Respuestas, indicaciones y resoluciones

I. Hechos y teoremas geométricos fundamentales. Problemas de cálculo

I.17. Una bisectriz divide el triángulo en dos, cuyas áreas son $\frac{al}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $\frac{bl}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, respectivamente, y el área de todo el triángulo es $\frac{ab}{2}\operatorname{sen}\alpha$; por consiguiente, $\left(\frac{al}{2}+\right.$

$$\left.+\frac{bl}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{ab}{2}\operatorname{sen}\alpha,\quad l=\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

I.19. Tomemos una circunferencia tangente a los lados AB, BC y CA. Si esta circunferencia no es tangente al lado DA, entonces, al trazar la tangente DA_1 (A_1 se halla en AB), obtenemos $\triangle DAA_1$, en el cual uno de los lados es igual a la suma de los otros dos.

I.20. Al trazar por los vértices del triángulo las rectas paralelas a los lados opuestos, obtenemos un triángulo, para el cual las alturas del triángulo de partida son perpendiculares levantadas hacia los lados en sus puntos medios.

I.21. $\frac{a+b}{2}$. **I.22.** $\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$. **I.23.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}\times$

$\times (a+b-\sqrt{a^2+b^2})$. I.24. $\frac{m^2\sqrt{3}}{2}$.

I.25. $\frac{c+a}{b}$. I.28. $\frac{|a-b|}{2}$. I.29. $\frac{1}{2}(a-b)^2 \operatorname{sen}\alpha$.

I.30. $\frac{h}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}$. I.31 30°. I.32. $\frac{ab}{2}$.

I.33. 90°. I.36. $r^2(2\sqrt{3}+3)$.

I.37. $l\sqrt{a(2l-a)}$. I.38. $\frac{1}{2}(S_1+S_2)$.

I.39. Si $a>b$, la bisectriz corta el lado CD; si $a<b$, la misma corta la base BC.

I.40. $\frac{2ab}{a+b}$. I.41. arccos $\frac{1-k}{1+k}$. I.42. $\frac{a+b}{4}\times$
$\times\sqrt{3b^2+2ab-a^2}$. I.43. a^2. I.44. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2}}$.

I.45. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. I.46. $90°+\frac{\alpha}{2}$.

I.47. $\frac{|a-b|}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}$. I.48. arcsen $\left(\frac{b}{a}-1\right)$.

I.49. $(6-\pi):2\pi:(6-\pi)$. I.50. $\frac{a^2}{8}(\sqrt{2}-1)\times$
$\times[(2\sqrt{2}-1)\pi-4]$. I.51. $\frac{a^2}{4}(6\sqrt{3}-6-$
$-\pi)$. I.52. $\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. I.53. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$.

I.54. $\frac{d}{3}$. I.55. $\frac{4}{9}S$.

I.58. Si $\alpha<90°$, $\beta<90°$, entonces los ángulos del $\triangle ABC$ son iguales a $90°-\alpha$, $90°-\beta$, $\alpha+\beta$; si $\alpha>90°$, $\beta<90°$, entonces $\alpha-90°$, $90°+\beta$, $180°-\alpha-\beta$; si $\alpha<$ $<90°$, $\beta>90°$, entonces $90°+\alpha$, $\beta-90°$, $180°-\alpha-\beta$.

I.59. $\frac{1}{2}\sqrt{m^2-4S}$. I.60. $\frac{a}{5}$. I.61. $\frac{36}{25}h^2$.
I.62. $\sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$.

I.63. En un triángulo isósceles con el ángulo del vértice $\pi/5$ la bisectriz del ángulo adyacente a la base divide el triángulo en dos triángulos isósceles, uno de los cuales es semejante al de partida. *Respuesta*: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

I.64. $R^2\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}(\pi-\alpha)\right]$. I.65. $\frac{a}{4}\sqrt{10}$.

I.66. $\frac{a(4\operatorname{sen}^2\alpha+1)}{8\operatorname{sen}\alpha}$. I.67. $2r^2(2\sqrt{3}+3)$.

I.68. $\frac{a^2+4r^2}{4r}$. I.69. $\frac{3a}{2(5+\sqrt{13})}$. I.70. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

I.71. 2. I.72. $\frac{a^3b}{4(a^2+b^2)}$. I.73. $\frac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha\right)$.

I.74. $\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$. I.75. $\frac{R^2-a^2}{2R}$. I.76. $\frac{a\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$.

I.77. $a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)$. I.78. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

I.79. $\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)$. I.80. $\frac{ac+bd}{a}$.

I.81. $\frac{\pi}{2\operatorname{sen}^3\alpha\operatorname{sen}2\beta}$. I.82. $\frac{|b-a|}{4}\sqrt{4d^2-(b-a)^2}$.
I.83. $2(R^2+a^2)$.

I.84. Son posibles dos casos: ambos centros están dispuestos a ambos lados de la cuerda común o a un lado. Respectivamente hay dos pares de respuestas: $a(\sqrt{3}-1)$, $a\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$ y $a(\sqrt{3}+1)$, $a\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$. I.86. $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$.

I.87. $\sqrt{13}$. I.88. $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2k}}{2}$. I.89. $\frac{2}{3}$.
I.90. $\frac{3a^2}{8}$. I.91. $\frac{\pi}{2}$, $\left|\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right|$, $\frac{\pi}{2}-\left|\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right|$. I.92. $a^2\frac{2\sqrt{3}-3}{8}$. (Como regla, son posibles dos triángulos, pero en uno de éstos dos vértices se hallan en las prolongaciones de las diagonales.)

I.93. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$. I.94. $\frac{br}{c}$. I.95. $\sqrt{7}$.

I.96. $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$. I.97. $\sqrt{10}$. I.98. $\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}-1$.

I.100. $\frac{1}{3}\sqrt{96-54\sqrt{3}}$. I.101. $3:4$.

I.102. $a\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

I.103. $\frac{1}{10}\sqrt{25a^2+c^2+10ac\cos\beta}$.

I.104. $\frac{3}{4}S$. I.105. $\frac{4\sqrt{Rr}\,(R-r)}{6Rr-r^2-R^2}$.

I.106. $\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2(b-a\cos\alpha)}$. I.107. $\frac{3}{10}c$.

I.108. $\frac{\sqrt{b^2+a^2+2ab\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. I.109. $S\cos^2\alpha$.

I.110. $\sqrt{4R^2-a^2}$. I.111. $\frac{b}{2}$.

I.112. $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\,|\operatorname{ctg}\alpha|$.

I.113. $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}ab\cos\alpha}$.

I.114. $\arcsin\frac{2}{\pi}$ y $\pi-\arcsin\frac{2}{\pi}$.

I.115. $a^2(\sqrt{2}-1)$. I.116. $\frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$,

$\frac{a \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$. **1.117.** $\frac{1}{2} a (b - a \cos\alpha) \operatorname{sen}^3 \alpha$.

1.118. $\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{6\cos\frac{\alpha}{3}+1}$. **1.119.** $\dfrac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt{4S_1^2-S_2^2}}$.

1.120. $4\cos\frac{\alpha}{2}\times$

$\times\sqrt{(R_2-R_1)\left(R_2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$.

1.121. $\frac{150}{7}$. **1.122.** $\sqrt{\dfrac{d^2}{4}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$.

1.123. $\sqrt{a^2+b^2-ab}$, $\sqrt{a^2+b^2+ab}$.

1.125. 15°, 75°. **1.126.** $\frac{R\sqrt{3}}{8}$. **1.127.** $2\sqrt{6}$.

1.128. $\sqrt{2}$. **1.129.** $\frac{4}{3}(2\sqrt{3}+3)$.

1.130. $\dfrac{2R^3\operatorname{sen}^3\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$. **1.131.** $\dfrac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.

1.132. 1,1. **1.133.** $\frac{a^2}{16R}$. **1.134.** $\frac{\pi}{2}$ y $\arccos\dfrac{R^2-r^2}{R^2+r^2}$. **1.135.** 30°. **1.136.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

1.137. $\dfrac{R(3-2\sqrt{2})}{3}$. **1.138.** $4\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{3-\cos\beta}}$.

1.139. $\dfrac{ab\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\alpha+(a-b)^2}}$. (En el triángulo ONP los segmentos KP y NM son alturas, por eso OA es altura.)

1.140. $\frac{2Rr}{R+r}$. **1.141.** $\frac{a}{2}$.

1.143. El error no supera 0,00005 de radio de la circunferencia. **1.144.** $113-56\sqrt{3}$.

I.145. 7,5. I.146. $3\frac{1}{12}$. I.147. $\frac{2\pi}{3}$.

I.148. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$. I.149. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. I.150. $4\sqrt{3}$.

I.151. $\frac{16}{9}(4-\sqrt{7})$. I.152. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

I.153. $2r^2 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen} 2\alpha$. I.154. $2\frac{2}{3}$.

I.155. $\frac{5}{12}\pi + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3}{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

I.156. $\sqrt[4]{12}\,(2-\sqrt{3})$. I.157. $ar/(a+2r)$.

I.158. Si $\alpha < \frac{\pi}{3}$, el problema tiene dos soluciones: $R^2 \operatorname{sen}\alpha\left(1 \pm \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$; si $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha < \pi$, tiene una sola solución: $R^2 \operatorname{sen}\alpha \times \left(1+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$. I.159. Desde $\frac{c}{6}(3\sqrt{2}-4)$ hasta $\frac{c}{3}$. I.160. Desde $\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}$ hasta 1.

I.161. $\frac{2\,abc}{ab+bc+ca}$. (Por un punto arbitrario tomado en el interior del triángulo tracemos rectas paralelas a los lados del triángulo. Sea que una de éstas separa de aquél un triángulo semejante al dado con la razón de semajanza λ; la segunda, con la razón de semejanza μ y la tercera, con la razón de semejanza γ. Demuéstrese que $\lambda+\mu+\gamma=2$).

I.162. $\frac{Rr}{R+r}$.

I.163. Tomemos en la recta BA un punto A_1 de tal manera que $|A_1B| = |A_1C|$. Los puntos A_1, A, D y C se hallan en una circunferencia ($\angle DA_1C = 90° - \angle ABC = \angle DAC$).

Por consiguiente, $\angle A_1AC = \angle A_1DC = 90°$ y, por lo tanto, también $\angle BAC = 90°$.

I.164. 1. **I.165.** $2\frac{1}{4}$. **I.166.** $\frac{13}{15}a$.

I.167. $\frac{a^2+a\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$. **I.168.** $\frac{a^2+a(d-b)}{a-b}\times$ $\times\sqrt{bd}$. **I.169.** 6. **I.170.** 3.

I.171. Si $Q \geqslant \frac{1}{4}S$, entonces la distancia buscada será $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}(\sqrt{S}-\sqrt{Q})$. Pero si $Q < \frac{1}{4}S$, son posibles dos respuestas: $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}(\sqrt{S}\pm\sqrt{Q})$.

I.172. $3r^2\,\frac{|1-k^2|}{1+k^2}$. **I.173.** $\frac{2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$.

I.174. $\frac{(a^2+b^2-c^2)c}{4ab}$.

I.175. Supongamos que A y B son dos vértices vecinos del rombo, M es el punto de intersección de las diagonales, O_1 y O_2 son centros de las circunferencias (O_1, en AM; O_2, en BM). Tenemos: $|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2 = (|O_2A|^2 - |O_2M|^2) + (|O_1B|^2 - |O_1M|^2) = R^2 + r^2 - (|O_1M|^2 + |O_2M|^2) = R^2 + r^2 - a^2$. *Respuesta*: $\sqrt{R^2+r^2-a^2}$.

I.176. $\frac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$.

I.177. $|AB| = \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$, si B está dispuesto en el interior del ángulo dado o del vertical a éste; $|AB| = \frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$ en los demás casos.

I.178. $2\arcsen \frac{h_a h_b}{l(h_a+h_b)}$. **I.179.** $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi-3}$.

I.180. Puesto que EF es perpendicular a CO (O es el punto de intersección de las diagonales) y del planteamiento se deduce que AC es la bisectriz del ángulo A igual a 60°. $|AE| = |AF| = |EF|$. Si K es el punto medio de EF, entonces $|AO| = 2a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $|CO| = a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $|CK|\cdot|OK| = |EK|^2 = \frac{1}{3}|AK|^2$. *Respuesta*: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ y $2a^2\sqrt{3}$.

I.181. $\frac{3}{4}h$. **I.182.** Designemos $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, $\angle CBA = \angle BCD = \beta$, $\angle BAM = \varphi$. Entonces $\frac{|BM|+|MC|}{|AM|+|MD|} =$

$$= \frac{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}(\alpha-\varphi)}{\operatorname{sen}(\beta+\alpha-\varphi)+\operatorname{sen}(\beta+\varphi)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}{\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta+\alpha)+\operatorname{sen}\beta} =$$

$$= \frac{c}{a+b}$$

I.183. Siempre existe una cuerda paralela a la base del triángulo, dividida por los lados en tres partes iguales (sin duda, $0 < a < 2$). Su longitud es $\frac{3a}{2a^2+1}$. Además, si $a < 1/\sqrt{2}$, existe una cuerda más no paralela a la base, que posee la misma propiedad. La longitud de esta cuerda es $3/\sqrt{9-2a^2}$.

1.184. Supongamos que BC y AC cortan MN en los puntos P y Q. Designemos: $\frac{|MC|}{|CN|}=x$. Entonces $\frac{|MP|}{|PN|}=\frac{S_{BMC}}{S_{BNC}}=\frac{|MB|\cdot|MC|}{|BN|\cdot|CN|}=\frac{3x}{4}$. Esto significa que $|MP|=\frac{3x}{3x+4}$. De manera análoga, $|MQ|=\frac{x}{x+1}$. Para x obtenemos la ecuación $\frac{x}{x+1}-\frac{3x}{3x+4}=a$, $3ax^2+(7a-1)x+$ $+4a=0$. Puesto que $D\geqslant 0$ y $0<a<1$, el valor máximo de a es igual a $7-4\sqrt{3}$.

