GEOMETRIA

A. PLANIMETRIA

1. Problemas de cálculo

292. Tracemos la bisectriz del ángulo A (véase la fig. 8). Esta bisectriz intersecará el lado BC en el punto D y lo dividirá en partes proporcionales a b y c. Observemos a continuación que el $\triangle ACD$ es semejante al $\triangle ABC$ puesto que tienen el ángulo C común y el ángulo CAD es igual al B. De aquí

$$\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{AC} \quad \text{o} \quad \frac{b}{\frac{ab}{b+c}}=\frac{a}{b}.$$

Por consiguiente,

$$a=\sqrt{b^2+bc}$$

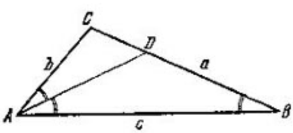

FIG. 8

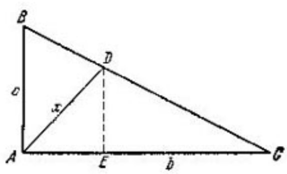

FIG. 9

293. Sea AD la bisectriz del ángulo recto A en el $\triangle ABC$ y $DE \perp AC$ (fig. 9). Puesto que

$$\angle DAE=\frac{\pi}{4}, \text{ entonces, } AE=DE=\frac{x}{\sqrt{2}},$$

donde $x=AD$ es la longitud buscada. Es evidente que

$$\frac{ED}{AB}=\frac{CE}{CA} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{c}=\frac{b-\frac{x}{\sqrt{2}}}{b}$$

De aquí

$$x=\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}.$$

294. En el triángulo ABC (fig. 10) O es el punto de intersección de las medianas AD y BE; $AC=b$, $BC=a$. Hallemos $AB=c$.

Supongamos que $OD=x$ y $OE=y$. Valiéndonos de la propiedad de las medianas, de los triángulos AOB, BOD y AOE hallaremos:

$$4x^2+y^2=\frac{b^2}{4}, \quad 4x^2+4y^2=c^2, \quad 4x^2+16y^2=a^2.$$

Eliminando x e y, obtendremos:

$$c^2 = \frac{a^2+b^2}{5}.$$

Las condiciones de existencia del triángulo con los lados a, b y c, adquieren la forma

$$5(a+b)^2 > a^2+b^2, \qquad 5(a-b)^2 < a^2+b^2.$$

La primera desigualdad, evidentemente, se cumple cualesquiera que sean a y b, mientras que la segunda se transforma en la siguiente:

$$a^2 - \frac{5}{2}ab + b^2 < 0.$$

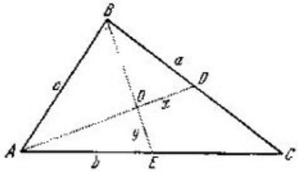

FIG. 10

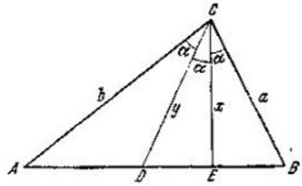

FIG. 11

Resolviendo esta desigualdad respecto a $\frac{a}{b}$, definitivamente obtendremos:

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2.$$

295. Admitamos que $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \alpha$ y $CE = x$, $CD = y$ (fig. 11). Para el área del triángulo ABC se pueden escribir las tres expresiones siguientes:

$$S_{ACD} + S_{DCB} = \frac{1}{2} by \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} ay \operatorname{sen} 2\alpha,$$

$$S_{ACE} + S_{ECB} = \frac{1}{2} bx \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{1}{2} ax \operatorname{sen} \alpha,$$

$$S_{ACD} + S_{DCE} + S_{ECB} = \frac{1}{2} by \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} xy \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} ax \operatorname{sen} \alpha.$$

Igualando las partes izquierdas de estas igualdades y teniendo en cuenta la condición del problema obtendremos un sistema de tres ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2a\cos\alpha &= x + a\frac{x}{y}, \\ 2b\cos\alpha &= y + b\frac{y}{x}, \\ \frac{x}{y} &= \frac{m}{n}. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtendremos:

$$x = \frac{(n^2-m^2)\,ab}{n\,(bm-an)}, \qquad y = \frac{(n^2-m^2)\,ab}{m\,(bm-an)}.$$

296. Designemos por S el área del triángulo dado ABC (fig. 12) y hagamos $\frac{AD}{AB}=x$. Entonces el área del $\triangle ADE$ será igual a x^2S y el área del $\triangle ABE$, igual a xS. La condición del problema conduce a la ecuación

$$xS-x^2S=k^2,$$

resolviendo la cual obtendremos:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{4k^2}{S}}}{2}.$$

El problema es soluble si $S\geqslant 4k^2$ y tiene una o dos soluciones en dependencia de que sea $S>4k^2$ o $S=4k^2$ respectivamente.

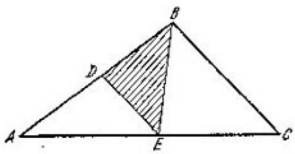

FIG. 12

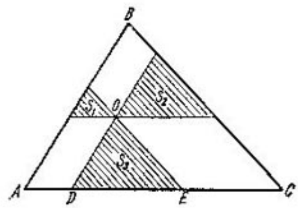

FIG. 13

297. Designemos por S el área del triángulo dado ABC. Los triángulos con áreas iguales a S_1, S_2 y S_3, obtenidos según la construcción indicada en la condición del problema, son semejantes al $\triangle ABC$ (fig. 13). Por eso, sus áreas son entre sí como los cuadrados de sus lados semejantes, de donde

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}=\frac{AD}{AC}, \quad \sqrt{\frac{S_2}{S}}=\frac{EC}{AC}, \quad \sqrt{\frac{S_3}{S}}=\frac{DE}{AC}$$

Sumando estas igualdades miembro a miembro, hallaremos

$$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2.$$

298. El tercer lado del triangulo, igual a la altura bajada a este lado, lo designamos por x. Haciendo uso de dos expresiones para el área del triángulo dado, obtendremos la ecuación

$$\frac{1}{2}x^2=\sqrt{\frac{b+c+x}{2}\cdot\frac{c+x-b}{2}\cdot\frac{x+b-c}{2}\cdot\frac{b+c-x}{2}}$$

Resolviendo esta ecuación, hallaremos:

$$x^2=\frac{1}{5}\left(b^2+c^2\pm 2\sqrt{3b^2c^2-b^4-c^4}\right). \tag{1}$$

La condición indispensable para la solubilidad del problema es la condición

$$3b^2c^2\geqslant b^4+c^4. \tag{2}$$

Si se cumple esta condición, ambos valores de x^2 en (1) son positivos. Es fácil comprobar que si se cumple (2) también se cumplirán las desigualdades

$$b+c>x\geqslant|b-c|,$$

además, el signo de igualdad tendrá lugar solamente en el caso en que sea $x=0$. Esto último tiene lugar cuando, siendo $b=c$, en la igualdad (1) se toma delante de la raíz cuadrada el signo menos. Por consiguiente, en el caso cuando $b=c$ el problema tiene una sola solución

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}\,b.$$

Si $b \neq c$, el triángulo existe solamente en el caso en que se cumpla la desigualdad (2). Resolviendo esta desigualdad respecto a $\frac{b}{c}$, hallaremos que es equivalente a las siguientes desigualdades:

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} \leqslant \frac{b}{c} \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{3}$$

Por consiguiente para $b \neq c$ existen dos triángulos, si ambas desigualdades (3) se cumplen con el signo $<$, y uno, cuando por lo menos una de las desigualdades se cumple con el signo $=$.

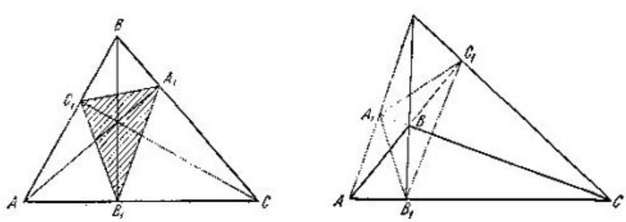

FIG. 14 FIG. 15

299. Supongamos al principio que el $\triangle ABC$ es acutángulo (fig. 14). Entonces

$$S_{ABC}-S_{A_1B_1C_1}=S_{B_1AC_1}+S_{C_1BA_1}+S_{A_1CB_1}. \tag{1}$$

Tenemos:

$$S_{B_1AC_1}=\frac{1}{2}\,AB_1\cdot AC_1 \text{ sen } A=\frac{1}{2}\,AB\cos A\cdot AC\cos A \text{ sen } A=$$

$$=\frac{1}{2}\,AB\cdot AC \text{ sen } A\cos^2 A=S_{ABC}\cos^2 A$$

y análogamente

$$S_{C_1BA_1}=S_{ABC}\cos^2 B, \qquad S_{A_1CB_1}=S_{ABC}\cos^2 C.$$

Colocando estas expresiones en (1), después de las transformaciones evidentes, obtendremos:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C. \tag{2}$$

Si el $\triangle ABC$ es obtusángulo (fig. 15), en vez de (1) tendremos:

$$S_{ABC}+S_{A_1B_1C_1}=S_{B_1AC_1}+S_{C_1BA_1}+S_{A_1CB_1}$$

y, correspondientemente, en vez de (2)

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-1. \tag{3}$$

Por fin, si el $\triangle ABC$ es rectángulo, $S_{A_1B_1C_1}=0$, lo que, como es fácil comprobar, resulta también de las fórmulas (2) y (3).

300. 1) Sean BO y CO las bisectrices de los ángulos internos del $\triangle ABC$ (fig. 16). Es fácil ver que los triángulos BOM y CON son isósceles. Por consiguiente, $MN=BM+CN$.

2) La dependencia $MN=BM+CN$ es válida también para el caso de bisectrices exteriores.

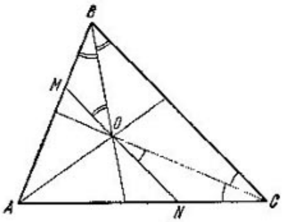

FIG. 16

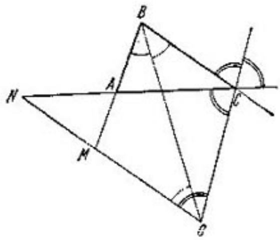

FIG. 17

3) Si una de las bisectrices es interior y la otra exterior (fig. 17), entonces, de los triángulos interiores BMO y CNO hallamos que $MN=CN-BM$, cuando $CN>BM$, y que $MN=BM-CN$, siendo $CN<BM$. Así pues, en este caso

$$MN=|CN-BM|.$$

Los puntos M y N coinciden solamente en el caso (3), si el $\triangle ABC$ es isósceles ($AB=AC$).

301. Tracemos a través del punto P tres rectas paralelas a los lados del triángulo (fig. 18). Los tres triángulos formados (rayados en el dibujo) también son

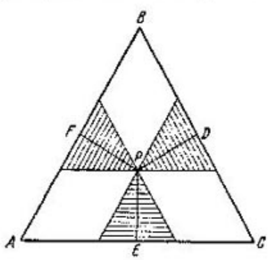

FIG. 18

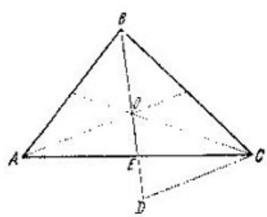

FIG. 19

regulares y la suma de sus lados es igual al lado $AB=a$ del triángulo ABC. Por consiguiente, la suma de sus alturas es igual a la altura del $\triangle ABC$, por lo tanto,

$$PD+PE+PF=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

La suma $BD+CE+AF$ es igual a la suma de los lados de los triángulos rayados más la suma de las mitades de estos lados, o sea,

$$BD+CE+AF=\frac{3}{2}a.$$

Por consiguiente,

$$\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

302. Sea O el punto de intersección de las medianas en el $\triangle ABC$ (fig. 19). En la prolongación de la mediana BE trazamos $ED=OE$. Según la propiedad de las medianas los lados del $\triangle CDO$ son iguales a $\frac{2}{3}$ de los lados del triángulo compuesto por las medianas. Designando el área de este último por S_1, tendremos:

$$S_1=\frac{9}{4}S_{CDO}.$$

Por otro lado, el $\triangle CDO$ está formado por dos, y el $\triangle ABC$ por seis triangulos equidimensionales al $\triangle CEO$. Por eso,

$$S_{CDO}=\frac{1}{3}S_{ABC}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{S_1}{S_{ABC}}=\frac{3}{4}.$$

303. Supongamos que sea ABC el triangulo dado (fig. 20). El área del $\triangle COB$ es igual a $\frac{1}{2}ar$, y el área del $\triangle COA$ es igual a $\frac{1}{2}br$. Sumando estas

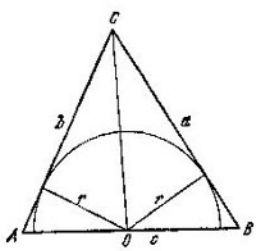

FIG. 20

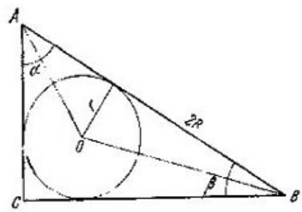

FIG. 21

magnitudes y expresando el área del $\triangle ABC$ por la fórmula de Heron, obtendremos:

$$r=\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

donde

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

304. Sea R el radio de la circunferencia circunscrita y r el radio de la circunferencia inscrita. Entonces (fig. 21) $AB=2R$ y

$$AB=r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

De aquí

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=\frac{2R}{r}=5.$$

Además,

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=1,$$

es decir,

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}-1}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}}=1,$$

de donde

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=6.$$

Por consiguiente, $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ y $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$ son iguales a las raíces de la ecuación cuadrada $x^2-5x+6=0$.

Definitivamente obtenemos:

$$\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \qquad \beta=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

305. Designemos por a y b los lados del rectángulo dado y por φ el ángulo entre los lados de los rectángulos dado y circunscrito (fig. 22). Entonces, los lados del rectángulo circunscrito serán iguales a

$$a\cos\varphi+b\operatorname{sen}\varphi \quad \text{y} \quad a\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi.$$

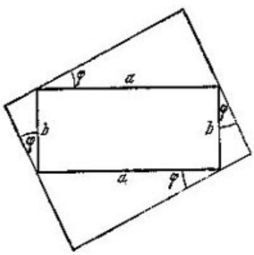

FIG. 22

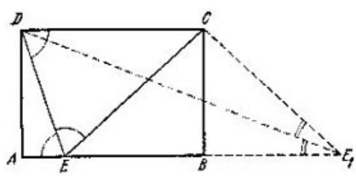

FIG 23

Según la condición del problema

$$(a\cos\varphi+b\operatorname{sen}\varphi)(a\operatorname{sen}\varphi+b\cos\varphi)=m^2,$$

de donde hallamos que

$$\operatorname{sen}2\varphi=\frac{2(m^2-ab)}{a^2+b^2}.$$

La condición de solubilidad del problema será $0\leqslant\operatorname{sen}2\varphi\leqslant1$, lo que es equivalente a las siguientes desigualdades:

$$\sqrt{ab}\leqslant m\leqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

306. Si el $\angle AED=\angle DEC$ (fig. 23), también el $\angle CDE=\angle DEC$, de donde $CE=CD$. Por consiguiente, E es el punto de intersección del lado AB con la circunferencia circunscrita desde el centro C con el radio CD. El problema es soluble si $AB\geqslant BC$, además, tiene dos soluciones cuando $AB>BC$ y una sola solución cuando $AB=BC$. (El punto E_1 en la fig. 23 corresponde a la segunda solución).

307. El lado lateral se ve desde el vértice de la base inferior bajo el ángulo $\frac{\alpha}{2}$ (fig. 24) y la línea media es igual al segmento desde este vértice hasta el pie de la altura bajada desde el vértice opuesto, es decir, $h \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$. Por consiguiente, el área del trapecio es igual a

$$S = h^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}.$$

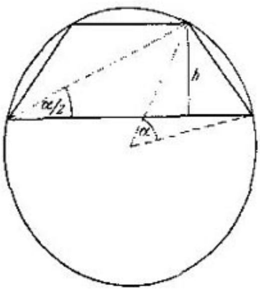

FIG. 24

308. Los puntos medios de las diagonales E y F del trapecio se encuentran sobre su línea media MN (fig. 25). Pero, $ME = FN = \frac{a}{2}$. Por consiguiente,

$$EF = \frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2}.$$

309. El paralelogramo está compuesto por 8 triángulos equidimensionales al triángulo AOE. La figura (el octaedro) obtenida por medio de la construcción indicada también está compuesta por 8 triángulos equidimensionales al $\triangle POQ$ (fig. 26). Puesto que $OP = \frac{1}{3} OA$ (por la propiedad de las medianas en el $\triangle DAE$) y $OQ = \frac{1}{2} OE$, entonces

$$S_{POQ} = \frac{1}{6} S_{AOE}.$$

Por consiguiente, la relación buscada es igual a $\frac{1}{6}$.

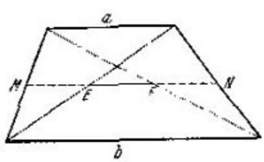

FIG. 25

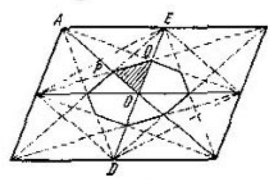

FIG. 26

310. Es evidente que $KLMN$ es un paralelogramo (fig. 27), además $KL = \frac{2}{5} AQ$. Por consiguiente,

$$S_{KLMN} = \frac{2}{5} S_{AQCS} = \frac{2}{5} \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{5} a^2.$$

311. A las dos cuerdas dadas de longitudes $2a$ y $2b$ les corresponden los ángulos centrales 2α y 2β, donde

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{R}, \qquad \operatorname{sen} \beta = \frac{b}{R}.$$

El arco igual a $2(\alpha \pm \beta)$ está formado por la cuerda $2c$, donde

$$c = R\,|\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)| = \left| \frac{a}{R} \sqrt{R^2 - b^2} \pm \frac{b}{R} \sqrt{R^2 - a^2} \right|.$$

312. El área buscada es igual a la suma de las áreas de dos sectores cuyos ángulos son 2α y 2β (fig. 28) menos el doble del área del triángulo con los lados R, r y d:

$$S = R^2\alpha + r^2\beta - Rd \operatorname{sen} \alpha$$

Para hallar los ángulos α y β tenemos dos ecuaciones:

$$R \operatorname{sen} \alpha = r \operatorname{sen} \beta,$$
$$R \cos \alpha + r \cos \beta = d,$$

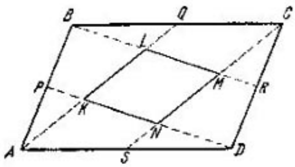

FIG. 27

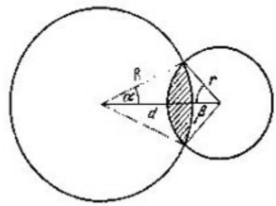

FIG. 28

resolviendo las cuales, hallamos

$$\cos \alpha = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd},$$
$$\cos \beta = \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd}.$$

Por consiguiente,

$$S = R^2 \arccos \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd} + r^2 \arccos \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd} - Rd \sqrt{1 - \left(\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd}\right)^2}.$$

313. Sea K el punto de contacto de las dos circunferencias de radios r y r_1 y P el pie de la perpendicular bajada desde el centro O_2 de la tercera circunferencia a OO_1 (fig. 29). Haciendo $KP = x$, tendremos:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - x^2} \qquad (1)$$

