

## II. Problemas y teoremas selectos de planimetría

II.1. Demuéstrase que, si  $D$  es la proyección de  $M$  sobre  $AB$ , entonces  $|AD|^2 - |DB|^2 = |AM|^2 - |MB|^2$ .

II.2. Si se encontrase un punto tal (designémoslo por  $N$ ), la recta  $MN$  sería perpendicular a los tres lados del triángulo.

II.3. Si  $M$  es el punto de intersección de las perpendiculares bajadas desde  $A_1$  y  $B_1$  sobre  $BC$  y  $AC$ , entonces (véase el problema II.1)  $|MB|^2 - |MC|^2 = |A_1B|^2 - |A_1C|^2$ ,  $|MC|^2 - |MA|^2 = |B_1C|^2 - |B_1A|^2$ ; sumando estas igualdades y tomando en consideración el planteamiento del problema, obtenemos que  $|MB|^2 - |MA|^2 = |C_1B|^2 - |C_1A|^2$ , es decir,  $M$  se halla en la perpendicular trazada hacia  $AB$  por  $C_1$ .

II.4. Del resultado del problema II.3 se deduce que la condición de que las perpendiculares bajadas desde  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  sobre los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  concurren en un punto, es idéntica a la condición de intersección en un punto de las perpendiculares bajadas desde  $A$ ,  $B$  y  $C$  sobre  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  y  $A_1B_1$ .

II.5. Notemos que las perpendiculares bajadas desde  $A_1, B_1, C_1$  sobre  $BC, CA, AB$ , respectivamente, se cortan en el punto  $D$ , luego aprovechemos el resultado del problema II.4.

II.6. En el problema II.7 se demuestra un hecho más general. De los razonamientos del problema II.7 se deduce que el centro de la circunferencia se halla en la recta  $AB$ .

II.7. Introduzcamos el sistema de coordenadas rectangulares. Si las coordenadas de los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  y del punto  $M, (x, y)$ , entonces nuestro lugar geométrico de puntos se definirá por la ecuación  $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ , donde  $a = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ ; precisamente de aquí se deduce nuestra afirmación.

II.8. Si  $B$  es el punto de tangencia,  $O$  es el centro de la circunferencia dada, entonces  $|OM|^2 - |AM|^2 = |OM|^2 - |BM|^2 = |OB|^2 = R^2$ . Por consiguiente,  $M$  se halla en la recta perpendicular a  $OA$  (véase el problema II.1).

II.9. La condición que determina el conjunto de puntos  $M$ , es equivalente a la condición  $|AM|^2 - k^2 |BM|^2 = 0$ , es decir, es una circunferencia (véase el problema II.7). Esta circunferencia se llama *circunferencia de Apolonio*; su centro, como es fácil cerciorarse, se sitúa en la recta  $AB$ .

II.10. Puesto que  $MB$  es la bisectriz del ángulo  $AMC$ , entonces  $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ . Por consiguiente, la bisectriz del ángulo exterior res-



pecto al ángulo  $AMC$  corta la recta  $AC$  en un punto constante  $K$ :  $\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ , y el conjunto de puntos  $M$  buscado es un arco de la circunferencia construida sobre  $BK$  como sobre diámetro, estando aquél comprendido entre las rectas perpendiculares al segmento  $AC$ , las cuales pasan por los puntos  $A$  y  $C$ .

II.11. Supongamos que  $O_1$  y  $O_2$  son los centros de las circunferencias dadas,  $r_1$  y  $r_2$  son sus radios,  $M$  es el punto del conjunto buscado,  $MA_1$  y  $MA_2$  son las tangentes. Según lo enunciado,  $|MA_1| = k |MA_2|$ . Por lo tanto,  $|MO_1|^2 - k^2 |MO_2|^2 = r_1^2 - k^2 r_2^2$ . Por ende (véase el problema II.6), el conjunto buscado de puntos  $M$ , cuando  $k \neq 1$ , es una circunferencia con el centro situado en la recta  $O_1O_2$ , cuando  $k = 1$ , el conjunto buscado es una recta perpendicular a  $O_1O_2$ .

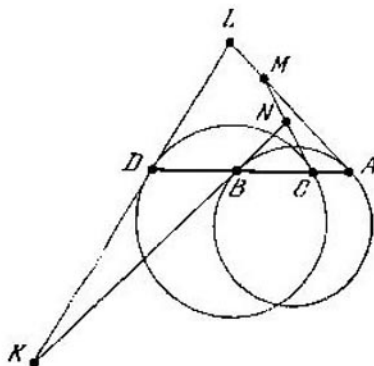


Fig. 15

II.12. Supongamos (fig. 15) que  $K$  y  $L$  son los puntos de intersección de la tangente

trazada a la segunda circunferencia que pasa por  $D$ , con las tangentes a la primera, las cuales pasan por  $B$  y  $A$ , mientras que  $M$  y  $N$  son otros dos puntos. Es fácil ver que  $\angle DKB = \angle CMA$  (cada uno de estos ángulos es igual a la mitad de la diferencia entre los ángulos que corresponden a los arcos  $AB$  y  $CD$ ). Por eso (en nuestra figura)  $\angle LMN + \angle LKN = 180^\circ$ . Por consecuencia, el cuadrilátero  $KLMN$  es inscrito. Luego tenemos:

$$\frac{|DK|}{|KB|} = \frac{\text{sen } \angle DBK}{\text{sen } \angle BDK} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} \sphericalangle AB}{\text{sen } \frac{1}{2} \sphericalangle DC}. \quad \text{Análoga-}$$

mente se encuentran las razones entre las longitudes de las tangentes trazadas por los puntos  $L$ ,  $M$  y  $N$ . Todas estas razones son iguales entre sí; por lo tanto, el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de  $KLMN$ , se halla en la recta que pasa por los centros de las circunferencias dadas (véase el problema II.6).

**II.13.** Después de expresar las distancias desde los vértices del triángulo hasta los puntos de tangencia, compruébese el cumplimiento de la condición del problema II.3.

**II.14.** Sea  $|AM_1| : |BM_1| : |CM_1| = p : q : r$ . Entonces, el conjunto de los puntos  $M$  tales que  $(r^2 - q^2) |AM|^2 + (p^2 - r^2) |BM|^2 + (q^2 - p^2) |CM|^2 = 0$ , es una línea recta que pasa por  $M_1$ ,  $M_2$  y el centro del círculo circunscrito alrededor del  $\triangle ABC$  (véase el problema II.7).

**II.15.** Los puntos  $M_1$  y  $M_2$  pertenecen al conjunto de puntos  $M$ , para los cuales  $5 |MA|^2 - 8 |MB|^2 + 3 |MC|^2 = 0$ .

Este conjunto es una línea recta y, evidentemente, el centro del círculo circunscrito satisface la condición que determina este conjunto (véase el problema II.7).

II.16. Sean  $|AA_1| = a$ ,  $|BB_1| = b$ ,  $|CC_1| = c$ ,  $|A_1B_1| = x$ ,  $|B_1C_1| = y$ ,  $|C_1A_1| = z$ . Entonces,  $|AB_1|^2 = a^2 + x^2$ ,  $|B_1C|^2 = c^2 + y^2$ , etc. Ahora es fácil comprobar la condición del problema II.3.

II.17. Sea que  $|AD| = x$ ,  $|BD| = y$ ,  $|CD| = z$ ,  $|AB| = a$ . Designemos con  $A_2, B_2, C_2$  los puntos de tangencia de las circunferencias inscritas en los triángulos  $BCD, CAD, ABD$  con los lados  $BC, CA, AB$ . Las perpendiculares trazadas por los puntos  $A_1, B_1, C_1$  hacia los lados  $BC, CA$  y  $AB$  coinciden con las perpendiculares levantadas a los mismos lados en los puntos  $A_2, B_2, C_2$ . Pero  $|BA_2| = \frac{a+y-z}{2}$ ,  $|A_2C| = \frac{a+z-y}{2}$ ; de manera análoga se encuentran  $|AC_2|$ ,  $|C_2B|$ ,  $|AB_2|$ ,  $|B_2C|$ . Ahora es fácil comprobar el planteamiento del problema II.3.

II.18. Aplíquese la condición del problema II.3 tomando como puntos  $A, B$  y  $C$  los centros de las circunferencias y como puntos  $A_1, B_1, C_1$ , sendos puntos de intersección de las circunferencias ( $A_1$  es uno de los puntos de intersección de las circunferencias con centros  $B$  y  $C$ , etc.).

II.19. Tomemos la tercera circunferencia con diámetro  $BC$ . Las cuerdas comunes de la 1ª y 3ª, así como de la 2ª y 3ª circunferencias son las alturas del triángulo bajadas desde los vértices  $B$  y  $C$ . Por consiguiente (véase el

problema II.18), la cuerda común de las circunferencias dadas también pasa por el punto de intersección de las alturas del triángulo  $ABC$ .

II.20. Sea  $O$  el centro de la circunferencia dada;  $R$ , su radio;  $MC$ , la tangente a ésta. Tenemos:  $|MO|^2 - |MN|^2 = |MO|^2 - |MB| \cdot |MA| = |MO|^2 - |MC|^2 = R^2$ , es decir, el punto  $M$  se halla en la recta perpendicular a la recta  $ON$  (véase el problema II.1). Es fácil demostrar que todos los puntos de esta recta pertenecen a nuestro conjunto.

II.21. Supongamos que  $O$  es el centro de la circunferencia,  $r$  es el radio de la misma,  $|OA| = a$ ,  $BC$  es cierta cuerda que pasa por  $A$ ,  $M$  es el punto de intersección de las tangentes. Entonces  $|OM|^2 = |BM|^2 + r^2$ ,

$$\begin{aligned} |AM|^2 &= |BM|^2 - \frac{1}{4}|BC|^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{2}|BC| - |BA|\right)^2 = \\ &= |BM|^2 - |BC| \cdot |BA| + \\ &+ |BA|^2 = |BM|^2 - |BA| \cdot |AC| = \\ &= |BM|^2 - r^2 + a^2. \end{aligned}$$

De esta manera,  $|OM|^2 - |AM|^2 = 2r^2 - a^2$ , es decir (véase el problema II.1), el conjunto buscado de puntos es una recta perpendicular a  $OA$ . Esta recta se llama *polar del punto  $A$  respecto a la circunferencia dada*.

II.22. Muéstrese que si  $M_1$  y  $M_2$  son dos puntos diferentes que pertenecen a nuestro

conjunto, cualquier punto  $M$  del segmento de la recta  $M_1M_2$  en el interior del triángulo también pertenece a este conjunto. Para eso, al designar con  $x_1, y_1, z_1$  las distancias desde  $M_1$  hasta los lados del triángulo y con  $x_2, y_2, z_2$ , las distancias desde  $M_2$ , podemos expresar las distancias  $x, y, z$  desde  $M$  hasta los lados mediante estas magnitudes y las distancias entre  $M_1, M_2, M$ . Así, por ejemplo, si  $|M_1M| = k |M_1M_2|$  y las direcciones de  $M_1M$  y  $M_1M_2$  coinciden, entonces  $x = (1 - k)x_1 + kx_2, y = (1 - k)y_1 + ky_2, z = (1 - k)z_1 + kz_2$ . De aquí se deduce que si la igualdad se cumple para tres puntos en el interior del triángulo que no se hallan en una recta, la misma se cumplirá para todos los puntos del triángulo. *Observación.* La afirmación del problema también será válida para un polígono convexo arbitrario. Más aún, pueden examinarse todos los puntos del plano, pero las distancias desde los puntos dispuestos a diferentes lados de la recta hasta esta última deben tomarse con signos opuestos.

**H.23.** Para que las distancias  $x, y, z$  sean lados de un triángulo, es necesario y suficiente que se cumplan las desigualdades  $x < y + z, y < z + x, z < x + y$ . Pero el conjunto de puntos, para los cuales, por ejemplo,  $x = y + z$  es un segmento con los extremos situados en los pies de las bisectrices (en los pies de las bisectrices dos distancias son iguales, mientras que la tercera es igual a cero, por consiguiente, la igualdad se cumple: pero del problema anterior se deduce que esta igualdad es válida para todos los puntos

del segmento). *Respuesta:* el lugar geométrico buscado consta de los puntos dispuestos en el interior del triángulo con vértices en los pies de las bisectrices.

II.24. Puesto que las perpendiculares bajadas desde  $A_2$ ,  $B_2$  y  $C_2$ , respectivamente, sobre  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  y  $A_1B_1$  concurren en un punto, entonces (problema II.4) también las perpendiculares bajadas desde  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$  sobre  $B_2C_2$ ,  $C_2A_2$  y  $A_2B_2$  también concurren en un punto.

II.25. Designemos por  $a_1$  y  $a_2$  las distancias desde  $A$  hasta las rectas  $l_2$  y  $l_3$ , respectivamente;  $b_1$  y  $b_2$  son las distancias desde  $B$  hasta las rectas  $l_3$  y  $l_1$ , respectivamente;  $c_1$  y  $c_2$  son las distancias desde  $C$  hasta las rectas  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son las distancias desde  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$ , respectivamente, hasta  $l$ . Para que las perpendiculares bajadas desde  $A$ ,  $B$  y  $C$  sobre  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  y  $A_1B_1$ , respectivamente, se corten en un punto, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad (problema II.3)  $|AB_1|^2 - |B_1C|^2 + |CA_1|^2 - |A_1B|^2 + |BC_1|^2 - |C_1A|^2 = 0$ , o bien  $(a_1^2 + y^2) - (c_2^2 + y^2) + (c_1^2 + x^2) - (b_2^2 + x^2) + (b_1^2 + z^2) - (a_2^2 + z^2) = 0$ , lo que conduce a la condición  $a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 + c_1^2 - c_2^2 = 0$  que no depende de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

II.26. Nos basta comprobar el cumplimiento de la condición (problema II.3)  $|AB_2|^2 - |B_2C|^2 + |CA_2|^2 - |A_2B|^2 + |BC_2|^2 - |C_2A|^2 = 0$ . Notemos que los triángulos  $BB_2C_1$  y  $AA_2C_1$  son semejantes, por consiguiente,  $|AC_1| \times$

$\times |C_1B_2| = |BC_1| \cdot |C_1A_2|$ , además,  $\angle AC_1B_2 = \angle BC_1A_2$ , por lo tanto,  $|AB_2|^2 - |BA_2|^2 = (|AC_1|^2 - |C_1B|^2) + (|C_1B_2|^2 - |C_1A_2|^2)$ . Después de escribir las igualdades correspondientes para  $|CA_2|^2 - |AC_2|^2$  y  $|BC_2|^2 - |CB_2|^2$  y sumarlas, obtenemos que las diferencias que figuran entre el primer paréntesis, en suma darán cero (aplicamos la condición del problema II.3 a los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$ ; obtendremos cero, puesto que las alturas se intersecan en un punto). No es difícil demostrar que  $AA_2$ ,  $BB_2$  y  $CC_2$  pasan por el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de  $ABC$ , es decir, la suma de diferencias entre el segundo paréntesis también es igual a cero.

**II.32.** Tracemos por  $K$  y  $L$  rectas paralelas a  $BC$ , hasta que se corten con la mediana  $AD$  en los puntos  $N$  y  $S$ . Sea  $|AD| = 3a$ ,  $|MN| = xa$ ,  $|MS| = ya$ . Puesto

que  $\frac{|LS|}{|NK|} = \frac{|AS|}{|AN|}$ ,  $\frac{|LS|}{|NK|} = \frac{|MS|}{|MN|}$ , entonces  $\frac{|AS|}{|AN|} = \frac{|MS|}{|MN|}$ ,  $\frac{(2+y)a}{(2-x)a} = \frac{y}{x}$ ,  $y = \frac{x}{1-x}$ .

La igualdad  $\frac{1}{|MK|} = \frac{1}{|ML|} + \frac{1}{|MP|}$  equivale a la igualdad  $\frac{1}{|MN|} = \frac{1}{|MS|} + \frac{1}{|MD|}$ ,  $\frac{1}{ax} = \frac{1}{ay} + \frac{1}{a}$ . Poniendo  $y = \frac{x}{1-x}$ , obtenemos la igualdad lícita.

**II.34.** Sea  $O$  el punto de intersección de las diagonales  $AC$  y  $BD$ ; aprovechando la semejanza de los triángulos correspondientes,

obtenemos  $\frac{|OK|}{|OC|} = \frac{|OK|}{|OB|} \cdot \frac{|OB|}{|OC|} = \frac{|OA|}{|OD|} \times$   
 $\times \frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM|}{|OD|}$ , lo que se necesitaba.

II.35. Sean  $F$  y  $D$  los puntos de intersección de  $EN$  y  $EM$  con  $AB$  y  $BC$ , respectivamente. Demostremos que el  $\triangle AFN$  y el  $\triangle MDC$  son semejantes. Aprovechando las semejanzas de diferentes triángulos y la igualdad de los lados opuestos del paralelogramo, tendremos:  $\frac{|NF|}{|FA|} = \frac{|NF|}{|FB|} \cdot \frac{|FB|}{|FA|} = \frac{|BD|}{|DM|} \times$   
 $\times \frac{|ED|}{|FA|} = \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|DC|}{|FE|} = \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|DC|}{|BD|} =$   
 $= \frac{|DC|}{|DM|}$ , es decir, el  $\triangle AFN$  es semejante al  $\triangle MDC$ .

II.36. La afirmación del problema se deduce de los dos hechos siguientes.

1) Si en los lados del cuadrilátero  $ABCD$  se toman los puntos  $K, L, M$  y  $N$  de tal manera que los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$  estén divididos por estos puntos en razón igual  $\left( \frac{|BK|}{|KA|} = \frac{|CM|}{|MD|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AN|}{|ND|} \right)$ , también los segmentos  $KM$  y  $LN$  están divididos por su punto de intersección  $P$  en la misma razón.

En efecto, del hecho de que las rectas  $KL$  y  $NM$  son paralelas a la diagonal  $AC$  se deduce:  $\frac{|KP|}{|PM|} = \frac{|KL|}{|NM|} = \frac{|KL|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|NM|} =$   
 $= \frac{|BK|}{|BA|} \cdot \frac{|AD|}{|ND|} = \frac{|BK|}{|BA|} \cdot \frac{|BA|}{|KA|} = \frac{|BK|}{|KA|}$ .

2) Si en los lados  $AB$  y  $CD$  del cuadrilátero se toman los puntos  $K_1$  y  $K, M_1$  y  $M$



de tal manera que  $\frac{|K_1K|}{|AB|} = \frac{|M_1M|}{|CD|} = \frac{1}{m}$ ,  $|AK_1| = |KB|$ ,  $|DM_1| = |CM|$ , el área del cuadrilátero  $K_1KMM_1$  constituye  $\frac{1}{m}$  parte del área del cuadrilátero  $ABCD$ . Efectivamente,  $S_{BKC} = \frac{|BK|}{|BA|} S_{ABC}$ ,  $S_{AM_1D} = \frac{|M_1D|}{|CD|} S_{ACD} = \frac{|BK|}{|BA|} S_{ACD}$ . Por consiguiente,  $S_{AKCM_1} = \left(1 - \frac{|BK|}{|BA|}\right) S_{ABCD} = \frac{|AK|}{|BA|} S_{ABCD}$ . En forma análoga  $S_{K_1KMM_1} = \frac{|K_1K|}{|AK|} S_{AKCM_1}$ . De esta manera,  $S_{K_1KMM_1} = \frac{|K_1K|}{|AB|} S_{ABCD} = \frac{1}{m} S$ .

II.37. Supongamos que  $K$  es el punto medio de  $DB$ ,  $L$  es el punto medio de  $AC$ ,  $S_{ANM} = S_{CNM}$  (puesto que  $|AL| = |LC|$ ), precisamente de la misma manera  $S_{BNM} = S_{DMN}$ ; de donde se deduce la afirmación del problema.

II.38. Si  $M$  es el punto medio de  $DC$ ,  $N$  es el punto medio de  $BC$ ,  $K$  y  $L$  son los puntos de intersección de  $DN$  con  $AM$  y  $AB$ , respectivamente, entonces  $\frac{|KM|}{|AK|} = \frac{|DM|}{|AL|} = \frac{1}{4}$ , es decir,  $|AK| = \frac{4}{5}|AM|$ ; por consiguiente,  $S_{ADK} = \frac{4}{5} S_{ADM} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} S = \frac{1}{5} S$  ( $S$  es el área del paralelogramo). Así pues, el área de la figura buscada será  $S - 4S_{ADK} = \frac{1}{5} S$ .

II.39. Supongamos que  $Q$  es el punto medio de  $AD$ ,  $N$ , el punto medio de  $BC$ ,  $M$ , el

punto medio de  $DC$ ;  $K, P, R$  son los puntos de intersección de  $DN$  y  $AM$ ,  $QC$  y  $DN$ ,  $QC$  y  $AM$ . Entonces,  $|DK| = \frac{2}{5} |DN|$ ,

$$|DP| = |PN|, \quad |QP| = |PC|, \quad |QR| = \frac{4}{3} |QC|,$$

$$\frac{S_{RPQ}}{S_{QPD}} = \frac{|RP|}{|QP|} \cdot \frac{|KP|}{|DP|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}. \quad S_{RPK} = \\ = \frac{1}{15} \cdot \frac{S}{8} = \frac{S}{120}.$$

Por consiguiente, del cuadrilátero examinado en el problema anterior se separan cuatro triángulos con el área  $\frac{S}{120}$ ; de esta manera, el área del octágono buscado será  $\frac{S}{5} - \frac{4S}{120} = \frac{S}{6}$ .

**II.40.** Supongamos que la recta  $HC$  corta  $AB$  y  $LM$  en los puntos  $T$  y  $N$ , respectivamente, la recta  $AL$  corta  $ED$  en el punto  $K$  y la recta  $BM$  corta  $PG$  en el punto  $P$ . Tenemos  $S_{ACDE} = S_{ACHK} = S_{ATNL}$ ,  $S_{BCFG} = S_{BCHP} = S_{BMNT}$ ; de este modo,  $S_{ACDE} + S_{BCFG} = S_{ABML}$ .

**II.41.** Designemos con  $Q$  el área del pentágono;  $s_1, s_2$  y  $s_3$  son las áreas de los triángulos adyacentes a uno de los lados, a la base menor y a otro lado;  $x$  es el área del triángulo comprendido entre los triángulos, cuyas áreas son  $s_1$  y  $s_2$ ,  $y$  es el área del triángulo comprendido entre los triángulos de las áreas  $s_2$  y  $s_3$ . Entonces,  $s_1 + x + s_2 = s_2 + y + s_3 = \frac{1}{2} (x + y + s_2 + Q)$ . De esta manera,  $s_1 + x +$

$$\begin{aligned} & \dagger s_2 + s_2 + y + s_3 = x + y + s_2 + Q \Rightarrow \\ \Rightarrow & s_1 + s_2 + s_3 = Q. \end{aligned}$$

II.42. Si  $S$  es el área del paralelogramo, entonces  $S_{ABK} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S$ , por otra parte,  $S_{DRC} = S_{EKC} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S$ , por lo tanto,  $S_{ABK} = S_{EKC}$ ; en forma análoga  $S_{AKD} = S_{KCP}$ ; sumando las dos últimas igualdades, obtenemos:  $S_{ABKD} = S_{CEKF}$ .

$$\begin{aligned} \text{II.43. Tenemos: } & \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{S_{ACC_1}}{S_{CC_1B}} = \\ & = \frac{\frac{1}{2}|AC| \cdot |CC_1| \operatorname{sen} \angle ACC_1}{\frac{1}{2}|CC_1| \cdot |CB| \operatorname{sen} \angle O_1CB} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle ACC_1}{\operatorname{sen} \angle C_1CB}. \end{aligned}$$

Al obtener igualdades análogas para las relaciones  $\frac{|BA_1|}{|A_1C|}$  y  $\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$  y multiplicándolas, obtenemos la afirmación requerida.

II.44. Demostremos que si las rectas  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$  se intersecan en un punto (designémoslo por  $M$ ), entonces  $R^* = 1$  (y, por consiguiente, también  $R = 1$ ; véase el problema II.43). Según el teorema de los senos para el  $\triangle AMC$  tenemos:  $\frac{\operatorname{sen} \angle ACC_1}{\operatorname{sen} \angle A_1AC} = \frac{|AM|}{|MC|}$ . Al escribir igualdades análogas para los triángulos  $AMB$  y  $BMC$  y multiplicándolas, obtenemos la afirmación requerida. Inversamente, sea que  $R = 1$  y todos los puntos  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  (o sólo uno de éstos) se hallan en los lados del triángulo; al trazar las rectas  $AA_1$  y  $BB_1$ , designamos el punto de su intersección con  $M_1$ ; sea que la recta  $CM_1$  corta  $AB$  en el punto  $C_2$ .

Tomando en consideración el planteamiento del problema y la necesidad demostrada de la condición  $R = 1$ , tendremos que  $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|}$ ; además, los puntos  $C_1$  y  $C_2$  se hallan simultáneamente en el segmento  $AB$  o bien fuera de éste. Por consiguiente,  $C_1$  y  $C_2$  coinciden.

II.45. Supongamos que  $A_1, B_1, C_1$  se hallan en una recta. Tracemos por  $C$  la recta paralela a  $AB$  y designemos con  $M$  el punto de su intersección con la recta  $A_1B_1$ . A partir de la semejanza de los triángulos correspondientes obtenemos:  $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BC_1|}{|CM|} = \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CM|}{|AC_1|}$ . Al sustituir las razones correspondientes en la expresión de  $R$  (véase el problema II.43) y haciendo uso de estas igualdades, obtenemos que  $R = 1$ . La afirmación inversa se demuestra de manera análoga a como esto se hizo en el problema II.44 (tracemos la recta  $B_1A_1$  y designemos con  $C_2$  el punto de su intersección con  $AB$ , etc.).

II.46. Compruébese que, si para las rectas dadas  $R^* = 1$ , también para las simétricas será lo mismo. Además, si la recta que pasa, por ejemplo, por el vértice  $A$ , corta el lado  $BC$ , también la recta simétrica a ésta respecto a la bisectriz del ángulo asimismo cortará el lado  $BC$  (véanse los problemas II.43, II.44).

II.47. Si  $A_0, B_0, C_0$  son los puntos medios de los segmentos  $AO, BO, CO$ , respectivamente, las rectas construidas resultan simétricas a las rectas  $A_0O, B_0O, C_0O$  respecto a

las bisectrices del triángulo  $A_0B_0C_0$  (véase el problema II.46).

II.48. a) Supongamos que la recta  $BM$  corta  $AC$  en el punto  $B'$  y la recta  $CK$  corta  $AB$  en  $C'$ . Tracemos por  $M$  una recta paralela a  $AC$  y designemos con  $P$  y  $Q$  los puntos de su intersección con  $AB$  y  $BC$ , respectivamente. Es evidente que  $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{|PM|}{|MQ|}$ . Al trazar por  $K$  una recta paralela a  $AB$  y designando con  $E$  y  $F$  sus puntos de intersección con  $CA$  y  $CB$ , respectivamente, tendremos:  $\frac{|BC'|}{|C'A|} = \frac{|FK|}{|KE|}$ . Hagamos construcción análoga para el punto  $L$ . Sustituyendo las razones que figuran en  $R$  (véase el problema II.43), con ayuda de estas igualdades tendremos en cuenta que para cada segmento señalado en el numerador habrá otro, igual a éste, en el denominador, por ejemplo:  $|PM| = |KE|$ .

b) Para concretar supongamos que la recta  $l$  corta los segmentos  $C_0A$ ,  $CA_0$  y forma con  $OK$  el ángulo agudo  $\varphi$ . La recta  $A_1L$  divide el segmento  $MK$  (a partir del punto  $M$ ) en la razón  $\frac{S_{LMA_1}}{S_{LKA_1}}$ . De manera análoga se encuentran las razones, en las cuales se dividen los lados  $KL$  y  $LM$  del triángulo  $KLM$ . Hemos de demostrar que tiene lugar la igualdad  $R = 1$  (véase el problema II.43). Sustituyamos las razones de los segmentos por la razón entre las áreas de los triángulos correspondientes. La expresión  $R$  contendrá en el numerador  $S_{LMA_1}$  y en

el denominador,  $S_{KMC_1}$ . Demostremos que  $\frac{S_{LMA_1}}{S_{KMC_1}} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}$ , donde  $A$  y  $C$  son los ángulos del triángulo  $ABC$ . Es evidente que  $\frac{S_{B_0OA_0}}{S_{B_0OC_0}} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}$ . Además,  $\angle A_1B_0A_0 = \angle C_0B_0A_0 + \angle A_1B_0C_0 = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} + \varphi$  (esto se deduce de que la circunferencia con el diámetro  $AO$  pasa por  $B_0$ ,  $C_0$  y  $A_1$ ) y  $\angle B_0A_1O + \angle B_0AO = \frac{\angle A}{2}$ . Precisamente de la misma manera  $\angle B_0C_1O = \frac{\angle C}{2}$  y  $\angle C_1B_0C_0 = (90^\circ - \frac{\angle B}{2}) + \angle C_1OL = (90^\circ - \frac{\angle B}{2}) + (180^\circ - \angle C - \angle B_0OC_1) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} + (\angle B_0OA_1 - \angle C) = 90^\circ - \angle B/2 + (180^\circ - \angle A - \angle C - \varphi) = 90^\circ + \angle B/2 - \varphi$ , es decir,  $\text{sen } \angle A_1B_0A_0 = \text{sen } \angle C_1B_0C_0$ . Por consiguiente,

$$\frac{S_{A_1B_0A_0}}{S_{C_1B_0C_0}} = \frac{|B_0A_1| \cdot |B_0A_0|}{|B_0C_1| \cdot |B_0C_0|} = \frac{\text{sen } \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{\text{sen } \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A}.$$

Sea  $r$  el radio de la circunferencia inscrita,  $|OL| = |OK| = |OM| = a$ . Tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{S_{LMA_1}}{S_{KMC_1}} &= \frac{S_{LOM} + S_{LOMA_1}}{S_{KOM} + S_{KOMC_1}} = \\ &= \frac{\frac{a^2}{r^2} S_{A_0OB_0} + \frac{a}{r} S_{A_0OB_0A_1}}{\frac{a^2}{r^2} S_{C_0OB_0} + \frac{a}{r} S_{C_0OB_0C_1}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{a}{r} S_{A_0OB_0} + (S_{A_0B_0A_1} - S_{A_0OB_0})}{\frac{a}{r} S_{C_0OB_0} + (S_{C_0B_0C_1} - S_{C_0OB_0})} = \\
&= \frac{\left(\frac{a}{r} - 1\right) S_{A_0OB_0} + S_{A_0B_0A_1}}{\left(\frac{a}{r} - 1\right) S_{C_0OB_0} + S_{C_0B_0C_1}} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}. \quad (\text{La ú-}
\end{aligned}$$

tima igualdad se deduce de que  $\frac{S_{A_0OB_0}}{S_{C_0OB_0}} = \frac{S_{A_0B_0A_1}}{S_{C_0B_0C_1}} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$ ). Precisamente del mis-

mo modo separamos en el numerador y el denominador de la representación  $R$  dos pares de magnitudes más, cuyas razones serán iguales a  $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$  y  $\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$ , respectivamente. Por lo tanto,  $R = 1$ . Nos queda demostrar que el número de los puntos de intersección de las rectas  $LA_1$ ,  $KC_1$  y  $MB_1$  con los segmentos  $KM$ ,  $ML$  y  $LK$ , respectivamente, es impar.

**II.49.** Examinemos el triángulo  $ACE$ , por cuyos vértices están trazadas las rectas  $AD$ ,  $CF$  y  $EB$ . Los senos de los ángulos formados por estas rectas con los lados del triángulo  $ACE$  son proporcionales a las cuerdas, en las cuales estos ángulos se apoyan: por consiguiente, la condición de  $R = 1$  (véase el problema II.44) equivale a la condición dada en el problema.

**II.50.** Compruébese que la igualdad  $R = 1$  se cumple (en el punto b) aprovechen el resultado del problema I.234) y que todos los tres puntos se hallan en las prolongaciones de los lados del triángulo. De esta manera nuestra

afirmación se deduce del teorema de Menelao (véase el problema II.45).

II.51. Según la propiedad de las secantes que parten de un punto exterior hacia la circunferencia o según la propiedad de los segmentos de cuerdas de la circunferencia que pasan por un punto, tendremos:  $|BC_1| \times |BC_2| = |BA_1| \cdot |BA_2|$ ,  $|CB_1| \times |CB_2| = |CA_1| \cdot |CA_2|$ ,  $|AB_1| \times |AB_2| = |AC_1| \cdot |AC_2|$ . Ahora es fácil comprobar que, si la afirmación del teorema de Ceva (igualdad  $R = 1$ ) se cumple para los puntos  $A_1, B_1, C_1$ , ésta se verifica también para los puntos  $A_2, B_2, C_2$ . Además, de la afirmación del problema se deduce que los tres puntos  $A_2, B_2, C_2$  o solamente uno de éstos se hallan en los lados correspondientes del triángulo (véase el problema II.44).

II.52. Después de escribir la igualdad  $R = 1$  (según los teoremas de Ceva y de Menelao, véanse los problemas II.44 y II.45) para los puntos  $A_1, B_1, C_1; A_1, B_1, C_2; A_1, B_2, C_1; A_2, B_1, C_1$  obtendremos que también para los puntos  $A_2, B_2, C_2$  se cumple la igualdad  $R = 1$ . Ahora nos queda demostrar que los tres puntos  $A_2, B_2, C_2$  se hallan en las prolongaciones de los lados del triángulo (así será, si los puntos  $A_1, B_1, C_1$  se sitúan en los lados del triángulo) o solamente uno de ellos se encuentra en la prolongación (si en los lados del triángulo se halla uno de los puntos  $A_1, B_1, C_1$ ) y hacer uso del teorema de Menelao (véase el problema II.45).

II.53. Hágase uso del teorema de Menelao (véase el problema II.45). En calidad de



vértices del triángulo dado tómense los puntos medios de los lados del triángulo  $ABC$ , en los lados y las prolongaciones de cuyos lados se hallan los puntos examinados.

II.54. Si  $a$  es la longitud del lado del pentágono  $MKLN P$ ,  $b$  es la longitud del lado del pentágono con un lado en  $AB$ ,  $c$  es la longitud del lado del pentágono con un lado en  $AC$ , entonces  $\frac{|BA_1|}{|C_1B|} = \frac{a}{b}$ ,  $\frac{|AC_1|}{|B_1A|} = \frac{b}{c}$ ,  $\frac{|CB_1|}{|A_1C|} = \frac{c}{a}$ . Al multiplicar estas igualdades, encontramos que  $R=1$  y aplicamos el teorema de Ceva (problema II.44).

II.55. Compruébese que los puntos  $A_1, A_2, A_3$  y  $B_1, B_2, B_3$  se hallan en los lados del triángulo  $O_1O_2O_3$  ( $O_1, O_2, O_3$  son centros de las circunferencias) o en las prolongaciones de estos lados y que la razón de las distancias a partir de cada uno de estos puntos hasta los vértices correspondientes del triángulo  $O_1O_2O_3$  es igual a la razón de los radios de las circunferencias correspondientes. Luego se puede aplicar el teorema de Menelao (véase el problema II.45) para cada uno de estos tres puntos.

II.56. La afirmación del problema se deduce de los problemas II.43, II.44.

II.58. Valgámonos de la igualdad  $\frac{\text{sen } \angle B_1AA_2}{\text{sen } \angle A_2AC_1} = \frac{|AC_1|}{|AB_1|} \cdot \frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|}$ . Al obtener igualdades análogas para otros ángulos y multiplicándolas, obtenemos nuestra afirmación a base de los resultados de los problemas II.43 y II.44.

II.59. Apliquemos el teorema de Menelao a los triángulos  $ABD$ ,  $BDC$  y  $DCA$  (problema II.45\*, observación):  $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PA} = -1$ ,  $\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DQ}{QB} = -1$ ,  $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DR}{RC} \times \times \frac{CN}{NA} = -1$  ( $L$ ,  $M$  y  $N$  son puntos de intersección de  $AB$  y  $PQ$ ,  $BC$  y  $QR$ ,  $AC$  y  $PR$ , respectivamente). Al multiplicar estas igualdades, obtenemos  $\frac{CN}{NA} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} = -1$ , es decir, los puntos  $L$ ,  $M$  y  $N$  se hallan en una recta.

II.60. Examinemos el sistema de coordenadas, cuyos ejes son las rectas dadas (es el llamado sistema de coordenadas «afín»). La ecuación de la recta en este sistema, como siempre, tiene la forma  $ax + by + c = 0$ . Primero demos-tremos la necesidad de la condición dada. Supongamos que el punto  $N$  tiene las coordenadas  $(u, v)$  y el punto  $M$   $(\lambda u, \lambda v)$ , las ecuaciones de las rectas  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$ , respectivamente, tendrán la forma:  $y - v = k_1(x - u)$ ,  $y - v = k_2(x - u)$ ,  $y - \lambda v = k_3(x - \lambda u)$ ,  $y - \lambda v = k_4(x - \lambda u)$ . Entonces, los puntos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  dispuestos en el eje  $x$  tendrán en este eje las coordenadas  $u - \frac{1}{k_1}v$ ,  $u - \frac{1}{k_2}v$ ,  $\lambda u - \frac{\lambda}{k_3}v$ ,  $\lambda u - \frac{\lambda}{k_4}v$ , respectivamente, y los puntos  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  dispuestos en el eje  $y$  tendrán las coordenadas  $v - k_1u$ ,  $v - k_2u$ ,  $\lambda v - k_3\lambda u$ ,  $\lambda v - k_4\lambda u$ , respectivamente. Ahora es fácil comprobar el cumplimiento de la igualdad da-

da en el planteamiento. La suficiencia, como siempre, puede demostrarse por reducción al absurdo.

II.61. En los puntos a) y c) hace falta aplicar los teoremas de Ceva y de Menelao (problemas II.44\* y II.45\*, observación). En el punto b), además, se emplea el resultado del problema anterior; en este caso es cómodo, al igual que en el problema anterior, examinar el sistema de coordenadas afín, en el cual como ejes figuran las rectas  $AB$  y  $AC$ , mientras que los puntos  $B$  y  $C$  tienen las coordenadas  $(0; 1)$  y  $(1; 0)$ .

II.62. Designemos con  $S$  el punto de intersección de las rectas  $A_1M$ ,  $B_1L$  y  $C_1K$ . Apliquemos a los triángulos  $SMK$ ,  $SKL$  y  $SLM$  el teorema de Menelao (problema II.45\*, observación), obtenemos  $\frac{KL_1}{L_1M} \cdot \frac{MA_1}{A_1S} \times$   
 $\times \frac{SC_1}{C_1K} = -1$ ,  $\frac{LM_1}{M_1K} \cdot \frac{KC_1}{C_1S} \cdot \frac{SB_1}{B_1L} = -1$ ,  
 $\frac{MK_1}{K_1L} \cdot \frac{LB_1}{B_1S} \cdot \frac{SA_1}{A_1M} = -1$ . Después de multiplicar estas igualdades obtenemos:

$$\frac{KL_1}{L_1M} \cdot \frac{LM_1}{M_1K} \cdot \frac{MK_1}{K_1L} = -1. \quad (1)$$

La igualdad (1) es la condición necesaria y suficiente de que las rectas  $A_1M$ ,  $B_1L$  y  $C_1K$  se corten en un punto. La necesidad ya está demostrada. La suficiencia se demuestra, como siempre, por reducción al absurdo. (Designemos con  $S'$  el punto de intersección de  $A_1M$  y  $B_1L$ , tracemos  $S'C_1$ , designando por  $K'$  su punto de intersección con la recta dada

y demos­tre­mos que  $K$  y  $K'$  co­in­ci­den.) Puesto que la igualdad (1) pasa a sí misma al sustituir  $K$ ,  $L$ ,  $M$  por  $K_1$ ,  $L_1$ ,  $M_1$  y viceversa, la afirmación del problema resulta demostrada.

II.63. Aplicando el teorema de Ceva (problema II.44\*, observación) a los triángulos  $ABD$ ,  $BDC$  y  $CDA$ , obtenemos:  $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BF}{FD} \times$

$$\times \frac{DE}{EA} = 1, \quad \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DF}{FB} = 1, \quad \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AE}{ED} \times \\ \times \frac{DG}{GC} = 1. \text{ Al multiplicar estas igualdades,}$$

obtenemos:  $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$ , es decir, las rectas  $AQ$ ,  $BR$  y  $CP$  se intersecan en un punto. Designémoslo por  $N$ . Sea  $T$  el punto de intersección de  $PG$  y  $DN$ . Según el teorema de Menelao (problema II.45\*, observación) tenemos  $\frac{DT}{TN} \cdot \frac{NP}{PC} \cdot \frac{CG}{GD} = -1$ , de donde

$$\frac{DT}{TN} = -\frac{PC}{NP} \cdot \frac{GD}{CG} = -\frac{CP}{PN} \cdot \frac{GD}{CG}. \text{ Si } \frac{AE}{ED} = \\ = -\alpha, \quad \frac{BF}{FD} = \beta, \quad \frac{CG}{GD} = \gamma, \text{ entonces } \frac{AP}{PB} = \frac{\alpha}{\beta}, \\ \frac{CR}{RA} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{CN}{NP} = -\frac{BA}{PB} \cdot \frac{RC}{AR} = \frac{\alpha + \beta}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}, \\ \frac{CP}{PN} = -\left(1 + \frac{CN}{NP}\right) = -\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta}. \text{ Por} \\ \text{ende, } \frac{DT}{TN} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}. \text{ En la misma razón}$$

el segmento  $DN$  se divide por otras rectas.

II.64. Primero examinemos el caso límite, cuando el punto  $N$  se encuentra «en el infinito»; entonces, las rectas  $AN$ ,  $BN$  y  $CN$  son

paralelas a la recta  $l$ . Sea que las distancias desde los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  hasta la recta  $l$  son iguales a  $a$ ,  $b$  y  $c$  (por razones de comodidad supongamos que  $A$ ,  $B$  y  $C$  se hallan a un lado de  $l$ ). Las rectas paralelas a  $l$  que pasan por  $A$ ,  $B$  y  $C$ , cortan las rectas  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  y  $A_1B_1$  en los puntos  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ , respectivamente. Es fácil ver que  $\frac{|A_1C_2|}{|C_2B_1|} = \frac{a+c}{c-b}$ ,

$$= \frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|} = \frac{b+a}{a-b}, \quad \frac{|C_1B_2|}{|B_2A_1|} = \frac{c+b}{b+a}.$$

Multiplcando estas igualdades, vemos que se cumple la afirmación del teorema de Menclao, o sea, el problema 11.45 (hay que comprobar también que en las prolongaciones de los lados del triángulo  $A_1B_1C_1$  se halla un número impar de puntos de  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ). Por lo tanto, los puntos  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  se sitúan en una recta.

El caso general puede reducirse al examinado, si, por ejemplo, se proyecta la disposición prefijada de los triángulos desde cualquier punto del espacio sobre otro plano. Este punto puede elegirse de manera que no se altere la simetría de los triángulos y el punto  $N$  pase al infinito. Es posible no recurrir al examen tridimensional. Introduzcamos un sistema de coordenadas, tomando por el eje  $x$  la recta  $l$  y por el origen de coordenadas, el punto  $N$ . Hagamos la transformación  $x' = 1/x$ ,  $y' = y/x$ . Además, los puntos del eje  $x$  ( $y = 0$ ) pasarán a la recta  $y' = 0$ ; los puntos simétricos respecto al eje  $x$  pasarán a los simétricos respecto a la recta  $y' = 0$ ; las rectas pasarán a rectas; las rectas que pasan por el origen de coordenadas, pasarán a rectas paralelas a la

recta  $y' = 0$  (esta transformación, en esencia, es precisamente la proyección indicada arriba). Después de semejante transformación obtendremos la disposición ya examinada.

II.65. Consideremos que las rectas dadas son paralelas. Se puede lograrlo con ayuda de la proyección correspondiente o de la transformación de las coordenadas (véase la solución

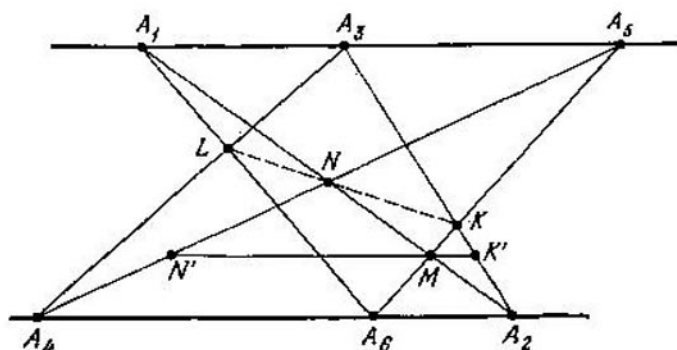


Fig. 16

del problema II.64). Apliquemos al triángulo  $A_1A_6M$  (fig. 16,  $N'K'$  es paralela a las rectas dadas) el teorema de Menelao (problema II.45). Tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{|A_1L|}{|LA_6|} \cdot \frac{|A_3K|}{|KM|} \cdot \frac{|MN|}{|NA_1|} &= \frac{|A_1A_3|}{|A_4A_6|} \cdot \frac{|A_6A_2|}{|K'M|} \times \\ &\times \frac{|MN'|}{|A_3A_1|} = \frac{|A_1A_3|}{|K'M|} \cdot \frac{|MN'|}{|A_4A_6|} \cdot \frac{|A_6A_2|}{|A_5A_1|} = \frac{|A_1A_2|}{|A_2M|} \times \\ &\times \frac{|MA_5|}{|A_3A_6|} \cdot \frac{|A_6A_2|}{|A_5A_1|} = \frac{|A_1M|}{|A_2M|} \cdot \frac{|MA_5|}{|A_5M|} \cdot \frac{|A_2M|}{|MA_1|} = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por ende, los puntos  $L$ ,  $N$  y  $K$  se encuentran en una recta. Se podría, en correspondencia con la observación a los proble-

mas II.44 y II.45, examinar en vez de  $\frac{|A_1L|}{|LA_6|}$ , etc., las relaciones  $\frac{|A_1L|}{|LA_6|}$ , etc. En este caso, el producto de las razones correspondientes será igual a  $(-1)$ .

II.67. El lugar geométrico de puntos buscado consta de dos rectas que pasan por el punto simétrico al punto  $A$  con respecto a la recta  $L$ , y que forman ángulos de  $60^\circ$  con la recta  $L$ .

II.68. El conjunto buscado es el arco  $BC$  de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$ , siendo aquél correspondiente al ángulo central de  $120^\circ$ .

II.69. Si  $N$  es el punto de intersección de las rectas  $PQ$  y  $AB$ , entonces  $\frac{|CN|}{|AN|} = \frac{|PC|}{|AQ|} = \frac{|CB|}{|AC|}$ , es decir,  $N$  es un punto fijo. El conjunto buscado es una circunferencia con diámetro  $CN$ . Si ahora  $M$  es el punto fijo, entonces  $D$  se halla en la recta paralela a la recta  $MN$  que pasa por tal punto fijo  $L$  en la recta  $AB$ , para el cual  $\frac{|AL|}{|LB|} = \frac{|AN|}{|CN|}$ ; además,  $L$  está dispuesto respecto al segmento  $AB$  del mismo modo que  $N$  respecto al segmento  $AC$ .

II.70. Designemos con  $\varphi$  el ángulo entre  $BD$  y  $AC$ ;  $S_{APK} = \frac{1}{2} |AK| \cdot |PD| \sin \varphi$ ,  $S_{BPC} = \frac{1}{2} |BP| \cdot |DC| \sin \varphi = \frac{1}{2} |BP| \cdot |AD| \sin \varphi$ . Puesto que  $S_{APK} = S_{BPC}$ , entonces  $|AK| \times |PD| = |BP| \cdot |AD|$  o bien  $\frac{|AK|}{|AD|} \cdot \frac{|PD|}{|BP|} =$

$= 1$ , pero según el teorema de Menelao para  $\triangle BDK$  (véase el problema II.45)  $\frac{|AK|}{|AD|} \times \frac{|DP|}{|PB|} \cdot \frac{|BM|}{|MK|} = 1$  ( $M$  es el punto de intersección de  $AP$  y  $BK$ ), por consiguiente,  $|BM| = |MK|$ , es decir, el lugar geométrico de puntos buscado es la línea media del  $\triangle ABC$ , paralela al lado  $AC$  (pero si los puntos  $P$  y  $K$  se toman en las rectas  $AC$  y  $BD$ , obtenemos la recta paralela al lado  $AC$ , que pasa por los puntos medios de los segmentos  $AB$  y  $BC$ ).

II.71. Sea  $C$  el vértice del ángulo dado;  $\beta$ , su magnitud. Bajemos desde  $O$  las perpendicu-

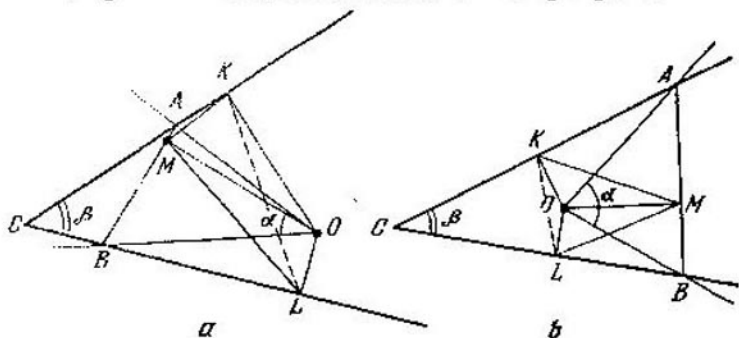


Fig. 17

lares  $OK$  y  $OL$  sobre los lados del ángulo (fig. 17, *a*). Alrededor del cuadrilátero  $OKAM$  se puede circunscribir una circunferencia. Por consiguiente,  $\angle KMO = \angle KAO$ . De manera análoga,  $\angle OML = \angle OBL$ . Por lo tanto,  $\angle KML = \angle KAO + \angle OBL = \alpha + \beta$ , es decir,  $M$  se halla en el arco de la circunferencia que pasa por  $K$  y  $L$  y contiene el ángulo  $\alpha + \beta$ ; además, todos los puntos de este arco



pertenecen a nuestro conjunto. Si  $\alpha \leq \beta$ , entonces con esto se agota nuestro conjunto. Pero si  $\alpha > \beta$ , se agregan los puntos  $M$  por el otro lado de la recta  $KL$ , para los cuales  $\angle KML = \alpha - \beta$  (fig. 17, *b*); además, será un conjunto de puntos el par de arcos, cuyos extremos se determinarán por las posiciones límites del ángulo  $AOB$ . Si los rayos del ángulo inmóvil  $\beta$  y del móvil  $\alpha$  se prolongan, o sea, en vez de los ángulos se examinan pares de rectas, el conjunto buscado será un par de circunferencias (que contienen ambos arcos, de los cuales hemos hablado antes).

**II.72.** Examinemos el cuadrilátero  $DEPM$ ,  $\angle DEM = \angle DPM = 90^\circ$ , por consiguiente, este cuadrilátero es inscrito. Por lo tanto,  $\angle DME = \angle DPE = 45^\circ$ . El lugar geométrico de puntos buscado es la recta  $DC$ .

**II.73.** Examinemos el caso, en que el punto  $B$  se halla en el interior del ángulo dado. En primer lugar, notemos que todos los  $\triangle BCD$  (fig. 18) que se obtienen, son semejantes entre sí, puesto que  $\angle BCD = \angle BMD$ ,  $\angle BDC = \angle BMC$ . Por eso, si  $N$  es el punto medio de  $CD$ , los ángulos  $BNC$  y  $BND$  serán constantes. Circunscribamos alrededor del  $\triangle BNC$  una circunferencia. Sea  $K$  el segundo punto de intersección de esta circunferencia con  $MC$ . Puesto que  $\angle BKM = 180^\circ - \angle BNC$ , el punto  $K$  resulta fijo. De manera análoga será fijo el punto  $L$  que es el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle BND$  con la recta  $MD$ . Además,  $\angle LNK = \angle LNB + \angle BNK = 180^\circ - \angle BDM + \angle BCK = 180^\circ$ , es decir,  $N$  se

halla en la recta  $LK$ . El conjunto de puntos  $N$  es el segmento  $LK$  y el lugar geométrico de centros de masas del  $\triangle MCD$  será el segmento paralelo a aquél que divide  $MK$  en razón de

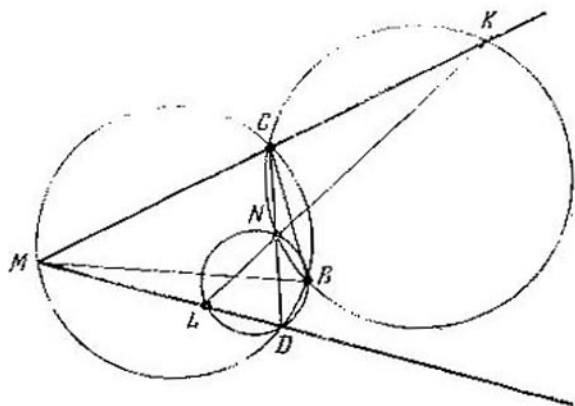


Fig. 18

2:1 (se obtiene con ayuda de la homotecia con el centro en  $M$  y la razón  $2/3$ ).

II.74. Si  $O$  es el vértice del ángulo y  $ABCD$  es un rectángulo ( $A$  es fijo), los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $O$  se hallan en una circunferencia. Por consiguiente,  $\angle COA = 90^\circ$ , es decir, el punto  $C$  se encuentra en la recta perpendicular a  $OA$ , que pasa por  $O$ .

II.75. Notemos que todos los triángulos  $ABC$  que se obtienen, son semejantes entre sí. Por consiguiente, si en cada triángulo se toma el punto  $K$  que divide el lado  $BC$  en una misma razón, puesto que  $\angle AKC$  conserva el valor constante, el punto  $K$  describirá una circunferencia. Por lo tanto, el punto  $M$  que divide

$AK$  en razón constante, también circunscribe una circunferencia que se obtiene de la anterior con ayuda de la homotecia con el centro en el punto  $A$  y la razón  $k = |AM| / |AK|$ . Este razonamiento se emplea en todos los puntos: a), b) y c).

II.76. Sea  $K$  el punto medio de  $AB$  y  $M$ , el pie de la perpendicular bajada desde  $K$  sobre  $AC$ . Todos los triángulos  $AKM$  son semejantes entre sí (por dos ángulos), por consiguiente, lo serán también todos los triángulos  $ABM$ . De este modo es fácil obtener que el lugar geométrico de puntos buscado sea la circunferencia con cuerda  $BC$ ; además, los ángulos que se apoyan sobre esta cuerda, son iguales al ángulo  $AMB$  o al complementario a éste. (El arco menor de esta circunferencia está dispuesto al mismo lado de  $BC$  que el arco menor de la circunferencia de partida.)

II.77. Si  $M, N, L$  y  $K$  son puntos dados ( $M$  y  $N$  se hallan en lados opuestos del rec-

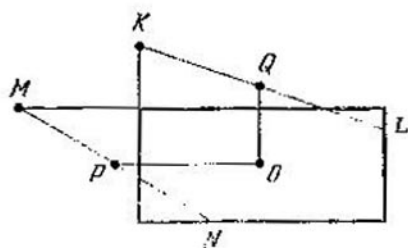


Fig. 19

tángulo,  $L$  y  $K$ , también),  $P$  es el punto medio de  $MN$ ,  $Q$  es el punto medio de  $KL$ ,  $O$  es el punto de intersección de las diagonales del rectángulo (fig. 19), entonces  $\angle POQ = 90^\circ$ .

Por consiguiente, el punto geométrico de puntos buscado será la circunferencia construida sobre  $PQ$  como sobre el diámetro.