I.185. De la igualdad $S_{ABN}=S_{CDM}$ se deduce que $S_{MBN}=S_{MCN}$, puesto que MN es la mediana de los triángulos ABN y CDM. Por consiguiente, $BC \parallel MN$, de la misma manera $AD \parallel MN$, es decir, $ABCD$ es un trapecio, en el cual AD y BC son las bases. *Respuesta*: $\frac{5k-2\pm 2\sqrt{2k(2k-1)}}{2-3k}$.

I.186. Tenemos: $|AD|\geqslant|DM|-$ $-|AM|=2$. Por otra parte $|AD|\leqslant$ $\leqslant\frac{|BD|}{\operatorname{sen} 60^\circ}=2$. Por consiguiente, $|AD|=$ $=2$, AD es la base mayor y el punto M se halla en la recta AD. *Respuesta*: $\sqrt{7}$.

I.187. Supongamos que BD es la bisectriz en el triángulo ABC, A_1 y C_1 son los puntos medios de BC y AB, $|DA_1|=|DC_1|$. Son posibles dos casos: 1) $\angle BA_1D=\angle BC_1D$ y 2) $\angle BA_1D+\angle BC_1D=180^\circ$. En el primer caso $|AB|=|BC|$. En el segundo caso hacemos girar el triángulo AC_1D alrededor de D en el ángulo C_1DA_1 de manera que C_1 pase a A_1. Obtenemos el triángulo con los lados $\frac{ba}{a+c}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{bc}{a+c}$ (a, b y c son lados del $\triangle ABC$), semejante al triángulo ABC. Por consiguiente, $\frac{ba}{a+c} : a = \frac{a+c}{2} : b = \frac{bc}{a+c} : c$, de donde $a + c = b\sqrt{2}$. Puesto que $a \neq c$, por lo menos una de las dos desigualdades $b \neq a$, $b \neq c$ es cierta. Sea $b \neq c$, entonces, $b + c = a\sqrt{2}$, $b = a$ y obtenemos el triángulo con los lados a, a, $a(\sqrt{2} - 1)$, que tiene la propiedad dada. Así pues, existen dos clases de triángulos que satisfacen las condiciones del problema: tales son los triángulos regulares y los semejantes al triángulo con los lados $1, 1, \sqrt{2} - 1$.

I.188. Si α es el ángulo comprendido entre los lados a y b, del enunciado se deduce: $a + b \operatorname{sen} \alpha \leqslant b + a \operatorname{sen} \alpha$, $(a - b)(\operatorname{sen} \alpha - 1) \geqslant 1$, $\operatorname{sen} \alpha \geqslant 1$. De aquí $\alpha = 90°$. *Respuesta*: $\sqrt{a^2 + b^2}$.

I.189. Demuéstrese que de todos los cuadriláteros circunscritos alrededor de la circunferencia dada el área menor la tiene el cuadrado. (Se puede aprovechar, por ejemplo, la desigualdad $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \geqslant 2 \operatorname{tg} [(\alpha + \beta)/2]$, donde α, β son ángulos agudos). Por otra parte, $S_{ABCD} \leqslant \frac{1}{2} (| MA | \cdot | MB | + | MB | \times \times | MC | + | MC | \cdot | MD | + | MD | \times \times | MA |) \leqslant \frac{1}{4} (| MA |^2 + | MB |^2) +$

$+\frac{1}{4}(|MB|^2+|MC|^2)+\frac{1}{4}(|MC|^2+$
$+|MD|^2)+\frac{1}{4}(|MD|^2+|MA|^2)=$
$=1$. Por consiguiente, $ABCD$ es un cuadrado de área 1.

I.190. Designemos: $|BM|=x$, $|DM|=$ $=y$, $|AM|=l$, $\angle AMB=\varphi$. Supongamos que M se halla en el segmento BD. Escribamos para los triángulos AMB y AMD el teorema de los cosenos, eliminemos $\cos\varphi$ y obtendremos: $l^2(x+y)+xy(x+y)=$ $=a^2y+d^2x$. De manera análoga se obtiene la relación $l^2(x+y)+xy(x+y)=b^2y+$ $+c^2x$. Así pues, $(a^2-b^2)y=(c^2-d^2)x$. *Respuesta*: $\left|\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}\right|$.

I.191. Si los vértices del rectángulo se hallan en las circunferencias concéntricas (dos opuestos están en las circunferencias de radios R_1 y R_2 y los dos restantes, en las circunferencias de radios R_3 y R_4), deberá cumplirse la igualdad: $R_1^2+R_2^2=R_3^2+R_4^2$. Demostrémoslo. Sea A el centro de las circunferencias, los vértices K y M del rectángulo $KLMN$ se hallan en las circunferencias de radios R_1 y R_2, y los L y N, en las circunferencias de radios R_3 y R_4. En los triángulos AKM y ALN las medianas que parten del vértice A, son iguales; lo son también los lados KM y LN. De esto se deduce la validez de nuestra afirmación.

Sea el segundo lado del rectángulo igual a x, $x>1$. Los radios R_1, R_2, R_3, R_4 en cierto orden son iguales a los números 1, x,

$\sqrt{x^2+1}$, $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$. Verificando las diferentes posibilidades de este orden, encontramos: $x^2 = 7$, $R_1 = 1$, $R_2 = 2\sqrt{2}$, $R_3 = \sqrt{2}$, $R_4 = \sqrt{7}$.

Examinemos el cuadrado $K_1L_1M_1N_1$ con el lado y, cuyos vértices se hallan, respectivamente, en las circunferencias de radios $R_1 = 1$, $R_3 = \sqrt{2}$, $R_2 = 2\sqrt{2}$, $R_4 = \sqrt{7}$. Designemos: $\angle AK_1L_1 = \varphi$, entonces $\angle AK_1N_1 = 90^\circ \pm \varphi$ o bien $\varphi \pm 90^\circ$. Escribiendo el teorema de los cosenos para los triángulos AK_1L_1 y AK_1N_1, obtenemos:

$$\begin{cases} 1+x^2-2x\cos\varphi = 2, \\ 1+x^2 \pm 2x \operatorname{sen}\varphi = 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\cos\varphi = x^2-1, \\ \pm 2x\operatorname{sen}\varphi = x^2-6. \end{cases}$$

Elevando al cuadrado dos últimas igualdades y sumándolas, obtenemos: $2x^4 - 10x^2 + 37 = 0$, $x^2 = 5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{26}$. *Respuesta*: $\sqrt{5 \pm 2\sqrt{26}}$.

I.192. Primero, demostremos la afirmación siguiente. Si las perpendiculares trazadas desde los puntos medios de AB y BC, cortan AC en los puntos M y N de manera que $|MN| = \lambda |AC|$, entonces $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 1 - 2\lambda$ o bien $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 1 + 2\lambda$. Designemos: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Si los segmentos de las perpendiculares tomados desde los puntos medios de los lados hasta los puntos M y N no se intersecan, entonces $|MN| = b - \frac{c}{2\cos A} - \frac{a}{2\cos C} = \lambda b \Rightarrow 2(1-\lambda)\operatorname{sen} B \cos A \cos C =$

$= \frac{1}{2}$ (sen $2C$ + sen $2A$) $\Rightarrow 2(1-\lambda) \times$ $\times$ sen $(A+C)$ cos A cos C = sen $(A+C) \times$ $\times$ cos $(A-C) \Rightarrow 2(1-\lambda)$ cos A cos C = = cos A cos C + sen A sen $C \Rightarrow$ $\Rightarrow$ tg A cos $C = 1 - 2\lambda$. Pero si estos segmentos se cortan, entonces tg A tg $C = 1 + 2\lambda$. En nuestro caso $\lambda = 1$, es decir, tg A tg $C = -1$ o bien tg A tg $C = 3$. Para los ángulos B y C obtenemos ($\lambda = 1/2$) tg B tg $C = 0$ (esto es imposible) o tg B tg $C = 2$. El sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = -1, \\ \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2, \\ A + B + C = \pi \end{cases}$$

no tiene solución. Por lo tanto tg A tg $C = 3$. Después de resolver un sistema correspondiente hallamos tg $A = 3$, tg $B = 2$, tg $C = 1$. *Respuesta*: $\pi/4$.

I.193. Designaciones: R es el radio de la circunferencia circunscrita alrededor de ABC, O, su centro, N, el punto de intersección de las medianas del ΔBCM. La perpendicularidad de ON y CM equivale a la igualdad $|CN|^2 - |MN|^2 = |CO|^2 - |OM|^2$. Sea $|AB| = 1$, $|MB| = x$, $|CM| = y$, entonces $|MN|^2 = \frac{1}{9}(2y^2 + 2x^2 - k^2)$, $|CN|^2 = \frac{1}{9}(2y^2 + 2k^2 - x^2)$, $|CO|^2 = R^2$, $|OM|^2 = R^2 \cos^2 C + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$. Obtenemos para x la ecuación: $2x^2 - 3x +$

$+k^2=0$. *Respuesta*: $\frac{3\pm\sqrt{9-8k^2}}{4}$ (si $1<k<\frac{3\sqrt{2}}{4}$, ambos puntos se hallan en el interior del segmento AB).

I.194. Si O es el punto medio de AC, entonces $|AB|^2=|BO|^2+|AO|^2=$
$=|BK|^2-|KO|^2+|AO|^2=$
$=|BK|^2+(|AO|-|AK|)(|AO|+$
$+|AK|)=|BK|^2+|AK|\cdot|CK|=$
$=b^2+bd$. *Respuesta*: $\sqrt{b^2+bd}$.

I.195. 1) Una quebrada de tres eslabones tiene longitud igual al segmento que une sus extremos. Esto es posible sólo cuando todos sus vértices se hallan en este segmento.

$$x=\frac{2ab}{a+b\sqrt{3}},\quad y=\frac{2ab}{a\sqrt{3}+b}.$$

2) x, y, z son lados del triángulo, cuyas alturas son iguales a a, b y c; además, este triángulo no debe ser obtusángulo. Para encontrar x, y, z apvovechemos el hecho de que el triángulo, cuyos lados son inversamente proporcionales a las alturas del dado, es semejante al triángulo dado. $x=\frac{1}{2as}$, $y=\frac{1}{2bs}$,

$z=\frac{1}{2cs}$, donde $s=\sqrt{p\left(p-\frac{1}{a}\right)\left(p-\frac{1}{b}\right)\times\left(p-\frac{1}{c}\right)}$, $2p=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. El problema tiene solución, si $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant$ $\geqslant\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\geqslant\frac{1}{b^2}$.

3) En el sistema de coordenadas rectangulares examinemos los puntos $A(a, b)$,

$B(x, 0)$, $C(0, y)$. Del sistema dado se deduce que ABC es un triángulo equilátero. Al girar en un ángulo de 60° alrededor de A en el sentido correspondiente, el punto B pasa a C. Se puede hallar la ecuación de la recta, a la cual pasará el eje x durante semejante giro. (En particular, el coeficiente angular es igual a $\pm\sqrt{3}$.) *Respuesta:* $x = -a \pm b\sqrt{3}$, $y = -b \pm a\sqrt{3}$.

4) Si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, entonces x, y, z son las distancias hasta los vértices del triángulo rectángulo ABC, en el cual los catetos BC y CA son iguales a a y b, a partir de tal punto M en su interior, desde el cual todos sus lados se ven bajo el ángulo de 120°. Para determinar la suma $x + y + z$ hagamos girar el $\triangle CMA$ alrededor de C hacia el exterior respecto al $\triangle ABC$ a un ángulo de 60°. Además, M y A pasarán a M_1 y A_1. Entonces, BMM_1A_1 es una recta y, por consiguiente, $x + y + z = |BM| + |CM| + |AM| = |BA_1| = \sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}$. De manera análoga se examinan los casos, en que una de las variables es negativa (como regla, no puede ser negativa cualquiera de éstas), etc.

Respuesta: $\pm\sqrt{a^2 + b^2 \pm ab\sqrt{3}}$.

I.196. Sea x la distancia desde el centro del cuadrado hasta la recta l; φ, el ángulo agudo formado por una de las diagonales del cuadrado y l. Las distancias desde los vértices del cuadrado hasta l en orden del recorrido son iguales a $x + a\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\varphi$, $x + a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$,

$\left|x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\varphi\right|$, $\left|x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right|$. Según el enunciado, $\left|x^2-\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\right|=\left|x^2-\frac{a^2}{2}\cos^2\varphi\right|$, de donde $\operatorname{tg}^2\varphi=1$, lo que es imposible según el enunciado, o bien $x^2=a^2/4$. *Respuesta*: $a/2$.

I.197. Del planteamiento $\angle B = 2\angle C$ se deduce la relación entre los lados del triángulo: $b^2 = c^2 + ac$. Analizando por turno todas las variantes posibles: $b = 2c$, $a = 2c$, $b = 2a$, $a = 2b$, obtenemos que $a = 2c$, puesto que en otros casos no se cumplirá la desigualdad del triángulo. *Respuesta*: $\angle C = \pi/6$, $\angle B = \pi/3$, $\angle A = \pi/2$.

I.198. Sea D el punto medio de BC. Tenemos: $b^2 = |BM|^2 = (|BD| + |DN|)\times(|BD| - |DN|) = |BD|^2 - |DN|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 - |DN|^2 = (a+b)^2 - |AD|^2 - |DN|^2$. De aquí $|AN|^2 = |AD|^2 + |DN|^2 = (a+b)^2 - b^2 = a^2 + 2ab$. *Respuesta*: $\sqrt{a^2+2ab}$.