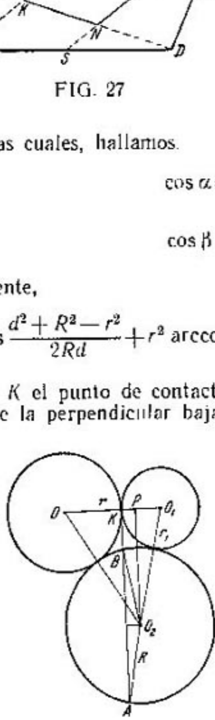

FIG. 29

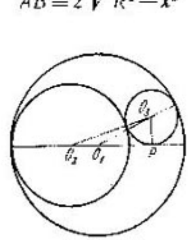

FIG. 30

El valor de x se determina de la ecuación

$$(R + r)^2 - (r + x)^2 = (R + r_1)^2 - (r_1 - x)^2$$

y es igual a

$$x = \frac{r - r_1}{r + r_1} R.$$

Colocando este valor de x en (1), obtendremos:

$$AB=\frac{4\sqrt{rr_1}}{r+r_1}R.$$

314. Sean O_1 y O_2 respectivamente los centros de las circunferencias de radios R y r y O_3 el centro de la tercera circunferencia. Supongamos que sea x el radio de la tercera circunferencia y P el punto de tangencia de ésta con el diámetro O_1O_2 (fig. 30). Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos O_2O_3P y O_1O_3P, obtendremos la igualdad

$$O_2O_3^2=O_3P^2+(O_2O_1+\sqrt{O_1O_3^2-O_3P^2})^2.$$

Colocando aquí los valores $O_2O_3=r+x$, $O_3P=x$, $O_2O_1=R-r$, $O_1O_3=R-x$, obtendremos una ecuación respecto a la incógnita x:

$$(r+x)^2=x^2+(R-r+\sqrt{(R-x)^2-x^2})^2.$$

Resolviendo esta ecuación, hallaremos que

$$x=4Rr\frac{R-r}{(R+r)^2}$$

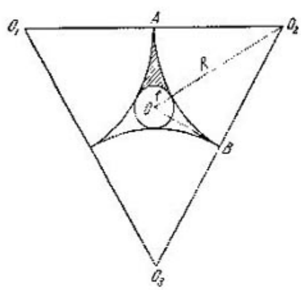

FIG 31

315. Sean O_1, O_2 y O_3 los centros de las tres circunferencias iguales y O el centro del círculo de radio r (fig. 31). Designemos por $S_{O_1O_2O_3}$ el área del $\triangle O_1O_2O_3$, por S_{AO_2B} el área del sector AO_2B; entonces, el área buscada será

$$S=\frac{1}{3}(S_{O_1O_2O_3}-3S_{AO_2B}-\pi r^2). \qquad (1)$$

Si R es el radio común de las tres circunferencias, entonces

$$R=\frac{\sqrt{3}}{2}(R+r),$$

de donde

$$R=\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}r=(3+2\sqrt{3})r.$$

A continuación, hallamos:

$$S_{O_1O_2O_3}=\frac{1}{2}2RR\sqrt{3}=\sqrt{3}R^2=3(12+7\sqrt{3})r^2,$$

$$S_{AO_2B}=\frac{1}{6}\pi R^2=\frac{\pi}{2}(7+4\sqrt{3})r^2$$

y por la fórmula (1) obtenemos definitivamente:

$$S=\left[12+7\sqrt{3}-\left(\frac{23}{6}+2\sqrt{3}\right)\pi\right]r^2.$$

316. Sea $O_3D\perp O_1O_2$ (véase la fig. 32). Tenemos que

$$OO_3^2=O_1O_3^2+O_1O^2-2O_1O\cdot O_1D=O_2O_3^2+OO_2^2-2OO_2\cdot DO_2, \qquad (1)$$

donde $O_1O_3=a+r$, $O_2O_3=b+r$, $O_1O=(a+b)-a=b$,

$$OO_2=(a+b)-b=a.$$

Haciendo $O_1D=x$, escribamos la segunda igualdad de (1) en la forma

$$(a+r)^2+b^2-2bx=(b+r)^2+a^2-2a(a+b-x),$$

de donde hallaremos que

$$x=a+\frac{a-b}{a+b}r.$$

Ahora, la primera igualdad de (1) tomará la forma de una ecuación con una incógnita r

$$(a+b-r)^2=(a+r)^2+b^2-2b\left(a+\frac{a-b}{a+b}r\right).$$

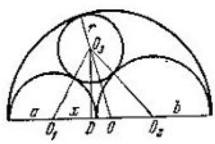

FIG. 32

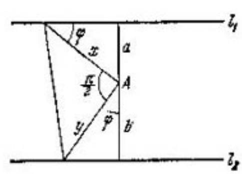

FIG 33

Resolviendo esta ecuación, obtendremos definitivamente que

$$r=\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}.$$

317. Designemos por a y b las distancias desde el punto dado A hasta las rectas dadas l_1 y l_2, y por x e y las longitudes de los catetos del triángulo buscado (fig. 33). Observando que $\frac{a}{x}=\operatorname{sen}\varphi$, $\frac{b}{y}=\cos\varphi$, tendremos dos ecuaciones:

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1, \quad \frac{1}{2}xy=k^2.$$

Transformando estas ecuacioes, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} xy&=2k^2, \\ b^2x^2+a^2y^2&=4k^4. \end{aligned}\right\}$$

Resolviéndolo, obtendremos que

$$x=\frac{k}{b}\left|\sqrt{k^2+ab}\pm\sqrt{k^2-ab}\right|,$$

$$y=\frac{k}{a}\left|\sqrt{k^2+ab}\mp\sqrt{k^2-ab}\right|.$$

El problema es soluble si $k^2\geqslant ab$ y tiene dos soluciones siendo $k^2>ab$ y una sola solución cuando $k^2=ab$.

318. Uniendo los centros de las circunferencias obtendremos un polígono semejante al dado. El centro del polígono obtenido coincide con el centro del polígono dado y sus lados son respectivamente paralelos a los lados del mismo (fig. 34).

Supongamos que sea r el radio común de las circunferencias que se examinan. Entonces, el lado del polígono construido por nosotros será igual a $2r$ y su área será

$$\sigma = nr^2 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}.$$

Admitamos, a continuación, que $\beta = \frac{\pi(n-2)}{n}$ sea el ángulo interior del polígono. Para el área buscada S de la "estrella" obtenemos la expresión

$$S = \sigma - n\frac{r^2}{2}\beta = nr^2 \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} - n\frac{r^2}{2}\beta.$$

Luego, es fácil ver (véase la fig. 34) que

$$\frac{a}{2} - r = r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

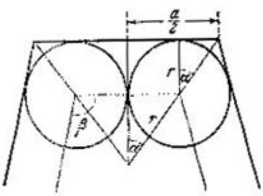

FIG. 34

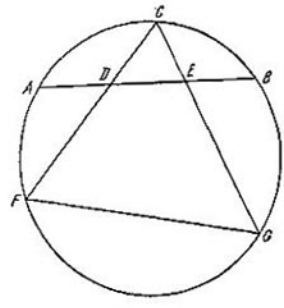

FIG. 35

de donde

$$r = \frac{a}{2\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)}$$

y, por consiguiente,

$$S = \frac{a^2}{4}\,\frac{n \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} - (n-2)\frac{\pi}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

319. En las denotaciones de la fig. 35 tenemos que

$$\angle CGF = \frac{1}{2}(\breve{FA} + \breve{AC}), \qquad \angle CDB = \frac{1}{2}(\breve{FA} + \breve{BC}).$$

El cuadrilátero $DEGF$ será inscrito si, y sólo si, $\angle CGF = \angle CDB$, es decir, si $\breve{AC} = \breve{BC}$.

320. Sea O el vértice del ángulo agudo α y O_k el centro de la k-ésima circunferencia (fig. 36). Entonces,

$$r_k = OO_k \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}, \qquad r_{k+1} = (OO_k - r_k - r_{k+1}) \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

y

$$r_{k+1} = r_k - r_k \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - r_{k+1} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{r_{k+1}}{r_k}=\frac{1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}},$$

es decir, los radios de las circunferencias forman una progresión aritmética cuyo denominador es

$$\frac{1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}.$$

321. Supongamos que el ángulo mínimo entre los rayos reflejados y el plano P sea igual a α (fig. 37). Semejante ángulo lo forma el rayo que pasa por el borde del espejo C después de ser una vez reflejado en el punto B. Según la condición del problema $CF \parallel DA$; por consiguiente, $\angle OCB = \angle OBC = \alpha$. De

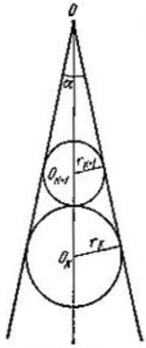

FIG. 36

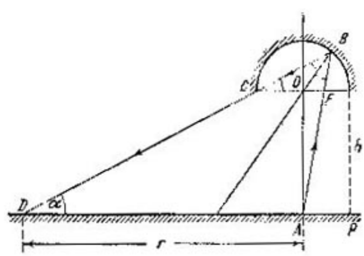

FIG. 37

la condición de reflexión en el punto B se desprende que $\angle OBF = \alpha$. Por esta razón, en el triángulo OBF tenemos:

$$\angle BOF = 2\alpha, \quad \angle OFB = 180^\circ - 2\alpha - \alpha = 180^\circ - 3\alpha.$$

Designemos la distancia desde el espejo hasta el plano por h, y el radio del círculo iluminado AD por r. Puesto que el radio del espejo es igual a 1, entonces

$$\frac{h}{r-1}=\operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

Del triángulo OBF, según el teorema de los senos, hallamos

$$OF=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}.$$

En virtud de la semejanza de los triángulos CBF y DBA, sus alturas son proporcionales a sus lados, así que

$$\frac{AD}{FC}=\frac{h+\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha},$$

o bien

$$\frac{r}{1+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}}=\frac{h+\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}. \tag{2}$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (1) y (2), hallamos:

$$r=\frac{2\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha-1}.$$

Colocando aquí la magnitud dada en el problema $\alpha=15^\circ$, obtendremos:

$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

Luego,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$$

por lo tanto, de (1) obtendremos:

$$h=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

322. Es necesario examinar diferentes casos en dependencia del valor de la relación $\frac{r}{a}$.

1) $\frac{r}{a}\geqslant\sqrt{2}$ Las circunferencias no cortan al cuadrado, $S=a^2$.

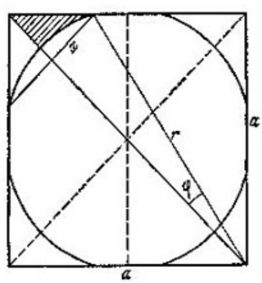

FIG. 38

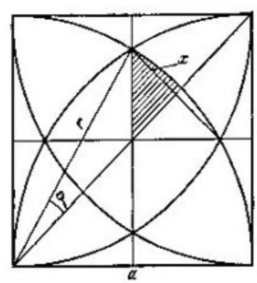

FIG. 39

2) $\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant\frac{r}{a}<\sqrt{2}$. Es evidente que en este caso $S=a^2-8\sigma$, donde σ es el área del triángulo curvilíneo rayado (fig. 38). Tenemos:

$$\sigma=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\,x-\frac{1}{2}r^2\varphi,$$

donde $\varphi=\operatorname{arcsen}\frac{x}{r}$. Para hallar x observemos que

$$x\sqrt{2}+\sqrt{r^2-a^2}=a,$$

de donde

$$x=\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{\sqrt{2}}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma=\frac{1}{2}a\left(a-\sqrt{r^2-a^2}\right)-\frac{1}{2}r^2\operatorname{arcsen}\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{r\sqrt{2}}.$$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{r}{a} < \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Aquí $S=8\sigma$, donde σ es el área del triángulo curvilíneo rayado (fig. 39). Tenemos:

$$\sigma=\frac{1}{2}r^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}x,$$

donde

$$\varphi=\operatorname{arcsen}\frac{x}{r}.$$

Observando que

$$\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}+x\sqrt{2},$$

hallamos:

$$x=\frac{\sqrt{4r^2-a^2}-a}{2\sqrt{2}}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma=\frac{1}{2}r^2\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{4r^2-a^2}-a}{2\sqrt{2}r}-\frac{a\left(\sqrt{4r^2-a^2}-a\right)}{8}.$$

4) $\dfrac{r}{a} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. El área buscada es igual a cero.

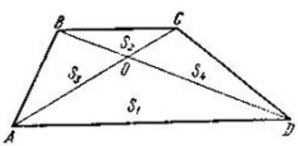

FIG. 40

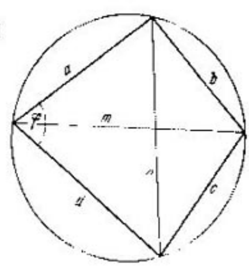

FIG. 41

323. Tenemos (fig. 40):

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4. \tag{1}$$

A continuación,

$$\frac{S_3}{S_2}=\frac{S_1}{S_4}=\frac{AO}{OC},$$

de donde $S_3S_4=S_1S_2$. Pero, evidentemente, tenemos que

$$S_3+S_1=S_4+S_1,$$

por lo tanto, $S_3=S_4$ y $S_3=S_4=\sqrt{S_1S_2}$.
Por consiguiente, de (1) obtenemos que

$$S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2.$$

324. Designando por a, b, c y d las longitudes de los lados y por m, n las longitudes de las diagonales del cuadrilátero (fig. 41); por el teorema de los cosenos tenemos:

$$n^2=a^2+d^2-2ad\cos\varphi,$$
$$n^2=b^2+c^2+2bc\cos\varphi.$$

De aquí

$$(bc+ad)\,n^2=(a^2+d^2)\,bc+(b^2+c^2)\,ad=(ab+cd)\,(ac+bd).$$

Por consiguiente,

$$n^2 = \frac{ab+cd}{bc+ad}(ac+bd).$$

Análogamente hallaremos:

$$m^2 = \frac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd).$$

Multiplicando estas igualdades entre sí, obtendremos el teorema de Ptolomeo:

$$mn = ac+bd.$$

2. Problemas de construcción

325. Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias dadas. Trazamos la recta O_1A y a través del centro O_2 de la segunda circunferencia una recta paralela a O_1A que corta la segunda circunferencia en los puntos M y N

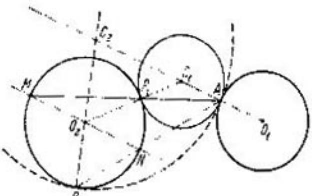

FIG 42

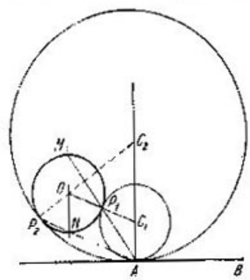

FIG. 43

(fig 42). La recta MA intersecará la segunda circunferencia en el punto P_1. La recta O_2P_1 intersecará la O_1A en el punto C_1. De la semejanza de los triángulos MO_2P_1 y AC_1P_1 se deduce:

$$C_1A = C_1P_1.$$

Por consiguiente, la circunferencia de centro C_1 y de radio C_1A es la circunferencia buscada. La segunda resolución se obtiene con ayuda del punto N lo mismo que la primera con ayuda del punto M. Si una de las rectas MA o NA resulta tangente a la segunda circunferencia, entonces queda una solución y la segunda dará esta tangente (el centro de la circunferencia se encontrará en el infinito). Esto tendrá lugar cuando, y sólo cuando, el punto A coincida con el punto de tangencia de una de las cuatro tangentes comunes a las circunferencias dadas.

326. Sea O el centro de la circunferencia dada y AB la recta dada (fig. 43). El problema se resuelve de forma análoga al anterior. En el caso general tiene dos resoluciones. Habrá los casos particulares siguientes: 1) la recta dada interseca la circunferencia y el punto dado A coincide con uno de los puntos de intersección (no hay ninguna solución); 2) la recta dada hace contacto con la circunferencia y el punto A no coincide con el punto de intersección (tiene una solución), 3) la recta dada hace contacto con la circunferencia y el punto A coincide con el punto de intersección (tiene una cantidad infinita de soluciones).

327. A través del centro O de la circunferencia dada trazamos una recta perpendicular a la recta dada l, que corta la circunferencia en los puntos M y N

(fig. 44). La recta MA intersecará la l en el punto P_1. El punto C_1 es el punto de intersección de la perpendicular a la recta l levantada en el punto P_1 con la recta OA. De la semejanza de los triángulos AOM y AC_1P_1 se desprende que $C_1A = C_1P_1$. Por consiguiente, la circunferencia de centro C_1 y radio C_1A es la buscada. La segunda resolución se obtiene con ayuda del punto N lo mismo que la primera con ayuda del punto M. Si la recta l no pasa por ninguno de los puntos A, M y N y el punto A no coincide con M o con N, entonces el problema siempre tiene dos soluciones.

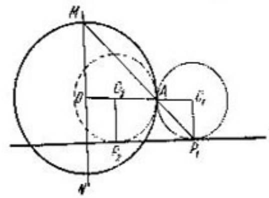

FIG. 44

Supongamos que A no coincide con M o con N; si l pasa a través de M o de N, entonces el problema tiene una sola solución (la segunda circunferencia coincide con la circunferencia dada); si l pasa por A, el problema no tiene ninguna solución.

Supongamos que A coincide con M; si l no pasa por ninguno de los puntos M y N, entonces el problema tiene una sola solución (la segunda pasa a la recta l); si l pasa por N, la solución será la circunferencia dada y si l pasa por M, el problema tiene una cantidad infinita de soluciones

328. Valiéndonos de la hipotenusa dada $AB = c$ como diametro, tracemos una circunferencia con su centro en el punto O (fig. 45). Tracemos $OE \perp AB$ y marquemos sobre OE el segmento $OF = h$. La recta paralela a AB que pasa por F intersecará la circunferencia en el punto buscado C. El problema es

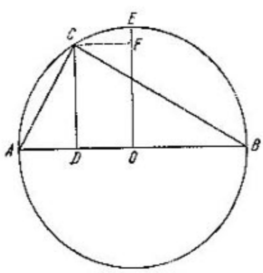

FIG. 45

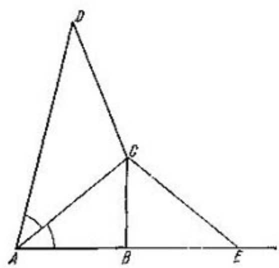

FIG. 46

soluble si $h \leqslant \frac{c}{2}$. Las longitudes de los catetos a y b se hallarán con ayuda del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2, \\ ab &= hc. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtendremos:

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2 + 2hc} + \sqrt{c^2 - 2hc}\right),$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2 + 2hc} - \sqrt{c^2 - 2hc}\right)$$

329. Tomamos el segmento AB y sobre la recta AB trazamos el segmento $AE = AD$ (fig. 46). Tomando como basa a BE construimos el triángulo BCE con los lados BC y $EC = CD$. Sobre el segmento AC como base, construimos el $\triangle ACD$ con los lados AD y CD. El cuadrilátero $ABCD$ es el buscado, puesto que tiene los lados dados y el $\angle DAC = \angle CAE$ (los triángulos ACD y ACE son iguales por construcción).

330. Admitamos que sean H, S y M los puntos de intersección de la altura, la bisectriz y la mediana respectivamente con la circunferencia circunscrita K que tiene por centro el punto O (fig. 47). Tracemos la recta SO y a través del punto H una recta paralela a SO que cortará por segunda vez a K en el punto A. Tracemos la recta AM que intersecará a SO en el punto P. A través de P tracemos una recta perpendicular a SO que cortará a la circunferencia en los puntos B y C. El triángulo ABC es el buscado, puesto que $AH \perp BC$, $\breve{BS} = \breve{SC}$ y $BP = PC$. El problema es soluble si, y sólo si, H, S y M no se encuentran en una misma recta, la tangente a la circunferencia K en el punto H no es paralela a SO y si los puntos H y M se encuentran a diferentes lados de la recta SO, pero no en un mismo diámetro de la circunferencia K.

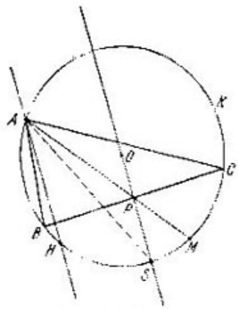

FIG. 47

331. A. Caso de tangencia exterior. Desde el punto O de intersección de las bisectrices de los ángulos internos del triángulo ABC bajemos las perpendiculares OM, ON y OP a los lados del triángulo (fig. 48). Entonces $AP = AN$, $BP = BM$ y $CM = CN$. Por consiguiente, las circunferencias de radios AP, BM y CN cuyos centros son A, B y C tendrán contacto una con la otra en los puntos P, M y N.

