunferencia dispuesto en el interior del triángulo tiene una longitud constante.

II.298. Por dos rectas que se intersecan, con velocidades iguales se mueven dos puntos. Demostrar que existirá un punto fijo del plano tal que en todos los momentos de tiempo será equidistante de éstos.

II.299. Dos ciclistas avanzan por dos circunferencias que se intersecan. Cada uno sigue su propia circunferencia con una velocidad constante. Al salir simultáneamente del punto, en el que se intersecan las circunferencias, y al dar sendas vueltas, los ciclistas se encuentran de nuevo en este punto. Demostrar que existe un punto inmóvil tal, en cuyo caso las distancias del mismo hasta los ciclistas siempre son iguales, si estos se mueven: a) en una misma dirección (en sentido de las agujas del reloj); b) en direcciones opuestas.

II.300. Demostrar que: a) el giro alrededor de un punto O en un ángulo α equivale al empleo sucesivo de dos representaciones simétricas axiales, cuyos ejes pasan por el punto O, y el ángulo entre los ejes es $\alpha/2$, mientras que la traslación paralela equivale a dos simetrías axiales con ejes paralelos; b) dos giros sucesivos alrededor del punto O_1 en un ángulo α y alrededor del punto O_2 en un ángulo β ($0 \leqslant \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \beta < 2\pi$, los giros se hacen en una misma dirección) equivalen a un giro en el ángulo $\alpha + \beta$ alrededor de cierto punto O, si $\alpha + \beta \neq 2\pi$. Hallar los ángulos del triángulo O_1O_2O.

II.301. Sobre los lados del triángulo arbitrario como sobre bases están construidos tres triángulos isósceles AKB, BLC, CMA con los ángulos en los vértices K, L y M iguales a α, β y γ, $\alpha + \beta + \gamma + 2\pi$. Al mismo tiempo, los tres triángulos están dispuestos fuera del triángulo ABC o bien en su interior. Demostrar que los ángulos del triángulo KLM son iguales a $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$.

II.302. Supongamos que $ABCDEF$ es un hexágono inscrito, en el cual $|AB| = |CD| = |EF| = R$, donde R es el radio de la circunferencia y O es su centro. Demostrar que los puntos de las intersecciones dos a dos de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos BOC, DOE, FOA, distintos de O, sirven de vértices para un triángulo regular con el lado R.

II.303. Sobre los lados de un cuadrilátero convexo hacia el exterior están construidos sendos rombos, cuyo ángulo agudo es igual a α. Al mismo tiempo, los ángulos de dos rombos, adyacentes a un mismo vértice del cuadrilátero, son iguales. Demostrar que los segmentos, que unen los centros de los rombos opuestos, son iguales y el ángulo agudo entre estos segmentos es igual a α.

II.304. Viene dado un triángulo arbitrario. Sobre sus lados, fuera del triángulo, están construidos sendos triángulos equiláteros, cuyos centros sirven de vértices para el triángulo Δ. Los centros de los triángulos equiláteros, construidos sobre los lados del triángulo de partida hacia el interior de éste, sirven como vértices para otro triángulo δ. Demostrar que: a) los triángulos Δ y δ son equiláteros; b) los centros de los triángulos Δ y δ coinciden con el centro de masas del triángulo inicial; c) la diferencia de las áreas de los triángulos Δ y δ es igual a la del triángulo de partida.

II.305. En el plano se dan tres puntos. Por éstos están trazadas tres rectas que forman un triángulo regular. Hallar el lugar geométrico de los centros de estos triángulos.

II.306. Se da un triángulo ABC. En la recta que pasa por el vértice A y es perpendicular al lado BC, se toman dos puntos A_1 y A

de modo que $|AA_1| = |AA_2| = |BC|$ (A_1 es más próximo a la recta BC que A_2). De manera análoga, en la recta perpendicular a AC, que pasa por B, se toman los puntos B_1 y B_2 de modo que $|BB_1| = |BB_2| = |AC|$. Demostrar que los segmentos A_1B_2 y A_2B_1 son iguales y mutuamente perpendiculares.

* * *

II.307. Demostrar que un polígono circunscrito, con todos los lados iguales, es regular, si el número de sus lados es impar.

II.308. Por el centro de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia unitaria, está trazada una recta. Hallar la suma de los cuadrados de las distancias desde los vértices del polígono de n lados hasta esta recta.