I.199. En BC tomemos un punto N de tal manera que el $\triangle ABN$ sea semejante al $\triangle ADL$. Entonces, $\angle NMA = \angle MAK + \angle KAD = \angle MAB + \angle DAL = \angle MAN$. Por consiguiente, $|MN| = |AN| = k|AL|$. *Respuesta*: $\frac{a}{k} + b$.

I.200. $2\sqrt{pq}$.

I.201. a) $\frac{a}{R}\sqrt{(R\pm x)(R\pm y)}$, «$+$» corresponde a la tangencia exterior de las circunferencias, «$-$» corresponde a la interior; b) $\frac{a}{R}\sqrt{(R+x)(R-y)}$.

I.202. Sea $|AM|:|MC|=k$. La condición de igualdad de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABM y BCM significa que sus áreas se relacionan como perímetros. De aquí, puesto que la relación de las áreas es igual a k, obtenemos $|BM|=\frac{13k-12}{1-k}$. De esta igualdad, en particular, se deduce que $12/13<k<1$. Escribiendo para los triángulos ABM y BCM los teoremas de los cosenos (respecto a los ángulos BMA y BMC) y eliminando de estas ecuaciones los cosenos de los ángulos, obtenemos para k la ecuación cuadrática con las raíces 2/3 y 22/23. Tomando en consideración las limitaciones para k, obtenemos la respuesta: $k=22/23$.

I.203. Supongamos que ABC es el triángulo dado, O, K, H son, respectivamente, el centro de la circunferencia circunscrita, el incentro de la circunferencia inscrita y el punto de intersección de las alturas del $\triangle ABC$. Hagamos uso del hecho siguiente: para un triángulo arbitrario la bisectriz de cualquiera de sus ángulos forma ángulos iguales con el radio de la circunferencia circunscrita y la altura que parte del mismo vértice (demuéstrese). Del hecho de que la circunferencia que pasa por O, K y H, contiene, por lo menos, un vértice del $\triangle ABC$ (sea el vértice A), se deduce que $|OK|=|KH|$. El punto K se halla en el interior por lo menos de uno de los triángulos: OBH, OCH. Sea que se halla el $\triangle OBH$. El ángulo B no puede ser obtuso. En los triángulos OBK y HBK tenemos: $|OK| = |HK|$, KB es el lado común, $\angle OBK = \angle HBK$. Por lo tanto, $\triangle OBK = \triangle HBK$; de ser lo contrario, $\angle BOK + \angle BHK = 180°$, lo que no puede ser ($K$ se encuentra en el interior del $\triangle OBH$). Por consiguiente, $|BH| = |BO| = R$. La distancia desde O hasta AC es igual a $\frac{1}{2}|BH| = \frac{R}{2}$ (problema I.20), es decir, $\angle B = 60°$ ($\angle B$ es agudo), $|AC| = R\sqrt{3}$. Si ahora A_1, B_1 y C_1 son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA y AB, entonces $|BA_1| = |BC_1| = r\sqrt{3}$, $|CA_1| + |AC_1| = |CB_1| + |B_1A| = |AC| = R\sqrt{3}$. El perímetro del triángulo es igual a $2\sqrt{3}(R + r)$. Ahora es fácil encontrar su área. *Respuesta*: $\sqrt{3}(R + r)r$.

I.204. Sea P la proyección de M en AB, $|AP| = a + x$. Entonces $|PB| = a - x$, $|MP| = y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $|AN| = (a + x)\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+y}$,

$$|NB| = 2a - (a+x)\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+y} = \frac{a\sqrt{2}(a-x+y\sqrt{2})}{a\sqrt{2}+y},$$

$$|AL| = \frac{a\sqrt{2}(a+x+y\sqrt{2})}{a\sqrt{2}+y}.$$ De aquí

$$|AL|^2 + |NB|^2 = \frac{4a^2}{(a\sqrt{2}+y)^2}\times$$
$$\times(a^2 + 2\sqrt{2}ay + 2y^2 + x^2) =$$

$$= \frac{4a^2}{(a\sqrt{2}+y)^2}\,(a^2 + 2\sqrt{2}\,ay + 2y^2 + \\ + (a^2 - y^2)) = 4a^2.$$

I.205. Supongamos que el lado x del triángulo y los lados que parten del punto común de las circunferencias, forman con la recta que pasa por los centros, los ángulos α y β; $\alpha \pm \beta = 60°$, entonces $\cos\alpha = \frac{x}{2R}$, $\cos\beta = \frac{x}{2r}$ (o viceversa). Encontrando $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta$ de la ecuación $\cos(\alpha \pm \beta) = \frac{1}{2}$, obtenemos que el lado del triángulo regular es igual a $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2+r^2-Rr}}$.

I.206. Tracemos la recta BA y designemos con D el segundo punto de intersección con la circunferencia menor. Examinemos los arcos AB y AD (menores que la semicircunferencia). Puesto que la tangente común a las circunferencias en el punto A forma con AB y AD ángulos iguales, entonces también los ángulos centrales que corresponden a estos arcos, son iguales.

Por consiguiente, $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{r}{R}$, $|AD| = a\frac{r}{R}$, $|BC| = \sqrt{|BD|\cdot|BA|} = a\sqrt{\frac{R+r}{R}}$.

I.207. Designaciones: O_1, O_2 y O son centros de las circunferencias (las primeras dos son tangentes a AB), x, y y R son, respectivamente, sus radios. Las tangentes comunes a las circunferencias O_1 y O_2, O_1 y O, O_2 y O

son iguales, respectivamente, a $2\sqrt{xy}$, $2\sqrt{Rx}$, $2\sqrt{Ry}$. Según el enunciado $2\sqrt{xy} = a$. Examinemos el triángulo rectángulo O_1MO_2 con el ángulo recto en el vértice M; $O_1M \parallel BC$, $|O_1O_2| = x + y$, $|O_2M| = 2R - (x + y)$, $|O_1M| = |2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{Ry}|$ (O_1M es igual a la diferencia entre las tangentes comunes a las circunferencias con los centros O, O_1 y O, O_2). Así pues, $(x + y)^2 = (2R - x - y)^2 - (2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{Ry})^2$, de donde $R = 2\sqrt{xy} = a$.

I.208. Notemos que $O_1O_2O_3O_4$ es un paralelogramo con ángulos α y $\pi - \alpha$ ($O_1O_4 \perp AC$ y $O_2O_3 \parallel AC$, por lo tanto $O_1O_4 \parallel O_2O_3$, etc.). Si K es el punto medio de AM, L es el punto medio de MC, entonces $|O_3O_4| = \frac{|KL|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{|AC|}{2\operatorname{sen}\alpha}$. De manera análoga $|O_2O_3| = \frac{BD}{2\operatorname{sen}\alpha}$; por consiguiente, $S_{O_1O_2O_3O_4} = \frac{|AC|\cdot|BD|\operatorname{sen}\alpha}{4\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{S_{ABCD}}{2\operatorname{sen}^2\alpha}$. *Respuesta:* $2\operatorname{sen}^2\alpha$.

I.209. Las bisectrices del paralelogramo, al intersecarse, forman un rectángulo, cuyas diagonales son paralelas a los lados del paralelogramo e iguales a la diferencia de los lados del paralelogramo. Por consiguiente, si a y b son los lados del paralelogramo y α es el ángulo entre ellos, entonces $S = ab\operatorname{sen}\alpha$, $Q = \frac{1}{2}(a-b)^2\operatorname{sen}\alpha$, $\frac{S}{Q} = \frac{2ab}{(a-b)^2}$. *Respuesta:* $\frac{S+Q+\sqrt{Q^2+2QS}}{S}$.

I.210. Designemos con x el área del triángulo OMN, con y, el del triángulo CMN; entonces $\frac{|ON|}{|OA|}=\frac{x}{S_1}=\frac{S_3}{S_2}$, $x=\frac{S_1S_3}{S_2}$, $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{S_1+x}{y}=\frac{S_1+S_2}{S_3+x+y}$. El área buscada es igual a $\frac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_3+S_2)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$.

I.211. Supongamos que en el triángulo ABC el ángulo C es recto; M, el punto de intersección de las medianas; O, el incentro de la circunferencia inscrita; r, su radio; $\angle B=\alpha$; entonces $|AB|=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$

$$=\frac{r\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)},\quad |CM|=\frac{1}{3}|AB|,$$

$|CO|=r\sqrt{2}$, $|OM|=r$. $\angle OCM=\alpha-\frac{\pi}{4}$. Escribiendo el teorema de los cosenos para $\triangle COM$, obtenemos $1=2+\frac{8}{9(2x-\sqrt{2})^2}-$ $-\frac{8x}{3(2x-\sqrt{2})}$, donde $x=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, de donde $x=\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$. *Respuesta:* $\frac{\pi}{4}\pm$ $\pm\arccos\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$.

I.212. Sean iguales a a los segmentos de una mediana. Designemos por x el menor de los segmentos, en los cuales el punto de tangencia parte el lado que corresponde a la mediana. Ahora, todos los lados del triángulo pueden expresarse a través de a y x. Los lados que comprenden la mediana, son $a\sqrt{2}+x$, $3a\sqrt{2}+x$ y el tercer lado es $2a\sqrt{2}+2x$.

Empleando la fórmula de longitud de la mediana (problema 1.11), obtenemos $9a^2 = \frac{1}{4}[2(a\sqrt{2}+x)^2+2(3a\sqrt{2}+x)^2-(2a\sqrt{2}+2x)^2]$, de donde $x = a\sqrt{2}/4$. *Respuesta*: 10 : 5 : 13.

I.213. Supongamos que $|BC| = a$, $\angle C > \angle B$, D y E son los puntos medios de AB y AC. El cuadrilátero $EMDN$ es inscrito (puesto que $\angle MEN = \angle MDN = 90°$), $|MN| = a$, $|ED| = a/2$, MN es el diámetro de la circunferencia circunscrita alrededor de $MEND$. Por consiguiente, $\angle DME = 30°$, $\angle CAB = 90° - \angle EMD = 60°$, $\angle CBA = \angle EDN = \angle EMN = \angle EMD/2 = 15°$, $\angle ACB = 105°$. *Respuesta*: $\angle A = 60°$, $\angle B = 15°$, $\angle C = 105°$ o bien $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$, $\angle C = 15°$.

I.214. Designemos con K y M, respectivamente, los puntos de intersección de la recta EF con AD y BC. Sea que M se halla en la prolongación de BC más allá del punto B. Si $|AD| = 3a$, $|BC| = a$, de la semejanza de los triángulos correspondientes se deduce que $|DK| = |AD| = 3a$, $|MB| = |BC| = a$ (fig. 1, *a*).

Además, $|ME| = |EF| = |FK|$, si h es la altura del trapecio, la distancia desde E hasta AD es igual a $\frac{2}{3}h$, $S_{EDK} = ah$, $S_{EDF} = \frac{1}{2}S_{EDK} = \frac{ah}{4} = \frac{1}{4}S$.

Pero si la recta EF corta la base BC en el punto M, $|BM| = \frac{1}{3}a$ (fig. 1, *b*). En este caso $\frac{|EK|}{|MK|} = 2 : \frac{5}{3} = \frac{6}{5}$ y la distancia desde E hasta AD es igual a $\frac{6}{5}h$, de modo que

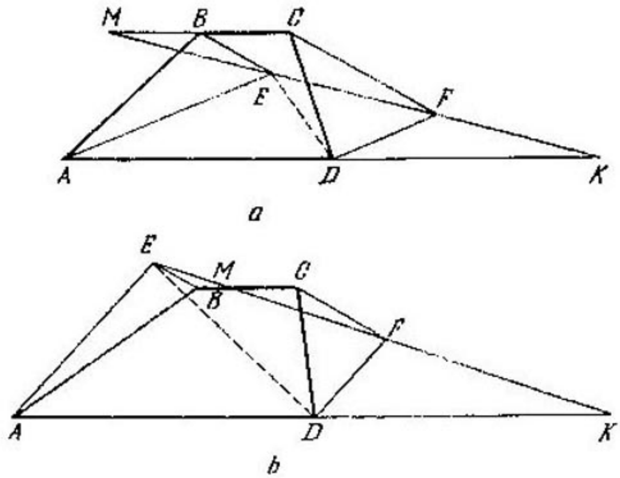

Fig. 1

$S_{EFD} = \frac{1}{2} S_{EDK} = \frac{1}{4} \cdot 3a \cdot \frac{6}{5} h = \frac{9}{20} S$. *Respuesta*: $\frac{1}{4} S$ o bien $\frac{9}{20} S$.

I.215. Sea O el incentro de la circunferencia inscrita; M, el punto medio de BC; K, L, N, los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita a los lados AC, AB y BC del triángulo. Designemos: $|AK| = |AL| = x$, $|CK| = |CN| = y$, $|BL| = |BN| = z$, $y + z = a$. Según el planteamiento, $|OM| = \frac{a}{2} - r$. Por consiguiente, $|NM| = \sqrt{|OM|^2 - |ON|^2} =$

$= \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$ y uno de los segmentos, y o z, es igual a $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$, mientras que el otro, a $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$. Igualemos las expresiones para el área del triángulo según las fórmulas de Herón y $S = pr$: $\sqrt{(x+y+z)\,xyz} = (x+y+z)\,r \Rightarrow xar = (x+a)\,r^2 \Rightarrow x = \frac{ar}{a-r}$. De esta manera, el área buscada es igual a $\left(\frac{ar}{a-r} + a\right) r = \frac{a^2 r}{a-r}$.