B. Caso de tangencia interior. Desde el punto O de intersección de la bisectriz del ángulo C con las bisectrices de los ángulos externos A y B bajemos

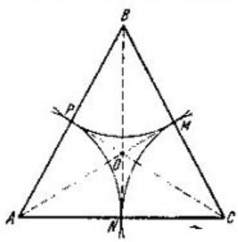

FIG. 48

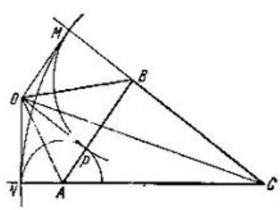

FIG. 49

las perpendiculares OM, ON y OP a los lados (o a las prolongaciones de los lados) del triángulo ABC (fig. 49). Entonces,

$$AP = AN, \quad BP = BM, \quad CM = CN.$$

Por consiguiente, las circunferencias de radios AP, BM y CN cuyos centros son los puntos A, B y C tendrán contacto una con la otra en los puntos P, M y N.

Obtendremos dos soluciones más tomando las bisectrices del ángulo interno A y los externos B y C o del ángulo interno B y los ángulos externos A y C.

332. La resolución se basa en la siguiente propiedad: si las alturas h_A y h_B del triángulo inscrito ABC cortan a la circunferencia en los puntos A_1 y B_1, entonces el vértice C divide el arco A_1B_1 por la mitad (fig. 50). Esto se desprende de la igualdad de los ángulos $\angle A_1AC$ y $\angle B_1BC$, cada uno de los cuales es igual a $\frac{\pi}{2} - \angle ACB$.

Construcción. A través del punto A trazamos una recta en la dirección dada hasta su intersección con la circunferencia en el punto A_1; admitamos que sea B_1 el punto de intersección de la altura h_B con la circunferencia; hallamos el punto medio C del arco A_1B_1 y trazamos AC; trazamos $B_1B \perp AC$; el triángulo ABC es el buscado.

La segunda solución $AB'C'$ se obtiene si se toma el punto medio C' del segundo arco A_1B_1.

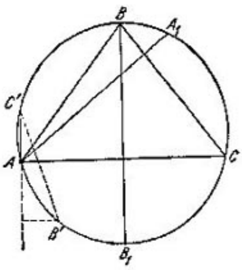

FIG. 50

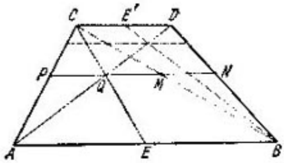

FIG 51

333. Unamos el punto medio E de la base AB con el vértice C y hallemos el punto Q de intersección de las rectas EC y AD (fig. 51). La recta $PQMN$ paralela a AB es la buscada. En efecto,

$$\frac{PQ}{QM}=\frac{AE}{EB}=1,$$

de donde $PQ=QM$; luego,

$$\frac{MN}{CD}=\frac{PQ}{CD},$$

de donde $MN=PQ$. La segunda solución se obtiene con ayuda del punto medio E' de la base CD de la misma manera que la primera con ayuda del E.

334. Supongamos que se ha construido el cuadrado $ABCD$, además, B es el vértice dado, E y F son los puntos dados (fig. 52). El vértice D deberá encontrarse en la circunferencia construida tomando a EF como diámetro. Admitamos que BD corta a la circunferencia en el punto K. Entonces, $\overset{\frown}{EK}=\overset{\frown}{KF}$, puesto que $\angle ADB=\angle BDC$.

Construcción. Tomando EF como diámetro, construyamos una circunferencia y desde su centro levantemos una perpendicular a EF hasta su intersección con la circunferencia en los puntos K y K'; unamos B con K y prolonguemos BK hasta su intersección con la circunferencia en el punto D; tracemos las rectas DE y DF y a través del punto B, las perpendiculares BA y BC a estas últimas rectas. $ABCD$ es el cuadrado buscado. La segunda solución se obtiene haciendo uso del punto K'. El problema tiene siempre dos soluciones, excepto en el caso cuando el punto B se encuentra en la circunferencia de diámetro EF. En este último caso el problema no tiene solución si el punto B no coincide con uno de los puntos K o K'.

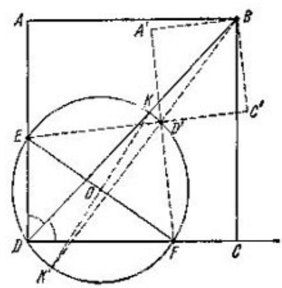

FIG. 52

335. Primera solución. Tracemos $AD \parallel MB$ hasta su intersección con la prolongación de BC en el punto D (fig. 53). En el segmento CD hallamos el punto N tal, que

$$\frac{CD}{CN}=k.$$

La recta MN es la buscada, ya que el área $S_{ABM}=S_{DBM}$, por consiguiente, $S_{ABC}=S_{DMC}$ y de acuerdo con la construcción $S_{DMC}=kS_{NMC}$.

La segunda solución la obtendremos valiéndonos del punto N_1 tal, que

$$\frac{CD}{N_1D}=k.$$

Entonces

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABN_1M}}=k.$$

Teniendo en cuenta la posibilidad de una construcción análoga partiendo del vértice C (en vez del A), es fácil convencerse de que si $k \neq 2$ el problema tiene siempre dos soluciones y si $k=2$, sólo una.

336. Para la construcción es suficiente conocer la altura $h=KL$ del rectángulo.

Supongamos que sea $KLMN$ el rectángulo buscado y que KN se encuentra sobre el lado AC (fig. 54). Si se traslada el vértice B paralelamente a la base

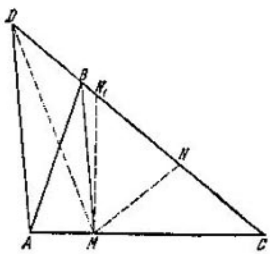

FIG. 53

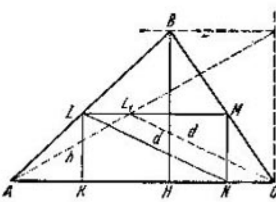

FIG. 54

AC y se conserva al mismo tiempo la magnitud h constante, entonces se conservarán también constantes las magnitudes de la base y de la diagonal del rectángulo (puesto que LM constituye la misma parte de AC que $BH-h$ de BH). Por consiguiente, para hallar h el triángulo dado ABC puede ser sustituido por cualquier otro con la misma base AC y la misma altura BH. Es más cómodo tomar un triángulo con un ángulo recto en la base. De aquí obtenemos la siguiente construcción. Trazamos a través de B una recta paralela a AC y a través de C una recta perpendicular a AC; desde el vértice del ángulo recto C, con una abertura del compás igual a la longitud d de la diagonal dada, hacemos una intersección L_1 en la hipotenusa AB_1; a través de L_1 trazamos una recta paralela a AC; los puntos L y M de intersección de esta recta con los lados AB y BC son los vértices del rectángulo buscado. Según que la altura del triángulo AB_1C bajada desde C sea menor, igual o mayor que la magnitud dada d, el problema tendrá dos soluciones, una o no tendrá solución.

337. Inscribimos en el ángulo dado la circunferencia dada. Desde los puntos de tangencia A y B en los lados del ángulo, trazamos los segmentos AC y BD iguales al lado dado del triángulo (fig. 55).

Inscribamos en el ángulo dado una segunda circunferencia de modo que haga contacto con los lados del ángulo en los puntos C y D. Tracemos una tangente común EF a las circunferencias construidas. Demostremos que el $\triangle SEF$, obtenido de esta manera, es el buscado. Para ello, es suficiente demostrar que $AC = FE$. No es difícil convencerse de que el perímetro del $\triangle SEF$ es igual a $2SC$; por otro lado, este perímetro, evidentemente, es igual a $2(SA + EL + LF)$. Así pues,

$$SC = SA + EL + LF, \quad SA + AC = SA + EF,$$

es decir,

$$AC = EF,$$

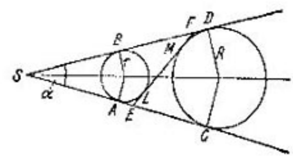

FIG 55

con lo cual el problema queda demostrado.

Está claro que el problema tiene dos soluciones si las circunferencias no se intersecan y una solución cuando éstas tienen contacto. En el caso cuando las circunferencias se intersecan el problema en insoluble. Supongamos que sea α el ángulo dado, r y R los radios de las circunferencias y a el lado dado del triángulo. La distancia entre los centros de las circunferencias es igual a

$$\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Para que el problema sea soluble es necesario que

$$R + r \geqslant \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Pero,

$$R = r + a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

y, por consiguiente, deberá ser

$$2r + a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

o bien

$$\frac{2r}{a} \geqslant \frac{1 - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

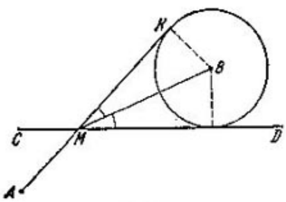

FIG. 56

338. Tomando como centro el punto B, trazamos una circunferencia que hace contacto con la recta CD (fig. 56). Desde el punto A (si A y B se encuentran a distintos lados de la recta CD, o desde el punto A', simétrico a A respecto a CD, si A y B se encuentran a un mismo lado de CD) trazamos la tangente AK a la circunferencia construida. El punto M de intersección de AK (o $A'K$) con la recta CD es precisamente el buscado. En efecto $\angle AMC = \angle KMD = 2\angle BMD$.

3. Problemas de demostración

339. Sea BO una mediana del triángulo ABC; construyamos a base del triángulo ABC el paralelogramo $ABCD$ (fig. 57). Del triángulo BCD tenemos que $2BO < BC + CD$ y, puesto que, $CD = AB$, entonces

$$BO < \frac{AB+BC}{2}.$$

Del $\triangle AOB$ y $\triangle BOC$ tenemos:

$$BO + \frac{AC}{2} > AB,$$

$$BO + \frac{AC}{2} > BC.$$

Sumando estas desigualdades, obtendremos:

$$BO > \frac{AB+BC}{2} - \frac{AC}{2}.$$

340. Supongamos que sea D el punto de intersección de las alturas, O el centro de la circunferencia circunscrita y E y F los puntos medios de los lados BC y AC (fig. 58). Los triángulos ADB y EOF son semejantes puesto que $\angle ABD = \angle OFE$ y $\angle BAD = \angle OEF$ (como ángulos con lados paralelos). Por consiguiente,

$$\frac{OE}{AD} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2}.$$

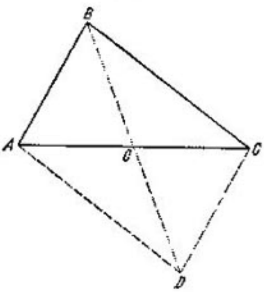

FIG. 57

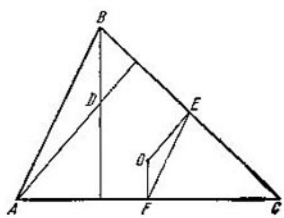

FIG. 58

341 Véase la resolución del problema 301.

342. Sean a, b y c las longitudes de los lados del triángulo, opuestos respectivamente a los ángulos A, B y C. Demostremos que la longitud l_A de la bisectriz del ángulo A se expresa por la fórmula

$$l_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}. \tag{1}$$

En efecto, el área del triángulo ABC es igual a

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}cl_A \operatorname{sen}\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_A \operatorname{sen}\frac{A}{2}.$$

De aquí se deduce la fórmula (1). Análogamente, para la bisectriz l_B del ángulo

B obtendremos la fórmula

$$l_B=\frac{2\cos\frac{B}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}. \qquad (2)$$

Admitamos que sea $a > b$; entonces $\angle A > \angle B$, y puesto que además $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ por lo tanto, $\cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2}$. Así pues, el numerador de la fracción (1) es menor que el numerador de la fracción (2). Además, el denominador $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ de la fracción (1) es mayor que el denominador $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ de la fracción (2), ya que $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Por consiguiente, $l_A < l_B$

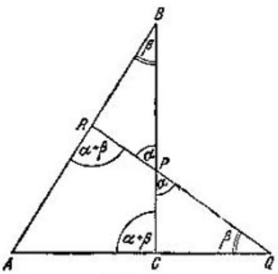

FIG. 59

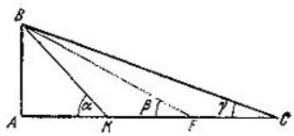

FIG 60

343. Sea, el $\angle CPQ=\alpha$ y $\angle PQC=\beta$ (fig. 59). Según el teorema de los senos tenemos:

$$\frac{RB}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{BP}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)},\quad \frac{PC}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{CQ}{\operatorname{sen}\alpha},\quad \frac{AQ}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}=\frac{AR}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades, obtendremos.

$$RB\cdot PC\cdot QA=PB\cdot QC\cdot RA.$$

344. Sea el $\angle AKB=\alpha$, el $\angle AFB=\beta$ y el $\angle ACB=\gamma$ (fig. 60). Tenemos que $\alpha=\frac{\pi}{4}$ y, puesto que

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2},\quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{3},$$

entonces

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

De aquí $\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$ y $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

345. Valgámonos del teorema inverso al teorema de Pitágoras: si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado del tercer lado, este triángulo es rectángulo. En el caso dado, la relación

$$(a+b)^2+h^2=(c+h)^2$$

se cumple, puesto que es equivalente a la igualdad evidente $ab=ch$.

346. Primera resolución. Tracemos AE de manera tal, que $\angle EAC=20°$ y $BD \perp AE$ (fig. 61). Puesto que el $\triangle CAE \backsim ABC$, entonces

FIG. 61

$$\frac{CE}{a}=\frac{a}{b},$$

de donde

$$CE=\frac{a^2}{b} \quad \text{y} \quad BE=b-\frac{a^2}{b}.$$

Por otro lado, el $\angle BAD=60°$, en virtud de lo cual

$$BD=\frac{\sqrt{3}}{2}b, \qquad AD=\frac{b}{2}$$

y, puesto que $AE=a$, $ED=\frac{b}{2}-a$. Por eso,

$$BE=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-a\right)^2+\frac{3}{4}b^2}.$$

Por consiguiente,

$$b-\frac{a^2}{b}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-a\right)^2+\frac{3}{4}b^2}.$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y realizando las simplificaciones correspondientes, hallaremos que esta relación es equivalente a la relación a demostrar.

Segunda resolución. Puesto que $a=2b$ sen $10°$, la relación a demostrar es equivalente a la siguiente:

$$1+8\,\text{sen}^3\,10°=6\,\text{sen}\,10°,$$

o bien

$$\text{sen}\,30°=3\,\text{sen}\,10°-4\,\text{sen}^3\,10°.$$

La última igualdad se cumple en virtud de la fórmula general

$$\text{sen}\,3\alpha=3\,\text{sen}\,\alpha-4\,\text{sen}^3\alpha.$$

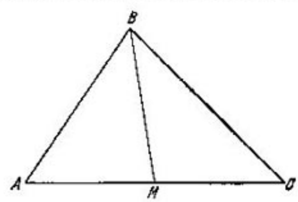

FIG. 62

347. En todo triángulo, frente a mayor lado se encuentra mayor ángulo. Por esta razón, si en el $\triangle ABC$ (fig. 62)

$$AC < ABM,$$

lo que es equivalente a las dos desigualdades:

$$AM < BM, \qquad MC < BM,$$

entonces,

$$\angle ABM < \angle BAM, \qquad \angle MBC < \angle BCM.$$

Sumando estas desigualdades, obtendremos

$$\angle ABC < \angle BAM + \angle BCM = \pi - \angle ABC,$$

de donde

$$2\angle ABC < \pi \text{ o bien } \angle ABC < \frac{\pi}{2}.$$

Análogamente se examinan los casos $AC \geqslant 2BM$.

348. Primera resolución. Sea $QQ' \parallel AC$ y N el punto de intersección de AQ' con QC (fig. 63). En la figura, con arcos llenos se designan los ángulos cuyos valores son evidentes.

Demostremos que

$$QP \perp AQ'. \tag{1}$$

En efecto, $NC = AC$; pero, $AC = PC$ puesto que el $\triangle ACP$ es isósceles. Por eso, $NC = PC$ y, por consiguiente, el $\triangle NCP$ es también isósceles, de lo que se desprende que

$$\angle CNP = \angle NPC = 80°.$$

De aquí, obtenemos fácilmente que $\angle Q'NP = 180° - 60° - 80° = 40°$ y, puesto que $\angle NQ'P = 40°$, el triángulo $QQ'P$ es igual al QNP. De aquí se deduce (1). Ahora está claro que el $\angle Q'PQ = 50°$ y, por consiguiente, el $\angle QPA = 180° - 50° - 50° = 80°$.

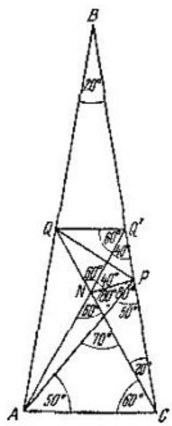

FIG. 63

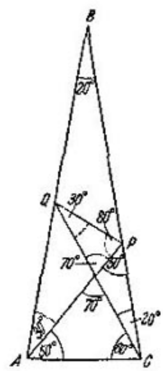

FIG. 64

Segunda resolución (véase la fig. 64). Es fácil ver que el ángulo $P = 80°$ cuando, y sólo cuando, $\triangle ABP \sim \triangle PCQ$ (los ángulos cuyos valores se desprenden directamente de las condiciones del problema, se dan en la figura con arcos llenos). Demostremos que estos triángulos son en efecto semejantes. Para ello, en virtud de la igualdad de los ángulos ABP y PCQ, es suficiente verificar que

$$\frac{AB}{CQ} = \frac{PB}{CP}. \tag{1}$$

Hagamos $AB = l$; entonces, del triángulo isósceles CQB tenemos:

$$CQ = \frac{l}{2\cos 20°}.$$

Por otro lado, puesto que $PC = AC$,

$$PC = 2l \operatorname{sen} 10°, \qquad BP = l - 2l \operatorname{sen} 10°.$$

Colocando estas expresiones en (1), obtendremos la igualdad equivalente:

$$4 \operatorname{sen} 10^\circ \cos 20^\circ = 1 - 2 \operatorname{sen} 10^\circ. \qquad (2)$$

Es fácil revelar la validez de esta última igualdad observando que

$$\operatorname{sen} 10^\circ \cos 20^\circ = \frac{\operatorname{sen}(10^\circ + 20^\circ) + \operatorname{sen}(10^\circ - 20^\circ)}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 10^\circ.$$

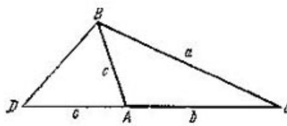

FIG. 65

349. Sea dado el $\triangle ABC$ (fig. 65). Sobre la prolongación del lado AC trazamos $AD = c$. De la igualdad $a^2 = b^2 + bc$ se deduce:

$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}.$$

Esto significa que los triángulos CAB y CBD son semejantes y $\angle A = \angle CBD$. Además, $\angle B = \angle BDA = \angle DBA$. Por consiguiente, $\angle A = \angle B + \angle DBA = 2 \angle B$.