II.78. Designemos los radios de las circunferencias dadas por  $R$  y  $r$  ( $R \geq r$ ), el punto de tangencia de la cuerda  $BC$  con la circunferencia menor, por  $D$ ; sean  $K$  y  $L$  los puntos de intersección de las cuerdas  $AC$  y  $AB$  con la circunferencia menor y, por fin,  $O$ , el centro de la circunferencia inscrita en el  $\triangle ABC$ . Puesto que las dimensiones angulares de los arcos  $AK$  y  $AC$  son iguales, entonces  $|AK| = rx$ ,  $|AC| = Rx$ ; de aquí obtenemos  $|DC|^2 = |AC| \cdot |CK| = (R-r)Rx^2$ . En forma análoga  $|AB| = Ry$ ,  $|DB|^2 = (R-r)Ry^2$ ; por consiguiente,  $\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{x}{y} = \frac{|AC|}{|AB|}$ , es decir,  $AD$  es la bisectriz del ángulo  $BAC$ . A continuación tenemos:

$$\text{mos: } \frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{Rx}{\sqrt{(R-r)Rx}} = \sqrt{\frac{R}{R-r}}.$$

De este modo, el lugar geométrico de puntos buscado será la circunferencia tangente por interior a las dos dadas en el mismo punto

$$A, \text{ con el radio } \rho = r \frac{|AO|}{|AD|} = \frac{r\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \sqrt{R-r}}.$$

II.79. Sean  $O_1$  y  $O_2$  los centros de las circunferencias dadas, la recta  $O_1O_2$  corta las circunferencias en los puntos  $A, B, C, D$  (sucesivamente). Examinemos dos casos.

a) El rectángulo  $KLMN$  está dispuesto de tal manera que los vértices opuestos  $K, M$  se hallan en una circunferencia y  $L$  y  $N$ , en la otra. En este caso, si  $P$  es el punto de inter-

sección de las diagonales (fig. 20, a), entonces  $|O_1P|^2 - |O_2P|^2 = (|O_1K|^2 - |KP|^2) - (|O_2L|^2 - |LP|^2) = |O_1K|^2 - |O_2L|^2 = R_1^2 - R_2^2$ , donde  $R_1$  y  $R_2$  son los radios de las circunferencias, es decir, el punto

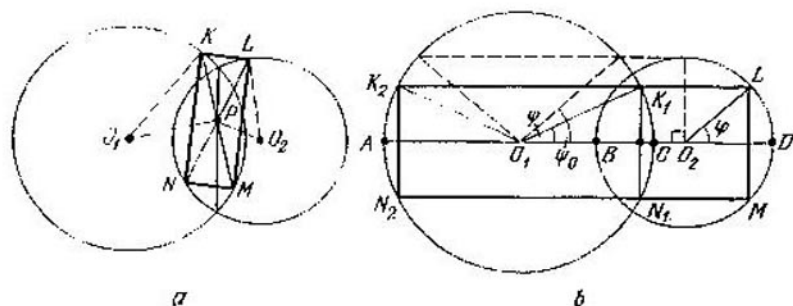


Fig. 20

$P$  se halla en la cuerda común de las circunferencias; además, se excluyen el punto medio de la cuerda común y sus extremos, puesto que en este caso el rectángulo degenera.

b) Dos vértices vecinos del rectángulo  $KLMN$  se hallan en una circunferencia y los otros dos, en la otra. Puesto que las perpendiculares bajadas desde  $O_1$  sobre  $KN$  y desde  $O_2$  sobre  $LM$  deben dividirlos por la mitad, la recta  $O_1O_2$  es el eje de simetría del rectángulo  $KLMN$ .

Sea que  $R_2 < R_1$  y el radio  $O_2L$  forma el ángulo  $\varphi$  con la línea de centros. Tracemos por  $L$  la recta paralela a  $O_1O_2$ . Esta recta cortará la circunferencia  $O_1$  en dos puntos  $K_1$  y  $K_2$  y al punto  $L$  le corresponderán dos rectángulos:  $K_1LMN_1$  y  $K_2LMN_2$  (fig. 20, b). Al variar

$\varphi$  desde 0 hasta  $\pi/2$ , el ángulo  $\psi$  formado por el radio  $O_1K_1$  y el rayo  $O_1O_2$  cambia desde 0 hasta cierto valor  $\psi_0$ ; al seguir variando  $\varphi$  (desde  $\pi/2$  hasta  $\pi$ )  $\psi$  disminuye desde  $\psi_0$  hasta 0. En este caso los centros de los rectángulos  $K_1LMN_1$  trazarán un segmento desde el punto medio de  $CD$  hasta el punto medio de  $BC$ , excluyendo los puntos extremos y el punto de intersección de este segmento con la cuerda común. De manera análoga, los centros de los rectángulos  $K_2LMN_2$  llenarán el intervalo con los extremos en los puntos medios de  $AB$  y  $AD$  (los extremos del intervalo no forman parte de nuestro lugar geométrico de puntos).

Si los tres vértices del rectángulo y, por consiguiente, también el cuarto se hallan en una circunferencia, el centro del rectángulo coincide con el centro de la circunferencia correspondiente.

De esta manera, el lugar geométrico de puntos buscado es la unión de tres intervalos: los extremos del primero son los puntos medios de  $AB$  y  $AD$ , los extremos del segundo son los puntos medios de  $BC$  y  $CD$ , los extremos del tercero son los puntos de intersección de las circunferencias. Al mismo tiempo se excluye el punto medio de la cuerda común.

II.80. Si  $B$  y  $C$  son los puntos primero y segundo de reflexión,  $O$  es el centro, entonces  $BO$  es la bisectriz del ángulo  $CBA$ . El trayecto de la bola es simétrico respecto al diámetro que contiene  $C$ , por eso  $A$  se halla en este diámetro. Si  $\angle BCO = \angle CBO = \varphi$ , entonces  $\angle ABO = \varphi$ ,  $\angle BOA = 2\varphi$ ; aplicando el teorema de los senos al  $\triangle ABO$  ( $|BO| = R$ ,

$|OA| = a$ ), obtenemos:  $\frac{R}{\operatorname{sen} 3\varphi} = \frac{a}{\operatorname{sen} \varphi}$ , de donde  $\cos 2\varphi = \frac{R-a}{2a}$  y cuando  $a > \frac{R}{3}$ , se puede encontrar  $\varphi$ . *Respuesta:* los puntos dispuestos fuera de la circunferencia del radio  $R/3$  con el centro en el centro de la mesa de billar.

II.81. El lugar geométrico de puntos buscado son dos rectas perpendiculares a las rectas dadas.

II.82. Si la recta  $AB$  no es paralela a  $l$ , existen dos circunferencias que pasan por  $A$  y  $B$  y son tangentes a  $l$ . Supongamos que sus centros son  $O_1$  y  $O_2$ . El lugar geométrico de puntos buscado es la recta  $O_1O_2$ , excluyendo el intervalo  $(O_1O_2)$ . Si  $AB$  es paralela a  $l$ , el lugar geométrico de puntos buscado consta de un rayo perpendicular a  $l$ .

II.83. a) Sea  $A$  (fig. 21) el vértice de cierto triángulo. Prolonguemos el segmento  $AM$  más allá de  $M$  en la magnitud  $|MN| = \frac{1}{2} |AM|$ . El punto  $N$  es el punto medio del lado opuesto al vértice  $A$ , por consiguiente,  $N$  ha de situarse en el interior de la circunferencia circunscrita, es decir, en el interior de la circunferencia con el centro en  $O$  y el radio  $|OA|$ . Bajemos desde  $O$  la perpendicular  $OR$  sobre  $AN$ . Debe cumplirse la desigualdad  $|AR| > |RN|$ . Si  $\angle AMO \geq 90^\circ$ , esta desigualdad se cumple automáticamente. Pero si  $\angle AMO < 90^\circ$ , entonces  $|AM| - |MR| > |MN| + |MR| \Rightarrow |AM| - \frac{1}{2} |AM| >$

$> 2 |MR| \Rightarrow |AM| > 4 |MR|$ . Empero  $R$  se halla en la circunferencia  $\alpha$  con el diámetro  $OM$ , por lo tanto  $A$  debe estar fuera de la circunferencia homotética a la circunferencia  $\alpha$  con la razón 4 y el centro de homotecia en  $M$ .

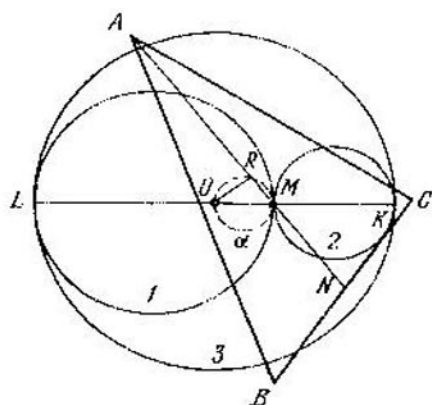


Fig. 21

Luego, el punto  $N$  no debe estar en la circunferencia  $\alpha$ , puesto que, en caso contrario el lado del triángulo, cuyo punto medio es  $N$ , siendo perpendicular a  $ON$ , se hallaría en la recta  $AN$ , es decir, todos los vértices del triángulo se encontrarían en una recta. Por consiguiente  $A$  no debe disponerse en la circunferencia homotética a  $\alpha$  con el centro de homotecia  $M$  y la razón igual a  $-2$ . De esta manera, si en la recta  $OM$  tomamos sucesivamente los puntos  $L$  y  $K$  de tal modo que  $|LO| : |OM| : |MK| = 3 : 1 : 2$ , y construimos sobre  $LM$  como sobre diámetro la circunferencia 1, sobre  $MK$ , la circunferencia 2, serán lugar geométrico de puntos buscado todos



los puntos fuera de la circunferencia 1, excluyendo los de la circunferencia 2, menos el punto  $K$  (el punto  $K$  forma parte de nuestro lugar geométrico de puntos).

b) Si  $O$  es el centro del círculo circunscrito,  $M$  es el centro de masas del triángulo, entonces  $K$  (véase el punto a)) será el punto de intersección de las alturas del triángulo (véase el problema I.20). Pero para el triángulo obtusángulo la distancia desde el centro del círculo circunscrito hasta el punto de intersección de las alturas es mayor que el radio del círculo circunscrito. Por consiguiente, los vértices del triángulo obtusángulo se encuentran en el interior de la circunferencia 3 construida sobre  $LK$  como sobre diámetro, fuera de la circunferencia 1 y excluyendo los puntos de la circunferencia 2 (además, los vértices de los ángulos obtusos se hallan en el interior de la circunferencia 2).

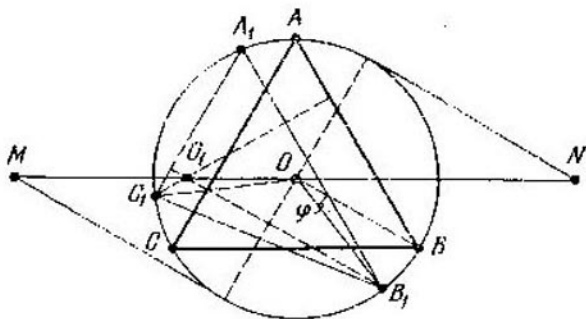


Fig. 22

II.84. Sea  $ABC$  (fig. 22) el rectángulo regular de partida;  $A_1B_1C_1$ , un triángulo arbitrario, en el cual  $A_1C_1 \parallel AC$ ,  $A_1B_1 \parallel AB$ ,  $O$

es el centro del círculo,  $O_1$  es el punto de intersección de las alturas del  $\triangle A_1B_1C_1$ . Sea que  $\angle BOB_1 = \varphi$ . Puesto que  $O_1B_1 \parallel OB$ , entonces  $\angle OB_1O_1 = \varphi$ ; dado que  $\angle C_1O_1B_1 = \angle C_1OB_1 = 120^\circ$ , resulta que el cuadrilátero  $C_1O_1OB_1$  está inscrito en cierta circunferencia y, por lo tanto,  $\angle O_1OC_1 = \angle O_1B_1C_1 = 30^\circ - \varphi$ . De esta manera,  $\angle O_1OB = \varphi + 120^\circ + 30^\circ - \varphi = 150^\circ$ , es decir, la recta  $OO_1$  es paralela a  $CB$ . Para determinar cuán lejos puede «apartarse» el punto  $O_1$  de esta recta, notemos que para determinar la posición del punto  $O_1$  hay que trazar por el punto variable  $B_1$  una recta paralela a  $OB$  hasta que se interseque con la recta que pasa por  $O$  paralelamente a  $CB$ . Es evidente que los puntos más alejados se obtendrán para los extremos del diámetro perpendicular a  $OB$ . Conque,  $MN$  será parte de nuestro lugar geométrico de puntos, o sea, un segmento de la recta paralela a  $CB$ , con longitud igual a  $4R$  y el punto medio en  $O$ , mientras que serán todo el lugar geométrico de puntos tres segmentos semejantes (se excluyen los extremos de los segmentos).

II.85. Si  $ABC$  (fig. 23) es el triángulo dado y el vértice del rectángulo circunscrito  $AKLM$  coincide con  $A$  ( $B$  se encuentra en  $KL$ ;  $C$ , en  $LM$ ), entonces  $L$  pertenece a la semicircunferencia con diámetro  $BC$ ; además, los ángulos  $ABL$  y  $ACL$  son obtusos, es decir,  $L$  puede tener dos posiciones extremas:  $L_1$  y  $L_2$ ,  $\angle L_1CA = \angle L_2BA = 90^\circ$ ; el centro  $O$  describirá un arco, homotético al arco  $L_1L_2$ , con el centro de homotecia en  $A$  y la razón  $1/2$ . *Respuesta:* si el triángulo es acutángulo, el

conjunto buscado es un triángulo curvilíneo, formado por los arcos de las semicircunferencias construidas sobre las líneas medias como sobre diámetros y dirigidas al interior del triángulo de las líneas medias; pero si el triángulo no es acutángulo, el conjunto buscado

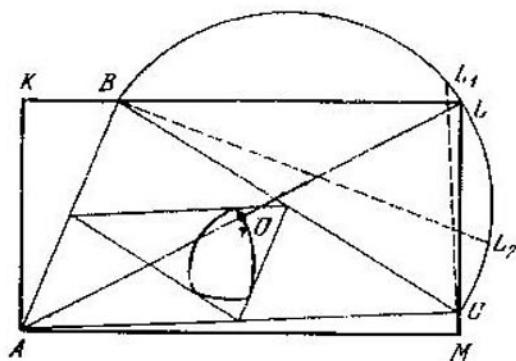


Fig. 23

está formado por dos arcos de las semicircunferencias construidas de la misma manera sobre dos líneas medias menores.

II.86. Si el primer cuadrado (fig. 24) gira alrededor del punto  $M$  en  $60^\circ$  en sentido de las agujas del reloj o en sentido contrario, el mismo debe caber por completo en el interior del segundo. Inversamente, a cada cuadrado dispuesto en el interior del mayor, siendo aquél igual al menor, cuyos lados forman ángulos de  $30^\circ$  y  $60^\circ$  con los lados del mayor, le corresponde el punto  $M$  que posee la propiedad necesaria. (En la figura este cuadrado se designa con la línea de trazos.) Este punto será el

centro de giro a  $60^\circ$ , que hace pasar el cuadrado  $ABCD$  al cuadrado  $A_1B_1C_1D_1$ ; se puede obtenerlo a partir del  $O_1$ , girando en dirección necesaria alrededor de  $O$  en  $60^\circ$ . Examinemos las posiciones extremas de los cuadrados  $A_1B_1C_1D_1$  (cuando dos vértices están en los

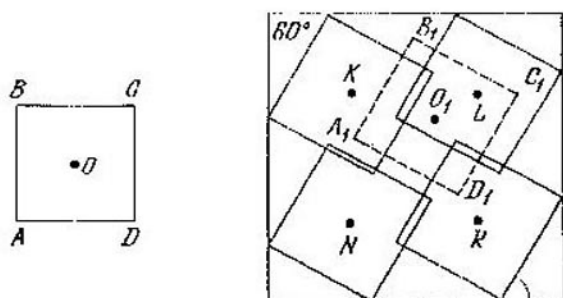


Fig. 24

lados del cuadrado mayor). Sus centros sirven de vértices para el cuadrado  $KLRN$ , cuyo lado, respectivamente, es igual a  $b - \frac{1}{2}a(\sqrt{3} + 1)$  (los lados del cuadrado  $KLRN$  son paralelos a los lados de los cuadrados dados, el centro coincide con el centro del mayor). Los centros de otra familia de cuadrados que forman con los lados del cuadrado mayor los ángulos de  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , también llenan el cuadrado  $KLRN$ . De esta manera, el lugar geométrico de puntos buscado está formado por la reunión de dos cuadrados, uno de los cuales se ha obtenido a partir del cuadrado  $KLRN$ , girando éste alrededor de  $O$  en  $60^\circ$  en un sentido, y el otro, girando en  $60^\circ$  en sentido contrario.

El problema tiene solución, si  $b \geq \frac{a}{2} (\sqrt{3} + 1)$  (los puntos  $P$  y  $Q$  pueden hallarse en la frontera de sus cuadrados).

II.87. Semejante punto  $M$  es único, o sea, es el centro de masas del triángulo (punto de intersección de las medianas). Es fácil descubrir que en este caso para cualquier punto  $N$  en la frontera del triángulo como punto  $P$  puede tomarse uno de los vértices del triángulo. Tomemos cualquier otro punto  $M_1$ . Consideremos que este punto se encuentra en el interior o en la frontera del  $\triangle AMD$ , donde  $M$  es el centro de masas del  $\triangle ABC$ ,  $D$  es el punto medio de  $AC$ . Tracemos por  $M_1$  la recta paralela a  $BD$  y como  $N$  tomemos el punto de intersección de esta recta con  $AD$ , designando con  $M_2$  el punto de su intersección con  $AM$ . Es evidente que para cualquier punto  $P$  en el interior o en la frontera del triángulo el área del  $\triangle M_1NP$  no supera el área de uno de los triángulos  $AM_2N$ ,  $M_2NC$ ,  $M_2NB$ . Es evidente también que

$$S_{AM_1N} < S_{AMD} = \frac{1}{6}S. \quad \text{Luego, si } |AD| = |DC| = a, \quad |ND| = x, \quad \text{entonces } \frac{S_{M_2NC}}{S_{MDC}} = \frac{|M_2N|}{|MD|} \cdot \frac{|NC|}{|DC|} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \leq 1. \quad \text{Por fin, } \frac{S_{M_2NB}}{S_{AMD}} = \frac{|M_2N|}{|MD|} \cdot \frac{|ND|}{|AD|} = \frac{(a-x)x}{a^2} < 1.$$

II.88. Si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son los ángulos del  $\triangle ABC$ , los ángulos del  $\triangle ABI$  son iguales a  $\frac{A}{2}$ ,  $\frac{B}{2}$ ,  $90^\circ + \frac{C}{2}$  (fig. 25); por consiguiente,

el lugar geométrico de puntos buscado es un par de triángulos, cuyos lados son segmentos de rectas, mientras que el tercero es el arco

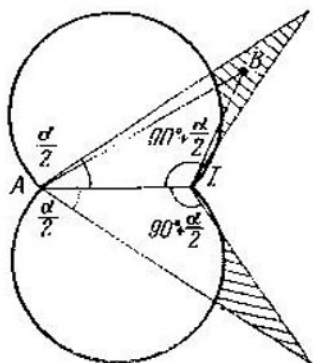


Fig. 25

que es parte del segmento construido en  $AI$ , el cual contiene el ángulo  $\alpha/2$ .

II.89. Levantemos en el punto  $M$  la perpendicular respecto a  $BM$ ; sea  $P$  el punto de intersección de esta perpendicular con la perpendicular levantada en el punto  $B$  hacia la recta de partida. Mostremos que la magnitud  $|PB|$  es constante. Sea que  $\angle MBC = \varphi$ ; designemos con  $K$  y  $L$  los pies de las perpendiculares bajadas desde  $A$  y  $C$  sobre  $MB$ . Según el planteamiento,

$$\frac{|MK|}{|KA|} + \frac{|LM|}{|LC|} = k, \text{ pero } |LC| = |BC| \operatorname{sen} \varphi,$$

$$|AK| = |BA| \operatorname{sen} \varphi. \text{ Por lo tanto, } \frac{|MK|}{|BA| \operatorname{sen} \varphi} +$$

$$+ \frac{|LM|}{|BC| \operatorname{sen} \varphi} = k \Leftrightarrow \frac{|BM| \pm |BK|}{|BA| \operatorname{sen} \varphi} +$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{|BM| \mp |BL|}{|BC| \operatorname{sen} \varphi} = k &\Leftrightarrow \frac{|BM|}{\operatorname{sen} \varphi} \left( \frac{1}{|BA|} + \right. \\
 + \left. \frac{1}{|BC|} \right) \pm \left( \frac{|BK|}{|BA| \operatorname{sen} \varphi} - \frac{|BL|}{|BC| \operatorname{sen} \varphi} \right) &= \\
 = k &\Leftrightarrow \frac{|BM|}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{k |BA| \cdot |BC|}{|BA| + |BC|} \Leftrightarrow |PB| = \\
 = \frac{k |BA| \cdot |BC|}{|BA| + |BC|} &. \text{ lo que había que demostrar.}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el lugar geométrico de puntos buscado son dos circunferencias tangentes a la recta  $AC$  en el punto  $B$ , con diámetros iguales a  $\frac{k |BA| \cdot |BC|}{|BA| + |BC|}$ .

**II.90.** Prolonguemos  $AQ$  más allá del punto  $Q$  y tomemos en este rayo el punto  $M$  de manera que  $|QM| = \frac{1}{2} |AQ|$ , y el punto  $A_1$  de tal modo que  $|MA_1| = |AM|$ ;  $M$  es el punto medio del lado  $BC$  del triángulo  $ABC$ ;  $\angle CBA_1 = \angle BCA$ ,  $\angle ABA_1 = 180^\circ - \angle BAC$ .

Por consiguiente, si sobre  $AM$ ,  $MA_1$  y  $AA_1$  construimos circunferencias como sobre diámetros, el lugar geométrico de puntos buscado estará formado por los puntos dispuestos fuera de las primeras dos circunferencias y en el interior de la tercera circunferencia.

**II.91.** Examínense los 4 casos: el triángulo  $ABC$  es acutángulo; uno de los ángulos  $A$ ,  $B$  o  $C$  es obtuso. En todos los casos se puede expresar las magnitudes de los ángulos del triángulo  $ABH$  por medio de los ángulos del triángulo  $ABC$ .

**II.92.** Si los extremos de los rayos no coinciden, el lugar geométrico de puntos buscado está formado por partes de las líneas siguien-

tes: las bisectrices de dos ángulos formados por las rectas que contienen los rayos dados, la mediatriz hacia el segmento que une los extremos de los rayos, y dos parábolas (parábola es el lugar geométrico de puntos equidistantes del punto dado y de la recta dada). Si los extremos de rayos coinciden, el lugar geométrico de puntos buscado consta de la bisectriz del ángulo formado por los rayos, y de una parte del plano en el interior del ángulo originado por las perpendiculares levantadas en los extremos de los rayos.

II.93. Sea  $A$  el vértice del ángulo. Se puede demostrar que el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle MON$ , coincide con el punto de intersección de la bisectriz  $AO$  y de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle AMN$ . Sea  $\alpha$  la magnitud del ángulo;  $r$ , el radio de la circunferencia;  $K$ , el punto medio de  $AO$ . Tomemos en la bisectriz  $AO$  los puntos  $L$  y  $P$  de manera que

$$|AL| = \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right)}, \quad |AP| = \\ = \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right)}. \quad \text{El lugar geométrico}$$

de puntos buscado consta del segmento  $KL$  (al mismo tiempo  $K$  no forma parte de este conjunto y  $L$  sí) y del rayo que yace en la bisectriz, con el origen en  $P$ .

II.94. Designemos:  $O_1, O_2$  son los centros de circunferencias;  $r_1, r_2$ , sus radios,  $M$  es el punto medio de  $AB$ ,  $O$ , el punto medio de  $O_1O_2$ . Tenemos (según la fórmula de la longi-



$$\begin{aligned} \text{tud de la mediana, problema I.11) } |O_1M|^2 &= \\ &= \frac{1}{4} (2r_1^2 + 2 |O_1B|^2 - |AB|^2), \quad |O_2M|^2 = \\ &= \frac{1}{4} (2r_2^2 + 2 |O_2A|^2 - |AB|^2), \end{aligned}$$

$$|O_1B|^2 = \frac{1}{2} (|O_1O_2|^2 + 4 |OB|^2 - 2r_2^2),$$

$$|O_2A|^2 = \frac{1}{2} (|O_1O_2|^2 + 4 |OA|^2 - 2r_1^2).$$

De esta manera,  $|O_1M|^2 - |O_2M|^2 = r_1^2 - r_2^2$ , es decir (problema II.1), los puntos  $M$  están dispuestos en la perpendicular trazada hacia  $O_1O_2$ . Si las circunferencias de radios diferentes no se intersecan, el lugar geométrico de puntos buscado consta de dos segmentos que se obtienen de la manera siguiente: en el segmento con los extremos en los puntos medios de las tangentes exteriores comunes hay que eliminar los puntos, dispuestos entre los puntos medios de las tangentes interiores comunes (si  $M$  es el punto del segmento con los extremos en los puntos medios de las tangentes interiores comunes, la recta que pasa por  $M$  perpendicularmente a  $OM$ , no corta las circunferencias). En los demás casos (las circunferencias se intersecan o son iguales) el lugar geométrico de puntos buscado es todo el segmento con los extremos en los puntos medios de las tangentes exteriores comunes.

II.95. a) Puesto que  $\angle FNB = 90^\circ$ ,  $\angle CNM = 135^\circ$ ,  $\angle FNM = 45^\circ$  (supongamos que  $|AM| > |MB|$ ), entonces  $\angle FNC = 90^\circ$  y  $C, N$  y  $B$  se hallan en una recta, etc.

b) Examinemos el triángulo rectángulo isósceles  $ABK$  con la hipotenusa  $AB$  ( $K$  está

por el otro lado de  $AB$  que los cuadrados). El cuadrilátero  $ANBK$  es inscrito, por consiguiente,  $\angle ANK = \angle ABK = 45^\circ$ , es decir,  $NK$  pasa por  $M$ .

El lugar geométrico de puntos buscado es la línea media del triángulo  $ALB$ , donde  $L$  es el punto simétrico al punto  $K$  con respecto a  $AB$ .

II.96. Sea  $N$  el punto de intersección de la mediatriz y de la tangente;  $O$ , el centro de la circunferencia;  $R$ , su radio. Tenemos:  $|ON|^2 - |NA|^2 = R^2 + |MN|^2 - |NA|^2 = R^2$ . De esta manera, el lugar geométrico de puntos buscado es la recta perpendicular a  $OA$  (problema II.1).

II.97. Si  $O_1$  y  $O_2$  son los centros de las circunferencias dadas,  $Q_1$  y  $Q_2$  son los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos  $ABC_1$  y  $AB_1C$ , entonces  $O_1Q_1O_2Q_2$  es un paralelogramo. La recta  $Q_1Q_2$  pasa por el punto medio del segmento  $O_1O_2$  (punto  $D$ ). El segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos  $ABC_1$  y  $AB_1C$  es simétrica al punto  $A$  respecto a la recta  $Q_1Q_2$ . El lugar geométrico de puntos buscado es la circunferencia con el centro en el punto  $D$  y el radio  $|AD|$ .

II.98. Sean  $O_1$  y  $O_2$  los centros de las circunferencias dadas;  $r_1$  y  $r_2$ , sus radios. Veamos dos triángulos rectángulos isósceles con la hipotenusa  $O_1O_2$ :  $O_1O_2O$  y  $O_1O_2O'$ . El lugar geométrico de puntos buscado son dos anillos con centros los  $O$  y  $O'$  y los radios: exterior  $\frac{\sqrt{2}}{2}(r_1 + r_2)$  e interior  $\frac{\sqrt{2}}{2}|r_1 - r_2|$ . De-

mostrémoslo. Sea  $M$  un punto en la circunferencia  $O_1$ ;  $N$ , en la circunferencia  $O_2$ . Si  $M$  es fijo y  $N$  recorre la segunda circunferencia, los vértices de los ángulos rectos de los triángulos rectángulos isósceles describen dos circunferencias de radio  $\frac{\sqrt{2}}{2} r_2$  que se obtienen a partir de la circunferencia  $O_2$  girando alrededor de  $M$  a un ángulo de  $45^\circ$  (en un sentido y en otro) mediante la homotecia ulterior con el centro en  $M$  y la razón  $\sqrt{2}/2$ . Sea  $O_M$  el centro de una de estas circunferencias. El punto  $O_M$  se ha obtenido a partir de  $O_2$  girando alrededor de  $M$  en el sentido correspondiente y mediante la homotecia con el centro  $M$  y la razón  $\sqrt{2}/2$ . Pero  $O_M$  puede obtenerse mediante el giro correspondiente y la homotecia con el centro  $O_2$ . Por consiguiente, cuando  $M$  describe la circunferencia  $O_1$ ,  $O_M$  describe una circunferencia de radio  $\frac{\sqrt{2}}{2} r_1$  con el centro en  $O$  u  $O'$ .

**II.99.** La unión de tres paralelogramos construidos es un paralelogramo circunscrito alrededor del triángulo dado, dividido en cuatro menores. No es difícil expresar las razones, en las cuales cada una de las diagonales examinadas se divide por otra diagonal, por medio de los segmentos de lados del paralelogramo mayor.

Si los paralelogramos son rectángulos, trasladando paralelamente dos de las tres diagonales examinadas, formemos con éstas un triángulo igual al dado; pero esto significa que los

ángulos entre éstas son iguales a los ángulos correspondientes del triángulo o bien complementan éstos hasta  $180^\circ$ . El lugar geométrico de puntos buscado es la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo dado.

II.100. Demostremos que  $\frac{|AM|}{|AD|} = |\cos \angle BAC|$ , donde  $D$  es el punto de intersección de  $AM$  con la circunferencia. Sea  $O$  el centro de la circunferencia;  $P$ , el punto medio de  $BC$ ;  $K$ , el punto medio de  $AH$ . Los triángulos  $DOA$  y  $MKA$  son semejantes. Por consiguiente,  $\frac{|MA|}{|AD|} = \frac{|AK|}{|DO|} = \frac{|OP|}{|OB|} = |\cos \angle BAC|$ . El lugar geométrico de puntos buscado está formado por dos arcos que pertenecen a dos circunferencias diferentes.

II.101. Supongamos que  $B_0$  y  $C_0$  son los puntos medios de los lados  $AC$  y  $AB$ ;  $BB_1$  y  $CC_1$  son las alturas,  $K$  es el punto medio de  $DE$  (fig. 26),  $GK$  y  $C_0N$  son perpendiculares a  $AB$ ,  $B_0M$  es perpendicular a  $AC$ . Entonces,  $\frac{|ML|}{|NM|} = \frac{|GC_1|}{|C_0C_1|} = \frac{|KP|}{|C_0C_1|} = \frac{|DC|}{|BC|}$  (la última igualdad se deduce de la semejanza de los triángulos  $DCE$  y  $ABC$ ;  $K$ ,  $P$  y  $C_0$ ,  $C_1$  son los puntos correspondientes en estos triángulos). Precisamente de la misma manera la mediatriz trazada hacia  $DF$  corta  $MN$  en el punto  $L_1$  tal que  $\frac{|NL_1|}{|NM|} = \frac{|BD|}{|BC|}$ , es decir, los puntos  $L$  y  $L_1$  coinciden.

El lugar geométrico de puntos buscado es la recta  $MN$ .

II.102. Es evidente que cualquier punto de cualquier altura del triángulo  $ABC$  pertenece al lugar geométrico de puntos buscado. Mostremos que no hay otros puntos. Tomemos el punto  $M$  que no se halla en las alturas del triángulo  $ABC$ . Supongamos que la recta  $BM$  corta

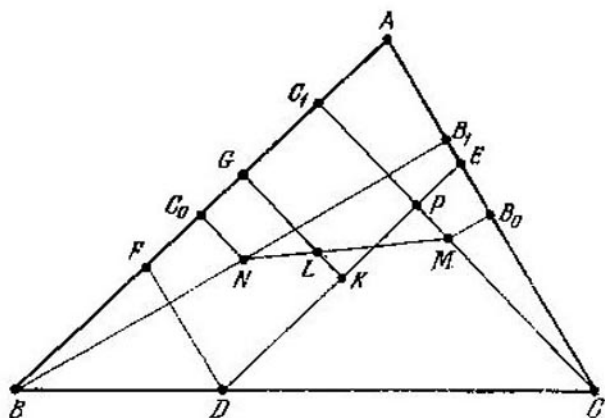


Fig. 26

las alturas bajadas desde los vértices  $A$  y  $C$  en los puntos  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente. Si para los tres puntos  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M$  se cumpliera la condición del problema, tendrían lugar las igualdades  $\angle MAM_1 = \angle MCM_1$ ,  $\angle MAM_2 = \angle MCM_2$  y los cinco puntos  $A$ ,  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  y el punto  $C_1$  simétrico a  $C$  respecto a la recta  $BM$ , se hallarían en una circunferencia, lo que es imposible.

II.103. Notemos que, si por  $M$  pasa cualquier recta  $l$  que posee la propiedad necesaria, existe la recta  $l_1$  que pasa por  $M$  y algún vértice del triángulo, o bien la recta  $l_2$  que pasa

por  $M$  perpendicularmente a algún lado del triángulo, que posee esta misma propiedad. En efecto, supongamos que la recta  $l$  corta los lados  $AB$  y  $CB$  del triángulo  $ABC$  en los puntos  $C_0$  y  $A_0$  y el punto  $B_1$ , simétrico a  $B$  con respecto a  $l$ , se encuentra en el interior del  $\triangle ABC$ . Hagamos girar  $l$  alrededor de  $M$  de tal manera que  $B_1$  se aproxime por el arco de la circunferencia correspondiente hacia  $AB$  o  $BC$  hasta que el punto  $C_0$  o  $B_0$  coincida con el vértice  $C$  o  $A$  (obtenemos la recta  $l_1$ ), o  $B_1$  quede sobre el lado correspondiente (obtendremos la recta  $l_2$ ). Designemos con  $\alpha$  el conjunto de los puntos de nuestro triángulo dispuestos en el interior del cuadrilátero limitado por las bisectrices, trazadas hacia los lados menor y mayor del triángulo, y las perpendiculares levantadas hacia los lados menor y mayor en sus puntos medios. (Si el triángulo dado es isósceles, entonces  $\alpha$  es vacío. En todos los demás casos  $\alpha$  es un cuadrilátero o un pentágono). El lugar geométrico de puntos buscado consta de todos los puntos del triángulo, excluyendo los puntos interiores de  $\alpha$ .

II.105. Tenemos:  $|MB|^2 = a^2 + c^2 \cos^2 A = a^2 + c^2 - c^2 \sin^2 A = a^2 + c^2 - a^2 \sin^2 C = c^2 + a^2 \cos^2 C = |NB|^2$ .

II.107. Demuéstrese que el punto simétrico al punto de intersección de las alturas del triángulo respecto al lado del triángulo, se halla en la circunferencia circunscrita.

II.109. Supongamos que  $H$  es el punto de intersección de las alturas del triángulo  $ABC$ ;  $AD$  es la altura,  $K, L, M, N$  son las proyecciones de  $D$  sobre  $AC, CH, HB$  y  $BA$ , respectiva-

mente. Aprovéchese que  $K$  y  $L$  se hallan en la circunferencia con diámetro  $CD$ ;  $L$  y  $M$ , en la circunferencia con diámetro  $HD$ ;  $M$  y  $N$ , en la circunferencia con diámetro  $DB$ .

II.111. Demuéstrese que el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo examinado es igual al radio de las circunferencias dadas y estas circunferencias son simétricas a la circunferencia circunscrita respecto a los lados del triángulo.

II.112. Supongamos que  $ABCD$  es el rectángulo dado;  $K$ ,  $L$ ,  $M$  y  $N$  se hallan en las rectas  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ , respectivamente;  $P_1$  es el segundo punto de intersección de la recta  $LN$  con la circunferencia circunscrita alrededor de  $ABCD$  (el primer punto es  $P$ ). Entonces,  $BP_1 \parallel KN$ ,  $P_1D \parallel LM$  y  $\angle BP_1D = 90^\circ$ . Por lo tanto,  $KN \perp LM$ . Además,  $LN \perp KM$ ; de esta manera,  $N$  es el punto de intersección de las alturas del  $\triangle KLM$ . Ahora, para concretar, supongamos que  $L$  y  $N$  se encuentran en los lados  $BC$  y  $DA$ . Designemos  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|KP| = x$ ,  $|PN| = y$ . La recta  $KN$  divide  $BD$  en la razón  $\frac{(a+y)x}{(b-x)y}$ , contando a partir del vértice  $B$ . En la misma razón también la recta  $LM$  dividirá  $BD$ .

II.113. Los segmentos  $|AP|$ ,  $|BQ|$  y  $|CR|$  pueden expresarse por medio de los lados del triángulo, por ejemplo:  $|AP| = \frac{bc}{b+c}$ .

II.114. Sea  $M$  el punto medio de  $AD$ .

Compruébese que  $|BF|^2 + |FM|^2 = |BM|^2$ .

II.115. Trácese por  $D$  la recta perpendicular a la bisectriz del ángulo  $A$ , désignese los puntos de su intersección con  $AB$  y  $AC$  por  $K$  y  $M$  y demuéstrese que  $|AK| = |AM| = \frac{b+c}{2}$ . Puesto que  $|AC_1| = |AB_1| = p - a$ ,  $|AC_2| = |BC_2| = p$  ( $p$  es el semiperímetro del  $\triangle ABC$ ;  $a, b, c$  son sus lados), los puntos  $K$  y  $M$  serán los puntos medios de los segmentos  $C_1C_2$  y  $B_1B_2$ .

II.116. Demuéstrese que  $l$  forma con  $AD$  los mismos ángulos que la recta  $BC$  tangente a nuestra circunferencia. De aquí se deduce que otra tangente a la circunferencia que pasa por  $D$ , será paralela a  $l$ .

II.117. Construyamos una circunferencia tangente a las rectas  $MN, AC$  y  $BC$ , de manera que los puntos de tangencia  $P$  y  $Q$  con las rectas  $AC$  y  $BC$  se hallen fuera de los segmentos  $CM$  y  $CN$  (esto será la circunferencia exinscrita en el triángulo  $MCN$ ). Si  $R$  es el punto de tangencia de  $MN$  con la circunferencia, entonces  $|MP| = |MR|$ ,  $|NQ| = |NR|$ , por consiguiente,  $|MN| = |MP| + |NQ|$ ; pero, según el planteamiento,  $|MN| = |MA| + |NB|$ . De esta manera, uno de los puntos  $P$  o  $Q$  se encuentra en el lado correspondiente, mientras que el otro, en la prolongación. Además,  $|CP| = |CQ| = \frac{1}{2} (|CP| + |CQ|) = \frac{1}{2} (|AC| + |CB|)$ , es decir, la circunfe-



rencia construida es constante para todas las rectas.

II.118. Si  $O$  es el centro del círculo circunscrito alrededor del  $\triangle ABC$ ,  $D$  es el punto medio de  $CB$ ,  $H$ , el punto de intersección de las alturas,  $L$ , el punto medio de  $AH$ , entonces  $|AL| = |OD|$  y, puesto que  $AL \parallel OD$ , resulta que  $OL$  divide  $AD$  por la mitad, es decir,  $L$  es simétrico a  $O$  respecto al punto medio de  $AD$ .

II.119. Sea  $BD$  la altura del triángulo; además,  $|BD| = R\sqrt{2}$ , donde  $R$  es el radio del círculo circunscrito,  $K$  y  $M$  son los pies de las perpendiculares bajadas desde  $D$  sobre  $AB$  y  $BC$ ,  $O$  es el centro del círculo circunscrito. Si el ángulo  $C$  es agudo, entonces  $\angle KBO = 90^\circ - \angle C$ . Puesto que el cuadrilátero  $BMDK$  es inscrito, por consiguiente,  $\angle MKD = \angle DBM = 90^\circ - \angle C$ . Por lo tanto,  $\angle MKB = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \angle C) = \angle C$ ; por consecuencia,  $BO \perp KM$ . Pero  $S_{BKM} = \frac{1}{2} |BD|^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} S_{ABC}$ . (Usamos la fórmula  $S = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$ .) Si  $h_1$  es la altura del  $\triangle BKM$  trazada desde el vértice  $B$ , entonces  $\frac{1}{2} S = \frac{1}{4} |AC| \times \times |BD| = S_{BKM} = \frac{1}{2} |KM| h_1 = \frac{1}{2} |BD| h_1 \operatorname{sen} B$ , por lo tanto,  $h_1 = \frac{|AC|}{2 \operatorname{sen} B} = R$ ; tomando en consideración

que  $BO \perp KM$ , obtenemos que el punto  $O$  se halla en  $KM$ .

II.120. Notemos que el  $\triangle ADK$  es semejante al  $\triangle ABK$ , puesto que  $|AK|^2 = |AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$ . Si  $O$  es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABK$ , entonces  $\angle OAD + \angle ADK = 90^\circ - \angle AKB + \angle ADK = 90^\circ$  (se supuso que  $\angle AKB$  es agudo; si  $\angle AKB$  es obtuso, los razonamientos son análogos).

II.121. Demuéstrase que la recta paralela a  $BC$ , la cual pasa por  $E$ , divide la bisectriz del ángulo  $A$  en la misma razón, en la que divide a aquélla la bisectriz del ángulo  $C$ .

II.122. Si  $O$  es el vértice del ángulo,  $A$  es un punto tomado en la bisectriz,  $B_1$  y  $B_2$  son los puntos de intersección de los lados del ángulo con una circunferencia,  $C_1$  y  $C_2$  ( $B_1$  y  $C_1$  se hallan en un lado) son los puntos de intersección de otra circunferencia, entonces  $\triangle AB_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ .

II.123. Aprovechese que la cuerda común de dos circunferencias, que pasan por  $A, A_1$  y  $B, B_1$ , también pasa por  $D$  (problema II.18).

II.125. Si  $O$  es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle AMB$ , entonces  $\angle MAB = 90^\circ - \angle OMB = \angle BMC - 180^\circ$ . Precisamente tal será también  $\angle MAC$ .

II.126. No es difícil demostrar que las circunferencias examinadas se intersecan en un punto. Designémoslo con  $P$ . Si los puntos están dispuestos como lo muestra la fig. 27,  $\angle PB_2M = 180^\circ - \angle BB_2P = \angle PC_1B = 180^\circ - \angle PC_1A = \angle PB_1A = \angle PA_2A = 180^\circ - \angle PA_2M$ , es decir, los puntos  $P$ ,

$B_2$ ,  $M$  y  $A_2$  se hallan en una circunferencia. De la misma manera demostraremos que en una circunferencia se encuentran los puntos  $P$ ,  $B_2$ ,  $M$ ,  $C_2$  y, por consiguiente, los cinco

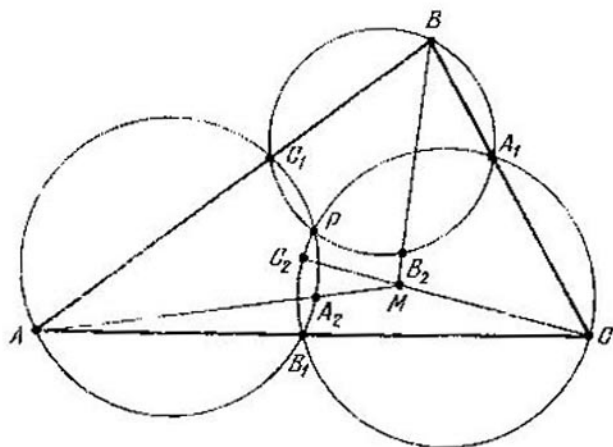


Fig. 27

puntos  $P$ ,  $M$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  se hallan en una circunferencia.

II.127. Demuéstrese que los lados del triángulo  $A_1B_1C_1$  son paralelos a los lados correspondientes del triángulo  $ABC$ .

II.128. Demuéstrese que al desplazar la recta  $KL$ , el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de  $KL B_1$  describe una línea recta.

II.129. Demuéstrese que el punto de intersección de cualesquiera dos segmentos los divide por la mitad.

II.130. Si  $KN$  es la perpendicular desde  $K$  sobre  $AB$ ,  $\angle CAB = \alpha$ , entonces  $\frac{|KN|}{|OM|} =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|AK|}{|AO|} \cdot \frac{|AO| - |KO|}{|AO|} = \frac{|AO| - 2|OM| \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{|AO|} = \\
 &= \frac{|AO| - 2|AO| \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{|AO|} = \cos \alpha = \frac{|CD|}{|CB|}.
 \end{aligned}$$

Puesto que  $\triangle ACB$  y  $\triangle ACD$  son semejantes, de lo antedicho se deduce que  $KN$  es igual al radio de la circunferencia inscrita en el  $\triangle ACD$ , y como  $K$  se halla en la bisectriz del ángulo  $A$ , resulta que  $K$  es el centro de la circunferencia inscrita en el  $\triangle ACD$ . La demostración para  $L$  es análoga.

II.131. Designemos por  $C_1$  y  $A_1$  los puntos medios de  $AB$  y  $BC$ ,  $B'$  y  $A'$  son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con  $AC$  y  $BC$ . Para concretar, sea que  $c \geq b$  ( $c$  y  $b$  son lados del  $\triangle ABC$ ); entonces la bisectriz del ángulo  $A$  corta la prolongación de  $C_1A_1$  en tal punto  $K$  que  $|A_1K| = \frac{c-b}{2}$  y la recta  $B'A'$  debe pasar por el mismo punto  $K$  puesto que los triángulos  $KA_1A'$  y  $A'B'C$  son isósceles,  $|A'C| = |B'C|$ ,  $|A_1K| = |A_1A'|$ ,  $\angle A'A_1K = \angle A'CB'$ .

II.132. Examinemos el ángulo con el vértice  $A$ . En un lado del ángulo se toman tres puntos:  $B_1, B_2, B_3$  y en el otro:  $C_1, C_2, C_3$ . Del teorema de Menelao (problema II.45, observación) se deduce que para que las rectas  $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3$  se intersequen en un punto, es necesario y suficiente el cumplimiento de la igualdad

$$\frac{AB_2}{B_2B_1} \cdot \frac{C_1C_2}{C_2A} = \frac{AB_3}{B_3B_1} \cdot \frac{C_1C_3}{C_3A} \quad (1)$$

(las razones se entienden en el sentido indicado en la observación). En efecto, si la igualdad (1) se cumple, del teorema de Menelao se deduce que las rectas  $B_2C_2$  y  $B_3C_3$  cortan el lado  $B_1C_1$  del triángulo  $AB_1C_1$  en un punto.

II.133. Tracemos por  $A$  una recta paralela a  $BC$  y designemos con  $K$  y  $L$  los puntos de su intersección con  $A_1C_1$  y  $A_1B_1$ ,

respectivamente. Tenemos:  $\frac{|KA|}{|BA_1|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}$ ,

$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|A_1C|}{|AL|}$ . Y según el teorema de Ceva

(problema II.44)  $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1$ ,

por lo tanto,  $|KA| = |AL|$ . Pero si  $AA_1$  es la bisectriz del ángulo  $KA_1L$ , entonces, por cuanto  $|KA| = |AL|$ ,  $AA_1$  es perpendicular a  $KL$ , es decir,  $AA_1$  es la altura del  $\triangle ABC$ .

II.134. Supongamos que  $K$  es el punto de intersección de  $AA_1$  y  $BB_1$ ,  $H$  es el punto de intersección de las alturas del triángulo  $ABC$ . Los puntos  $A$ ,  $K$ ,  $H$  y  $B$  se hallan en una circunferencia (los ángulos  $AKB$  y  $AHB$  son iguales o bien en suma dan  $180^\circ$ , según cómo estén dispuestos los puntos  $K$  y  $H$ : por un lado de la recta  $AB$  o por ambos). El radio de esta circunferencia es igual a  $R$  que es el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$ . Si  $\varphi$  es el ángulo comprendido entre  $AA_1$  y  $AH$ , entonces  $|KH| = 2R \operatorname{sen} \varphi$ .

II.135. Sea  $H$  el punto de intersección de las alturas del triángulo  $A_1B_1C_1$ . Los puntos  $A_1$ ,  $H$ ,  $B_1$  y  $C$  se hallan en una circunferencia; los puntos  $B_1$ ,  $H$ ,  $C_1$  y  $A$  también se sitúan en

una circunferencia; además, los radios de estas circunferencias son iguales, los ángulos  $HB_1C$  y  $HB_1A$  son iguales o bien se completan uno a otro hasta  $180^\circ$ . Por consiguiente,  $|HA| = |HC|$ . La afirmación inversa no es cierta. Para cada punto  $A_1$  tomado en la recta  $BC$  existen, como regla, dos triángulos  $A_1B_1C_1$  y  $A_1B'_1C'_1$  ( $B_1$  y  $B'_1$  se hallan en  $AC$ ;  $C_1$  y  $C'_1$ , en  $AB$ ), los puntos de intersección de cuyas alturas coinciden con el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$ ; además, uno de los triángulos es semejante al  $\triangle ABC$  y el otro no. Así, por ejemplo, si  $ABC$  es un triángulo regular y  $A_1$  es el punto medio de  $BC$ , como  $B_1$  y  $C_1$  pueden tomarse los puntos medios de  $AC$  y  $AB$  y como  $B'_1$  y  $C'_1$ , los puntos en las prolongaciones de  $AC$  y  $AB$  más allá de  $C$  y  $B$ ,  $|CB'_1| = |CB|$ ,  $|BC'_1| = |BC|$ . La afirmación inversa será justa, si se requiere que los puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$  estén dispuestos en los lados del  $\triangle ABC$  y no en sus prolongaciones.

11.136. Demostremos que el centro de la circunferencia buscada coincide con el ortocentro (punto de intersección de las alturas). Supongamos que  $BD$  es la altura,  $H$  es el punto de intersección de las alturas,  $K$  y  $L$  son los puntos medios de los segmentos construidos que parten del vértice  $B$ ,  $|BK| = |BL| = l$ ,  $M$  es el punto medio de  $BD$ . Entonces,  $|KH|^2 = |LH|^2 = |MH|^2 + |KM|^2 = l^2 - |BM|^2 + |MH|^2 = l^2 - \frac{|BD|^2}{4} + \left(|BH| - \frac{|BD|}{2}\right)^2 = l^2 + |BH|^2 - |BH| \cdot |BD| = l^2 -$

—  $|BH| \cdot |HD|$ . Nos queda demostrar que los productos de los segmentos de las alturas, en los cuales se divide cada una de ellas por su punto de intersección, son iguales. Tracemos la altura  $AE$ . En vista de la semejanza del  $\triangle BHE$  y el  $\triangle AHD$  tenemos:  $|BH| \cdot |HD| = |AH| \cdot |HE|$ , lo que se requería.

II.137. Designemos (fig. 28):  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$ . Tracemos por el cen-

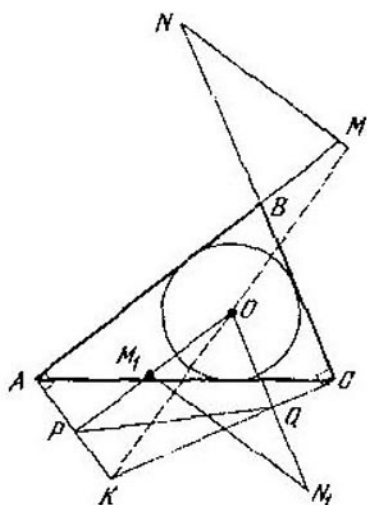


Fig. 28

tro de la circunferencia inscrita las rectas paralelas a  $AB$  y  $BC$  hasta que se intersequen con  $AK$  y  $KC$  en los puntos  $P$  y  $Q$ ; en el triángulo  $OPQ$  tenemos:  $\angle POQ = \angle ABC$ ,  $|OQ| = p - c$ ,  $|OP| = p - a$ , donde  $p$  es el semiperímetro del  $\triangle ABC$ . Pero según el enunciado  $\angle NBM = \angle ABC$ ,  $|NB| = p - a$ ,  $|MB| = p - c$ . Por consiguiente,

$\triangle POQ = \triangle NBM$ . Si en la recta  $OP$  se toma  $M_1$  de forma que  $|OM_1| = |OQ|$  y en  $OQ$ , el punto  $N_1$  de modo que  $|ON_1| = |OP|$ , entonces  $\triangle ON_1M_1 = \triangle NBM$  y los lados correspondientes  $BM$  y  $OM_1$ ,  $BN$  y  $ON_1$  resultarán, respectivamente, paralelos. Por lo tanto,  $N_1M_1 \parallel NM$ . Demostremos que  $OK \perp N_1M_1$ , puesto que en el cuadrilátero  $OPKQ$  dos ángulos opuestos son rectos, entonces éste es inscrito; por consiguiente,  $\angle OKP = \angle OQP$ . Luego,  $\angle KOP + \angle OM_1N_1 = \angle KOP + \angle OQP = \angle KOP + \angle OKP = 90^\circ$  y esto significa que  $OK \perp M_1N_1$ .

II.138. Supongamos, para concretar, que  $P$  se halla en el arco  $AC$ . Los puntos  $A, M, P, N$  se encuentran en una circunferencia, por consiguiente,  $\angle NMP = \angle NAP$ . De manera análoga  $P, M, Q, C$  se sitúan en una circunferencia,  $\angle PMQ = 180^\circ - \angle PCQ = 180^\circ - \angle PAN = 180^\circ - \angle PMN$ .

II.139. Sea  $ABC$  el triángulo dado (fig. 29);  $H$ , el punto de intersección de sus alturas. Notemos que los puntos simétricos a  $H$  respecto a sus lados se hallan en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo  $ABC$  (véase el problema II.107). Si  $H_1$  es el punto simétrico a  $H$  respecto al lado  $BC$ , la recta  $l_1$  simétrica a  $l$  respecto al mismo lado pasa por  $H_1$ . Al girar  $l$  alrededor de  $H$  en un ángulo  $\varphi$ , la recta  $l_1$  girará alrededor de  $H_1$  en el ángulo  $\varphi$  en el sentido opuesto. Por consiguiente, si  $P$  es el segundo punto de intersección de la recta  $l_1$  con la circunferencia circunscrita, el radio  $OP$  ( $O$  es el centro de la circunferencia circunscrita) girará en el ángulo



lo  $2\varphi$  alrededor de  $O$  en el sentido correspondiente. Los mismos razonamientos valen también para dos otras rectas simétricas a  $l$ . Pero si  $l$  coincide con alguna altura del triángulo, la afirmación del problema es evidente

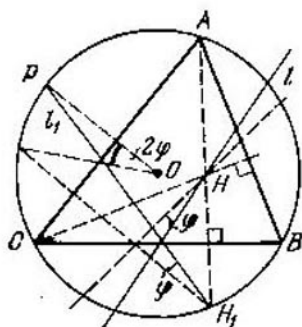


Fig. 29

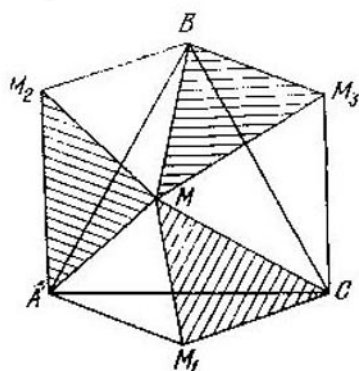


Fig. 30

(el punto  $P$  coincide con el vértice correspondiente del triángulo). Por consiguiente esta afirmación siempre es válida.

II.140. Supongamos que los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $M$  tienen en el sistema cartesiano de coordenadas las coordenadas  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x, y)$ , respectivamente; las coordenadas del punto  $G$  son  $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ . Entonces, la validez de la afirmación que se demuestra, se deduce de la igualdad  $3\left(x - \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + (x - x_3)^2 - \frac{1}{3}((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2)$  y de la relación análoga para las ordenadas.