II.309. Demostrar que la suma de las distancias desde un punto arbitrario tomado en el interior de un polígono convexo hasta sus lados es constante, si: a) todos los lados del polígono son iguales; b) todos los ángulos del polígono son iguales.

II.310. Una semicircunferencia está dividida por los puntos $A_0, A_1, \ldots, A_{2n+1}$ en $2n + 1$ arcos iguales (A_0 y A_{2n+1} son los extremos de la semicircunferencia), O es el centro de la semicircunferencia. Demostrar que las rectas $A_1A_{2n}, A_2A_{2n-1}, \ldots, A_nA_{n+1}$ forman al intersecarse con las rectas OA_n y OA_{n+1} unos segmentos, la suma de cuyas longitudes es igual al radio de la circunferencia.

II.311. Demostrar que si a partir de un punto arbitrario de una circunferencia se bajan perpendiculares sobre los lados de un polígono inscrito de $2n$ lados, los productos de las longitudes de estas perpendiculares, tomando una sí y otra no, serán iguales.

II.312. Sea $A_1A_2 \ldots A_n$ un polígono inscrito; el centro de la circunferencia se halla en el interior del polígono. Un sistema de circunferencias toca interiormente la dada en los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$; además, uno de los puntos de intersección de dos circunferencias vecinas se encuentra en el lado correspondiente del polígono. Demostrar que si n es impar, todas las circunferencias tienen radios iguales. La longitud de la frontera exterior de la unión de circunferencias inscritas es igual a la longitud de la circunferencia dada.

II.313. Examinemos una circunferencia, en la cual está inscrito un polígono de $(2n + 1)$ lados $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$. Sea A un punto arbitrario del arco A_1A_{2n+1}.

a) Demostrar que la suma de las distancias desde A hasta los vértices con números pares es igual a la suma de las distancias desde A hasta los vértices con números impares.

b) Construyamos circunferencias iguales que sean tangentes a la dada de manera igual en los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$. Demostrar que la suma de las tangentes trazadas desde A hacia las circunferencias que tienen contacto con la dada en los vértices con números pares, es igual a la suma de las tangentes trazadas a las circunferencias que tienen contacto con la dada en los vértices con números impares.

II.314. a) A una circunferencia dada están trazadas dos tangentes. Sean A y B los puntos de tangencia, C, el punto de intersección de las tangentes. Tracemos una recta arbitraria l, tangente a la circunferencia dada, que no pasa por A y B. Sean u y v las distancias desde A y B hasta l; w, la distancia desde C hasta l. Hallar uv/w^2, si $\angle ACB = \alpha$.

b) Alrededor de una circunferencia está circunscrito un polígono. Sea l una recta arbitraria tangente a la circunferencia, que no coincide con ninguno de los lados del polígono. Demostrar que la razón entre el producto de las distancias desde los vértices del polígono hasta l y el producto de las distancias desde los puntos, en los que los lados del polígono contactan con la circunferencia, hasta l no depende de la posición ocupada por la recta l.

c) Sea $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ un polígono de $2n$ lados circunscrito alrededor de una circunferencia, y l, una tangente arbitraria a la circunferencia. Demostrar que el producto de las distancias desde los vértices con números impares hasta l y el producto de distancias desde los vértices con números pares hasta l se encuentran en razón constante que no depende de l (se supone que l no contiene los vértices del polígono).

II.315. En un polígono inscrito están trazadas las diagonales que no se intersecan, sino que lo dividen en triángulos. Demostrar que la suma de radios de las circunferencias inscritas en estos triángulos no depende de la manera de trazar las diagonales.

II.316. Supongamos que $A_1A_2 \ldots A_n$ es un polígono de perímetro $2p$ circunscrito alrededor de una circunferencia con radio r; $B_1, B_2, \ldots, B_n$, respectivamente, son los puntos de tangencia de los lados A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 con la circunferencia; M es un punto que se encuentra a la distancia d del centro de la circunferencia. Demostrar que

$$|MB_1|^2 \cdot |A_1A_2| + |MB_2|^2 \cdot |A_2A_3| + \\ + \ldots + |MB_n|^2 \cdot |A_nA_1| = 2p\,(r^2 + d^2).$$

II.317. Supongamos que $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito, M, un punto arbitrario de la circunferencia. Demostrar que las proyecciones del punto M sobre las rectas de Simson (véase el problema II.153) que corresponden al punto M respecto a los triángulos ABC, BCD, CDA y DAB se hallan en una recta (*recta de Simson del cuadrilátero*).