350. Supongamos que sea OC la mediana del triángulo OAB_1. Admitamos que el punto D se encuentre en la prolongación de OC y $OC = CD$ (véase la fig. 66). Demostremos que $\triangle AOD = \triangle OA_1B$. En efecto, $AO = OA_1$ según la construcción. Luego, AOB_1D es un paralelogramo, en virtud de lo cual $AD = OB_1 = OB$. Por fin $\angle OAD = \angle A_1OB$, puesto que los lados de estos ángulos son perpendiculares entre sí: $AO \perp OA_1$ y $OB_1 \perp OB$ según la construcción, y $AD \parallel OB_1$. Por consiguiente, $\triangle AOD = \triangle OA_1B$ y dos de los lados de uno de ellos son respectivamente perpendiculares a dos lados del otro. Por eso, los terceros lados son también perpendiculares, es decir, $OD \perp A_1B$

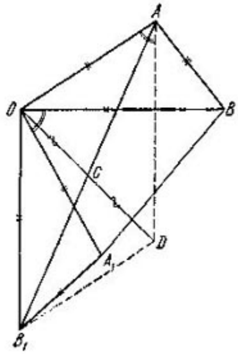

FIG. 66

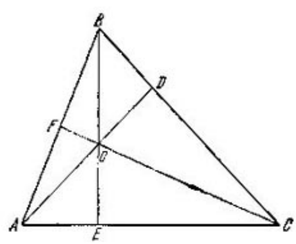

FIG. 67

351. Sea ABC un triángulo acutángulo y AD, BE y CF sus alturas que se cruzan en el punto O (fig. 67). Cada uno de los cuadriláteros $BDOF$, $CEOD$ y $AFOE$ están inscritos en cierta circunferencia. Por el teorema del producto de la secante por su parte externa, tenemos:

$$AD \cdot AO = AB \cdot AF = AC \cdot AE, \quad BE \cdot BO = BC \cdot BD = BA \cdot BF,$$
$$CF \cdot CO = CA \cdot CE = CB \cdot CD.$$

Sumando estas desigualdades, obtendremos:

$$2(AD\cdot AO+BE\cdot BO+CF\cdot CO)=AB\cdot AF+BC\cdot BD+CA\cdot CE+AC\cdot AE+$$
$$+BA\cdot BF+CB\cdot CD=AB(AF+BF)+BC(BD+CD)+CA(CE+AE)=$$
$$=(AB)^2+(BC)^2+(CA)^2,$$

con lo cual el problema queda demostrado. En el caso de un triángulo obtusángulo, el producto correspondiente al ángulo obtuso debe tomarse con el signo menos.

352. Según la condición del problema $b-a=c-b$, ó $a+c=2b$. Para calcular el producto Rr valgámonos de las expresiones para el área del triángulo en función del radio de la circunferencia circunscrita o inscrita y el lado. Es conocido que $S=\frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,A$, y por el teorema de senos $\text{sen}\,A=\frac{a}{2R}$, de donde

$$S=\frac{abc}{4R}.$$

Por otro lado, $S=rp$, donde p es el semiperímetro. Igualando ambas expresiones, tendremos:

$$rR=\frac{abc}{4p}. \qquad (1)$$

En las condiciones del problema

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}b.$$

Coloquemos este valor de p en (1), obtendremos:

$$6rR=ac.$$

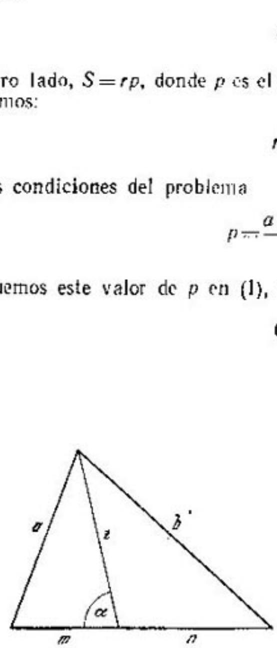

FIG. 68

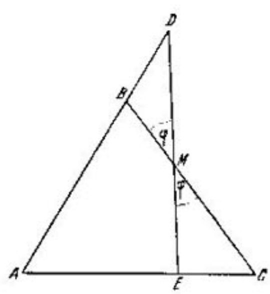

FIG. 69

353. Sea z la longitud de la bisectriz y m y n las longitudes de los segmentos en que ésta divide a la base del triángulo (fig. 68). Por el teorema de los cosenos

$$a^2=z^2+m^2-2mz\cos\alpha,$$
$$b^2=z^2+n^2+2nz\cos\alpha.$$

Multiplicando la primera de estas igualdades por n y la segunda por m y sumando los resultados, obtendremos:

$$na^2+mb^2=(m+n)(z^2+mn). \qquad (1)$$

En virtud de la relación $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$ tenemos.

$$na^2+mb^2=na\frac{mb}{n}+mb\frac{na}{m}=ab\,(m+n).$$

Colocando esta expresión en (1), obtendremos la igualdad requerida

$$ab=z^2+mn.$$

En el caso en que sea $a=b$ y $m=n$, la igualdad demostrada expresará el teorema de Pitágoras. $a^2=z^2+m^2$.

354. Según la condición del problema $BD=EC$ (fig. 69). Si M es el punto de intersección de BC con DE, entonces, del $\triangle BDM$ y del $\triangle ECM$ tenemos:

$$\frac{BD}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{DM}{\operatorname{sen}B},\qquad \frac{EC}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{ME}{\operatorname{sen}C},$$

de donde

$$\frac{DM}{ME}=\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}.$$

Pero en el $\triangle ABC$

$$\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}=\frac{AC}{AB}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{DM}{ME}=\frac{AC}{AB}$$

355. Sean BD, BE y BF respectivamente una altura, una bisectriz y una mediana en el triángulo ABC. Supongamos que $AB < BC$.

Entonces

$$\angle A > \angle C,\qquad \angle CBD > \angle ABD,$$

de donde

$$\angle CBD > \frac{1}{2}(\angle ABD+\angle CBD)=\frac{1}{2}\angle B,$$

es decir, $\angle CBD > \angle CBE$. Por lo tanto, la bisectriz BE pasa por dentro del $\angle CBD$ y el punto E se encuentra entre D y C.

Luego,

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}<1,\qquad AE<EC,$$

de donde,

$$AE<\frac{1}{2}(AE+EC)=\frac{1}{2}AC,$$

es decir, $AE < AF$. Por consiguiente, el punto F se encuentra entre E y C. Así pues, el punto E se encuentra entre D y F, lo que era necesario demostrar

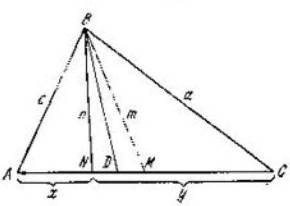

FIG. 70

356. Supongamos que en el triángulo ABC, BD es una de las bisectrices, BM, una de las medianas y BN, una recta simétrica con BM respecto a BD (fig. 70). Si S_{ABN} y S_{MBC} son las áreas de los respectivos triángulos, entonces

$$2S_{ABN}=xh_B=nc\operatorname{sen}\angle ABN,$$

$$2S_{MBC}=\frac{x+y}{2}h_B=ma\operatorname{sen}\angle MBC,$$

donde h_B es la altura bajada a AC desde el vértice B. Puesto que $\angle ABN = \angle MBC$, entonces

$$x=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{nc}{ma}. \tag{1}$$

Análogamente

$$2S_{NBC}=yh_B=na\operatorname{sen}\angle NBC,$$

$$2S_{ABM}=\frac{x+y}{2}h_B=mc\operatorname{sen}\angle ABM.$$

Puesto que $\angle NBC=\angle ABM$, entonces

$$y=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{na}{mc}.$$

Dividiendo miembro a miembro (1) por (2), obtendremos:

$$\frac{x}{y}=\frac{c^2}{a^2},$$

lo que había que demostrar.

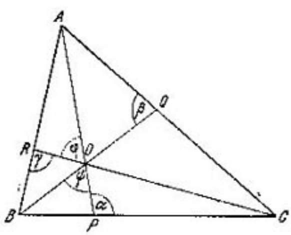

FIG. 71

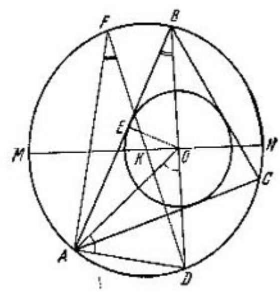

FIG. 72

357. Las rectas AP, BQ y CR dividen al triángulo ABC en seis triángulos: $\triangle AOR$, $\triangle ROB$, $\triangle BOP$, $\triangle POC$, $\triangle COQ$, $\triangle QOA$ (fig 71). Aplicando el teorema de los senos a cada uno de ellos, obtenemos:

$$\frac{AR}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{AO}{\operatorname{sen}\gamma}, \qquad \frac{AO}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{AQ}{\operatorname{sen}\psi},$$

$$\frac{BO}{\operatorname{sen}\gamma}=\frac{BR}{\operatorname{sen}(\varphi+\psi)}, \qquad \frac{BP}{\operatorname{sen}\psi}=\frac{BO}{\operatorname{sen}\alpha},$$

$$\frac{CQ}{\operatorname{sen}(\varphi+\psi)}=\frac{CO}{\operatorname{sen}\beta}, \qquad \frac{CO}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{CP}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Multiplicando miembro a miembro todas estas igualdades entre sí, hallamos:

$$AR\cdot BP\cdot CQ=BR\cdot AQ\cdot CP.$$

358. Supongamos que sea K el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, O el centro de la circunferencia inscrita en el mismo triángulo y D el punto medio del arco AC (véase la fig. 72). Cada uno de los ángulos $\angle OAD$ y $\angle AOD$ es igual a la semisuma de los ángulos en los vértices A y B del triángulo ABC. De aquí se desprende que $OD=AD$.

Por el teorema de las cuerdas que se cruzan dentro de una circunferencia, tenemos que

$$MO \cdot ON = BO \cdot OD.$$

Luego, si $OE \perp AB$ y FD es el diámetro, entonces los triángulos BOE y FDA son semejantes, de donde $BO:OE = FD:AD$, así que $BO \cdot AD = OE \cdot FD$ ó, puesto que $AD = OD$, $BO \cdot OD = OE \cdot FD$. Por consiguiente,

$$MO \cdot ON = OE \cdot FD.$$

Colocando en esta igualdad los valores $MO = R + l$, $ON = R - l$, $OE = r$, $FD = 2R$, obtendremos $R^2 - l^2 = 2Rr$, lo que era necesario demostrar.

359. Primera resolución. Supongamos que sea ABC el triángulo dado, K_1 la circunferencia inscrita de radio r y K_2 la circunferencia circunscrita de radio R. Construyamos un triángulo auxiliar $A_1B_1C_1$ de modo que sus lados sean paralelos a los del $\triangle ABC$ y pasen por los vértices de éste (fig. 73). Tracemos tangentes a la circunferencia K_2, paralelas a los lados del $\triangle A_1B_1C_1$, conforme a la siguiente regla. la tangente A_2B_2, paralela al lado A_1B_1, hace contacto con K_2 en un punto que se encuentra en el mismo arco $\breve{AB}$ que el vértice C, etc. Los segmentos de las tangentes trazadas forman el triángulo $A_2B_2C_2$.

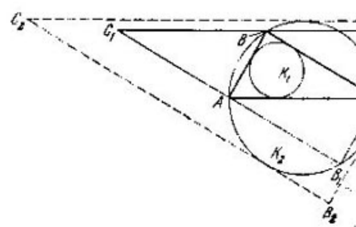

FIG 73

Entonces, el $\triangle A_1B_1C_1$ se encuentra dentro del $\triangle A_2B_2C_2$ y estos dos triángulos son semejantes. Por esta razón, el radio R' de la circunferencia inscrita en el $\triangle A_1B_1C_1$ no es mayor que el radio R de la circunferencia K_2 inscrita en el $\triangle A_2B_2C_2$, es decir, $R' \leqslant R$; por otro lado, la relación entre los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos semejantes $A_1B_1C_1$ y ABC es igual a la relación entre los lados semejantes de estos triángulos, es decir, $\frac{A_1B_1}{AB} = 2$. Así pues, $R' = 2r$. Confrontando esta igualdad con la desigualdad $R' \leqslant R$, obtendremos definitivamente:

$$2r \leqslant R.$$

Segunda resolución. Sean r y R los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, S el area del triángulo dado, p el semiperímetro y a y b dos de sus lados. Entonces,

$$\frac{r}{R} = \frac{S}{pR} = \frac{1}{2}\frac{ab \operatorname{sen} C}{pR} = \frac{2R \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{R(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)}.$$

Pero,

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} +$$

$$+ 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = 4 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{r}{R}=4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}.$$

El problema se reduce a la demostración de la desigualdad

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

(veáse el problema 644).

Tercera resolución. De la fórmula $l^2=R^2-2Rr$ demostrada en el problema anterior, se desprende que $R^2-2Rr\geqslant 0$, de donde $R\geqslant 2r$.

360. Sean a y b las longitudes de los catetos y c la longitud de la hipotenusa. Comparando las dos expresiones para el área del triangulo, obtenemos:

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\,r=\frac{1}{2}hc,$$

de donde

$$\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}. \tag{1}$$

Puesto que $a+b>c$, entonces,

$$\frac{r}{h}<\frac{c}{c+c}=0{,}5.$$

Luego, en virtud de la relación $c^2=a^2+b^2$, la desigualdad $a^2+b^2\geqslant 2ab$ es equivalente a la desigualdad $2c^2\geqslant(a+b)^2$, o bien $a+b\leqslant c\sqrt{2}$. De aquí que

$$\frac{r}{h}\geqslant\frac{c}{c\sqrt{2}+c}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1>0{,}4$$

361. Supongamos que sean A, B y C los ángulos del triángulo, a, b y c los lados opuestos a estos ángulos y $P=a+b+c$. La relación necesaria se desprende de las igualdades

$$ak_a=bk_b+ck_c=Pr \tag{1}$$
$$(b+c)\,k_a+(c+a)\,k_b+(a+b)\,k_c=PR, \tag{2}$$

sumando las cuales obtendremos que

$$k_a+k_b+k_c=r+R.$$

La igualdad (1) es justa en virtud de que sus partes izquierda y derecha son iguales al área duplicada del triángulo. Para demostrar la igualdad (2) observemos que

$$k_a=R\cos A,\quad k_b=R\cos B,\quad k_c=R\cos C \tag{3}$$

y que

$$\begin{aligned}b\cos C+c\cos B&=a,\\ c\cos A+a\cos C&=b,\\ a\cos B+b\cos A&=c,\end{aligned}$$

de donde, sumando miembro a miembro estas igualdades, obtendremos la igualdad

$$(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=P,$$

que después de multiplicarla por R y hacer uso de (3), coincide con (2).

362. Admitamos que sean A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 las líneas medias en el $\triangle ABC$ y A_3, B_3, C_3 los puntos medios de los segmentos AA_1, BB_1 y CC_1 (fig. 74). Los puntos A_3, B_3 y C_3 se encuentran en las líneas medias del $\triangle ABC$ y, además, no en los extremos de estas líneas, puesto que de lo contrario, por lo menos uno de los puntos A_1, B_1, C_1 coincidiría con un vértice del triángulo ABC. Puesto que toda recta que no pasa por uno de los vértices del triángulo $A_2B_2C_2$ no corta al mismo tiempo sus tres lados, entonces, los puntos A_3, B_3, C_3 no encuentran en una misma recta.

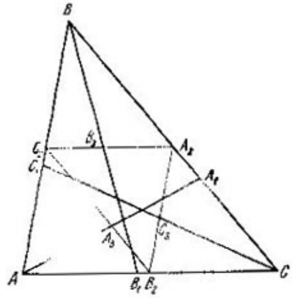

FIG. 74

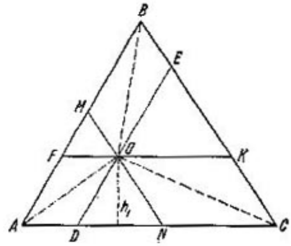

FIG. 75

363. Si h_1 es la altura del $\triangle DON$, h_B la altura del $\triangle ABC$ y S_{AOC} y S_{ABC} las áreas de los respectivos triángulos, entonces (fig. 75),

$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}=\frac{h_1}{h_B}=\frac{OD}{AB}=\frac{AF}{AB}$$

y análogamente

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{BE}{BC}, \quad \frac{S_{COB}}{S_{ABC}}=\frac{CN}{CA}.$$

Sumando estas igualdades, obtendremos:

$$\frac{AF}{AB}+\frac{BE}{BC}+\frac{CN}{CA}=\frac{S_{AOC}+S_{BOC}+S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

364. 1) Examinemos la circunferencia K' de radio r' inscrita en el cuadrado y tracemos las tangentes a esta circunferencia $A'B' \parallel AB$ y $B'C' \parallel BC$ (fig. 76).

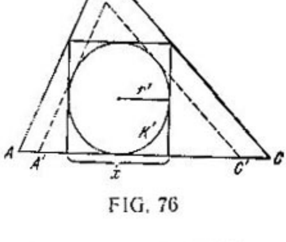

FIG. 76

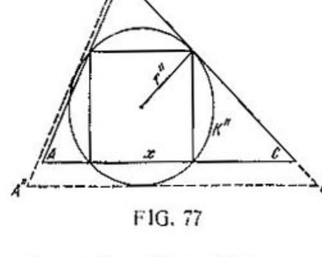

FIG. 77

Está claro que el $\triangle A'B'C'$ se encuentra dentro del $\triangle ABC$, por lo cual $A'C' < AC$. Puesto que $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$, entonces

$$\frac{r'}{r}=\frac{A'C'}{AC}<1,$$

de donde $x=2r'<2r$.

2) Examinemos la circunferencia K'' de radio r'' circunscrita al cuadrado y tracemos las tangentes a esta circunferencia $A''B'' \parallel AB$, $B''C'' \parallel BC$ y $A''C'' \parallel AC$ (fig. 77). Es evidente que el $\triangle ABC$ se encuentra dentro del $\triangle A''B''C''$ y, por lo tanto, $A''C'' > AC$. Puesto que

$$\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC,$$

entonces,

$$\frac{r''}{r} = \frac{A''C''}{AC} > 1,$$

de donde

$$x = \sqrt{2}\, r'' > \sqrt{2}\, r.$$

365. Supongamos que sea M el punto de intersección de las alturas AA_1, BB_1 y CC_1 del triángulo ABC; P el centro de la circunferencia circunscrita de radio R; C_2, A_2 y B_2 los puntos medios de los lados AB, BC y AC; $OM = OP$; $ON \perp AC$; A_3, B_3 y C_3 los puntos medios de AM, BM y CM

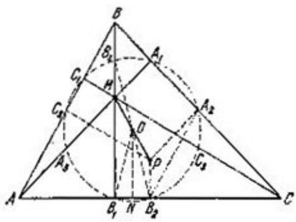

FIG. 78

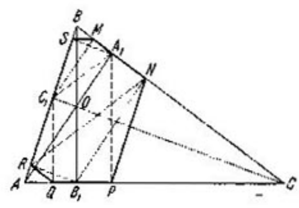

FIG. 79

(fig. 78). Demostremos que el punto O equidista de A_i, B_i y C_i, donde $i = 1, 2, 3$. Puesto que ON es la línea media en el trapecio MB_1B_2P, entonces $OB_1 = OB_2$. De la semejanza de los triángulos AMB y PA_2B_2 hallamos que $BM = 2PB_2$ y, por lo tanto, $B_3M = PB_2$. Del paralelogramo MB_3PB_2 tenemos que $OB_3 = OB_2$. Pero

$$OB_3 = \frac{1}{2}\, BP = \frac{R}{2}$$

(como línea media en el triángulo PMB). Por consiguiente,

$$OB_3 = OB_2 = OB_1 = \frac{R}{2}$$

De manera análoga se demuestra que $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OC_1 = OC_2 = OC_3 = \frac{R}{2}$.

366. Supongamos que AA_1, BB_1 y CC_1 son las alturas del triángulo ABC, que se cruzan en el punto O, $C_1M \parallel B_1N \perp BC$, $A_1P \parallel C_1Q \perp AC$, $B_1R \parallel A_1S \perp AB$ (fig. 79).

1) Demostremos que $SM \parallel AC$. Tenemos que $\triangle BA_1A \sim \triangle BC_1C$ como triángulos rectángulos con el ángulo agudo ABC común. De aquí

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC}.$$

Por consiguiente, $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ y $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$. En el $\triangle A_1BC_1$ los segmentos A_1S y C_1M son alturas. Por esta razón, repitiendo los razonamientos anteriores, mostremos que $\angle BSM = \angle BA_1C_1$. Por consiguiente,

$\angle BSM = \angle BAC$ y $SM \parallel AC$. De análoga forma se demuestra que $PN \parallel AB$ y que $RQ \parallel BC$.