II.141. Examinemos el caso, cuando el punto  $M$  (fig. 30) se halla en el interior del triángulo  $ABC$ . Hagamos girar el triángulo  $ABM$  alrededor de  $A$  en el ángulo de  $60^\circ$  de manera que  $B$  pase a  $C$ . Obtenemos el triángulo  $AM_1C$  igual al  $\triangle ABM$ ; el  $\triangle AMM_1$  es regular, por consiguiente, los lados del  $\triangle CMM_1$  son iguales a los segmentos  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$ . De manera análoga obtenemos los puntos  $M_2$  y  $M_3$ . El área del hexágono  $AM_1CM_3BM_2$  es igual al área duplicada del  $\triangle ABC$ , es decir, es igual a  $a^2\sqrt{3}/2$ . Por otra parte, el área de este hexágono se forma sumando tres triángulos regulares:  $AMM_1$ ,  $CMM_3$ ,  $BMM_2$  y tres triángulos iguales al buscado. Por eso,  $3S + (|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2) \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Aprovechando el resultado del problema II.140, obtenemos:  $3S + (3d^2 + a^2) \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ , de donde  $S = \frac{\sqrt{3}}{12} (a^2 - 3d^2)$ . De manera análoga se examinan los demás casos de disposición del punto  $M$ .

II.142. Hágase uso de los resultados de los problemas II.141 y II.6. El lugar geométrico buscado, como regla, consta de una recta y una circunferencia.

II.143. Sea  $O$  (fig. 31, a) el centro de la circunferencia circunscrita e  $I$ , el incentro de la inscrita. Bajemos desde  $O$  e  $I$  las perpendiculares sobre  $AB$  y  $BC$ :  $ON$ ,  $OP$ ,  $IL$ ,  $IQ$ . Si  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son las longitudes de los lados  $BC$ ,  $CA$  y

$AB$ , respectivamente, y  $p$  es el semiperímetro del  $\triangle ABC$ , entonces  $|BK| = |c - b|$ ,  $|BM| = |a - b|$ ,  $|BN| = c/2$ ,  $|BP| = a/2$ ,  $|BL| = |BQ| = p - b$ ,  $|NL| = \frac{1}{2}|a - b|$ ,  $|PQ| = \frac{1}{2}|c - b|$  (véase el problema I.18). Por consiguiente, si por  $O$

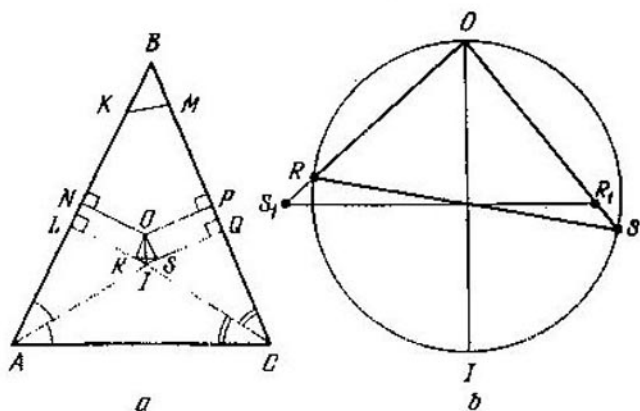


Fig. 31

se trazan las rectas paralelas a los lados  $AB$  y  $BC$  hasta que se intersequen con las perpendiculares bajadas desde  $I$ , se obtendrá el  $\triangle ORS$  semejante al  $\triangle BKM$  con la razón de semejanza  $1/2$ . Pero la circunferencia construida sobre  $OI$  como sobre diámetro, es circunscrita para el  $\triangle ORS$ . Por lo tanto, el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle BKM$  es igual a  $OI$ . Para demostrar la segunda parte del problema notemos que, si en la recta  $OS$  se traza el segmento  $OR_1$  igual a  $OR$  y en  $OR$  se traza el segmento  $OS_1$  igual a  $OS$ , la recta  $S_1R_1$  será paralela a  $KM$  (fig.

31, b); pero  $\angle OR_1S_1 + \angle IOR_1 = \angle ORS + \angle IOS = 90^\circ$ , es decir,  $S_1R_1 \perp OI$ .

II.144. En las designaciones del problema anterior tracemos por  $A$  una recta perpendicular a  $OI$ , designando con  $D$  su punto de intersección con la recta  $BC$ . Demuéstrese que la diferencia entre los radios de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos  $ABD$  y  $ACD$ , es igual al radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo  $BKM$ .

II.145. Sea que los lados del triángulo son iguales a  $a$ ,  $b$  y  $c$ ; además,  $b = (a + c)/2$ .

a) De la igualdad  $pr = \frac{1}{2}bh_b$  ( $p$  es el semiperímetro,  $r$ , el radio del círculo inscrito,  $h_b$ , la altura bajada sobre el lado  $b$ ) obtenemos:  $\frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}bh_b$ ; pero  $a + c = 2b$ , de manera que  $h_b = 3r$ .

b) Esta afirmación se deduce de que  $r = \frac{1}{3}h_b$  y el punto de intersección de las medianas divide cada mediana en la razón de  $2 : 1$ .

c) Prolonguemos la bisectriz  $BD$  hasta la intersección con la circunferencia circunscrita en el punto  $M$ . Si se demuestra que  $O$  es el centro de la circunferencia inscrita, el cual divide  $BM$  por la mitad, con esto quedará demostrada también nuestra afirmación. (Tracemos el diámetro  $BN$ ; entonces la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita, será paralela a  $NM$  y  $\angle BMN = 90^\circ$ ). Pero el  $\triangle COM$  es isósceles,

puesto que  $\angle COM = \angle OCM = \frac{1}{2} (\angle C + \angle B)$ . Por lo tanto,  $|CM| = |OM|$ . Del planteamiento  $b = (a + c)/2$  según la propiedad de la bisectriz obtenemos que  $|CD| = a/2$ . Sea  $K$  el punto medio de  $CB$ ;  $\triangle CKO = \triangle CDO$  ( $|CK| = |CD|$ ,  $\angle KCO = \angle OCD$ ); de aquí se deduce:  $\angle BKO = \angle CDM$ ; además,  $\angle DCM = \angle OBK = \angle B/2$ ,  $|CD| = |BK|$ , es decir,  $\triangle BKO = \triangle CDM$ ,  $|CM| = |BO|$ , por consiguiente,  $|BO| = |OM|$ , lo que había que demostrar.

d) Tomemos cualquier punto en la bisectriz. Sean las distancias hasta los lados  $BC$  y  $BA$  iguales a  $x$  y hasta el lado  $AC$ , a  $y$ . Tenemos:  $\frac{1}{2} (ax + cx + by) = S_{\Delta} \Rightarrow b(2x + y) = 2S_{\Delta} \Rightarrow 2x + y = h_b$ .

e) Si  $L$  es el punto medio de  $BA$ , el cuadrilátero que necesitamos es homotético al cuadrilátero  $BCMA$  con la razón  $1/2$  (véase el punto c)).

II.146. Sea  $N$  el punto de intersección de la tangente común con  $BC$ . Para nosotros es suficiente comprobar que  $|FN| \cdot |NG| = |KN| \cdot |NM| = |DN| \cdot |NE|$ . Todos los segmentos se calculan fácilmente, puesto que  $|BD| = |CE| = p - b$ ,  $|DE| = |b - c|$ ,  $\frac{|DN|}{|NE|} = \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$  ( $r_a$  es el radio de la circunferencia tangente al lado  $BC$  y a las prolongaciones de los lados  $AB$  y  $AC$ ), etc.

II.147. Tracemos por los vértices del triángulo  $ABC$  las rectas paralelas a los lados

opuestos. Estas forman el  $\triangle A_1B_1C_1$  semejante al  $\triangle ABC$ ; aquél se obtiene a partir del  $\triangle ABC$  con ayuda de la homotecia, cuyo centro se halla en el centro de masas común para el  $\triangle ABC$  y el  $\triangle A_1B_1C_1$  y cuya razón es igual a  $-2$ . El punto de intersección de las alturas para el  $\triangle ABC$  es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle A_1B_1C_1$ . Por consiguiente, los puntos  $O$  (centro de la circunferencia circunscrita),  $G$  (centro de masas) y  $H$  (punto de intersección de las alturas del  $\triangle ABC$ ) se hallan en una recta; además,  $|OG| = \frac{1}{2} |GH|$ ,  $G$  se sitúa en el segmento  $OH$ .

II.148. En el triángulo acutángulo la recta de Euler corta los lados mayor y menor. En el obtusángulo, el mayor y el medio.

II.150. Demuéstrese que la propiedad requerida la tiene tal punto  $P$  en la recta de Euler, para el cual  $|PO| = |OH|$  ( $O$  es el centro del círculo circunscrito,  $H$  es el punto de intersección de las alturas); además, para cada triángulo la distancia desde el centro de masas hasta el vértice opuesto del triángulo inicial es igual a  $\frac{4}{3} R$ , donde  $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$  y la recta que pasa por el centro de masas de este triángulo y el vértice opuesto del de partida, pasa por  $O$ .

II.151. Sea  $C_1$  el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle APB$  y  $C_2$ , el punto simétrico a  $C_1$  respecto a  $AB$ . Para los triángulos  $BPC$  y  $CPA$  determinamos

Los puntos  $A_1$  y  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$ . Puesto que los triángulos  $AC_1B$ ,  $AC_2B$ ,  $BA_1C$ ,  $BA_2C$ ,  $CB_1A$ ,  $CB_2A$  son isósceles con ángulos en los vértices iguales a  $120^\circ$ , los triángulos  $A_1B_1C_1$  y  $A_2B_2C_2$  son regulares (véase el problema II.296). Al calcular los ángulos de los cuadriláteros con los vértices  $P$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ , se puede demostrar que estos puntos ( $P$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ) se hallan en una circunferencia. Luego, si  $H$  es el punto de intersección de las alturas del triángulo  $APB$ , entonces, puesto que  $|PH| = |C_1C_2|$  y, por consiguiente,  $PHC_2C_1$  es un paralelogramo, la recta  $C_1H$  (recta de Euler del triángulo  $APB$ ) pasa por el punto medio de  $PC_2$ . Pero  $PC_2$  es una cuerda de la circunferencia con el centro  $C_1$ , consiguientemente,  $C_1H$  es perpendicular a  $PC_2$ . De tal manera, las tres nuestras rectas de Euler coinciden con las mediatrices de los segmentos  $PC_2$ ,  $PB_2$  y  $PA_2$  y puesto que los puntos  $P$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  se hallan en una circunferencia, estas rectas se cortan en su centro, o sea, en el centro del triángulo regular  $A_2B_2C_2$ . Del resultado del problema II.296 se deduce que estas tres rectas de Euler concurren en el punto de intersección de las medianas del triángulo  $ABC$ .

II.152. Sea que  $ABC$  es el triángulo dado, cuyos lados son  $a$ ,  $b$ , y  $c$ ; además,  $a \geq b \geq c$ ;  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita;  $I$  es el centro de la circunferencia inscrita y  $O$ , el centro de la circunscrita. Puesto que  $I$  respecto al  $\triangle A_1B_1C_1$  es el centro de la circunferencia circunscrita, es suficiente demostrar que la recta  $IO$  pasa por el punto de intersección de las alturas del

$\triangle A_1B_1C_1$ : En los rayos  $AC$  y  $BC$  tracemos los segmentos  $AK$  y  $BL$ ,  $|AK| = |BL| = c$ , y en los rayos  $AB$  y  $CB$ , los segmentos  $AM$  y  $CN$ ,  $|AM| = |CN| = b$ . Como se sabe (véase el problema II.143), la recta  $IO$  es perpendicular a  $LK$  y  $MN$ , por consiguiente,  $LK \parallel MN$ . Designemos:  $\angle KLC = \angle BNM = \varphi$ . Según el teorema de los senos para los triángulos  $KLC$  y  $BNM$

$$\frac{|LC|}{|KC|} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{\text{sen}(\varphi+C)}{\text{sen } \varphi}, \quad (1)$$

$$\frac{|BN|}{|MB|} = \frac{a-b}{b-c} = \frac{\text{sen}(B-\varphi)}{\text{sen } \varphi}. \quad (2)$$

Ahora tracemos en el triángulo  $A_1B_1C_1$  la altura hacia el lado  $B_1C_1$ . Sea  $Q$  el punto de su intersección con la recta  $IO$ . Hay que demostrar que  $Q$  es el punto de intersección de las alturas del  $\triangle A_1B_1C_1$ . Pero la distancia desde  $I$  hasta  $B_1C_1$  es  $|IA_1| \cos A_1 = r \text{ sen } \frac{A}{2}$ . Por lo tanto debe cumplirse la igualdad  $|A_1Q| = 2r \text{ sen } \frac{A}{2}$ . Los ángulos del  $\triangle QIA_1$  pueden expresarse a través de los ángulos del  $\triangle ABC$  y  $\varphi$ , a saber:  $\angle QIA_1 = 180^\circ - \varphi$ ,  $\angle QA_1I = \frac{\angle B + \angle C}{2}$ . Se requiere demostrar que  $2 \text{ sen } \frac{A}{2} = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen} \left( \varphi - \frac{B+C}{2} \right)} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \text{sen}(\varphi + C) - \text{sen}(B - \varphi) = \text{sen } \varphi$ . La última igualdad se deduce de (1) y (2).



II.153. Al demostrar se aprovecha el hecho de que, si desde cualquier punto  $P$  se bajan las perpendiculares  $PK$  y  $PL$  sobre las rectas que se cortan en el punto  $M$ , entonces  $P$ ,  $K$ ,  $L$  y  $M$  se hallarán en una circunferencia\*).

II.154. Aplíquese el resultado del problema I.246.

II.156. La distancia entre las proyecciones de  $M$  sobre  $AC$  y  $BC$  es igual a  $|CM| \operatorname{sen} C$ . Si  $K$  y  $L$  son las proyecciones de  $M$  sobre  $AB$  y  $BC$ , la proyección de  $AB$  sobre la recta  $KL$  (ésta es precisamente la recta de Simson) es igual a  $|AB| |\cos \angle BKL| = |AB| \times |\cos \angle BML| = |AB| \operatorname{sen} \angle CBM = |CM| \operatorname{sen} C$ .

II.157. Demuéstrese que los lados de los triángulos  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$  y  $A_3B_3C_3$  son correspondientemente paralelos.

II.158. Demuéstrese que la recta de Simson que corresponde a  $A_1$ , es perpendicular a  $B_1C_1$  (lo mismo es cierto para otros puntos). Luego se puede demostrar que la recta de Simson que corresponde al punto  $A_1$ , pasa por el punto medio de  $A_1H$ , donde  $H$  es el punto de intersección de las alturas del triángulo  $ABC$  (véase también la resolución del problema II.166). Por consiguiente, las rectas de Sim-

---

\*) Más detalles acerca de la familia de rectas de Simson se puede leer en el libro: *Vasíliev N., Gutenmájer V. Rectas y curvas. Editorial Mir, Moscú, 1980.*

son las alturas del triángulo, cuyos vértices son los puntos medios de los segmentos  $A_1H$ ,  $B_1H$ ,  $C_1H$ . *Observación.* Se puede demostrar que para los puntos arbitrarios  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  las rectas de Simson de estos puntos respecto al triángulo  $ABC$  forman un triángulo semejante al triángulo  $A_1B_1C_1$ ; además, el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de éste coincide con el punto medio del segmento que une los puntos de intersección de las alturas de los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$ .

II.159. En primer lugar se ha de comprobar la validez de la afirmación siguiente: si las perpendiculares levantadas hacia los lados (o las prolongaciones de los lados) del triángulo en los puntos de intersección con cierta recta concurren en un punto  $M$ , entonces  $M$  se halla en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo. (Esta afirmación es inversa respecto a la afirmación del problema II.153). Examinemos la parábola  $y = ax^2$ . Una tangente arbitraria a ésta tiene la forma:  $y = kx - \frac{k^2}{4a}$  (la tangente tiene un solo punto común con la parábola, por lo tanto, el discriminante de la ecuación  $ax^2 = kx + b$  es igual a cero). Esta tangente corta el eje  $x$  en el punto  $x = \frac{k}{2a}$ . En este punto como perpendicular a la tangente servirá la recta  $y = -\frac{1}{k} \times \left(x - \frac{k}{2a}\right) = -\frac{x}{k} + \frac{1}{4a}$ . Por consiguiente, todas las perpendiculares de esta índole pasan por el punto  $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$  (foco de la parábola). Aho-

ra valgámonos de la observación hecha al comienzo de la resolución.

II.160. Supongamos que  $ABC$  es el triángulo dado;  $H$  es el punto de intersección de sus alturas;  $A_1, B_1, C_1$  son los puntos medios de los segmentos  $AH, BH, CH$ ;  $AA_2$  es la altura y  $A_3$ , el punto medio de  $BC$ . Para mayor comodidad consideremos que  $ABC$  es un triángulo acutángulo. Puesto que  $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$  y el  $\triangle B_1A_2C_1 = \triangle B_1HC_1$ , entonces  $\angle B_1A_2C_1 = \angle B_1HC_1 = 180^\circ - \angle B_1A_1C_1$ , es decir, los puntos  $A_1, B_1, A_2, C_1$  se hallan en una circunferencia. También es fácil ver que  $\angle B_1A_3C_1 = \angle B_1HC_1 = 180^\circ - \angle B_1A_1C_1$ , es decir, los puntos  $A_1, B_1, A_3, C_1$  también se encuentran en una (y, por ende, en la misma) circunferencia. De aquí se deduce que los 9 puntos, de los cuales se trata en el planteamiento, se hallan en una circunferencia. El caso del triángulo obtusángulo  $ABC$  se examina de manera análoga. Notemos que la circunferencia de los nueve puntos es homotética a la circunferencia circunscrita con el centro de homotecia en  $H$  y la razón  $1/2$ . (Precisamente de esta manera están dispuestos los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$ ). Por otra parte, la circunferencia de los nueve puntos es homotética a la circunferencia circunscrita con el centro de homotecia en el punto de intersección de las medianas del triángulo  $ABC$  y la razón  $-1/2$ . (Precisamente así están dispuestos los triángulos  $ABC$  y el triángulo con vértices en los puntos medios de sus lados).

II.161. Nuestra afirmación se deduce de que  $D$  se sitúa en la circunferencia de los nueve

puntos, pero esta circunferencia es homotética a la circunferencia circunscrita con el centro de homotecia en  $H$  y la razón  $1/2$  (véase el problema II.160).

II.162. Nuestra afirmación se deduce de que  $E$  está en la circunferencia de los nueve puntos pero esta circunferencia es homotética a la circunscrita con el centro de homotecia en  $M$  y la razón  $-1/2$  (véase el problema II.160).

II.163. Esta distancia es la semisuma de las distancias entre  $BC$ , por una parte, el punto de intersección de las alturas  $H$  y el centro del círculo circunscrito, por otra, y esta última distancia es igual a la mitad de  $|HA|$ .

II.164. Supongamos que  $M_0$  es el punto medio de  $HP$ ,  $A_0$  es el punto medio de  $HA$ ;  $A_0$ ,  $A_1$  y  $M_0$  se hallan en la circunferencia de los nueve puntos. Por consiguiente,  $M$  también se encuentra en esta circunferencia, puesto que del planteamiento del problema se deduce la igualdad  $|M_0H| \cdot |HM| = |A_0H| \cdot |HA_1|$  y  $H$  se encuentra, al mismo tiempo, en el interior o fuera de cada uno de los segmentos  $M_0M$  y  $A_0A_1$ .

II.165. Demostremos que  $M$  y  $N$  se encuentran en las líneas medias correspondientes del triángulo  $ABC$ . Si  $P$  es el punto medio de  $AB$ , entonces  $\angle MPA = 2\angle ABM = \angle ABC = \angle APL$ . Para concretar, sea que  $ABC$  es un triángulo acutángulo,  $\angle C \geq \angle A$ ; en este caso  $\angle MNK = 180^\circ - \angle KNB = \angle KCB = \angle MLK$  (nos hemos valido de que los puntos  $K$ ,  $N$ ,  $B$  y  $C$  se encuentran en una circunferencia, así como de que  $ML$  es paralela a  $BC$ ). Por lo tanto,  $M$ ,  $L$ ,  $N$  y  $K$  se hallan en una

circunferencia. Luego,  $\angle LMK = \angle PMB + \angle NMK = \frac{1}{2} \angle B + \angle BMK = \frac{1}{2} \angle B + \angle A$ . Si  $O$  es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle LMK$ , entonces  $\angle LOK = 2 \angle LMK = \angle B + 2 \angle A = 180^\circ - \angle C + \angle A = 180^\circ - \angle LPK$  ( $\angle LPK = \angle APK - \angle APL = 180^\circ - 2 \angle A - \angle B = \angle C - \angle A$ ), es decir,  $O$  se sitúa en la circunferencia que pasa por  $L$ ,  $P$  y  $K$ , pero ésta es precisamente la circunferencia de los nueve puntos.

II.166. Puesto que el punto medio de  $FH$  se halla en la circunferencia de los nueve puntos (véase el problema II.160), entonces es suficiente mostrar que también la recta de Simson que corresponde al punto  $F$ , divide  $FH$  por la mitad. Supongamos que  $K$  es la proyección de  $F$  sobre cualquier lado del triángulo,  $D$  es el pie de la altura trazada hacia el mismo lado,  $H_1$  es el punto de intersección de esta altura con la circunferencia circunscrita,  $|H_1D| = |HD|$  (véase el problema II.107, solución),  $L$  es el punto de intersección de la recta de Simson con la misma altura y, por fin,  $M$  es un punto tomado en la recta  $HH_1$ , para el cual  $FM \parallel KD$ ; entonces  $\triangle FMH_1 = \triangle KDL$  ( $|FM| = |KD|$ ); ambos triángulos son rectangulares y  $\angle DLK = \angle MH_1F$ , puesto que la altura del triángulo es la recta de Simson que corresponde al vértice, desde el cual ésta parte, y se puede valerse de la afirmación del problema II.154. También es fácil mostrar que las direcciones  $\overrightarrow{H_1M}$  y  $\overrightarrow{DL}$  coinciden, es

decir,  $FKHL$  es un paralelogramo, de lo cual se deduce nuestra afirmación.

II.167. En la fig. 32  $O$  es el centro de la circunferencia circunscrita,  $A_1, B_1, C_1$  son los puntos medios de los lados;  $L$  y  $K$ , las proyecciones de  $A$  y  $B$  sobre  $l$ ;  $M$ , el punto de intersección de las rectas que pasan por  $L$  y  $K$  perpendicularmente a  $BC$  y  $CA$ . Para concretar, el

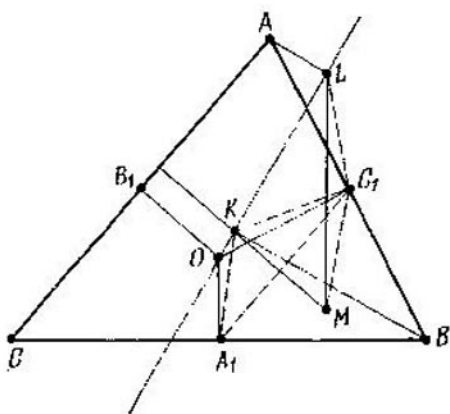


Fig. 32

triángulo  $ABC$  es acutángulo. Primero demostraremos que  $C_1$  es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle KLM$ . Los puntos  $A_1, O, K, C_1, B$  se hallan en una circunferencia. Por consiguiente,  $\angle C_1KL = \angle OA_1C_1 = 90^\circ - \angle C$ ; de la misma manera  $\angle C_1LK = 90^\circ - \angle C$ . Por lo tanto,  $|KC_1| = |C_1L|$ ,  $\angle LC_1K = 2\angle C$  y, puesto que  $\angle KLM = \angle C$ , nuestra afirmación está demostrada. Además,  $KM$  es perpendicular a  $A_1C_1$ ,  $|KC_1| = |C_1M|$ , por consecuencia,  $\angle C_1MA_1 = \angle C_1KA_1 = 180^\circ - \angle B$ , es de-

cir,  $M$  se encuentra en la circunferencia circunscrita alrededor del  $A_1B_1C_1$ .

II.168. Designemos con  $H$  el punto de intersección de las alturas del triángulo  $ABC$  y con  $A_2, B_2, C_2$ , los puntos medios de los segmentos  $AH, BH, CH$ . Notemos que los triángulos  $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$  son semejantes entre sí (los vértices correspondientes están designados con letras iguales), además  $A_2, B_2$  y  $C_2$ , respectivamente, son centros de las circunferencias circunscritas alrededor de éstos. Primero demos­tre­mos la afirmación siguiente: tres rectas que pasan por los puntos  $A_2, B_2$  y  $C_2$  y dispuestas igualmente respecto a los triángulos  $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$  concurren en un punto en la circunferencia de los nueve puntos. Notemos que las rectas  $A_2B_1, B_2B$  y  $C_2B_1$  están dispuestas igualmente respecto a los triángulos  $AB_1C_1, A_1BC_1$  y  $A_1B_1C$  y se intersecan en el punto  $B_1$  que se halla en la circunferencia de los nueve puntos. Puesto que los puntos  $A_2, B_2, C_2$  se sitúan en la circunferencia de los nueve puntos, es evidente que también las tres rectas que se obtienen a partir de las rectas  $A_2B_1, B_2B$  y  $C_2B_1$  haciendo girar en un mismo ángulo alrededor de los puntos  $A_2, B_2$  y  $C_2$ , respectivamente, también concurrirán en un punto dispuesto en la circunferencia de los nueve puntos. Sea  $P$  el punto de intersección de las rectas de Euler de los triángulos  $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$ . Designemos:  $\angle PA_2A = \varphi$ . Para el uso cómodo consideremos que el triángulo  $ABC$  es acutángulo y el punto  $P$  se halla en el arco  $B_1A_2$  de la circunferencia de los nueve puntos (fig. 33). Entonces,

$\angle PA_2A_1 = 180^\circ - \varphi$ ,  $\angle PA_2B_1 =$   
 $= 180^\circ - \varphi - \angle B_1A_2A_1 = 180^\circ - \varphi -$   
 $- \angle B_1C_1A_1 = 2 \angle C - \varphi$ ,  $\angle PA_2C_1 =$   
 $= 180^\circ - \varphi + 180^\circ - 2 \angle B = 360^\circ - \varphi -$   
 $- 2 \angle B$ . Puesto que las cuerdas  $PA_1$ ,  $PB_1$  y  
 $PC_1$  son proporcionales a los senos de los

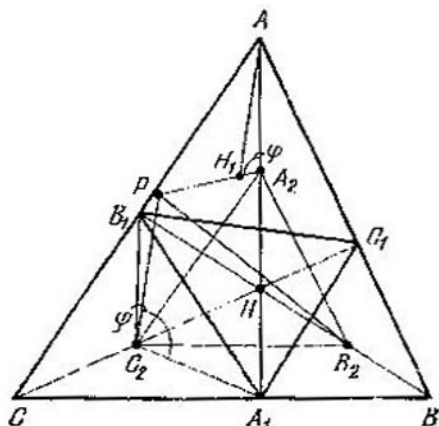


Fig. 33

ángulos apoyados en éstas, nos queda demostrar que de las tres magnitudes  $\text{sen } \varphi$ ,  $\text{sen } (2C - \varphi)$ ,  $-\text{sen } (2B + \varphi)$  una (en nuestro caso la primera) es igual a la suma de las dos otras, es decir,  $\text{sen } \varphi = \text{sen } (2C - \varphi) - \text{sen } (2B + \varphi)$ . Pero en el triángulo  $AA_2H_1$  / /  $|AA_2| = R$ ,  $|AH_1| = 2R \cos A$  ( $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita;  $R \cos A$  es la distancia desde el centro del círculo circunscrito  $A_2$  hasta  $B_1C_1$ ),  $\angle H_1AA_2 = \angle A + 2 \angle B - 180^\circ$ . Según el teorema de los senos para el  $\triangle AA_2H_1$ :  $\frac{2 \cos A}{\text{sen } \varphi} = \frac{1}{\text{sen } (2B + A + \varphi)} \Rightarrow$



$\Rightarrow -\operatorname{sen}(2B + 2A + \varphi) - \operatorname{sen}(2B + \varphi) =$   
 $= \operatorname{sen} \varphi \Rightarrow \operatorname{sen}(2C - \varphi) - \operatorname{sen}(2B + \varphi) =$   
 $= \operatorname{sen} \varphi$ , lo que había que demostrar. De esta manera queda demostrada la afirmación para el caso del triángulo acutángulo. El caso del triángulo obtusángulo  $ABC$  se examina de la misma manera.

II.169. En el triángulo dado  $ABC$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  son los puntos medios de los lados correspondientes. Demuéstrase que la circunferencia que pasa, por ejemplo, por el vértice  $A$  y satisface la condición del problema, pasa por los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos interior y exterior  $A$  con la línea media  $B_1C_1$ . Por lo tanto, para todos los puntos  $M$  de esta circunferencia se cumplirá la igualdad  $|B_1M| : |C_1M| = |B_1A| : |C_1A| = b : a$  (véase el problema II.9). De esta manera, si  $M_1$  y  $M_2$  son los puntos de intersección de dos circunferencias de esta índole, entonces  $|A_1M_1| : |B_1M_1| : |C_1M_1| = a : b : c$  (lo mismo se refiere al punto  $M_2$ ), por eso  $M_1$  y  $M_2$  pertenecerán a una tercera circunferencia. Además,  $M_1$  y  $M_2$  pertenecen a una recta, para todos los puntos  $M$  de la cual se cumple la igualdad  $(c^2 - b^2) |A_1M|^2 + (a^2 - c^2) \times \times |B_1M|^2 + (b^2 - a^2) |C_1M|^2 = 0$  (véase el problema II.14 y su solución). Esta recta pasa por el centro del círculo circunscrito alrededor del  $\triangle A_1B_1C_1$  y por el punto de intersección de sus medianas (compruébese esto expresando las longitudes de medianas mediante los lados), es decir, aquélla coincide con la recta de Euler del  $\triangle A_1B_1C_1$  y, por lo tanto, también del  $\triangle ABC$ .

II.170. a) De manera análoga a como esto se ha hecho en el problema anterior, se puede demostrar que estas tres circunferencias se intersecan en dos puntos  $M_1$  y  $M_2$ ; además,  $|AM_1| : |BM_1| : |CM_1| = bc : ac : ab$  (lo mismo se hace para  $M_2$ ).

b) Se deduce de a) y del problema II.14.

c) Demuéstrase que si  $M$  se halla en el interior del  $\triangle ABC$ , entonces  $\angle AM_1C = 60^\circ + \angle B$ ,  $\angle BM_1A = 60^\circ + \angle C$ ,  $\angle CM_1B = 60^\circ + \angle A$  (para esto se puede aprovechar el teorema de Bretschneider, problema II.236).

II.171. Tomemos en  $BC$  el punto  $A_1$  y en  $BA$  el punto  $C_1$  de manera que  $|BA_1| = |BA|$ ,  $|BC_1| = |BC|$  ( $\triangle A_1BC_1$  es simétrico al  $\triangle ABC$  respecto a la bisectriz del ángulo  $B$ ). Es evidente que  $BK$  divide  $A_1C_1$  por la mitad. Construyamos dos paralelogramos  $BA_1MC_1$  y  $BCND$  (los lados correspondientes de los paralelogramos son paralelos, los puntos  $B, K, M$  y  $N$  se hallan en una recta);  $|CN| = |AA_1| \frac{|BC|}{|BA_1|} = \frac{|BC|^2}{|BA|}$ , por consiguiente,  $\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|CN|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2}$ .

II.172. Tenemos (fig. 34)  $\angle FE_1A = \angle EDF = \angle A$ ; por lo tanto,  $|AF| = |E_1F|$ ,  $\angle FE_1N = \angle FDB = \angle C$ ,  $\angle E_1FN = \angle A$ . Por consiguiente, el  $\triangle E_1FN$  es semejante al  $\triangle ABC$ ,  $\frac{|AF|}{|FN|} = \frac{|E_1F|}{|FN|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ ,  $\angle AFN = 180^\circ - \angle A$ . Ahora se puede mostrar que  $AN$  es la simediana. Para esto examinemos el paralelogramo  $ACA_1B$ ;

$AA_1$  divide  $BC$  por la mitad, el  $\triangle ACA_1$  es semejante al  $\triangle AFN$ , por lo tanto,  $\angle NAF = \angle A_1AC$ .

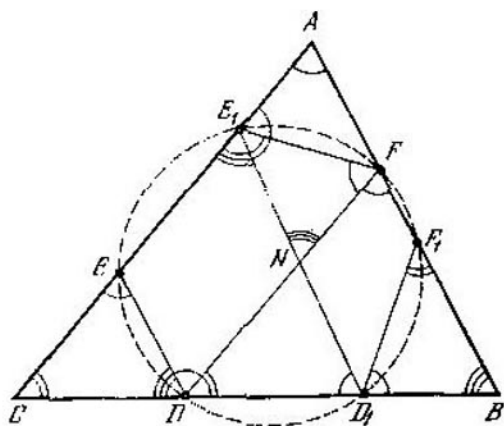


Fig. 34

**II.173.** La circunferencia de Apolonio que pasa por el vértice  $B$  del triángulo  $ABC$ , es el lugar geométrico de puntos  $M$ , para los cuales  $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$  (problema II.170, solución). Por consiguiente, si  $D$  es el punto de intersección de esta circunferencia de Apolonio y de la circunferencia circunscrita alrededor de  $ABC$ , la recta  $BD$  divide  $AC$  en la razón  $\frac{S_{BAD}}{S_{BCD}} = \frac{|AB| \cdot |AD|}{|CB| \cdot |CD|} = \frac{|AB|^2}{|CB|^2}$ .

**II.174.** Sea  $N$  el punto de intersección de  $BQ$  y  $CD$ ;  $O$ , el centro de la circunferencia;  $R$ , su radio. Notemos que  $\angle NBC = \frac{1}{2} \angle PMQ$ . (Si  $Q$  está en el segmento  $NB$ ,

entonces  $\angle NBC = 90^\circ - \angle QBP = 90^\circ -$   
 $-\frac{1}{2}\angle QOP = \frac{1}{2}\angle PMQ$ .) Por consiguiente,  
 los triángulos  $NBC$  y  $POM$  son semejantes,  
 $|CN| = |BC| \frac{R}{|PM|} = R \frac{|PD|}{|PM|} = R \frac{|BP|}{|AB|} =$   
 $= \frac{1}{2} |BP| = \frac{1}{2} |CD|$ .

II.175. Sea  $H$  el punto de intersección de las alturas;  $O$ , el centro del círculo circunscrito;  $B_1$ , el punto medio de  $CA$ . La recta  $MN$  pasa por el punto medio de  $BH$ , el punto  $K$ ;  $|BK| = |B_1O|$ . Demuéstrese que la recta  $MN$  es paralela a  $OB$  (si  $\angle C > \angle A$ , entonces  $\angle MKN = 2\angle MBN = \angle C - \angle A = \angle OBH$ ).

II.176. Supongamos que la recta  $AM$  corta por segunda vez la circunferencia que pasa por  $B$ ,  $C$  y  $M$  en el punto  $D$ . Entonces,  $\angle MDB = \angle MBA = \angle MAC$ ,  $\angle MDC = \angle MBC = \angle MAB$ . Por consiguiente,  $ABDC$  es un paralelogramo.

II.177. De la resolución del problema II.234 se deduce que  $\frac{|LM|}{|MK|} = \frac{|LN|}{|NK|}$ . Se puede considerar que  $l$  pasa por  $N$ . Apliquemos al  $\triangle NKP$  el teorema de los senos. Sustituyamos la razón de los senos por la razón de las cuerdas correspondientes. Tendremos:  
 $|NP| = \frac{|NK| \operatorname{sen} \angle NKP}{\operatorname{sen} \angle KPN} = \frac{|NK| \operatorname{sen} \angle NKM}{\operatorname{sen} \angle KMA} =$   
 $= \frac{|NK|}{|KM|} |NM|$ , etc.

II.178. Supongamos que  $O$  es el centro de la circunferencia inscrita,  $K$  y  $L$  son los puntos

de tangencia con los lados  $AC$  y  $AB$ ; la recta que pasa por  $N$  paralelamente a  $BC$ , corta los lados  $AB$  y  $AC$  en los puntos  $R$  y  $M$ . El cuadrilátero  $OKMN$  es inscrito ( $\angle ONM = \angle OKM = 90^\circ$ ); por consiguiente,  $\angle OMN = \angle OKN$ , de manera análoga  $\angle ORN = \angle OLN$ , pero  $\angle OLN = \angle OKN$ , por lo tanto,  $\angle ORN = \angle OMN$  y el  $\triangle ORM$  es isósceles,  $ON$  es la altura; de esta manera,  $|RN| = |NM|$ .

II.179. Si  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$ , entonces, como se conoce (véase el problema I.18),  $|MC| = \frac{a+b-c}{2}$ . Tracemos por  $K$  una recta paralela a  $AC$ ; designemos sus puntos de intersección con  $AB$  y  $BC$  por  $A_1$  y  $C_1$ , respectivamente. La circunferencia inscrita en el  $\triangle ABC$  es exinscrita (es tangente a  $A_1C_1$  y las prolongaciones  $BA_1$  y  $BC_1$ ) para el  $\triangle A_1BC_1$ . Pero el  $\triangle A_1BC_1$  es semejante al  $\triangle ABC$ . Por consiguiente, la circunferencia exinscrita en  $ABC$  será tangente a  $AC$  en el punto  $N$ ; designemos los puntos de su tangencia con las prolongaciones de  $BA$  y  $BC$  por  $R$  y  $L$ , respectivamente. Tenemos:  $|BR| = |BL| = \frac{1}{2}(a+b+c)$ , por lo tanto,  $|AN| = |AR| = |RB| - |BA| = \frac{a+b-c}{2} = |MC|$ .

II.180. Tracemos por  $K$  la recta paralela a  $BC$ . Designemos por  $L$  y  $Q$  los puntos de intersección de la tangente en el punto  $P$  con la recta  $BC$  y la recta construida, paralela a ella, y por  $N$ , el punto de intersección de  $AK$  con

*BC*. Puesto que  $|CN| = |BM|$  (véase el problema II.179), es suficiente demostrar que  $|NL| = |LM|$ ; pero  $|PL| = |LM|$ , por consiguiente, hace falta demostrar que  $|PL| = |NL|$ . Puesto que el  $\triangle PLN$  es semejante al  $\triangle PQK$ , en el cual  $|PQ| = |QK|$ , entonces  $|PL| = |NL|$  y  $|CL| = |LB|$ .

II.181. Sean *M* y *N* los puntos de intersección de la recta *LK* con las rectas *l* y *CD*. Entonces  $|AM|^2 = |ML| \cdot |MK|$ . De la semejanza de los triángulos *KMB* y *DKN* se deduce que  $|MK| = \frac{|KN| \cdot |MB|}{|DN|}$ . De la semejanza de los triángulos *CNL* y *MLB* se deduce:  $|ML| = \frac{|LN| \cdot |MB|}{|CN|}$ .

Conque,  $|MK| \cdot |ML| = \frac{|KN| \cdot |LN|}{|CN| \cdot |DN|} |MB|^2 = |MB|^2$ , es decir.  $|MA|^2 = |MB|^2$ ,  $|MA| = |MB|$ .

II.182. Supongamos (fig. 35) que *B* es el segundo punto común de las circunferencias; *C* es un punto de la recta *AB*, desde el cual están trazadas las tangentes, y, por fin, *K* es el punto de intersección de las rectas *MN* y *PQ*. Valiéndonos del teorema de los senos y del resultado del problema I.234, obtenemos:

$$\frac{|PM|}{|MA|} = \frac{|PM|}{\text{sen } \angle PBM} \cdot \frac{\text{sen } \angle PBM}{|MA|} = \frac{BM}{\text{sen } \angle BPM} \times \frac{\text{sen } \angle PBM}{|MA|} = \sqrt{\frac{|CB|}{|CA|} \cdot \frac{\text{sen } \angle PBM}{\text{sen } \angle BPM}}$$

De este modo, al designar con  $\alpha$  el ángulo *AMB* y con  $\beta$  el ángulo *APB* ( $\alpha$  y  $\beta$  son constantes), obten-

dremos:  $\frac{|PM|}{|MA|} = \sqrt{\frac{|CB|}{|CA|}} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen} \beta}$ . De

manera análoga encontramos:  $\frac{|AN|}{|NQ|} =$

$\sqrt{\frac{|CA|}{|CB|}} \cdot \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$  Pero, según el teorema de Menelao (véase el problema II.45),

$\frac{|PM|}{|MA|} \cdot \frac{|AN|}{|NQ|} \cdot \frac{|QK|}{|KP|} = 1$ . Por consiguiente,  $\frac{|QK|}{|KP|} = 1$ .

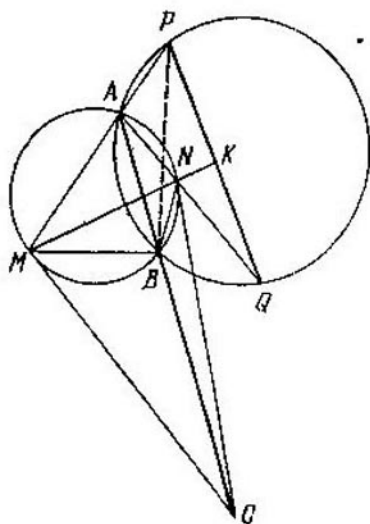


Fig. 35

II.183. Tracemos por  $M$  una recta paralela a  $AC$ , hasta que se interseque con las rectas  $BA$  y  $BC$  en los puntos  $A_1$  y  $C_1$ . Tenemos:  $\angle A_1KM = 90^\circ - \angle DKM = 90^\circ - \angle KBD = \angle BAD = \angle KA_1M$ ; por lo tanto,  $\triangle KMA_1$  es isósceles y  $|A_1M| = |MK|$ .

De manera análoga  $|MC_1| = |ML|$ ; pero  $|KM| = |ML|$ , luego,  $|A_1M| = |MC_1|$ , es decir, la recta  $BM$  divide  $AC$  por la mitad.

**II.184.** Sea  $M$  el punto de intersección de  $ND$  y  $AB$  y  $P$ , el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia en los puntos  $A$  y  $D$ .

Puesto que las rectas  $NC$ ,  $AB$  y  $PD$  son paralelas, entonces de la semejanza de los triángulos correspondientes obtenemos:

$$|AM| = |DP| \cdot \frac{|AN|}{|NP|}, \quad (1)$$

$$\frac{|MB|}{|NC|} = \frac{|MD|}{|ND|} = \frac{|AP|}{|NP|}, \quad (2)$$

$$|MB| = |NC| \frac{|AP|}{|NP|};$$

pero  $|DP| = |AP|$ ,  $|NC| = |AN|$ . Por lo tanto, los segundos miembros de las expresiones (1) y (2) son iguales, es decir,  $|AM| = |MB|$ .

**II.185.** Consideremos que  $D$  es el punto medio de  $CB$  y  $AD$  corta por segunda vez la circunferencia en el punto  $K$ . Demostremos que las tangentes a la circunferencia en los puntos  $B$  y  $C$  se cortan en la recta  $MK$ .

Examinemos el cuadrilátero  $CMBK$ . Para que las tangentes a la circunferencia en los puntos  $C$  y  $B$  se intersequen en la diagonal  $MK$ , es necesario y suficiente (véase el problema I.234) que

$$\frac{|CM|}{|CK|} = \frac{|MB|}{|BK|}; \text{ pero } \frac{|CM|}{|CK|} = \frac{|AB|}{|CK|} = \frac{|BD|}{|DK|} = \frac{|CD|}{|DK|} = \frac{|AC|}{|BK|} = \frac{|MB|}{|BK|}. \text{ (En la primera}$$



y la última igualdad se ha valido del hecho de que  $|CM| = |AB|$ ,  $|AC| = |MB|$  en vista del paralelismo de  $AM$  y  $CB$ ; en la segunda y la cuarta, de la semejanza del  $\triangle ABD$  y el  $\triangle CDK$ , el  $\triangle ADC$  y el  $\triangle KDB$ , en la tercera, el hecho de que  $AD$  es la mediana.)

II.186. Sea  $O$  el centro de la circunferencia; sean  $N_1, M_1, P_1, R_1$  los puntos simétricos a los puntos  $N, M, P, R$ , respectivamente,

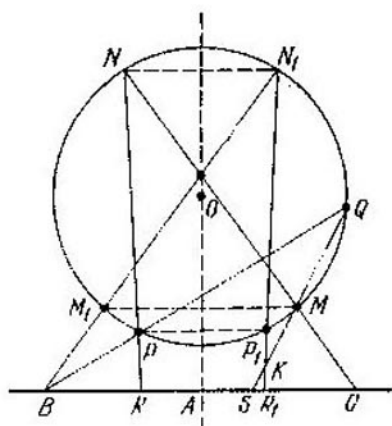


Fig. 36

en cuanto a la recta  $OA$ ;  $K$ , el punto de intersección de las rectas  $N_1R_1$  y  $QS$ . Hace falta demostrar que los puntos  $R_1, S$  y  $K$  coinciden. Los puntos  $N_1, M_1$  y  $B$  se hallan en una recta, simétrica a la recta  $NMC$ ;  $N_1, P_1, R_1$  también se encuentran en una recta, simétrica a la recta  $NPR$  (fig. 36). Los puntos  $B, N_1, Q$  y  $K$  se sitúan en una circunferencia, puesto

que  $\angle BN_1K = \angle M_1N_1P_1 = \angle MNP = \angle PQM = \angle BQK$ . Los puntos  $B, N_1, Q, R_1$  también están en una circunferencia, puesto que  $\angle N_1R_1B = \angle N_1P_1P = \angle N_1QP = \angle N_1QB$ . Por consiguiente, los cinco puntos  $B, N_1, Q, R_1, K$  se hallan en una circunferencia; pero los puntos  $N_1, R_1$  y  $K$  se encuentran en una recta, por lo tanto,  $R_1$  y  $K$  se unen.

II.187. Limitémonos al caso, en que  $ABC$  es un triángulo acutángulo. Examinemos el paralelogramo  $A_1MON$  ( $M$  y  $N$  se hallan en  $A_1B_1$  y  $A_1C_1$ ). Puesto que  $A_1O$  forma con  $A_1C_1$  y  $A_1B_1$  ángulos de  $(90^\circ - \angle B)$  y  $(90^\circ - \angle C)$ , entonces

$$\frac{|A_1M|}{|A_1N|} = \frac{|A_1M|}{|MO|} = \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{|A_1L|}{|A_1K|}.$$

II.188. Las afirmaciones del problema se deducen del hecho tal: si en cada lado del triángulo se construyen las circunferencias de manera que la suma de las magnitudes angulares de sus arcos (dispuestos del mismo lado que el triángulo) sea igual a  $2\pi$ , estas circunferencias tienen un punto común.

II.189. Tomemos los puntos  $E_1$  y  $F_1$  simétricos a los puntos  $E$  y  $F$  respecto a  $AB$ . Después de esto el problema se reduce al caso particular del problema II.186.

II.190. En la prolongación de  $AC$  tomemos por el punto  $C$  un punto  $M$  de modo que  $|CM| = |CB|$ ; entonces  $E$  es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor de  $AMB$  ( $|AE| = |BE|$ ,  $\angle AEB = \angle ACB = 2\angle AMB$ ). De esto se deduce que  $F$  es el punto medio de  $AM$  y  $DF$  divide el perímetro

del  $\triangle ABC$  por la mitad. Además,  $DF$  es paralela a  $BM$ , mientras que  $BM$  lo es a la bisectriz del ángulo  $C$  del triángulo  $ABC$ , es decir,  $DF$  es la bisectriz del ángulo  $D$  en el triángulo  $DKL$ , donde  $K$  y  $L$  son los puntos medios de  $AC$  y  $CB$ .

II.191. Supongamos que la recta corta los lados  $AC$  y  $AB$  del triángulo  $ABC$  en los puntos  $M$  y  $N$ . Designemos:  $|AM| + |AN| = 2l$ . El radio de la circunferencia con el centro en  $MN$  que es tangente a  $AC$  y  $AB$ , es igual a  $\frac{S_{AMN}}{l}$  y, según la condición,  $\frac{S_{AMN}}{l} = \frac{S_{ABC}}{p} = r$ , donde  $p$  y  $r$  son, respectivamente, el semiperímetro y el radio de la circunferencia inscrita en el  $\triangle ABC$ .

II.192. Demostremos que, para la homotecia con el centro en  $M$  y la razón  $-1/2$ , el punto  $N$  se transforma en  $I$  (es evidente que para esta homotecia  $I$  pasa a  $S$ ). En el triángulo  $ABC$  dado  $A_0$ ,  $B_0$  y  $C_0$  son, respectivamente, los puntos medios de los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ ;  $A_1$  es un punto tomado en el lado  $BC$  tal que  $AA_1$  divide el perímetro por la mitad. Es fácil ver que  $A_1$  es el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita con el lado  $BC$ ; ésta también es tangente a las prolongaciones de  $AB$  y  $AC$ ;  $A_2$  es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado  $BC$ . Tenemos:  $|BA_2| = |CA_1|$ . Levantemos del punto  $A_2$  la perpendicular hacia  $BC$ ; designemos por  $D$  su punto de intersección con  $AA_1$ . Repitiendo los razonamientos aducidos en la solución del problema II.179, demostre-

mos que  $|A_2I| = |ID|$ . Por consiguiente, la recta  $A_0I$  es paralela a  $AA_1$ . Para la homotecia, de la cual se ha hablado al comienzo, la recta  $AA_1$  se transformará en la recta  $A_0I$ . Precisamente de la misma manera dos rectas que dividen el perímetro por la mitad, pasarán respectivamente a  $B_0I$  y  $C_0I$ . Por lo tanto, estas tres rectas se cortan en un punto  $N$  tal, el cual pasa a  $I$ , al existir esta homotecia. De esto se deduce la afirmación del problema.

II.193. a) Haciendo uso de las fórmulas  $r = \frac{S}{p}$ ,  $R = \frac{abc}{4S}$ ,  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , donde  $S$  es el área del triángulo  $ABC$  para el segundo miembro, demostramos fácilmente la correlación requerida.

b) Válgase de la fórmula de Leibniz (problema II.140), tomando como  $M$  el centro del círculo circunscrito.

c) Hágase uso de la fórmula de Leibniz (problema II.140), tomando como  $M$  el centro del círculo inscrito. Para calcular, por ejemplo,  $|MA|^2$  bajemos la perpendicular  $MK$  sobre  $AB$ ; tenemos:  $|MK| = r$ ,  $|AK| = p - a$ ; por consiguiente,  $|AM|^2 = (p - a)^2 + r^2$ . De manera análoga se calculan  $|MB|^2$  y  $|MC|^2$ . Al simplificar el segundo miembro, utilícese el resultado del punto a).

d) Sea  $M$  el punto de intersección de la bisectriz del ángulo  $B$  con la circunferencia circunscrita. Si  $|IO| = d$ , entonces  $|BI| \times |IM| = R^2 - d^2$ . El triángulo  $ICM$  es isósceles ( $|IM| = |CM|$ ), puesto que  $\angle CIM = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$  y  $\angle ICM =$

$$= \frac{1}{2} (\angle B + \angle C). \text{ Por consiguiente,}$$

$$\begin{aligned} R^2 - d^2 &= |BI| \cdot |IM| = |BI| \cdot |CM| = \\ &= \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{B}{2}} \cdot 2R \operatorname{sen} \frac{B}{2} = 2Rr. \end{aligned}$$

e) Se demuestra de manera análoga al punto d).

f) La distancia entre las proyecciones de  $I$  e  $I_a$  sobre  $AC$  es igual a  $a$ . Tomemos el punto  $K$  de modo que  $IK \parallel AC$ ,  $I_a K \perp AC$ . En el triángulo rectángulo  $IKI_a$  tenemos:  $\angle KII_a = \frac{1}{2} \angle A$ ,  $|IK| = a$ ,  $|I_a K| = r_a - r$ . De este modo  $|II_a|^2 = \frac{|IK|^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} 2|IK| \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 4R(r_a - r)$ .

II.194. Tracemos por  $O$  las rectas paralelas a  $AB$  y  $AC$  y designemos por  $L$  y  $K$  los puntos de intersección de estas rectas con las perpendiculares bajadas desde  $I_a$  sobre  $AB$  y  $AC$ , respectivamente. Demostremos la semejanza de los triángulos  $AB_1C_1$  y  $OLK$ . Tenemos:  $\angle B_1AC_1 = \angle LOK$ ,

$$\begin{aligned} |AB_1| &= \frac{bc}{c+a}, \quad |AC_1| = \frac{bc}{b+a}, \quad |OL| = p - \\ &- \frac{c}{2} = \frac{1}{2}(a+b), \quad |OK| = p - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a+c); \end{aligned}$$

de esta manera,  $\frac{|AB_1|}{|OL|} = \frac{|AC_1|}{|OK|} = \frac{2bc}{(c+a)(b+a)}$ . Pero  $OI_a$  es el diámetro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle OLK$ . Por con-

siguiente.  $|B_1C_1| = \frac{2bc}{(c+a)(b+a)} |LK| =$   
 $= \frac{2bc}{(c+a)(b+a)} |OI_a| \operatorname{sen} A = \frac{abc}{(c+a)(b+a)R} \cdot |OI_a|.$

II.196. Demuéstrase que el área  $Q_a$  del triángulo con vértices en los puntos de tangencia de la circunferencia exinscrita con el centro  $I_a$  puede calcularse según la fórmula  $Q_a =$   
 $= S_{ABC} \frac{r_a}{2R} = \frac{S_{ABC}^2}{2R(p-a)},$  donde todas las designaciones son las mismas que en el problema II.193. Fórmulas análogas pueden obtenerse para las áreas de otros triángulos. (Véase la solución del problema I.240.)

II.197. Supongamos que  $O$  es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$ ,  $B_1$ , el punto medio de  $AC$ ,  $N$ , el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con  $AC$ ; entonces,  $|AN| = p - a$ ,  $|CN| = p - c$  (véase el problema I.18),  $|ON|^2 =$   
 $= |OB_1|^2 + |B_1N|^2 = |AO|^2 - |AB_1|^2 +$   
 $+ |B_1N|^2 = R^2 - \frac{b^2}{4} + \left(p - a - \frac{b}{2}\right)^2 =$   
 $= R^2 - (p - a)(p - c).$  De manera análoga, tras determinar los cuadrados de distancias hasta otros puntos de tangencia y sumándolos, obtenemos que la suma buscada es igual a  $3R^2 - (p - a)(p - c) - (p - c)(p - b) -$   
 $- (p - b)(p - a) = 3R^2 - M.$  Usando para el área del triángulo la fórmula de Herón y las fórmulas  $S = pr$ ,  $S = \frac{abc}{4R}$ , obtenemos  
 $r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}, \quad 4Rr = \frac{abc}{p}.$  Su-  
 mando las últimas igualdades y utilizando la identidad  $(p - a)(p - b)(p - c) + abc =$

$= p((p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a)) = pM$ , encontramos que  $M = 4Rr + r^2$ . Respuesta:  $3R^2 - 4Rr - r^2$ .

II.198. El producto de las longitudes de segmentos desde el vértice  $A$  del triángulo  $ABC$  hasta los puntos de intersección del lado  $AB$  con la circunferencia dada valdrá lo mismo que el producto para el lado  $AC$ . Cada uno de estos segmentos puede expresarse fácilmente a través de los lados del triángulo y las cuerdas examinadas. De esta manera obtenemos un sistema de tres ecuaciones que permite expresar las cuerdas por medio de los lados del triángulo. Para no analizar una por una todas las variantes, es cómodo elegir algún sentido de recorrido del triángulo y considerar dirigidos los segmentos y sus longitudes, como números reales arbitrarios.