Luego, por inducción determinemos la recta de Simson del polígono de $(n + 1)$ lados haciendo uso de la recta de Simson del polígono de n lados, a saber, para el polígono de $(n + 1)$ lados inscrito arbitrario y el punto M en la circunferencia, las proyecciones de este punto sobre todas las rectas de Simson posibles de este punto respecto a todos los polígonos de n lados posibles, formados por n vértices de este polígono de $(n + 1)$ lados, se hallan en una recta que es la recta de Simson del polígono de $(n + 1)$ lados.

II.318. En el interior de la circunferencia α se halla la circunferencia β. En la circunferencia α se dan dos sucesiones de puntos: A_1, A_2, A_3 . . . y B_1, B_2, B_3 . . ., que siguen en una misma dirección, y tales que las rectas A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 . . . y B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 . . . son tangentes a la circunferencia β. Demostrar que las rectas A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 . . . son tangentes a una circunferencia, cuyo centro se encuentra en la recta que pasa por los centros de las circunferencias α y β.

II.319. Aprovechando el resultado del problema anterior, demostrar la afirmación siguiente (*teorema de Poncelet*). Si existe un polígono de n lados inscrito en cierta circunferencia α y circunscrito alrededor de otra circunferencia β, existirá un número infinitamente grande de polígonos de n lados inscritos en la circunferencia α y circunscritos alrededor de la circunferencia β; además, por uno de los vértices de semejante polígono de n lados se puede tomar cualquier punto de la circunferencia α.

II.320. Sobre los lados del triángulo regular PQR como sobre bases, hacia el exterior del mismo, están construidos los triángulos isósceles PXQ, QYR y RZP; además, $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle A)$, $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle B)$, $RZP = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle C)$, donde A, B, C son ángulos de cierto triángulo ABC. Sea A_0 el punto de intersección de las rectas ZP e YQ; B_0, el punto de intersección de las rectas XQ y ZR; C_0, el punto de intersección de las rectas YR y XP. Demostrar que los ángulos del triángulo $A_0B_0C_0$ son iguales a los ángulos correspondientes del triángulo ABC.

Aprovechando el resultado obtenido, demostrar *el teorema de Morley* que reza: si los ángulos de un triángulo arbitrario están divididos en tres partes iguales cada uno (las rectas obtenidas se llaman *trisectrices*), entonces tres puntos que son los puntos de intersección de pares de trisectrices adyacentes a los lados correspondientes del triángulo, son los vértices del triángulo regular.

II.321. Consideremos que los vértices del triángulo ABC siguen uno tras otro en orden positivo, o sea, en sentido contrario a las agujas del reloj. Para cualesquiera dos rayos α y β designemos con el símbolo $\widehat{(\alpha, \beta)}$ el ángulo, en que hace falta girar el rayo α en sentido contrario a las agujas del reloj para que coincida con el rayo β. Designemos con α_1 y α_1' dos rayos que parten desde A, para los cuales $\widehat{(AB, \alpha_1)} = \widehat{(\alpha_1, \alpha_1')} = \widehat{(\alpha_1', AC)} = \frac{1}{3}\angle A$, α_2 y α_2' son rayos, para los cuales $\widehat{(AB, \alpha_2)} = \widehat{(\alpha_2, \alpha_2')} = \widehat{(\alpha_2', AC)} = \frac{1}{3}(\angle A + 2\pi)$ y, por fin, α_3 y α_3' son rayos, para los cuales $\widehat{(AB, \alpha_3)} = \widehat{(\alpha_3, \alpha_3')} = \widehat{(\alpha_3', AC)} = \frac{1}{3}(\angle A + 4\pi)$ (α_i, α_i', donde $i = 1, 2, 3$, respectivamente, los llamaremos *trisectrices de prime-*

ro, segundo y tercer géneros). De la misma manera, para los vértices B y C determinemos β_j, β'_j y γ_k, γ'_k ($j, k = 1, 2, 3$). Designemos con $\alpha_i\beta_j\gamma_k$ el triángulo formado al cortarse las rectas (no los rayos) α_i y β'_j, β_j y γ'_k, γ_k y α'_i. Demostrar que para todos i, j, k tales, que $i + j + k - 1$ no es múltiple de tres, los triángulos $\alpha_i\beta_j\gamma_k$ son regulares, sus lados son correspondientemente paralelos y los vértices se sitúan en las nueve rectas, seis en cada recta (*teorema completo de Morley*).