2) Para demostrar que los vértices del hexágono $MNPQRS$ se encuentran en una misma circunferencia, es suficiente demostrar que cuatro cualesquiera de sus vértices consecutivos se encuentran en una misma circunferencia. Esto se desprende del hecho de que por tres puntos no pertenecientes a una misma recta puede ser trazada solamente una circunferencia. Se tienen dos tipos de cuatro vértices sucesivos del hexágono que se examina: tales, en los que los puntos medios se encuentran en distintos lados del $\triangle ABC$ ($RSMN$, $MNPQ$, $PQRS$) y tales, en los que los puntos medios se encuentran en un mismo lado del $\triangle ABC$ ($NPQR$, $QRSM$, $SMNP$).

Examinemos los cuatro vértices $RSMN$ y $NPQR$ (de distintos tipos). De la proporcionalidad obvia

$$\frac{BC_1}{BR} = \frac{BO}{BB_1} = \frac{BA_1}{BN}$$

se deduce que $NR \parallel A_1C_1$. Por eso

$$\angle MNR = \angle BA_1C_1 = \angle BAC = \angle BSM.$$

Por consiguiente, $\angle MNR + \angle MSR = \pi$ y los puntos R, S, M y N pertenecen a una misma circunferencia. Luego,

$$\angle PNR + \angle PQR = \pi - (\angle PNC + \angle BNR) + \pi - \angle AQR = \\ = 2\pi - (\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB) = \pi,$$

de donde se deriva que los puntos N, P, Q y R están dispuestos también en una misma circunferencia. De forma análoga se lleva a cabo la demostración para los démas conjuntos de cuatro vértices.

367. Sean A_1, B_1 y C_1 los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del $\triangle ABC$, y D el centro de esta circunferencia (fig. 80). Puesto

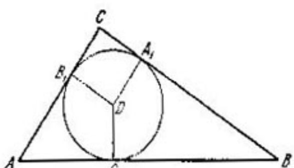

FIG. 80

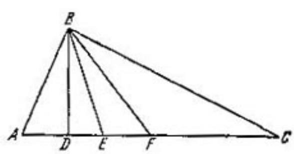

FIG. 81

que los segmentos de las tangentes a una circunferencia trazadas desde un mismo punto son iguales entre sí, entonces

$$CA_1 = CB_1, \quad BA_1 = BC_1, \quad AB_1 = AC_1.$$

Al mismo tiempo,

$$DB_1 = CA_1, \quad B_1C = A_1D.$$

Por consiguiente,

$$AC + BC = CA_1 + A_1B + CB_1 + B_1A = B_1D + A_1D + BC_1 + AC_1 = 2r + 2R,$$

donde r es el radio de la circunferencia inscrita, y R es el radio de la circunferencia circunscrita.

368. Supongamos que en el triángulo ABC, ABC es el ángulo recto, BD es la altura, BE es la bisectriz y BF la mediana (fig. 81). Puesto que $BF = FC$, entonces $\angle CBF = \angle ACB$. Pero

$$\angle ABD = \frac{\pi}{2} - \angle BAD = \angle ACB.$$

Por consiguiente, $\angle ABD = \angle CBF$ y

$$\angle DBE = \angle ABE - \angle ABD = \angle CBE - \angle CBF = \angle FBE,$$

lo que era necesario demostrar.

369. La disposición simétrica de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ respecto al centro O de la circunferencia inscrita significa que los respectivos puntos de dichos triángulos se encuentran en una misma recta con O y equidistan de éste (fig. 82). En particular, $OC = OC_1$, $OB = OB_1$ y BCB_1C_1 es un paralelogramo; por lo tanto, $BC = B_1C_1$. Análogamente $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ y $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Examinando los paralelogramos ABA_1B_1, BDB_1D_1, ACA_1C_1 y ECE_1C_1 hallamos que $AD = A_1D_1$, $AE = A_1E_1$ y, puesto que $\angle A = \angle A_1$, $\triangle ADE = \triangle A_1D_1E_1$. Análogamente $\triangle B_1EK_1 = \triangle BE_1K$ y $\triangle DC_1K = \triangle D_1CK_1$.

Introduzcamos las siguientes denotaciones:

S es el área del $\triangle ABC$,
S_1, el área del $\triangle ADE$,
S_2, el área del $\triangle DC_1K$,
S_3, el área del $\triangle KBE_1$,

$$AB = c, \quad BC = a, \quad AC = b,$$

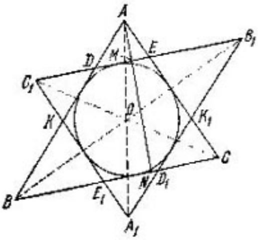

FIG. 82

h_A, h_B y h_C son las alturas bajadas de los vértices A, B y C. Entonces,

$$S = pr = \frac{ah_A}{2} = \frac{bh_B}{2} = \frac{ch_C}{2}$$

Sea AM una altura en el $\triangle ADE$ y AN una altura en el $\triangle ABC$; entonces

$$S_1 = \frac{DE \cdot AM}{2}.$$

De la semejanza de los triángulos ABC y ADE, hallamos:

$$DE = \frac{a(h_A - 2r)}{h_A}.$$

Por consiguiente,

$$S_1 = \frac{a(h_A - 2r)^2}{2h_A} = \frac{a\left(\frac{2pr}{a} - 2r\right)^2}{2h_A} = \frac{r^2(p-a)^2}{S}$$

Análogamente,

$$S_2 = \frac{r^2(p-c)^2}{S}, \qquad S_3 = \frac{r^2(p-b)^2}{S}.$$

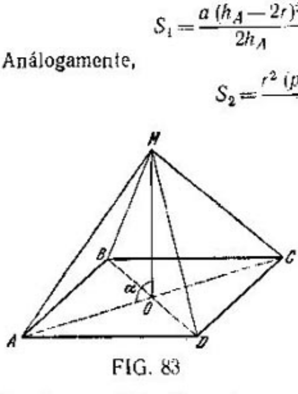

FIG. 83

Empleando la fórmula de Herón, obtenemos:

$$S^2S_1^2S_2^2S_3^2 = \frac{r^{12}(p-a)^4(p-b)^4(p-c)^4S^2}{S^6} = r^{12}\frac{S^4}{p^4} = r^{16}.$$

370. En las denotaciones de la fig. 83 tenemos:

$$MA^2 = MO^2 + AO^2 - 2MO \cdot AO \cos\alpha,$$
$$MC^2 = MO^2 + CO^2 + 2MO \cdot CO \cos\alpha.$$

Puesto que $AO = CO$, entonces, sumando estas igualdades, obtendremos:

$$MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + 2AO^2. \tag{1}$$

Análogamente

$$MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + 2BO^2.$$

Por consiguiente, la diferencia

$$(MA^2+MC^2)-(MB^2+MD^2)=2(AO^2-BO^2)$$

no depende de la posición del punto M.

371. Sea O el punto de intersección de las rectas AA_1 y CC_1 (véase la fig. 84). El problema quedará resuelto si se demuestra que

$$\angle AOB+\angle AOB_1=180^\circ. \qquad (1)$$

Observemos que $\triangle C_1BC=\triangle ABA_1$, ya que $C_1B=AB$, $BC=BA_1$ y $\angle C_1BC=60^\circ+\angle ABC=\angle ABA_1$. Por lo tanto, $\angle OC_1B=\angle OAB$ y el cuadrángulo OAC_1B está inscrito en cierta circunferencia. Por consiguiente, $\angle AOB=120^\circ$. De

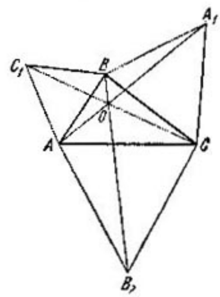

FIG. 84

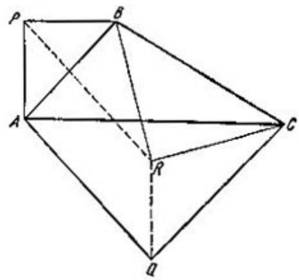

FIG. 85

forma análoga demostremos que $\angle BOC=120^\circ$. Pero entonces también $\angle AOC=120^\circ$, de donde se desprende que el cuadrángulo $AOCB_1$ está inscrito en cierta circunferencia. Pero, de aquí se deriva, al mismo tiempo, que $\angle AOB_1=\angle ACB_1=60^\circ$ Por esta razón, la fórmula (1) es válida.

372. En las anotaciones de la fig. 85 tenemos:

$$\angle PBR=\angle ABC$$

y

$$\frac{PB}{AB}=\frac{BR}{BC}.$$

Esto significa que $\triangle PBR\backsim\triangle ABC$ y análogamente $\triangle QRC\backsim\triangle ABC$. Valiéndonos de este hecho obtendremos:

$$\angle APR=\angle APB-\angle BPR=\angle APB-\angle BAC,$$

de donde

$$\angle APR+\angle PAQ=\angle APB+2\angle PAB=\pi,$$

así que $PR\parallel AQ$ De forma análoga demostraremos que $QR\parallel AP$.

373. Designemos por h_B, h_C y h_D las distancias desde los vértices B, C y D del paralelogramo hasta la recta AO (fig. 86). En este caso tiene lugar la siguiente propiedad: la mayor de estas distancias es igual a la suma de las otras dos Por ejemplo, si AO cruza al lado BC, (como en la fig. 86), entonces, trazando $BE\parallel AO$ y $CE\perp AO$, de la igualdad de los triángulos BEC y $AD'D$ hallaremos,

$$h_D=h_B+h_C$$

Análogamente, si AO cruza al lado CD, entonces $h_B=h_C+h_D$; si AO no cruza los lados BC y CD, entonces, $h_C=h_B+h_D$. De esta propiedad, para el caso expuesto en la fig. 86, se deduce directamente la igualdad de las aresa de los triángulos:

$$S_{AOC}=S_{AOD}-S_{AOB}.$$

En general, evidentemente, se puede escribir la fórmula

$$S_{AOC}=|S_{AOD}\pm S_{AOB}|,$$

donde se toma el signo más, si los puntos B y D se encuentran a un mismo lado de AO, y el signo menos, si los puntos B y D se encuentran a distintos lados de AO.

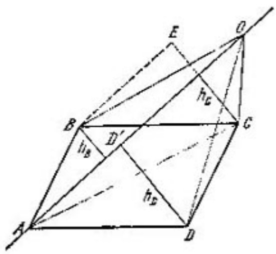

FIG 86

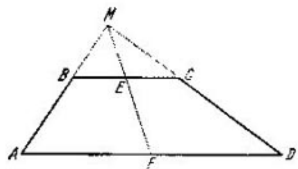

FIG 87

La repetición de este razonamiento para la recta CO en vez de la AO conduce a la fórmula análoga

$$S_{AOC}=|S_{COD}\pm S_{COB}|$$

con la misma regla de elección de los signos, pero respecto a la recta CO.

374. Construyamos a base del trapecio $ABCD$ el triángulo AMD y unamos el punto M con el punto medio F de la base AD (fig. 87). Entonces

$$ME=\frac{BC}{2}, \quad MF=\frac{AD}{2}.$$

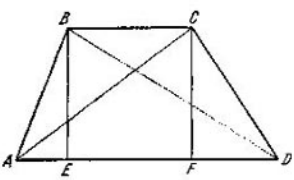

FIG. 88

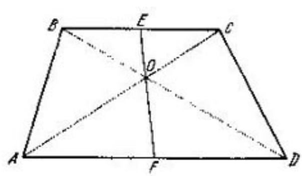

FIG. 89

Por consiguiente,

$$EF=\frac{AD-BC}{2}.$$

375. Supongamos que sea $ABCD$ el trapecio dado con las bases AD y BC, y que $BE\perp AD$ y $CF\perp AD$ (fig. 88). Tenemos:

$$AC^2-AF^2=CD^2-FD^2,$$
$$BD^2-ED^2=AB^2-AE^2.$$

Sumando estas igualdades, obtendremos:

$$AC^2+BD^2-AB^2+CD^2+AF^2-FD^2+ED^2-AE^2=$$
$$=AB^2+CD^2+AD\,(AF-FD+ED-AE)=$$
$$=AB^2+CD^2+AD\cdot 2EF=AB^2+CD^2+2AD\cdot BC.$$

376. Sea dado el trapecio $ABCD$ con sus bases paralelas AD y BC, E es el punto medio de BC, F el punto medio de AD y O el punto de intersección de las diagonales (fig. 89). Los triángulos AOF y COE son semejantes (esto se deriva de la semejanza de los triángulos AOD y COB). Por esta razón, $\angle AOF=\angle COE$, es decir, EOF es una recta.

377. Sea $ABCD$ el cuadrilátero dado y los puntos M y N los puntos medios de los lados AB y CD respectivamente (véase la fig. 90). Giremos el cuadrilátero $AMND$ $180°$ en el plano del dibujo alrededor del vértice N. Entonces, el vértice D coincidirá con el C, y los vértices M y A ocuparán las posiciones M' y A'. Además, los puntos M, N y M' se dispondrán en una misma recta y, al mismo tiempo, tendremos que $M'A' \parallel MB$ y $M'A'=MB$.

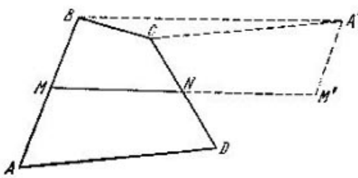

FIG. 90

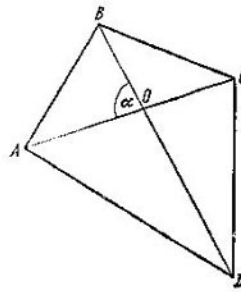

FIG. 91

Por consiguiente $MBA'M'$ es un paralelogramo y $A'B=M'M=2MN$. Puesto que por la condición del problema $BC+AD=2MN$, entonces, $BC+CA'=A'B$. Por consiguiente, el punto C se encuentra en el segmento $A'B$; en el caso contrario tendríamos que en el $\triangle BCA'$, $BC+CA'>A'B$. De aquí se desprende que $BC \parallel MN \parallel AD$ es decir, que $ABCD$ es un trapecio.

378. Hallemos la expresión para el área de un cuadrilátero en función de sus diagonales y el ángulo formado por éstas. Sea O el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ y $\angle BOA=\alpha$ (fig. 91). Entonces, el área del cuadrilátero dado será igual a

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{COD}+S_{AOD}+S_{BOC}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot \operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot \operatorname{sen}\alpha+$$
$$+\frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot \operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot \operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}BD\cdot AC\cdot \operatorname{sen}\alpha.$$

De esta fórmula se deduce, precisamente, la justeza de la afirmación a demostrar.

379. Sea M el punto interior del polígono convexo y AB su lado más cercano al punto M. Demostremos que el pie de la perpendicular P bajada desde el punto M a AB se encuentra en AB y no en su prolongación (fig. 92). En efecto, si P se encontrara fuera de AB, MP cortaría a cierto lado l del polígono en el punto Q, ademas, en virtud de la convexidad del polígono, $MQ<MP$. Pero la distancia DM de M a l es menor que MQ y, por consiguiente, también menor que MP, lo que contradice a la elección del lado AB.

380. Sean AA_1, BB_1, CC_1 y DD_1 las bisectrices de los ángulos internos del paralelogramo $ABCD$, que forman en su intersección el paralelogramo $PQRS$ (fig. 93). Es evidente que $BB_1 \parallel DD_1$ y $AA_1 \parallel CC_1$. Además,

$$\angle APB = \pi - (\angle BAP + \angle ABP) = \pi - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi,$$

lo que significa que $PQRS$ es un rectángulo. Los triángulos BAB_1 y CDC_1 son

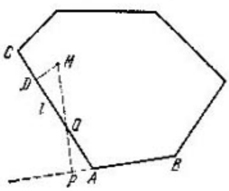

FIG. 92

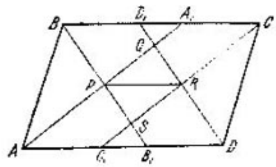

FIG. 93

isósceles, ya que sus bisectrices son perpendiculares a sus bases. Por esta razón, $BP = PB_1$, $D_1R = RD$ y, por lo tanto, $PR \parallel AD$. Así pues, $PRDB_1$ es un paralelogramo y

$$PR = B_1D = AD - AB_1 = AD - AB.$$

381. Sean O_1, O_2, O_3 y O_4 los centros de los cuadrados construidos a base de los lados del paralelogramo $ABCD$ (fig. 94). Tenemos

$$\triangle O_1BO_2 = \triangle O_3CO_2,$$

puesto que $O_1B = O_3C$, $BO_2 = CO_2$ y

$$\angle O_1BO_2 = \angle MBN + \frac{\pi}{2} = \angle DCB + \frac{\pi}{2} = \angle O_3CO_2.$$

Por consiguiente, $O_1O_2 = O_3O_2$ y

$$\angle O_1O_2O_3 = \angle O_1O_2B + \angle BO_2C - \angle O_3O_2C = \angle BO_2C = \frac{\pi}{2}.$$

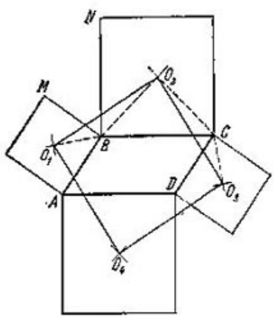

FIG. 94

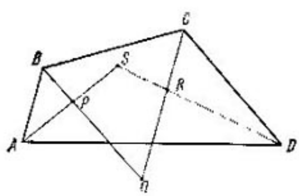

FIG. 95

De la misma manera se demuestra que $O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$ y que

$$\angle O_2O_3O_4 = \angle O_3O_4O_1 = \angle O_4O_1O_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente, $O_1O_2O_3O_4$ es un cuadrado.

382. Admitamos que sean AP, BQ, CR y DS las bisectrices de los ángulos internos del cuadrilátero $ABCD$ (fig. 95). Sean, además, A, B, C y D los valores de estos ángulos. Entonces,

$$\angle ASD = \pi - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}D, \quad \angle BQC = \pi - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C.$$

Sumando estas igualdades, obtendremos:

$$\angle ASD + \angle BQC = 2\pi - \frac{1}{2}(A + B + C + D) = 2\pi - \frac{1}{2}2\pi = \pi.$$

Por consiguiente, los puntos P, Q, R y S se encuentran en una misma circunferencia.

383. Sean A y B los puntos de tangencia, M un punto arbitrario de la circunferencia y $MN \perp AB$, $MD \perp AC$, $ME \perp BC$ (véase la fig. 96). Demostremos que los triángulos DMN y NME son semejantes. Con este fin, observemos que a los cuadriláteros $ADMN$ y $NMEB$ se les puede circunscribir circunferencias, puesto que

$$\angle MNA + \angle ADM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

y

$$\angle MEB + \angle BNM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

De aquí que $\angle MND = \angle MAD$ y $\angle MEN = \angle MBN$. Pero $\angle MAD = \angle MBN$, puesto que cada uno de ellos abarca la mitad del arco AM. Así pues, $\angle MND = \angle MEN$. De análoga forma se establece la igualdad $\angle NDM = \angle ENM$.

De la semejanza de los triángulos DMN y NME obtenemos que

$$\frac{DM}{MN} = \frac{MN}{ME},$$

lo que había que demostrar.

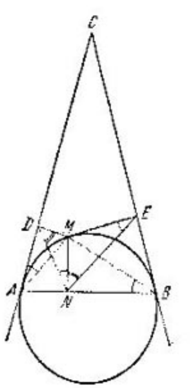

FIG. 96

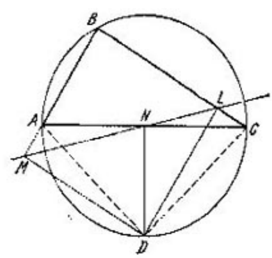

FIG. 97

384. Sea ABC el triángulo inscrito en la circunferencia, D el punto de la circunferencia y L, M y N los pies de las perpendiculares (fig. 97). Unamos el punto M con el N y el punto N con el L, y demostremos que los ángulos ANM y LNC son iguales.