II.199. Sean  $K_1$  y  $L_1$  tales puntos en  $BC$  y  $BA$ , que  $K_1K \parallel L_1L \parallel B_1B$ . Es suficiente demostrar que los triángulos  $BK_1K$  y  $BL_1L$  son semejantes, es decir,

$$\frac{|BK_1|}{|K_1K|} = \frac{|BL_1|}{|L_1L|}. \text{ Tenemos: } \frac{|BK_1|}{|BA_1|} = \frac{|B_1K|}{|B_1A_1|};$$

$$\frac{|K_1K|}{|BB_1|} = \frac{|A_1K|}{|B_1A_1|} \text{ y según la propiedad de la}$$

$$\text{bisectriz (problema 1.9) } \frac{|BK_1|}{|K_1K|} = \frac{|B_1K|}{|A_1K|} \times$$

$$\times \frac{|BA_1|}{|BB_1|} = \frac{|CB_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|BA_1|}{|BB_1|} = \frac{c}{b} \frac{|CB_1|}{|BB_1|} =$$

$$= \frac{ca}{(c+a)|BB_1|}. \text{ Esta última expresión es}$$

simétrica respecto a  $a$  y  $c$  y, por lo tanto,

$$\text{es también igual a } \frac{|BL_1|}{|L_1L|}.$$

II.200. Sean  $\angle KAL = \angle KLA = \varphi$ ,

$\angle KCL = \angle LKC = \psi$ . Entonces,  $\angle BKL = 2\varphi$ ,  $\angle BLK = 2\psi$ ,  $2\varphi + 2\psi = 180^\circ - \angle B$ . Si  $Q$  es el punto de intersección de  $AL$  y  $KC$ , entonces  $\angle AQC = 180^\circ - (\varphi + \psi) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle B$ . Tracemos por  $M$  la recta paralela a  $BC$  hasta que se interseque con  $KC$  en el punto  $N$ , entonces  $MQ$  es la bisectriz del ángulo  $AMN$  y  $\angle AQN = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle B$ . De aquí se deduce que  $Q$  es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo  $AMN$  (véase el problema I.46); por consiguiente, el  $\triangle AMN$  es semejante al  $\triangle KBL$ , mientras que el  $\triangle KMN$  lo es al  $\triangle KBC$ . Sean  $|AK| = |KL| = |LC| = x$ ,  $|AM| = y$ ,  $|MN| = z$ . Entonces,  $\frac{z}{a-x} = \frac{y}{c-x}, \frac{y-x}{c-x} = \frac{z}{a}$ , de donde  $y = a$ .

**II.201.** Sea  $B_1$  el punto medio de  $AC$ . Prolonguemos la bisectriz hasta que se interseque en el punto  $B_2$  con la perpendicular levantada hacia  $AC$  desde el punto  $B_1$ . El punto  $B_2$  se halla en la circunferencia circunscrita. Tracemos por  $M$  la perpendicular hacia  $AC$ ; supongamos que  $L$  es su punto de intersección con  $AC$ ;  $K$ , con  $BB_1$ , entonces  $|KM| = |ML|$ . Tracemos por  $K$  una recta paralela a  $AC$  que corta  $AB$  y  $BC$  en los puntos  $D$  y  $E$ , respectivamente. Si  $G$  y  $F$  son las proyecciones de  $D$  y  $E$  sobre  $AC$ , entonces  $M$  es el centro del rectángulo  $GDEF$ ; además, el  $\triangle DME$  es semejante al  $\triangle AB_2C$  ( $\triangle DME$  se obtiene a partir del  $\triangle AB_2C$  para la homotecia con el centro en  $B$ ). Tenemos:  $\text{ctg } \angle MCL =$



$$\begin{aligned}
- \frac{|LC|}{|ML|} &= \frac{|LF|}{|ML|} + \frac{|FC|}{|ML|} = \frac{AB_1}{|B_1B_2|} + \\
+ 2 \frac{|FC|}{|EF|} &= \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + 2 \operatorname{ctg} C. \text{ Si } B' \text{ es la} \\
\text{base de la bisectriz, } P \text{ y } T &\text{ son las proyecciones de } N \text{ y } B', \text{ respectivamente, sobre } BC, \\
\text{entonces } \operatorname{ctg} \angle NCB &= \frac{|PC|}{|NP|} = \frac{|PT|}{|NP|} + \\
+ \frac{|TC|}{|NP|} &= \frac{|BP|}{|NP|} + 2 \frac{|TC|}{|B'T|} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \\
+ 2 \operatorname{ctg} C, \text{ es decir, } \angle MCA &= \angle NCB.
\end{aligned}$$

II.202. a) Este problema conocido tiene muchas demostraciones diferentes. Aduzcamos una de éstas, basada sobre el siguiente criterio de igualdad de los triángulos. Dos triángulos son iguales si tienen iguales sendos lados correspondientes, los ángulos opuestos a estos lados y las bisectrices de estos ángulos. Demostremos este criterio. Examinemos dos triángulos  $ACB$  y  $ACB_1$ , en los cuales  $\angle B = \angle B_1$  ( $B$  y  $B_1$  se hallan a un lado de  $AC$ ). Estos triángulos tienen una circunferencia circunscrita común. Se puede considerar que  $B$  y  $B_1$  se sitúan a un lado del diámetro de esta circunferencia, siendo éste perpendicular a  $AC$ . Supongamos que la bisectriz del ángulo  $B$  corta  $AC$  en el punto  $D$  y la bisectriz del ángulo  $B_1$ , en el punto  $D_1$ ;  $M$  es el punto medio de  $AC$ ,  $N$ , el punto medio del arco  $AC$  que no contiene los puntos  $B$  y  $B_1$ . Los puntos  $B, D$  y  $N$  se hallan en una recta, los puntos  $B_1, D_1$  y  $N$ , también. Supongamos que  $B$  y  $B_1$  no coinciden y, por consiguiente, tampoco coinciden  $D$  y  $D_1$ . Supongamos que  $|MD| > |MD_1|$ ; entonces  $|BN| < |B_1N|$ ,  $|DN| > |D_1N|$ . Por consiguiente,  $|B_1D_1|$

$= |B_1N| - |ND_1| > |BN| - |ND| =$   
 $= |BD|$ , lo que es una contradicción. Ahora,  
 sea que en el  $\triangle ABC$  la bisectriz  $AA_1$  es igual  
 a la bisectriz  $CC_1$ . Apliquemos el criterio  
 recién demostrado a los triángulos  $BAA_1$  y  
 $BCC_1$ .

b) Si las bisectrices de ambos ángulos exte-  
 riores  $A$  y  $C$  del triángulo  $ABC$  se encuentran  
 en el interior del ángulo  $B$ , se puede demostrar  
 precisamente de la misma manera como en el  
 punto a).

Sea que estas bisectrices están dispuestas  
 fuera del ángulo  $B$ . Consideremos que  $|BC| >$   
 $> |BA|$ . Tomemos en  $CB$  el punto  $B_1$  de  
 tal manera que  $|CB_1| = |AB_1|$ . Designemos  
 $\angle B_1AC = \angle BCA = \alpha$ ,  $\angle B_1AB = \varphi$ ,  $L$  es  
 el punto de intersección de la bisectriz exterior  
 del ángulo  $C$  con  $AB$ ,  $M$  es el punto de inter-  
 sección de la bisectriz exterior del ángulo  $A$   
 con  $CB$ . Las demás designaciones se compren-  
 derán al examinar la fig. 37. Según la condi-  
 ción,  $|CL| = |AM|$ , además,  $|CL_1| =$   
 $= |AM_1|$ , puesto que el  $\triangle B_1AC$  es isósceles,  
 $|CM'_1| = |AM|$ , por cuanto  $\triangle CL_1M'_1 =$   
 $= \triangle AM_1M$ . Además,  $|CM_1''| > |CM'_1|$ , ya  
 que  $\angle M_1''M'_1C > \angle M'_1CA > 90^\circ$ . Por otra  
 parte, los puntos  $C, A, L$  y  $M_1''$  se hallan en  
 una circunferencia, en la cual el ángulo agudo  
 apoyado sobre  $LC$  ( $\angle LAC$ ) es mayor que el  
 ángulo agudo que se apoya sobre  $M_1''C$ . Por  
 consiguiente,  $|AM| = |CM'_1| < |CM_1''| <$   
 $< |CL|$ . Es una contradicción.

En el caso general, de la igualdad de las  
 bisectrices de los ángulos exteriores no se  
 deduce que el triángulo es isósceles. En el

problema I.256 se da un ejemplo de semejante triángulo.

II.203. Supongamos que  $ABC$  es el triángulo dado,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  son las bisectrices.

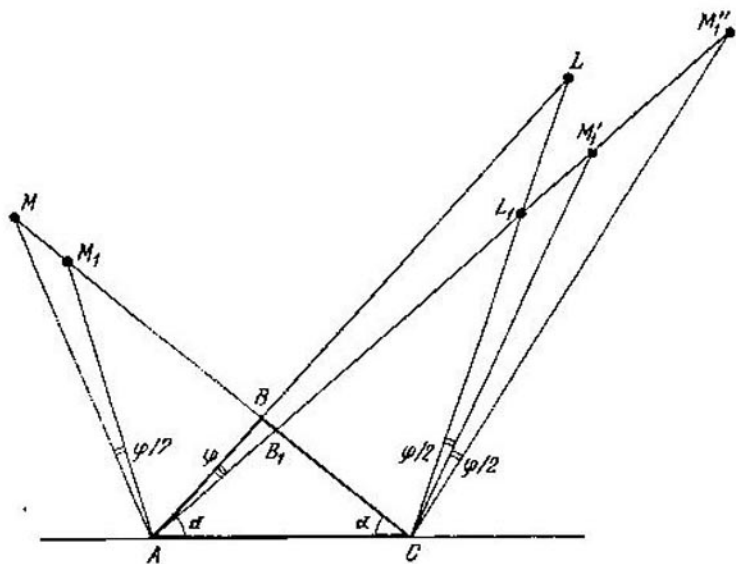


Fig. 37

Si  $|A_1B_1| = |A_1C_1|$ , entonces  $\angle A_1B_1C = \angle A_1C_1B$  (en este caso, el  $\triangle ABC$  será isósceles) o bien  $\angle A_1B_1C + \angle A_1C_1B = 180^\circ$ . En el segundo caso hagamos girar el  $\triangle A_1B_1C$  alrededor del punto  $A_1$  al ángulo  $B_1A_1C_1$ . A consecuencia de esto, los triángulos  $A_1C_1B$  y  $A_1B_1C$  resultarán aplicados uno a otro y formarán el triángulo semejante al  $\triangle ABC$ . Si los lados del  $\triangle ABC$  son  $a$ ,  $b$  y  $c$ , los lados del triángulo obtenido serán iguales a  $\frac{ac}{b+c}$ .

$\frac{ab}{b+c}$  y  $\frac{ac}{a+b} + \frac{ab}{a+c}$ . Tomando en consideración su semejanza, obtenemos:

$$\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} - \frac{a}{b+c} \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^3 + b^2c + b^2a + c^2b + c^2a - a^2b - a^2c + abc = 0. \quad (1)$$

Designemos:  $\cos \angle BAC = x$ . Según el teorema de los cosenos  $b^2 + c^2 - a^2 = 2bcx$ . Multiplicando la última igualdad sucesivamente por  $a$ ,  $b$  y  $c$  y restándola de (1), obtenemos

$$2x(a+b+c) + a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2(b+c)x}{2x+1}.$$

Puesto que  $0 < a < b + c$ , resulta que

$$-\frac{1}{4} < x < 0. \quad (2)$$

Al sustituir en el teorema de los cosenos  $a$  por  $b$ ,  $c$  y  $x$ , y, al designar  $b/c = \lambda$ , para  $\lambda$  obtenemos la ecuación  $(4x+1)\lambda^2 - 2\lambda \times \times (4x^3 + 8x^2 + x) + 4x + 1 = 0$ . Para que esta ecuación tenga solución ( $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 1$ ) para las condiciones de (2), deben cumplirse las desigualdades

$$4x^3 + 8x^2 + x > 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} D &= (4x^3 + 8x^2 + x)^2 - (4x + 1)^2 = \\ &= (2x + 1)^2 (x + 1) (2x - 1) \times \\ &\quad \times (2x^2 + 5x + 1) > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $D$  es el discriminante de la ecuación cuadrática. El sistema de desigualdades (2),

(3), (4) se satisface, cuando  $-\frac{1}{4} < x < \frac{\sqrt{17}-5}{4}$ .

De esta manera, el triángulo de partida no es obligatoriamente isósceles. Sin embargo, está demostrado que esto puede tener lugar sólo en el caso de que uno de los ángulos del triángulo inicial sea obtuso y su coseno se halle en el intervalo de  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$ , lo que corresponde aproximadamente a un ángulo de  $102^{\circ}40'$  a  $104^{\circ}28'$ . Si  $x = -\frac{1}{4}$ , el triángulo construido degenerará, cuando  $x = \frac{\sqrt{17}-5}{4}$ , tendremos  $\angle A_1B_1C = \angle A_1C_1B = 90^{\circ}$ , es decir, los dos casos, especificados al comienzo de la resolución, coinciden para este valor del ángulo.

II.204. Sea  $M$  el punto de intersección de  $AD$  y  $KL$ :

$$\begin{aligned} \frac{|KM|}{|ML|} &= \frac{S_{AKD}}{S_{ALD}} = \frac{\frac{1}{2} |AK| \cdot |AD| \operatorname{sen} \angle KAD}{\frac{1}{2} |DL| \cdot |AD| \operatorname{sen} \angle ADL} = \\ &= \frac{|AK| \cdot |CD|}{|DL| \cdot |AF|}. \end{aligned}$$

(Se ha aprovechado el hecho de que los senos de los ángulos inscritos son proporcionales a las cuerdas.) De manera análoga, si  $M_1$  es el punto de intersección de  $BE$  y  $KL$ , obtenemos:  $\frac{|KM_1|}{|M_1L|} = \frac{|BK| \cdot |FE|}{|LE| \cdot |BC|}$ . Pero de

la semejanza de los  $\triangle AKF$  y  $\triangle BKC$ ,  $\triangle CLD$  y  $\triangle FLE$  tenemos:  $\frac{|AK|}{|AF|} = \frac{|BK|}{|BC|}$ ,  $\frac{|CD|}{|DL|} = \frac{|FE|}{|LE|}$ ; multiplicando estas igualdades, obtenemos que  $\frac{|KM|}{|ML|} = \frac{|KM_1|}{|M_1L|}$ , es decir,

$M$  y  $M_1$  coinciden. *Observación.* Se puede mostrar que la afirmación del problema sigue vigente si  $A, B, C, D, E$  y  $F$  son seis puntos arbitrarios de la circunferencia. De ordinario, el teorema de Pascal se enuncia del modo siguiente: si  $A, B, C, D, E, F$  son puntos dispuestos en una circunferencia, entonces los tres puntos, en los cuales se intersecan las rectas  $AB$  y  $DE$ ,  $BC$  y  $EF$ ,  $CD$  y  $FA$ , se hallan en una recta.

II.205. Sea  $N$  el punto de intersección de la recta  $A_2A_1$  con la circunferencia, distinto de  $A_2$ . Apliquemos al hexágono  $ABCC_2NA_2$  (posiblemente, con puntos múltiples) el teorema de Pascal (problema II.204). Los puntos de intersección de las rectas  $AB$  y  $C_2N$ ,  $BC$  y  $NA_2$  (punto  $A_1$ ),  $CC_2$  y  $AA_2$  (punto  $M$ ) se hallan en una recta. Por consiguiente,  $AB$  y  $C_2N$  se intersecan en el punto  $C_1$ .

II.206. Sean dadas dos rectas mutuamente perpendiculares, o sea los ejes  $x$  e  $y$  del sistema de coordenadas rectangulares. Entonces, las alturas del triángulo se sitúan en las rectas  $y = k_i x$  ( $i = 1, 2, 3$ ); los lados del triángulo en este caso deben tener los coeficientes angulares  $-\frac{1}{k_i}$  y de la condición de pertenencia de los vértices  $(x_i, y_i)$  a las alturas encontra-

mos las razones de los términos libres  $c_i$  en las ecuaciones de los lados  $k_i y + x = c_i$ :  $c_1 = k_1 y_3 + x_3$ ,  $c_2 = k_2 y_3 + x_3$ ,  $y_3 = y_3 = k_3 x_3 \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_1 k_3 + 1}{k_2 k_3 + 1}$ , etc. Siendo adecuada la elección de la unidad de longitud, se puede adoptar  $c_i = \frac{k_i}{k + k_i}$ , donde  $k = k_1 k_2 k_3$ . Los puntos de intersección de la recta  $k_i y + x = \frac{k_i}{k + k_i}$  con los ejes:  $(O, \frac{1}{k + k_i})$  y  $(\frac{k_i}{k + k_i}, O)$ , el punto medio ( $P_i$ ) del segmento comprendido entre ellos es  $(\frac{k_i}{2(k + k_i)}, \frac{1}{2(k + k_i)})$ . El coeficiente angular de la recta  $P_1 P_2$  es igual a  $(\frac{1}{2(k + k_2)} - \frac{1}{2(k + k_1)})$ :  
 $:\left(\frac{k_2}{2(k + k_2)} - \frac{k_1}{2(k + k_1)}\right) = (k_1 - k_2):(k k_2 - k k_1) = -\frac{1}{k}$ . Justamente iguales serán los coeficientes angulares de las rectas  $P_2 P_3$  y  $P_3 P_1$ . Por eso  $P_1, P_2, P_3$  se hallan en una recta (su ecuación es:  $ky + x = 1/2$ ).

*Observación.* Al unir con ayuda de rectas el punto  $H$  de intersección de las alturas del triángulo con los puntos  $P_1, P_2, P_3$ , obtenemos un corolario interesante. Supongamos que  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  son los ángulos del triángulo enumerados en sentido contrario a las agujas del reloj,  $a_1, a_2, a_3$  son las rectas, en las cuales yacen los lados opuestos a éstos; por el punto  $H$  pasan tres rectas  $p_1, p_2, p_3$  de modo que los ángulos entre  $p_2$  y  $p_3, p_3$  y  $p_1, p_1$  y  $p_2$  (contados

en sentido contrario a las agujas del reloj) son iguales, respectivamente, a  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ . Entonces, los puntos de intersección de  $p_1$  con  $a_1$ ,  $p_2$  con  $a_2$ ,  $p_3$  con  $a_3$  se sitúan en una recta. Se propone que el lector examine los casos particulares de este teorema (muchos de éstos son unos hechos geométricos bellos y están lejos de ser evidentes) y lo compare con el problema.

Una *observación* más: en nuestro problema, en vez de los puntos medios de los segmentos separados en los lados del triángulo, sería posible tomar los puntos que los dividen en razones iguales. Estos puntos también estarán dispuestos en una recta.

II.207. Para determinar los ángulos del triángulo  $A_1B_1C_1$ , aprovéchese que los puntos  $P$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  se hallan en una circunferencia (lo mismo se hace para otras cuaternas de puntos). Si  $P$  es interior al triángulo  $ABC$ , entonces  $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2 = \angle APB - \angle ACB$ . Para el triángulo escaleno  $ABC$  existen ocho puntos diferentes  $P$  tales que los triángulos correspondientes  $A_1B_1C_1$  y  $A_2B_2C_2$  son semejantes al triángulo  $ABC$  (además, el triángulo  $A_2B_2C_2$  es igual a éste). Al mismo tiempo, seis puntos son interiores a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo  $ABC$  y dos, fuera de ésta.

II.208. Las rectas examinadas son mediatrices trazadas hacia los lados del triángulo  $A_1B_1C_1$ .

II.209. Designaciones:  $ABC$ , el triángulo dado;  $M$ , el punto que se halla a la distancia  $d$  respecto del centro de la circunferencia cir-



inscrita alrededor del triángulo  $ABC$ ;  $A_1, B_1, C_1$ , los pies de las perpendiculares bajadas desde  $M$  sobre  $BC, CA, AB$ ;  $A_2, B_2, C_2$ , los puntos de intersección de  $AM, BM, CM$ , respectivamente, con la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$ ;  $a, b, c$ , los lados del  $\triangle ABC$ ;  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ , los lados de los triángulos  $A_1B_1C_1$  y  $A_2B_2C_2$ , respectivamente;  $S, S_1$  y  $S_2$ , respectivamente, las áreas de estos triángulos. Tenemos:

$$a_1 = |AM| \operatorname{sen} A = |AM| \frac{a}{2R}. \quad (1)$$

De manera análoga se encuentran  $b_1$  y  $c_1$ . A partir de la semejanza de los triángulos  $B_2MC_2$  y  $BMC$  obtenemos:

$$\frac{a_2}{a} = \frac{|B_2M|}{|CM|} = \frac{|C_2M|}{|BM|}. \quad (2)$$

Para  $\frac{b_2}{b}$  y  $\frac{c_2}{c}$  las razones serán análogas. Los triángulos  $A_1B_1C_1$  y  $A_2B_2C_2$  son semejantes (véase el problema II.207); además,

$$\frac{S_2}{S} = \frac{a_2 b_2 c_2}{abc}, \quad (3)$$

Al tomar todo esto en consideración, tendremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_1}{S}\right)^3 &= \frac{S_1^3}{S_2^3} \cdot \frac{S_2^3}{S^3} = \frac{a_1^2 b_1^2 c_1^2}{a^2 b^2 c^2} \cdot \frac{a^3 b^3 c^3}{a^3 b^3 c^3} = \\ &= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 \frac{|AM|^2 |BM|^2 |CM|^2 a^2 b^2 c^2}{a^3 b^3 c^3} \cdot a_2 b_2 c_2 = \\ &= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 |AM|^2 |BM|^2 |CM|^2 \cdot \frac{|B_2M|}{|CM|} \frac{|C_2M|}{|AM|} \times \\ &\quad \times \frac{|A_2M|}{|BM|} = \left(\frac{1}{4R^2} |R^2 - d^2|\right)^3. \end{aligned}$$

(En la segunda igualdad se ha usado la semejanza del  $\triangle A_1B_1C_1$  y  $\triangle A_2B_2C_2$  y la igualdad (3); en la tercera igualdad, las fórmulas (1); en la cuarta, las fórmulas (2)). *Observación.* Cuando  $d = R$ , el área del triángulo formado por los pies de las perpendiculares resulta ser igual a cero, es decir, estos pies se disponen en una recta. Esta última se llama recta de Simson (véase el problema II.153).

II.210. La afirmación se deduce de un hecho más general: si en los lados del triángulo están construidas unas circunferencias de modo que sus arcos dispuestos fuera del triángulo suman  $4\pi$  o bien  $2\pi$ , estas circunferencias tienen un punto común (en nuestro caso en calidad de semejante triángulo puede tomarse el triángulo con vértices en los puntos medios del  $\triangle ABC$  y demostrar que las tres circunferencias que pasan por los puntos medios de  $AB$ ,  $AC$  y  $AD$ ;  $BA$ ,  $BC$  y  $BD$ ;  $CA$ ,  $CB$  y  $CD$ , tienen un punto común).

II.211. La afirmación se deduce del hecho siguiente. Supongamos que una circunferencia arbitraria corta los lados del ángulo con el vértice  $N$  en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ ,  $D$ ; las perpendiculares levantadas hacia los lados del ángulo en los puntos  $A$  y  $D$ , se intersecan en el punto  $K$ , mientras que las perpendiculares levantadas en los puntos  $B$  y  $C$ , concurren en el punto  $L$ . Entonces, las rectas  $NK$  y  $NL$  son simétricas respecto a la bisectriz de este ángulo. En efecto,  $\angle ANK = \angle ADK$  (los puntos  $A$ ,  $K$ ,  $D$  y  $N$  se hallan en una misma circunferencia). Precisamente de la misma manera  $\angle LNC = \angle LBC$ . A continuación,

$\angle ADK = 90^\circ - \angle ADN = 90^\circ - \angle NBC = \angle LBC$ . (Se suponía que el cuadrilátero  $ABCD$  no tiene puntos múltiples).

II.212. Supongamos que  $A, B, C, D$  son los puntos dados,  $D_1$  es el punto de intersección de las rectas simétricas a las rectas  $AD, BD$  y  $CD$  respecto a las bisectrices correspondientes del  $\triangle ABC$ . En el problema anterior se ha demostrado que las circunferencias de pedal de los puntos  $D$  y  $D_1$  respecto al  $\triangle ABC$  coinciden. Supongamos que las rectas simétricas a las rectas  $BA, CA$  y  $DA$  respecto a las bisectrices correspondientes del  $\triangle BCD$ , se intersecan en el punto  $A_1$ . No es difícil demostrar que  $A_1$  y  $D_1$  son simétricos entre sí respecto a la recta  $CB$ . Por consiguiente, las circunferencias de pedal de los puntos  $D$  (o  $D_1$ ) respecto al  $\triangle ABC$  y  $A$  (o  $A_1$ ) respecto al  $\triangle BCD$  pasan por el punto medio de  $D_1A_1$ . Al determinar de manera análoga los puntos  $B_1$  y  $C_1$ , descubrimos que cada una de las circunferencias de pedal examinadas pasa por los puntos medios de los segmentos correspondientes que unen los puntos  $A_1, B_1, C_1$  y  $D_1$ . De tal modo el problema se ha reducido al problema II.210.

II.213. Supongamos que  $B_2$  y  $C_2$  son puntos diametralmente opuestos a los puntos  $B$  y  $C$ ;  $M$  es el segundo punto de intersección de  $B_2B_1$  con la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$ ;  $C'_1$  es el punto de intersección de  $AB$  y  $C_2M$ . Según el teorema de Pascal (problema II.204) aplicado al hexágono  $AB_2CMBC_2$ , los puntos  $O$  (centro de la circunferencia),  $B_1$  y  $C'_1$  se hallan en una recta,

es decir,  $C'_1$  coincide con  $C_1$ . Pero  $\angle BMB_1 = \angle BMB_2 = 90^\circ$ ,  $\angle CMC_1 = \angle CMC_2 = 90^\circ$ ; por lo tanto  $M$  es uno de los puntos de intersección de las circunferencias con los diámetros  $BB_1$  y  $CC_1$ . Sea  $N$  el segundo punto de intersección de estas circunferencias. Su cuerda común  $MN$  contiene el punto de intersección de las alturas del triángulo  $ABC$ , o sea, el punto  $H$  (problema II.19). Si  $BB_0$  es la altura del  $\triangle ABC$ , entonces  $|MH| \cdot |HN| = |BH| \cdot |HB_0|$ . Por consiguiente (véase el problema II.164),  $N$  se halla en la circunferencia de los nueve puntos del  $\triangle ABC$ .

II.218. Supongamos que el radio de la circunferencia es igual a  $r$  y los ángulos entre los radios vecinos, trazados hacia los puntos de tangencia en orden del recorrido, son iguales a  $2\alpha$ ,  $2\beta$ ,  $2\gamma$ ,  $2\delta$  ( $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$ ). Entonces

$$S = r^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta). \quad (1)$$

Los lados del cuadrilátero serán iguales (encontraremos uno de ellos) a  $r (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = r \frac{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ , etc. Puesto que  $\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} (\gamma + \delta)$ ,  $\operatorname{sen} (\beta + \gamma) = \operatorname{sen} (\alpha + \delta)$ , la fórmula dada en la condición se reduce a la forma

$$S = r^2 \frac{\operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} (\beta + \gamma) \operatorname{sen} (\gamma + \delta)}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta}. \quad (2)$$

Nos queda demostrar la igualdad de los segundos miembros de (1) y (2) a condición de que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$ .

II.219. Demostremos que  $S_{RNA} = S_{BMC} + S_{AMD}$ . Si  $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|CN|}{|ND|} = \lambda$ , entonces  $S_{BMC} = (1 - \lambda) S_{BAC}$ ,  $S_{AMD} = \lambda S_{BAD}$ . Por otra parte, al designar por  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h$  las distancias desde  $C$ ,  $D$  y  $N$  hasta  $AB$ , hallaremos que  $h = \lambda h_1 + (1 - \lambda) h_2$ . Por consiguiente,  $S_{ABN} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \lambda \frac{1}{2} |AB| h_1 + (1 - \lambda) \frac{1}{2} |AB| h_2 = \lambda S_{ABD} + (1 - \lambda) S_{BAC} = S_{AMD} + S_{BMC}$ .

II.221. Los ángulos comprendidos entre los lados, así como entre los lados y las diagonales del cuadrilátero  $Q_2$  se expresan a través de los ángulos entre los lados y entre los lados y las diagonales del cuadrilátero  $Q_1$ . (Las diagonales del cuadrilátero  $Q_2$  son perpendiculares a las diagonales correspondientes del cuadrilátero  $Q_1$  y pasan por sus puntos medios.)

II.222. Examínense los paralelogramos  $ABMK$  y  $DCML$  y demuéstrese que  $KL$  divide  $DA$  en la misma razón que el punto  $N$ , y la recta  $MN$  es la bisectriz del ángulo  $KML$ .

II.223. Demostremos al principio que las diagonales del cuadrilátero dado se dividen en el punto de intersección por la mitad, es decir, que el cuadrilátero es un paralelogramo. Sea  $ABCD$  el cuadrilátero dado;  $O$ , el punto de intersección de las diagonales. Supongamos que  $|BO| < |OD|$ ,  $|AO| \leq |OC|$ ; examinemos el  $\triangle OA_1B_1$ , simétrico al  $\triangle OAB$  respecto del punto  $O$ ; es evidente que el radio de la circunferencia inscrita en el  $\triangle OA_1B_1$

es menor que el radio de la inscrita en el  $\triangle OCD$ , pero según la condición éstos son iguales. Así, pues,  $O$  es el punto medio de ambas diagonales. Demostremos que todos los lados del cuadrilátero son iguales. Hagamos uso de la fórmula  $S = pr$  ( $S$  es el área,  $p$ , el semiperímetro y  $r$ , el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo). Puesto que en el  $\triangle ABO$  y el  $\triangle BOC$  las áreas y los radios de las circunferencias inscritas son iguales, son iguales también sus perímetros, es decir,  $|AB| = |BC|$ .

II.224. De manera análoga a como esto se ha hecho en el problema anterior, demuéstrase que el punto de intersección divide las diagonales del cuadrilátero por la mitad.

II.225. Del enunciado del problema se deduce que  $ABCD$  (fig. 38) es un cuadrilátero

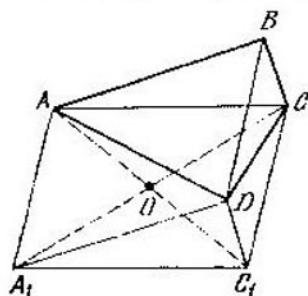


Fig. 38

convexo. Examinemos el paralelogramo  $ACC_1A_1$ , en el cual los lados  $AA_1$  y  $CC_1$  son iguales y paralelos a la diagonal  $BD$ . Los triángulos  $ADA_1$ ,  $CDC_1$  y  $C_1DA_1$  son iguales a los triángulos  $ABD$ ,  $BCD$  y  $ABC$ , respectivamente. Por consiguiente, los segmentos que

unen  $D$  con los vértices  $A, C, C_1, A_1$ , dividen el paralelogramo en cuatro triángulos, en los cuales los radios de las circunferencias inscritas son iguales. Si  $O$  es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo  $ACC_1A_1$ , entonces  $D$  ha de coincidir con  $O$  (si  $D$ , por ejemplo, es interior al  $\triangle COC_1$ , el radio de la circunferencia inscrita en el  $\triangle ADA_1$  es mayor que el radio de la circunferencia inscrita en el  $\triangle AOA_1$ , y tanto más en el  $\triangle CDC_1$ ). De esta manera,  $ABCD$  es un paralelogramo, pero, además, del problema II.223 se deduce que  $ACC_1A_1$  es un rombo, es decir,  $ABCD$  es un rectángulo.

II.226. La condición necesaria y suficiente de que se cumplan los cuatro puntos es la igualdad  $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ . Para los puntos a) y b) eso se deduce del teorema de la bisectriz del ángulo interior del triángulo; para los puntos c) y d), del resultado del problema I.234.

II.227. Sea  $ABCD$  el cuadrilátero dado. Supongamos que los ángulos  $A$  y  $D$  son obtusos;  $B$  y  $C$ , agudos. Designemos los pies de las perpendiculares bajadas desde el vértice  $A$ , por  $M$  y  $N$ , y desde el vértice  $C$ , por  $K$  y  $L$  (fig. 39, a);  $R$  es el punto de intersección de  $MN$  y  $LK$ . Notemos que  $A, K, N, C, L, M$  se hallan en una circunferencia con diámetro  $AC$ . Mostremos que  $MK \parallel LN$ :  $\angle MKL = \angle MAL = 90^\circ - \angle B = \angle KCB = \angle KLN$ . De esta manera,  $\frac{|MR|}{|RN|} = \frac{|MK|}{|LN|} = \frac{\text{sen } \angle MCK}{\text{sen } \angle LAN} = \frac{\text{sen}(\angle C + \angle B - 90^\circ)}{\text{sen}(\angle A + \angle B - 90^\circ)} =$

$$= \frac{\cos(\angle A - \angle B)}{\sin(\angle A + \angle B - 90^\circ)}$$
 Ahora, sea que  $P$  y  $Q$  son los pies de las perpendiculares bajadas desde el vértice  $B$ , y  $S$ , el punto de intersección de  $MN$  y  $PQ$  (fig. 39, b). Puesto que  $\angle PNB = \angle PAB = \angle C$ , entonces  $PN \parallel DC$ , es decir,  $MQNP$  es un

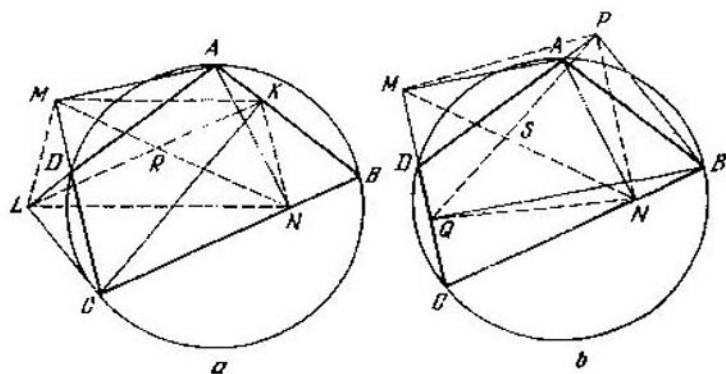


Fig. 39

trapecio ( $ANBP$  es un cuadrilátero inscrito, con diámetro  $AB$ ). De esta manera,

$$\frac{|MS|}{|SN|} = \frac{|MQ|}{|PN|} = \frac{|AB| \cos(\angle A + \angle D - 180^\circ)}{|AB| \sin(\angle B + \angle A - 90^\circ)} = \frac{\cos(\angle A - \angle B)}{\sin(\angle A + \angle B - 90^\circ)}$$

(Nos hemos valido de que  $MQ$  es la proyección de  $AB$  sobre  $DC$ ; el ángulo entre  $AB$  y  $DC$  es igual a  $\angle A + \angle D - 180^\circ$ ). Así, pues, los puntos  $R$  y  $S$  dividen  $MN$  en una misma razón, es decir, ellos coinciden; por lo tanto, las tres rectas se cortan en un punto. Ahora es fácil mostrar que las cuatro rectas concurren en este mismo punto.



II.228. Hallemos en qué razón  $BC$  divide  $MN$ . Esta razón es igual a la razón  $\frac{S_{MCB}}{S_{CBN}} = \frac{|MC| \cos \angle BCD}{|BN| \cos \angle CBA}$ . De manera análoga, la razón, en que  $AD$  divide  $MN$ , es igual a  $\frac{|AM| \cos \angle BAD}{|ND| \cos \angle ADC}$ . Pero estas razones son iguales, ya que  $\angle BCD = \angle BAD$ ,  $\angle CBA = \angle CDA$  y el  $\triangle AMC$  es semejante al  $\triangle DNB$ .

II.229. Tomemos el punto  $M_1$  de modo que  $BCMM_1$  sea un paralelogramo.  $M_1$  se halla en la circunferencia que pasa por los puntos  $B$ ,  $M$  y  $A$ . Puesto que  $|AM_1| = |DM|$  ( $ADMM_1$  también es un paralelogramo), los triángulos  $CDM$  y  $BAM_1$  son iguales, es decir, el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle CDM$  es igual a  $R$ . Será el mismo el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ADM$ .

II.230. Designemos por  $K$  y  $L$  los puntos de tangencia de la circunferencia dada con las rectas  $AB$  y  $AD$ . Para concretar, supongamos que  $K$  y  $L$  son interiores a los segmentos  $AB$  y  $AD$ . En la recta  $CB$  tomemos el punto  $P$  de modo que  $|BP| = |BK|$  y  $B$  se halle entre  $P$  y  $C$ , y en la recta  $CD$ , el punto  $Q$ , que  $|DQ| = |DL|$  y  $D$  esté entre  $C$  y  $Q$ . Tenemos:  $|CP| = |CB| + |BK| = |CB| + |AB| - |AK| = |CQ|$ . La circunferencia que pasa por  $P$  y  $Q$  y es tangente a las rectas  $CB$  y  $CD$ , corta  $BD$  en tales puntos  $M_1$  y  $N_1$ , para los cuales se cumplen las igualdades  $|BM_1| \cdot |BN_1| = |BM| \times |BN|$ ;  $|CN_1| \cdot |CM_1| = |CN| \cdot |CM|$ .

De estas igualdades se puede obtener que  $M_1$  y  $N_1$  coincidirán con  $M$  y  $N$ . De manera análoga se examinan otros casos de disposición de los puntos. El análisis sucesivo de las variantes se evita indicando en las rectas  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  las direcciones positivas y examinando los segmentos dirigidos en estas rectas.

II.231. Para concretar, supongamos que  $B$  y  $D$  se hallan en el interior de la circunferencia. Designemos por  $P$  y  $Q$  los puntos de intersección de la recta  $BD$  con la circunferencia ( $P$  es el más próximo a  $B$ ) y por  $L$ , el punto de intersección de  $CB$  con la circunferencia;  $l$  es la tangente a la circunferencia que pasa por  $C$ .

Examinemos el triángulo  $PCN$ , desde cuyos vértices parten las rectas  $PQ$ ,  $NM$  y  $l$ . Usando el teorema de Ceva (problema II.44) y razonando de la misma manera que en el problema II.49, obtenemos que la condición necesaria y suficiente para que las rectas  $PQ$ ,  $NM$  y  $l$  se intersequen en un punto, es el cumplimiento de la igualdad

$$\frac{|PM|}{|MC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QN|} \cdot \frac{|NC|}{|CP|} = 1 \quad (1)$$

Por otra parte, en el hexágono  $ALPMCQ$  las diagonales  $AM$ ,  $LC$ ,  $PQ$  se intersecan en un punto. Por consiguiente (véase el problema II.49),

$$|AL| \cdot |PM| \cdot |CQ| = |LP| \cdot |MC| \cdot |QA| \quad (2)$$

Es evidente que  $|NC| = |AL|$ ,  $|QN| = |LP|$ ,  $|CP| = |QA|$ . De esta manera,

de la validez de la igualdad (2) se deduce la de la igualdad (1).

II.232. 1. Puesto que  $O_1$  es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo  $ABC$ , entonces  $\angle BO_1A = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BCA$  (problema I.46). Por lo tanto,  $\angle BO_1A = \angle BO_4A$  y el cuadrilátero  $ABO_1O_4$  es inscrito (fig. 40, a);

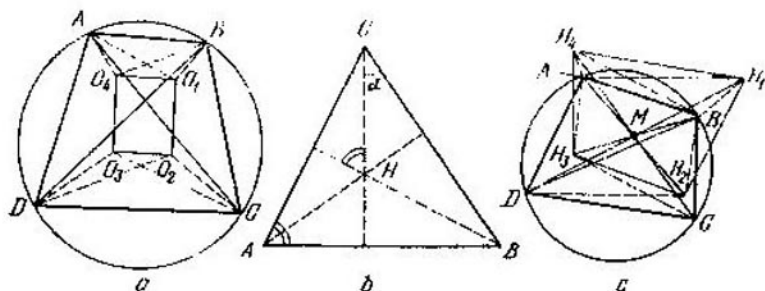


Fig. 40

por consiguiente, el ángulo adyacente al  $\angle BO_1O_4$  es igual al  $\angle BAO_4 = \frac{1}{2} \angle BAD$ . Análogamente, el ángulo adyacente al  $\angle BO_1O_2$  es igual a  $\frac{1}{2} \angle BCD$ . Pero  $\frac{1}{2} (\angle BAD + \angle BCD) = 90^\circ$ ; por tanto,  $\angle O_4O_1O_2 = 90^\circ$ .

2. Para demostrar la segunda parte mostremos al principio que la distancia desde el vértice del triángulo hasta el punto de intersección de las alturas se determina por completo por la magnitud del ángulo en este vértice y por el largo del lado opuesto, a saber (fig. 40, b):  $|CH| = |CB| \frac{\cos \alpha}{\sin \angle CAB} =$

$$= \frac{|AB|}{\operatorname{sen} \alpha} \cos \alpha = |AB| \operatorname{ctg} \alpha. \quad \text{Puesto que}$$

el cuadrilátero  $ABCD$  es inscrito, entonces  $|AH_3| = |BH_2|$  y  $AH_3 \parallel BH_2$ ; por consiguiente,  $ABH_2H_3$  es un paralelogramo. De este modo, el punto de intersección de  $AH_2$  y  $BH_3$  divide  $AH_2$  y  $BH_3$  por la mitad. Al examinar otros paralelogramos, obtenemos que los segmentos  $H_2A$ ,  $H_3B$ ,  $H_4C$ ,  $H_1D$  se intersecan en un punto ( $M$ ) que los divide por la mitad, es decir, los cuadriláteros  $ABCD$  y  $H_1H_2H_3H_4$  son centralmente simétricos respecto al punto  $M$  (fig. 40, c).

**II.233.** Si los lados del triángulo  $ABC$  opuestos a los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  son iguales a  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente, mientras que los ángulos  $ADB$ ,  $BDC$  y  $CDA$  son iguales a  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  (suponemos que  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ), las distancias a partir del punto  $D$  hasta los puntos de intersección de las alturas de los triángulos  $ADB$ ,  $BDC$  y  $CDA$  son iguales a los valores absolutos de las magnitudes  $c \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $a \operatorname{ctg} \beta$ ,  $b \operatorname{ctg} \gamma$  (véase la solución del problema II.232). No es difícil cerciorarse de que el área del triángulo con vértices en los puntos de intersección de las alturas de  $\triangle ADB$ ,  $\triangle BDC$  y  $\triangle CDA$  será igual a  $\frac{1}{2} c \operatorname{ctg} \alpha \times$   
 $\times a \operatorname{ctg} \beta \operatorname{sen} B + \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \beta \cdot b \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{sen} C +$   
 $+ \frac{1}{2} b \operatorname{ctg} \gamma \cdot c \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{sen} A = S_{ABC} \times$   
 $\times (\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha) =$   
 $= S_{ABC}$ , puesto que la expresión entre paréntesis es igual a 1. (Demuéstrese esto tomando

en consideración que  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ). De manera análoga se examinan otros casos de disposición del punto  $D$  (cuando uno de los ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  es igual a la suma de los dos otros).

**II.234.** a) Supongamos que  $ABCD$  es el cuadrilátero dado,  $R$  y  $Q$  son los puntos de tangencia de las circunferencias inscritas en el  $\triangle ABC$  y el  $\triangle ACD$ , respectivamente, con la recta  $AC$ . Entonces (véase el problema I.18),

$$\begin{aligned} |RQ| &= ||AQ - |AR|| = \frac{1}{2} (|AB| + |AC| - |BC|) - (|AD| + |AC| - |CD|) \\ &= \frac{1}{2} (|AB| + |CD| - |AD| - |BC|). \end{aligned}$$

Puesto que  $ABCD$  es un cuadrilátero circunscrito, resulta que  $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ , es decir,  $|RQ| = 0$ .

b) Si  $K, L, M, N$  son los puntos de tangencia de la circunferencia con los lados del cuadrilátero, y  $K_1, L_1, M_1, N_1$  son los puntos de tangencia de las circunferencias inscritas en el  $\triangle ABC$  y el  $\triangle ACD$  (fig. 41), entonces  $N_1K_1 \parallel NK$ ,  $M_1L_1 \parallel ML$ . Demostremos que también  $K_1L_1 \parallel KL$ ,  $N_1M_1 \parallel NM$ . Como las circunferencias inscritas en el  $\triangle ACB$  y el  $\triangle ACD$  son tangentes una a otra en la diagonal en el punto  $P$ , resulta que  $|AN_1| = |AP| = |AM|$ , es decir,  $N_1M_1 \parallel NM$ . Por consiguiente, el cuadrilátero  $K_1L_1M_1N_1$ , al igual que el cuadrilátero  $KLMN$ , es inscrito.

**II.235.** Supongamos que (fig. 42, a, b)  $O_1, O_2, O_3, O_4$  son los centros, respectivamente, de las circunferencias inscritas en  $\triangle ABC$ ,

$\triangle BCD$ ,  $\triangle CDA$  y  $\triangle DAB$ . Puesto que  $O_1O_2O_3O_4$  es un rectángulo (véase el problema II.232), entonces  $|O_1O_3| = |O_2O_4|$ . Si  $K$  y  $L$  son

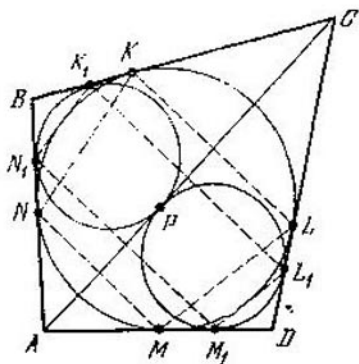


Fig. 41

los puntos de tangencia de las circunferencias inscritas en el  $\triangle ABC$  y el  $\triangle ACD$ , con  $AC$ ,

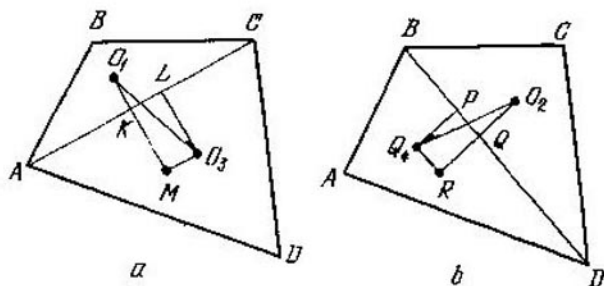


Fig. 42

entonces  $|KL| = \frac{1}{2} (|AB| + |CD| - |BC| - |AD|)$  (véase la solución del problema II.234). Análogamente, si  $P$  y  $Q$

son los puntos de tangencia de las circunferencias correspondientes con  $BD$ , entonces  $|PQ| = |KL|$ . Tracemos por  $O_3$  la recta paralela a  $AC$  hasta que se interseque con la prolongación de  $O_1K$ . Obtenemos el  $\triangle O_1O_3M$ , de manera análoga construiremos el  $\triangle O_2O_4R$ . Estos dos triángulos rectángulos son iguales, ya que tienen  $|O_1O_3| = |O_2O_4|$ ,  $|O_3M| = |KL| = |PQ| = |O_4R|$ . Por consiguiente,  $|O_1M| = |O_2R|$ ; pero  $|O_1M|$  es igual a la suma de radios de las circunferencias inscritas en el  $\triangle ABC$  y el  $\triangle ACD$ , mientras que  $|O_2R|$  es igual a la suma de radios de las circunferencias inscritas en el  $\triangle ACD$  y el  $\triangle BDA$  (véase también el problema II.315).

II.236. Supongamos que en el cuadrilátero  $ABCD$  (fig. 43)  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,

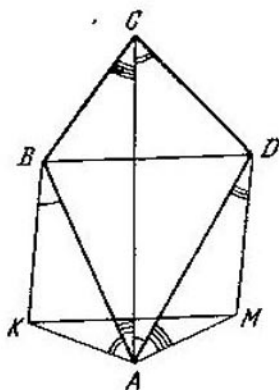


Fig. 43

$|CD| = c$ ,  $|DA| = d$ ,  $|AC| = m$ ,  $|BD| = n$ . Construyamos en el lado  $AB$  hacia el exterior el triángulo  $AKB$  semejante al triángulo  $ACD$ ; además,  $\angle BAK = \angle DCA$ ,

$\angle ABK = \angle CAD$  y en el lado  $AD$  construyamos el  $\triangle AMD$  semejante al  $\triangle ABC$ ,  $\angle DAM = \angle BCA$ ,  $\angle ADM = \angle CAB$ . A partir de la semejanza correspondiente obtenemos:  $|AK| = \frac{ac}{m}$ ,  $|AM| = \frac{bd}{m}$ ,  $|KB| = |DM| = \frac{ad}{m}$ . Además,  $\angle KBD + \angle MDB = \angle CAD + \angle ABD + \angle BDA + \angle CAB = 180^\circ$ , es decir, el cuadrilátero  $KBDM$  es un paralelogramo. Por lo tanto,  $|KM| = |BD| = n$ . Pero  $\angle KAM = \angle A + \angle C$ . Según el teorema de los cosenos para el  $\triangle KAM$  tenemos:  $n^2 = \left(\frac{ac}{m}\right)^2 + \left(\frac{bd}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{ac}{m}\right)\left(\frac{bd}{m}\right) \times \cos(A + C)$ , de donde  $m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(A + C)$ .

**II.237.** La afirmación del teorema de Tolomeo es el corolario del teorema de Bretschneider (véase el problema II.236), puesto que para el cuadrilátero inscrito  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ .

**II.238.** Si  $MB$  es el mayor de los segmentos  $|MA|$ ,  $|MB|$ ,  $|MC|$ , entonces, al aplicar el teorema de Bretschneider (problema II.236) al cuadrilátero  $ABCM$ , obtenemos que  $|MB|^2 = |MA|^2 + |MC|^2 - 2|MA| \cdot |MC| \times \cos(\angle AMC + 60^\circ)$ , es decir,  $|MB| < |MA| + |MC|$ , puesto que  $\angle AMC \neq 120^\circ$ .

**II.239.** Al sustituir en la expresión

$$t_{\alpha\beta} t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma} t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma} t_{\beta\delta} \quad (1)$$

los segmentos de las tangentes por las fórmulas obtenidas durante la solución del problema I.201, cerciorémonos de que, si la correla-



ción (1) se cumple para ciertas circunferencias  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  que son tangentes a la circunferencia dada en los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , respectivamente, entonces la misma se cumple para cualesquiera circunferencias de este tipo. Queda por verificar la validez de la correlación (1) para algún caso particular. Si  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son circunferencias de radio cero, obtenemos el teorema de Tolomeo corriente (problema II.237). Es posible, para no alegar el teorema de Tolomeo, tomar las circunferencias  $\alpha$  y  $\delta$  de radio cero, las circunferencias  $\beta$  y  $\gamma$  tangentes tanto a la circunferencia circunscrita alrededor del cuadrilátero  $ABCD$ , como tangentes a la cuerda  $AD$ . En este caso la validez de la correlación (1) se comprueba fácilmente. De aquí, en correspondencia con la observación hecha, deriva su validez en todos los casos (con esto también queda demostrada simultáneamente el teorema de Tolomeo corriente).

II.240. Al demostrar nuestra afirmación, valgámonos del procedimiento llamado «dilatación» de circunferencias. La esencia de este procedimiento consiste en lo siguiente. Sea que dos circunferencias, por ejemplo,  $\alpha$  y  $\beta$ , son tangentes a cierta circunferencia  $\Sigma$  exteriormente. Examinemos las circunferencias  $\alpha'$ ,  $\beta'$  y  $\Sigma'$ , concéntricas a  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\Sigma$ , respectivamente. Además, si el radio de la circunferencia  $\Sigma'$  es mayor que el radio de la circunferencia  $\Sigma$  en la magnitud  $\chi$ , y los radios de las circunferencias  $\alpha'$  y  $\beta'$  son menores que los radios de  $\alpha$  y  $\beta$  en la misma magnitud  $\chi$  ( $\chi$  es suficientemente pequeña), las circunferencias  $\alpha'$  y  $\beta'$  serán tangentes a la circun-

ferencia  $\Sigma'$  exteriormente y la tangente exterior común a las circunferencias  $\alpha'$  y  $\beta'$  es igual a la tangente exterior común a las circunferencias  $\alpha$  y  $\beta$ . De la misma manera se examina el caso, en que  $\alpha$  y  $\beta$  son tangentes a  $\Sigma$  por el interior. Pero si  $\alpha$  y  $\beta$  son tangentes a  $\Sigma$  una por el exterior y la otra por el interior, al aumentar el radio de  $\Sigma$ , el radio de la primera disminuye y el de la segunda, crece, al mismo tiempo la tangente interior común a las circunferencias  $\alpha'$  y  $\beta'$  no varía.

Examinemos, para concretar, el caso, en que en la igualdad (\*) (véase la condición del problema) figuran sólo los segmentos de las tangentes exteriores comunes. (Notemos que ninguna de las circunferencias puede encontrarse en el interior de otra.) Demostremos que las circunferencias  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son tangentes a cierta circunferencia  $\Sigma$  de modo igual: todas ellas la tocan por el exterior o bien por el interior. Supongamos que no todos los radios de las circunferencias  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son iguales entre sí (el caso de radios iguales se examina fácilmente por separado) y, para concretar,  $r_\alpha$ , el radio de la circunferencia  $\alpha$ , es el mínimo. Examinemos las circunferencias  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$ , donde  $\alpha'$  es la circunferencia de radio cero, o sea el punto que coincide con el centro de la circunferencia  $\alpha$ , mientras que  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  son las circunferencias concéntricas a las circunferencias  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  con radios reducidos en la magnitud  $r_\alpha$ . Para los razonamientos ulteriores sirvámonos de la afirmación siguiente, designándola con la letra (T): si  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  son tres circunferencias, ninguna de las

cuales es interior a otra y por lo menos una de ellas no tiene radio cero, existen precisamente dos circunferencias  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , cada una de las cuales es tangente a las circunferencias  $\beta'$ ,  $\gamma'$  y  $\delta'$  de manera igual ( $\Gamma$ ).

Regresaremos a esta afirmación al final de la resolución.

En las circunferencias  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  tomemos los puntos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de tal manera que  $\frac{t_{\alpha_1\beta'}}{t_{\alpha_1\delta'}} =$

$$= \frac{t_{\alpha_2\beta'}}{t_{\alpha_2\delta'}} = \frac{t_{\alpha'\beta'}}{t_{\alpha'\delta'}} = \lambda; \text{ además, } \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \text{ se si-}$$

túan en los arcos que no contienen los puntos de tangencia a la circunferencia  $\gamma'$ . Para tres cuaternas de circunferencias  $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ ,  $(\alpha_1, \beta', \gamma', \delta')$ ,  $(\alpha_2, \beta', \gamma', \delta')$  se cumple la correlación (\*); para la primera, es la afirmación de nuestro problema, para las demás dos, esto se hace sobre la base de la afirmación del problema II.239. ( $\alpha'$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  son circunferencias de radio cero.) Por consiguiente,

$$\frac{t_{\alpha_1\beta'}}{t_{\alpha_1\gamma'}} = \frac{t_{\alpha_2\beta'}}{t_{\alpha_2\gamma'}} = \frac{t_{\alpha'\beta'}}{t_{\alpha'\gamma'}} = \mu.$$

Pero el lugar geométrico de los puntos  $M$ , para los cuales la razón entre las tangentes y dos circunferencias fijas es constante, es una circunferencia (véase el problema I.11). Por consiguiente,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha'$  pertenecen tanto al lugar geométrico de los puntos, para los cuales la razón entre las tangentes trazadas a las circunferencias  $\beta'$  y  $\delta'$  es igual a  $\lambda$ , como al lugar geométrico de los puntos, para los cuales la razón entre las tangentes trazadas a las

circunferencias  $\beta'$  y  $\gamma'$  es igual a  $\mu$ . Pero esto significa que  $\alpha'$  ha de coincidir con  $\alpha_1$  o  $\alpha_2$ .

Supongamos que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  coinciden. Demostremos que en este caso las circunferencias determinadas por los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  se tocan.

Tomemos  $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ , pero suficientemente próximo a  $\lambda$ ,  $\tilde{\lambda}$  determinará en  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  dos puntos  $\tilde{\alpha}_1$  y  $\tilde{\alpha}_2$ , para los cuales  $\frac{t_{\tilde{\alpha}_1\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_1\delta'}} = \frac{t_{\tilde{\alpha}_2\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_2\delta'}} = \tilde{\lambda}$ .