I.216. Demostremos que si C_1 y C_2 (fig. 2) se encuentran a otro lado de BC, que el vértice A, entonces el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle CC_1C_2$ se sitúa en el punto O en el lado AB; además, $|BO| = \frac{1}{4}|AB|$. Al trazar la altura CM desde el vértice C, obtenemos que BC_1CM es el rectángulo. Por lo tanto, la perpendicular levantada del punto medio de CC_1 pasa por O. Teniendo en cuenta que $C_1C_2 \parallel BD$ y

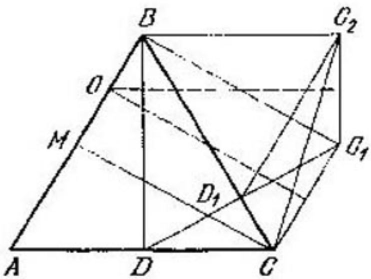

Fig. 2

$|C_1C_2| = \frac{1}{2}|BD|$, obtenemos que la perpendicular trazada por el punto medio de C_1C_2 también pasa por O. Ahora encontramos fácilmente el radio buscado: éste es igual a

$$\sqrt{|CM|^2+|MO|^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{16}}=\frac{a}{4}\sqrt{13}.$$

I.217. Examínense dos casos: 1) cuando los pies de las perpendiculares se hallan en los lados del paralelogramo y 2) cuando una de las perpendiculares no corta el lado, sobre el cual ésta está bajada. En el 1r caso llegamos a una contradicción y en el 2º obtenemos que $\cos\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, donde α es el ángulo agudo del paralelogramo dado.

I.218. Al expresar el ángulo PQN a través de los ángulos del triángulo, y teniendo en cuenta que $\angle PMN + \angle PQN = 180°$, hallamos: $\angle PMN = 60°$; de aquí $\angle NPQ = \angle QMN = 30°$, $\angle PNQ = \angle PMQ = 30°$, es decir, $\triangle PQN$ es isósceles con los ángulos adjuntos al lado PN iguales a $30°$, $|PQ| = |QN| = 1/\sqrt{3}$.

I.219. Del planteamiento se deduce que $ABCD$ es un trapecio, $BC \parallel AD$, AC es la bisectriz del ángulo BAD; por lo tanto $|AB| = |BC|$, de manera análoga $|BC| = |CD|$. Sea que $|AB| = |BC| = |CD| = a$, $|AD| = b$. La distancia entre los puntos medios de las diagonales es $2r$, por consiguiente, $\frac{b-a}{2} = 2r$. Tracemos la altura BM desde el punto B sobre AD y obtendremos que $|AM| = \frac{b-a}{2} = 2r$. $|BM| = 2r$. Por consiguiente, $a = |AB| = 2r\sqrt{2}$, $b = 4r + 2r\sqrt{2}$. *Respuesta*: $4r^2(\sqrt{2}+1)$.

I.220. Designemos los ángulos A, B y C con α, β y γ, respectivamente. Sea H el punto de intersección de las alturas, O, el centro de la circunferencia que pasa por A, H y C. Entonces, $\angle HOC = 2\angle HAC = 2(90° - \gamma)$, $\angle HOA = 2\angle HCA = 2(90° - \alpha)$. Pero $\angle AOC = 180° - \beta$, (puesto que $BAOC$ es inscrito), $2(90° - \gamma) + 2(90° - \alpha) = 180° - \beta$, $360° - 2\alpha - 2\gamma = 180° - \beta$, $2\beta = 180° - \beta$, $\beta = 60°$, $|AC| = 2R \operatorname{sen} \beta = \sqrt{3}$.

I.221. Al designar la relación $\frac{|AM|}{|MC|} = \lambda$, tendremos: $S_{MCP} = \frac{T}{\lambda}$, $S_{CPN} = \lambda Q$, $S_{MCP} = \lambda S_{CPN}$; por consiguiente, $(T/Q) = \lambda^3$, $S_{ABC} = \frac{|AC|}{|MC|} \cdot \frac{|BC|}{|CN|} S_{CMN} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}\left(\frac{T}{\lambda} + \lambda Q\right) = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2}(T + \lambda^2 Q) = (\lambda+1)^3 Q = (T^{1/3} + Q^{1/3})^3$.

I.222. Si O es el centro de la circunferencia, el área del $\triangle OMN$ es $\frac{a}{a-R}$ veces superior al área del $\triangle KMN$. Si $\angle MON = \alpha$, entonces $\frac{R^2}{2} \operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{a-R} S$, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2aS}{R^2(a-R)}$, $|MN| = 2R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = R\sqrt{1 - \cos\alpha} = R\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a^2S^2}{R^4(a-R)^2}}}$. El problema tiene solución, si $S \leqslant \frac{R^2(a-R)}{2a}$.

I.223. Si $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$, entonces, según el teorema de los senos encontramos: $|AE| = \frac{2m \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha}$, $|AF| = \frac{|AE|}{\cos\alpha} = \frac{2m \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha \cos\alpha}$. De esta manera $\frac{9}{4} m = \frac{2m \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha \cos\alpha}$, de donde $\cos 2\alpha = \frac{7}{18}$, $S_{ABC} = m^2 \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5m^2\sqrt{11}}{7}$.

I.224. Los puntos C, M, D y L se hallan en una circunferencia, por consiguiente, $\angle CML = \angle CDL = 30°$. De la misma manera $\angle CMK = 30°$; así, pues $\angle LMK = 60°$ y $\triangle LMK$ es regular, $|KL| = 2/\sqrt{5}$. Según el teorema de los cosenos encontramos que $\cos \angle LCK = -3/5$. Puesto que $\angle DCB = \angle LCK - 120°$, entonces $|DB| = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

I.225. Sea A el punto de intersección de las rectas BC y KM. El cuadrilátero $ONBC$ es inscrito ($\angle OCB = \angle ONB = 90°$), por consiguiente $\angle OBC = \angle ONC = \alpha/2$. También es inscrito el cuadrilátero $CMAO$ y $\angle CAO = \angle CMO = \alpha/2$, es decir, el $\triangle OAB$ es isósceles. Así, pues $|CB| = |AC| = |CO| \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\frac{\alpha}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

I.226. Los puntos E, M, B y Q (fig. 3) se hallan en una circunferencia con diámetro BE y los puntos E, P, D y N, en la circunferencia con diámetro ED. Por ende, $\angle EMQ = \angle EBQ = 180° - \angle EDC = \angle EDN = \angle EPN$; en forma análoga, $\angle EQM = \angle ENP$, es decir, el $\triangle EMQ$ es semejante al $\triangle EPN$ con la razón de semejanza $\sqrt{k}$.

(Para que la solución sea completa hace falta examinar también otros casos de disposición de los puntos.) *Respuesta*: $d\sqrt{k}$.

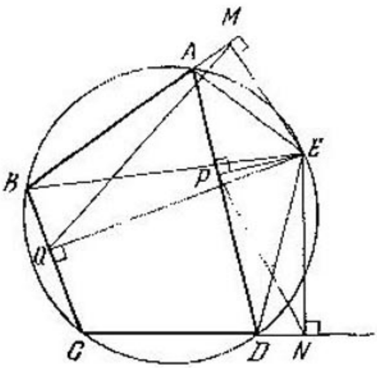

Fig. 3

I.227. Al prolongar los lados no paralelos del trapecio hasta la intersección, obtenemos tres triángulos semejantes; además, la razón de semejanza entre los triángulos medio y mayor y entre el menor y el medio es la misma. Designemos esta razón con λ, la base mayor, con x, el radio de la circunferencia mayor, con R. Entonces, los segmentos paralelos a la base mayor serán iguales, respectivamente, a λx y $\lambda^2 x$; el lado mayor del trapecio inferior, a $2R\frac{d}{c}$; el segundo radio, a λR. Por lo tanto, $R+\lambda R=\frac{c}{2}$. Según la propiedad del cuadrilátero circunscrito, $x+\lambda x=2R+2R\frac{d}{c}$. Y, por fin, bajando de un extremo de la base menor de todo el trapecio la perpendicular sobre la base mayor, obtenemos un triángulo rectángulo con los catetos c, $x - \lambda^2 x$ y la hipotenusa d. De esta manera, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x(1+\lambda) = 2R\,\dfrac{c+d}{c}, \\ x(1-\lambda^2) = \sqrt{d^2-c^2}, \\ R(1+\lambda) = c/2, \end{cases}$$

de donde $\lambda = \dfrac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{c}$. *Respuesta*: las bases son iguales a

$$\frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{c} \quad \text{y} \quad \frac{d+\sqrt{d^2-c^2}}{c}.$$

I.228. Desde los centros de las circunferencias bajemos las perpendiculares sobre uno de los lados y tracemos por el centro de la circunferencia menor la recta, paralela a este lado. Se obtiene un triángulo rectángulo con la hipotenusa $R + r$, un cateto $R - r$ y el ángulo agudo adyacente a este cateto α que es igual al ángulo agudo adyacente a la base del trapecio.

De esta manera, $\cos\alpha = \dfrac{R-r}{R+r}$. La base mayor es igual a $2R \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = 2R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$. La base menor es igual a $2r \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2r\sqrt{\dfrac{r}{R}}$.

I.229. En el lado AB tomemos el punto K de manera que $|BK| = |BD|$, y en la prolongación de AC, el punto E de tal manera, que $|CE| = |CD|$. Demostremos que el

$\triangle ADK$ es semejante al $\triangle ADE$. Si A, B y C son las magnitudes de los ángulos del $\triangle ABC$, entonces $\angle DKA = 180° - \angle DKB = 180° - (90° - \angle B/2) = 90° + \angle B/2$, $\angle ADE = 180° - \angle CED - \angle A/2 = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 90° + \angle B/2$. Por ende, $\angle AKD = \angle ADE$. Además, según el planteamiento, $\angle DAE = \angle DAK$. *Respuesta*: $\sqrt{ab}$.

I.230. En las designaciones del problema anterior

$$|AD|^2 = (|AC| + |CD|)(|AB| - |BD|) = |AC| \cdot |AB| - |CD| \times |BD| + (|AB| \cdot |CD| - |AC| \times |BD|).$$

Pero el sumando comprendido entre paréntesis es igual a cero, puesto que (véase el problema I.9) $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$.

I.231. Prolongamos BN y CN hasta que se interseque por segunda vez con la segunda circunferencia en los puntos K y L, respectivamente; $|MN| = |NK|$, porque $\angle ANB = 90°$ y MK es la cuerda de la circunferencia con el centro en A. Puesto que los arcos correspondientes son iguales, entonces $\angle LNK = \angle BNC = \angle BND$. De esta manera

$$|LN| = |ND| = b,$$
$$|MN| \cdot |NK| = |MN|^2 = ab,$$
$$|MN| = \sqrt{ab}.$$

I.232. Notemos que $PQ \perp CD$. Sea T el punto de intersección de MN y PQ; L y K son los pies de las perpendiculares bajadas desde C y B sobre la recta MN(L y K se hallan en las circunferencias construidas sobre CN y BM como sobre diámetros). Empleando las propiedades de las cuerdas que se intersecan en las circunferencias, obtenemos $|PT| \times \times |TQ| = |NT| \cdot |LT|$, $|PT| \times \times |TQ| = |MT| \cdot |TK|$. Pero $|LT| = |CD|$, $|TK| = |DB|$ (ya que $CLKB$ es un rectángulo y $PQ \perp CB$). De esta manera, $|NT| \cdot |CD| = |MT| \cdot |DB|$, $\frac{|MT|}{|NT|} = \frac{|CD|}{|DB|}$, es decir, la recta PQ divide CB y MN en una misma razón, luego, PQ pasa por A, y D es la base de la altura. *Respuesta*: $|BD| : |DC| = 1 : \sqrt{3}$.

I.233. Sea $\angle BOC = 2\alpha$; $\angle BOL = 2\beta$. Entonces $|AC| = 2R \cos \alpha$, $|CL| = = 2R \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$, $|CM| = |CL| \times \times \cos (90° - \beta) = 2R \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} \beta$, $|AM| = |AC| - |CM| = 2R (\cos \alpha - - \operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} \beta) = 2R \cos \beta \cos (\alpha + + \beta)$ y, por fin, $|AN| = a = |AM| \cos \alpha = = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta)$. Por otro lado, si K, P y Q son los puntos medios de AO, CO y CL, respectivamente, entonces $|KP| = \frac{1}{2} |AC| = R \cos \alpha$. Luego $|PQ| = R/2$, $\angle KPQ = \angle KPO + + \angle OPQ = \alpha + 180° - \angle COL = 180° - - \alpha - 2\beta$ y, según el teorema de los cosenos, $|KQ|^2 = \frac{R^2}{4} + R^2 \cos^2 \alpha + R^2 \cos \alpha \times$

$\times \cos(\alpha + 2\beta) = \frac{R^2}{4} + 2R^2 \cos\alpha \cos\beta \times$ $\times \cos(\alpha + \beta) = \frac{R^2}{4} + Ra$. *Respuesta:* $\sqrt{\frac{R^2}{4} + Ra}$.

I.234. De la semejanza de los triángulos MAB y MBC se deduce que

$$\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MA|}{|MB|} \cdot \frac{|MB|}{|MC|} = \frac{|BA|^2}{|BC|^2} = k^2.$$

I.235. Del problema I.234 se deduce que $\frac{|AM|^2}{|MB|^2} = \frac{|AC|}{|BC|}$, $\frac{|AN|^2}{|NB|^2} = \frac{|AD|}{|BD|}$. Si K es el punto de intersección de MN y AB, entonces $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{S_{AMN}}{S_{BMN}} = \frac{|AM| \cdot |AN| \operatorname{sen} \angle MAN}{|MB| \cdot |NB| \operatorname{sen} \angle MBN} = \sqrt{\frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AD|}{|BD|}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)}}$.