Observemos, para ello, que

$$\angle ANM = \angle ADM, \tag{1}$$

puesto que al cuadrilátero $MAND$ se le puede circunscribir una circunferencia. Por la misma causa

$$\angle LNC = \angle LDC; \tag{2}$$

por otra parte,

$$\angle ADC = \angle MDL. \tag{3}$$

En efecto, $\angle ADC + \angle B = 180^\circ$, puesto que en suma estos dos ángulos abarcan la circunferencia completa; al mismo tiempo, $\angle MDL + \angle B = 180^\circ$, ya que al cuadrilátero $MBLD$ se le puede circunscribir una circunferencia. Por consiguiente, la igualdad (3) es justa. Del dibujo está claro que, en este caso,

$$\angle LDC = \angle ADM,$$

y, entonces, de (1) y (2) se desprende la igualdad

$$\angle ANM = \angle LNC,$$

que era necesario demostrar.

385. Demostremos que cada dos de los tres segmentos O_1A_1, O_2A_2 y O_3A_3 se dividen por la mitad en el punto de su intersección. De aquí se desprende

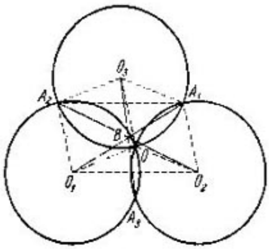

FIG. 98

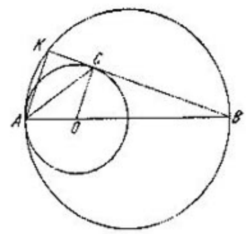

FIG. 99

que los tres segmentos indicados se cruzan en un mismo punto. Por ejemplo, demostremos que los segmentos O_1A_1 y O_2A_2 se dividen por la mitad en el punto de su intersección B (véase la fig. 98.). En virtud de la igualdad de las circunferencias deducimos que $O_2A_1O_3O$ y $O_1A_2O_3O$ son rombos. De aquí se deriva que los segmentos O_2A_1, OO_3 y O_1A_2 son iguales y paralelos. Por esta razón, $O_1A_2A_1O_2$ es un paralelogramo y el punto B de intersección de sus diagonales O_1A_1 y O_2A_2 divide a éstas por la mitad.

386. Sea O el centro de la circunferencia menor (fig. 99). Entonces, $AK \parallel OC$, puesto que $AK \perp BK$ y $OC \perp BK$. Además, $OA = OC$. Por consiguiente,

$$\angle KAC = \angle ACO = \angle CAO.$$

387. Del examen de la fig. 100 está claro que

$$\frac{R-r}{r} = \frac{R}{a},$$

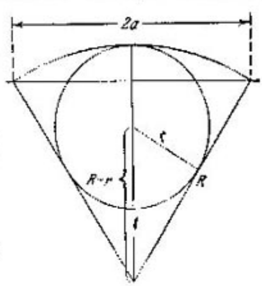

FIG. 100

pero, esta igualdad es equivalente a la igualdad

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}.$$

388. Son posibles tres casos. Estos tres casos están representados en la fig. 101, *a*, *b*, *c*. En el primer caso las tangentes fijas son paralelas, el ángulo $COD = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, por eso $CE \cdot ED = OE^2$, es decir, $AC \cdot BD = r^2$, donde r es el radio de la circunferencia. En los casos segundo y tercero, valiéndonos de las anotaciones, fáciles de comprender en la fig., hallamos que $\alpha+\beta\pm\gamma=\frac{\pi}{2}$, es decir, $\alpha\pm\gamma=\frac{\pi}{2}-\beta$, de donde se desprende que $\triangle AOC$ es semejante a $\triangle BDO$ y, por lo tanto,

$$\frac{AC}{AO}=\frac{OB}{BD}.$$

Por consiguiente,

$$AC\cdot BD=AO^2=r^2.$$

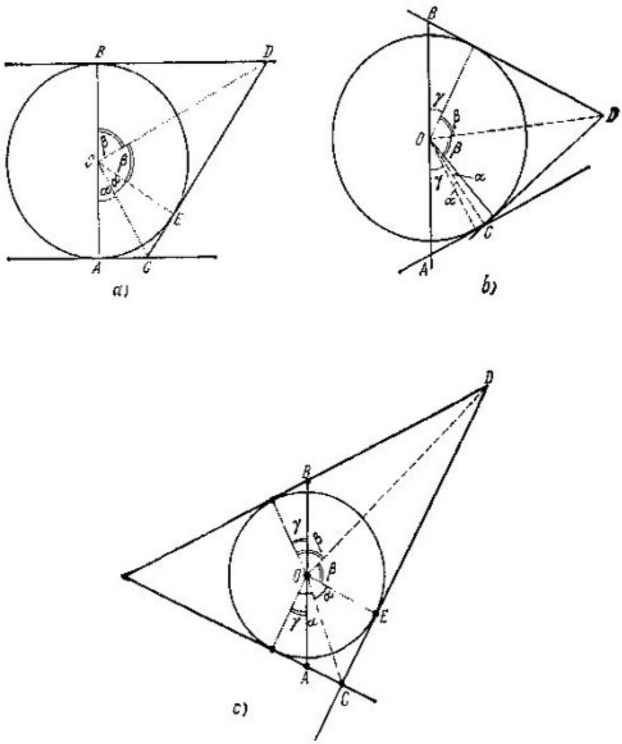

FIG. 101

389. Supongamos que sea M el punto de intersección de las cuerdas perpendiculares entre sí AB y CD (fig. 102). Tracemos $AK \parallel CD$, entonces, BK es el diámetro, $AK < CD$ y

$$BK^2=AB^2+AK^2<AB^2+CD^2.$$

luego, $KD=AC$ y, por lo tanto,

$$KB^2=BD^2+KD^2=BM^2+DM^2+AM^2+CM^2.$$

390. Sea $AC = CD = DB$ (fig. 103). Tracemos $OE \perp AB$. Entonces, OE es una de las alturas, y OC una de las medianas del $\triangle AOD$. Dado que la bisectriz del $\angle AOD$ se encuentra entre la mediana y la altura (véase el problema 355), entonces,

$$\angle AOC < \angle COD.$$

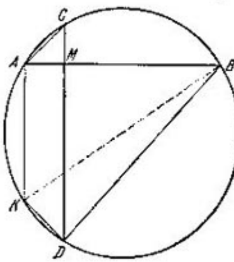

FIG. 102

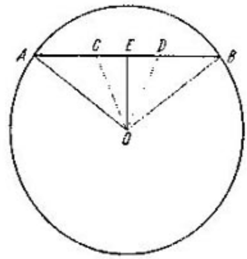

FIG. 103

391. Admitamos que sea AB el diámetro de la circunferencia y E el punto de intersección de las cuerdas AD y BC (fig. 104). Tenemos:

$$AE \cdot AD = AE^2 + AE \cdot ED = AC^2 + EC^2 + AE \cdot ED.$$

Por la propiedad de las cuerdas que se cruzan

$$AE \cdot ED = BE \cdot EC.$$

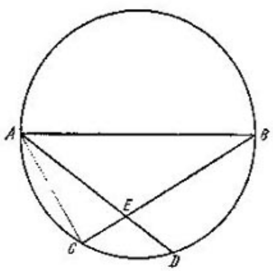

FIG. 104

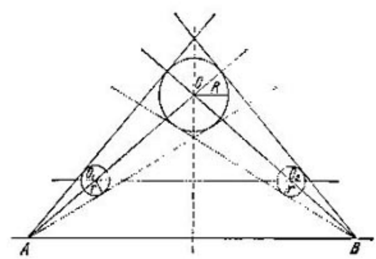

FIG. 105

Por eso,

$$AE \cdot AD = AC^2 + EC^2 + BE \cdot EC = AC^2 + EC \cdot BC =$$
$$= AC^2 + (BC - BE)\,BC = AC^2 + BC^2 - BE \cdot BC,$$

o definitivamente

$$AE \cdot AD + BE \cdot BC = AB^2.$$

392. Sean A y B los puntos dados, O el centro de la circunferencia dada, R el radio de esta circunferencia y r el radio de las circunferencias iguales inscritas, cuyos centros son O_1 y O_2 (fig. 105). Entonces,

$$\frac{R}{r} = \frac{OA}{O_1A} = \frac{OB}{O_2B}.$$

Tomando la derivada de la proporción, obtendremos:

$$\frac{OA}{OO_1} = \frac{OB}{OO_2}.$$

Por consiguiente, $O_1O_2 \parallel AB$.

393. Sean r_1 y r_2 los radios de las semicircunferencias inscritas en la semicircunferencia dada de radio R (fig. 106). Puesto que $R=r_1+r_2$, entonces, el área sombreada es igual a

$$S=\frac{1}{2}\pi R^2-\frac{1}{2}\pi r_1^2-\frac{1}{2}\pi r_2^2=\frac{1}{2}\pi\left[(r_1+r_2)^2-r_1^2-r_2^2\right]=\pi r_1 r_2.$$

Pero,

$$h^2=2r_1\cdot 2r_2=4r_1r_2.$$

Por consiguiente,

$$S=\frac{1}{4}\pi h^2.$$

394. Si la recta que une los puntos A y B *no corta* a la circunferencia dada, entonces las tangentes AC y BD pueden ser trazadas de manera tal, que el

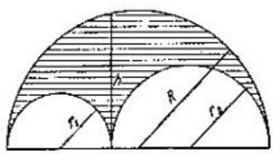

FIG. 106

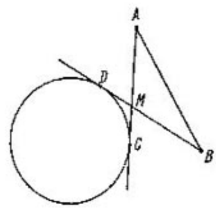

FIG. 107

punto de su intersección M se encuentre en los segmentos AC y BD (fig. 107). En el triángulo AMB tenemos:

$$AM+BM>AB>|AM-BM|,$$

y, dado que

$$AC>AM,\quad BD>BM,\quad MC=MD,$$

entonces,

$$AC+BD>AB>|AC-BD|.$$

Si la recta AB *cruza* a la circunferencia, son posibles dos casos: a) la cuerda cortada por la circunferencia en la recta AB, se encuentra en el segmento AB; b) esta cuerda se encuentra fuera del segmento AB.

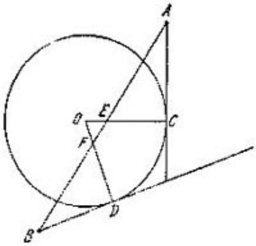

FIG. 108

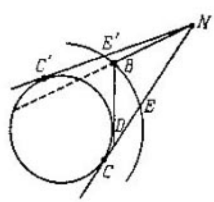

FIG. 109

En el caso a) (fig. 108) tenemos:

$$AB>AE+BF>AC+BD,$$

puesto que las hipotenusas AE y BF en los triángulos rectángulos AEC y BFD son mayores que los catetos AC y BD.

En el caso b) el segmento AB se encuentra dentro del ángulo CAC' (fig. 109). Tracemos por el punto B una circunferencia concéntrica a la dada. Supongamos que esta circunferencia corta a AC y a AC' en los puntos E y E'. Entonces, $EC=BD$ y $AE > AB$. Por consiguiente,

$$AB < AE = AC - EC = AC - BD$$

395. Introduzcamos las siguientes anotaciones (fig. 110).

$$\angle PCM = \angle QCN = \alpha, \quad \angle NML = \angle NKL = \gamma, \quad \angle LCP = \angle QCK = \beta,$$
$$QC = x, \quad PC = y, \quad AC = CB = a.$$

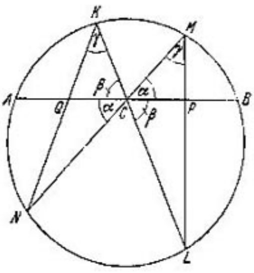

FIG. 110

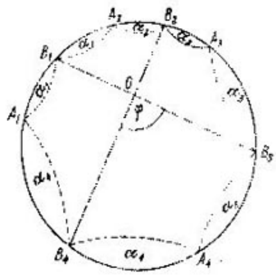

FIG. 111

De acuerdo con el teorema de los segmentos de las cuerdas que se cruzan de una circunferencia, tenemos que

$$NQ \cdot QK = AQ \cdot QB = a^2 - x^2.$$

Aplicando el teorema de los senos a los triángulos NQC y QCK, obtenemos:

$$NQ = \frac{x \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}, \qquad QK = \frac{x \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

Por consiguiente,

$$NQ \cdot QK = \frac{x^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)} = a^2 - x^2,$$

de donde,

$$x^2 = \frac{a^2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Análogamente se determina que

$$y^2 = \frac{a^2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Así pues, $x = y$.

396. Sean B_1, B_2, B_3 y B_4 los puntos medios de los arcos A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 y A_4A_1 (fig. 111). Sea, además, α_i el ángulo central correspondiente al arco A_iB_i ($i=1, 2, 3, 4$). Designemos por φ al ángulo formado por los segmentos B_1B_3 y B_2B_4. Entonces,

$$\varphi = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2},$$

y, puesto que

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = 2\pi,$$

entonces,

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

397. Elijamos los puntos A y B en la línea quebrada de manera que dividan su perímetro en dos partes iguales. Sea O el punto medio del segmento AB. Tracemos, tomando el punto O como centro, una circunferencia de radio $\frac{p}{4}$, donde p es el perímetro de la quebrada. Demostremos que esta circunferencia es la buscada. Supongamos lo contrario, o sea, que existe un punto M de la quebrada exterior a la circunferencia descrita. La longitud de la parte de la quebrada que contiene a M no es menor que $AM+BM$, es decir, $AM+BM \leqslant \frac{p}{2}$. Pero,

$$AM+BM \geqslant 2MO.$$

En efecto, del paralelogramo $AMBD$ (fig. 112) tenemos:

$$DM=2MO < BM+BD=AM+BM.$$

Puesto que $MO > \frac{p}{4}$, entonces, de la desigualdad $AM+BM \geqslant 2MO$ se desprende que $AM+BM > \frac{p}{2}$. Obtenemos una contradicción.

398. Tracemos por el vértice A del triángulo dado ABC la recta AD paralela a una de las rectas dadas x e y y que no corta al triángulo. A continuación,

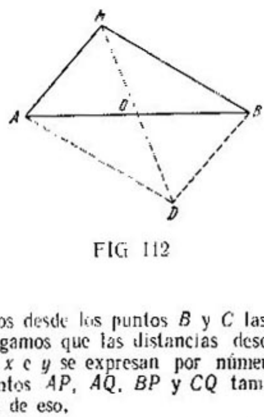

FIG. 112

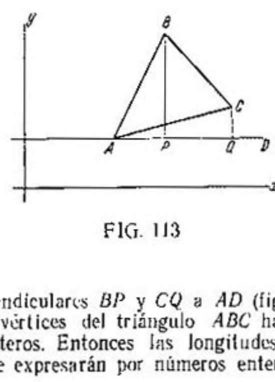

FIG. 113

bajemos desde los puntos B y C las perpendiculares BP y CQ a AD (fig. 113). Supongamos que las distancias desde los vértices del triángulo ABC hasta las rectas x e y se expresan por números enteros. Entonces las longitudes de los segmentos AP, AQ, BP y CQ también se expresarán por números enteros. En virtud de eso,

$$\operatorname{tg} \angle BAP=\frac{BP}{AP} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \angle CAQ=\frac{CQ}{AQ}$$

serán números racionales y, por lo tanto, será también racional el número

$$\operatorname{tg} \angle BAC=\frac{\operatorname{tg} \angle BAP-\operatorname{tg} \angle CAQ}{1+\operatorname{tg} \angle BAP \operatorname{tg} \angle CAQ}=\frac{\frac{BP}{AP}-\frac{CQ}{AQ}}{1+\frac{BP}{AP}\frac{CQ}{AQ}}.$$

Por esta razón, es imposible que el $\angle BAC=60°$, puesto que $\operatorname{tg} 60°=\sqrt{3}$ es un número irracional. Por consiguiente, el $\triangle ABC$ no puede ser regular.

399. Supongamos que las rectas A_1B y AB_1 se crucen en el punto O y que sea $OD \perp AB$ (fig. 114). Puesto que $\triangle ABA_1 \backsim \triangle DBO$ y $\triangle BAB_1 \backsim \triangle DAO$, entonces,

$$\frac{OD}{a} = \frac{BD}{AB}, \quad \frac{OD}{b} = \frac{AD}{AB}.$$

De aquí,

$$OD = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{AD + BD}{AB} = 1.$$

Por consiguiente, la distancia

$$OD = \frac{ab}{a+b}$$

no depende de la disposición de los puntos A y B (si se conservan las magnitudes de a y b).

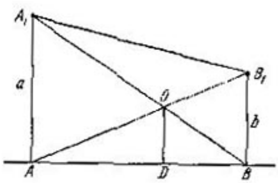

FIG. 114

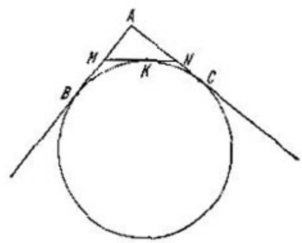

FIG. 115

400. Si K es el punto de tangencia del segmento MN con la circunferencia (fig. 115), entonces $BM = MK$ y $KN = NC$, de donde

$$MN = BM + CN \tag{1}$$

Pero, $MN < AM + AN$. Por eso

$$2MN < BM + AM + CN + AN = AB + AC,$$

de donde

$$MN < \frac{AB + AC}{2}.$$

Por otra parte, $MN > AN$ y $MN > AM$, puesto que MN es la hipotenusa del triángulo AMN. Por eso $2MN > AN + AM$ y, en virtud de (1) tenemos que $3MN > AN + NC + AM + MB = AB + AC$

Por consiguiente,

$$MN > \frac{AB + AC}{3}.$$

401. Sea ABC el triángulo dado, $AB = BC$, $BO \parallel AC$, O el centro de la circunferencia que hace contacto con AC; D y E los puntos de intersección de esta circunferencia con AB y BC (fig. 116). Prolonguemos el lado AB hasta su segunda intersección con la circunferencia en el punto F. Demostremos que $FE \perp BO$. Observemos que $\angle OBF = \angle OBE$, puesto que estos ángulos son iguales a los ángulos en la base AC del triángulo ABC. Luego, $BF = BE$, en efecto, si fuera $BF > BE$, entonces, trazando en BF el segmento $BE' = BE$, tendríamos que los triángulos OBE y OBE' son iguales y que $OE' = OE$, lo cual es imposible, puesto que el punto E' se encuentra dentro del círculo de radio OE; de análoga forma se demostrará que es imposible la desigualdad $BF < BE$. Pero la bisectriz BO del triángulo FBE deberá ser también su altura, lo que era necesario demostrar. Por esta razón, $\angle DFE = \frac{1}{2} \angle ABC$ no depende de la posición del punto O en la recta BO. Por consiguiente, la magnitud del arco DE, cuya mitad se mide por el $\angle DFE$, durante la rodadura de la circunferencia permanece constante.

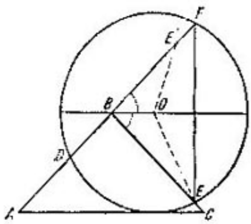

FIG. 116

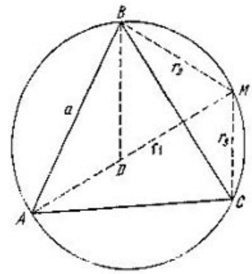

FIG. 117

402. Valiéndonos de las denotaciones introducidas al resolver el problema 324, hallamos:

$$n^2 = \frac{ab+cd}{bc+ad}(ac+bd), \qquad m^2 = \frac{bc+ad}{ab+cd}(ac+bd).$$

Dividiendo miembro a miembro estas igualdades, obtenemos:

$$\frac{n}{m} = \frac{ab+cd}{bc+ad}.$$

403. Sea ABC un triángulo regular con los lados a y r_1, r_2 y r_3 las distancias desde el punto M de la circunferencia circunscrita al triángulo hasta los vértices de éste (fig. 117). Observemos, al principio, que para la posición del punto M dada en la fig. 117 tendremos que

$$r_1 = r_2 + r_3.$$

En efecto, si trazamos $DM = r_2$, obtendremos el triángulo equilátero BMD. De aquí se desprende que $\angle ABD = \angle CBM$, en virtud de lo cual $\triangle ABD = \triangle CBM$ y, por lo tanto, $AD = r_3$. Aplicando al triángulo BMC el teorema de los cosenos, obtendremos:

$$a^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos 120^\circ = r_2^2 + r_3^2 + r_2r_3.$$

Por consiguiente,

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_2 + r_3)^2 + r_2^2 + r_3^2 - 2(r_2^2 + r_3^2 + r_2r_3) = 2a^2.$$

404. Supongamos que el lado AB del cuadrilátero $ABCD$ cruza a la circunferencia y que los lados BC, CD y DA hacen contacto con ella en los puntos E, F y G (fig. 118). Puesto que $CE = CF$ y $DF = DG$, entonces, la desigualdad $AB + CD > BC + DA$ es equivalente a la desigualdad $AF > BE + AG$, que fue demostrada en la resolución del problema 394.