Encontremos:  $\tilde{\mu} = \frac{t_{\tilde{\alpha}_1\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_1\gamma'}} = \frac{t_{\tilde{\alpha}_2\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_2\gamma'}}$ . Por con-

siguiente, las circunferencias que corresponden a los parámetros  $\tilde{\lambda}$  y  $\tilde{\mu}$ , tienen la cuerda común  $\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2$ . Si  $\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda$ , entonces  $\tilde{\mu} \rightarrow \mu$ ,  $|\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2| \rightarrow 0$ , es decir, las circunferencias que corresponden a los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$ , entran en contacto en el punto  $\alpha_1 = \alpha_2$ . De esta manera,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  y  $\delta'$  son tangentes a  $\Sigma_1$  o  $\Sigma_2$ . «Dilatando», respectivamente,  $\Sigma_1$  o  $\Sigma_2$  en la magnitud  $\pm r_\alpha$ , obtenemos que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son tangentes a cierta circunferencia o recta ( $\Sigma_1$  o  $\Sigma_2$  pueden ser una recta) o tienen un punto común.

Si en la igualdad (\*) algunos de los segmentos son segmentos de tangentes interiores comunes, es necesario demostrar la existencia de la circunferencia  $\Sigma$  que es tangente a  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  y de otra tal, que aquellas de las circunferencias  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ , para las cuales en la igualdad (\*) figura la tangente interior común, son tangentes a  $\Sigma$  de modos diferentes. De manera correspondiente tiene que cambiarse la afirmación (I).

Volvamos a la afirmación (T). Haciendo la «dilatación», es posible reducir la afirmación al caso, en que una de las circunferencias  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  tiene radio cero, o sea es un punto. El lector instruido de lo que es la «inversión», demostrará fácilmente que la afirmación (T) ahora resulta ser equivalente a la afirmación de que cualesquiera dos circunferencias no dispuestas una en el interior de la otra tienen precisamente dos tangentes exteriores comunes. (Véase el Apéndice). *Observación.* Si tres de las cuatro circunferencias dadas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  tienen radio cero, o sea son puntos, se puede simplificar sustancialmente la demostración. Hágase por su cuenta. En lo ulterior (véase el problema II.287) necesitaremos precisamente este caso particular.

II.241. Muéstrase que cada una de estas condiciones es necesaria y suficiente para que exista una circunferencia inscrita en el cuadrilátero  $ABCD$  (véase también el problema I.19).

II.242. Muéstrase que cada una de estas condiciones es necesaria y suficiente para que exista una circunferencia que es tangente a las rectas  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ , cuyo centro se halla fuera del cuadrilátero  $ABCD$ .

II.243. Supongamos que  $ABCD$  es un cuadrilátero circunscrito,  $O$ , el centro de la circunferencia inscrita,  $M_1$ , el punto medio de  $AC$ ,  $M_2$ , el punto medio de  $BD$ ,  $r$ , el radio de la circunferencia (las distancias desde  $O$  hasta los lados son iguales a  $r$ ),  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ,  $u_1$  son, respectivamente, las distancias desde  $M_1$  hasta  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ ;  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ ,  $u_2$  son, respecti-

vamente, las distancias desde  $M_2$  hasta los mismos lados. Puesto que  $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ , entonces  $|AB|r - |BC|r + |CD|r - |DA|r = 0$ . Además,  $|AB|x_1 - |BC|y_1 + |CD|z_1 - |DA|u_1 = 0$ ,  $|AB|x_2 - |BC|y_2 + |CD|z_2 - |DA|u_2 = 0$ , pero precisamente esto significa que los puntos  $O, M_1, M_2$  se hallan en una recta (véase la observación al problema II.22). Precisamente de la misma manera se examinan otros casos de disposición de los puntos  $A, B, C$  y  $D$  y del centro de la circunferencia. En este caso hay que hacer uso de las relaciones que surgen entre los segmentos  $|AB|, |BC|, |CD|, |DA|$  (véase los problemas II.241, II.242) y, como se ha dicho en la observación del problema II.22, si cualesquiera dos puntos se encuentran dispuestos por diferentes lados de alguna recta, a las distancias correspondientes hay que atribuirles signos diferentes.

II.244. Designemos por  $L$  y  $P$ , respectivamente, los puntos de intersección de las rectas  $AM$  y  $AN$  con la circunferencia. Como se deduce del problema II.204, las rectas  $BL, DP$  y  $MN$  se cortan en un punto. Pero  $BL$  y  $DP$  son diámetros que se intersecan en el centro de la circunferencia, por consiguiente,  $MN$  pasa por el centro de la misma.

II.245. Aplíquese el teorema de Pascal (problema II.204).

II.246. Supongamos (fig. 44) que  $P$  es el punto de intersección de las diagonales y  $K, L, M, N$  son los pies de las perpendiculares bajadas desde  $P$  sobre  $AB, BC, CD$  y  $DA$ ,

respectivamente. Puesto que  $PKBL$  es un cuadrilátero inscrito,  $\angle PKL = \angle PBC$ ; análogamente  $\angle PKN = \angle PAD$ ; pero  $\angle PBC = \angle PAD$ , ya que éstos se apoyan sobre un

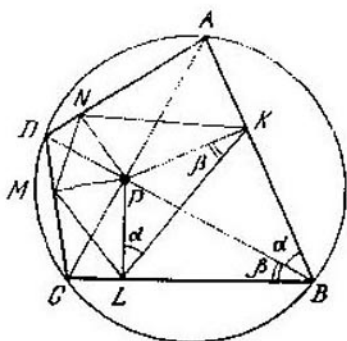


Fig. 44

mismo arco. Por consiguiente,  $KP$  es la bisectriz del ángulo  $NKL$ ; por eso, las bisectrices de los ángulos del cuadrilátero  $KLMN$  se cortan en el punto  $P$  que es precisamente el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero  $KLMN$ . Ahora supongamos que las diagonales  $AC$  y  $BD$  son mutuamente perpendiculares,  $R$  es el radio de la circunferencia dada,  $d$ , la distancia de  $P$  hasta su centro,  $|AP| \times |PC| = R^2 - d^2$ .

El radio de la circunferencia buscada  $r$  es igual, en particular, a la distancia desde  $P$  hasta  $KL$ . Al designar  $\angle KLP = \angle ABP = \alpha$ ,  $\angle PBC = \beta$ , encontramos:  $r = |PL| \times \sin \alpha = |PB| \cdot \sin \beta \sin \alpha = |PB| \frac{|PC|}{|BC|} \times \frac{|AP|}{|AB|} = (R^2 - d^2) \times \frac{|PB| \cdot |AC|}{|BC| \cdot |AB| \sin(\alpha + \beta)} \times$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{|AC|} = (R^2 - d^2) \cdot \frac{2S_{ABC}}{2S_{ABC}} \cdot \frac{1}{2R} = \\ & = \frac{R^2 - d^2}{2R}. \text{ Respuesta: } \frac{R^2 - d^2}{2R}. \end{aligned}$$

II.247. Supongamos (fig. 45) que  $ABCD$  es el cuadrilátero dado,  $P$  es el punto de intersección de las diagonales,  $K$  es el punto medio

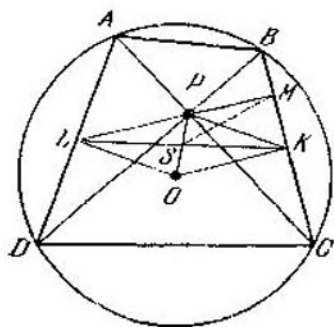


Fig. 45

de  $BC$  y  $L$  es el punto medio de  $AD$ . Demostremos que la recta  $LP$  es perpendicular a  $BC$ . Al designar por  $M$  el punto de intersección de  $LP$  con  $BC$ , obtendremos:  $\angle BPM = \angle LPD = \angle ADP = \angle PCB$ . Por consiguiente,  $PM \perp BC$ . Por lo tanto,  $OK \parallel LP$ . De manera análoga  $PK \parallel LO$  y  $KOLP$  es un paralelogramo,  $|LK|^2 + |PO|^2 = 2(|LP|^2 + |PK|^2) = 2\left(\frac{|AD|^2}{4} + \frac{|BC|^2}{4}\right) = 2R^2$ . (Si las cuerdas  $AD$  y  $BC$  se desplazan de manera que tengan un extremo común, y los arcos correspondientes prolonguen uno a otro, se formará un triángulo rectángulo con los catetos  $|AD|$  y  $|BC|$  y la hipotenusa igual a  $2R$ ; por lo tanto,  $|AD|^2 + |BC|^2 = 4R^2$ .) Por conse-



cuencia,  $|LK|^2 = 2R^2 - d^2$  y los puntos  $L$  y  $K$  se hallan en la circunferencia con el centro en  $S$  que es el punto medio de  $PO$ , y el radio igual a  $\frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - d^2}$ . Pero el  $\triangle LMK$  es rectángulo,  $MS$  es la mediana,  $|MS| = \frac{1}{2} |LK| = \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - d^2}$ , es decir,  $M$  se sitúa en la misma circunferencia. *Respuesta:*  $\frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - d^2}$ .

II.248. De los dos problemas anteriores se deduce que si las diagonales del cuadrilátero inscrito son mutuamente perpendiculares, las proyecciones del punto de intersección de las diagonales de este cuadrilátero sobre sus lados sirven de vértices del cuadrilátero que puede inscribirse en la circunferencia, y alrededor del cual puede circunscribirse una circunferencia; además, los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita y la distancia entre sus centros se determinan por completo por el radio de la circunferencia circunscrita alrededor del cuadrilátero inicial, y por la distancia desde su centro hasta el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero inscrito en aquélla. Por consiguiente, al girar las diagonales del cuadrilátero inicial alrededor del punto de su intersección, el cuadrilátero formado por las proyecciones de este punto, girará, permaneciendo inscrito en la misma circunferencia y circunscrito alrededor de la misma circunferencia. Es fácil mostrar también, tomando en consideración las expresiones para los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita obtenidas en dos pro-

blemas anteriores, que la relación, propuesta para demostrar, se cumple en caso de semejantes cuadriláteros.

Para concluir la demostración nos queda demostrar que cualquier cuadrilátero "inscrito-circunscrito" puede obtenerse a partir del cuadrilátero inscrito con diagonales mutuamente perpendiculares según el procedimiento indicado arriba. En efecto, si  $KLMN$  es un cuadrilátero «inscrito-circunscrito»,  $P$  es el centro de la circunferencia inscrita, al trazar las rectas perpendiculares a las bisectrices  $KP$ ,  $LP$ ,  $MP$ ,  $NP$ , que pasan por  $K$ ,  $L$ ,  $M$  y  $N$ , respectivamente, obtenemos el cuadrilátero  $ABCD$  (véase la fig. 44). Además,  $\angle BPK = \angle KLB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MLK$  (se usa, en particular, el hecho de que el cuadrilátero  $PKBL$  tiene rectos los ángulos opuestos y, por consiguiente, es inscrito). De manera análoga,  $\angle KPA = \angle KNA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MNK$  y, por lo tanto,  $\angle BPA = \angle BPK + \angle KPA = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle MLK + \angle MNK) = 90^\circ$ . De esta manera, todos los ángulos  $BPA$ ,  $APD$ ,  $DPC$  y  $CPB$  son rectos,  $P$  es el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero  $ABCD$  y las diagonales mismas son mutuamente perpendiculares. No es difícil mostrar que  $ABCD$  es un cuadrilátero inscrito, puesto que

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle ADC &= \angle PBL + \angle PBK + \\ &+ \angle PDN + \angle PDM = \angle PKL + \angle PLK + \end{aligned}$$

$$+ \angle PMN + \angle PNM = \frac{1}{2}(\angle NKL + \\ + \angle KLM + \angle LMN + \angle MNK) = 180^\circ.$$

*Observación:* véase también el problema II.319.

**II.249.** Los puntos medios de los lados del cuadrilátero forman un paralelogramo, cuyas diagonales son paralelas a los segmentos que unen los centros de masas de los triángulos opuestos. Otro paralelogramo lo forman las cuatro alturas de los triángulos examinados, que parten de los vértices del cuadrilátero. Los lados del primer paralelogramo son paralelos a las diagonales del cuadrilátero, mientras que los del segundo son perpendiculares a éstas. Además, los lados del segundo paralelogramo son  $\text{ctg } \alpha$  veces mayores que los lados correspondientes del primero ( $\alpha$  es el ángulo agudo comprendido entre las diagonales del cuadrilátero.)

**II.250.** Demostremos que ambas afirmaciones ( $BD$  es la bisectriz del ángulo  $ANC$ ,  $AC$ , la bisectriz del ángulo  $BMD$ ) son equivalentes a la igualdad  $|AB| \cdot |CD| = |AD| \times |BC|$ . Tomemos en el arco  $BAD$  el punto  $A_1$  de manera que  $|DA_1| = |AB|$ . La condición del problema equivale a que la recta  $A_1C$  pasa por  $N$  que es el punto medio de  $BD$ , es decir, a la igualdad de las áreas de los triángulos  $DA_1C$  y  $A_1BC$ , de donde  $|DA_1| \times |DC| = |BA_1| \cdot |BC|$ , es decir,  $|AB| \times |CD| = |AD| \cdot |BC|$ .

**II.251.** La perpendicularidad de las bisectrices se demuestra sin dificultad. Demostre-

mos la segunda afirmación. Supongamos que  $M$  es el punto medio de  $AC$  y  $N$ , el punto medio de  $BD$ . De la semejanza de los triángulos  $AKC$  y  $BKD$  se deduce que  $\angle MKA = \angle NKD$  y  $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|BD|}$ , es decir, la bisectriz del ángulo  $BKC$  es también la bisectriz del ángulo  $MKN$  y divide el segmento  $MN$  en la razón  $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|BD|}$ . Es evidente que en esta misma razón también la bisectriz del ángulo  $ALB$  divide  $MN$ .

II.252. Supongamos que  $ABCD$  es el cuadrilátero dado,  $O$  es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo  $ABC$ ,  $O_1$  y  $O_2$  son los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos  $DAB$  y  $BCD$ ,  $K$  y  $L$  son, respectivamente, los puntos medios de los lados  $AB$  y  $BC$ . Los puntos  $O_1$  y  $O_2$  se hallan en  $OK$  y  $OL$ ; además,  $\frac{|OO_1|}{|O_1K|} = \frac{|OO_2|}{|O_2L|}$ . Esto se deduce del hecho de que  $O_1O_2$  es perpendicular a  $DB$  y, por consiguiente,  $O_1O_2$  es paralela a  $LK$  ( $LK$  es paralela a  $AC$ ). Por lo tanto, las rectas  $AO_1$  y  $CO_2$  dividen  $OB$  en una misma razón. (Apliquemos el teorema de Menelao que figura en el problema II.45, a los triángulos  $OKB$  y  $OLD$ .)

II.253. Designemos el radio de la circunferencia con  $R$  y las distancias desde  $P$ ,  $Q$  y  $M$  hasta el centro, con  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente. Entonces (problema I.272)  $|QP|^2 = a^2 + b^2 - 2R^2$ ,  $|QM|^2 = b^2 + c^2 - 2R^2$ ,  $|PM|^2 = c^2 + a^2 - 2R^2$ . Si  $O$  es el centro de la circunferencia, para que  $QO$  sea perpen-

dicular a  $PM$ , es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad (problema II.1)  $|QP|^2 - |QM|^2 = |OP|^2 - |OM|^2$  o bien  $(a^2 + b^2 - 2R^2) - (b^2 + c^2 - 2R^2) = a^2 - c^2$ . De manera análoga se verifica la perpendicularidad de otros segmentos.

II.254. Si  $M, N, P$  y  $Q$  son, respectivamente, los puntos de tangencia de los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$  con la circunferencia, como se deduce de la resolución del problema I.236,  $MP$  y  $NQ$  se cortan en el punto de intersección de  $AC$  y  $BD$ . Precisamente de la misma manera demostramos que las rectas  $MN$  y  $PQ$  se intersecan en el mismo punto que las rectas  $AC$  y  $KL$ , mientras que las rectas  $MQ$  y  $NP$ , en el mismo punto que las rectas  $KL$  y  $BD$ . Ahora, para el cuadrilátero  $MNPQ$  valgámonos del resultado del problema anterior.

II.255. Designemos:  $\angle DAN = \angle MAB = \varphi$ . Supongamos que  $L$  es el punto de intersección de  $AM$  y  $NB$ ,  $P$  es el punto de intersección de  $AN$  y  $DM$ ,  $Q$  es el punto de intersección de  $AK$  y  $MN$ . Según el teorema de Ceva (problema II.44), para el  $\triangle AMN$  tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{|NQ|}{|QM|} &= \frac{|AL|}{|LM|} \cdot \frac{|NP|}{|PA|} = \frac{S_{NAB}}{S_{NMB}} \cdot \frac{S_{DNM}}{S_{DAM}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} |AN| \cdot \frac{|AM|}{\cos \varphi} \operatorname{sen} \angle NAB \cdot \frac{1}{2} |AN| \cdot |NM| \times}{\times \operatorname{tg} \varphi \cos \angle ANM} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} |AM| \cdot |NM| \operatorname{tg} \varphi \cos \angle AMN \cdot \frac{1}{2} \times}{\times \frac{|AN|}{\cos \varphi} \cdot |AM| \operatorname{sen} \angle MAD} = \\ &= \frac{|AN| \cos \angle ANM}{|AM| \cos \angle AMN} \end{aligned}$$

es decir,  $Q$  divide  $NM$  en la misma razón que la altura bajada desde  $A$  sobre  $NM$ .

II.257. Demuéstrase al principio la afirmación auxiliar siguiente: si  $A, B, C$  son puntos en una recta,  $M$ , un punto arbitrario del plano, los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos  $MAC$ ,  $MBC$ ,  $MCA$  y el punto  $M$  se hallan en una circunferencia. Luego hágase uso del resultado del problema II.256.

II.258. Designemos los puntos de intersección de las rectas por  $A, B, C, D, P, Q$  (los puntos se disponen de la misma manera que en la solución del problema I.271);  $O$  es el centro de la circunferencia que pasa por  $A, B, C$  y  $D$ ;  $R$  es su radio;  $a$  y  $b$  son las tangentes trazadas hacia la circunferencia desde  $P$  y  $Q$ , respectivamente. El hecho de que  $M$  se halla en  $PQ$  se ha demostrado al solucionar el problema I.271. Además, también se ha demostrado que  $|PM| \cdot |PQ| = a^2$ ,  $|QM| \times |QP| = b^2$ ,  $|QP|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ . De tal manera,  $|PM| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $|QM| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Además,  $|PO| = \sqrt{a^2 - R^2}$ ,

$|QO| = \sqrt{b^2 - R^2}$ . Por consiguiente,  $|PO|^2 - |QO|^2 = a^2 - b^2 = |PM|^2 - |QM|^2$ . Pero esto significa que  $OM \perp PQ$ . Para concluir la demostración hace falta examinar el caso en que (con las mismas designaciones) en la circunferencia están situados los puntos  $A, C, P$  y  $Q$  (véase también el problema II.253 y su solución).

11.259. Si una recta se desplaza paralelamente a sí misma, la recta de Euler del triángulo, uno de cuyos lados es la recta que se mueve, se desplazará paralelamente a sí misma. Tomándolo en consideración, es fácil reducir el problema al siguiente. Sea que  $A$ ,  $C$  y  $D$  son tres puntos en una recta;  $B$ , un

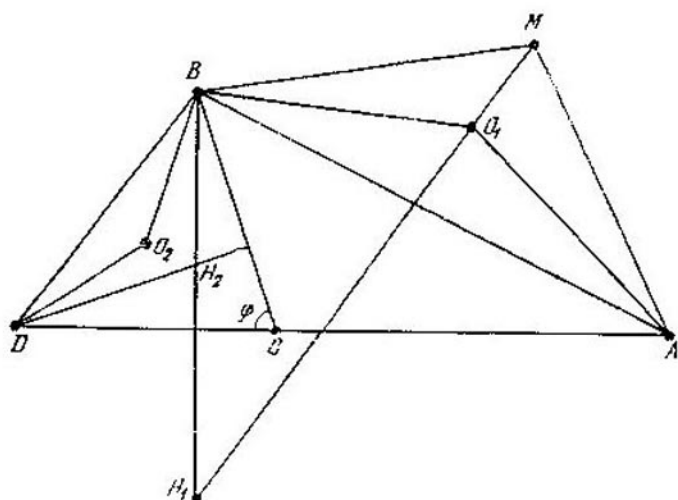


Fig. 46

punto arbitrario del plano. Si la recta de Euler del triángulo  $ABC$  es paralela a  $BD$ , la recta de Euler en el triángulo  $CBD$  es paralela a  $AB$  (fig. 46). Demostremoslo. Designemos:  $\angle BCD = \varphi$  (supongamos que  $C$  se halla entre  $A$  y  $D$ ,  $\varphi \leq 90^\circ$ ),  $O_1$  y  $H_1$  son el centro de la circunferencia circunscrita y el punto de intersección de las alturas del  $\triangle ABC$ ,  $O_2$  y  $H_2$  son sus homólogos en el  $\triangle CBD$ . Circunscribamos alrededor de  $ABH_1$  una circunferencia,  $M$  es su punto de intersección con

$O_1H_1$ . Demostremos que los cuadriláteros  $O_1AMB$  y  $O_2DH_2B$  son semejantes. En primer lugar, los triángulos  $O_1AB$  y  $O_2DB$  son triángulos isósceles semejantes y  $\angle MAB = \angle MH_1B = \angle H_1BD = \angle H_2BD$  ( $BD$  es paralela a  $O_1H_1$ ),  $\angle MBA = \angle MH_1A = \angle H_2DB$  ( $AH_1$  y  $DH_2$  son perpendiculares a  $CB$ ). La semejanza de los cuadriláteros está demostrada. Luego:  $\angle O_2H_2B = \angle O_1MA = \angle H_1MA = \angle H_1BA = \angle H_2BA$ , es decir,  $H_2O_2$  es paralela a  $AB$ .

II.260. Del resultado del problema II.19 se deduce que la cuerda común de las circunferencias con diámetros  $AE$  y  $DC$  (así como  $DC$  y  $BF$ ,  $BF$  y  $AE$ ) contiene los puntos de intersección de las alturas de los triángulos  $ABC$ ,  $BDE$ ,  $DAF$  y  $CEF$ . Supongamos también que  $K$  es el punto de intersección de  $AE$  y  $DC$ ,  $L$  es el punto de intersección de  $AE$  y  $BF$ . Según el teorema de Menelao (problema II.45), para los triángulos  $BEA$  y  $EAC$  tenemos:  $\frac{|AK|}{|KE|} \cdot \frac{|EC|}{|CB|} \cdot \frac{|BD|}{|DA|} = 1$ ,  $\frac{|AL|}{|LE|} \times \frac{|EB|}{|BC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = 1$ . Al dividir estas igualdades término a término una por otra y tomando en consideración que  $\frac{|CE|}{|EB|} \cdot \frac{|BD|}{|DA|} \times \frac{|AF|}{|FC|} = 1$ , obtenemos:  $\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|KE|}{|LE|}$ . Examinemos la circunferencia con diámetro  $AE$ . Para todos los puntos  $P$  de esta circunferencia la razón  $\frac{|PK|}{|PL|}$  es constante (véase el problema II.9). Lo mismo es cierto también para las circunferencias con diámetros  $DC$



y  $BF$ . De esta manera, las tres circunferencias se intersecan en dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  tales que las razones entre las distancias desde  $P_1$  y  $P_2$  hasta  $K$ ,  $L$  y  $M$  son iguales para ellas. Ahora se puede aprovechar el resultado del problema II.14.

II.261. La afirmación se deduce del resultado del problema anterior.

II.262. Designemos con  $l(ABC)$  la mediatriz trazada hacia el segmento que une el punto de intersección de las alturas y el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo  $ABC$ . Supongamos que la recta interseca las rectas  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  en los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$ , respectivamente. Demostremos al principio que durante el desplazamiento de la recta  $DEF$  paralelamente a sí misma, el punto  $M$  de intersección de las rectas  $l(DFB)$  y  $l(DEC)$  describe una línea recta. Sea que los puntos  $D_1, E_1, F_1; D_2, E_2, F_2; D_3, E_3, F_3$  corresponden a las tres posiciones de esta recta. Las rectas  $l(D_iF_iB)$  y  $l(D_iE_iC)$ , donde  $i = 1, 2, 3$ , se intersecan en  $M_i$  y cortan la recta  $BC$  en los puntos  $N_i$  y  $K_i$ . Es fácil ver que el punto  $N_2$  divide el segmento  $N_1N_3$  en la misma razón que el punto  $K_2$  divide el segmento  $K_1K_3$ . Esta razón es igual a la razón en que  $D_2$  divide  $D_1D_3$  (en la misma razón  $E_2$  divide  $E_1E_3$  y  $F_2, F_1F_3$ ). Como las rectas  $l(D_iF_iB)$  son paralelas entre sí y las rectas  $l(D_iE_iC)$  lo son también, la recta  $l(D_2F_2B)$  divide el segmento  $M_1M_3$  en la misma razón que la recta  $l(D_2E_2C)$ , es decir,  $M_2$  se halla en el segmento  $M_1M_3$ .

Mostremos ahora que el punto  $M$  describe

la recta  $l$  ( $ABC$ ). Para esto es suficiente demostrar que para dos posiciones de la recta  $DEF$  el punto correspondiente  $M$  se halla en  $l$  ( $ABC$ ). Examinemos el caso en que esta recta pasa por  $A$  (los puntos  $E$  y  $F$  coinciden con  $A$ ). Introduzcamos el sistema de coordenadas, en el cual los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  tienen coordenadas  $A$  ( $0, a$ ),  $B$  ( $b, 0$ ),  $C$  ( $c, 0$ ),  $D$  ( $d, 0$ ). Encontremos la ecuación de la recta  $l$  ( $ABC$ ). El punto de intersección de las alturas del triángulo  $ABC$  tiene las coordenadas  $\left(0, -\frac{bc}{a}\right)$ , el centro del círculo circunscrito,  $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{1}{2}\left(a + \frac{bc}{a}\right)\right)$ . Escribamos la ecuación de la recta  $l$  ( $ABC$ ):  $x(b+c) + y\left(a + \frac{3bc}{a}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + bc - \frac{3b^2c^2}{4a^2}$ . Sustituyendo en esta ecuación  $c$  por  $d$  obtenemos la ecuación de la recta  $l$  ( $ABD$ ) y sustituyendo  $b$  por  $d$ , la ecuación de la recta  $l$  ( $ACD$ ).

Se puede comprobar que las tres rectas tienen un punto común  $Q$  ( $x_0, y_0$ ), donde  $x_0 = \frac{1}{4}(b + c + d) - \frac{3bcd}{4a^2}$ ,  $y_0 = \frac{1}{4a} \times (a^2 - bc - cd - db)$ . Con esto se concluye la demostración, puesto que el caso, en que la recta  $DEF$  pasa por  $B$  y  $C$ , equivale al examinado.

II.263. Sean  $l$ ,  $m$ ,  $n$  y  $p$  las rectas que forman nuestros triángulos (fig. 47,  $a$ ). Introduzcamos las designaciones siguientes:  $P$  es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo formado por las rectas  $l$ ,  $m$  y  $n$ ;

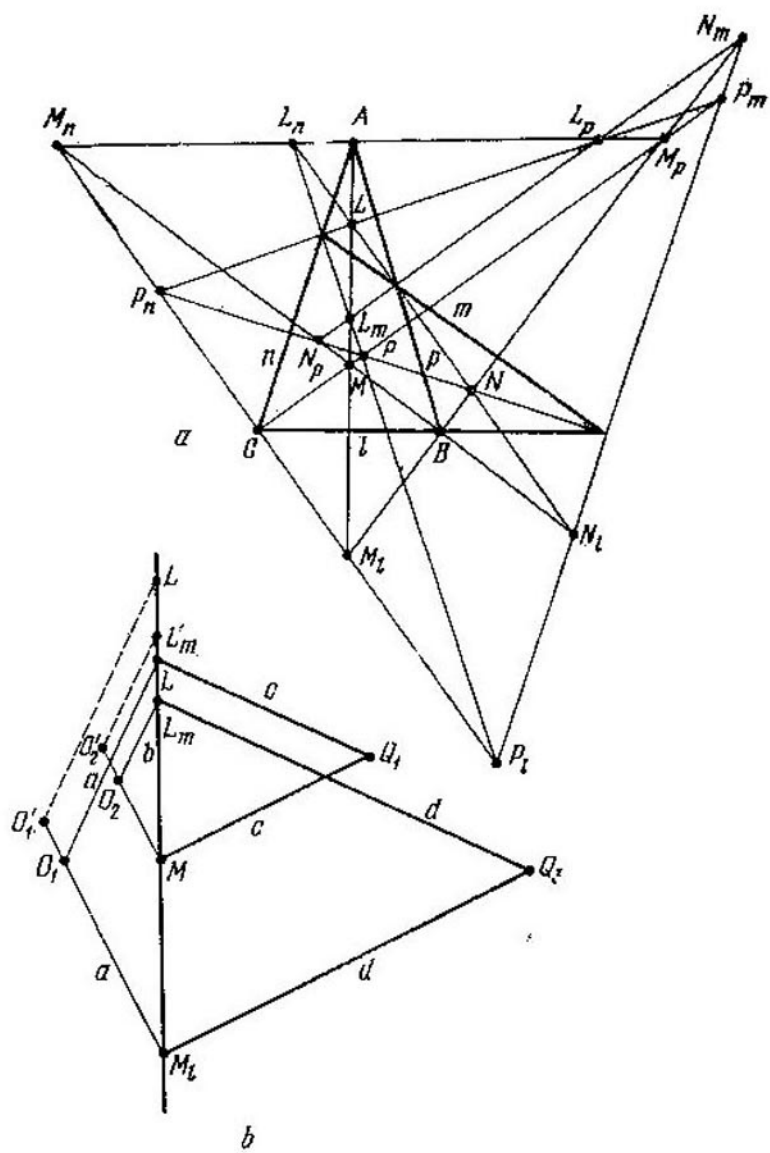


Fig. 47

$l$	$N$	$M_l$	$P_n$	$O_1$
$M$	$P$	$L_m$	$N_p$	$O_2$
$P_m$	$M_p$	$N_m$	$L_p$	$O_3$
$N_l$	$L_n$	$P_l$	$M_n$	$O_4$
$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	

$P_l$  es el centro de la circunferencia exinscrita del mismo triángulo, la cual es tangente al lado que yace en la recta  $l$ . El mismo sentido lo tendrán las designaciones  $L$ ,  $M_p$ ,  $N_m$ , etc.

En la tabla aducida, los cuatro puntos dispuestos en una línea o en una columna se hallan en una circunferencia; además, los centros de las circunferencias que corresponden a las líneas, se sitúan en una recta:  $q_1$ , mientras que los centros, que corresponden a las columnas, en otra:  $q_2$ ;  $q_1$  y  $q_2$  son perpendiculares y se intersecan en el punto de Michell (problema II.256). Demostremoslo. El hecho de que las cuaternas indicadas se hallan en una circunferencia se demuestra sin dificultad. Designemos por  $O_i$ ,  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) los centros de las circunferencias correspondientes. Demostremos que  $O_1O_2$  es perpendicular a  $Q_1Q_3$  y  $Q_2Q_4$ . Si en el triángulo ( $l, n, m$ ) el ángulo entre  $l$  y  $m$  es igual a  $\alpha$ , entonces  $\angle LNM_l =$

$\angle L_m P M = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ ; por consiguiente,  $\angle LO_1 M_1 = \angle L_m O_2 M = 180^\circ - \alpha$ . Precisamente de la misma manera  $\angle LP_m M = \angle L_m P_1 M_1 = \alpha/2$ ,  $\angle LQ_1 M = \angle L_m Q_3 M_1 = \alpha$ . Los triángulos  $LO_1 M_1$ ,  $L_m O_2 M$ ,  $LQ_1 M$ ,  $L_m O_3 M_1$  son isósceles, sus lados son respectivamente perpendiculares (por ejemplo,  $O_1 L$  y  $LQ_1$ ). Luego (fig. 47, b)  $|Q_1 O_1|^2 - |O_1 Q_3|^2 = (a^2 + c^2) - (a^2 + d^2) = (b^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = |O_2 Q_1|^2 - |O_2 Q_3|^2$ . Por consiguiente,  $O_1 O_2$  y  $Q_1 Q_3$  son perpendiculares. Precisamente de la misma manera demostramos la perpendicularidad de  $O_1 O_2$  y  $Q_2 Q_4$  (examinemos la recta, en la cual están dispuestos los puntos  $N, P, N_p, P_n$ ). Por eso  $Q_1 Q_3$  y  $Q_2 Q_4$  son paralelos (si estos puntos no se hallan en una recta). Igualmente serán paralelos  $Q_1 Q_4$  y  $Q_3 Q_2$  (son perpendiculares a  $O_1 O_3$ ),  $Q_1 Q_2$  y  $Q_3 Q_4$  (son perpendiculares a  $O_1 O_4$ ); pero de esto se deduce que  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  se hallan en una recta:  $q_2$ ; también  $O_1, O_2, O_3, O_4$  se sitúan en una recta:  $q_1$ . Es evidente que  $q_1$  y  $q_2$  son perpendiculares.

Desplacemos la recta  $m$  paralelamente a sí misma. Sea que  $L', L'_m, O'_1, O'_2$  corresponden a la recta  $m'$ . La razón  $\frac{|O_1 O'_1|}{|O_2 O'_2|} = \frac{|LL'|}{|L_m L'_m|}$  es constante (es igual a  $\frac{|AL|}{|AL_m|}$ ) y esto significa que durante el desplazamiento de  $m$  la recta  $O_1 O_2$ , es decir,  $q_1$ , pasa por un punto fijo. Precisamente de la misma manera pasa por un punto fijo la recta  $q_2$ . Puesto que  $q_1$  y  $q_2$  son perpendiculares, su punto de inter-

sección describe una circunferencia. Pero cuando  $m$  pasa por  $A$  (así como por  $B$  o  $C$ ), entonces los puntos  $L$  y  $L_m$  se unen con  $A$ , las rectas  $O_1O_2$  y  $Q_1Q_3$ , es decir,  $q_1$  y  $q_2$  pasan por  $A$  (respectivamente, por  $B$  o  $C$ ). De tal modo, el punto de intersección de  $q_1$  y  $q_2$  recorre la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo  $ABC$ . Desplazando otras rectas, o sea  $l, n, p$ , demos-tremos que el punto de intersección de  $q_1$  y  $q_2$  pertenece a cualquier circunferencia circunscrita alrededor de uno de los triángulos formado por las rectas  $l, m, n, p$ , es decir, las rectas  $q_1$  y  $q_2$  se cortan en el punto de intersección de las circunferencias circunscritas alrededor de estos triángulos, o sea, en el punto de Michell.

Notemos que «de paso» hemos demostrado que las cuatro circunferencias circunscritas alrededor de cuatro triángulos formados por cuatro rectas del plano, se intersecan en un punto (problema II.256).

II.266. Designemos por  $C$  uno de los puntos de intersección, por el cual pasa la recta. Supongamos que  $B_1, B_2, B_3$  son los pies de las perpendiculares bajadas desde  $O_1, O_2, O_3$ , respectivamente, sobre la recta, y  $K$  y  $M$  son los puntos de intersección de las rectas paralelas a  $A_1A_2$ , que pasan por  $O_1$  y  $O_2$ , con  $O_2B_2$  y  $O_3B_3$ , respectivamente. Puesto que  $B_1$  y  $B_2$  son los puntos medios de las cuerdas  $A_1C$  y  $CA_2$ , entonces  $|B_1B_2| = |A_1A_2|/2$ . Si  $\alpha$  es el ángulo entre las rectas  $A_1A_3$  y  $O_1O_3$ , entonces  $\frac{|A_1A_2|}{|O_1O_2|} = \frac{2|B_1B_2|}{|O_1O_2|} = 2 \frac{|O_1K|}{|O_1O_2|} = 2 \cos \alpha$ ; análogamente  $\frac{|A_2A_3|}{|O_2O_3|} = 2 \cos \alpha$ .

II.268. Supongamos que  $O_1$  y  $O_2$  son centros de circunferencias.  $R_1$  y  $R_2$ , sus radios,  $|O_1O_2| = a$ ,  $M$  es el punto de intersección de las tangentes interiores comunes. La circunferencia con diámetro  $O_1O_2$  pasa por los puntos, en los que las tangentes exteriores comunes se intersecan con las tangentes interiores comunes. Para la homotecia con el centro en el punto  $M$  y la razón  $\frac{a-R_1-R_2}{a}$ , esta circunferencia pasa a la circunferencia con el centro en  $O_1O_2$ , la cual es tangente a las dadas por el exterior.

II.269. Sea  $M$  uno de los puntos de intersección de las circunferencias; entonces  $MA$  y  $MC$  son las bisectrices del ángulo  $M$  (exterior e interior) del triángulo  $BMD$ , puesto que la circunferencia con el diámetro  $AC$  es el lugar geométrico de los puntos  $M$ , para los cuales  $\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MB|}{|MD|}$  (véase el problema II.9). Valiéndose de las correlaciones entre los ángulos del  $\triangle AMC$  rectángulo y del  $\triangle BMD$ , cerciórese de que los radios de las circunferencias circunscritas alrededor de estos triángulos, trazados desde el vértice  $M$ , son mutuamente perpendiculares.

II.271. Notemos (fig. 48, a) que el  $\triangle APM$  es semejante al  $\triangle AMQ$ , el  $\triangle APL$  es semejante al  $\triangle AKQ$ , el  $\triangle AKN$  es semejante al  $\triangle ALN$ ; a partir de estas semejanzas obtenemos:  $\frac{|PM|}{|MQ|} = \frac{|AM|}{|AQ|}$ ,  $\frac{|QK|}{|PL|} = \frac{|AQ|}{|AL|}$ ,  $\frac{|LN|}{|NK|} = \frac{|AL|}{|AN|}$ . Multiplicando estas igualdades y tomando en consideración que  $|AM| =$

$|AN|$ , obtenemos que  $\frac{|PM|}{|MQ|} \cdot \frac{|QK|}{|PL|} \cdot \frac{|LN|}{|NK|} = 1$ , pero esto (véase el problema II.49) es precisamente la condición necesaria y suficiente para que las rectas  $MN$ ,  $PK$  y  $QL$  se intersequen en un punto.

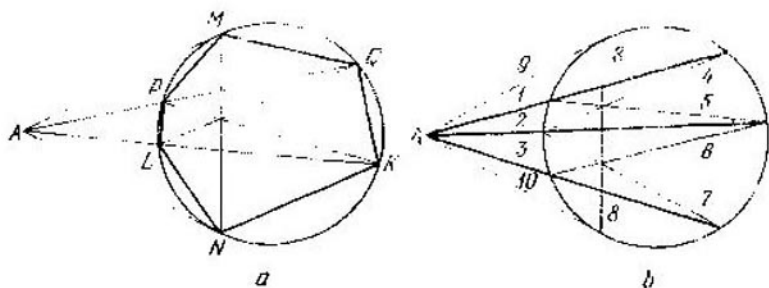


Fig. 48

El procedimiento de construcción de la tangente con ayuda de una regla se comprende al examinar la fig. 48, *b*. Los números 1, 2, . . . muestran la sucesión en que se trazan las rectas.

**II.272.** El conjunto buscado es una recta, o sea la polar de un punto respecto a la circunferencia dada (véase el problema II.21).

**II.273.** Los ángulos  $AMN$  y  $BMN$  pueden expresarse a través del ángulo central que corresponde al arco  $AB$  de la circunferencia dada (hay que analizar diferentes casos de posición del punto  $N$ ); después de esto se puede determinar  $\angle AMB$ . El lugar geométrico de puntos buscado es una circunferencia.

**II.274.** Aprovechense los resultados de los problemas II.271 y II.21. El lugar geométrico de puntos obtenido coincide con el lugar geo-



métrico de puntos del problema II.21, es decir, es la polar del punto  $A$  respecto a la circunferencia dada.

II.275. Designemos (fig. 49) por  $O$  el punto de intersección de  $AM$  y  $DC$ . Tracemos por el punto  $B$  una tangente a la segunda circunferencia y designemos por  $K$  el punto de intersección de aquélla con  $AC$  (de la misma manera que en la condición). Es evidente que

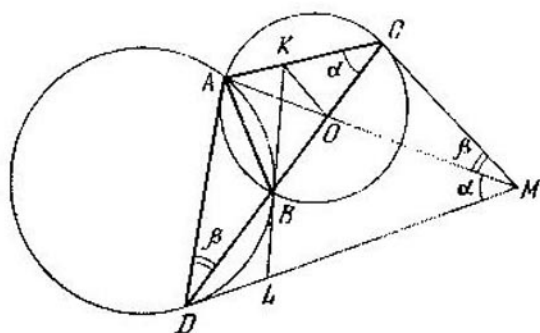


Fig. 49

la afirmación del problema es equivalente a la afirmación de que  $KO \parallel CM$ . Supongamos que el ángulo apoyado sobre el arco  $AB$  en la primera circunferencia, es igual a  $\alpha$ ; en la segunda, a  $\beta$ ; entonces,  $\angle BCM = \angle BAC$ ,  $\angle BDM = \angle BAD$ ,  $\angle DMC = 180^\circ - \angle BDM - \angle BCM = 180^\circ - \angle BAD - \angle BAC = 180^\circ - \angle DAC$ ; por consiguiente,  $ADMC$  es un cuadrilátero inscrito,  $\angle AMC = \beta$ . Además, si la tangente  $BK$  corta  $DM$  en el punto  $L$ , entonces  $\angle KBO = \angle LBD = \angle BDL = \angle CAM$ ; por consiguiente, el cuadrilátero  $KABO$  también es inscrito y  $\angle KOA =$

$= \angle KBA - \beta$ , es decir,  $KO \parallel CM$  (precisamente de la misma manera se examinan los casos de otras posiciones mutuas de los puntos  $D$ ,  $B$  y  $C$ ).

II.276. Puesto que la circunferencia con el diámetro  $CD$  pasa por el punto fijo  $A$  señalado en  $MN$  ( $MN \perp CD$ ), entonces

$$|CN| \cdot |ND| = |NA|^2 \quad (1)$$

es una magnitud constante. Designemos por  $K$  el punto de intersección de  $PQ$  con  $MN$ .

Mostremos que  $\frac{|MK|}{|KN|}$  es una magnitud constante. Notemos que  $\angle PNQ = 180^\circ - \angle PMQ$

por consiguiente,  $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{S_{PMQ}}{S_{PQN}} = \frac{|PM| \cdot |MQ|}{|PN| \cdot |NQ|} =$

$$= \frac{|MN|}{|CN|} \cdot \frac{|MN|}{|ND|} = \frac{|MN|^2}{|AN|^2} \quad (\text{se ha empleado}$$

la igualdad (1) y el hecho de que el  $\triangle MNP$  es semejante al  $\triangle MNC$  y el  $\triangle MNQ$  es semejante al  $\triangle MND$ ).

II.277. La igualdad  $\angle O_1AO_2 = \angle MAN$  se deduce el resultado del problema I.279, la igualdad  $\angle O_1AO_2 = 2\angle CAE$  fue demostrada al resolver el problema I.275.

II.278. Sea que  $O$  y  $O_1$  son los centros de dos circunferencias examinadas ( $O$  es el punto medio de  $AB$ ),  $K$  es el punto de tangencia de las circunferencias ( $K$  se halla en la recta  $OO_1$ ),  $N$  es el punto de tangencia de la circunferencia  $O_1$  con la recta  $CD$ ,  $M$  es el punto de intersección de  $AB$  y  $CD$ . Puesto que  $O_1N$  es paralela a  $AB$  y los triángulos  $KO_1N$  y  $KOA$  son isósceles y semejantes, los puntos  $K$ ,  $N$  y  $A$  se sitúan en una recta. Designemos

por  $t$  la tangente a la circunferencia  $O_1$  trazada a partir del punto  $A$  (suponemos que la circunferencia  $O_1$  es interior al segmento  $CBD$ ). Tenemos:  $t^2 = |AN| \cdot |AK| = |AN|^2 + |CN| \cdot |ND| = |AM|^2 + |MN|^2 + |CM| - |MN| (|CM| + |MN|) = |AM|^2 + |CM|^2 = |AK|^2$ , lo que había que demostrar.

II.279. Supongamos que  $A$  es el punto medio del arco de la circunferencia dada que no forma parte del segmento; las tangentes a las circunferencias inscritas en el segmento, que parten de  $A$ , son iguales (problema II.278). De esto se deduce que  $A$  se halla en la recta  $MN$ , puesto que  $|AO_1|^2 - |AO_2|^2 = |O_1M|^2 - |O_2M|^2$ , donde  $O_1$  y  $O_2$  son los centros de las circunferencias.

II.280. Examinemos el caso general de circunferencias arbitrarias. Sea que los puntos  $F$  y  $F'$  están dispuestos como se muestra en la fig. 50. Las designaciones se comprenden al examinar el dibujo. Demostremos que existe una circunferencia inscrita en el cuadrilátero  $AKBM$ , después de lo cual valgámonos del resultado del problema II.55. Para esto es suficiente demostrar que (véase los problemas II.241, II.242)

$$|BF| + |BF'| = |AF'| + |AF|. \quad (1)$$

Tomando en consideración que  $|BL| = |BT|$  y  $|FS| = |FT|$ , obtenemos:  $|BF| = |BL| - |FS|$ , y de manera análoga  $|FA| = |FQ| - |AE|$ ,  $|BF'| = |F'P| - |BL|$ ,  $|F'A| = |AE| -$

$- |F'R|$ . Colocando estas expresiones en (1), obtenemos:  $|BL| - |FS| + |F'P| -$   
 $- |BL| = |AE| - |F'R| + |FQ| -$   
 $- |AE| \Rightarrow |F'R| + |F'P| = |FQ| +$   
 $+ |FS| \Rightarrow |PR| = |SQ|$ . Precisamente de

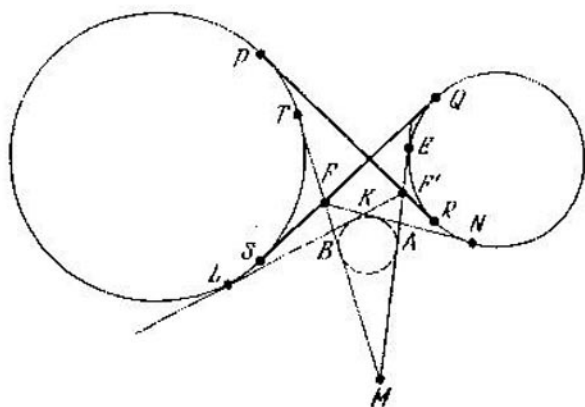


Fig. 50

la misma manera se analizan los demás casos de disposición de los puntos  $F$  y  $F'$  en las tangentes (además, se toman en consideración los resultados de los problemas II.241, II.242). Puesto que los puntos de tangencia y el punto de intersección dividen cada tangente en 4 partes, tales casos serán  $\frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$ .

Para demostrar la segunda parte notemos que los puntos medios de  $AB$ ,  $FF'$  y el centro de la tercera circunferencia  $O_3$  inscrita en  $AKBM$  se hallan en una recta (véase el problema II.243). Pero, puesto que los radios de las circunferencias dadas son iguales,  $AB$  es paralela a  $O_1O_2$  ( $O_1, O_2$  son los centros de las circunferencias dadas);  $A$  y  $B$  se hallan en las

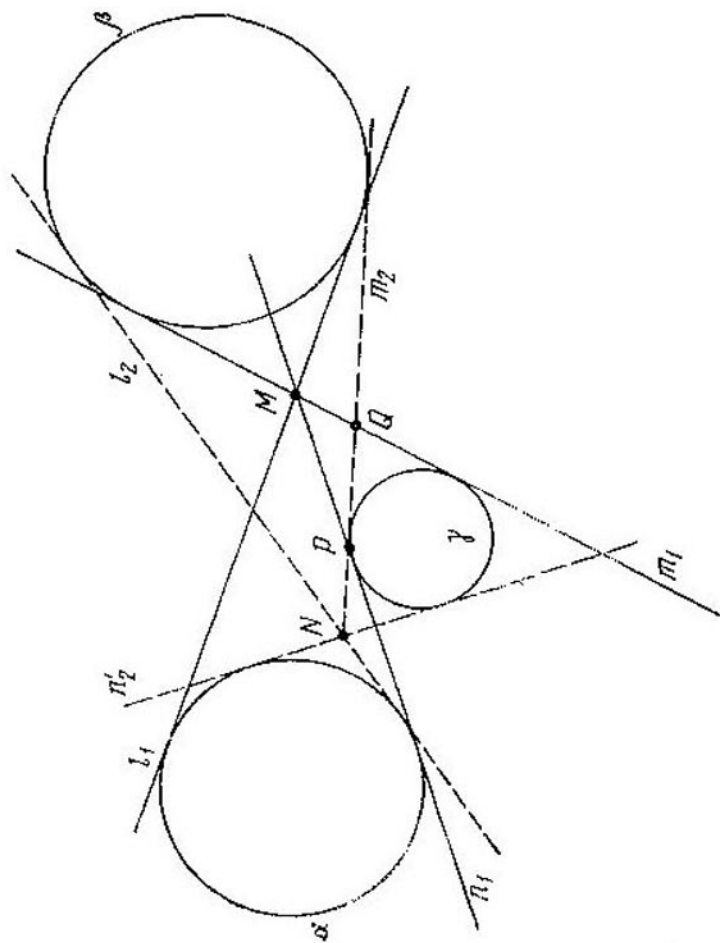


Fig. 51

rectas  $O_1O_3$  y  $O_2O_3$ . Por consiguiente, la recta que pasa por  $O_3$  y el punto medio de  $AB$ , divide  $O_1O_2$  por la mitad.

II.281. Sea (fig. 51)  $M$  el punto de intersección de las tangentes  $l_1$ ,  $m_1$  y  $n_1$ ;  $N$ , el punto de intersección de  $l_2$  y  $m_2$ . Tracemos por  $N$  la recta  $n'_2$  tangente a  $\alpha$  y distinta de  $l_2$ . De la misma manera como esto se hizo en el problema II.280, se puede demostrar que las rectas  $m_1$ ,  $n_1$ ,  $m_2$  y  $n'_2$  son tangentes a una circunferencia; además, esta circunferencia es exinscrita respecto al triángulo  $PMQ$  (es tangente al lado  $PQ$ ), es decir, coincide con  $\gamma$ . *Observación.* La fig. 51 corresponde al caso general de disposición de las circunferencias que satisfacen la condición del problema.

II.282. Demostremos que la recta  $D_1C$  pasa por  $O$  que es el centro del arco  $AB$ , mien-

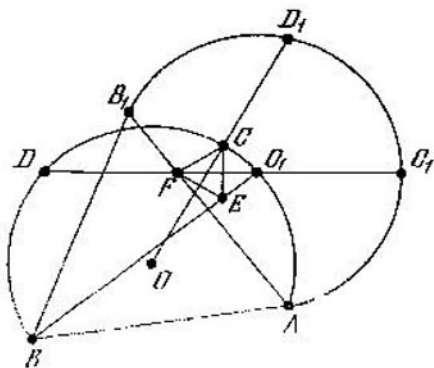


Fig. 52

tras que la recta  $DC_1$ , por  $O_1$  que es el centro del arco  $AB_1$  (fig. 52). El triángulo  $DAD_1$  es regular,  $|DC| = |AC|$ , por consiguiente,

$D_1C \perp DA$  y  $D_1C$  pasa por  $O$ . De manera análoga,  $DC_1 \perp D_1A$ . El punto  $O_1$  se halla en el arco  $AB$ , puesto que aquél se obtiene a partir de  $O$ , girando alrededor de  $A$  en  $\pi/3$ . Sea que ambos arcos miden  $6\alpha$  (para mayor comodidad,  $\alpha > \pi/6$ ). Entonces,  $\angle AO_1C_1 = 2\alpha$ ,  $\angle O_1C_1A = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\angle FAC_1 = 2\alpha$ . Por consiguiente,  $\angle AFC_1 = \pi - 2\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha = \angle FC_1A$ , es decir,  $|AF| = |AC_1| = |AC|$ . Demostremos que los triángulos  $FAC$  y  $EDC$  son iguales. Tenemos:  $|AF| = |AC| = |DC| = |DE|$ ,  $\angle CDE = \angle CDB - \angle BDE = \pi - 2\alpha - (\pi - 2\angle DBE) = -2\alpha + 2\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 2\alpha - \frac{\pi}{3} = \angle FAC$ ; de tal manera,  $|FC| = |CE|$ .

Luego encontramos:  $\angle DCE = \frac{2\pi}{3} - \alpha$ ,  $\angle B_1FD = \frac{\pi}{2} - \alpha$  (vale la semisuma de los arcos correspondientes),  $\angle B_1FC = \pi - \angle CFA = \frac{\pi}{3} + \alpha$ ,  $\angle DFC = \frac{5}{6}\pi$ ,  $\angle DCF = \pi - \frac{5}{6}\pi - \alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \alpha$  y, por fin,  $\angle FCE = \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\pi}{3}$ .

**II.283.** Examinemos dos casos: 1) el  $\triangle ABC$  está circunscrito alrededor de la circunferencia dada; 2) la circunferencia dada es tangente a las prolongaciones de los lados  $AB$  y  $AC$ .

En el primer caso examinemos la circunferencia tangente a los lados del ángulo en los

puntos  $M$  y  $N$  y a la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$  por el interior. Supongamos que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son los lados del triángulo  $ABC$ ,  $r$  es el radio de la circunferencia dada,  $\angle A = \alpha$ ,  $|AM| = |AN| = x$ . Hagamos uso del teorema generalizado de Tolomeo (problema II.239):  $xa = (b - x) \times c + (c - x) b$ , de donde  $x = \frac{2bc}{a+b+c} = \frac{4S_{ABC}}{(a+b+c) \operatorname{sen} \alpha} = \frac{2r}{\operatorname{sen} \alpha}$ , es decir,  $x$  es constante. (Se puede demostrar que  $MN$  pasa por el centro de la circunferencia dada.)

En el segundo caso la circunferencia es tangente a los lados del ángulo y a la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$  por el exterior.

II.284. Designemos los lados del  $\triangle ABC$  como lo hacemos de ordinario:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; sea que  $|BD| = d$ ,  $|AD| = b_1$ ,  $|AM| = x$ . Valgámonos del teorema generalizado de Tolomeo (problema II.239):  $xa + (d - b_1 + x) b = (b - x) c$ , de donde

$$x = \frac{b(c + b_1 - d)}{a + b + c}. \quad (1)$$

Tomemos en  $AB$  el punto  $N$  de tal manera que  $MN$  sea paralela a  $BD$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} |MN| &= \frac{x}{b_1} d, \quad |AN| = \frac{x}{b_1} c, \\ S_{AMN} &= \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 S_{ABD} = \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 \frac{b_1}{b} S_{ABC} = \\ &= \frac{x^2}{b_1 b} S_{ABC}. \end{aligned} \quad (2)$$



Sea  $r$  el radio de la circunferencia tangente a  $MN$ , así como a las prolongaciones de  $AN$  y  $AM$ . Entonces de (1) y (2) se deduce, que

$$r = \frac{2S_{AMN}}{|AM| + |AN| - |MN|} = \frac{2r^2 S_{ABC}}{bx(b_1 + c - d)} = \frac{2S_{ABC}}{a + b + c},$$

es decir,  $r$  es igual al radio de la circunferencia inscrita en el  $\triangle ABC$ , lo que se necesitaba.