I.236. Sean K, L, M y N los puntos de tangencia de los lados AB, BC, CD y DA a la circunferencia. Designemos con P el punto de intersección de AC y KM. Si $\angle AKM = \varphi$, entonces $\angle KMC = 180° - \varphi$. Por ende,

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{S_{AKM}}{S_{KMC}} = \frac{\frac{1}{2}|AK| \cdot |KM| \operatorname{sen}\varphi}{\frac{1}{2}|KM| \cdot |MC| \operatorname{sen}(180° - \varphi)} =$$

$= \frac{|AK|}{|MC|} = \frac{a}{b}$. Pero en la misma razón la recta NL también dividirá AC. Por consecuencia, las rectas AC, KM y NL concurren en un punto. Empleando los mismos razonamientos al caso de la diagonal BD, obtenemos que BD también pasa por el punto P. La relación buscada es igual a a/b.

I.237. Sean P y Q los puntos de intersección de BK y AC, de AB y DC, respectivamente. La recta QP corta AD en el punto M, BC, en el punto N. Aprovechando la semejanza de los triángulos correspondientes, escribamos $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|MK|}{|AM|} = \frac{|AK| - |AM|}{|AM|}$. Si $|AM| = x\,|AD|$, entonces $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|AM|}{|AD| - |AM|} = \frac{x}{1-x}$, $\frac{x}{1-x} = \frac{\lambda - x}{x}$, de donde $x = \frac{\lambda}{\lambda+1}$. *Respuesta*: $\frac{\lambda}{\lambda+1}$. Si $\lambda = \frac{1}{n}$, entonces $|AM| = \frac{1}{n+1}\,|AD|$. De esta manera, adoptando primero que K coincide con D ($\lambda = 1$), obtenemos en calidad de M_1 el punto medio de AB; adoptando que K coincide con M_1, encontramos que M_2 separa 1/3 parte de AD, etc.

I.238. Sea $|KM| = |KN| = x$, $|AD| = y$, $|DB| = z$. Entonces $|CD| = \sqrt{yz}$, $y + z = c$. El radio de la circunferencia inscrita en $\triangle AKB$ es igual a $\frac{1}{2}\,|CD| = \frac{1}{2}\sqrt{yz}$. Expresemos el área del triángulo AKB según las fórmulas de Herón y $S = pr$. Obtenemos la ecuación $\sqrt{(x + y + z)\,xyz} = (x + y + z)\frac{1}{2}\sqrt{yz}$. Tomando en consideración que $y + z = c$, hallamos $x = c/3$.

I.239. Tracemos por A_2 una recta paralela a AC. Sea R el punto de intersección de esta recta con AB. Como $\frac{|AR|}{|RC_1|} = \frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|} = \frac{1}{k}$,

$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=k$, encontraremos $\frac{|AR|}{|AB|}=\frac{k}{(k+1)^2}$. De la misma manera, trazando por C_2 una recta paralela a AC hasta la intersección con BC en el punto S, obtenemos que $\frac{|CS|}{|CB|}=$ $=\frac{k}{(k+1)^2}$. Por eso, los puntos R, A_2, C_2 y S se hallan en una recta paralela a AC. Por tanto, los lados de los $\triangle ABC$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son, respectivamente, paralelos. Ahora no es difícil obtener que $|A_2C_2|=|RS|-|RA_2|-$ $-|C_2S|=|AC|\left(1-\frac{3k}{(k+1)^2}\right)$, por eso la razón de semejanza es igual a $\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}$.

I.240. Hagamos uso de la fórmula siguiente para el área del triángulo: $S=2R^2$ sen $A\times$ $\times$ sen B sen C, donde A, B y C son los ángulos del triángulo. Entonces, el área del triángulo $A_1B_1C_1$, donde A_1, B_1 y C_1 son los puntos de intersección de las bisectrices del $\triangle ABC$ con la circunferencia circunscrita, será igual a $S_1=2R^2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\times\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\operatorname{sen}\frac{C+A}{2}=$ $=2R^2\cos\frac{C}{2}\times\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$ y $\frac{S}{S_1}=8\operatorname{sen}\frac{A}{2}$ $\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$. Por otra parte, $|BC|=2R\operatorname{sen}A$, $r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=2R\operatorname{sen}A$, $r=4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}$ $\operatorname{sen}\frac{B}{2}\times\operatorname{sen}\frac{C}{2}$. De esta manera, $\frac{S}{S_1}=\frac{2r}{R}$.

I.241. Supongamos que O es el centro de semejanza de los triángulos inscrito y circunscrito, M_1 y M_2 son dos vértices homólogos

(M_1 se halla en el lado AB), el segmento OA corta el triángulo inscrito en el punto K. Entonces $S_{OM_1K}=\lambda S_1$, $S_{OM_1A}=\lambda S_2$, $\frac{S_{OM_1A}}{S_{OM_2A}}=\frac{|OM_1|}{|OM_2|}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$, de donde

$$S_{OM_1A}=\lambda\sqrt{S_1S_2},\quad \text{donde}\quad \lambda=\frac{S_{OM_1K}}{S_1}.$$

Después de examinar seis triángulos similares y sumar sus áreas, obtenemos: $S_{ABC}=$ $=\sqrt{S_1S_2}$.

I.242. Sea O el centro del círculo circunscrito; H, el punto de intersección de las alturas del $\triangle ABC$. Puesto que la recta OH es perpendicular a la bisectriz del ángulo A, ella corta los lados AB y AC en los puntos K y M tales, que $|AK|=|AM|$. Por tanto, $\angle AOB=2\angle C$ (supongamos que el ángulo C es agudo); $\angle OAK=90°-\angle C=\angle HAM$. Por consecuencia, $\triangle OAK=\triangle HAM$ y $|OA|=|HA|=R$ (R es el radio del círculo circunscrito). Si D es el pie de la perpendicular bajada desde O sobre BC, entonces $|OD|=|AH|/2=R/2$. Por consiguiente, $\cos A=\cos\angle DOC=1/2$, $\angle A=$ $=60°$.

I.243. Demuéstrese que el triángulo será acutángulo, rectángulo u obtusángulo, si la distancia entre el centro de la circunferencia circunscrita y el punto de intersección de las alturas será menor, igual o mayor, respectivamente, que la mitad del lado mayor. *Respuesta*: 90°, 60° y 30°.

I.244. La condición de que $S_{\triangle BDM}=$ $=S_{\triangle BCK}$ significa que $|BD|\cdot|BM|=$

$= |BK| \cdot |BC|$, es decir,

$$(|BA| + |AC|)\,|BM| = |BK| \cdot |BC| \qquad (1)$$

Tracemos por M la recta paralela a AC; sea L el punto de intersección de esta recta con BA. Demostremos que $|LM| = |KL|$; de aquí se deduce que el ángulo buscado $\angle BKM = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$. Puesto que $\triangle BLM$ y $\triangle BAC$ son semejantes, $LM = \frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AC|$, $|BL| = \frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AB|$. Ahora, haciendo uso de (1), encontremos $|BK|$ y calculemos: $|KL| = |BK| - |BL| = \frac{|BA| + |AC|}{|BC|}\cdot|BM| - \frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AB| = \frac{|BM|}{|BC|}\times \times|AC|$, de donde $|LM| = |KL|$.

I.245. Sea que $|AD| = a$; $|BC| = b$. Bajemos desde O la perpendicular OK sobre AB. Ahora encontremos: $|BK| = \sqrt{ab}\,\frac{b}{a+b}$, $|BE| = \sqrt{ab}\,\frac{b}{a-b}$, $|MK| = \frac{\sqrt{ab}}{2} - \sqrt{ab}\,\frac{b}{b+a} = \sqrt{ab}\,\frac{a-b}{2(a+b)}$, $|EK| = |BE| + |BK| = \sqrt{ab}\,\frac{2ab}{(a-b)(a+b)}$, $|OK| = \frac{ab}{a+b}$. Es fácil comprobar que $|OK|^2 = |EK|\cdot|MK|$. *Respuesta:* $90°$.

I.246. Notemos que los puntos A, M, N y O se hallan en una circunferencia (fig. 4). Por consiguiente, $\angle NMO = \angle OAN = 90° - \angle AON$. Por lo tanto, al girar OA alrededor de O en ángulo φ, la recta NM girará en el mismo ángulo φ (en otro sentido) y al desplazar A por la recta OA, la recta NM se mueve paralelamente a sí misma. De aquí se deduce que el ángulo buscado es igual a α.

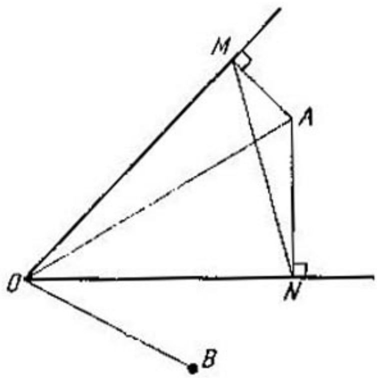

Fig. 4

I.247. Si O_1 es el centro de la circunferencia menor y $\angle BOA = \varphi$, entonces $\angle BAO = 90° - \frac{\varphi}{2}$, $\angle CO_1A = 90° + \varphi$, $\angle CAO_1 = 45° - \frac{\varphi}{2}$. De esta manera, $\angle BAC = \angle BAO - \angle CAO_1 = 45°$.

I.248. Construyamos sobre AB, en el interior del cuadrado, el rectángulo regular ABK. Entonces $\angle KAB = 60°$, $\angle KCD = 15°$, es decir, K coincide con M. *Respuesta*: 30°.

I.249. Sea M_1 simétrico a M respecto a BC. CB es la bisectriz del ángulo MCM_1. Del hecho de que $\angle M_1CA = 60°$ y $|AC| = \frac{1}{2}|CM_1|$ se deduce que $\angle M_1AC = 90°$; entonces AB es la bisectriz del ángulo M_1AC;

además, CB es la bisectriz del ángulo M_1CM, es decir, B es equidistante de las rectas M_1C y M_1A y se halla en la bisectriz del ángulo adyacente al ángulo AM_1C. Conque, $\angle BMC = \angle BM_1C = 75°$. *Respuesta*: 75°.

I.250. Si $\angle BAC = 2\alpha$, entonces fácilmente encontraremos que $\angle KMC = \angle MKC = 30° + \alpha$, es decir, $|MC| = |KC|$. Prolonguemos MK hasta que se interseque con la circunferencia en el punto N; $\triangle KMC$ es semejante a $\triangle KAN$, por consiguiente, $|AN| = |KN| = R$, o sea, al radio de la circunferencia (ya que $\angle AMN = 30°$). Los puntos A, K y O se hallan en la circunferencia con el centro en N, $\angle ANO = 60°$, por lo tanto, $\angle AKO = 30°$ ó 150°, según que el ángulo AMC sea obtuso o agudo. *Respuesta*: 30° ó 150°.

I.251. a) Tracemos la bisectriz del ángulo A y prolonguemos BM hasta que interseque a

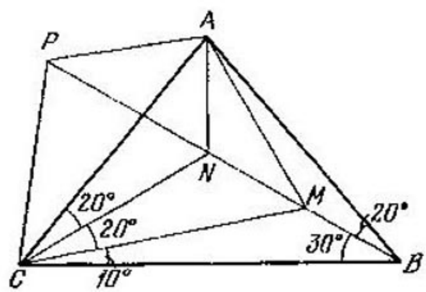

Fig. 5

ésta en el punto N (fig. 5). Puesto que $|BN| = |NC|$, entonces $\angle BNC = 120°$, por consiguiente, también los ángulos BNA,

CNA también tienen 120° cada uno, $\angle NCA = \angle NCM = 20°$, es decir, $\triangle NMC = \triangle NCA$, $|MC| = |AC|$. Consiguientemente, $\triangle AMC$ es isósceles y $\angle AMC = 70°$.

b) Los puntos M, P, A y C se hallan en una circunferencia (M del punto anterior a)). $\angle PAC = \angle PMC = 40°$.

I.252. Describamos alrededor del $\triangle MCB$ una circunferencia (fig. 6) y prolonguemos BN

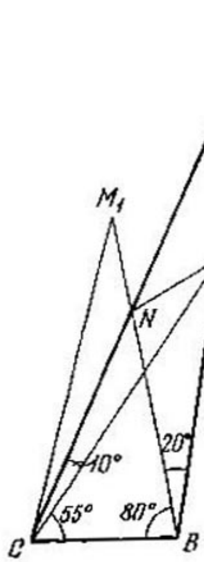

Fig. 6

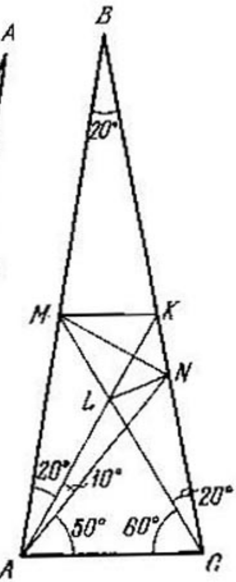

Fig. 7

hasta que se interseque con ésta en el punto M_1; $|CM_1| = |CM|$, puesto que los ángulos que se apoyan sobre éstas en suma dan 180° (80° y 100°); $\angle M_1CM = \angle M_1BM = 20°$, es decir, NC es la bisectriz del ángulo M_1CM

y $\triangle M_1CN = \triangle NCM$, $\angle NMC = \angle NM_1C = \angle CMB = 25°$.

I.253. En BC tomemos el punto K (fig. 7) de tal manera que $\angle KAC = 60°$, $MK \parallel AC$.