§ 8. Desigualdades geométricas. Problemas del máximo y del mínimo

II.322. Al principio del siglo XIX, el geómetra italiano Malfatti planteó el problema siguiente: de un triángulo dado hay que cortar tres círculos de tal manera que la suma de sus áreas sea máxima. En las investigaciones posteriores, por *circunferencias de Malfatti* se entendían tres circunferencias que se tocan dos a dos, y cada una de las cuales es tangente también a dos lados del triángulo dado. Demostrar que para el triángulo regular las circunferencias de Malfatti no dan la solución del problema inicial. (Sólo a mediados del siglo XX fue establecido que las circunferencias de Malfatti no dan la solución del problema inicial, cualquiera que sea el triángulo).

II.323. Demostrar que $p \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{6Rr}$, donde p es el semiperímetro, r y R los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo.

II.324. Demostrar que el perímetro del triángulo, cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo acutángulo dado, no supera la mitad del perímetro del triángulo dado.

II.325. Demostrar que si el triángulo, formado por las medianas del triángulo dado, es obtusángulo, el ángulo menor del triángulo de partida es inferior a $45°$.

II.326. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Demostrar que por lo menos uno de los cuatro ángulos BAC, DBC, ACD, BDA no supera $\pi/4$.

II.327. Demostrar que la mediana trazada al lado mayor del triángulo forma con los lados que la comprenden, ángulos, la magnitud de cada uno de los cuales no es menor que la mitad del ángulo mínimo del triángulo.

II.328. Demostrar que si en el triángulo ABC el ángulo B es obtuso y $|AB| = |AC|/2$, entonces $\angle C > \angle A/2$.

II.329. Demostrar que la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo no puede pasar por el centro de la circunferencia exinscrita.

II.330. En un triángulo, del vértice A parten la mediana, la bisectriz y la altura. ¿Qué ángulo es mayor: entre la mediana y la bisectriz o entre la bisectriz y la altura, si se da el ángulo A?

II.331. Demostrar que, si las medianas que parten de los vértices B y C del triángulo ABC son perpendiculares, entonces $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \quad 2/3$.

II.332. En el triángulo ABC, $|AB| <$

$< |BC|$. Demostrar que para el punto arbitrario M tomado en la mediana que parte del vértice B, $\angle BAM > \angle BCM$.

II.333. Desde el punto exterior A hacia la circunferencia están trazadas dos tangentes AB y AC y sus puntos medios D y E están unidos mediante la recta DE. Demostrar que esta recta no corta la circunferencia.

II.334. Demostrar que si la recta no corta la circunferencia, entonces para cualesquiera dos puntos de la recta la distancia entre éstos está comprendida entre la suma y la diferencia de longitudes de las tangentes trazadas por estos puntos hacia la circunferencia. Demostrar la afirmación inversa: si para dos puntos cualesquiera de la recta la afirmación no se cumple, entonces la recta corta la circunferencia.

II.335. En el triángulo ABC, los ángulos están ligados mediante la relación $3\angle A - \angle C < \pi$. El ángulo B está dividido en cuatro partes iguales por las rectas que cortan el lado AC. Demostrar que el tercero de los segmentos, en los cuales está partido el lado AC, contando desde el vértice A, es menor de $|AC|/4$.

II.336. Sean a, b, c, d los lados sucesivos de un cuadrilátero. Demostrar que si S es su área, entonces $S \leqslant (ac + bd)/2$; además, la igualdad es válida sólo para el cuadrilátero inscrito, cuyas diagonales son perpendiculares.

II.337. Demostrar que si las longitudes de las bisectrices del triángulo son menores que 1, entonces su área es menor de $\sqrt{3}/3$.

II.338. Demostrar que un triángulo será acutángulo, rectángulo u obtusángulo, según que sea positiva, igual a cero o negativa la expresión $a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2$ (a, b, c, son los lados del triángulo, R, el radio del círculo circunscrito).

II.339. Demostrar que un triángulo será acutángulo, rectángulo u obtusángulo según que su semiperímetro sea mayor, igual o menor, respectivamente, que la suma del diámetro del círculo circunscrito y del radio del inscrito.