II.285. Designemos por  $M$  y  $K$  los puntos de tangencia de las circunferencias, cuyos

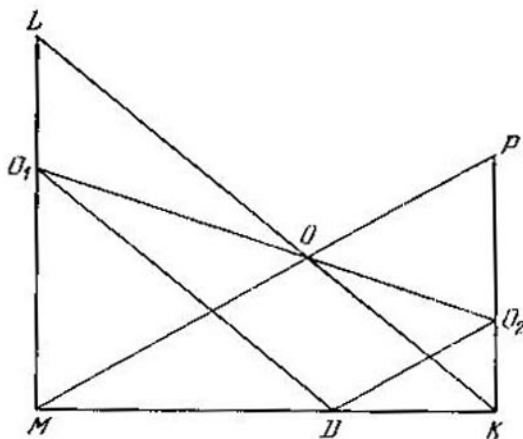


Fig. 53

centros son  $O_1$  y  $O_2$ , con  $AC$ . Del resultado del problema anterior se deduce que  $\angle O_1DM = \angle OKD = \frac{\varphi}{2}$ ,  $\angle O_2DK = \angle OMD = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ . Prolonguemos  $OK$  y  $OM$  hasta que se intersequen con  $O_1M$  y  $O_2K$  en los puntos  $L$  y  $P$ , respectivamente (fig. 53). En el trape-

cio  $LMKP$  con las bases  $LM$  y  $PK$  tenemos  $\frac{|MO_1|}{|O_1L|} = \frac{|MD|}{|DK|} = \frac{|PO_2|}{|O_2K|}$ . Por consiguiente,  $\lambda_1 O_2$  pasa por el punto de intersección de las diagonales del trapecio, o sea el punto  $O$ . Además,

$$\frac{|O_1O|}{|OO_2|} = \frac{|LM|}{|PK|} = \frac{|MK| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{|MK| \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

II.286. La afirmación del problema se deduce de los resultados de los problemas II.285 y II.232.

II.287. La afirmación de este problema puede demostrarse con ayuda del resultado del problema II.240, a ser más exacto, de su caso particular, cuando tres circunferencias tienen el radio cero, o sea son puntos. En el caso dado, lo serán los puntos medios de los lados del triángulo.

II.288. La afirmación de este problema se deduce del teorema de Feuerbach (véase el problema II.287) y del hecho de que los triángulos  $ABC$ ,  $AHB$ ,  $BHC$ ,  $CHA$  tienen una misma circunferencia de los nueve puntos (demuéstrese).

II.289. Supongamos que en el  $\triangle ABC$ , para concretar,  $a \leq b \leq c$ . Designemos por  $A_1, B_1, C_1$  los puntos medios de los lados  $BC, CA, AB$  y por  $F, F_a, F_b, F_c$  los puntos de tangencia de las circunferencias inscrita y exinscrita con la circunferencia de los nueve puntos del  $\triangle ABC$ . Hay que demostrar que en el hexágono  $C_1F_cFA_1F_aF_b$  (los puntos toma-

dos en el orden indicado, forman un hexágono, puesto que  $a \leq b \leq c$ ) las diagonales  $C_1A_1$ ,  $F_cF_a$  y  $F_aF_b$  se cortan en un punto; para esto es suficiente demostrar (véase el problema II.49), que

$$|C_1F_c| \cdot |FA_1| \cdot |F_aF_b| = |F_cF| \cdot |A_1F_a| \times \\ \times |F_bC_1|. \quad (1)$$

Aplicando las fórmulas obtenidas en el problema I.201, encontramos:

$$|C_1F_c| = \frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{R}{R+2r_c}}, \quad |FA_1| = \\ = \frac{c-b}{2} \sqrt{\frac{R}{R-2r}}, \\ |F_aF_b| = \frac{(a+b)R}{\sqrt{R+2r_a} \cdot \sqrt{R+2r_b}}, \\ |F_cF| = \frac{(b-a)R}{\sqrt{R-2r} \cdot \sqrt{R+2r_c}}, \\ |A_1F_a| = \frac{c-b}{2} \sqrt{\frac{R}{R+2r_a}}, \\ |F_bC_1| = \frac{a+b}{2} \sqrt{\frac{R}{R+2r_b}}.$$

Después de esto la igualdad (1) se comprueba fácilmente. *Observación.* Se puede demostrar que los puntos de intersección de los lados opuestos del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos de tangencia de las circunferencias inscrita y exinscrita del triángulo dado con su circunferencia de los nueve puntos, se hallan en las prolongaciones de las líneas medias de este triángulo.

**II.290.** Aprovechando las fórmulas de los problemas II.193, II.194, II.289 (en el último problema véase su solución), encontramos  $\frac{|F_b F_c|}{|B_1 C_1|} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)R^3}{abc |OI_a| \cdot |OI_b| \cdot |OI_c|}$ . Semejantes serán las relaciones de los demás lados correspondientes de los triángulos  $F_a F_b F_c$  y  $A_1 B_1 C_1$ . Precisamente del mismo modo se demuestra la semejanza de otros pares de triángulos. Al mismo tiempo, para las magnitudes  $|A_1 B_2|$ , etc. hace falta obtener fórmulas análogas a la fórmula del problema II.194.

**II.291.** Demuéstrase que  $\triangle ABP = \triangle ACQ$ . Para esto es suficiente demostrar que  $\triangle KBP = \triangle ABC$  y  $\triangle FCQ = \triangle ABC$  (por dos lados y el ángulo comprendido entre éstos):  $\angle QAP = \angle CAB + \angle CAQ + \angle BAP = \angle CAB + \angle CAQ + \angle CQA = \angle CAB + 180^\circ - \angle QCA = \angle CAB + 90^\circ - \angle QCF = 90^\circ$  (en virtud del supuesto de que  $\angle CAB \leq 90^\circ$ ; en caso de  $\angle CAB > 90^\circ$  los razonamientos son análogos).

**II.292.** Puesto que  $\angle FE_1 E = \angle FCE = 90^\circ$ , el cuadrilátero  $FE_1 EC$  es inscrito,  $\angle FCE_1 = \angle FEE_1 = 60^\circ$ . De manera análoga, es inscrito el cuadrilátero  $FE_1 AD$  y  $\angle E_1 DF = \angle E_1 AF = 60^\circ$ , es decir, el  $\triangle DE_1 C$  es regular. De este mismo modo se demuestra que el  $\triangle BF_1 C$  lo es también.

**II.293.** Designemos por  $P$ ,  $Q$  y  $R$  los puntos de intersección de  $LB$  y  $AC$ ,  $AN$  y  $BC$ ,  $LB$  y  $AN$ , respectivamente. Sea que  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ . Es suficiente mostrar que  $S_{ACQ} = S_{APB}$  (ambas áreas se diferencian de las examinadas por la adición del área del

$\triangle APR$ ). De la semejanza de los triángulos correspondientes obtenemos  $|CQ| = |PC| \cdot \frac{ab}{a+b}$ . Por consiguiente,  $S_{ACQ} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |CQ| = \frac{ab^2}{2(a+b)}$ ,  $S_{APB} = S_{ACB} - S_{PCB} - \frac{1}{2} ab - \frac{a^2b}{2(a+b)} = \frac{ab^2}{2(a+b)}$ .

II.295. Demuéstrese que el área del triángulo con los vértices en los centros de los cuadrados, construidos sobre los lados del triángulo dado y dispuestos fuera de éste, y el área del triángulo con los vértices ubicados en los centros de los cuadrados, construidos en los mismos lados en el interior del triángulo dado son iguales a  $S + \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2)$  y  $|S - \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2)|$ , respectivamente, donde  $a, b, c, S$  son los lados y el área del triángulo dado.

II.296. Designemos:  $A_1BC = \alpha$ ,  $\angle A_1CB = \beta$ ; entonces  $AA_1$  divide  $BC$  en razón igual

$$a \frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} = \frac{\frac{1}{2} |AB| \cdot |BA_1| \sin(\angle B + \alpha)}{\frac{1}{2} |AC| \cdot |CA_1| \sin(\angle C + \beta)} = \frac{c \sin \beta \sin(\angle B + \alpha)}{b \sin \alpha \sin(\angle C + \beta)}$$

Después de hacer los mismos cálculos para otros lados del triángulo  $ABC$ , hágase uso del teorema de Ceva (problema II.44).

II.297. Sea que  $KL$  es el arco de la circunferencia que se encuentra en el interior del triángulo  $ABC$ . Al prolongar los lados  $AB$  y  $BC$  más allá del punto  $B$ , obtenemos el arco

$MN$  simétrico al arco  $KL$  respecto al diámetro paralelo a  $AC$ . Puesto que  $\angle B$  vale tanto como mide el arco igual a  $\frac{1}{2}(\cup KL + \cup MN) = \cup KL$ , el arco  $KL$  tiene una longitud constante y le corresponde el ángulo central igual al ángulo  $B$ .

II.298. Supongamos que  $O$  (fig. 54) es el punto de intersección de las rectas;  $A$  y  $A_1$

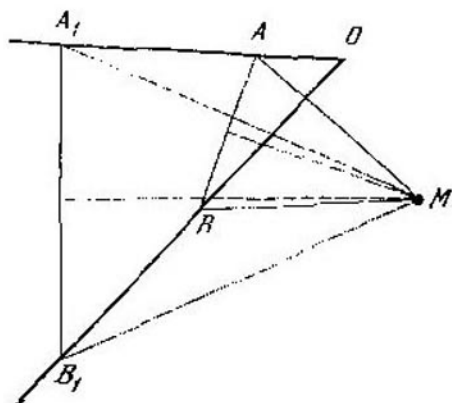


Fig. 54

son dos posiciones de un punto en una recta en distintos momentos de tiempo;  $B$  y  $B_1$  son las posiciones de otro punto y en otra recta en estos mismos momentos de tiempo. Levantemos hacia  $AB$  y  $A_1B_1$  perpendiculares en sus puntos medios y designemos por  $M$  su punto de intersección;  $\triangle AA_1M = \triangle BB_1M$  por los tres lados: uno se obtiene del otro girando al ángulo  $AOB$  con el centro en  $M$ . Durante este giro cualquier posición del punto en  $AO$  pasa a la posición correspondiente del

punto en  $OB$ , por lo que  $M$  posee la propiedad necesaria.

II.299. a) Supongamos que  $A$  y  $B$  son los puntos de intersección de las circunferencias;  $A$  es el punto, del cual han partido los ciclistas;  $M$  y  $N$ , las posiciones de los ciclistas en cierto momento de tiempo. Si  $M$  y  $N$  se hallan a un lado de  $AB$ , entonces  $\angle ABM = \angle ABN$ ;

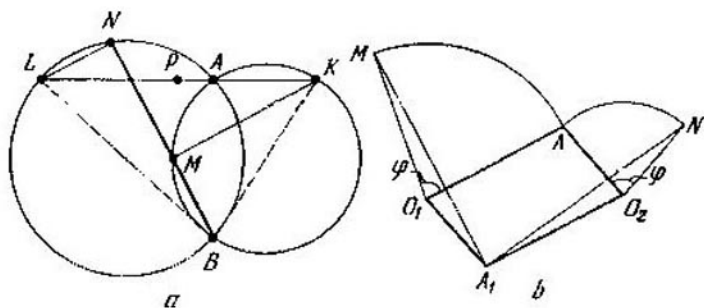


Fig. 55

si los mismos se hallan a los lados diferentes, entonces  $\angle ABM + \angle ABN = 180^\circ$ , es decir, los puntos  $B$ ,  $M$  y  $N$  se sitúan en una recta. Si  $L$  y  $K$  son los puntos de circunferencias, diametralmente opuestos a  $B$  ( $L$  y  $K$  son fijos), entonces, puesto que  $\angle LNM = \angle NMK = 90^\circ$ , el punto medio de  $LK$ , o sea el punto  $P$ , será equidistante de  $N$  y  $M$ . Podemos cerciorarnos de que  $P$  es simétrico al punto  $B$  respecto del punto medio del segmento que une los centros de las circunferencias (fig. 55, a).

b) Sean  $O_1$  y  $O_2$  los centros de las circunferencias. Tomemos un punto  $A_1$  tal, que

$O_1A_1O_2A_1$  sea un paralelogramo. Es fácil ver que  $\triangle MO_1A_1 = \triangle NO_2A_1$ , ya que  $|MO_1| = |O_1A| = |O_2A_1|$ ,  $|O_1A_1| = |O_2A| = |NO_2|$ ,  $\angle MO_1A_1 = \varphi + \angle AO_1A_1 = \varphi + \angle AO_2A_1 = \angle NO_2A_1$ , donde  $\varphi$  es el ángulo que corresponde a los arcos recorridos por los ciclistas (fig. 55, b). De esta manera, los puntos buscados son simétricos a los puntos de intersección de las circunferencias respecto al punto medio del segmento  $O_1O_2$ . *Observación.* En el punto a) se puede proceder de la misma manera que en el punto b), a saber: tomando el punto  $P$  de manera que  $\triangle O_1PO_2 = \triangle O_1AO_2$  ( $A$  y  $P$  se hallan a un lado de  $O_1O_2$  y no coinciden); es fácil demostrar la igualdad de los triángulos correspondientes.

II.300. b) Aprovechese el resultado del punto a). Sustitúyase el giro alrededor de  $O_1$  por dos simetrías axiales, tomando como eje de la segunda simetría la recta  $O_1O_2$  y el giro alrededor del punto  $O_2$ , por dos simetrías, tomando en calidad del eje de la primera simetría la recta  $O_1O_2$ . *Observación.* Si  $\alpha + \beta = 2\pi$ , entonces el empleo sucesivo de los giros dados, como es fácil cerciorarse, es equivalente a la traslación paralela. *Respuesta:* si  $\alpha + \beta < 2\pi$ , los ángulos son iguales a  $\frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{\beta}{2}$ ,  $\pi - \frac{\alpha + \beta}{2}$ , si  $\alpha + \beta > 2\pi$ , los ángulos son iguales a  $\pi - \frac{\alpha}{2}$ ,  $\pi - \frac{\beta}{2}$ ,  $\frac{\alpha + \beta}{2}$ .

II.301. Hagamos sucesivamente tres giros en un sentido alrededor de los puntos  $K$ ,  $L$  y  $M$  (o alrededor de  $K_1$ ,  $L_1$  y  $M_1$ ) a ángulos  $\alpha$ ,



$\beta$  y  $\gamma$ . Puesto que  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ , la transformación obtenida es una traslación paralela (véase el problema II.300). Pero, por cuanto uno de los vértices del triángulo de partida en este caso permanece inmóvil, deben quedarse inmóviles todos los puntos del plano.

De tal manera, el centro del tercer giro (punto  $M$ ) ha de coincidir con el centro de giro que se obtiene a consecuencia del empleo sucesivo de los dos primeros: alrededor de los puntos  $K$  y  $L$ . Ahora se puede valerse del resultado del problema II.300.

**II.302.** Designemos:  $\angle BOC = 2\alpha$ ,  $\angle DOE = 2\beta$ ,  $\angle FOA = 2\gamma$ . Sea que  $K$ ,  $M$  y  $L$  son los puntos de intersección, respectivamente, de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos  $BOC$  y  $AOF$ ,  $BOC$  y  $DOE$ ,  $AOF$  y  $DOE$ . El punto  $K$  se halla en el interior del triángulo  $AOB$ ; además,  $\angle BKO = 180^\circ - \angle BCO = 90^\circ + \alpha$ ,  $\angle AKO = 90^\circ + \gamma$  y, puesto que  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ ,  $\angle AKB = 90^\circ + \beta$ . Precisamente de la misma manera  $L$  se encuentra en el interior del triángulo  $FOE$  y  $\angle OLF = 90^\circ + \gamma$ ,  $\angle OLE = 90^\circ + \beta$ ,  $\angle FLE = 90^\circ + \alpha$ . Por lo tanto,  $|OL| = |AK|$ ,  $\angle KOL = 2\gamma + \angle KOA + \angle LOF = 2\gamma + \angle KOA + \angle KAO = 90^\circ + \gamma = \angle AKO$ ; conque, los triángulos  $KOL$  y  $AKO$  son iguales, es decir,  $|KL| = |AO| = R$ . Análogamente se demuestra que también los otros dos lados del triángulo  $KLM$  son iguales a  $R$ .

**II.303.** Designaciones:  $ABCD$  es el cuadrilátero dado;  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  son los centros de los rombos construidos sobre  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,

$DA$ , respectivamente;  $K$  y  $L$  son los puntos medios de los lados  $AB$  y  $BC$ ;  $M$  es el punto medio de la diagonal  $AC$ . Los triángulos  $O_1KM$  y  $O_2LM$  son iguales ( $|O_1K| = \frac{1}{2}|AB| = |LM|$ ,  $|KM| = \frac{1}{2}|BC| = |O_2L|$ ,  $\angle O_1KM = \angle O_2LM$ ).

Además, si  $\angle ABC + \alpha < \pi$ , estos triángulos están orientados hacia el interior del triángulo  $O_1MO_2$ , pero si  $\angle ABC + \alpha > \pi$ , estos triángulos se hallan fuera del triángulo  $O_1MO_2$  (los ángulos de los rombos con el vértice  $B$  son iguales a  $\alpha$ ). Así, pues,  $|O_1M| = |O_2M|$ ,  $\angle O_1MO_2 = \pi - \alpha$ . Precisamente del mismo modo  $|O_3M| = |O_4M|$ ,  $\angle O_3MO_4 = \pi - \alpha$ . Por consiguiente, los triángulos  $O_1MO_3$  y  $O_2MO_4$  son iguales y uno se obtiene a partir del otro girando alrededor de  $M$  al ángulo  $\pi - \alpha$ . De aquí se deduce la afirmación del problema.

**II.304.** Supongamos que  $ABC$  es el triángulo dado,  $A_1B_1C_1$  es el triángulo  $\Delta$ ,  $A_2B_2C_2$  es el triángulo  $\delta$  ( $A_1$  y  $A_2$  son los centros de los triángulos construidos sobre  $BC$ ), los lados del triángulo  $ABC$ , como de costumbre, son iguales a  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

a) El hecho de que los triángulos  $A_1B_1C_1$  y  $A_2B_2C_2$  son regulares, se deduce, por ejemplo, del resultado del problema II.301.

b) Demostremos una afirmación más general. Si sobre los lados del  $\Delta ABC$ , hacia el exterior (o hacia el interior) están construidos los triángulos semejantes  $A_1BC$ ,  $B_1CA$ ,  $C_1AB$  de modo que  $\angle A_1BC = \angle B_1CA = \angle C_1AB$ ,

$\angle A_1CB = \angle B_1AC = \angle C_1BA$ , entonces los puntos de intersección de las medianas de los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  coinciden. Notemos, al principio, que si  $M$  es el punto de intersección de las medianas del  $\triangle ABC$ , entonces  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$ , y viceversa, si se cumple esta igualdad, entonces  $M$  es el punto de intersección de las medianas del  $\triangle ABC$ .

Nos queda comprobar que  $\vec{MA}_1 + \vec{MB}_1 + \vec{MC}_1 = 0$  o bien  $(\vec{MA} + \vec{AC}_1) + (\vec{MB} + \vec{BA}_1) + (\vec{MC} + \vec{CB}_1) = 0$ . Pero  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$ . Además,  $\vec{AC}_1 + \vec{BA}_1 + \vec{CB}_1 = 0$ , puesto que cada uno de los vectores  $\vec{AC}_1, \vec{BA}_1, \vec{CB}_1$  se obtiene a partir de  $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$  girando a un mismo ángulo ( $\angle A_1BC$ ) y multiplicando por un mismo número.

c) Examinemos un caso más general. Sobre los lados del  $\triangle ABC$ , hacia fuera y hacia el interior de éste, están construidos, empleándolos como bases, los triángulos isósceles  $A_1BC, B_1CA, C_1BA$  y  $A'_1BC, B'_1CA, C'_1BA$ , en los cuales la razón entre la altura bajada sobre la base y la longitud de la base es igual a  $k$ . Sea que  $O$  es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$  y  $a, b, c$  son sus lados;  $A_0, B_0, C_0$ , respectivamente, son los puntos medios de  $BC, CA, AB$ . Supongamos, para concretar, que  $ABC$  es un triángulo acutángulo. Entonces,

$$S_{A_1OC_1} = \frac{1}{2} |A_1O| \cdot |C_1O| \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} (|OA_0| + ka)(|OC_0| + kc) \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} |OA_0| \cdot |OC_0| \times \operatorname{sen} B + \frac{1}{2} k^2 ac \operatorname{sen} B + \frac{k}{2} (a|OC_0| + c|OA_0|) \operatorname{sen} B = k^2 S_{ABC} + S_{A_0OC_0} + \frac{k}{4} b^2.$$

Después de obtener correlaciones análogas para los triángulos  $A_1OB_1$  y  $B_1OC_1$  y sumarlas, encontramos:  $S_{A_1B_1C_1} = \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} + \frac{k}{4} (a^2 + b^2 + c^2)$  (esta igualdad permanece válida, si el  $\triangle ABC$  es obtusángulo). Para el  $\triangle A'_1B'_1C'_1$  tendremos:  $S_{A'_1B'_1C'_1} = \left|\frac{k}{4} (a^2 + b^2 + c^2) - \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC}\right|$ . Por consiguiente, si  $\frac{k}{4} (a^2 + b^2 + c^2) - \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} \geq 0$ , entonces  $S_{A_1B_1C_1} - S_{A'_1B'_1C'_1} = \left(6k^2 + \frac{1}{2}\right) S_{ABC}$ , pero si  $\frac{k}{4} (a^2 + b^2 + c^2) - \left(3k^2 + \frac{1}{4}\right) S_{ABC} < 0$ , entonces  $S_{A_1B_1C_1} - S_{A'_1B'_1C'_1} = \frac{k}{2} (a^2 + b^2 + c^2)$ . Se puede demostrar que siempre  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} S_{ABC}$  (en el problema II.362 se demuestra una desigualdad más fuerte), lo que significa que, para  $k = \frac{1}{2\sqrt{3}}$  la diferencia entre las áreas de los triángulos  $A_1B_1C_1$  y  $A'_1B'_1C'_1$  es igual a  $S_{ABC}$ .

**II.305.** Supongamos que los tres puntos dados forman el triángulo  $ABC$ . Son posibles dos familias de triángulos regulares circunscri-

tos alrededor del  $\triangle ABC$ . La primera familia se obtiene del modo siguiente. Construyamos sobre los lados del triángulo unas circunferencias de manera que los arcos de estas circunferencias, dispuestos fuera del triángulo, midan un ángulo de  $4\pi/3$ . Tomemos un punto arbitrario  $A_1$  de la circunferencia construida sobre  $BC$ ; la recta  $A_1B$  corta por segunda vez la circunferencia construida sobre  $BA$  en el punto  $C_1$ , mientras que la recta  $A_1C$  cortará la circunferencia construida sobre  $CA$  en el punto  $B_1$ . El triángulo  $A_1B_1C_1$  es uno de los triángulos de la primera familia. Designemos por  $E$ ,  $F$  y  $G$  los puntos de intersección de las bisectrices del  $\triangle A_1B_1C_1$  con las circunferencias construidas sobre los lados del triángulo dado. Los puntos  $E$ ,  $F$  y  $G$  son fijos ( $E$  es el punto medio del arco de la circunferencia construido sobre  $BC$  y dispuesto al mismo lado de  $BC$  que el  $\triangle ABC$ ). Los puntos  $E$ ,  $F$  y  $G$  son los centros de los triángulos regulares construidos sobre los lados del  $\triangle ABC$ , en su interior. El triángulo  $EFG$  es regular (véase el problema II.304), su centro coincide con el punto de intersección de las medianas del triángulo  $ABC$ . El centro del  $\triangle A_1B_1C_1$  se halla en la circunferencia circunscrita alrededor del  $EFG$ , el cuadrado del radio de esta circunferencia es igual (véase la solución del problema II.304) a  $\frac{1}{9} \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3} \right)$ , donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son los lados,  $S$  es el área del  $\triangle ABC$ .

La segunda familia de triángulos regulares circunscritos alrededor del  $\triangle ABC$  se obtiene construyendo sobre los lados del  $\triangle ABC$

unas circunferencias, cuyos arcos dispuestos fuera del  $\triangle ABC$  son iguales a  $2\pi/3$ .

El lugar geométrico de puntos buscado consta de dos circunferencias concéntricas, cuyos centros coinciden con el punto de intersección de las medianas del  $\triangle ABC$ , mientras que los radios son iguales a  $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \pm 2S\sqrt{3}}$ .

II.306. Demostremos que los triángulos  $CB_1A_2$  y  $CA_1B_2$  se obtienen uno del otro girando alrededor del punto  $C$  a un ángulo de  $90^\circ$ . En efecto,  $\triangle CAA_1 = \triangle CBB_1$  ( $|BB_1| = |AC|$ ,  $|BC| = |AA_1|$ ,  $\angle CBB_1 = \angle CAA_1$ ) y, puesto que  $AA_1 \perp BC$  y  $BB_1 \perp AC$ , entonces  $B_1C \perp A_1C$ . De la misma manera  $A_2C$  y  $B_2C$  son iguales y mutuamente perpendiculares.

II.307. Demuéstrese que las tangentes a la circunferencia, trazadas a partir de los vértices, entre los cuales se encuentra un vértice del polígono, son iguales. De aquí se deduce que para el polígono con número impar de lados los puntos de tangencia son los puntos medios de sus lados.

II.308. Notemos que, si se examina el sistema de vectores que tienen su origen en el centro del polígono regular de  $n$  lados, y los extremos, en sus vértices, la suma de estos vectores es igual a cero. En efecto, si todos estos vectores giran a un ángulo de  $2\pi/n$ , su suma no variará y, por otra parte, el vector igual a su suma girará al mismo ángulo. Por lo tanto, también la suma de las proyecciones de estos vectores sobre cualquier eje es igual a cero.

Regresemos al comienzo del problema. Si  $\varphi$  es el ángulo entre la recta dada (designémosla por  $l$ ) y uno de los vectores, los demás vectores forman los ángulos  $\varphi + \frac{2\pi}{n}$ ,  $\varphi + 2\frac{2\pi}{n}$ , . . . . .  $\varphi + (n-1)\frac{2\pi}{n}$ . El cuadrado de la distancia desde  $k$ -ésimo vértice hasta  $l$  es igual a  $\text{sen}^2\left(\varphi + k\frac{2\pi}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(2\varphi + k\frac{4\pi}{n}\right)\right)$ . Pero las magnitudes  $\cos\left(2\varphi + k\frac{4\pi}{n}\right)$  pueden considerarse como proyecciones sobre  $l$  de un sistema de  $n$  vectores que forman con  $l$  los ángulos  $2\varphi + k\frac{4\pi}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ). Siendo  $n$  impar, estos vectores forman un polígono regular de  $n$  lados; siendo  $n$  par, será un polígono dos veces repetido de  $\frac{n}{2}$  lados. *Respuesta:*  $\frac{n}{2}$ .

**II.309.** a) Si un lado del polígono es igual a  $a$ ,  $S$  es su área,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las distancias a partir de cierto punto en su interior hasta los lados, la afirmación del problema se deduce de la igualdad  $S = (ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n)/2$ .

b) Examinemos un polígono regular que contiene el polígono dado en su interior, cuyos lados son paralelos a los lados del dado. La suma de las distancias a partir de un punto arbitrario en el interior del polígono dado hasta los lados del regular es constante (punto a) y se diferencia de la suma de las distancias

hasta los lados del dado en una magnitud constante.

**II.310.** Designemos por  $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$  los puntos simétricos a  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  respecto al diámetro  $A_0A_{2n+1}$ ,  $C_k$  y  $C'_k$  son los puntos de intersección de la recta  $A_kA_{2n+1-k}$  con  $OA_n$  y  $OA_{n+1}$ . Sean  $D_{k-1}$  y  $D_k$  los puntos de intersección de las rectas  $A_kB_{k-1}$  y  $A_kB_{k+1}$  con el diámetro. Es evidente que estos mismos puntos son los puntos de intersección de las rectas  $B_kA_{k-1}$  y  $B_kA_{k+1}$  con el diámetro. Está claro que  $\triangle D_{k-1}A_kD_k = \triangle C_kOC'_k$ . De este modo, la suma de segmentos  $C_kC'_k$  es igual a la suma de segmentos  $D_{k-1}D_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ),  $D_0 = A_0$ ,  $D_n = O$ , es decir, es igual al radio.

**II.311.** Supongamos que  $A$  (fig. 56) es el punto dado,  $A_k$  es cierto vértice del polígono

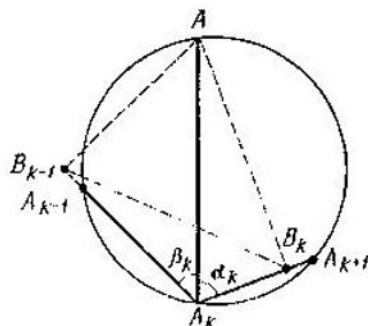


Fig. 56

de  $2n$  lados,  $B_{k-1}$  y  $B_k$  son los pies de las perpendiculares bajadas desde  $A$  sobre los lados que comprenden  $A_{k-1}$ ,  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  son los ángulos



formados por la recta  $AA_k$  con estos lados ( $\beta_k = \angle AA_k B_{k-1}$ ,  $\alpha_k = \angle AA_k B_k$ ). Puesto que alrededor del cuadrilátero  $AB_{k-1}A_k B_k$  puede circunscribirse una circunferencia, entonces  $\angle AB_{k-1} B_k = \alpha_k$ ,  $\angle AB_k B_{k-1} = \beta_k$  (o completan estos ángulos hasta  $180^\circ$ ); de esta manera, según el teorema de los senos,

$$\frac{|AB_{k-1}|}{|AB_k|} = \frac{\text{sen } \beta_k}{\text{sen } \alpha_k}, \quad \frac{|AB_{k-1}| |AB_{k+1}|}{|AB_k|^2} = \frac{\text{sen } \beta_k \text{ sen } \alpha_{k+1}}{\text{sen } \alpha_k \text{ sen } \beta_{k+1}}.$$

Multiplicando estas igualdades para  $k = 2, 4, \dots, 2n$  y sustituyendo el índice  $2n + 1$  por 1, obtenemos el resultado necesario.

**II.312.** Demuéstrese que, si  $O_k$  y  $O_{k+1}$  son los centros de las circunferencias que son tangentes a la circunferencia dada en los puntos  $A_k$  y  $A_{k+1}$ ,  $B$  es el punto de su intersección que se halla en la cuerda  $A_k A_{k+1}$ ;  $r_k, r_{k+1}$  son sus radios, entonces  $r_k + r_{k+1} = r$ ,  $\angle A_k O_k B = \angle A_{k+1} O_{k+1} B = \angle A_k O A_{k+1}$  ( $r$  es el radio de la circunferencia dada,  $O$  es su centro). De aquí se deduce que los radios son iguales, uno sí y otro no, lo que, para  $n$  impar conducirá a que todos ellos serán iguales a  $r/2$ . Además,  $\cup A_k B + \cup B A_{k+1} = \cup A_k A_{k+1}$  (se toman los arcos menores de las circunferencias correspondientes).

**II.313.** a) Sea  $A$  un punto arbitrario de la circunferencia ( $A$  se halla en el arco  $A_1 A_{2n+1}$ ). Designemos un lado del polígono por  $a$  y la longitud de la diagonal que une los vértices, por  $b$  contando uno sí y otro no. Según el teorema de Tolomeo (problema II.237) para el cuadrilátero  $AA_k A_{k+1} A_{k+2}$  tenemos:  $|AA_k| \times$

$\times a + |AA_{n+2}|a = |AA_{k+1}|b$  ( $k = 1, 2, \dots, 2n - 1$ ). Correlaciones análogas pueden escribirse para los cuadriláteros  $A_{2n}A_{2n+1}AA_1$  y  $A_{2n+1}AA_1A_2$ :

$$|AA_1|a + |AA_{2n+1}|b = |AA_{2n}|a,$$

$$|AA_{2n+1}|a + |AA_1|b = |AA_2|a.$$

Sumando todas estas igualdades y dejando los vértices con números pares a la derecha y con los impares a la izquierda, obtenemos la afirmación requerida.

b) Nuestra afirmación se deduce del punto a) y del resultado del problema I.206. (Fórmula análoga puede obtenerse en el caso de la tangencia interior.)

II.314. a) Sea que  $l$  corta  $AC$  y  $BC$  en los puntos  $K$  y  $N$ , respectivamente, y es tangente

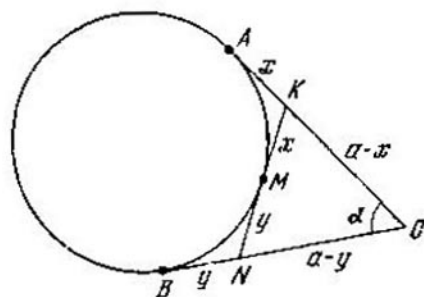


Fig. 57

a la circunferencia en el punto  $M$  (fig. 57). Designamos:  $|AC| = |BC| = a$ ,  $|AK| = |KM| = x$ ,  $|BN| = |NM| = y$ . Es evidente que  $\frac{w^2}{uv} = \frac{(a-x)(a-y)}{xy}$ , pero según

el teorema de los cosenos, para el  $\triangle CKN$  es válida la igualdad  $(x + y)^2 = (a - x)^2 + (a - y)^2 - 2(a - x)(a - y) \cos \alpha \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{xy}{(a-x)(a-y)}$ . De esta manera,  $\frac{uv}{w^2} = \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$ . (De manera análoga se examinan otros casos de disposición de la recta  $l$ .)

b) Aprovechemos el resultado del punto a). Multiplicando las igualdades correspondientes para todos los ángulos del polígono de  $n$  lados, obtenemos el cuadrado de la razón buscada y la misma razón resultará igual a  $1 / \left( \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2} \dots \operatorname{sen} \frac{\alpha_n}{2} \right)$ , donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son los ángulos del polígono.

c) Hagamos uso del resultado del punto a). Designando los puntos de tangencia de los lados  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2n-1}A_{2n}, A_{2n}A_1$  con la circunferencia por  $B_1, B_2, \dots, B_{2n-1}, B_{2n}$ , respectivamente, y por  $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$ , las distancias desde  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ , respectivamente, hasta  $l$ , por  $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ , las distancias desde  $B_1, B_2, \dots, B_{2n}$ , respectivamente, hasta  $l$  obtenemos:

$$\frac{x_1^2}{y_{2n}y_1} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_1}{2}}, \quad \frac{x_2^2}{y_1y_2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_2}{2}}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \frac{x_{2n}^2}{y_{2n-1}y_{2n}} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_{2n}}{2}}, \quad \text{donde } \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

$\dots, \alpha_{2n}$  son los ángulos del polígono. Multiplicando las igualdades que contienen  $x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$  y dividiéndolas por el producto

de las demás igualdades, obtenemos:

$$\left( \frac{x_1 x_3 \dots x_{2n-1}}{x_2 x_4 \dots x_{2n}} \right)^2 =$$

$$= \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha_4}{2} \dots \operatorname{sen} \frac{\alpha_{2n}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha_3}{2} \dots \operatorname{sen} \frac{\alpha_{2n-1}}{2}} \right)^2.$$

II.315. La afirmación del problema puede demostrarse por la inducción. El comienzo de la inducción,  $n = 4$ , se ha analizado en el problema II.235.

Sin embargo, puede proponerse otro camino, basado sobre la igualdad siguiente. Supongamos que en el triángulo  $ABC$  el ángulo máximo es  $A$ ;  $r$  y  $R$ , respectivamente, son los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita;  $d_a, d_b, d_c$  son las distancias a partir del centro de la circunferencia circunscrita hasta los lados correspondientes del triángulo. Entonces

$$r + R = d_a + d_b + d_c \quad (1)$$

para el triángulo acutángulo y

$$r + R = -d_a + d_b + d_c \quad (2)$$

para el triángulo obtusángulo (para el triángulo rectángulo  $d_a = 0$  y para éste es válida cualquiera de las correlaciones aducidas).

*Demostración.* Supongamos que  $ABC$  es un triángulo acutángulo;  $A_0, B_0, C_0$  son, respectivamente, los puntos medios de los lados  $BC, CA, AB$ ;  $O$  es el centro de la circunferencia circunscrita. Según el teorema de Tolomeo (problema II.237) para el cuadrilátero  $AB_0OC_0$

tenemos:  $\frac{b}{2} d_c + \frac{c}{2} d_b = \frac{a}{2} R$ . Después de escribir otras dos relaciones semejantes para los cuadriláteros  $BC_0OA_0$  y  $CB_0OA_0$  y al sumarlas, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) d_c + \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right) d_b + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) d_a = \\ = \frac{1}{2} (a + b + c) R = pR, \end{aligned}$$

de donde  $p(d_a + d_b + d_c) - \frac{1}{2}(cd_c + bd_b + ad_a) = pR$ . Puesto que  $\frac{1}{2}(cd_c + bd_b + ad_a) = S = pr$ , después de reducir por  $p$  obtenemos la igualdad (1). De manera análoga se examina el caso de  $\angle A > 90^\circ$ .

De las correlaciones (1), (2) se deduce la afirmación del problema. Para esto escribamos las igualdades correspondientes para todos los triángulos de la partición. Notemos que cada diagonal sirve de lado para dos triángulos. Por consiguiente, en las correlaciones que corresponden a estos triángulos, la distancia hasta la diagonal elegida tendrá signos opuestos. Por consiguiente, si sumamos todas estas igualdades, obtenemos, a condición de que el centro de la circunferencia se halle en el interior del polígono,  $\sum r + R = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ , donde  $d_1, d_2, \dots, d_n$  son las distancias a partir del centro de la circunferencia hasta los lados del polígono. Pero si el centro de la circunferencia se sitúa fuera del polígono, la distancia hasta el lado máximo debe tomarse con el signo menos.

II.316. Examinemos, para concretar, el caso, en que el punto  $M$  se halla en el interior del polígono. Designemos por  $u$  y  $v$  las distancias desde  $M$  hasta  $A_1A_2$  y  $A_1A_n$ , respectivamente, y por  $x$  e  $y$ , correspondientemente, las proyecciones de  $A_1M$  sobre  $A_1A_2$  y  $A_1A_n$  (las magnitudes  $x$  e  $y$  deben considerarse positivas, si estas proyecciones se hallan en los rayos  $A_1A_2$  y  $A_1A_n$ , y negativas en el caso contrario),  $|A_1B_1| = |A_1B_n| = a$ ,  $\angle A_2A_1A_n = \alpha$ . Es posible expresar  $u$  y  $v$  a

través de  $x$  e  $y$ :  $u = \frac{y}{\operatorname{sen} \alpha} - x \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$ ,  $v = \frac{x}{\operatorname{sen} \alpha} - y \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$ ; de aquí  $u + v = (x + y) \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = (x + y) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (x + y) \frac{r}{a}$ . Ahora tenemos:

$$\begin{aligned} (|MB_1|^2 + |MB_n|^2) a &= ((x - a)^2 + u^2 + (y - a)^2 + v^2) a = ((x - a)^2 + (u - r)^2 + (y - a)^2 + (v - r)^2 + 2r(u + v) - 2r^2) a = 2d^2a + 2ra(u + v) - 2r^2a = 2d^2a + 2r^2(x + y) - 2r^2a. \end{aligned}$$

Después de escribir igualdades análogas para cada vértice y de sumarlas, obtenemos la afirmación del problema.

II.317. Examinemos tres triángulos:  $ABC$ ,  $ACD$  y  $ADB$  que tienen el vértice común  $A$ . Designemos por  $B_1$ ,  $C_1$  y  $D_1$  las proyecciones de  $M$  sobre  $AB$ ,  $AC$  y  $AD$ , respectivamente. Las rectas  $B_1C_1$ ,  $C_1D_1$  y  $D_1B_1$  son las rectas de Simson del punto  $M$  respecto a los triángulos  $ABC$ ,  $ACD$  y  $ADB$ . Pero los puntos  $A$ ,  $M$ ,

tenemos:  $\frac{b}{2} d_c + \frac{c}{2} d_b = \frac{a}{2} R$ . Después de escribir otras dos relaciones semejantes para los cuadriláteros  $BC_0OA_0$  y  $CB_0OA_0$  y al sumarlas, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) d_c + \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right) d_b + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) d_a = \\ = \frac{1}{2} (a + b + c) R = pR, \end{aligned}$$

de donde  $p(d_a + d_b + d_c) - \frac{1}{2}(cd_c + bd_b + ad_a) = pR$ . Puesto que  $\frac{1}{2}(cd_c + bd_b + ad_a) = S = pr$ , después de reducir por  $p$  obtenemos la igualdad (1). De manera análoga se examina el caso de  $\angle A > 90^\circ$ .

De las correlaciones (1), (2) se deduce la afirmación del problema. Para esto escribamos las igualdades correspondientes para todos los triángulos de la partición. Notemos que cada diagonal sirve de lado para dos triángulos. Por consiguiente, en las correlaciones que corresponden a estos triángulos, la distancia hasta la diagonal elegida tendrá signos opuestos. Por consiguiente, si sumamos todas estas igualdades, obtenemos, a condición de que el centro de la circunferencia se halle en el interior del polígono,  $\sum r + R = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ , donde  $d_1, d_2, \dots, d_n$  son las distancias a partir del centro de la circunferencia hasta los lados del polígono. Pero si el centro de la circunferencia se sitúa fuera del polígono, la distancia hasta el lado máximo debe tomarse con el signo menos.





$$= \frac{|A_2C_2|}{|B_2D_2|} = \frac{|A_2C_1|}{|B_2D_1|}$$
, es decir,  $L$  y  $L'$  coinciden. *Observación.* De los razonamientos se deduce que en el caso examinado los puntos de tangencia de  $\gamma$  con las rectas  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ , se hallan en el interior de los segmentos  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ .

**II.319.** En las designaciones del problema anterior la afirmación se reduce a lo siguiente: si  $A_{n+1}$  coincide con  $A_1$ , entonces  $B_{n+1}$  coincide con  $B_1$ . Supongamos que esto no es así. Entonces  $A_1B_1$  y  $A_1B_{n+1}$  son tangentes a la circunferencia  $\gamma$ ,  $A_1A_2$  corta  $\gamma$ ,  $B_1$  y  $B_{n+1}$  se hallan en el arco  $A_1A_2$  que corresponde al segmento, el cual no contiene  $\beta$ . Los puntos de tangencia de  $A_1B_1$  y  $A_1B_{n+1}$  a  $\gamma$  se encuentran en el interior de los segmentos  $A_1B_1$  y  $A_1B_{n+1}$ . Resulta que a partir de  $A_1$  hacia  $\gamma$  están trazadas dos tangentes; además, sus puntos de tangencia a  $\gamma$  se disponen a un lado de la secante  $A_1A_2$ . Esto no puede ser.

**II.320.** Examinemos el  $\triangle B_0XC_0$ . La recta  $XR$  es la bisectriz del ángulo  $C_0XB_0$ . Es fácil comprobar que  $\angle C_0RB_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \angle C_0XB_0$ . De aquí se deduce que  $C_0R$  y  $B_0R$  son las bisectrices de los ángulos  $XC_0B_0$  y  $XB_0C_0$  (véase el problema I.46). Precisamente del mismo modo en los triángulos  $C_0YA_0$  y  $A_0ZB_0$  los puntos  $P$  y  $Q$  son los puntos de intersección de las bisectrices. De aquí, tomando en consideración que  $\angle PA_0Q = \angle A/3$ ,  $\angle QB_0R = \angle B/3$ ,  $\angle RC_0P = \angle C/3$ , obtenemos la afirmación, de la cual se deduce el teorema de Morley.

II.321. Al solucionar el problema, apliquemos las siguientes afirmaciones que se demuestran fácilmente.

a) Si en la bisectriz del ángulo interior  $M$  del triángulo  $KLM$ , en su interior se toma un punto  $N$  de manera que  $\angle KNL = \frac{1}{2} \times (\pi + \angle KML)$ , entonces  $N$  es el punto de intersección de las bisectrices del  $\triangle KLM$  (véase el problema I.46).

b) Si en el interior del ángulo  $KML$ , fuera del  $\triangle KLM$ , en la prolongación de la bisectriz del ángulo interior  $M$  se toma el punto  $N$  de tal manera que  $\angle KNL = \frac{1}{2} (\pi - \angle KML)$ , entonces  $N$  es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo  $M$  y de las bisectrices de los ángulos exteriores  $K$  y  $L$ .

c) Si en la bisectriz del ángulo exterior  $K$  del triángulo  $KML$ , en el interior del ángulo  $KML$  se toma el punto  $N$  de manera que  $\angle MNL = \frac{1}{2} \angle MKL$ , entonces  $N$  es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo  $M$  y de las bisectrices de los ángulos exteriores  $K$  y  $L$ .

La demostración de nuestra afirmación para todos los valores posibles de  $i, j, k$  (resulta que hay siete casos de éstos, con la precisión de hasta la permutación de los índices  $i, j, k$ ) hagámosla según un esquema, enunciando y demostrando cada vez la afirmación inversa correspondiente, equivalente al caso examinado del teorema de Morley. Un ejemplo de razonamiento según semejante esquema lo da el

problema anterior. Para no repetir, primero separemos la parte general de los razonamientos. Examinemos el triángulo regular  $PQR$ . En sus lados, usándolos como bases, están contruidos los triángulos isósceles  $PXQ$ ,  $QYR$ ,  $RZP$  (indicaremos más adelante de qué manera y qué triángulos están contruidos). Designemos por  $A_0$  el punto de intersección de las rectas  $ZP$  e  $YQ$ ; por  $B_0$ , el punto de intersección de las rectas  $XQ$  y  $ZR$ ; por  $C_0$ , el de las rectas  $YR$  y  $XP$ . Entonces, para cada caso demostremos que el triángulo  $A_0B_0C_0$  es semejante al triángulo  $ABC$  y los rayos  $A_0P$  y  $A_0Q$ ,  $B_0Q$  y  $B_0R$ ,  $C_0R$  y  $C_0P$  son para éste las trisectrices de género correspondiente.

Indiquemos ahora cómo y qué triángulos deben construirse en los lados del triángulo  $PQR$  en cada caso.

1)  $i = j = k = 1$ ;  $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle A)$ ,  
 $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle B)$ ,  $\angle RZP = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle C)$ . Todos los triángulos están dispuestos por la parte exterior respecto al  $\triangle PQR$ .

2)  $i = 1$ ,  $j = k = 2$ ;  $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle A)$ ,  
 $\angle QYR = \pi - \frac{2\angle B}{3}$ ,  $\angle RZP = \pi - \frac{2\angle C}{3}$ .  
 Todos los triángulos están dispuestos en el exterior respecto al  $\triangle PQR$ . (Supongamos que  $\angle A < \pi/2$ . Pero si  $\angle A > \pi/2$ , entonces el  $\triangle PXQ$  pasa al otro lado del  $\triangle PQR$ ,

$\angle PXQ = \frac{1}{3} (2 \angle A - \pi)$ . Si  $\angle A = \pi/2$ , entonces el  $\triangle PXQ$  se transformará en un par de rectas paralelas. En lo ulterior hace falta tener en cuenta esta observación.)

3)  $i = j = 1, k = 3$ ;  $\angle PXQ = \frac{1}{3} (\pi - 2 \angle A)$ ,  
 $\angle QYR = \frac{1}{3} (\pi - 2 \angle B)$ ,  $\angle RZP = \frac{1}{3} (\pi + 2 \angle C)$ . Los triángulos  $PXQ$  y  $QYR$  están dispuestos en el exterior respecto al  $\triangle PQR$ , y el  $\triangle RZP$ , en el interior (véase la observación del punto 2).

4)  $i = j = k = 2$ ;  $\angle PXQ = \frac{1}{3} (\pi - 2 \angle A)$ ,  
 $\angle QYR = \frac{1}{3} (\pi - 2 \angle B)$ ,  $\angle RZP = \frac{1}{3} (\pi - 2 \angle C)$ . Todos los triángulos están dispuestos por el mismo lado de los lados correspondientes del  $\triangle PQR$  que el propio  $\triangle PQR$  (véase la observación del punto 2).

5)  $i = 1, j = 2, k = 3$ ;  $\angle PXQ = \frac{1}{3} (\pi + 2 \angle A)$ ,  
 $\angle QYR = \frac{1}{3} (\pi - 2 \angle B)$ ,  $\angle RZP = \pi - \frac{2 \angle C}{3}$ . El triángulo  $PXQ$  está construido hacia el exterior respecto al  $\triangle PQR$ , mientras que los otros dos, hacia el interior (véase la observación del punto 2).

6)  $i = 2, j = k = 3$ ;  $\angle PXQ = \pi - \frac{2 \angle A}{3}$ ,  
 $\angle QYR = \frac{1}{3} (\pi + 2 \angle B)$ ,  $\angle RZP = \frac{1}{3} (\pi + 2 \angle C)$ . El triángulo  $PXQ$  está dispuesto hacia el exterior, mientras que los otros dos, hacia el interior respecto al  $\triangle PQR$ .

$$7) \quad i = j = k = 3; \quad \angle PXQ = \pi - \frac{2\angle A}{3}, \\ \angle QYR = \pi - \frac{2\angle B}{3}, \quad \angle RZP = \pi - \frac{2\angle C}{3}.$$

Todos los triángulos están dispuestos en el interior del  $\triangle PQR$ .

El punto 1 está demostrado en el problema II.320.

A título de ejemplo demostremos el punto 2.

Sea que  $\angle A < \pi/2$ . Examinemos el triángulo  $B_0XC_0$ , en el cual  $XR$  es la bisectriz del ángulo  $B_0XC_0$ . Además,  $\angle B_0RC_0 = \frac{1}{2}(\pi + \angle B_0XC_0)$ . En correspondencia con la afirmación a),  $R$  es el punto de intersección de las bisectrices de este triángulo (si  $A > \pi/2$ , entonces  $B_0R$  y  $C_0R$  son las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo  $B_0XC_0$ ). A continuación, en  $C_0YA_0$  tenemos:  $YP$  es la bisectriz del ángulo exterior  $Y$ ,  $\angle A_0PC_0 = \frac{1}{2}\angle AYC_0$  (es fácil comprobarlo). En correspondencia con la afirmación c),  $P$  es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo  $C_0A_0Y$  y de las bisectrices de los ángulos exteriores  $A_0C_0Y$  y  $C_0YA_0$  del triángulo  $C_0YA_0$ . Precisamente del mismo modo el punto  $Q$  respecto al  $\triangle A_0ZB_0$  es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo  $ZA_0B_0$  y de las bisectrices de los ángulos exteriores  $A_0ZB_0$  y  $A_0B_0Z$ . (De esto se deduce que el triángulo  $PQR$  respecto al triángulo  $A_0B_0C_0$  está formado al intersecarse las trisectrices de primer género del ángulo  $A_0$  con las trisectrices de

segundo género de los ángulos  $B_0$  y  $C_0$  (se tiene en cuenta el punto 2.) Pero el mismo  $\Delta A_0B_0C_0$  es semejante al  $\Delta ABC$ .

En todos los demás puntos 3—7, los razonamientos son análogos y varían sólo las afirmaciones empleadas a), b), c).

Al cambiar de lugares los índices  $i, j, k$ , notemos que al punto 5 le corresponden seis triángulos regulares; a los puntos 2, 3, 6, tres triángulos regulares a cada uno; a los puntos 1, 4 y 7, sendos triángulos regulares. De tal manera, en total obtenemos diez y ocho triángulos regulares.

Ahora elijamos en cada caso las dimensiones del  $\Delta PQR$  de manera que el  $\Delta A_0B_0C_0$  correspondiente sea igual al  $\Delta ABC$ . Sobrepongamos los diez y ocho dibujos obtenidos uno sobre otro de modo que coincidan los triángulos  $ABC$ . Escojamos el siguiente orden de superposición: primero tomemos el dibujo que corresponde al punto 1, luego, tres dibujos que corresponden al punto 3, después, seis dibujos del punto 5 y tres dibujos del punto 2 y, por fin, tres dibujos del punto 6 y sendos dibujos de los puntos 4 y 7. En cada una de las superposiciones sucesivas, por lo menos uno de los vértices del triángulo regular correspondiente ha de coincidir con uno de los vértices de los triángulos regulares ya existentes. El cálculo de los ángulos muestra que cinco vértices de dos triángulos regulares que tienen un vértice común, se hallan en dos rectas que pasan por este vértice común. De esta manera, los vértices de todos los diez y ocho triángulos regulares «deben» situarse como está mos-

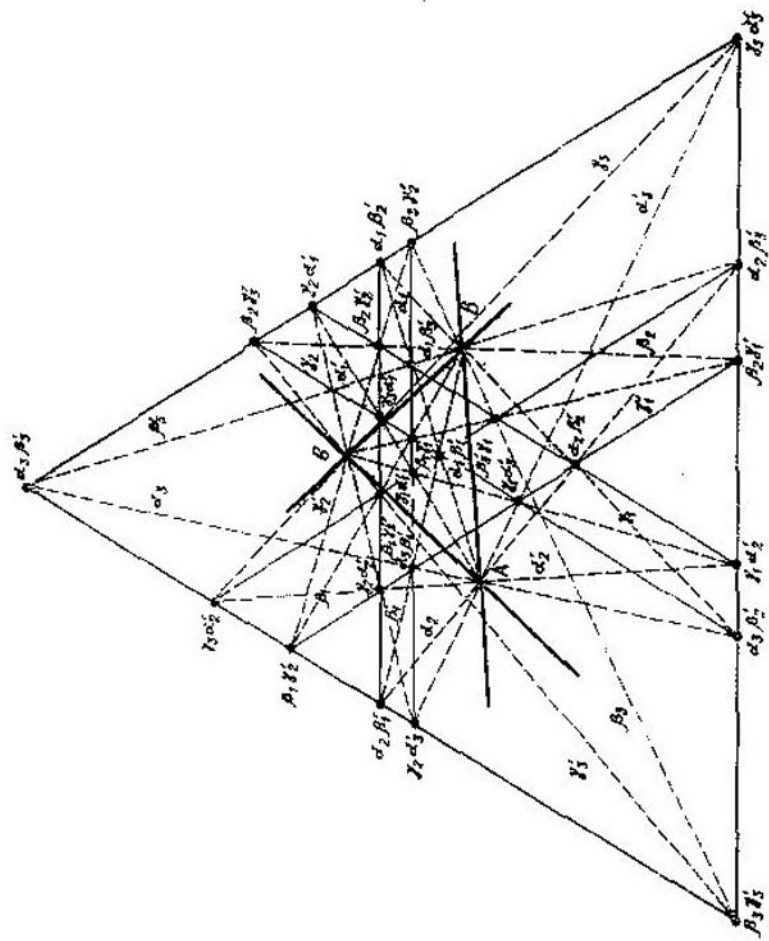


Fig. 59

trado en la fig. 59. (En este dibujo por  $\alpha_1\beta'_1$ , etc. se designa el punto de intersección de las trisectrices  $\alpha_1$  y  $\beta'_1$ .)

II.322. Para el triángulo regular con el lado 1 el radio de cada una de las circunferencias de Malfatti es igual a  $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ . La suma de las áreas de los círculos correspondientes es  $\frac{3\pi(2-\sqrt{3})}{8}$ . Pero la suma de las áreas de los círculos, uno de los cuales está inscrito en este triángulo, mientras que otros dos son tangentes a éste y a dos lados del triángulo cada uno, es igual a  $\frac{11\pi}{108} > \frac{3\pi(2-\sqrt{3})}{8}$ .

II.323. Hágase uso de la igualdad  $Rr = \frac{abc}{4p}$  y de la desigualdad  $2p = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$  (teorema del valor medio del cálculo diferencial).

II.324. Si  $p_1$  es el semiperímetro del triángulo con vértices en las bases de alturas del dado;  $p$ ,  $S$ ,  $r$  y  $R$  son, respectivamente, el semiperímetro, el área, el radio de la circunferencia inscrita y el radio de la circunferencia circunscrita, entonces  $S = pr$  y, además,  $S = p_1R$  (esto último se deduce del hecho de que el radio de la circunferencia circunscrita, el cual se dirige hacia el vértice del triángulo, es perpendicular al segmento que une las bases de las alturas bajadas sobre los lados que parten de este vértice). Por consiguiente,  $p_1 = p \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2} p$ .