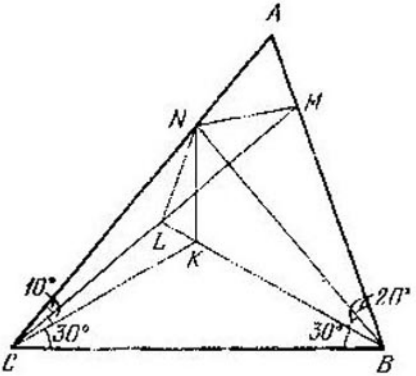

Fig. 8

Sea L el punto de intersección de AK y de MC; $\triangle ALC$ es regular, $\triangle ANC$ es isósceles (calcúlense los ángulos). Luego $\triangle LNC$ lo es también, $\angle LCN = 20°$. Ahora encontremos los ángulos NLM y MKN, cada uno de los cuales tiene 100°; ya que $\triangle MKL$ es regular, los ángulos KLN y NKL tienen 40° cada uno, es decir, $|KN| = |LN|$ y $\triangle MKN = \triangle MLN$, $\angle NML = \angle KMN = 30°$.

I.254. Tomemos el punto K (fig. 8) de manera que $\angle KBC = \angle KCB = 30°$ y designemos con L el punto de intersección de las rectas MC y BK. Puesto que $\triangle BNC$ es isósceles ($\angle NBC = \angle NCB = 50°$), $\angle KNC = 40°$. L es el punto de intersección de las bisectrices de triángulo NKC (LK y LC son las bisectrices). Por consiguiente, NL también es la bisectriz del ángulo KNC y $\angle LNB = 60°$; BN, en su lugar, es la bisectriz del ángulo MBL; además $BN \perp ML$; por lo tanto,

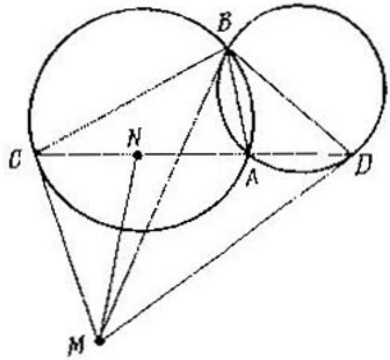

Fig. 9

BN divide ML por la mitad y $\angle MNB = \angle BNL = 60°$ y $\angle NMC = 30°$.

I.255. Sea O el incentro de la circunferencia inscrita; los puntos C, O, K y M se hallan en una circunferencia ($\angle COK = \angle A/2 + \angle C/2 = 90° - \angle B/2 = \angle KMB = 180° - \angle KMC$; pero, si el punto K está situado en la prolongación de NM, entonces $\angle COK = \angle CMK$). De esta manera, $\angle OKC = \angle OMC = 90°$.

I.256. Si P se halla en el arco AB; Q, en el arco AC, designando el ángulo PAB por φ y el ángulo QAC con ψ, obtenemos dos relaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 (C-\varphi) = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} (B+C-\varphi), \\ \operatorname{sen}^2 (B-\psi) = \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} (B+C-\psi). \end{cases}$$

Escribamos la diferencia de estas igualdades; después de las transformaciones obtenemos: sen $(B + C - \varphi - \psi)$ sen $[(B - C) + (\varphi - \psi)] =$ sen $(B + C - \varphi - \psi) \times$ sen $(\varphi - \psi)$, de donde (puesto que $0 < B + C - \varphi - \psi < \pi$), $B - C + \varphi - \psi = \pi - (\varphi - \psi)$. *Respuesta*: $\frac{\pi - \alpha}{2}$.

I.257. Demostremos que $\triangle CMN$ es semejante a $\triangle CAB$ (fig. 9). Tenemos: $\angle MCN = \angle CBA$. Puesto que el cuadrilátero $CBDM$ es inscrito,

resulta que $\frac{|CM|}{|CB|} = \frac{\text{sen} \angle CBM}{\text{sen} \angle CMB} = \frac{\text{sen} \angle CDM}{\text{sen} \angle CDB} = \frac{\text{sen} \angle DBA}{\text{sen} \angle ADB} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CN|}{|AB|}$. Por lo tanto, $\angle CMN = \angle BCA$, es decir, el ángulo buscado es igual a $\frac{\alpha}{2}$, o bien a $\pi - \frac{\alpha}{2}$.

I.258. Sea $\angle ABC = 120°$; BD, AE, CM son las bisectrices del $\triangle ABC$. Mostremos que DE es la bisectriz del ángulo BDC y DM, la bisectriz del ángulo BDA. En efecto, BE es la bisectriz del ángulo adyacente al ángulo ABD, es decir, E para $\triangle ABD$ es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo BAD y del ángulo adyacente al ángulo ABD; por consecuencia, E es equidistante de las rectas AB, BD, AD; de tal modo DE es la bisectriz del ángulo BDC. Precisamente de la misma manera DM es la bisectriz del ángulo BDA.

I.259. Designemos: $\angle ABD = \alpha$, $\angle BDC = \varphi$. Según el planteamiento, $\angle DAC = 120° - \alpha$, $\angle BAC = 30° + \alpha$,

$\angle ADB = 30^\circ - \alpha$, $\angle DBC = 60^\circ + \alpha$. Según el teorema de los senos, para los triángulos ABC, BCD, ACD

obtenemos $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\text{sen}(30^\circ+\alpha)}{\text{sen}(60^\circ+2\alpha)} = \frac{1}{2\cos(30^\circ+\alpha)}$,
$\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{\text{sen}(60^\circ+\alpha)}{\text{sen}\,\varphi}$, $\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{\text{sen}(30^\circ-\alpha+\varphi)}{\text{sen}(120^\circ-\alpha)}$.
Multiplicando estas igualdades, tendremos: $\text{sen}(30^\circ - \alpha + \varphi) = 2\cos(30^\circ + \alpha) \times \times \text{sen}\,\varphi \Rightarrow 2\cos(60^\circ + \alpha)\,\text{sen}(30^\circ - \varphi) = = 0$; de esta manera, $\angle BDC = \varphi = 30^\circ$.

1.260. Igualmente como en el problema I.17 se obtuvo la fórmula de la bisectriz del ángulo interior en el triángulo ABC, se puede demostrar que la bisectriz del ángulo exterior A se calcula según la fórmula

$$l_A = \frac{2bc\,\text{sen}\,\frac{A}{2}}{|b-c|} \quad (|AB| = c,\ |BC| = a,\ |CA| = b).$$

Hallemos $\text{sen}\,\frac{A}{2}$: $\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)} = = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}$.
Encontrando de la misma manera l_C, expresando $\text{sen}\,\frac{A}{2}$ y $\text{sen}\,\frac{C}{2}$ por medio de los lados del triángulo, igualando l_A y l_C, obtenemos: $\frac{\sqrt{c(a+b-c)}}{|b-c|} = \frac{\sqrt{a(b+c-a)}}{|b-a|}$. Según el planteamiento $b = 2$, $c = 1$. Luego, a debe satisfacer la ecuación $\sqrt{a+1} = \frac{\sqrt{a(3-a)}}{|a-2|} \Rightarrow \Rightarrow (a-1)(a^2 - a - 4) = 0$. Pero $a \neq 1$, por consiguiente, $|BC| = a = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

I.261. Si O y O_1 son los centros de las circunferencias circunscritas alrededor del $\triangle ABC$ y del $\triangle ADB$, entonces $\triangle AOO_1$ es semejante al $\triangle ACD$. *Respuesta*: αR.

I.262. Si K es el punto medio del arco AB, O es el centro del círculo, $|AB| = 2R = c$, entonces $|CM|^2 = |CD|^2 + |DM|^2 = |CD|^2 + |DK|^2 = |AD|\,|DB| + R^2 + |DO|^2 = (R + |DO|)(R - |DO|) + R^2 + |DO|^2 = 2R^2 = c^2/2$. *Respuesta*: $c\sqrt{2}/2$.

I.263. Supongamos que KM es un segmento paralelo a BC, N y L son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados AC y BC. Como se sabe (véase el problema I.18), $|AN| = |AL| = p - a$, donde p es el semiperímetro del $\triangle ABC$. Por otra parte $|AN| = |AL|$ es el semiperímetro del $\triangle AKM$ semejante al $\triangle ABC$. Por consiguiente, $\frac{p-a}{p} = \frac{b}{a}$, $p = \frac{a^2}{a-b}$. *Respuesta*: $\frac{2a^2}{a-b}$.

I.264. Si a, b, c son los lados del triángulo dado, los perímetros de los triángulos separados serán $2(p-a)$, $2(p-b)$, $2(p-c)$, donde p es el semiperímetro del triángulo dado. Por consiguiente, si R es el radio de la circunferencia circunscrita, entonces $R_1 + R_2 + R_3 = \left(\frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p}\right) \times R = R$. *Respuesta*: $R_1 + R_2 + R_3$.

I.265. Si $\angle A = \alpha$, entonces $|AM| = \frac{|AC|}{\operatorname{sen}\alpha}$, $|AN| = \frac{|AB|}{\operatorname{sen}\alpha}$, es decir, $|AM| : |AN| = |AC| : |AB|$; de tal modo, el $\triangle AMN$ es semejante al $\triangle ABC$ con la razón de semejanza $\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$, por eso $|MN| = \frac{|BC|}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$.

I.266. Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias que se intersecan. Designemos sus radios por x e y, $|OA| = a$. Puesto que los triángulos AOO_1 y AOO_2, como se deduce del planteamiento, son equivalentes, entonces, expresando sus áreas según la fórmula de Herón y tomando en consideración que $|O_1A| = x$, $|OO_1| = R - x$, $|O_2A| = y$, $|OO_2| = R - y$, después de las transformaciones obtenemos $(R - 2x)^2 = (R - 2y)^2$, de donde, puesto que $x \neq y$, resulta: $x + y = R$. *Respuesta*: R.

I.267. Sean AB y CD las cuerdas dadas y M, su punto de intersección.

a) Los arcos AC y BD en suma constituyen la semicircunferencia: por consiguiente, $|AC|^2 + |BD|^2 = 4R^2$, por lo que $|AM|^2 + |MC|^2 + |MB|^2 + |MD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = 4R^2$, *Respuesta*: $4R^2$.

b) $|AB|^2 + |CD|^2 = (|AM| + |MB|)^2 + (|CM| + |MD|)^2 = 4R^2 + 2|AM| \cdot |MB| + 2|CM| \times |MD| = 4R^2 + 2(R^2 - a^2) = 6R^2 - 2a^2$. *Respuesta*: $6R^2 - 2a^2$.

I.268. Si M es el segundo punto de intersección de BC con la circunferencia menor, entonces $|BM| = |PC|$ (M se halla entre B y P), $|BP| = |MP| + |BM|$, $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = |PA|^2 + (|PB| - |PC|)^2 + 2|PB| \cdot |PC| = |PA|^2 +$

$+ |MP|^2 + 2|PB||PC| = 4r^2 + 2(R^2 - - r^2) = 2(R^2 + r^2)$.

I.269. Designemos las longitudes de los segmentos de cuerdas como se expone en la

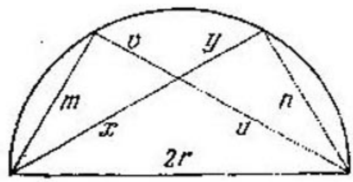

Fig. 10

fig. 10; el diámetro, con $2r$. Aprovechando que los ángulos que se apoyan sobre el diámetro, son rectos y $xy = uv$, obtenemos $x(x + y) + u(u + v) = (u + v)^2 + x^2 - v^2 = (u + v)^2 + m^2 = 4r^2$.

I.270. Si α, β, γ, δ son los arcos que corresponden a los lados a, b, c y d, la igualdad que se demuestra, corresponde a la trigonométrica $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\delta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}$, o bien $\operatorname{sen}\frac{\alpha+\gamma}{2} = \operatorname{sen}\frac{\beta+\delta}{2}$.

I.271. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito. AB y CD se cortan en el punto P; A y D están en los segmentos BP y CP. BC y AD concurren en el punto Q; C y D están en los segmentos BQ y AQ. Circunscribamos alrededor del $\triangle ADP$ una circunferencia. Designemos con M el punto de intersección de esta circunferencia con la recta PQ. (Demuéstrese que M se halla en el segmento PQ.) Tenemos: $\angle DMQ = \angle DAP = \angle BCD$. Por consiguiente, el cuadrilátero $CDMQ$ es inscrito. Puesto que según el planteamiento las tangentes trazadas desde P y Q a la circunferencia inicial son iguales a a y b, entonces $|QM| \times \times |QP| = |QD| \cdot |QA| = b^2$, $|PM| \times \times |PQ| = |PD| \cdot |PC| = a^2$. Al sumar estas igualdades, obtenemos $|PQ|^2 = a^2 + + b^2$. *Respuesta*: $\sqrt{a^2 + b^2}$.

I.272. El segmento QP es igual (véase el problema I.271) a $\sqrt{(b^2 - R^2) + (c^2 - R^2)} = = \sqrt{b^2 + c^2 - 2R^2}$. Sea $ABCD$ el cuadrilátero dado, Q, el punto de intersección de AB y CD (A se halla en el segmento BQ). Para encontrar la longitud PQ circunscribamos la circunferencia alrededor del $\triangle QCA$; designemos por N el punto de intersección de QP con esta circunferencia. Puesto que $\angle ANP = \angle ACQ = \angle ABP$, los puntos A, B, N y P se sitúan también en una circunferencia. Tenemos: $|QP| \cdot |QN| = |QA| \times \times |QB| = b^2 - R^2$, $|PN| \cdot |PQ| = = |CP| \cdot |PA| = R^2 - a^2$. Restando la segunda igualdad de la primera, obtenemos $|QP|^2 = b^2 + a^2 - 2R^2$. En forma análoga, $|PM|^2 = c^2 + a^2 - 2R^2$. *Respuesta*: $|QM| = = \sqrt{b^2 + c^2 - 2R^2}$, $|QP| = \sqrt{b^2 + a^2 - 2R^2}$, $|PM| = \sqrt{c^2 + a^2 - 2R^2}$.