II.340. Demostrar que si las longitudes de los lados del triángulo están ligadas mediante la desigualdad $a^2 + b^2 > 5c^2$, c es el menor de los lados.

II.341. En el triángulo ABC, el ángulo B tiene magnitud media: $\angle A < \angle B < \angle C$, I es el centro de la circunferencia inscrita, O, el centro de la circunferencia circunscrita, H, el punto de intersección de las alturas. Demostrar que I se halla en el interior del triángulo BOH.

II.342. Dos triángulos ABC y AMC están dispuestos de tal manera que MC corta AB en el punto O; además, $|AM| + |MC| = |AB| + |BC|$. Demostrar que si $|AB| = |BC|$, entonces $|OB| > |OM|$.

II.343. En el triángulo ABC el punto M se halla en el lado BC. Demostrar que $(|AM| - |AC|)\,|BC| \leqslant (|AB| - |AC|)\,|MC|$.

II.344. Sean a, b, c los lados del triángulo ABC; M, un punto arbitrario del plano. Hallar el mínimo de la expresión: $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2$.

II.345. Los lados del ángulo igual a α son las barandas de la mesa de billar. ¿Qué número máximo de rebotes de las barandas puede hacer una bola de billar (se puede prescindir de las dimensiones de la bola)?

II.346. En los vértices de un cuadrado con el lado igual a 2 km están dispuestos sendos pueblos. Estos últimos están unidos mediante caminos de manera que desde cada uno de ellos se puede ir a cualquier otro. ¿Podrá ser inferior a 5,5 km la longitud total de caminos?

II.347. El punto A está dispuesto entre dos rectas paralelas, a unas distancias a y b de ellas. Este sirve de vértice de un ángulo igual a α de todos los triángulos posibles, cuyos otros vértices se sitúan uno en cada una de las rectas dadas. Hallar el valor mínimo del área de semejantes triángulos.

II.348. Se da una circunferencia de radio R con el centro en el punto O. AB es su diámetro y el punto M se halla en el radio OA: además, $|AM| : |MO| = k$. Por el punto M está trazada una cuerda arbitraria CD. ¿A qué es igual el valor máximo del área del cuadrilátero $ACBD$?

II.349. Viene dado un ángulo con el vértice A y dos puntos M y N en su interior. Por M se traza una recta que corta los lados del ángulo en los puntos B y C. Demostrar que, para que el área del cuadrilátero $ABNC$ sea mínima, es necesario y suficiente que la recta BC corte AN en el punto P tal que

$|BP| = |MC|$. Dar un procedimiento de construcción de esta recta.

II.350. El vértice del ángulo α se halla en el punto O, A es un punto fijo en el interior del ángulo. En los lados del ángulo se toman los puntos M y N de tal manera que $\angle MAN = \beta$ $(\alpha + \beta < \pi)$. Demostrar que si $|AM| = |AN|$, el área del cuadrilátero $OMAN$ alcanzará el máximo (entre todos los cuadriláteros posibles que se obtienen al cambiar la posición de M y N).

II.351. Teniendo en cuenta el resultado del problema anterior, resolver el siguiente. En el interior de un ángulo con el vértice O se toma el punto A. La recta OA forma con los lados del ángulo los ángulos φ y ψ. Hallar en los lados del ángulo los puntos M y N tales que $\angle MAN = \beta$ $(\varphi + \psi + \beta < \pi)$ y el área del cuadrilátero $OMAN$ sea máxima.

II.352. Viene dado el triángulo OBC $(\angle BOC = \alpha)$. Para cada punto A en el lado BC determinemos los puntos M y N en OB y OC de manera que $\angle MAN = \beta$ $(\alpha + \beta < \pi)$ y el área del cuadrilátero $OMAN$ sea máxima. Demostrar que esta área máxima alcanza el mínimo para los puntos A, M y N tales, para los cuales $|MA| = |AN|$ y la recta MN es paralela a BC. (Semejantes puntos se encontrarán si los ángulos B y C del triángulo ABC no superan $\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}\Big)$.

II.353. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito. La diagonal AC es igual a a y forma los ángulos α y β con los lados AB y AD, respectivamente. Demostrar que el área del cuadrilátero está comprendida entre las magnitudes $\frac{a^2 \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \operatorname{sen}\beta}{2 \operatorname{sen}\alpha}$ y $\frac{a^2 \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \operatorname{sen}\alpha}{2 \operatorname{sen}\beta}$.