II.325. Si  $m_a$  es la mayor de las medianas,



al sustituir en la correlación  $m_a^2 > m_b^2 + m_c^2$  que se deduce del planteamiento, las medianas por los lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  del triángulo (problema I.11), obtenemos que  $5a^2 < b^2 + c^2$ , de donde

$$\cos A > \frac{2(b^2 + c^2)}{5bc} = \frac{2}{5} \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**II.326.** Sea  $O$  el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero  $ABCD$ . Supongamos que todos los ángulos indicados en la condición, son superiores a  $\pi/4$ . Entonces, en los segmentos  $OB$  y  $OC$  se puede tomar los puntos  $B_1$  y  $C_1$ , respectivamente, de tal manera que  $\angle B_1AO = \angle OB_1C_1 = \pi/4$ . Sea que  $\angle BOA = \alpha > \pi/4$ .

$$\begin{aligned} \text{Tenemos: } |OC| > |OC_1| &= \frac{|OB_1|}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \\ &= \frac{|OA|}{2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{|OA|}{\cos 2\alpha} \geq \end{aligned}$$

$\geq |OA|$ . De la misma manera demostramos la desigualdad  $|OA| > |OC|$ . He aquí una contradicción.

**II.327.** Supongamos que en el  $\triangle ABC$  los lados están ligados mediante la relación  $c \leq b \leq a$ . Tomemos en  $CB$  el punto  $M$  de tal manera que  $\angle CAM = \frac{1}{2} \angle C$ . Hay que demostrar que  $|CM| \leq \frac{a}{2}$ . Según el teorema de los senos, para el  $\triangle CAM$  tenemos:  $|CM| =$

$$= \frac{b \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{3C}{2}} = \frac{b}{2 \cos C + 1} = \frac{ab^2}{a^2 + ab + b^2 - c^2} \leq \frac{a}{2}.$$

II.328. Supongamos que  $D$  es el punto medio de  $AC$ . Levantemos en  $D$  la perpendicular hacia  $AC$  y designemos por  $M$  su punto de intersección con  $BC$ ;  $\triangle AMC$  es isósceles, por lo tanto,  $\angle MAC = \angle BCA$ . Según la condición, el  $\triangle ABD$  también es isósceles,  $\angle ABD = \angle BDA$ ,  $\angle ABM > 90^\circ$  (según la condición),  $\angle ADM = 90^\circ$ ; por consiguiente,  $\angle MBD > \angle MDB$  y  $|MD| > |BM|$ . De aquí se deduce que  $\angle MAD > \angle MAB$  (si representamos simétricamente  $B$  respecto a la recta  $AM$ , obtenemos el punto  $B_1$  en el interior del ángulo  $MAD$ , puesto que  $MD \perp AD$  y  $|MD| > |MB| = |MB_1|$ ; de tal modo,  $\angle C > \angle A - \angle C$ ,  $\angle C > \frac{1}{2} \angle A$ .

II.329. Si la circunferencia es tangente a las prolongaciones de los lados  $AB$  y  $AC$  del triángulo  $ABC$  y su centro es  $O$ , es fácil encontrar que  $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$ . De esta manera,  $\angle BOC + \angle A = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A \neq 180^\circ$ .

II.330. Supongamos que  $AD$  es la altura,  $AL$ , la bisectriz y  $AM$ , la mediana. Prolonguemos la bisectriz hasta que se interseque en el punto  $A_1$  con la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo. Puesto que  $MA_1 \parallel AD$ , entonces  $\angle MA_1A = \angle LAD$ . Respuesta: si  $\angle A < 90^\circ$ , el ángulo entre la mediana y la bisectriz es menor que el ángulo entre la bisectriz y la altura. Si  $\angle A > 90^\circ$ , entonces, al revés; si  $\angle A = 90^\circ$ , los ángulos son iguales.

II.331. Si  $AD$  es la altura,  $AN$  es la me-

diana,  $M$  es el punto de intersección de las medianas, entonces  $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{|DB|}{|AD|} + \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|AD|} \geq \frac{|CB|}{|AN|} = \frac{|CB|}{3|MN|} = \frac{2}{3}$ .

II.332. Del hecho de que  $S_{BAM} = S_{BCM}$  y  $|BC| > |BA|$ ,  $|CM| > |MA|$  se deduce que  $\operatorname{sen} \angle BAM > \operatorname{sen} \angle BCM$ . Por lo tanto, si los ángulos son agudos, entonces  $\angle BAM > \angle BCM$ ; sólo el ángulo  $BAM$  puede ser obtuso. De esta manera, siempre  $\angle BAM > \angle BCM$ .

II.333. Si  $|OA| = a$ ,  $R$  es el radio de la circunferencia,  $K$  es el punto de intersección de  $OA$  y  $DE$ , es fácil encontrar que  $|OK| = a - \frac{a^2 - R^2}{2a} = \frac{a^2 + R^2}{2a} > R$ .

II.334. Las designaciones se dan en la fig. 60. En el primer caso (fig. 60, a)  $|AB| <$

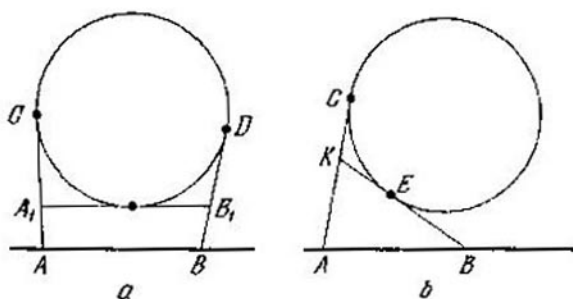


Fig. 60

$< |AA_1| + |A_1B_1| + |B_1B| = |AA_1| + |A_1C| + |B_1D| + |BB_1| = |AC| + |BD|$ . En el segundo caso (fig. 60, b)  $|AB| > |BK| - |AK| > |BE| -$

—  $|AC|$ . La afirmación inversa se demuestra fácilmente por reducción al absurdo.

II.335. Sean  $K$ ,  $L$  y  $M$  los puntos de intersección de las rectas trazadas con  $AC$ . Designemos:  $|AC| = b$ ,  $|BC| = a$ ,  $|AB| = c$ ,  $|BL| = l$ . Según el teorema de la bisectriz del ángulo interior encontramos:

$|LC| = \frac{ab}{a+c}$ ; empleando una vez más este

teorema para el  $\triangle BCL$ , hallamos:  $|LM| = \frac{ba}{a+c} \cdot \frac{l}{l+a} = \frac{ba}{a+c} \left(1 - \frac{a}{a+l}\right)$ ; pero

$\angle BLA = \frac{1}{2}\angle B + \angle C = \frac{\pi - \angle A + \angle C}{2} > \angle A$

(puesto que  $\angle C > 3\angle A - \pi$ ). Por lo tanto,

$c > l$  y  $|LM| < \frac{ba}{a+c} \left(1 - \frac{a}{a+c}\right) =$

$= b \frac{ac}{(a+c)^2} \leq \frac{b}{4}$ .

II.336. Supongamos que  $ABCD$  es el cuadrilátero dado. Examinemos el cuadrilátero  $AB_1CD$ , donde  $B_1$  es simétrico a  $B$  respecto a la mediatriz dirigida hacia la diagonal  $AC$ . Es evidente que las áreas de  $ABCD$  y  $AB_1CD$  son iguales, los lados de  $AB_1CD$  en orden de recorrido son iguales a  $b$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $d$ . Para el cuadrilátero  $AB_1CD$  es evidente la desigualdad  $S \leq \leq 1/2(ac + bd)$ . La igualdad tiene lugar, si  $\angle DAB_1 = \angle B_1CD = 90^\circ$ , es decir, el cuadrilátero  $AB_1CD$  es inscrito con dos ángulos opuestos iguales a  $90^\circ$  cada uno; por consiguiente, el cuadrilátero  $ABCD$  también está inscrito en la misma circunferencia y sus diagonales son perpendiculares.

II.337. Examinemos dos casos.

1) El triángulo dado ( $ABC$ ) es acutángulo.

Sea que el  $\angle B$  es el máximo:  $60^\circ \leq \angle B < 90^\circ$ . Puesto que las bisectrices de los ángulos  $A$  y  $C$  son menores de 1, también las alturas de estos ángulos  $h_A$  y  $h_C$  son menores de 1.

$$\text{Tenemos } S_{ABC} = \frac{h_A h_C}{2 \operatorname{sen} B} < \frac{1 \cdot 1}{3}.$$

2) Si uno de los ángulos del triángulo, por ejemplo,  $B$  no es agudo, los lados que lo comprenden, son menores que las bisectrices correspondientes, es decir, menores de 1, y el área no supera a  $1/2$ .

II.338. Sea  $c$  el lado máximo, opuesto al vértice  $C$ . Si  $a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2 > 0$ , entonces  $a^2 + b^2 > 8R^2 - c^2 \geq c^2$  (ya que  $c \leq 2R$ ), es decir, el triángulo es acutángulo. Inversamente, supongamos que el triángulo es acutángulo; entonces  $a^2 + b^2 + c^2 = 2m_c^2 + \frac{3}{2}c^2$  ( $m_c$  es la mediana al lado  $c$ ); por eso, cuanto menor es la mediana, tanto menor es  $a^2 + b^2 + c^2$ , pero la mediana es máxima, si  $C$  es el punto medio del arco, y disminuye al desplazarse  $C$  por el arco; pero cuando el triángulo pasa a ser rectángulo, entonces  $a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2$  será igual a 0.

II.339. Al sustituir  $R$  y  $r$  según las fórmulas  $R = \frac{abc}{4S}$ ,  $r = \frac{S}{p}$ , úsese para  $S$  la fórmula de Herón y la igualdad

$$\begin{aligned} 4S^2 \left( p - \frac{abc}{2S} - \frac{S}{p} \right) \left( p + \frac{abc}{2S} + \frac{S}{p} \right) &= \\ = \frac{1}{8} (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2) (-a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

II.340. Supongamos lo contrario, por ejem-

plo, que  $c \geq a$ ; entonces,  $2c \geq c + a > b$ ; al cuadrar y sumar las desigualdades, obtenemos:  $5c^2 > a^2 + b^2$ , lo que es una contradicción.

II.341. La bisectriz del ángulo  $B$  es la bisectriz del  $\angle OBH$  y la bisectriz del ángulo  $A$  es la bisectriz del  $\angle OAH$ . A continuación,  $\angle BAH = 90^\circ - \angle B < 90^\circ - \angle A = \angle ABH$ ; por lo tanto,  $|AH| > |BH|$ . Si  $K$  y  $M$  son los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos  $A$  y  $B$  con  $OH$ , entonces  $\frac{|HK|}{|KO|} = \frac{|AH|}{|AO|} = \frac{|AH|}{R} > \frac{|BH|}{R} = \frac{|BH|}{|OB|} = \frac{|HM|}{|MO|}$ . De esta manera,  $|HK| > |HM|$  y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos  $A$  y  $B$  se sitúa en el interior del  $\triangle BOH$ .

II.342. Designemos  $|AB| = |BC| = a$ ,  $|AM| = c$ ,  $|MC| = b$ ,  $|MB| = m$ ,  $\angle BMO = \psi$ ,  $\angle MBO = \varphi$ . Hay que demostrar que  $|OB| > |OM|$  o  $\psi > \varphi$ , o bien  $\cos \psi < \cos \varphi$ . Según el teorema de los cosenos, para el  $\triangle MBA$  y el  $\triangle MBC$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos \varphi - \cos \psi &= \frac{m^2 + a^2 - c^2}{2ma} - \frac{m^2 + b^2 - a^2}{2mb} = \\ &= \frac{m^2(b-a) - a(b^2 - a^2) + b(a^2 - c^2)}{2mab}; \end{aligned}$$

pero  $a - c = b - a$ ; por consiguiente,

$$\begin{aligned} \cos \varphi - \cos \psi &= \frac{(b-a)(m^2 - ab - a^2 + ab + bc)}{2mab} = \\ &= \frac{(b-a)(m^2 - a^2 - b(2a - b))}{2mab} = \\ &= \frac{(b-a)(m + b - a)(m - a + b)}{2mab} > 0, \end{aligned}$$

lo que había que demostrar.

II.343. Tracemos por  $M$  la recta paralela a  $AC$  hasta que se interseque con  $AB$  en el punto  $K$ . Encontramos fácilmente:  $|AK| = |CM| \cdot \frac{|AB|}{|CB|}$ ,  $|MK| = |MB| \times \frac{|AC|}{|CB|}$ . Puesto que  $|AM| \leq |AK| + |KM|$ , sustituyendo  $|AK|$  y  $|KM|$ , obtenemos

$$|AM| \leq \frac{|CM| \cdot |AB|}{|CB|} + \frac{|MB| \cdot |AC|}{|CB|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|AM| - |AC|) |BC| \leq$$

$$\leq (|AB| - |AC|) |MC|,$$

lo que era necesario.

II.344. El mínimo es igual a  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$  y se logra, si  $M$  es el centro de masas del  $\triangle ABC$ .

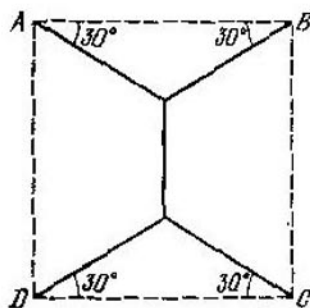


Fig. 61

(Se puede demostrarlo aplicando, por ejemplo el método de coordenadas o valiéndose del teorema de Leibniz: véase el problema II.140.)

**II.345.** «Enderecemos» el camino de la bola: para esto, en vez de «rechazar» la bola del borde, hagamos rechazar de manera especular respecto a este borde la mesa misma. Obtendremos un sistema de rayos con vértice común; cualesquiera dos rayos vecinos forman el ángulo  $\alpha$ . El número máximo de rayos del sistema que la recta puede cortar, es precisamente el número máximo de rechazos de la bola. Este número es igual a  $\left[ \frac{\pi}{\alpha} \right] + 1$ , si  $\frac{\pi}{\alpha}$  no es un número entero ( $[x]$  es la parte entera del número  $x$ ); pero si  $\frac{\pi}{\alpha}$  es un número entero, éste es igual al número máximo de rechazos.

**II.346.** Si los caminos se construyen de la manera mostrada en la fig. 61 ( $A, B, C$  y  $D$  son las aldeas, los caminos son las líneas continuas), su longitud total será  $2 + 2\sqrt{3} < < 5,5$ . Se puede mostrar que la disposición indicada de los caminos realiza el mínimo de su longitud total.

**II.347.** Si uno de los lados del triángulo que pasa por  $A$ , forma el ángulo  $\varphi$  con la recta perpendicular a las rectas paralelas dadas, el otro lado del triángulo forma un ángulo de  $180^\circ - \varphi - \alpha$ ; después de encontrar estos lados, obtendremos que el área

$$\begin{aligned} \text{del triángulo es igual a } & -\frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{2 \cos \varphi \cos(\varphi + \alpha)} = \\ & = -\frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\varphi)}. \end{aligned}$$

Esta expresión es



mínima, si  $\alpha + 2\varphi = 180^\circ$ . Respuesta:  $S_{\min} = ab \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

II.348. Tenemos  $S_{ACBD} = \frac{|AB|}{|MO|} S_{OCD} = 2(k+1)S_{OCD}$ . Por consiguiente,  $S_{ACBD}$  será máxima, cuando lo sea el área del triángulo  $OCD$ . Pero el triángulo  $OCD$  es isósceles con el lado igual a  $R$ ; por lo tanto, su área es máxima, cuando alcanza su máximo el seno del ángulo en el vértice  $O$ . Designemos este ángulo por  $\varphi$ . Es evidente que  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \pi$ , donde  $\varphi_0$  corresponde al caso de perpendicularidad de  $AB$  y  $CD$ . Por consiguiente, si  $\varphi_0 \leq \pi/2$ , el área máxima del  $\triangle OCD$  corresponde al valor de  $\varphi_1 = \pi/2$ ; pero si  $\varphi_0 > \pi/2$ , corresponde al valor  $\varphi_1 = \varphi_0$ . Respuesta: si  $k \leq \sqrt{2} - 1$ , entonces  $S_{\max} = (k+1)R^2$ ; si  $k > \sqrt{2} - 1$ , entonces  $S_{\max} = 2R^2 \sqrt{k(k+2)}/(k+1)$ .

II.349. Supongamos que la recta  $BC$  satisface la condición del problema:  $|BP| = |MC|$  (la sucesión de los puntos es:  $B, P, M, C$ ). Demostremos que el área del cuadrilátero  $ABNC$  es mínima. Tracemos otra recta que corta los lados del ángulo en los puntos  $B_1$  y  $C_1$ . Sea que el punto  $B$  se halla entre los puntos  $A$  y  $B_1$ , entonces el punto  $C_1$  se halla entre los puntos  $A$  y  $C$ . Hay que demostrar que  $S_{BB_1N} > S_{CC_1N}$ . Esta desigualdad es equivalente a la desigualdad  $S_{BB_1P} > S_{CC_1P}$ , puesto que  $\frac{S_{BB_1P}}{S_{BB_1N}} = \frac{S_{CC_1P}}{S_{CC_1N}} = \frac{|AP|}{|AN|}$ . Sumemos  $S_{BPC_1}$  a ambos miembros de la última desi-

gualdad. A la izquierda obtenemos  $S_{HB_1P} + S_{BPC_1} = S_{HB_1PC_1} = S_{C_1CB_1}$  (se deduce de la igualdad  $|BP| = |MC|$ ), y a la derecha,  $S_{CC_1P} + S_{BFC_1} = S_{C_1CB}$ . Pero, evidentemente,  $S_{C_1CB_1} > S_{C_1CB}$ . De manera análoga se analiza el caso, en que el punto  $B_1$  se halla entre los puntos  $A$  y  $B$ . *Construcción.* Es suficiente trazar cualquier línea que corta los lados del ángulo dado y las rectas  $AN$  y  $AM$  en los puntos  $B_0, P_0, M_0$  y  $C_0$ , respectivamente, de modo que  $|B_0P_0| = |M_0C_0|$  y luego trazar por  $M$  la recta paralela a  $B_0C_0$ . Examinemos el paralelogramo  $AB_0DC_0$ ; designemos por  $K$  y  $L$  los puntos de intersección de las rectas  $AP_0$  y  $AM_0$ , respectivamente, con  $B_0D$  y  $C_0D$ . A partir de la igualdad  $|B_0P_0| = |M_0C_0|$  se deduce que  $S_{AB_0K} = S_{AC_0L}$ . El problema se reduce a la construcción de dos triángulos equivalentes  $AB_0K$  y  $AC_0L$ , todos los ángulos de los cuales se conocen. Tomemos  $B_0$  de manera arbitraria, construyamos el  $\triangle AB_0K$ . Indiquemos en  $AB_0$  el punto  $E$  de modo que  $\angle B_0KE = \angle ALC_0$ . Construyamos el segmento  $AC_0$  igual a  $\sqrt{|B_0E| \cdot |B_0A|}$ . La recta  $B_0C_0$  es la buscada. *Observación.* Examinemos el problema siguiente. Por el punto  $M$  interior al ángulo dado hay que trazar la recta que corte los lados del ángulo en los puntos  $B$  y  $C$  de tal manera, que el segmento  $BC$  sea mínimo. Del problema investigado se deduce que el segmento  $BC$  será mínimo en aquel caso, cuando  $|BP| = |MC|$ , donde  $P$  es la proyección del vértice del ángulo dado sobre  $BC$ . (Más aún, se deduce también que si el segmento  $BC$  posee la propiedad indicada,

para cualquier otra recta que pasa por  $M$  y corta los lados del ángulo en los puntos  $B_1$  y  $C_1$ , la proyección del segmento  $B_1C_1$  sobre el segmento  $BC$  será mayor que  $|BC|$ ). Sin embargo, la construcción de semejante segmento no siempre es posible con ayuda de un compás y una regla.

**II.350.** Supongamos que  $M_1$  y  $N_1$  son otros dos puntos en los lados del ángulo (fig. 62).

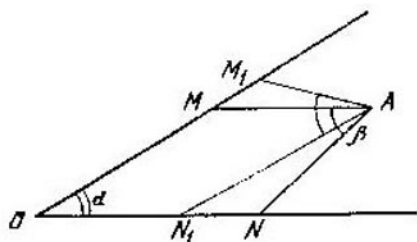


Fig. 62

Entonces,  $\angle M_1AN_1 = \beta$ ,  $\angle AM_1M = 360^\circ - \alpha - \beta - \angle ON_1A > 180^\circ - \angle ON_1A = \angle AN_1N$ . De aquí, tomando en consideración que  $\angle MAM_1 = \angle NAN_1$ , obtenemos que  $|M_1A| < |N_1A|$  y, por consiguiente,  $S_{M_1AM} < S_{N_1AN}$ ; de este modo  $S_{OM_1AN_1} < S_{OMAN}$ .

**II.351.** Teniendo en cuenta el resultado del problema anterior, hay que aclarar bajo qué condiciones en los lados del ángulo se puede hallar los puntos  $M$  y  $N$  tales que  $\angle MAN = \beta$  y  $|MA| = |AN|$ . Circunscribamos alrededor del triángulo  $MON$  una circunferencia (fig. 63). Puesto que  $\varphi + \psi + \beta < 180^\circ$ , el punto  $A$  estará fuera de ésta

Si  $L$  es el punto de intersección de la recta  $OA$  con la circunferencia, entonces deben cumplirse las desigualdades  $\angle AMN = 90^\circ - \frac{\beta}{2} > \angle LMN = \angle LON$  y  $\angle ANM = 90^\circ - \frac{\beta}{2} > \angle LOM$ . De esta manera, si  $\varphi < 90 - \frac{\beta}{2}$  y  $\psi < 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ , se puede encontrar los puntos  $M$  y  $N$  tales que  $|MA| = |AN|$  y  $\angle MAN = \beta$ . Pero si las condiciones no se

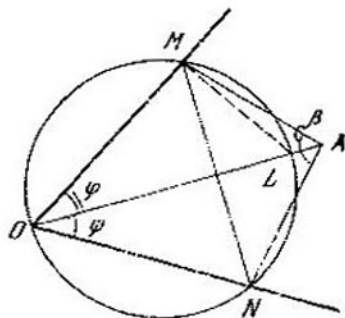


Fig. 63

cumplen, es imposible encontrar semejantes puntos. En este caso el cuadrilátero del área máxima degenera en triángulo (uno de los puntos  $M$  o  $N$  coincide con  $O$ ).

II.352. Tomemos el punto  $A_1$  en  $BC$  (fig. 64). El cuadrilátero  $OMA_1N$  es equivalente al cuadrilátero  $OMAN$ ,  $\angle MA_1N < \angle MAN$ ; por consiguiente, si se toma el punto  $M_1$  en  $OB$  de manera que  $\angle M_1A_1N = \angle MAN$ , entonces  $S_{OM_1A_1N} > S_{OMAN}$ ; resulta que el área del cuadrilátero  $OMAN$  es

menor que el área del cuadrilátero máximo que corresponde al punto  $A_1$ , lo que, tomando en consideración los resultados de los dos problemas anteriores, demuestra la afirmación.

II.353. Sea, para concretar, que  $\text{sen } \alpha \geq \geq \text{sen } \beta$ ; tomemos en la prolongación de  $AB$  el punto  $K$  de tal modo que  $\angle BKC = \beta$ , ya que  $\angle CBK = \angle ADC$  (puesto que el cuadrilátero  $ABCD$  es inscrito), entonces el  $\triangle KBC$  es semejante al  $\triangle ACD$ . Pero  $|BC| \geq |CD|$ , por consiguiente,  $S_{BCK} \geq S_{ADC}$  y  $S_{AKC} \geq S_{ABCD}$ . Pero  $S_{AKC} =$

$$= \frac{a^2 \text{sen}(\alpha + \beta) \text{sen } \alpha}{2 \text{sen } \beta},$$

por consiguiente,  $S_{ABCD} \leq \frac{a^2 \text{sen}(\alpha + \beta) \text{sen } \alpha}{2 \text{sen } \beta}$ .

Análogamente se demuestra que  $S_{ABCD} \geq \frac{a^2 \text{sen}(\alpha + \beta) \text{sen } \beta}{2 \text{sen } \alpha}$ .

II.354. Examínense otras posiciones de los puntos  $M_1$  y  $N_1$  ( $\angle M_1AN_1 = \beta$ ) y muéstrase, teniendo en cuenta la condición de  $\alpha + \beta > 180^\circ$ , que el triángulo «agregado» posee mayor área que el triángulo en el cual disminuye el área (de manera análoga a la solución del problema II.350).

II.355. Tomando en consideración el resultado del problema anterior y razonando de la misma manera que en el problema II.351, obtenemos que, si  $\varphi > 90^\circ - \frac{\beta}{2}$  y  $\psi > 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ , el cuadrilátero del área mínima existe y para éste  $|MA| = |AN|$ . Pero si esta condición no se cumple, el cuadrilátero busca-

do degenera (uno de los puntos  $M$  o  $N$  coincide con el vértice  $O$ ).

II.356. Tomemos el punto  $A$ , para el cual se cumplen las condiciones del problema, y cualquier otro punto  $A_1$ . Trazando por  $A_1$  las rectas paralelas a  $AM$  y  $AN$ , las cuales cortan los lados en los puntos  $M_1$  y  $N_1$ , cercio-

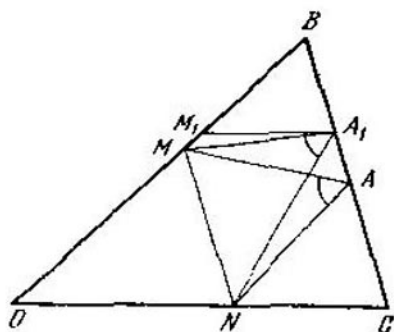


Fig. 64

remonos de que  $S_{OM_1A_1N_1} < S_{OMAN}$  y, por consiguiente, tanto más el área del cuadrilátero mínimo que corresponde al punto  $A_1$  es menor, que el área del cuadrilátero  $OMAN$ , el cual es el cuadrilátero mínimo que corresponde al punto  $A$ .

II.357. El radio del círculo máximo es igual al radio de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo regular con el lado de  $2R$ , es decir,  $2R/\sqrt{3}$ . (Tomemos semejante triángulo y en sus lados usados como diámetros, construyamos las circunferencias). Para cualquier circunferencia de radio mayor, si ésta estuviera cubierta con los círculos dados, se

encontraría un arco no menor de  $120^\circ$ . cubierto por un círculo. pero semejante arco contiene una cuerda mayor de  $2R$ , lo que es una contradicción.

En el caso general, si existe un triángulo acutángulo con los lados  $2R_1$ ,  $2R_2$ ,  $2R_3$ , el radio de la circunferencia circunscrita alrede-

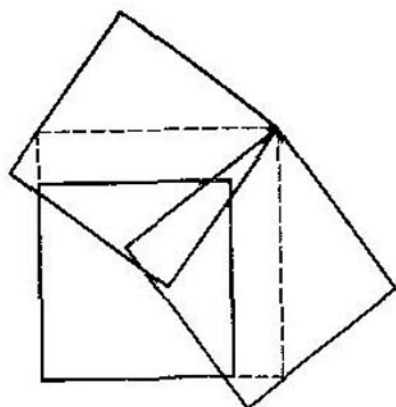


Fig. 65

dor de éste será el buscado. En todos los demás casos el radio del círculo máximo es igual al mayor de los números  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ .

**II.358.** Se puede. En la fig. 65 se exponen tres cuadrados unitarios que cubren un cuadrado con el lado  $5/4$ .

**II.359.** Notemos al principio que el lado del triángulo regular mínimo que cubre el rombo con el lado  $a$  y el ángulo agudo de  $60^\circ$ , es igual a  $2a$ . En efecto, si los vértices de los ángulos agudos  $M$  y  $N$  del rombo se encuentran en los lados  $AB$  y  $BC$  del triángulo regular  $ABC$  y  $\angle BNM = \alpha$ .  $30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ,

entonces, después de encontrar  $|BN|$  según el teorema de los senos a partir del  $\triangle BNM$ , y  $|CN|$  según el teorema de los senos a partir del  $\triangle KNC$  ( $K$  es el vértice del ángulo obtuso del rombo; además, se puede considerar que este vértice se sitúa en el lado  $AC$ ). obtenemos después de las transformaciones:  $|BC| = 2a \frac{\cos(60^\circ - \alpha)}{\cos 30^\circ}$ ; tomando en consideración que  $30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , hallamos que  $|BC| \geq 2a$ . Es fácil ver que se puede cubrir un triángulo regular del lado  $3/2$  con tres triángulos regulares del lado 1. Para esto cada triángulo unitario se pone de tal manera que uno de sus vértices coincida con uno de los vértices del triángulo que se cubre, mientras que el punto medio del lado opuesto coincida con el centro del triángulo que se cubre.

Mostremos ahora que el triángulo regular del lado  $b > 3/2$  no se puede cubrir con tres triángulos regulares unitarios. Si semejante recubrimiento fuera posible, los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  estarían cubiertos con triángulos diferentes y cada uno de los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  se cubriría con dos triángulos. Sea que  $A$  pertenece al triángulo I;  $B$ , al II;  $C$ , al III; el centro  $O$  del triángulo pertenece, por ejemplo, al triángulo I. Tomemos en  $AB$  y  $AC$  los puntos  $M$  y  $N$  tales que  $|AM| = |AN| = \frac{1}{3}b$ . Puesto que  $|BM| = |CN| = \frac{2}{3}b > 1$ , los puntos  $M$  y  $N$  también pertenecen al triángulo I y, por consiguiente, el rombo  $AMON$  está cubierto por completo con el triángulo, cuyo



lado es menos de  $2 |AM|$  ( $2 |AM| > 1$ ), lo que es imposible.

II.360. Designemos las razones  $\frac{|AM|}{|MC|}$ ,  $\frac{|CN|}{|NB|}$  y  $\frac{|ML|}{|LM|}$  por  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Entonces (véase la solución del problema I.224)  $P = Q\alpha\beta\gamma$ ,  $S = Q(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$ . Después hagamos uso de la desigualdad  $(\alpha + 1) \times (\beta + 1)(\gamma + 1) \geq (\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} + 1)^3$ .

II.361. Sea que  $\text{ctg } \alpha = x$ ,  $\text{ctg } \beta = y$ ; entonces  $\text{ctg } \gamma = \frac{-xy + 1}{x + y} = \frac{x^2 + 1}{x + y} - x$ ,  $a^2 \text{ctg } \alpha + b^2 \text{ctg } \beta + c^2 \text{ctg } \gamma = (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2(x + y) + c^2 \frac{x^2 + 1}{x + y}$ . El mínimo de la expresión  $b^2(x + y) + c^2 \frac{x^2 + 1}{x + y}$  con  $x$  fijo y  $x + y > 0$  se logra para tal  $y$ , para el cual se cumple la igualdad  $b^2(x + y) = c^2 \frac{x^2 + 1}{x + y} \Rightarrow \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{c}{b}$ . De este modo,  $\frac{c}{b} = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta}$ . Por lo tanto, el valor

mínimo de la expresión dada en la condición se logra para tales  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , cuyos senos son proporcionales a los lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , es decir, cuando los triángulos examinados son semejantes. Pero en este caso tiene lugar una igualdad (es fácil comprobarlo).

II.362. Designemos:  $p - a = x$ ,  $p - b = y$ ,  $p - c = z$  ( $p$  es el semiperímetro). Dejando en el segundo miembro de la desigualdad  $4S\sqrt{3}$ , obtenemos después de transformar el

primer miembro (por ejemplo,  $a^2 - (b - c)^2 = 4(p - b)(p - c) = 4yz$ ) y sustituir  $S$  según la fórmula de Herón la desigualdad  $xy + yz + zx \geq \sqrt{3(x + y + z)xyz}$ . Dividiendo ambos miembros de la desigualdad por  $\sqrt{xyz}$  y sustituyendo  $u = \sqrt{(xy)/z}$ ,  $v = \sqrt{(yz)/x}$ ,  $w = \sqrt{(zx)/y}$  ( $x = uw$ ,  $y = vu$ ,  $z = vw$ ), obtenemos la desigualdad  $u + v + w \geq \sqrt{3(uv + vw + wu)}$ , la cual, después de elevarla al cuadrado, se reduce a la desigualdad conocida  $u^2 + v^2 + w^2 \geq uv + vw + wu$ .

II.363. Existen dos familias de triángulos regulares circunscritos alrededor del triángulo dado (véase el problema II.305). Construyamos sobre los lados del triángulo  $ABC$  hacia el exterior los triángulos regulares  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  y circunscribamos alrededor de éstos las circunferencias. Los vértices de los triángulos de la primera familia se sitúan uno en cada una de estas circunferencias. Supongamos que  $O_1, O_2, O_3$  son los centros de estas circunferencias ( $\triangle O_1O_2O_3$  es regular, véase el problema II.304). El área máxima la tendrá el triángulo, cuyos lados son paralelos a los lados del triángulo  $O_1O_2O_3$  (la secante que pasa por el punto de intersección de dos circunferencias, tiene longitud máxima cuando es paralela a la línea de centros; en este caso su longitud es dos veces mayor que la distancia entre los centros). El área del triángulo máximo será  $S_0 = 4S_{O_1O_2O_3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S \sqrt{3} \right)$ , donde  $S$  es el área del triángulo dado

(véase la solución del problema II.305). Para los triángulos de la segunda familia el área del máximo será menor. Entre los triángulos regulares inscritos en el dado, el área mínima la tendrá aquel, cuyos lados son paralelos a los lados del triángulo máximo circunscrito. Esto se deduce del resultado del problema I.241. Su área es igual a  $S_1 = S^2/S_0$ . De esta manera, el área del triángulo regular circunscrito máximo es igual a  $S_0 = \frac{\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{4} + 2S$  y el área del triángulo mínimo inscrito es  $S_1 = \frac{S^2}{S_0}$ , donde  $S$  es el área del triángulo dado.

II.364. Circunscribamos alrededor del triángulo  $AMC$  la circunferencia. Todos los triángulos  $A_1MC$  que se obtienen al desplazar  $M$  por el arco  $AC$ , son semejantes entre sí, por consiguiente, la razón  $\frac{|CM|}{|A_1M|}$  será para ellos una misma. Por eso, si  $M$  es el punto del mínimo de la expresión  $f(M) = \frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|}$ , entonces  $BM$  ha de pasar por el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo  $AMC$ ; de lo contrario se puede disminuir  $|BM|$ , dejando constante la razón  $\frac{|CM|}{|A_1M|}$ . Sea que ahora  $B_1$  y  $C_1$  son los puntos de intersección de las rectas  $BM$  y  $CM$  con la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo  $ABC$ , entonces  $\frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|} = \frac{|CM| \cdot |AM|}{|B_1M|} = \frac{|AM| \cdot |BM|}{|C_1M|}$ . Por con-

siguiente, las rectas  $AM$  y  $CM$  también deben pasar por los centros de las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos  $BMC$  y  $AMB$ , respectivamente. De tal modo, el punto  $M$  es el centro de la circunferencia inscrita (véase el problema 11.125). Además, en este caso  $A_1$  es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo  $CMB$ ,

$$\text{sen } \angle MBC = \frac{r}{|MB|}, \quad \frac{|CM|}{\text{sen } \angle MBC} = 2 |A_1M|;$$

por lo tanto,  $\frac{|BM| \cdot |CM|}{|A_1M|} = 2r$ . Regresemos

al problema de que la función  $f(M)$  alcanza el valor mínimo. El teorema de análisis conocido afirma que la función continua en un conjunto cerrado alcanza su valor máximo y el mínimo. En particular, este teorema es válido para la función de dos variables definida en un polígono. Sin embargo, a este problema el teorema no se aplica directamente: la función  $f(M)$  no está definida en los vértices del triángulo  $ABC$ . Pero si se cortan los ángulos del triángulo, se obtiene un hexágono, en el cual  $f(M)$  será ya una función continua y, por consiguiente, tendrá el valor mínimo. Se puede demostrar que en proximidad de la frontera del triángulo  $f(M) > 2r$ . Por eso, si los ángulos cortados son suficientemente pequeños, el valor mínimo de  $f(M)$  en los hexágonos y, por lo tanto, también en el triángulo se logra, cuando  $M$  es el centro de la circunferencia inscrita; este valor mínimo es igual a  $2r$ . Por otra parte,  $f(M)$  no toma su valor máximo, aunque está acotada. Demuéstrese que  $f(M) < l$ , donde  $l$  es la longitud del lado máximo

del triángulo  $ABC$ , para todos los puntos del triángulo, excluyendo los vértices, y  $f(M)$  puede tomar valores tan próximos a  $l$  como se quiera.

II.365. Tomemos en los rayos  $MB$  y  $MC$  los puntos  $C_1$  y  $B_1$ , respectivamente, de tal modo que  $|MC_1| = |MC|$ ,  $|MB_1| = |MB|$  ( $\triangle MC_1B_1$  es simétrico a  $\triangle MBC$  respecto a la bisectriz del ángulo  $BMC$ ),  $C_2$  y  $B_2$  son, respectivamente, las proyecciones de  $C_1$  y  $B_1$  sobre la recta  $AM$ . Tenemos:  $|BM| \times \sin \angle AMC + |CM| \sin \angle AMB = |B_1M| \sin \angle AMC + |C_1M| \sin \angle AMB = |B_1B_2| + |C_1C_2| \geq |B_1C_1| = a$ . Al escribir otras dos desigualdades semejantes y al sumarlas, demostraremos la afirmación del problema. No es difícil comprobar que, si  $M$  coincide con el centro de la circunferencia inscrita, la desigualdad se transforma en igualdad.

II.366. a) Resolvemos, al principio, el problema siguiente. Sea  $M$  el punto en el lado  $AB$  del triángulo  $ABC$ , las distancias a partir de  $M$  hasta los lados  $BC$  y  $AC$  son iguales a  $u$  y  $v$ , respectivamente;  $h_1$  y  $h_2$  son las alturas bajadas sobre  $BC$  y  $AC$ , respectivamente. Demostrar que la expresión  $\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v}$  alcanza su valor mínimo, cuando  $M$  es el punto medio de  $AB$ . Designemos, como siempre,  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ ,  $S$  es el área del  $\triangle ABC$ . Tenemos:  $au + bv = 2S$ ,  $v = \frac{2S - au}{b}$ . Pongamos  $v$  en la expresión  $\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v} = t$  y ob-

tendremos  $atu^2 - 2Stu + 2h_1S = 0$ . El discriminante de esta ecuación no es negativo,  $S^2(t^2 - 4t) \geq 0$ , de donde  $t \geq 4$ . El valor mínimo de  $t = 4$  se alcanza cuando  $u = S/a = h_1/2$ ,  $v = h_2/2$ . De este problema se deduce que el valor mínimo del primer miembro de la desigualdad del punto a) se obtiene cuando  $M$  es el punto de intersección de las medianas. Análogamente se demuestran las desigualdades de los puntos b) y c). En el punto b) hace falta determinar para qué punto  $M$  en el lado  $AB$  el producto  $uv$  obtiene su valor máximo. En el punto c) dividamos previamente ambos miembros de la desigualdad por  $uvw$  y resolvamos el problema del mínimo de la función  $(h_1/u - 1)(h_2/v - 1)$  para el punto  $M$  en  $AB$ .

II.367. Supongamos que para el triángulo acutángulo  $ABC$  se cumple la desigualdad  $|AC| \leq |AB| \leq |BC|$ ;  $BD$  es la altura,  $O$  es el centro de la circunferencia circunscrita e  $I$ , el centro de la inscrita en el  $\triangle ABC$ ;  $E$  es la proyección de  $I$  sobre  $BD$ . Puesto que  $|ED| = r$ , hay que demostrar que  $|BE| \geq R = |BO|$ . Pero  $BI$  es la bisectriz del ángulo  $EBO$  ( $BI$  es la bisectriz del ángulo  $ABC$  y  $\angle ABD = \angle OBC$ ),  $\angle BEI = 90^\circ$ ,  $\angle BOI \geq 90^\circ$  (lo último se deduce de que la proyección de  $CI$  sobre  $BC$  no supera  $|BC|/2$ ). Por consiguiente,  $|BE| \geq |BO|$  (representemos  $BO$  simétricamente respecto a  $BI$ ).

II.368. Puesto que el área del triángulo formado por las medianas del otro triángulo constituye  $3/4$  partes del área del triángulo inicial y para cualquier triángulo  $abc =$

=  $\triangle RS$ , hay que demostrar que para el triángulo acutángulo es válida la desigualdad

$$m_a m_b m_c > \frac{5}{8} abc. \quad (1)$$

Para hacer los cálculos cómodamente supongamos que uno de los lados es igual a  $2d$  y la mediana a este lado es igual a  $m$ . Puesto que el triángulo es acutángulo, entonces  $m > d$ . Designemos por  $t$  el coseno del ángulo agudo comprendido entre esta mediana y el lado  $2d$ ,  $0 \leq t < d/m$  ( $t < d/m$  es la condición del carácter acutángulo del triángulo). Expresando los lados y las medianas por medio de  $d$ ,  $m$  y  $t$  y poniendo las expresiones halladas en la desigualdad (1), después de las transformaciones obtenemos:  $m^2 (9d^2 + m^2)^2 - 25d^2 \times \times (d^2 + m^2)^2 > t^2 d^2 m^2 (64m^2 - 100d^2)$ . El primer miembro de la desigualdad se reduce a la forma  $(m^2 - 4dm + 5d^2)(m^2 + 4dm + 5d^2)(m^2 - d^2)$ . Para  $m > d$  esta expresión es positiva. Además, si  $m = d$  (el triángulo es rectángulo), el primer miembro de la desigualdad no es menor que el segundo (la igualdad existe para  $t = 0$ ). A continuación, si  $d < < m \leq \frac{5}{4} d$ , el segundo miembro de la desigualdad no es positivo y la desigualdad es válida. Sea que  $m > \frac{5}{4} d$ . En este caso, el segundo miembro de la desigualdad es menor que el valor obtenido para  $t = d/m$ . Pero cuando  $t = d/m$ , el triángulo de partida es rectángulo y para los triángulos rectángulos ya está demostrada la validez de la desigual-

dad no estricta. (Es suficiente repetir los mismos razonamientos respecto al otro lado del triángulo.) De esta manera está demostrado que para cualesquiera triángulos no obtusángulos, a excepción de los isósceles y rectángulos, es válida la desigualdad (1); para los triángulos isósceles y rectángulos tiene lugar una igualdad.

II.369. Supongamos que  $M$  se halla en el interior del  $ABC$  a las distancias  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, hasta los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ . El problema consiste en determinar el mínimo de  $x^2 + y^2 + z^2$ , bajo la condición de que  $ax + by + cz = 2S_{ABC}$ . Es evidente que este mínimo se logra para los mismos valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que el mínimo de  $x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda(ax + by + cz) = (x - \lambda a)^2 + (y - \lambda b)^2 + (z - \lambda c)^2 - \lambda^2(a^2 + b^2 + c^2)$ , donde  $\lambda$  es un número arbitrario fijo (bajo la misma condición de que  $ax + by + cz = 2S_{ABC}$ ). Al tomar  $\lambda = \frac{2S_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}$  ( $\lambda$  se encuentra a partir de las ecuaciones  $x = \lambda a$ ,  $y = \lambda b$ ,  $z = \lambda c$ ,  $ax + by + cz = 2S_{ABC}$ ), vemos que el mínimo de la última expresión se logra para  $x = \lambda a$ ,  $y = \lambda b$ ,  $z = \lambda c$ . Ahora, sea que el punto  $M$  está alejado de  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  a las distancias  $\lambda a$ ,  $\lambda b$  y  $\lambda c$ , respectivamente, y el punto  $M_1$  es simétrico a  $M$  respecto a la bisectriz del ángulo  $A$ . Puesto que  $S_{AM_1C} = S_{AM_1B}$ , entonces  $M_1$  se sitúa en la mediana del ángulo  $A$  y esto significa que  $M$  se halla en la simediana de este ángulo (véase el problema II.171).

II.370. Supongamos que  $M$  es un punto



dispuesto en el interior del triángulo  $ABC$ , cuyo ángulo máximo es inferior a  $120^\circ$ . Hagamos girar el  $\triangle AMC$  alrededor del punto  $A$  a un ángulo de  $60^\circ$  hacia el exterior respecto al  $\triangle ABC$ . En este caso, el punto  $C$  pasará al punto  $C_1$  y el punto  $M$ , al punto  $M_1$ . La suma  $|AM| + |BM| + |CM|$  es igual a la quebrada  $BMM_1C$ . Esta quebrada será mínima, cuando los puntos  $M$  y  $M_1$  se hallan en el segmento  $BC_1$ . De aquí se deduce la afirmación del problema.

II.371. Supongamos que  $ABC$  es el triángulo acutángulo dado,  $A_1$  es un punto en el lado  $BC$ ;  $B_1$ , en  $CA$ ;  $C_1$ , en  $AB$ ;  $A_2$  y  $A_3$  son los puntos simétricos a  $A_1$  respecto a los lados  $AB$  y  $AC$  (respectivamente). La quebrada  $A_2C_1B_1A_3$  es igual al perímetro del triángulo  $A_1B_1C_1$ ; por consiguiente, este perímetro, siendo fijo el punto  $A_1$ , será mínimo, cuando los puntos  $C_1$  y  $B_1$  se hallan en el segmento  $A_2A_3$ , y será igual a  $|A_2A_3|$ . Pero el  $\triangle AA_2A_3$  es isósceles,  $\angle A_2AA_3 = 2\angle BAC$ ,  $|A_2A| = |A_3A| = |AA_1|$ . Por lo tanto,  $|A_2A_3|$  será mínimo, si  $AA_1$  es la altura del  $\triangle BAC$ . Precisamente de la misma manera deben ser alturas también  $BB_1$  y  $CC_1$ .

II.372. Si el ángulo máximo del triángulo es menor de  $120^\circ$ , la suma de distancias tomará el valor mínimo para el punto, desde el cual los lados se ven bajo el ángulo de  $120^\circ$  (véase el problema II.370). Esta suma es igual a  $|BC_1|$  (designaciones del problema II.370). El cuadrado de esta suma es igual a  $a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle C + 60^\circ) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 +$

$+ c^2) + 2S \sqrt{3}$ . Pero a partir del problema II.362 se deduce que  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S \sqrt{3}$ . Nos queda demostrar la desigualdad  $S \geq 3 \sqrt{3}r^2$ . Esta desigualdad se demuestra bastante fácilmente; la misma expresa el hecho de que de todos los triángulos circunscritos alrededor de la circunferencia dada el área mínima la tiene el triángulo regular (para éste se cumple la igualdad). Para concluir la demostración hace falta comprobar la desigualdad  $a + b \geq 6r$ , puesto que para el triángulo con el ángulo superior a  $120^\circ$ , la suma de distancias hasta los vértices toma el valor mínimo en el vértice del ángulo obtuso.

II.373. Demostremos el segundo miembro de la desigualdad. Para concretar, sea que  $b \geq c$ .

$$1) \text{ Si } a \leq b, \text{ entonces } 2p = a + b + c = (b - a) + c + 2a < 2c + 2a \leq 2 \frac{b}{a}c + 2a = 2 \frac{bc + a^2}{a}.$$

$$2) \text{ Si } a \geq b \geq c, \text{ entonces } a < 2b \text{ y } 2p = a + b + c = (b + c - a) + 2a \leq c + 2a < \frac{2bc}{a} + 2a = 2 \frac{bc + a^2}{a}.$$

El primer miembro de la desigualdad se deduce del segundo miembro y de la identidad  $(b + c)(p - a) - bc \cos A = a \left( \frac{bc + a^2}{a} - p \right)$ .

II.374. Tenemos:  $\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AL|}{|LD|} = \frac{|BK|}{|KD|}$ , es decir,  $KN$  es paralela a  $CD$ , el cuadrilátero  $KLMN$  es un paralelogramo. Sea que  $|AK| = a$ ,  $|KC| = b$ ,  $|BK| = x$ ,

$|KD| = y$ ,  $\frac{x}{y} \geq \frac{a}{b}$ ; entonces

$$S_{KLM} = S_{ALM} - S_{AKL} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 S_{ADC} - \frac{x}{x+y} \frac{a}{a+b} S_{ADC} = \frac{x}{x+y} \left(\frac{x}{x+y} - \frac{a}{a+b}\right) \frac{y}{y+x} S_{ABCD} < \frac{x^2 y}{(x+y)^3} S_{ABCD}.$$

Designemos:  $y/x = t$ . No es difícil demostrar que el valor máximo de la función  $t/(1+t)^3$  se obtiene con  $t = 1/2$  (por ejemplo, al tomar la derivada de esta función) y es igual a  $4/27$ . De esta manera,  $S_{KLMN} = 2S_{KLM} < \frac{8}{27} S_{ABCD}$ .

**II.375.** Designemos los lados del  $\triangle ABC$ , como siempre, por  $a$ ,  $b$  y  $c$ ;  $I$  es el centro de la circunferencia inscrita. Es válida la igualdad vectorial siguiente (ésta se deduce de la propiedad de la bisectriz, véase el problema I.9):

$$\vec{IA} \cdot a + \vec{IB} \cdot b + \vec{IC} \cdot c = 0. \quad (1)$$

Además,  $|IB| < c$ ,  $|IC| < b$ . Estas desigualdades se deducen de que los ángulos  $AIB$  y  $AIC$  son obtusos. Tomemos el punto  $A_1$  suficientemente próximo al punto  $A$ , de manera que sigan cumpliéndose las desigualdades  $|I_1B| < c$ ,  $|I_1C| < b$ , donde  $I_1$  es el centro de la circunferencia inscrita en el  $\triangle A_1BC$ . Los lados del  $\triangle A_1BC$  son iguales a  $a$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ . Lo mismo que para el  $\triangle ABC$  escribamos la igualdad

$$\vec{I_1A_1} \cdot a + \vec{I_1B} \cdot b_1 + \vec{I_1C} \cdot c_1 = 0. \quad (2)$$

Restemos (1) de (2):

$$a(\vec{I_1A_1} - \vec{IA}) + \vec{I_1B} \cdot b_1 + \vec{IB} \cdot b + \\ + \vec{I_1C} \cdot c_1 - \vec{IC} \cdot c = 0. \quad (3)$$

Notemos que

$$\vec{I_1A_1} - \vec{IA} = \vec{I_1I} + \vec{AA_1}, \quad (4)$$

$$\vec{I_1B} \cdot b_1 - \vec{IB} \cdot b - \vec{I_1B}(b_1 - b) + \vec{I_1I} \cdot b, \quad (5)$$

$$\vec{I_1C} \cdot c_1 - \vec{IC} \cdot c = \vec{I_1C}(c_1 - c) + \vec{I_1I} \cdot c. \quad (6)$$

Sustituyendo en (3) las diferencias correspondientes según las fórmulas (4), (5), (6), obtenemos:

$$\vec{I_1I}(a + b + c) + \vec{AA_1} \cdot a + \vec{I_1B}(b_1 - b) + \\ + \vec{I_1C}(c_1 - c) = 0.$$

Puesto que  $|\vec{I_1B}| < c$ ,  $|\vec{I_1C}| < b$ ,  $|b_1 - b| < < |A_1A|$ ,  $|c_1 - c| < |A_1A|$ , entonces  $|\vec{I_1I}| =$   
 $= \frac{1}{a+b+c} |\vec{AA_1} \cdot a + \vec{I_1B}(b_1 - b) + \vec{I_1C}(c_1 - c)| <$   
 $< |AA_1| \cdot \frac{a+b+c}{a+b+c} = |AA_1|.$

De esto se puede deducir la afirmación del problema para cualquier posición de  $A_1$ . *Observación.* En esencia, se ha diferenciado la igualdad (1) y se ha demostrado que  $|V_A| > > |V_I|$ , donde  $V_A$  y  $V_I$  son las velocidades, con las cuales se desplazan los puntos  $A$  e  $I$ .

II.376. Circunscribamos alrededor de los triángulos  $ABF$ ,  $BCD$  y  $CAE$  las circunferencias. Estas tienen un punto común  $M$ . Puesto que los ángulos del triángulo  $DEF$  son constantes,  $\angle D = \gamma$ ,  $\angle E = \alpha$ ,  $\angle F = \beta$ , las circunferencias construidas y el punto  $M$  no dependen de  $\varphi$ . El lado  $DF$  (y, por consiguiente, también  $EF$  y  $ED$ ) será máximo, cuando  $DF$  es perpendicular a  $BM$ . Sea  $\varphi_0$  el ángulo que corresponde a esta posición. Entonces,  $\angle MBC = \angle MCA = \angle MAB = 90^\circ - \varphi_0$ . Prolonguemos  $CM$  hasta que interseque a la circunferencia, circunscrita alrededor del triángulo  $AMB$ , en el punto  $F_1$ . Se puede encontrar que  $\angle F_1BA = \alpha$ ,  $\angle F_1AB = \beta$ ;  $F_1B$  resulta paralela a  $AC$ . Bajemos desde  $F_1$  y  $B$  las perpendiculares  $F_1N$  y  $BL$  sobre  $AC$ . Puesto que  $|F_1N| = |BL|$ , entonces  $\text{tg } \varphi_0 =$

$$= \text{ctg } (90^\circ - \varphi_0) = \frac{|CN|}{|F_1N|} = \frac{|AN|}{|F_1N|} +$$

$$+ \frac{|AL|}{|BL|} + \frac{|CL|}{|BL|} = \text{ctg } \beta + \text{ctg } \alpha +$$

$$+ \text{ctg } \gamma. \text{ De esta manera, } \text{tg } \varphi_0 = \text{ctg } \alpha +$$

$$+ \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma. \text{ Observación. El ángulo } \omega =$$

$$= 90^\circ - \varphi_0 \text{ se llama ángulo de Brocard y el}$$

punto  $M$ , punto de Brocard. Para cada triángulo existen dos puntos de Brocard. La posición del segundo punto  $M_1$  se determina por la condición  $\angle M_1BA = \angle M_1AC = \angle M_1CB$ .

II.377. Supongamos que  $\frac{|AC_1|}{|AB|} = x$ ,  $\frac{|BA_1|}{|BC|} =$

$$-y, \frac{|CB_1|}{|CA|} = z. \text{ Consideremos que } x \leq 1/2.$$

Si suponemos que las áreas de los triángulos  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$  y  $CA_1B_1$  son mayores que el

área del triángulo  $A_1B_1C_1$ , entonces  $z \leq 1/2$  (a no ser así,  $S_{AC_1B_1} \leq S_{A_1C_1B_1}$ ) e  $y \leq 1/2$ . Las áreas de todos los triángulos examinados se expresan fácilmente a través de  $S_{ABC}$  y  $x, y, z$ , por ejemplo:  $S_{A_1B_1C_1} = x(1-z)S_{ABC}$ . La desigualdad  $S_{A_1B_1C_1} < S_{A_1B_1C_1}$  se reduce a la forma  $1 - x(1-z) - y(1-x) - z(1-y) < x(1-z)$ . Al sumar tres desigualdades semejantes, obtenemos:  $3 - 4x(1-z) - 4y(1-x) - 4z(1-y) < 0$ .

Puesto que la última desigualdad es lineal respecto a  $x, y, z$ , entonces, si la misma se cumpliera para ciertos  $x, y, z$  comprendidos entre 0 y  $1/2$ , asimismo debería cumplirse también para cualquier juego de valores extremos de las variables, es decir, para cada variable igual a 0 o a  $1/2$ . Pero se puede comprobar que esto no es así. La contradicción obtenida demuestra nuestra afirmación.