405. Supongamos que el lado AD del cuadrilátero $ABCD$ no corta a la circunferencia y que los lados BC, CD y BA hacen contacto con ésta en los puntos F, E y G (fig. 119). La desigualdad

$$AD+CB < DC+BA$$

es equivalente a la desigualdad

$$AD < DE+AG,$$

que fue demostrada en el problema 394.

406. Sea R el radio de las semicircunferencias dadas. Si r_1, r_2, $\ldots$, r_n son los radios de las circunferencias inscritas y d_1, d_2, $\ldots$, d_n sus diámetros (fig. 120), está claro que al aumentar inconmensurablemente n la suma $d_1+d_2+\ldots+d_n$ tiende a R, es decir,

$$d_1+d_2+\ldots+d_n+\ldots=R \qquad (1)$$

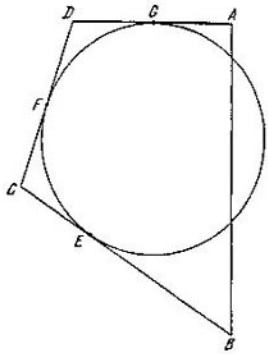

FIG. 118

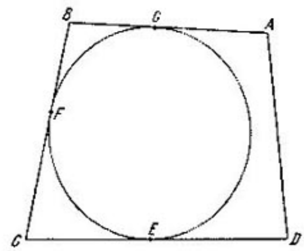

FIG. 119

Además, tenemos:

$$(R+r_1)^2=R^2+(R-r_1)^2, \qquad 2r_1=d_1=\frac{R}{1\cdot 2},$$

$$(R+r_2)^2=R^2+(R-d_1-r_2)^2, \quad 2r_2=d_2=\frac{R}{2\cdot 3}.$$

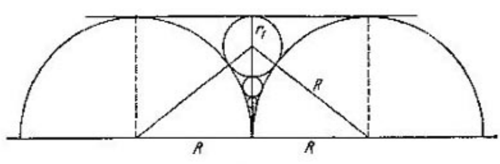

FIG. 120

Supongamos que sea $d_n=\dfrac{R}{n(n+1)}$. Demostremos que

$$d_{n+1}=\frac{R}{(n+1)(n+2)}.$$

Tenemos:

$$(R+r_{n+1})^2=R^2+(R-d_1-d_2-\ldots-d_n-r_{n+1})^2. \qquad (2)$$

Pero,

$$d_1+d_2+\ldots+d_n=R\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

$$=R\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=R\,\frac{n}{n+1}.$$

Colocando esta expresión en (2), hallaremos:

$$d_{n+1}=2r_{n+1}=\frac{R}{(n+1)(n+2)}.$$

Haciendo en la igualdad (1) $R=1$, obtendremos:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1.$$

407. Sea O el centro de la mesa de billar, B el primer punto de rebotación y C el segundo punto de rebotación. Demostremos que si el $\angle ABC \neq 0$, entonces el $\triangle ABC$ es isósceles (fig. 121). En efecto, el $\triangle BOC$ es isósceles, por lo tanto, $\angle OBC=\angle OCB$. Por la ley de reflexión (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de rebotación) $\angle OBC=\angle OBA$ y $\angle OCB=\angle OCA$. Así pues, $\angle ABC=\angle ACB$. Por consiguiente, el centro O se encuentra en la altura AD trazada al lado BC. La posición del punto B, hacia el cual hay que dirigir la bola para que después de rebotar de B y C pase por el punto A, se puede fijar dándonos el ángulo $\angle BOD=\alpha$. Tenemos:

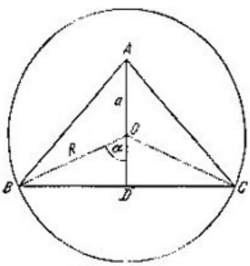

FIG 121

$$OD=R\cos\alpha,\quad BD=R\operatorname{sen}\alpha,\quad BA=\frac{BD}{\cos 2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=-\frac{BD}{\cos 2\alpha}$$

Puesto que BO es la bisectriz del ángulo B en el triángulo ABD, entonces,

$$\frac{BD}{BA}=\frac{OD}{OA}$$

o bien

$$-\cos 2\alpha=\frac{R\cos\alpha}{a},$$

de donde obtenemos la ecuación para el $\cos\alpha$

$$\cos^2\alpha+\frac{R}{2a}\cos\alpha-\frac{1}{2}=0$$

Resolviendo esta ecuación, hallaremos

$$\cos\alpha=-\frac{R}{4a}+\sqrt{\left(\frac{R}{4a}\right)^2+\frac{1}{2}}.$$

Prescindimos de la segunda raíz puesto que, en virtud de que $R>a$, da el valor de $\cos\alpha<-1$.

Si suponemos ahora que $\angle ABC=0$, obtendremos la segunda solución del problema: los puntos B y C se encuentran en los extremos del diámetro que pasa por el punto A.

408. Sea S el vértice del ángulo dado α, A_1 el punto del primer encuentro del rayo con el espejo, SB_1 el lado del ángulo, en el que se encuentra el punto A_1, y SB_0 el otro lado del ángulo. Designemos los siguientes puntos de encuentro del rayo con los lados del ángulo por $A_2, A_3, \ldots$, de manera que el trayecto del rayo dentro del ángulo tendrá la forma de una línea quebrada $AA_1A_2A_3\ldots$ (fig. 122).

Tracemos sucesivamente, en sentido de rotación de SB_0 hacia SB_1, los ángulos B_1SB_2, B_2SB_3, ..., iguales al ángulo $\alpha = \angle B_0SB_1$. Tracemos en el lado SB_m ($m=2, 3, 4, \ldots$) el segmento $SA'_m = SA_m$ (los puntos A'_1 y A_1 coinciden) y demostremos que los puntos A'_1, A'_2, ... se encuentran en una misma recta. Para ello es suficiente demostrar que cada tres puntos sucesivos A'_m, A'_{m+1}, A'_{m+2}

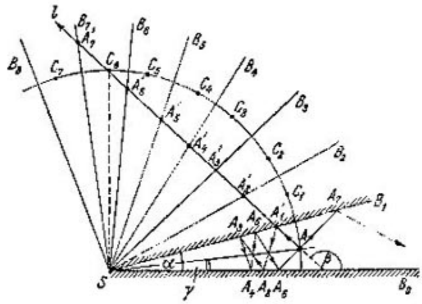

FIG. 122

se encuentran en una misma recta (suponemos aquí $m=0, 1, 2, \ldots$). Observemos que $\triangle A'_mSA'_{m+1} = \triangle A_mSA_{m+1}$, en virtud de lo cual

$$\angle A'_mA'_{m+1}S = \angle A_mA_{m+1}S.$$

Análogamente $\triangle A'_{m+1}SA'_{m+2} = \triangle A_{m+1}SA_{m+2}$ y, por consiguiente,

$$\angle SA'_{m+1}A'_{m+2} = \angle SA_{m+1}A_{m+2}.$$

Pero, por la ley de reflexión (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión).

$$\angle SA_{m+1}A_{m+2} = \angle A_mA_{m+1}B.$$

Por consiguiente,

$$\angle A'_mA'_{m+1}S + \angle SA'_{m+1}A'_{m+2} = \angle A_mA_{m+1}S + \angle A_mA_{m+1}B = \pi.$$

De este modo, el trayecto del rayo, la quebrada $AA_1A_2\ldots$, ha resultado desarrollado en la recta $l\,(AA'_1A'_2)$. Puesto que esta recta puede cruzar solamente un número finito de lados SB_m, por consiguiente, el número de reflexiones del rayo es finito.

Está claro que si SB_n es el último lado que corta la recta l, entonces $n\alpha < \beta$, y $(n+1)\alpha \geqslant \beta$. Así pues, el número de reflexiones es igual a un tal número entero n que satisface a las desigualdades

$$n < \frac{\beta}{\alpha} \leqslant n+1.$$

Para aclarar las condiciones con las cuales el rayo, despues de cierta cantadad de reflexiones, pasará de nuevo por el punto A, construyamos una serie de puntos C_1, C_2, ... de manera que el punto C_1 sea simétrico al punto A respecto del lado SB_1, el punto C_2 sea simétrico al C_1 respecto del lado SB_2, etc., en general, de modo que el punto C_m sea simétrico al punto C_{m-1} respecto del lado SB_m. Es evidente que el hecho de que el rayo pase de nuevo por el punto A es equivalente a que pase la recta l por uno de los puntos C_m ($m=1, 2, \ldots$).

Para formular analíticamente esta condición introduzcamos el ángulo $\gamma = \angle ASB_0$ y distinguiremos dos casos:

a) el punto C_k por el que pasa la recta l es tal, que k es un número par;

b) el punto C_k es tal, que k es un número impar.

En el caso a) (este caso está representado en la fig. 122, donde $k=6$) $\angle ASC_k = k\alpha$. Puesto que $\triangle ASC_k$ es isósceles, entonces

$$\angle SAC_k = \frac{\pi}{2} - \frac{k\alpha}{2}.$$

Por otro lado, el mismo ángulo es igual a $\gamma + \pi - \beta$, por consiguiente,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{k\alpha}{2} = \gamma + \pi - \beta,$$

de donde,

$$k = \frac{2\beta - 2\gamma - \pi}{\alpha}. \tag{1}$$

En el caso b) tendremos que

$$\angle ASC_k = (k+1)\alpha - 2\gamma$$

y, como anteriormente, obtendremos la relación

$$\frac{\pi}{2} - \frac{(k+1)\alpha - 2\gamma}{2} = \gamma + \pi - \beta,$$

de donde

$$k+1 = \frac{2\beta - \pi}{\alpha}. \tag{2}$$

Si razonamos a la inversa, nos convenceremos fácilmente de que el cumplimiento de una de las relaciones (1) y (2), para un valor entero de k, conduce a que la recta l pase por el punto C_k. Por consiguiente, el rayo pasará de nuevo por el punto A cuando, y sólo cuando, (1) o (2) sea un número entero par.

4. Lugar geométrico de los puntos

409. El lugar geométrico buscado está compuesto por dos arcos de circunferencias: el arco BE con su centro en el punto medio C del arco AB de la circunferencia dada y el arco BF con centro en el punto medio del segundo arco AB de la circunferencia dada, con la particularidad de que EAF es tangente en el punto A a la circunferencia dada (fig. 123).

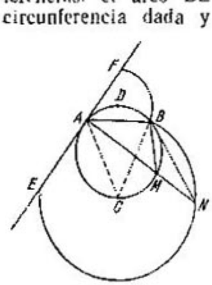

FIG. 123

Demostración. Sea N un punto del lugar geométrico buscado, obtenido con ayuda del punto M tomado en el arco inferior AB. Según la construcción el triángulo NMB es isósceles y, por lo tanto,

$$\angle BNA = \frac{1}{2} \angle BMA = \frac{1}{2} \angle BCA.$$

Por consiguiente, el punto N se encuentra en la circunferencia de centro C que pasa por los puntos A y B. Luego, el punto N deberá encontrarse dentro del ángulo BAE, es decir, se encuentra en el arco BE de la circunferencia de centro C. Al contrario, si N se encuentra en este arco, entonces

$$\angle BNA = \frac{1}{2} \angle BCA = \frac{1}{2} \angle BMA.$$

de donde se desprende que $\angle BNA = \angle NBM$ y que el $\triangle NMB$ es isósceles. Así pues, el punto N se obtiene de la construcción indicada. De análoga forma se efectúa la demostración en el caso cuando el punto M se encuentre en el arco superior AB.

410. El lugar geométrico buscado se compone de dos rectas l y k dispuestas simétricamente con respecto de la perpendicular común BB' a las rectas paralelas dadas trazada a través del punto O. La recta l pasa por el punto C perpendicularmente a OC, además, $B'C = OB$ (fig. 124).

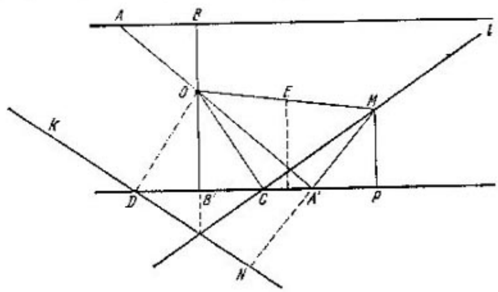

FIG 124

Demostración. Sean M y N los puntos obtenidos durante la construcción con ayuda de la secante AA'. La demostración se lleva a cabo solamente para el punto M (para el punto N se realiza análogamente). Sea $MP \perp B'C$, entonces, $\angle OAB = \angle A'MP$ (como ángulos con lados perpendiculares). Por esta razón, los triángulos rectángulos OAB y $A'MP$ con iguales hipotenusas OA y $A'M$, son iguales. Por consiguiente, $A'P = OB = B'C$. De aquí se desprende que si E es el punto medio de OM, entonces, los puntos M, A', C y O se encuentran en una circunferencia con centro en el punto E y, por consiguiente, $MC \perp OC$, es decir, el punto M se encuentra en la recta l. Al contrario, si M es un punto de la recta l y el ángulo $MA'O$ es recto, entonces $A'P = B'C = OB$, de donde se deriva la igualdad de los triángulos OAB y $A'MP$ y, por fin, la igualdad $OA = A'M$. Por consiguiente, el punto M se obtiene de la construcción examinada.

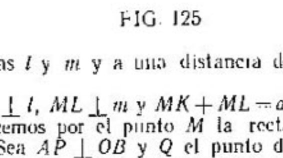

FIG. 125

411. En el caso de rectas que *se cruzan*, el lugar geométrico buscado se compone de cuatro segmentos que forman el rectángulo $ABCD$, cuyos vértices se encuentran en las rectas dadas l y m y a una distancia de éstas igual a la distancia dada a (fig. 125).

Demostración. Sea el punto M tal, que $MK \perp l$, $ML \perp m$ y $MK + ML = a$, donde a es la longitud del segmento dado. Tracemos por el punto M la recta AB de tal manera que $OA = OB$, y $MN \| OB$. Sea $AP \perp OB$ y Q el punto de intersección de AP con MN. De la igualdad $AN = MN$ se desprende que $MK = AQ$ y, por consiguiente,

$$AP = AQ + QP = MK + ML = a$$

Por consiguiente, el punto A es un vértice del rectángulo mencionado. Lo mismo es justo para el punto B, así que el punto M se encuentra en uno de los lados de este rectángulo. Al contrario, si M se encuentra en uno de los lados de este rectángulo, entonces, razonando a la inversa, obtendremos que $MK + ML = AP = a$.

Si las rectas dadas l y m son *paralelas* y la distancia entre ellas es igual a h, el lugar geométrico buscado existe solamente cuando $a \geqslant h$, y representa un par de rectas paralelas a las dadas para $a > h$, y toda la zona entre l y m cuando $a = h$.

412. En el caso de rectas que *se cruzan*, el lugar geométrico buscado se compone de ocho semirrectas que son las prolongaciones de los lados del rectángulo $ABCD$ indicado en la resolución del problema 411 (fig. 126). La demostración es análoga a la demostración dada en el problema anterior.

Si las rectas dadas l y m son *paralelas* y la distancia entre ellas es igual a h, el lugar geométrico buscado existe solamente cuando $a \leqslant h$, y representa un par de rectas paralelas a las dadas en el caso en que $a < h$, o la parte de un plano que se encuentra fuera de la zona entre l y m, cuando $a = h$.

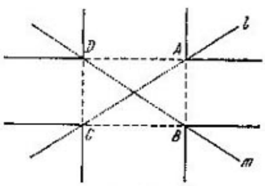

FIG. 126

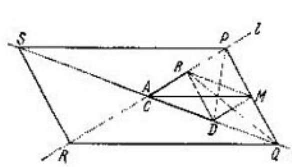

FIG. 127

413. Si el segmento AB se encuentra en la recta l y el segmento CD en la recta m, entonces, el lugar geométrico buscado se compone de cuatro segmentos que forman el paralelogramo $PQRS$, en el cual l y m son diagonales y la posición de los vértices P y Q se determina de la relación

$$h_P CD = a^2, \quad h_Q AB = a^2, \tag{1}$$

donde h_P y h_Q son las distancias desde los puntos P y Q hasta las rectas m y l (fig 127).

Demostración. Observemos que para las rectas l y m fijadas, el lugar geométrico buscado queda determinado por las longitudes de los segmentos AB y CD y la constante a, pero no depende de la disposición de estos segmentos en las rectas l y m. En efecto, al cambiar esta disposición, las áreas de los triángulos AMB y CMD no varían. Por esta razón, es suficiente examinar el caso particular cuando los segmentos AB y CD tienen un extremo común en el punto de intersección de las rectas l y m. En este caso los segmentos AB y CD serán los lados de un triángulo; el tercer lado del cual se encuentra en uno de los cuatro ángulos formados al cruzarse las rectas l y m. Por ejemplo, en la fig. 127 coinciden los extremos A y C y el tercer lado es BD.

Sea M un punto del lugar geométrico buscado, que se encuentra dentro del ángulo BAD. Entonces, el área del triángulo BMD será igual a

$$S_{BMD} = | S_{AMB} + S_{CMD} - S_{ABD} | = | a^2 - S_{ABD} | .$$

De aquí se desprende que la distancia del punto M a la recta BD no depende de su posición en la recta $PQ \parallel BD$. Para los puntos P y Q se cumplen las relaciones (1)

Al contrario, supongamos que sea M un punto cualquiera en la recta PQ, donde los puntos P y Q han sido construidos de acuerdo con (1). De las relaciones

$$\frac{AP}{AB} = \frac{S_{APD}}{S_{ABD}} = \frac{a^2}{S_{ABD}}, \quad \frac{CQ}{CD} = \frac{S_{CQB}}{S_{CDB}} = \frac{a^2}{S_{ABD}}$$

se deduce

$$\frac{AP}{AB} = \frac{CQ}{CD},$$

es decir, $PQ \parallel BD$. Por eso,

$$S_{AMB}+S_{CMD}=S_{ABD}+S_{BMD}=S_{ABD}+S_{BPD}=S_{APD}=a^2$$

Por consiguiente, el punto M pertenece al lugar geométrico buscado. Los demás lados del paralelogramo $PQRS$ se obtienen de forma análoga al hacer coincidir otros extremos de los segmentos, a saber: QR si $B \equiv C$, RS cuando $B \equiv D$ y SP en el caso en que $A \equiv D$.

414. El lugar geométrico buscado es una circunferencia simétrica a la circunferencia dada K con respecto de la cuerda dada AB (fig. 128).

Demostración. Tracemos en la circunferencia K la cuerda $AD \perp AB$. Supongamos que el $\triangle ABC$ está inscrito en K y que sea M el punto de intersección de las alturas de este triángulo. Es fácil ver que $AMCD$ es un paralelogramo: $DA \parallel CM$ como perpendiculares a AB, y $DC \parallel AM$ como perpendiculares a BC ($DC \perp BC$, puesto que BD es el diámetro de K). Por esta razón, el punto M se encuentra en la circunferencia K' obtenida desplazando la circunferencia K a la distancia AD en sentido de la cuerda DA. Es evidente que esta circunferencia K' es simétrica a la K respecto a AB. Al contrario, sea M un punto en K' y $MC \perp AB$. Puesto que $MC = AD$, entonces $AMCD$ es un paralelogramo y, por lo tanto, $AM \parallel DC$. Pero, $DC \perp BC$, puesto que $ABCD$ está inscrito en K y el ángulo BAD es recto. Por eso $AM \perp BC$ y M es el punto de intersección de las alturas del $\triangle ABC$. Por consiguiente, M pertenece al lugar geométrico buscado.