II.354. Se da el ángulo α con el vértice en el punto O y el punto A en su interior. Examinemos todos los cuadriláteros posibles $OMAN$, cuyos vértices M y N están dispuestos en los lados del ángulo, y tales que $\angle MAN = \beta$ $(\alpha + \beta > \pi)$. Demostrar que si entre estos cuadriláteros hay un cuadrilátero convexo tal que $|MA| = |AN|$, entonces este cuadrilátero tiene el área mínima entre todos los cuadriláteros examinados.

II.355. En el interior de un ángulo con vértice O se da el punto A tal que OA forma los ángulos φ y ψ con los lados del ángulo dado. Hallar en los lados del ángulo los puntos M y N tales que $\angle MAN = \beta$ $(\varphi + \psi + \beta > > \pi)$ y el área del cuadrilátero $OMAN$ sea mínima.

II.356. En el triángulo OBC, $\angle BOC = \alpha$; para cada punto A tomado en el lado BC determinemos los puntos M y N, respectivamente, en OB y OC de modo que $\angle MAN = = \beta$ y el área del cuadrilátero $OMAN$ sea mínima. Demostrar que esta área mínima será máxima para tales puntos A, M y N, para los cuales $|MA| = |AN|$ y la recta MN es paralela a BC. (Si semejante punto A no existe, el máximo se alcanzará al final del lado BC para el cuadrilátero degenerado.)

II.357. Hallar el radio del círculo de área máxima que pueda cubrirse totalmente con tres círculos de radio R. Resolver el problema para el caso general, cuando los radios son iguales a R_1, R_2, R_3.

II.358. ¿Es posible o no cubrir totalmente con tres cuadrados unitarios un cuadrado con el lado 5/4?

II.359. ¿A qué es igual el área máxima de un triángulo regular que puede cubrirse totalmente con tres triángulos regulares con el lado igual a 1?

II.360. En el triángulo ABC, en los lados AC y BC se toman los puntos M y N y en el segmento MN, el punto L. Supongamos que las áreas de los triángulos ABC, AML y BNL son iguales, respectivamente, a S, P y Q. Demostrar que $\sqrt[3]{S} \geqslant \sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}$.

II.361. Supongamos que a, b, c, S son, respectivamente, los lados y el área de un triángulo; α, β, γ, los ángulos de un otro triángulo. Demostrar que $a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma \geqslant 4S$; además, esta igualdad es válida sólo en el caso, en que ambos triángulos son semejantes.

II.362. Demostrar la desigualdad $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, donde a, b, c, S son, respectivamente, los lados y el área de un triángulo (*desigualdad de Finsler y Hadwiger*).

II.363. Se da un triángulo con los lados a, b y c. Determinar el área del mayor triángulo regular posible circunscrito alrededor del dado y el área del menor triángulo regular inscrito en el primero.

II.364. Sea M un punto arbitrario en el interior del triángulo ABC. La recta AM corta la circunferencia circunscrita alrededor del ABC en el punto A_1. Demostrar que $\frac{|BM|\cdot|CM|}{|A_1M|} \geqslant$ $\geqslant 2r$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita; además, la igualdad se obtiene cuando M coincide con el centro de la circunferencia inscrita.

II.365. Sea M un punto arbitrario en el interior del triángulo ABC. Demostrar que $|AM|$ sen $\angle BMC + |BM|$ sen $\angle AMC +$ $+ |CM|$ sen $\angle AMB \leqslant p$ (p es el semiperímetro del triángulo ABC) y la igualdad se logra cuando M coincide con el centro de la circunferencia inscrita.

II.366. Sean h_1, h_2, h_3 las alturas del triángulo ABC, y u, v, w, las distancias hasta los lados correspondientes desde el punto M que se encuentra en el interior del triángulo ABC. Demostrar las desigualdades:

a) $\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v} + \frac{h_3}{w} \geqslant 9$;

b) $h_1h_2h_3 \geqslant 27\ uvw$;

c) $(h_1 - u)(h_2 - v)(h_3 - w) \geqslant 8\ uvw$.

II.367. Supongamos que h es la longitud de la altura máxima de un triángulo no obtusángulo, R y r son, respectivamente, los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita. Demostrar que $R + r \leqslant h$ (*Erdös*).

II.368. Demostrar que el radio de la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo formado por las medianas de otro triángulo acutángulo, es superior a 5/6 partes del radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo de partida.