**II.378.** Sea que  $Q$  es el punto medio de  $OH$ . Como se conoce,  $Q$  es el centro de la circunferencia de los nueve puntos (véase el problema II.160). Tenemos:  $|OH|^2 + 4|QI|^2 = 2|OI|^2 + 2|HI|^2$ . Puesto que  $|QI| = R/2 - r$  (basándonos sobre el teorema de Feuerbach, problema II.287),  $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$  (fórmula de Euler, problema II.193) y tomando en consideración que  $R \geq 2r$ , obtenemos:

$$|OH|^2 - 2|IH|^2 + R^2 - 4r^2 \geq \geq 2|IH|^2.$$

**II.379.** Una idea elegante para demostrar las desigualdades de semejante tipo la pro-

puso Kazarinoff (Kazarinoff, Michigan Mathematical Journal, 1957, N° 2, págs. 97—98). Su esencia consiste en lo siguiente. Tomemos en los rayos  $AB$  y  $AC$  sendos puntos  $B_1$  y  $C_1$ , respectivamente. Es obvio que la suma de las áreas de los paralelogramos construidos sobre  $AB_1$  y  $AM$  y sobre  $AC_1$  y  $AM$  es igual al área del paralelogramo, uno de cuyos lados es  $B_1C_1$ , mientras que el otro es paralelo a  $AM$  y es igual a  $|AM|$  (véase también el problema II.40). Por consiguiente,

$$|AC_1|v + |AB_1|w \leq |B_1C_1|x. \quad (1)$$

a) Supongamos que los puntos  $B_1$  y  $C_1$  coinciden con los puntos  $B$  y  $C$ ; entonces, la desigualdad (1) dará la desigualdad  $bv + cw \leq ax$ . Al sumar tres desigualdades semejantes, obtenemos la requerida.

b) Si  $|AB_1| = |AC|$ ,  $|AC_1| = |AB|$ , la desigualdad (1) dará la desigualdad  $cv + bw \leq ax$  o  $x \geq \frac{c}{a}v + \frac{b}{a}w$ . Al sumar tres desigualdades semejantes, obtenemos:

$$x + y + z \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)u + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)v + \\ + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)w \geq 2(u + v + w).$$

c) En el punto a) se ha demostrado la desigualdad  $ax \geq bv + cw$ , de donde  $xu \geq \frac{b}{a}uv + \frac{c}{a}wu$ . De la misma manera  $yv \geq \frac{a}{b}uv + \frac{c}{b}vw$ ,  $zw \geq \frac{a}{c}uw + \frac{b}{c}vw$ . Al sumar estas tres desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned}
 xu + yv + zw &\geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) uv + \\
 &+ \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) vw + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) wu \geq \\
 &\geq 2(uv + vw + wu).
 \end{aligned}$$

d) Designemos por  $A_1, B_1, C_1$  las proyecciones del punto  $M$  sobre los lados  $BC, CA, AB$ , respectivamente, del triángulo  $ABC$ . Tomemos en los rayos  $MA, MA_1, MB, MB_1, MC, MC_1$  los puntos  $A', A'_1, B', B'_1, C', C'_1$ , respectivamente, de manera que  $|MA| \cdot |MA'| = |MA_1| \cdot |MA'_1| = |MB| \cdot |MB'| = |MB_1| \cdot |MB'_1| = |MC| \cdot |MC'| = |MC_1| \cdot |MC'_1| = d^2$  \*). Se puede demostrar que los puntos  $A', B', C'$  se hallan en las rectas  $B'_1C'_1, C'_1A'_1, A'_1B'_1$ , respectivamente, además,  $MA', MB', MC'$  son, correspondientemente, perpendiculares a estas rectas. De esta manera, en el  $\triangle A'_1B'_1C'_1$  las distancias desde  $M$  hasta los vértices son iguales a  $\frac{d^2}{u}, \frac{d^2}{v}, \frac{d^2}{w}$ , mientras que hasta los lados opuestos, a  $\frac{d^2}{x}, \frac{d^2}{y}, \frac{d^2}{z}$ . Empleando la desigualdad del punto b), obtenemos la desigualdad requerida.

e) Adoptemos en la desigualdad (1)  $b_1 = c_1 = l$ ; entonces,  $a_1 = 2l \operatorname{sen} \frac{A}{2}$ . Tendremos  $x \geq \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2}} (u + v)$ . Al obtener las desigual-

\*) Esta transformación se llama *inversión*. Véase la observación a la solución del problema II.240, así como el Apéndice al final del libro.



dades análogas para  $y$  y  $x$  y multiplicándolas, obtenemos:  $xyz \geq \frac{1}{8 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}} \times$   
 $\times (u+v)(v+w)(w+u) = \frac{R}{2r} (u+v)(v+w) \times$   
 $\times (w+u)$  (la igualdad  $\operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2} =$   
 $= \frac{r}{4R}$  se ha demostrado al resolver I.240).

f) De la desigualdad aducida en el punto anterior se deduce:  $xyz \geq \frac{R}{2r} 2\sqrt{uv} \cdot 2\sqrt{vw} \times$   
 $\times 2\sqrt{wu} = \frac{4R}{r} uvw.$

g) Al dividir una por otra las desigualdades de los puntos d) y f), obtenemos la desigualdad que se demuestra.

*Observación.* En la desigualdad del punto a) la igualdad se logra para cualquier triángulo acutángulo, cuando  $M$  coincide con el punto de intersección de las alturas del triángulo. En los puntos b), c), d) y g) la igualdad se obtiene para el triángulo equilátero, cuando  $M$  es el centro de este triángulo. En los puntos e) y f), la igualdad se logra en cualquier triángulo, cuando  $M$  es el centro de la circunferencia inscrita.

**II.380.** Examinemos la clase de los triángulos semejantes entre sí. En calidad del representante de esta clase elijamos tal triángulo  $ABC$ , en el cual  $|AB| = v$ ,  $|BC| = u$ ,  $|AC| = 1$ ; además,  $u \leq v \leq 1$ . De este modo, a cada clase de triángulos semejantes entre sí le corresponderá el punto  $B$  en el inte-

rior del triángulo curvilíneo  $CDE$ , donde  $D$  es el punto medio de  $AC$ , el arco  $EC$  es un arco de la circunferencia con el centro en el punto  $A$  y radio 1,  $ED \perp AC$  (fig. 66). Llamaremos el triángulo  $ABD$  «izquierdo» y el triángulo  $BDC$ , «derecho». Examinemos el proceso descrito en el planteamiento del problema; además,

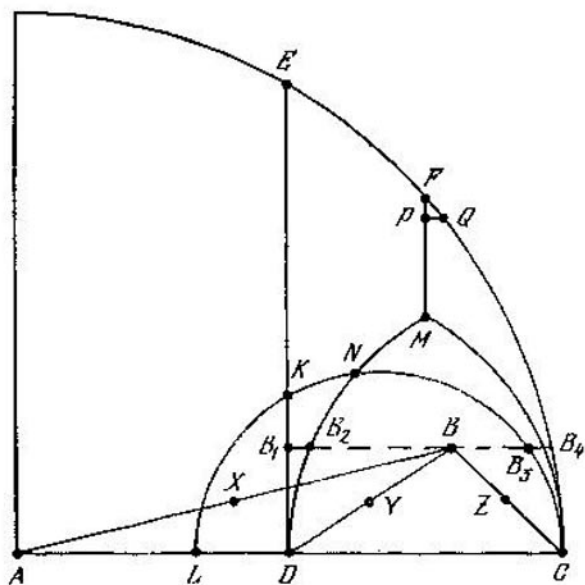


Fig. 66

a cada paso dejaremos sólo los triángulos, para los cuales no hemos encontrado triángulos semejantes. Para cada triángulo tomaremos un representante de la clase que aquél define, descrita anteriormente. Supongamos que  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  son los puntos medios de  $AB$ ,  $DB$ ,  $CB$ , respectivamente;  $m = |DB|$ ,  $h$  es la altura del  $\triangle ABC$ .

Para los triángulos «derechos» son posibles tres casos.

1)  $u \leq 1/2$ ,  $m \leq 1/2$  ó  $u \leq m$ ,  $1/2 \leq m$ , es decir, el lado más grande es  $DC$  o  $BD$ . Este caso tiene lugar, si  $B$  se encuentra en el interior de la figura  $DMFC$ , donde  $DM$  es el arco de una circunferencia de radio  $1/2$  con el centro en el punto  $C$ ,  $FC$  es la parte derecha del arco  $EC$ ,  $|DM| = |MC| = 1/2$ ,  $DC$  y  $FM$  son segmentos,  $FM \perp DC$ . Además, el arco  $MC$  (cuyo centro es  $D$ ) separa la región, para la cual en el  $\triangle DBC$  el lado más grande es  $DC$ , de la región, para la cual el lado más grande es  $DM$ . El representante del  $\triangle DBC$  en este caso tiene la altura igual a  $2h$ , si el lado más grande es  $DC$ , o

$$\frac{h}{2m^2} \geq \frac{h}{2|DB_4|^2} = \frac{h}{\frac{5}{2} - 2\sqrt{1-h^2}} = q_1(h)h,$$

$q_1(h) > 1$  si  $h < \sqrt{7}/4$ .

2)  $u > m$ ,  $u > 1/2$ ,  $v > 2m$ . Notemos que la igualdad  $v = 2m$  tiene lugar en la circunferencia con el diámetro  $LC$ , donde  $|AL| = 1/3$ . En el interior de esta circunferencia  $v > 2m$ . Este caso tiene lugar, si el punto  $B$  se halla en el interior del triángulo curvilíneo  $DKN$  ( $KN$  y  $ND$  son arcos,  $DK$  es un segmento). Puesto que el triángulo  $DZC$  es semejante al triángulo de partida  $ABC$ , examinemos sólo el  $\triangle DZB$ . Su lado más grande es  $DZ$  igual a  $v/2$ . Su representante tendrá la altura

$$\begin{aligned} \text{igual a } \frac{h}{\frac{4}{3}(v/2)^2} &= \frac{h^2}{v^2} \geq \frac{h}{|AB_2|^2} \geq \frac{h}{|AB_3|^2} = \\ &= \frac{h}{5/9 + (4/3)\sqrt{1/9 - h^2}} = q_2(h)h, \quad q_2(h) > 1. \end{aligned}$$

3)  $u \geq 1/2$ ,  $u \geq m$ ,  $v \leq 2m$ . En este caso en el  $\triangle BZD$  el lado más grande es  $BD$  igual a  $m$  y no hay necesidad de continuar examinando las demás partes del  $\triangle BDC$ , puesto que el  $\triangle BYZ$  es semejante al  $\triangle BDC$ , mientras que el  $\triangle DYZ$  es semejante al  $\triangle ABD$  (ya no examinamos el  $\triangle DZC$ ).

Para los triángulos «izquierdos» hay dos casos posibles, análogos a los casos 2 y 3 para los triángulos «derechos».

2') Si  $B$  se halla en el interior de la figura  $DKNC$ , para los estudios ulteriores dejamos el triángulo  $DXB$  igual al triángulo  $DZB$ ; su representante tiene una altura no menor que  $q_2(h)h$ .

3') Si  $B$  se encuentra fuera de la figura  $DKNC$ , el estudio ulterior de las partes del  $\triangle ABD$  se termina.

Notemos que el coeficiente  $q_2(h)$  con el crecimiento de  $h$  aumenta, mientras que  $q_1(h)$  decrece y pasa a ser igual a 1 en el punto  $F$ ,  $h = \sqrt{7}/4$ . Tomemos los puntos  $P$  y  $Q$  en  $FM$  y el arco  $FC$  suficientemente próximos a  $F$ . En el interior de la figura  $B_1KNMPQB_4$  se cumplan las desigualdades  $q_1(h) \geq q_0$ ,  $q_2(h) \geq q_0$ ,  $q_0 > 1$ . Por consiguiente, el coeficiente de crecimiento  $h$  en todos los casos no es menor que  $q_0$ , y dentro de un número finito de pasos o para todos los triángulos examinados tendrá lugar el caso 3, o bien el vértice del triángulo estará en el interior del triángulo curvilíneo  $PFQ$ . La situación, cuando el punto  $B$  se encuentra en el interior de  $PFQ$  se examina fácilmente por separado. Además, hace falta examinar los triángulos «derechos». Es sufi-

ciente cumplir la condición  $|FP| \leq |FM| = \frac{1\sqrt{7}-1\sqrt{3}}{4}$ . En el  $\triangle BDC$  el lado  $BD$ , igual a  $m$ , es el más grande:  $h^2 \leq 7/16$ . Es fácil mostrar que al representante de la clase de triángulos semejantes a  $BDC$  le corresponderá un punto dispuesto fuera del triángulo curvilíneo  $PFQ$ . Y como en este caso la altura no disminuirá, para ambas partes del  $\triangle BDC$  tendrá lugar el caso 3. Con esto concluye la demostración de la primera parte.

La segunda parte se deduce del resultado del problema II.327, así como del hecho de que todos los triángulos, que se examinan después de la primera división, tienen un representante, cuya altura no es menor que  $h$ , y, por consiguiente, el ángulo mínimo no es menor que  $\angle B_4AC > \frac{1}{2}\angle B_1AC \geq \frac{1}{2}\angle BAC$ .

**II.381.** Enunciemos y demostremos el resultado más expresivo, que el que se necesita según la condición, obtenido por M. D. Kovaliov. Entre todas las figuras convexas que cubren cualquier triángulo con los lados que no superan la unidad, el área mínima la tiene el triángulo  $ABC$ , en el cual  $\angle A = 60^\circ$ ,  $|AB| = 1$  y la altura bajada sobre  $AB$  es igual a  $\cos 40^\circ$ . El área de este triángulo es igual a  $\frac{1}{2} \cos 40^\circ \approx 0,4924$ .

1) Notemos que para nosotros es suficiente encontrar un triángulo que cubra cualquier triángulo isósceles, cuyos lados son iguales a 1 y el ángulo  $\varphi$  entre ellos no supera a  $60^\circ$ . Esto se deduce del hecho de que cualquier tri-

ángulo, cuyos lados no superan a 1, puede cubrirse con un triángulo isósceles de tipo indicado.

2) Demostremos que cualquier triángulo isósceles indicado en el punto 1) puede cubrirse con el  $\triangle ABC$ . Construyamos una circunferencia con el centro en el punto  $C$  y el radio 1. Sean  $K, L, M$  y  $N$  los puntos sucesivos de su intersección con  $CB, BA$  y  $AC$  ( $L$  y  $M$  se hallan en  $BA$ ),  $\angle LCM = \angle MCN = 20^\circ$ . Por consiguiente, los triángulos isósceles con el ángulo  $0 \leq \varphi \leq 20^\circ$  se cubren con el sector  $CMN$ , mientras que los triángulos, en los cuales  $20^\circ < \varphi \leq \angle C$  se cubren por el  $\triangle ABC$ , si los extremos de la base se toman en los arcos  $KL$  y  $MN$  y el tercer vértice, en el punto  $C$ . Construyamos ahora la circunferencia de radio unitario con el centro en el punto  $A$ . Esta circunferencia pasa por el punto  $B$ , por segunda vez corta  $BC$  en el punto  $P$ , y el lado  $AC$ , en el punto  $Q$ . Obtenemos:  $\angle PAB = 180^\circ - 2\angle B < \angle C$ , puesto que  $B$  es el ángulo máximo del  $\triangle ABC$ . Por consiguiente, al tomar el vértice del triángulo isósceles en el punto  $A$  y los extremos de la base en el punto  $B$  y en el arco  $PQ$ , se puede cubrir cualquier triángulo isósceles, para el cual  $\angle C < \varphi \leq 60^\circ$  (incluso  $180^\circ - 2\angle B \leq \varphi \leq 60^\circ$ ).

3) Demostremos que para cualquier disposición del triángulo isósceles  $DEF$ , en el cual  $\angle DEF = 20^\circ$ ,  $|DE| = |EF| = 1$  y del triángulo equilátero  $XYZ$  con el lado 1 en el plano, el área de la figura convexa mínima que contiene los triángulos  $DEF$  y  $XYZ$  no es menor que  $\frac{1}{2}\cos 10^\circ$ . Primero notemos que

el lado del triángulo regular mínimo que contiene  $DEF$ , es igual a  $\frac{2}{\sqrt{3}} \cos 10^\circ$ . (Es válida la afirmación siguiente: si es posible situar un triángulo en el interior del otro, se puede disponerlo de manera que dos de sus vértices se encontrarán en los lados del triángulo mayor. No vamos a demostrar esta afirmación general. Es suficiente comprobar su validez en el caso, cuando uno de éstos es el  $\triangle DEF$ , mientras que el otro es regular. No es difícil hacerlo.) Examinemos ahora el triángulo regular mínimo  $X_1Y_1Z_1$  con los lados paralelos a los del triángulo  $XYZ$  que contiene los triángulos  $DEF$  y  $XYZ$ . El lado del triángulo  $X_1Y_1Z_1$  no es menor que  $\frac{2}{\sqrt{3}} \cos 10^\circ$ , mientras que la altura no es menor que  $\cos 10^\circ$ . En los lados del  $\triangle X_1Y_1Z_1$  que no contienen los lados del  $\triangle XYZ$ , deben hallarse los vértices del  $\triangle DEF$ . Por consiguiente, la suma de distancias a partir de los vértices del  $\triangle DEF$  que se encuentran fuera del  $\triangle XYZ$ , hasta los lados correspondientes del  $\triangle XYZ$  no es menor que  $\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , mientras que el área del polígono convexo mínimo que contiene el  $\triangle DEF$  y el  $\triangle XYZ$ , no es menor que  $\frac{1}{2} \left( \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$ . (M. D. Kovaliov demostró también que la cobertura convexa de área mínima, encontrada por nosotros para los triángulos, cuyos lados superan la unidad, es la única.)

## Apéndice

### Definición de la inversión

Examinemos en el plano una circunferencia  $\alpha$  con el centro en el punto  $O$  y el radio  $R$ . Para cada punto  $A$  distinto de  $O$  determinemos el punto  $A'$  de la manera siguiente. El punto  $A'$  está dispuesto en el rayo  $OA$ ; además,  $|OA'| \cdot |OA| = R^2$ . De este modo, para todos los puntos del plano, a excepción del punto  $O$ , se plantea la transformación que llamaremos *inversión respecto a la circunferencia  $\alpha$* . Esta transformación se llama también *simetría respecto a la circunferencia* y los puntos  $A$  y  $A'$ , *puntos simétricos respecto a la circunferencia  $\alpha$* . (Si la recta se considera como una circunferencia de radio infinito, entonces la simetría respecto a la recta puede representarse como el caso límite de simetría respecto a la circunferencia.) El punto  $O$  se llama *centro de la inversión* y la magnitud  $k = R^2$ , *potencia de la inversión*. Es evidente que los puntos  $A$  y  $A'$  se cambian de lugares,  $A$  pasa a  $A'$ ,  $A'$  pasa a  $A$ . Todos los puntos de la circunferencia  $\alpha$ , y solamente ellos, permanecen inmóviles. Los puntos interiores de la circunferencia  $\alpha$  pasan a ser exteriores y viceversa.

Se puede «completar» el plano con «un punto infinitamente alejado» ( $\infty$ ) y considerar que durante la inversión el punto  $O$  pasa a  $\infty$ , mientras que  $\infty$  pasa al punto  $O$ .

En lo ulterior, designaremos los puntos, a los cuales los puntos  $A, B, C \dots$  pasan durante la inversión, por  $A', B', C' \dots$



## Propiedades de la inversión

Enumeremos algunas propiedades principales de la inversión, dejando sin demostrar las más evidentes y simples y trazando el esquema de razonamientos en todos los demás casos. (Al lector le toca completar los razonamientos con los eslabones que faltan, analizar las diferentes variantes de disposición de las figuras, así como realizar los cálculos y los dibujos.)

1. Una recta que pasa por el centro de la inversión, se transforma en sí misma.

2. Si los puntos  $O$ ,  $A$  y  $B$  no se hallan en una recta, los triángulos  $OAB$  y  $OB'A'$  son semejantes. Son homólogos los vértices  $A$  y  $B'$ ,  $B$  y  $A'$ . Además,  $|A'B'| = (k |AB|) / (|OA| \cdot |OB|)$ .

Notemos que la última igualdad es válida también si los puntos  $O$ ,  $A$  y  $B$  se encuentran en una recta.

3. La recta que no pasa por el centro de la inversión  $O$ , se transforma en la circunferencia que pasa por  $O$ . Además, si  $l$  es una recta dada,  $A$  es el pie de la perpendicular bajada desde  $O$  sobre  $l$ , entonces  $l$  se transforma en la circunferencia con el diámetro  $OA'$ .

Tomemos un punto arbitrario  $B$  en  $l$ . De la semejanza de los triángulos  $OAB$  y  $OB'A'$  (propiedad 2) se deduce que  $\angle OB'A' = \angle OAB = 90^\circ$ .

4. La circunferencia  $\omega$  que pasa por el centro de la inversión  $O$ , se transforma en la recta perpendicular a otra recta que pasa por  $O$  y el centro de la circunferencia  $\omega$ .

5. Si la recta  $l$  y la circunferencia  $\omega$  se transforman una en otra en caso de inversión con el centro en  $O$ , la tangente a  $\omega$  en el punto  $O$  es paralela a  $l$ .

6. La circunferencia  $\omega$  que no pasa por  $O$ , se transforma en la circunferencia  $\omega'$  que tampoco contiene  $O$ . Además,  $O$  es el centro exterior de semejanza de las circunferencias  $\omega$  y  $\omega'$ .

Para demostrar tracemos por  $O$  una recta y designemos por  $A$  y  $B$  los puntos de su intersección con la circunferencia (en particular, se puede considerar que  $A$  y  $B$  son puntos diametralmente opuestos de  $\omega$ ). Supongamos que  $B$  se halla en el segmento  $OA$ . Entouces,  $A'$  pertenece al segmento  $OB'$ . Si  $C$  es un punto arbitrario de la circunferencia, considerando la semejanza de los triángulos correspondientes (propiedad 2), tendremos  $\angle A'C'B' = \angle OC'B' - \angle OC'A' = \angle OBC - \angle OAC = \angle ACB$ .

Puesto que el número de puntos de intersección de dos líneas en caso de inversión no varía, entonces:

7. Dos circunferencias tangentes, en caso de inversión y conforme a la posición del centro de la inversión, se transforman en:

a) dos circunferencias tangentes (si  $O$  no se halla en ninguna de ellas);

b) una circunferencia y una recta tangente a ésta ( $O$  se sitúa en una de las circunferencias, pero no coincide con el punto de tangencia);

c) un par de rectas paralelas ( $O$  coincide con el punto de tangencia).

## Ángulo entre circunferencias

Llámase ángulo entre dos circunferencias que se intersecan, al ángulo comprendido entre las tangentes a las circunferencias, las cuales pasan por uno de los puntos de intersección de éstas. Llámase ángulo entre la circunferencia y la recta que la interseca, al ángulo comprendido entre esta recta y la tangente a la circunferencia, la cual pasa por uno de los puntos de intersección. Además, se puede considerar que el ángulo entre las rectas no supera a  $90^\circ$ .

Es evidente que, al determinar el ángulo entre las circunferencias, la elección del punto de intersección no tiene importancia. También es evidente que el ángulo entre las circunferencias es igual al ángulo entre los radios trazados hacia el punto de intersección.

**8. En caso de inversión se conserva el ángulo entre las rectas, es decir, el ángulo entre las rectas es igual al ángulo entre sus imágenes.**

Si el centro de la inversión coincide con el punto de intersección de las rectas, la afirmación es trivial. Pero si este centro no coincide con el punto de intersección de las rectas, la misma se deduce de la propiedad 5 y de la definición del ángulo entre dos circunferencias o entre una circunferencia y una recta.

**9. En caso de inversión el ángulo entre dos circunferencias es igual al ángulo entre sus imágenes.**

Examinemos el caso, cuando el centro de la inversión no se halla en las circunferencias dadas. Supongamos que  $A$  es uno de los puntos de intersección de las circunferencias  $\omega_1$  y

$\omega_2$ ,  $l_1$  y  $l_2$  son las tangentes a  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , respectivamente, que pasan por  $A$ . Supongamos adicionalmente que el centro de la inversión  $O$  no se halla en las rectas  $l_1$  y  $l_2$ . En caso de inversión con el centro  $O$  las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se transformarán en las circunferencias  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$ , respectivamente, mientras que las rectas  $l_1$  y  $l_2$ , en las circunferencias  $l'_1$  y  $l'_2$ , tangentes a  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$ , respectivamente, en el punto de su intersección  $A'$  (propiedad 7), es decir, el ángulo entre  $l'_1$  y  $l'_2$  es igual al ángulo entre  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$  y, puesto que el ángulo entre  $l'_1$  y  $l'_2$  es igual al ángulo entre  $l_1$  y  $l_2$  (propiedad 8), entonces el ángulo entre  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$  es igual al ángulo entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

10. Si las circunferencias  $\alpha$  y  $\omega$  son ortogonales, es decir, el ángulo entre ellas es igual a  $90^\circ$ , en caso de inversión respecto a  $\alpha$ , la circunferencia  $\omega$  se transforma en sí misma. Y viceversa, en caso de inversión respecto a la circunferencia  $\alpha$  la circunferencia  $\omega$  que no coincide con  $\alpha$ , se transforma en sí misma, entonces  $\alpha$  y  $\omega$  son ortogonales.

Es evidente que la última propiedad es simétrica respecto a  $\alpha$  y  $\omega$ . Los radios de las circunferencias  $\alpha$  y  $\omega$  son iguales, respectivamente, a las tangentes trazadas desde el centro de una circunferencia hacia otra.

Basándonos en la propiedad 10, podemos definir la inversión de la manera siguiente. Todos los puntos de la circunferencia  $\alpha$  se transforman en sí mismos. Pero si  $A$  no pertenece a  $\alpha$  y no coincide con su centro, será imagen del punto  $A$  el punto  $A'$ , el segundo punto de intersección de cualesquiera dos circunferencias

ortogonales a  $\alpha$ , las cuales pasan por  $A$ . Ahora se comprende el sentido del segundo nombre de la inversión, definida como simetría respecto a la circunferencia. De esta definición y de la propiedad de inversión de conservar el ángulo entre las circunferencias que se intersecan, se deduce que:

11. Para cualquier circunferencia  $\omega$  y dos puntos  $A$  y  $B$  que se transforman uno en otro en caso de inversión respecto a  $\omega$ , serán sus imágenes en caso de inversión respecto a la circunferencia  $\alpha$ , cuyo centro no pertenece a  $\omega$ , la circunferencia  $\omega'$  y los puntos  $A'$  y  $B'$ , que pasan uno a otro en caso de inversión respecto a  $\omega'$ . Pero si el centro de  $\alpha$  se halla en  $\omega$ , entonces  $\omega$  pasará a la recta  $l$  y los puntos  $A$  y  $B$ , a los puntos  $A'$  y  $B'$ , simétricos respecto a  $l$ .

### Eje radical de dos circunferencias

Resolvamos el problema siguiente.

Se dan dos circunferencias no concéntricas  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Hallar el lugar geométrico de los puntos  $M$ , para los cuales las tangentes trazadas hacia las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son iguales entre sí.

*Solución.* Supongamos que  $O_1$  y  $O_2$  son los centros de las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son sus radios,  $A_1$  y  $A_2$  son los puntos de tangencia. Tenemos  $|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = (|MA_1|^2 + r_1^2) - (|MA_2|^2 + r_2^2) = r_1^2 - r_2^2$ . De esta manera, todos los puntos pertenecen a una recta perpendicular a  $O_1O_2$ . Esta recta se llama *eje radical* de las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Para concluir la resolución de nuestro

problema nos queda determinar ¿qué puntos de la recta encontrada satisfacen a su condición? Se puede mostrar que si las circunferencias no se intersecan, convienen todos los puntos del eje radical. Pero si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se intersecan, el eje radical contiene su cuerda común; todos los puntos de la cuerda común no forman parte del lugar buscado de puntos. Respectivamente, en caso de tangencia entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se excluye el punto de tangencia.

Examinemos la circunferencia  $\alpha$  con el centro  $M$  en el eje radical de las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  y el radio igual a la longitud de la tangente trazada desde  $M$  hacia  $\omega_1$  o  $\omega_2$ . (Suponemos que  $M$  se encuentra fuera de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .) La circunferencia  $\alpha$  es ortogonal a las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . De esta manera, los puntos del eje radical dispuestos fuera de las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , si éstas se intersecan o son tangentes, son el lugar geométrico de los centros de las circunferencias ortogonales simultáneamente a  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , mientras que la inversión correspondiente transforma cada una de éstas en sí misma.

Ahora demostremos una propiedad más de la inversión.

**12.** Si las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  no se intersecan, existe una inversión que las transforma en circunferencias concéntricas.

Tomemos la circunferencia  $\alpha$  ortogonal a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  con el centro en la recta  $l$  que contiene los centros de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Puesto que las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  no se intersecan, semejante circunferencia  $\alpha$  existe. Sea que  $O$  es uno de los puntos de intersección de la circunferen-

cia  $\alpha$  con la recta  $l$ . En caso de inversión con el centro en  $O$  la recta  $l$  se transforma en sí misma, mientras que la circunferencia  $\alpha$ , en la recta  $p$ . Las rectas  $l$  y  $p$  se intersecan y son ortogonales a las circunferencias  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$  que son las imágenes de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en caso de inversión respecto a  $\alpha$ . De aquí se deduce que los centros de  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$  coinciden con el punto de intersección de las rectas  $l$  y  $p$ , es decir,  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$  son circunferencias concéntricas. (Demuéstrase que si la recta es ortogonal a la circunferencia, ella pasa por su centro.)

Aquí es oportuno hacer una observación. Cualquier circunferencia ortogonal a  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$ , o sea, a las circunferencias concéntricas, es una recta, o sea, una circunferencia de radio infinito. Por consiguiente, en caso de inversión respecto a la circunferencia  $\alpha$  todas las circunferencias ortogonales a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  deben transformarse en rectas. Por consiguiente, todas las circunferencias ortogonales a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  cortan la recta  $l$  en dos puntos fijos.

**13.** Para cualesquiera dos circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  existe por lo menos una inversión que las transforma una en otra. La circunferencia que define esta inversión, se llama *circunferencia complementaria* de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

A continuación vamos a enunciar el teorema 13 de un modo más preciso. Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se intersecan, existen precisamente dos inversiones, para las cuales  $\omega_1$  se transforma en  $\omega_2$  y viceversa. Pero si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  entran en contacto o no se intersecan, hay una sola inversión semejante.

Examinemos al principio el caso de las

circunferencias que se intersecan. Hagamos la inversión  $I$  con el centro en uno de los puntos de su intersección.  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se transformarán en las rectas  $l_1$  y  $l_2$  que se intersecan. Las rectas  $l_1$  y  $l_2$  tienen dos bisectrices, respecto a las cuales  $l_1$  y  $l_2$  son simétricas. Por consiguiente (propiedad 11), para la misma inversión  $I$ , estas bisectrices se transformarán en dos circunferencias, respecto a las cuales  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son simétricas.

Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  no se intersecan, existe la inversión  $I$  (propiedad 12) que las transforma en las circunferencias concéntricas  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$ . Supongamos que  $O$  es el centro de  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son sus radios. La inversión respecto a la circunferencia  $\alpha'$  con el centro en  $O$  y el radio  $\sqrt{r_1 r_2}$  transforma  $\omega'_1$  y  $\omega'_2$  una en otra. Para la inversión  $I$  la circunferencia  $\alpha'$  se transformará en la circunferencia buscada  $\alpha$ , respecto a la cual  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son simétricas.

Al concluir este apartado demos la definición del centro radical de tres circunferencias. Examinemos tres circunferencias  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$ , cuyos centros no se hallan en una recta. Se puede demostrar que los tres ejes radicales que corresponden a tres pares de estas circunferencias, se intersecan en el mismo punto  $M$ . Este punto se llama *centro radical* de las circunferencias  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$ . Las tangentes trazadas desde  $M$  hacia las circunferencias  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$  son iguales entre sí. Por lo tanto, la inversión correspondiente con el centro en  $M$  transforma cada circunferencia  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$  en sí misma.



## Problemas y ejercicios

1. Hállese la imagen del cuadrado para la inversión respecto a la circunferencia inscrita en éste.

2. Se da el triángulo  $ABC$ . Hallar todos los puntos  $O$  tales que la inversión con el centro en  $O$  transforme las rectas  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$  en las circunferencias de radio igual.

3. Sea que  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  son las imágenes de los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , respectivamente, para la inversión con el centro en el punto  $O$ . Demostrar que:

a) si  $O$  coincide con el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del  $\triangle ABC$ , entonces el triángulo  $A'B'C'$  es semejante al triángulo  $ABC$ ;

b) si  $O$  coincide con el centro de la circunferencia inscrita, entonces el triángulo  $A'B'C'$  es semejante al triángulo con vértices en los centros de las circunferencias exinscritas;

c) si  $O$  coincide con el punto de intersección de las alturas del triángulo  $ABC$ , entonces el triángulo  $A'B'C'$  es semejante al triángulo con vértices en las bases de las alturas del triángulo.

4. Los puntos  $A$  y  $A'$  son simétricos respecto a la circunferencia  $\alpha$ ,  $M$  es un punto arbitrario de esta circunferencia. Demostrar que la razón  $|AM|/|A'M|$  es constante.

5. En la circunferencia  $\alpha$  se trazan dos diámetros perpendiculares. Las rectas que unen los extremos de un diámetro con un punto arbitrario de la circunferencia  $\alpha$ , cortan el segundo diámetro y su prolongación en los pun-

tos  $A$  y  $A'$ . Demostrar que  $A$  y  $A'$  son simétricos respecto a la circunferencia  $\alpha$ .

6. Demostrar que si la circunferencia  $\omega$  pasa por el centro de la circunferencia  $\alpha$ , la imagen de  $\omega$  en caso de inversión respecto a  $\alpha$  es su eje radical.

7. Se da una circunferencia y dos puntos  $A$  y  $B$  en ésta. Examinemos los pares posibles de circunferencias que son tangentes a la dada en los puntos  $A$  y  $B$  y son tangentes entre sí en el punto  $M$ . Hallar el lugar geométrico de puntos  $M$ .

8. Se dan dos circunferencias tangentes. Una circunferencia arbitraria es tangente a una de éstas en el punto  $A$  y a otra, en el punto  $B$ . Demostrar que la recta  $AB$  pasa por un punto fijo del plano. (En caso de circunferencias iguales  $AB$  es paralela a la recta que pasa por sus centros.)

9. Se dan tres circunferencias  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  que pasan por un punto. Se conoce que la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , contiene el centro de la circunferencia  $\alpha_3$ ; la recta que pasa por los puntos de intersección de  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ , contiene el centro de la circunferencia  $\alpha_1$ . Demostrar que la recta que pasa por los puntos de intersección de  $\alpha_3$  y  $\alpha_1$ , contiene el centro de la circunferencia  $\alpha_2$ .

10. Se dan dos circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Examinemos dos circunferencias arbitrarias tangentes a las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en ciertos puntos, que se tocan en el punto  $M$ . Hallar el lugar geométrico de puntos  $M$ .

11. Demostrar que con ayuda de la inver-

sión cualesquiera dos circunferencias pueden transformarse en circunferencias iguales.

12. Demostrar que con ayuda de la inversión los cuatro puntos  $A, B, C, D$ , que no se hallan en una recta, pueden transformarse en vértices de un paralelogramo.

13. La inversión respecto a la circunferencia con el centro  $O$  y el radio  $R$  transforma la circunferencia con el centro  $A$  y el radio  $r$  en una circunferencia con el radio  $r'$ . Demostrar que  $r' = (rR^2)/|OA|^2 - r^2$ .

14. En un plano se dan cuatro puntos  $A, B, C, D$ . Demostrar que  $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|$ .

15. En el triángulo  $ABC$  el lado  $AC$  es el más grande. Demostrar que para cualquier punto  $M$  es válida la desigualdad  $|AM| + |CM| \geq |BM|$ .

16. Demostrar que todas las circunferencias que pasan por el punto dado  $A$  y cortan la circunferencia  $\alpha$  en los puntos diametralmente opuestos, contienen un punto fijo más, distinto de  $A$ .

17. Se dan cuatro puntos  $A, B, C, D$ . Demostrar que el ángulo entre las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos  $ABC$  y  $BCD$  es igual al ángulo entre las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos  $CDA$  y  $DAB$ .

18. La circunferencia  $\omega$  pasa por el centro de la circunferencia  $\alpha$ .  $A$  es un punto arbitrario de la circunferencia  $\omega$ . La recta que pasa por  $A$  y el centro de la circunferencia  $\alpha$ , corta la cuerda común de las circunferencias  $\alpha$  y  $\omega$  en el punto  $A'$ . Demostrar que  $A$  y  $A'$

son simétricos respecto a la circunferencia  $\alpha$ .

19. Se dan dos circunferencias que no se cortan y no contienen una a otra, y punto  $A$  dispuesto fuera de las circunferencias. Demostrar que existen precisamente cuatro circunferencias (entre éstas también pueden figurar rectas) que pasan por  $A$  y son tangentes a las circunferencias dadas.

20. Sea que  $s$  es el área de un círculo, cuyo centro se halla a una distancia  $a$  del punto  $O$ . La inversión respecto a la circunferencia con el centro  $O$  y el radio  $R$  transforma la circunferencia dada en una circunferencia con un área  $s'$ . Demostrar que  $s' = s \cdot R^4 / (a^2 - R^2)^2$ .

21. Se dan dos circunferencias que entran en contacto entre sí. Examinemos otras dos circunferencias tangentes a las dadas y entre sí. Sea que  $r_1$  y  $r_2$  son los radios de dos últimas circunferencias y  $d_1$  y  $d_2$ , las distancias a partir de sus centros hasta la recta que pasa por los centros de las circunferencias dadas. Demostrar que

$$\left| \frac{d_2}{r_2} - \frac{d_1}{r_1} \right| = 2 \text{ o bien } \frac{d_2}{r_2} + \frac{d_1}{r_1} = 2.$$

22. Supongamos que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son dos circunferencias que entran en contacto. Examinemos la sucesión de diferentes circunferencias  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ , cada una de las cuales es tangente a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  y, además, la circunferencia  $\alpha_{k+1}$  es tangente a la circunferencia  $\alpha_k$ . Designemos los radios de las circunferencias  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , por  $r_0, r_1, \dots$

$\dots, r_n, \dots$ , y las distancias a partir de sus centros hasta la recta que pasa por los centros de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , por  $d_0, d_1, \dots, d_n, \dots$ . Expresar  $d_n$  por  $r_n$ , si:

a)  $d_0 = 0$  (este caso es posible, si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son tangentes interiormente);

b)  $d_0 = kr_0$ .

23. Supongamos que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son dos circunferencias que se intersecan;  $A$  y  $B$  son sus puntos de intersección;  $\omega$  es una circunferencia arbitraria tangente a  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ;  $r$  es el radio de la circunferencia  $\omega$ ;  $d$  es la distancia a partir de su centro hasta la recta  $AB$ . Demostrar que la razón  $r/d$  puede tomar sólo dos valores diferentes.

24. Se dan dos circunferencias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  que no se intersecan, y un juego de circunferencias  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  tangentes a  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ; además,  $\omega_2$  es tangente a  $\omega_1$ ;  $\omega_3$  es tangente a  $\omega_2, \dots, \omega_n$  es tangente a  $\omega_{n-1}$ . Diremos que el sistema de circunferencias  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  forma una cadena, si  $\omega_n$  y  $\omega_1$  tienen contacto entre sí. Demostrar que, si para las circunferencias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  existe por lo menos una cadena de  $n$  circunferencias, entonces existe una cantidad infinita de cadenas. Además, para cualquier punto  $A$  en cualquier circunferencia  $\alpha_1$  o  $\alpha_2$  existe una cadena, para la cual  $A$  es el punto de tangencia de una de las circunferencias de la cadena.

25. Demostrar que si para las circunferencias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  existe una cadena de  $n$  circunferencias que no se intersecan (véase el problema 24), entonces  $(R \pm r)^2 - d^2 = 4Rr \operatorname{tg}^2 \times (\pi/n)$ , donde  $R$  y  $r$  son los radios de las

circunferencias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ,  $d$  es la distancia entre sus centros. (El signo «—» se toma, si una de las circunferencias se encuentra en el interior de la otra; se toma el signo «+», en el caso contrario.)

26. Examinemos tres circunferencias, cada una de las cuales es tangente a tres circunferencias exinscritas de cierto triángulo; además, cada una de estas circunferencias tiene contacto con una circunferencia exinscrita por el interior y con dos circunferencias, por el exterior. Demostrar que estas tres circunferencias concurren en un punto.

27. Supongamos que  $d_1, d_2, \dots, d_n$  son las distancias a partir del punto  $M$ , dispuesto en el arco  $A_1A_n$  de la circunferencia circunscrita alrededor del polígono regular de  $n$  lados  $A_1A_2 \dots A_n$ , hasta los vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Demostrar que 
$$\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \dots + \frac{1}{d_{n-1}d_n} = \frac{1}{d_1d_n}.$$

28. Supongamos que  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_0$  son los lados  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$  del polígono de  $n$  lados  $A_1A_2, \dots, A_n$ , inscrito en la circunferencia,  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_0$  son las distancias a partir de un punto arbitrario  $M$  dispuesto en el arco  $A_nA_1$  de la circunferencia, hasta las rectas  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ . Demostrar que 
$$\frac{a_0}{p_0} =$$

$$= \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}.$$

## Indicaciones y resoluciones

2. Hay cuatro puntos que poseen la propiedad requerida: son los centros de la circunferencia inscrita en el triángulo y de tres circunferencias exinscritas.

3. b) Demuéstrase la semejanza de los triángulos  $OAB$  y  $OI_bI_a$ . Ahora, de la propiedad 2 se deducirá el paralelismo de las rectas  $A'B'$  e  $I_aI_b$ .

7. Supongamos que  $\alpha$  y  $\beta$  son circunferencias tangentes a la circunferencia dada  $\omega$  en los puntos  $A$  y  $B$ . Para la inversión con el centro en  $A$  las circunferencias  $\omega$  y  $\alpha$  se transformarán en las rectas paralelas  $l$  y  $p$ ; la circunferencia  $\beta$ , en la circunferencia  $\beta'$  tangente a  $l$  en el punto fijo  $B'$  y a la recta  $p$  en el punto  $M'$ . De esta manera,  $M'$  se halla en la recta que pasa por  $B'$  perpendicularmente a  $l$ . El lugar geométrico de puntos buscado es la circunferencia que pasa por  $A$  y  $B$  y es ortogonal a  $\omega$ . Los mismos puntos  $A$  y  $B$  se excluyen. Su centro se encuentra en el punto de intersección de las tangentes a  $\omega$  que pasan por  $A$  y  $B$ .

8. Supongamos que  $O$  es el punto de tangencia de las circunferencias dadas. En caso de inversión con el centro en  $O$  estas circunferencias se transformarán en un par de rectas paralelas, en las cuales se hallen los puntos  $A'$  y  $B'$ ; además, el segmento  $A'B'$  es perpendicular a ellas. La recta  $AB$  se transformará en la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo  $A'B'O$ , la cual, evidentemente, pasa

por el punto  $P$  simétrico al punto  $O$  respecto a la recta equidistante de las rectas paralelas obtenidas.

9. Supongamos que  $O$  es el punto de intersección de las circunferencias  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ;  $A_1, A_2, A_3$  son, respectivamente, los puntos de intersección, distintos de  $O$ , de las circunferencias  $\alpha_2$  y  $\alpha_3, \alpha_3$  y  $\alpha_1, \alpha_1$  y  $\alpha_2$ . En caso de inversión con el centro en  $O$  las circunferencias  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  se transformarán en las rectas que forman el triángulo  $A'_1A'_2A'_3$ . A partir de la condición y de la propiedad 3 se deduce que  $A'_3O \perp A_1A_2, A'_1O \perp A_2A_3$ . Por consiguiente,  $O$  es el punto de intersección de las alturas del triángulo  $A'_1A'_2A'_3$  y  $A'_2O \perp A'_3A'_1$ .

10. Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se intersecan, el lugar geométrico buscado está formado por dos circunferencias, o sea, las circunferencias complementarias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  (teorema 13), excluyendo los puntos de intersección de las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Si ellas tienen contacto, entonces aquél está formado por una circunferencia complementaria, excluyendo el punto de tangencia. Para demostrar es suficiente hacer la inversión con el centro en el punto común de las circunferencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Si  $\omega_1$  y  $\omega_2$  no tienen puntos comunes, conviene toda la circunferencia complementaria. En este caso hace falta hacer la inversión que transforme  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en circunferencias concéntricas.

11. La propiedad necesaria la tiene cualquier inversión con el centro en la circunferencia complementaria, puesto que esta inversión transforma la circunferencia complementaria en una recta, respecto a la cual las imá-



genes de las circunferencias dadas son simétricas.

12. Examinemos dos casos.

1) Los puntos  $A, B, C, D$  se hallan en la circunferencia  $\omega$ . Se puede suponer que los puntos dados son los vértices sucesivos de un cuadrilátero inscrito. Sea que  $O$  es el punto de intersección de la circunferencia ortogonal a  $\omega$ , la cual pasa por  $A$  y  $C$ , con la circunferencia ortogonal a  $\omega$ , la cual pasa por  $B$  y  $D$ . En caso de inversión con el centro en  $O$  el cuadrilátero  $ABCD$  se transformará en el cuadrilátero inscrito  $A'B'C'D'$ , cuyas diagonales son diámetros, es decir,  $A'B'C'D'$  es un rectángulo.

2)  $A, B, C, D$  no se hallan en una circunferencia. Designemos por  $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$  las circunferencias circunscritas alrededor de los triángulos  $BCD, CDA, DAB, ABC$ , respectivamente. Tomemos la circunferencia complementaria para  $\omega_B$  y  $\omega_D$  que separa los puntos  $B$  y  $D$ , y la circunferencia complementaria para  $\omega_A$  y  $\omega_C$  que separa los puntos  $A$  y  $C$ . Designemos por  $O$  el punto de su intersección. (Demuéstrase que estas circunferencias se intersecan.) En caso de inversión con el centro  $O$  los puntos dados pasarán a los vértices del cuadrilátero convexo  $A'B'C'D'$ , en el cual cada una de sus diagonales lo divide en dos triángulos con circunferencias circunscritas iguales (véase el problema 11); por consiguiente los ángulos opuestos del cuadrilátero son iguales; de aquí se deduce que  $A'B'C'D'$  es un paralelogramo (demuéstrase).

13. Supongamos que la recta  $OA$  corta la

circunferencia con el centro en  $A$ , en los puntos  $B$  y  $C$ . Entonces,  $|B'C'| = 2r'$ . Ahora se puede hacer uso de la fórmula dada en el punto 2.

14. Hagamos la inversión con el centro  $A$ . Tendremos  $|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|$ . Luego apliquemos la fórmula del punto 2.

15. Del problema anterior se deduce que  $|AC| \cdot |BM| \leq |AB| \cdot |CM| + |BC| \times \times |AM|$ . Puesto que  $AC$  es el lado más grande, entonces  $|BM| \leq \frac{|AB|}{|AC|} \cdot |CM| + \frac{|BC|}{|AC|} \cdot |AM| \leq |AM| + |MC|$ .

16. Supongamos que  $A'$  se obtiene a partir de  $A$  en caso de inversión respecto a la circunferencia  $\alpha$ .  $A_1$  es simétrico a  $A'$  respecto al centro de la circunferencia  $\alpha$ . Demuéstrese que todas las circunferencias indicadas en el planteamiento pasan por  $A_1$ .

17. Hagamos la inversión con el centro en  $A$ . El primer ángulo será igual al ángulo entre la recta  $B'C'$  y la circunferencia circunscrita alrededor de  $B'C'D'$ ; el segundo, al ángulo entre las rectas  $D'C'$  y  $D'B'$ .

18. La inversión respecto a la circunferencia  $\alpha$  transforma la recta  $AB$  en  $\omega$ .

19. Hagamos la inversión con el centro en  $A$ . Entonces, la afirmación del problema es equivalente a la afirmación de que dos circunferencias, dispuestas una fuera de la otra, tienen precisamente cuatro rectas tangentes.

20. Supongamos que la recta que pasa por el centro de la inversión y el centro de la circunferencia dada, corta la circunferencia dada

en los puntos, cuyas coordenadas son iguales a  $x_1$  y  $x_2$  (el origen de las coordenadas es el punto  $O$ ). Entonces,

$$s' = \frac{\pi}{4} \left( \frac{R^2}{x_1} - \frac{R^2}{x_2} \right)^2 = \\ = \frac{\pi}{4} (x_1 - x_2)^2 \frac{R^4}{(x_1 x_2)^2} = s \frac{R^4}{(a^2 - R^2)^2}.$$

21. Notemos que para cualquier recta  $l$  que pasa por  $O$ , en caso de inversión con el centro  $O$  para una circunferencia arbitraria se cumple la igualdad  $d/r = d'/r'$ , donde  $r$  y  $r'$  son los radios de la circunferencia dada y de su imagen,  $d$  y  $d'$  son, respectivamente, las distancias a partir de sus centros hasta la recta  $l$ . Esto se deduce del hecho de que  $O$  es el centro exterior de semejanza de ambas circunferencias (propiedad 6).

Volvamos a nuestro problema. Hagamos la inversión con el centro en el punto de tangencia de las circunferencias dadas. Estas últimas se transforman en un par de rectas paralelas, la recta  $l$  que pasa por los centros de las circunferencias dadas, es perpendicular a éstas. Las circunferencias con radios  $r_1$  y  $r_2$  se transformarán en un par de circunferencias de radio igual a  $r'$ , que son tangentes una a otra, así como al par de las rectas paralelas obtenidas. Ahora es evidente que, si los centros de dos últimas circunferencias se hallan por un lado de  $l$  y, para concretar,  $d'_2 > d'_1$ , entonces  $\frac{d'_2}{r'} - \frac{d'_1}{r'} = \frac{d'_2 + 2r'}{r'} - \frac{d'_1}{r'} = 2$ . Si éstos se hallan por distintos lados, entonces  $\frac{d'_2}{r'} + \frac{d'_1}{r'} = 2$ .

Aprovechemos el resultado del problema anterior. Obtenemos en el caso a)  $d_n = 2nr_n$ ; en el caso b) son posibles dos respuestas:  $d_n = (2n + k)r_n$  y  $d_n = |k - 2n|r_n$ .

23. Hagamos la inversión con el centro en  $A$ ; las circunferencias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se transformarán en dos rectas  $l_1$  y  $l_2$  que se intersecan en el punto  $B'$  dispuesto en la recta  $AB$ . Como se ha demostrado durante la solución del problema 21,  $r/d = r'/d'$ . Pero  $r'/d'$  es la razón entre el radio de la circunferencia tangente a  $l_1$  y  $l_2$ , y la distancia a partir de su centro hasta la recta fija que pasa por el punto de intersección de  $l_1$  y  $l_2$ . Por consiguiente,  $r'/d'$  toma sólo dos valores, según cuál de dos pares de ángulos verticales formados por  $l_1$  y  $l_2$  contiene la circunferencia.

24. Hagamos la inversión que transforma  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  en circunferencias concéntricas (véase el teorema 12). Después de esto la afirmación del problema pasa a ser evidente. Este teorema lleva el nombre de *porisma de Steiner*.

25. Si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son circunferencias concéntricas con radios  $R$  y  $r$ , entonces la validez de la igualdad  $(R - r)^2 = 4Rr \cdot \operatorname{tg}^2(\pi/n)$  ( $d = 0$ ) se obtiene fácilmente de la relación evidente:  $R - r = (R + r) \cdot \operatorname{sen}(\pi/n)$ ,  $R > r$ . Hagamos la inversión, cuyo centro se halla a la distancia  $a$  del centro común de las circunferencias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Sea que, para concretar,  $a > R$ . Las circunferencias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se transformarán en las circunferencias  $\alpha'_1$  y  $\alpha'_2$ ,  $\alpha'_2$  se halla en el interior de  $\alpha'_1$ . Además, según la fórmula del problema 13, tendremos  $R' = \frac{R\rho^2}{a^2 - R^2}$ ,  $r' =$

$= \frac{r\rho^2}{a^2 - r^2}$ , donde  $\rho^2$  es la potencia de la inversión. Para encontrar  $d'$  que es la distancia entre los centros de las circunferencias  $\alpha'_1$  y  $\alpha'_2$ , tracemos una recta por el centro de la inversión y los centros de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ; el segmento de esta recta, comprendido entre los primeros dos puntos de intersección con las circunferencias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , es igual al espesor del anillo ( $R - r$ ). En caso de inversión aquél se transformará en un segmento con longitud

$$b = \frac{(R-r)\rho^2}{(a-r)(a-R)} \quad (\text{véase el punto 2}); \text{ por consiguiente } d' = |R' - r' - b| = \left| \frac{R\rho^2}{a^2 - R^2} - \frac{r\rho^2}{a^2 - r^2} - \frac{(R-r)\rho^2}{(a-r)(a-R)} \right| = \frac{a(R^2 - r^2)\rho^2}{(a^2 - r^2)(a^2 - R^2)}. \quad \text{Luego,}$$

sustituyendo  $R'$  y  $r'$ , según las fórmulas halladas anteriormente obtenemos

$$R' - r' = \frac{(R-r)(a^2 + Rr)\rho^2}{(a^2 - r^2)(a^2 - R^2)}.$$

Tenemos que comprobar la validez de la igualdad  $(R' - r')^2 - (d')^2 = 4R'r' \operatorname{tg}^2(\pi/n)$ . Expresando todas las magnitudes que figuran en ésta, por  $R$ ,  $r$ ,  $a$ ,  $\rho$  y simplificando, reduzcamos a la igualdad  $(R - r)^2 (a^2 + Rr)^2 - (R - r)^2 a^2 (R + r)^2 = 4Rr (a^2 - r^2) \times (a^2 - R^2) \operatorname{tg}^2(\pi/n)$ . Pero  $(R - r)^2 = 4Rr \operatorname{tg}^2(\pi/n)$ . Por consiguiente, hay que comprobar que  $(a^2 + Rr)^2 - a^2 (R + r)^2 = (a^2 - r^2)(a^2 - R^2)$ . Es fácil hacerlo.

El caso  $a < R$  es idéntico al examinado. Pero si  $r < a < R$ , entonces  $\alpha'_1$  y  $\alpha'_2$  se sitúan

una fuera de otra y en la fórmula dada en la condición hace falta tomar el signo «+».

26. Hagamos la inversión con el centro en el centro radical de las circunferencias exinscritas, en cuyo caso las circunferencias exinscritas se transforman en sí mismas. En caso de esta inversión las rectas, en las cuales yacen los lados del triángulo, se transformarán en las circunferencias, las cuales se indican en la condición. Las tres circunferencias pasarán por el centro radical de las circunferencias exinscritas del triángulo.

27. Hagamos la inversión con el centro en  $M$  y la potencia 1. Además, los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pasarán a los puntos  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ , dispuestos en una recta. Sea que el lado del polígono de  $n$  lados es igual a  $a$ . De la fórmula del punto 2 se deduce que  $|A'_1A'_2| = \frac{1}{d_1d_2} a$ ;  $|A'_2A'_3| = \frac{1}{d_2d_3} a$ ;  $\dots$ ;  $|A'_{n-1}A'_n| = \frac{1}{d_{n-1}d_n} a$ ;  $|A'_1A'_n| = \frac{1}{d_1d_n} a$ . Introduciendo estas expresiones en la correlación evidente  $|A'_1A'_n| = |A'_1A'_2| + |A'_2A'_3| + \dots + |A'_{n-1}A'_n|$ , llegamos al resultado requerido.

28. Hagamos la inversión con el centro en el punto  $M$ . Los vértices del polígono de  $n$  lados dado pasarán a  $n$  puntos dispuestos en una recta; además,

$$|A'_1A'_n| = |A'_1A'_2| + |A'_2A'_3| + \dots + |A'_{n-1}A'_n| \quad (*)$$

Designemos por  $p'$  la longitud de la perpendi-

cular bajada desde el punto  $M$  sobre la recta  $A_1 A'_n$ . A partir de la semejanza de los triángulos  $A_1 M A_2$  y  $A'_1 M A'_2$  (propiedad

2) se deduce que  $\frac{|A_1 A_2|}{|A'_1 A'_2|} = \frac{p_1}{p'}$ ,  $|A'_1 A'_2| = \frac{a_1}{p_1} p'$ . De manera análoga

$$|A'_2 A'_3| = \frac{a_2}{p_2} p', \dots, |A'_{n-1} A'_n| = \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}} p',$$

$$|A'_1 A'_n| = \frac{a_0}{p_0} p'.$$

Introduciendo estas expresiones en la correlación (\*) después de simplificar por  $p'$ , llegamos a la igualdad requerida.