I.273. El radio de la circunferencia inscrita está comprendido entre las magnitudes de los radios de dos casos límites. Este no puede ser menor que el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo con los lados $a + b$, $b + c$, $c + a$, el cual es igual a S/p, donde S es el área, p, el semiperímetro del triángulo, por lo que $r > \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{(a+b+c)\,abc}}{a+b+c} = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$. Por otra parte, r es menor que el radio de la circunferencia mostrada

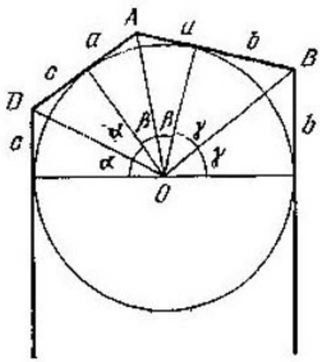

Fig. 11

en la fig. 11 (en esta figura las tangentes opuestas son paralelas, el punto C «corre» al infinito). Puesto que para los ángulos α, β y γ marcados en la figura, se cumple la igualdad $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$, $\operatorname{tg} \alpha = c/\rho$, $\operatorname{tg} \beta = a/\rho$, $\operatorname{tg} \gamma = b/\rho$, donde ρ es el radio de la circunferencia representada, entonces $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{ctg} \gamma$ o bien $\frac{(c+a)\rho}{\rho^2 - ac} = \frac{\rho}{b}$, de donde $\rho = \sqrt{ab + bc + ca}$.

De este modo, $\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} < r < \sqrt{ab+bc+ca}$.

I.274. Sea M el punto de intersección de la recta CB con la línea de centros de las circunferencias dadas. Designemos: $|AM| = x$, $\angle ACB = \varphi$; $|AB|^2 = 2rx$, $|AC|^2 = 2Rx$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{x}{|AC|}$. Si ρ es el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$, entonces $\rho = \frac{|AB|}{2\operatorname{sen}\varphi} = \frac{|AB|\cdot|AC|}{2x} = \sqrt{Rr}$. *Respuesta*: $\sqrt{Rr}$.

I.275. Sean O_1, O_2 los centros de las circunferencias; A, el punto de su intersección más alejado respecto de BC, $\angle O_1AO_2 = \varphi$. Mostremos que $\angle BAC = \varphi/2$. (Para otro punto el ángulo será igual a $180 - \frac{\varphi}{2}$.) En efecto, $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle BCA = 180° - (90° - \angle ABO_1) - (90° - \angle ACO_2) = \angle ABO_1 + \angle ACO_2 = \angle BAO_1 + \angle CAO_2 = \varphi - \angle BAC$. Sea $|O_1O_2| = a$. Trazando $O_2M \parallel BC$ (M se halla en O_1B), obtenemos $|BC| = |O_2M| = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$. Del $\triangle O_1AO_2$ encontramos que $\cos\varphi = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}$; por ende, el radio de la circunferência circunscrita alrededor del $\triangle ABC$ es igual a

$$\frac{|BC|}{2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{a^2-(R-r)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{R^2+r^2-a^2}{2Rr}}} = \sqrt{Rr}.$$

Respuesta: Rr (para ambos triángulos).

I.276. DO y CO son las bisectrices de los ángulos ADC y DCB. Designemos con α, β y γ las magnitudes de los ángulos correspondientes (fig. 12). Pero $\alpha + 2\beta + 2\gamma + \alpha = 2\pi$; por consiguiente $\alpha + \beta + \gamma = \pi$; de aquí se deduce que $\angle DOA = \gamma$, $\angle COB = \beta$ y el $\triangle AOD$ es semejante al $\triangle COB$; por lo

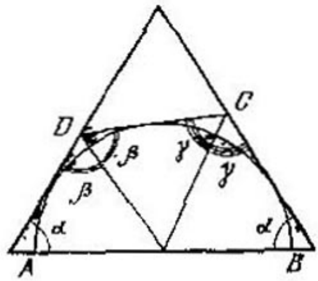

Fig. 12

tanto $|AD| \cdot |CB| = |AO| \cdot |OB| = |AB|^2/4$. *Respuesta*: $a^2/4b$.

I.277. Del planteamiento del problema se deduce que las bisectrices de los ángulos C y D se cortan en el lado AB. Designemos este punto de intersección con O. Circunscribamos alrededor del $\triangle DOC$ una circunferencia. Sea K el segundo punto de intersección de esta circunferencia con AB. Tenemos: $\angle DKA = \angle DCO = \frac{1}{2}\angle DCB = \frac{1}{2}(180° - \angle DAK) = \frac{1}{2}(\angle DKA + \angle ADK)$, por lo que $\angle DKA = \angle ADK$ y $|AD| = |AK|$. De manera análoga, $|BC| = |BK|$; por consiguiente, $|AD| + |CB| = |AB|$. *Respuesta*: $a - b$.

I.278. En el rayo MC tomemos el punto N de tal modo que $|AN| = |AB| = |AD|$.

Puesto que $\frac{\text{sen}\angle MNA}{\text{sen}\angle MCA}=\frac{|AC|}{|AN|}=\frac{|AC|}{|AD|}=$
$=\frac{\text{sen}\angle ADC}{\text{sen}\angle ACD}$ y $\angle MCA=\angle ACD$, entonces sen $\angle MNA=$ sen $\angle ADC=$ sen $\angle ABM$, es decir, los ángulos ABM y MNA son iguales o bien en suma dan 180°. Pero M se halla en el interior del $\triangle ABN$, por consiguiente, $\angle ABM=\angle MNA$. Ahora se puede demostrar que $\triangle ABM=\triangle AMN$; $\angle NAC=$
$=\angle MNA-\angle NCA=\angle ADC-\angle ACD=$
$=\varphi$. *Respuesta*: $\frac{\alpha+\varphi}{2}$.

I.279. Designemos por K y L los puntos de tangencia de la 1ª y la 2ª circunferencias, respectivamente, con uno de los lados del ángulo y por M y N, los segundos puntos de intersección de la recta AB con las circunferencias primera y segunda. Sea O el centro de la 2ª circunferencia. Puesto que A es el centro de semejanza de las circunferencias dadas, entonces $\frac{|AK|}{|AL|}=\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{|AB|}{|AN|}=\lambda$, de donde $|AK|\cdot|AL|=\lambda|AL|^2=$
$=\lambda|AB|\cdot|AN|=|AB|^2$. Por otra parte, de la semejanza de los triángulos AKC y ALO tenemos: $|AK|\cdot|AL|=|AC|\times$
$\times|AO|$. Por consiguiente, $|AC|\times$
$\times|AO|=|AB|^2$; por lo tanto, los triángulos ABC y AOB son semejantes. *Respuesta*: $\frac{\alpha}{2}$ o bien $\pi-\frac{\alpha}{2}$.

I.280. Sean $\angle BAF=\varphi$, $\angle DBA=\alpha$, $\angle DAB=2\alpha$ (del planteamiento se deduce que A, E y F se hallan por un lado de BD y $\angle BDA<90°$, es decir, $\alpha>30°$). Según el teorema de los senos, para los triángulos DEA, DAB y BAF tenemos: $\frac{|DE|}{|AD|}=\frac{\operatorname{sen}(120^\circ-2\alpha)}{\operatorname{sen}(30^\circ+\alpha)}=$

$=2\cos(30^\circ+\alpha)$; $\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}$

$=\frac{1}{4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)}$, $\frac{|AB|}{|BF|}=\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$.

Multiplicando las igualdades, encontramos que $\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}=2\cos(\alpha-30^\circ)$, de donde $\angle BAF=\varphi=30^\circ$.

I.281. Examinemos dos casos.

1) El segmento BK corta AC. De la condición $\angle BKC=\frac{3\angle A-\angle C}{2}$ se deduce que $\angle C=90^\circ$ ($\angle BCK=\angle B+\angle C$, $\angle CBK=$ $=\frac{\angle B}{2}$, $\frac{3\angle A-\angle C}{2}+(\angle B+\angle C)+\frac{\angle B}{2}=$ $=180^\circ$, etc.). Por consiguiente, el punto O se halla en AB y la suma de las distancias desde O hasta AC y AB es igual a $\frac{1}{2}\mid BC\mid$; de esta manera, $\mid BC\mid=4>2+\sqrt{3}=$ $=\mid AC\mid+\mid AB\mid>\mid AB\mid$, es decir, el cateto es mayor que la hipotenusa, lo cual es una contradicción.

2) El segmento BK no corta AC. En este caso $\angle CBK=180^\circ-\frac{\angle B}{2}$, $\angle BCK=\angle A$, $\angle BKC=\frac{3\angle A-\angle C}{2}$ (según la condición); por consecuencia, $\left(180^\circ-\frac{\angle B}{2}\right)+\angle A+$ $+\frac{3\angle A-\angle C}{2}=180^\circ$, de donde $\angle A=30^\circ$.

De nuevo son posibles dos casos.

2a) El punto O, centro de la circunferencia circunscrita, se halla en el interior del $\triangle ABC$. Sea que la perpendicular bajada desde O sobre AB corta AB en N y AC, en K, mientras que la perpendicular bajada sobre AC corta AC en M y AB, en L. Designemos: $|OM| = x$, $|ON| = y$; $x + y = 2$ (según el planteamiento del problema), $|OK| = 2x/\sqrt{3}$, $|MK| = x/\sqrt{3}$, $|AK| = 2|NK| = 2y + 4x/\sqrt{3}$, $|AM| = |AK| - |MK| = 2y + x\sqrt{3}$. En forma análoga encontramos: $|AN| = 2x + y\sqrt{3}$. Según la condición, $|AN| + |AM| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC|) = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})$. Por otra parte, $|AN| + |AM| = (2 + \sqrt{3})(x + y) = 2(2 + \sqrt{3})$. Es una contradicción.

2b) El punto O se halla fuera del $\triangle ABC$. Se puede mostrar que el $\angle B$ es obtuso. De lo contrario, si $\angle C > 90°$, $\frac{3\angle A - \angle C}{2} < 0$, por lo que O se encuentra en el interior del segmento AC que no contiene B; no obstante, esta circunstancia no influye en la respuesta. En las designaciones del punto anterior tendremos: $|AM| = 2y - x\sqrt{3}$, $|AN| = y\sqrt{3} - 2x$. Del sistema $y + x = 2$, $|AM| + |AN| = (2 + \sqrt{3})y - (2 + \sqrt{3})x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ encontraremos: $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{4}$, $|AM| =$

$=\frac{5}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}$, el radio de la circunferencia es igual a $\sqrt{|AM|^2+|MO|^2}=1/2\sqrt{34-15\sqrt{3}}$.

I.282. Si C_1 es un punto simétrico a C respecto a AB, y B_1 es simétrico a B respecto a AC, entonces (como regla, a, b, c son los lados del $\triangle ABC$ y S es su área) $|C_1B_1|^2=$ $=b^2+c^2-2bc\cos 3A=a^2+2bc(\cos A-$ $-\cos 3A)=a^2+8bc\,\mathrm{sen}^2 A\cos A=a^2+16\times$ $\times(b^2+c^2-a^2)\frac{S^2}{b^2c^2}$. Así se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2b^2c^2+16S^2(b^2+c^2-a^2)=8b^2c^2, \\ a^2b^2c^2+16S^2(a^2+b^2-c^2)=8a^2b^2, \\ a^2b^2c^2+16S^2(c^2+a^2-b^2)=14c^2a^2. \end{cases}$$

Restando la 2ª ecuación de la 1ª y tomando en consideración que $a\neq c$, encontraremos que $4S^2=b^2$. Al sustituir S^2 por $b^2/4$ tenemos:

$$\begin{cases} a^2c^2+4(b^2-c^2-a^2)=0, \\ a^2b^2c^2+4b^2c^2+4b^2a^2-4b^4-14a^2c^2=0, \\ b^2=4S^2. \end{cases}$$

Al designar $a^2c^2=x$, $a^2+c^2=y$, tenemos:

$$\begin{cases} 4y-x=4b^2, \\ x(b^2-14)+4b^2y=4b^4. \end{cases}$$

Después de multiplicar en el último sistema la 1ª ecuación por b^2 y restándola de la 2ª, encontramos $x(2b^2-14)=0$, de donde $b=\sqrt{7}$. *Respuesta*: 1, $\sqrt{7}$,

$\sqrt{8}$ o bien $\dfrac{\sqrt{21+4\sqrt{14}}+\sqrt{21-4\sqrt{14}}}{2}$, $\sqrt{7}$,
$\dfrac{\sqrt{21+4\sqrt{14}}+\sqrt{21-4\sqrt{14}}}{2}$.

I.283. Demuéstrese que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|b^2-c^2|}{2S}$, donde S es el área del triángulo (de manera análoga para los demás ángulos). *Respuesta*: $\operatorname{arctg}|\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta|$.