II.369. Demostrar que la suma de cuadrados de las distancias a partir de un punto arbitrario del plano hasta los lados de un triángulo toma el valor mínimo para tal punto señalado en el interior del triángulo, para el cual las distancias hasta los lados correspondientes son proporcionales a estos lados. Demostrar también que este punto es el punto de intersección de las simedianas (véase el problema II.171) del triángulo dado (*punto de Lemuan*).

II.370. En el triángulo dado todos los ángulos son menores de 120°. Demostrar que la suma de las distancias desde un punto arbitrario hasta los vértices de este triángulo toma el valor mínimo para tal punto en su interior, desde el cual cada lado del triángulo se ve bajo el ángulo de 120° (*punto de Torricelli*).

II.371. Demostrar que entre todos los triángulos inscritos en un triángulo acutángulo dado, el perímetro mínimo lo tiene aquel, cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo dado.

II.372. Demostrar que la suma de las distancias desde un punto tomado en el interior del triángulo hasta sus vértices no es menor de $6r$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita.

II.373. Para un triángulo arbitrario demostrar la desigualdad (las designaciones son corrientes) $\frac{bc\cos A}{b+c}+a<p<\frac{bc+a^2}{a}$.

II.374. Supongamos que K es el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero convexo $ABCD$, L, un punto en el lado AD

N, otro punto en el lado BC, M, un punto en la diagonal AC; además, KL y MN son paralelas a AB, LM es paralela a DC. Demostrar que $KLMN$ es un paralelogramo y su área es menor de 8/27 partes de la del cuadrilátero $ABCD$ (*teorema de Hattori*).

II.375. Dos triángulos tienen un lado común. Demostrar que la distancia entre los centros de las circunferencias inscritas en éstos es menor que la distancia entre los vértices que no coinciden (*problema de Zalgaller*).

II.376. En el triángulo ABC, los ángulos son iguales a α, β y γ. Otro triángulo DEF está circunscrito alrededor del triángulo ABC de modo que los vértices A, B y C se encuentran en los lados EF, FD y DE, respectivamente; además, $\angle ECA = \angle DBC = \angle FAB = \varphi$. Determinar el valor del ángulo φ, en cuyo caso el área del triángulo EFD es máxima.

II.377. En los lados BC, CA y AB del triángulo ABC se toman, respectivamente, los puntos A_1, B_1, C_1. Demostrar que el área del triángulo $A_1B_1C_1$ no es menor que el área por lo menos de uno de los tres triángulos: AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C.

II.378. Sean O, I, H, respectivamente, los centros de las circunferencias circunscrita, inscrita y el punto de intersección de las alturas de un triángulo determinado. Demostrar que $|OH| \geqslant |IH|\sqrt{2}$.

II.379. Supongamos que M es un punto arbitrario tomado en el interior del triángulo ABC; x, y y z son las distancias desde M hasta

A, B y C, respectivamente; u, v y w, las distancias desde M hasta los lados BC, CA y AB, respectivamente; a, b, c, los lados correspondientes del triángulo ABC; S es su área; R y r, los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita. Demostrar las desigualdades:

a) $ax + by + cz \geqslant 4S$;

b) $x + y + z \geqslant 2(u + v + w)$ (*desigualdad de Erdös*);

c) $xu + yv + zw \geqslant 2(uv + vw + wu)$;

d) $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leqslant \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$;

e) $xyz \geqslant \frac{R}{2r}(u+v)(v+w)(w+u)$;

f) $xyz \geqslant \frac{4R}{r} uvw$;

g) $xy + yz + zx \geqslant \frac{2R}{r}(uv + vw + wu)$.

II.380. En un triángulo dado tracemos la mediana hacia el lado mayor. Esta mediana divide el triángulo en dos. En cada uno de los triángulos obtenidos también tracemos la mediana hacia el lado mayor, etc. Demostrar que todos los triángulos resultantes pueden dividirse en un número finito de clases de manera que todos los triángulos que pertenecen a una misma clase, serán semejantes entre sí. Demostrar también que cualquier ángulo de cualquier triángulo obtenido a consecuencia de estas construcciones no es menor que la mitad del ángulo mínimo del triángulo inicial.

II.381. Hallar el triángulo del área mínima, el cual puede cubrir totalmente cualquier triángulo con los lados que no superen a 1.