I.284. Hallemos la cotangente del ángulo comprendido entre la mediana y un lado del triángulo ABC. Si $\angle A_1AB = \varphi$ (AA_1 es la mediana del $\triangle ABC$; las designaciones son corrientes; a, b, c son los lados del triángulo, m_a, m_b, m_c son sus medianas; S es su área), entonces $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{2c-a\cos\beta}{h_c} = \dfrac{2c^2-ac\cos B}{2S} = \dfrac{3c^2+b^2-a^2}{4S}$. Sea M el punto de intersección de las medianas del $\triangle ABC$; las rectas perpendiculares a las medianas que parten de los vértices A y B, concurren en C_1; $\angle MC_1B = \angle MAB = \varphi$ (el cuadrilátero MAC_1B es inscrito). Por tanto, $S_{MBC_1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}m_b\right)^2 \operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{(2a^2+2c^2-b^2)(3c^2+b^2-a^2)}{72S}$.
El área del triángulo buscado es la suma de las áreas de seis triángulos, cada una de las cuales se encuentra de manera análoga. Como resultado obtenemos $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{12S} = \dfrac{27(R^2-d^2)^2}{4S}$ (demuestren la igualdad $a^2+b^2+c^2 = 9(R^2-d^2)$ por su propia cuenta).

Respuesta: $\frac{27}{4}(R^2-d^2)^2$. **I.285.** $60°$.

I.286. Notemos, al principio, que $|MN|$ es igual a la tangente exterior común a las circunferencias con los centros O_1 y O_2 (problema I.142). Por consiguiente, si los radios de estas circunferencias son x e y, $x+y=$ $=2R-a$, entonces $|MN|=\sqrt{a^2-(x-y)^2}$. Sea φ el ángulo formado por AB con O_1O_2; L, el punto de intersección de AB y O_1O_2. Tenemos $|O_1L|=\frac{xa}{x+y}=\frac{xa}{2R-a}$, $\operatorname{sen}\varphi=\frac{x}{|O_1L|}=$ $=\frac{2R-a}{a}$, $|OL|=|x+|O_1L|-R|=\frac{R}{2R-a}\times$ $\times|2x+a-2R|=\frac{R}{2R-a}|x-y|$, $|AB|=$ $=2\sqrt{R^2-|OL|^2\operatorname{sen}^2\varphi}=\frac{2R}{a}\sqrt{a^2-(x-y)^2}=$ $=\frac{2R}{a}|MN|$. *Respuesta*: $\frac{2R}{a}$ (en ambos casos).

I.287. El ángulo AKB es igual a $90°$ (véase el problema I.255). Sea R el punto de intersección de BK y AC; Q, un punto de BK tal, que $NQ \parallel AC$. Utilizando las designaciones corrientes tendremos: $|AR|=$ $=|AB|=c$, $|MB|=c-(p-a)=$ $=p-b=|NB|$, $\frac{|MK|}{|KN|}=\frac{|MR|}{|QN|}=\frac{|CB|}{|RC|}=$ $=\frac{a}{b-c}$ (consideramos que $b>c$). Puesto que $|MN|=2(p-c)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, entonces $|MK|=a\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. Lo mismo se hace para otros segmentos. El triángulo buscado es semejante a ABC con la razón de semejanza sen $(\alpha/2)$. Su área es igual a $S \times$ sen$^2 (\alpha/2)$.

I.288. Sea $|AM| = x$, $|CN| = y$, $x + y = a$; a, el lado del cuadrado. Designemos con E y F los puntos de intersección de MD y DN con AC. Los segmentos $|AE|$, $|EF|$, $|CF|$ se calculan fácilmente haciendo uso de a, x, y, después de lo cual se puede verificar la igualdad $|EF|^2 = |AE|^2 + |FC|^2 - |AE| \cdot |FC|$.

I.289. Supongamos que P es el punto de intersección de la recta DE con AB, K es el punto de AB tal que $KD \parallel AC$, $\triangle AKD$ es isósceles ($\angle KDA = \angle DAC = \angle DAK$). Por lo tanto KD es la mediana en el triángulo rectángulo y $|MN| = \frac{1}{2}|KD| = \frac{1}{4}|AP| = \frac{1}{4}|AE| = \frac{1}{4}a$.

I.290. Sea A_1 el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas alrededor del $\triangle ABC$ y del $\triangle AB_1C_1$. Del planteamiento se deduce que $|BB_1| = |CC_1|$; además, $\angle ABA_1 = \angle ACA_1$ y $\angle AB_1A_1 = \angle AC_1A_1$. Por consiguiente, $\triangle A_1BB_1 = \triangle A_1CC_1$. Por lo tanto, $|A_1B| = |A_1C|$. Sea que $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle ABA_1 = \angle ACA_1 = \varphi$. Puesto que el $\triangle A_1BC$ es isósceles, $\angle A_1BC = \angle A_1CB$, es decir, $\beta + \varphi = \gamma - \varphi$, $\varphi = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$ y, si el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del $\triangle ABC$ es igual a R, entonces $|AA_1| = 2R$ sen $\frac{\gamma - \beta}{2}$; pero $|AB| -$

$- | AC | = 2R$ (sen γ — sen β) $=$
$= 4R$ sen $\frac{\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = 2 \, | AA_1 |$ sen $\frac{\alpha}{2}$;
por consiguiente, $| AA_1 | = \dfrac{a}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$.

1.291. Notemos que los puntos A, O, M, B se hallan en una circunferencia ($\angle AMB$ es la semisuma del arco AB y del arco simétrico a AB con respecto a OC, es decir, $\angle AMB = \angle AOB$). Tracemos en AM el segmento MK igual a MB; entonces, $\triangle AKB$ es semejante a $\triangle OMB$. *Respuesta*: $| AB | = 2a$.

1.292. Supongamos que $| AB | = 2r$, $| BC | = 2R$, O_1 es el punto medio de AB, O_2 es el punto medio de BC, O_3 es el punto medio de AC, O es el centro de la cuarta circunferencia, cuyo radio es x. De la condición se deduce que $| O_1O_3 | = R$, $| O_2O_3 | = r$, $| O_1O | = r + x$, $| O_2O | = R + x$, $| O_3O | = R + r - x$. Igualando las expresiones para las áreas de los triángulos O_1OO_3 y O_1OO_2, obtenidas usando la fórmula de Herón y como el semiproducto de la base correspondiente por la altura, obtenemos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt{(R+r)\,r\,(R-x)\,x} = \frac{1}{2} Rd, \\ \sqrt{(R+r+x)\,Rrx} = \frac{1}{2}(R+r)\,d. \end{cases}$$

Elevando al cuadrado cada una de éstas y restando una de la otra, encontramos que $x = d/2$. *Respuesta*: $d/2$.

1.293. Sea P el pie de la perpendicular bajada desde N sobre la recta MB, entonces $|MP| = R\cos\alpha$; por consiguiente, $|MP|$ es igual a la distancia desde el centro O hasta AB; pero la distancia desde el vértice del triángulo hasta el punto de intersección de las alturas es dos veces mayor que la distancia desde el centro del círculo circunscrito hasta el lado opuesto (problema I.20), es decir, $|MP| = \frac{1}{2}|MK|$. De aquí se deduce que, si M se halla en el mayor de los arcos, es decir, $\angle AMB = \alpha$, entonces $|NK| = R$; pero si $\angle AMB = 180° - \alpha$ (es decir, M está situado en el arco menor de la circunferencia), entonces $|NK|^2 = R^2 (1 + 8\cos^2\alpha)$. *Respuesta*: $|NK| = R$, si M se encuentra en el arco mayor de la circunferencia; $|NK| = R\sqrt{1 + 8\cos^2\alpha}$, si M se encuentra en el arco menor de la circunferencia.

I.294. Supongamos que ABC es el triángulo dado, CD es la altura, O_1 y O_2 son los incentros de las circunferencias inscritas en el $\triangle ACD$ y el $\triangle BDC$, K y L son los puntos de intersección de las rectas DO_1 y DO_2 con AC y CB. Puesto que el $\triangle ADC$ es semejante al $\triangle CDB$ y KD y LD son las bisectrices de los ángulos rectos de estos triángulos, entonces O_1 y O_2 dividen KD y LD, respectivamente, en razón igual. Por lo tanto, $KL \parallel O_1O_2$. Pero el cuadrilátero $CKDL$ es inscrito ($\angle KCL = \angle KDL = 90°$). Por consiguiente, $\angle CKL = \angle CDL = \pi/4$, $\angle CLK = \angle CDK = \pi/4$. De este modo, la recta O_1O_2 forma con los catetos ángulos iguales a $\pi/4$. Si M y N son los puntos de intersección de O_1O_2 con CB y AC, entonces $\triangle CMO_2 = \triangle CDO_2$ (CO_2 es común, $\angle O_2CD = \angle O_2CM$, $\angle CDO_2 = \angle CMO_2$). Por ende, $|CM| = |NC| = h$. *Respuesta*: los ángulos del triángulo son iguales a $\pi/4$, $\pi/4$, $\pi/2$ y el área es igual a $h^2/2$.

I.295. Las designaciones se comprenden, al examinar la fig. 13. $CKDL$ es un rectángulo.

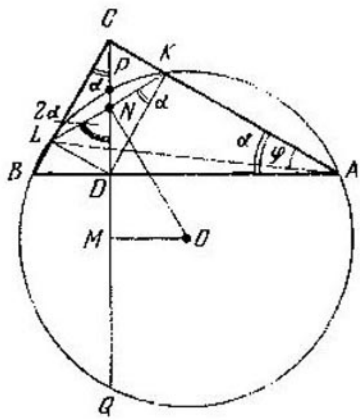

Fig. 13

Puesto que $\angle LKA = 90° + \alpha$, $\angle LBA = 90° - \alpha$, el cuadrilátero $BLKA$ es inscrito,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|LC|}{|CA|} = \frac{h\cos\alpha}{\dfrac{h}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha. \qquad (1)$$

Si R es el radio de la circunferencia, entonces

$$R = \frac{|KL|}{2\operatorname{sen}\varphi} = \frac{h}{2\operatorname{sen}\varphi}. \qquad (2)$$

Puesto que $\angle LOK = 2\varphi$, $|ON| = R\cos\varphi =$

$= \frac{h}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi} = \frac{h}{\mathrm{sen}\,2\alpha}$ (se han empleado las igualdades (1) y (2)), $|OM| = |ON|$ sen $(90° - 2\alpha) = h\frac{\cos 2\alpha}{\mathrm{sen}\,2\alpha} = h$ ctg 2α y, por fin, obtenemos la expresión $\frac{1}{2}|PQ| = |QM| = \sqrt{R^2 - |OM|^2} = \sqrt{\frac{h^2}{4\mathrm{sen}^2\varphi} - h^2\,\mathrm{ctg}^2\,2\alpha} = h\sqrt{\frac{1}{2}(1+\mathrm{ctg}^2\varphi) - \mathrm{ctg}^2\,2\alpha} = h \times \sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{4}{\mathrm{sen}^2\,2\alpha}\right) - \mathrm{ctg}^2\,2\alpha} = \frac{h\sqrt{5}}{2}$, $|PQ| = h\sqrt{5}$. Si ahora los segmentos $|PD|$ y $|DQ|$ de la cuerda se designan con x e y, entonces $x+y = h\sqrt{5}$, $xy = h^2$, de donde encontramos que los segmentos buscados de la cuerda serán iguales a $\frac{\sqrt{5}+1}{2}h$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}h$.

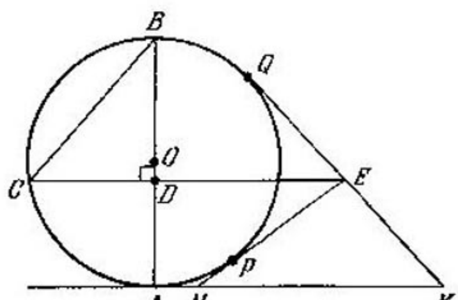

Fig. 14

I.296. Sean P y Q (fig. 14) los puntos de tangencia de las tangentes trazadas desde E. Demostremos que $|EP| = |EQ| = |BD|$. En efecto, $|EP|^2 = (|ED| + |DC|) \times$

$\times (|ED| - |DC|) = |ED|^2 - |DC|^2 = |BC|^2 - |DC|^2 = |BD|^2$ (según el planteamiento, $|ED| = |BC|$). Designemos: $|KN| = x$, $|PN| = |NA| = y$, $|EQ| = |EP| = |BD| = z$. Entonces, $|KE| = x + y - z$. Tenemos: $S_{KEN} = \frac{1}{2} x (2R - z)$; por otra parte, $S_{KEN} = S_{KON} + S_{KOE} - S_{EON} = \frac{1}{2} R (x + x + y - z - y - z) = R (x - z)$. De esta manera, $\frac{1}{2} x (2R - z) = R (x - z)$, $x = 2R$.

Respuesta: $2R$.

I.297. Encontremos, al principio, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{|AO|}{|OC|}$.

Designemos: $\angle C = \beta$. Tenemos $\frac{|AO|}{|OC|} = \frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} \alpha}{\frac{1}{2} (p-a)(p-b) \operatorname{sen} \beta}. \qquad (1)$$

Pero según el teorema de los cosenos $a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = (p-a)^2 + (p-b)^2 - 2 (p-a) \times (p-b) \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{p (p-a-b) + ab \cos \alpha}{(p-a)(p-b)}$, de donde $\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{(1 - \cos \beta)(1 + \cos \beta)} =$

$$= \frac{\sqrt{ab (1 - \cos \alpha)(2p^2 - 2ap - 2bp + ab + ab \cos \alpha)}}{(p-a)(p-b)}. \qquad (2)$$

Si $\alpha \to 0$, entonces $\cos \alpha \to 1$; por consiguiente, $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} = \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \to \sqrt{2}$, cuando $\alpha \to 0$. Teniendo en cuenta la última observación, por (1) y (2) obtenemos $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{|AO|}{|OC|} = \sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}$. Puesto que $|AC| \to p$, entonces $\lim\limits_{\alpha \to 0} |AO| = \frac{p\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+\sqrt{(p-a)(p-b)}}$.