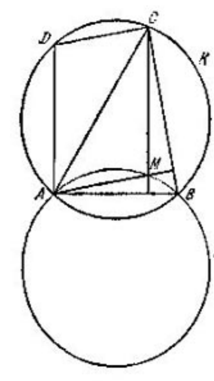

FIG. 128

415. Sea O el centro de la circunferencia dada y R su radio (fig. 129). El lugar geométrico buscado es la recta l perpendicular a la recta OA y que corta a esta recta en el punto B de manera que

$$OB=\frac{R^2}{OA}. \tag{1}$$

Demostración. Tracemos por el punto M una recta $l \perp OA$ que cortará a la recta OA en el punto B. Supongamos que sea C el punto de intersección del segmento OM con la cuerda KL. De la semejanza de los triángulos OAC y OMB se deduce:

$$\frac{OB}{OC}=\frac{OM}{OA},$$

de donde

$$OB=\frac{OM \cdot OC}{OA} \tag{2}$$

Según la construcción, KC es una de las alturas del triángulo rectángulo OKM, por consiguiente,

$$OM \cdot OC = R^2.$$

Sustituyendo esta expresión en (2) obtendremos la igualdad (1).

Al contrario, sea M un punto cualquiera de la recta l perpendicular a OA y tal, que OB se determina por la igualdad (1). Tracemos la tangente MK y $KC \perp OM$. Supongamos que KC corta a la recta OA en el punto A'. Entonces, repitiendo la primera parte de la demostración hallaremos que OB se determina por la fórmula (1) sustituyendo OA por OA'. De aquí obtendremos que $OA' = OA$, es decir, el punto A' coincidirá con el punto A, lo cual significa que el punto M pertenece al lugar geométrico buscado.

416. Sea

$$\frac{AM}{BM}=\frac{p}{q}>1.$$

Tracemos las bisectrices MP y MQ de los dos ángulos adyacentes con el vértice M y los lados MA y MB (fig. 130). Entonces, por la propiedad de las bisectrices tendremos:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{p}{q} \text{ y } \frac{AQ}{BQ}=\frac{p}{q}. \tag{1}$$

De aquí se desprende que la disposición de los puntos P y Q no depende de la del punto M. Puesto que, además, $\angle PMQ=\frac{\pi}{2}$, entonces, el punto M se en-

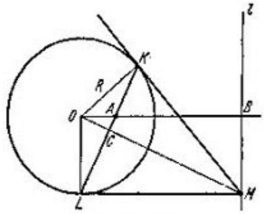

FIG. 129

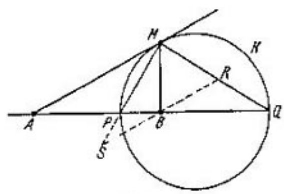

FIG. 130

cuentra en la circunferencia K de diámetro PQ. Al contrario, supongamos que los puntos P y Q se han construido de acuerdo con (1) y que K es la circunferencia de diámetro PQ. Si el punto M se encuentra en esta circunferencia, entonces $\angle PMQ=\frac{\pi}{2}$. Tracemos a través del punto B $RS \parallel AM$, entonces

$$\frac{AM}{BR}=\frac{AQ}{BQ}=\frac{p}{q}, \qquad \frac{AM}{BS}=\frac{AP}{BP}=\frac{p}{q}, \tag{2}$$

de donde $BR=BS$ y BM es una mediana en el triángulo RMS. Puesto que el $\triangle RMS$ es rectángulo, $BM=BR$ y, en virtud de (2),

$$\frac{AM}{BM}=\frac{p}{q}.$$

Por esta razón el punto M pertenece al lugar geométrico que se examina.

Para expresar el diámetro PQ por medio de la longitud a del segmento AB, de las relaciones

$$PB=AB-AP=a-\frac{p}{q}PB,$$

$$BQ=AQ-AB=\frac{p}{q}BQ-a,$$

hallamos:

$$PB=a\frac{q}{p+q}, \qquad BQ=a\frac{q}{p-q},$$

de donde

$$PQ=\frac{2a}{\frac{p}{q}-\frac{q}{p}}.$$

Si $p=q$, entonces, el lugar geométrico buscado será, evidentemente, la perpendicular a la recta AB trazada desde el punto medio del segmento AB.

417. El lugar geométrico buscado es la perpendicular al segmento AB trazada por su punto medio E.

Demostración. El triángulo ADB es isósceles, ya que $\angle CAD = \angle CBD$, como ángulos que abarcan iguales arcos CD en iguales circunferencias (fig. 131). Por esta razón, el punto D se encuentra en la perpendicular al segmento AB trazada por su punto medio E. Al contrario, si tomamos cualquier punto D en esta perpendicular, que no coincida con el punto E, entonces las circunferencias que pasan por ACD y BCD son iguales. Esto se desprende, por ejemplo, de las igualdades

$$R_1 = \frac{CD}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{CD}{2\,\mathrm{sen}\,\beta} = R_2,$$

donde $\alpha = \angle BAD$ y $\beta = \angle CBD$.

418. El lugar geométrico buscado es una recta trazada por dos posiciones cualesquiera del último vértice.

Demostración. Sea, por ejemplo, $A_1B_1C_1D_1E_1$ una de las posiciones del polígono deformable y $A_2B_2C_2D_2E_2$ otra de ellas. Los vértices A, B, C y D de este polígono se deslizan respectivamente por las rectas l_A, l_B, l_C y l_D (fig. 132). Tracemos la recta l por las posiciones E_1 y E_2 del último vértice.

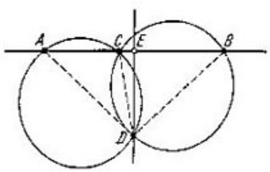

FIG. 131

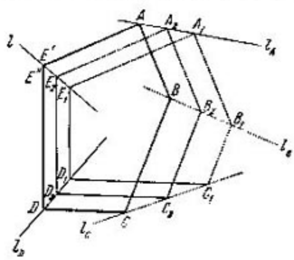

FIG 132

Supongamos que el vértice en la recta l_A ocupó la posición A, y en la recta l_D, la posición D. El lado paralelo a A_2E_2 cortará a l en el punto E', y el lado paralelo a D_2E_2, en el punto E''. Según la construcción

$$\frac{E'E_2}{E_2E_1} = \frac{AA_2}{A_2A_1} = \frac{BB_2}{B_2B_1} = \frac{CC_2}{C_2C_1} = \frac{DD_2}{D_2D_1} = \frac{E''E_2}{E_2E_1},$$

de donde

$$E'E_2 = E''E_2,$$

es decir, los puntos E' y E'' coinciden. Esto significa que el último vértice se hallará sobre la recta l en el punto $E \equiv E' \equiv E''$.

Lo inverso es evidente, puesto que la posición del polígono deformable puede ser construida comenzando desde cualquier punto E en la recta l.

419. El lugar geométrico buscado es una circunferencia que pasa por los extremos de la cuerda AB y uno de los puntos M_1 obtenidos de la construcción indicada en las condiciones del problema.

Demostración. Introduzcamos previamente algunas denotaciones. Existirá una, y sólo una, posición C_1D_1 de la cuerda CD en la que $C_1D_1 \parallel AB$ y cuando en la circunferencia dada K se puede elegir tal dirección de giro ν, al moverse en la cual los extremos de las cuerdas se encontrarán en la sucesión A, B, C_1 y D_1 (esta elección puede ser indeterminada solamente en el caso de la igualdad $AB = CD$, cuando las rectas AC y BD son paralelas). Designemos por α la cuerda AB de la circunferencia dada K, sobre la que se hallan los puntos C_1 y D_1. por β, otra cuerda AB y por γ, aquella de las cuerdas C_1D_1 sobre la que no se hallan los puntos A y B. A continuación, anotemos con M_1 el punto de intersección de las rectas AC_1 y BD_1. El punto M_1 se encuentra dentro de K. Sea K_1 la circunferencia circunscrita al $\triangle ABM_1$ (fig. 133). Demostremos que, cualquiera que sea la posición de la cuerda CD, el punto de intersección de las rectas AC y BD se encontrará sobre K_1.

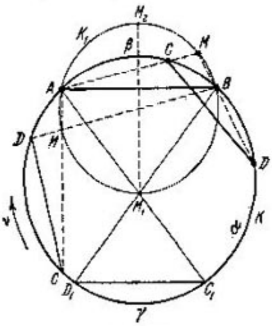

FIG 133

Mientras ambos puntos C y D se encuentren sobre el arco α, el punto M se encontrará dentro de K y, entonces,

$$\angle AMB=\frac{1}{2}(\beta+\gamma). \qquad (1)$$

Si por lo menos uno de los puntos C y D resulta en el arco β, entonces el punto M será exterior a K y

$$\angle AMB=\frac{1}{2}(\alpha-\gamma). \qquad (2)$$

En el primer caso M se encuentra sobre el arco AM_1B de la circunferencia K_1, puesto que de acuerdo con (1) el $\angle AMB$ no depende de la posición de CD y, por consiguiente, es igual al $\angle AM_1B$. En el segundo caso, debido a que la suma de los miembros derechos de (1) y (2) es igual a

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi,$$

el punto M se encuentra en el arco AB de la circunferencia K_1, exterior a K.

Es evidente que es justo también lo inverso, es decir, que cualquier punto M de la circunferencia K_1 puede ser obtenido eligiendo adecuadamente la posición de la cuerda CD.

420. Designemos la circunferencia dada por O y la recta dada por L (fig. 134). Sea M el segundo punto de intersección de la recta PQ con O. Tomemos una circunferencia cualquiera O_1 que pasa por los puntos P y Q y que corta por segunda vez a la circunferencia O en el punto R y a la recta L en el punto S. Sea N el segundo punto de intersección de la recta RS con la circunferencia O.

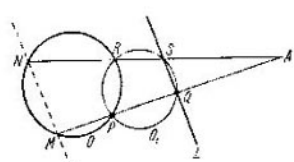

FIG. 134

Demostremos que $MN \parallel L$. Con este fin, apliquemos el siguiente conocido teorema de la planimetría: si se conocen una circunferencia y un punto A, entonces, para cualquier recta que pasa por A y que corta a esta circunferencia en los puntos A_1 y A_2, el producto de los segmentos $AA_1\cdot AA_2$ es una magnitud constante que no depende de la elección de la recta.

Designemos por A el punto de intersección de las rectas PQ y RS. Al principio apliquemos el teorema mencionado a la circunferencia O, al punto A y a las rectas AP y AR. Puesto que AP corta por segunda vez a O en el punto M, y a AR en el punto N, entonces

$$AM\cdot AP=AN\cdot AR \qquad (1)$$

Apliquemos, ahora, el mismo teorema a la circunferencia O_1, al punto A y a las mismas rectas. Puesto que AP corta por segunda vez a la circunferencia O_1 en el punto Q, y a AR en el punto S, entonces

$$AQ \cdot AP = AS \cdot AR. \tag{2}$$

De (1) y (2) se desprende la igualdad

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AQ}{AS} \tag{3}$$

De la igualdad (3), en virtud del teorema inverso al teorema sobre la proporcionalidad de los segmentos cortados por rectas paralelas en los lados de un ángulo, se deriva que $MN \| QS$, lo que era necesario demostrar.

De este modo, para cualquier circunferencia tipo O_1, el punto N puede determinarse como el segundo punto de intersección de la recta que pasa por M y que es paralela a L, con la circunferencia O. Esta construcción determina un mismo valor del punto N independientemente de la elección de la circunferencia O_1. Por consiguiente, todas las rectas posibles RS obtenidas para diferentes circunferencias O_1 cortan a la circunferencia O en el punto N.

Los casos excepcionales cuando de (1) y (2) no se deriva (3), por ejemplo, cuando coinciden los puntos R y P o los Q y S, o cuando $PQ \| RS$, pueden ser examinados como límites para el caso general y se pueden emplear los razonamientos de continuidad.

5. Determinación de los valores máximos y mínimos

421. Si A es el vértice del ángulo recto del $\triangle ABC$ y C y B se encuentran sobre las rectas paralelas dadas l_1 y l_2 (fig. 135), entonces

$$AB = \frac{a}{\operatorname{sen} \varphi}, \quad BC = \frac{b}{\cos \varphi}$$

Por consiguiente, el área del triángulo ABC será igual a

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{ab}{\operatorname{sen} 2\varphi}$$

De aquí se desprende que S_{ABC} tendrá su valor mínimo igual a ab, cuando $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

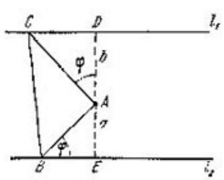

FIG. 135

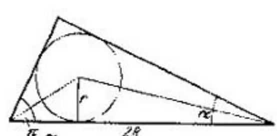

FIG. 136

422. Si R es el radio de la circunferencia circunscrita y r el de la inscrita (fig. 136), entonces

$$2R = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + r \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Cbservando que

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1},$$

obtenemos:

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}.$$

La magnitud $\frac{R}{r}$ tiene valor mínimo cuando $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=1$, es decir, $\left(\text{en virtud de la limitación } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ cuando $\alpha=\frac{\pi}{4}$; en este caso

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$$

423. Supongamos que del rectángulo $ABCD$ cortamos un triángulo con el vértice C, de tal manera que se obtenga el pentágono $ABEFD$ (fig. 137). Está claro, que el rectángulo buscado $AB_1C_1D_1$ deberá tener el vértice C_1 sobre el segmento EF. El problema consiste en hallar la posición de este vértice.

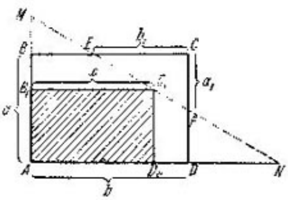

FIG. 137

Para hallar el punto C_1, prolongamos los lados AB y AD del rectángulo hasta su intersección con la prolongación del segmento EF, formando el triángulo AMN. Sea

$$AM=m,\quad AN=n$$

y

$$B_1C_1=AD_1=x.$$

De la semejanza de los triángulos AMN y D_1C_1N tenemos.

$$\frac{C_1D_1}{m}=\frac{n-x}{n},$$

de donde

$$C_1D_1=\frac{m}{n}(n-x)$$

Por consiguiente, para el área S del rectángulo $AB_1C_1D_1$, igual a $AD_1\cdot C_1D_1$, obtenemos la expresión

$$S=\frac{m}{n}(n-x)\,x.$$

Transformando esta expresión a la forma

$$S=\frac{m}{n}\left[\frac{n^2}{4}-\left(\frac{n}{2}-x\right)^2\right], \tag{1}$$

deducimos que S tendrá su valor máximo cuando $\frac{n}{2}-x=0$, es decir, cuando $x=\frac{n}{2}$. Designemos por C_0 la posición del vértice C_1, correspondiente a $x=\frac{n}{2}$.

Observando que la expresión (1) para S decrece al aumentar $\left|\frac{n}{2}-x\right|$, es decir, al moverse el punto C_1 desde el punto C_0 hacia el vertice M o hacia el vértice F, hallamos que son posibles los tres casos siguientes:

1) El punto C_0 se encuentra sobre el segmento EF; en este caso, el vértice C_1 del rectángulo buscado coincide con C_0.

2) El punto C_0 se encuentra sobre el segmento ME; entonces, C_1 debe tomarse coincidente con E.

3) El punto C_0 se encuentra sobre el segmento FN; en este caso, el punto C_1 debe tomarse coincidente con F.

Queda hallar el criterio para distinguir estos casos con ayuda de las magnitudes a, a_1, b y b_1 dadas en las condiciones del problema.

Primeramente hallemos la magnitud n. De la semejanza de los triángulos ECF y NDF tenemos:

$$\frac{n-b}{a-a_1}=\frac{b_1}{a_1},$$

de donde

$$n=b+\frac{b_1}{a_1}(a-a_1). \tag{2}$$

Observemos, ahora, que el punto C_0 resultará dentro del segmento EF si se cumplen las desigualdades

$$b-b_1<x<b.$$

Sustituyendo aquí $x=\frac{n}{2}$, con el valor conocido de n, obtendremos:

$$b-b_1<\frac{b}{2}+\frac{b_1}{2a_1}(a-a_1)<b.$$

Estas desigualdades se pueden transformar fácilmente a la forma

$$-1<\frac{a}{a_1}-\frac{b}{b_1}<1 \tag{3}$$

Si no se observa la desigualdad izquierda, el punto C_0 resultará en el segmento ME, y si no se cumple la desigualdad derecha sobre el segmento FN.

Definitivamente se obtiene el siguiente resultado: si para los datos a, b, a_1 y b_1 se cumplen las dos desigualdades (3), entonces el vértice C_1 del rectángulo de área máxima se encuentra dentro de los límites del segmento EF y el lado x de este rectángulo se calcula por la fórmula

$$x=\frac{b}{2}+\frac{b}{2a_1}(a-a_1),$$

si no se cumple la desigualdad izquierda de (3), el vértice C_1 coincide con el punto E, y si no se cumple la derecha, con el punto F.

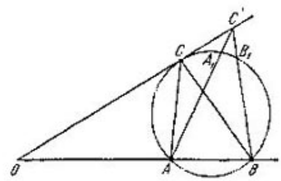

FIG. 138

424. Describamos una circunferencia que pase por los puntos A y B y que haga contacto con el segundo lado del ángulo (fig. 138). El punto de tangencia será el punto buscado, puesto que para cualquier punto C' perteneciente a esta recta el ángulo $AC'B$ se mide por la semidiferencia de los arcos AB y A_1B_1, mientras que el $\angle ACB$ se mide por la mitad del arco AB.

Observemos, a continuación, que $(OC)^2 = OB\cdot OA$. Por consiguiente, el problema se reduce a la construcción conocida de la media aritmética de las longitudes de los segmentos dados OA y OB.

425. Analicemos tres casos posibles de disposición del segmento AB respecto a l.

a) $AB \parallel l$. Para cualquier punto M de la recta l tenemos que $|AM - BM| \geq 0$, además, existe un punto M_0 para el cual $|AM_0 - BM_0| = 0$.

Este punto es el pie de la perpendicular bajada desde el punto medio del segmento AB a la recta l. El punto M para el cual la magnitud $|AM - BM|$ tendría su valor máximo, no existe. Esto se desprende de que $|AM - BM| \leq AB$ y la igualdad es posible solamente en el caso cuando A, B y M se encuentran sobre una misma recta.

b) $AB \perp l$. Puesto que $|AM - BM| \leq AB$, entonces, para el punto de intersección de la recta l con la recta AB, la magnitud $|AM - BM|$ tiene su valor máximo igual a la longitud de AB. El punto M para el cual la magnitud $|AM - BM|$ sería mínima, no existe.

c) La recta AB no es paralela y no es perpendicular a l. Es evidente que $|AM - BM|$ adquirirá su valor mínimo si M es el punto de intersección de la recta l con la perpendicular al punto medio del segmento AB. La magnitud $|AM - BM|$ tendrá su valor máximo cuando el punto M sea el punto de intersección de AB con l.

426. Sea MN una posición cualquiera de la secante, $AP \parallel ON$ y $AQ \parallel OM$ (fig. 139).

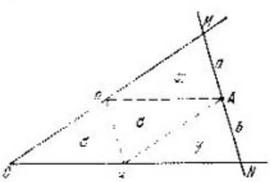

FIG. 139

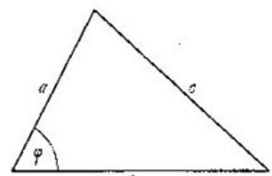

FIG. 140

Introduzcamos las siguientes denotaciones

$x =$ área $\triangle\ APM$,
$y =$ área $\triangle\ AQN$,
$\sigma =$ área $\triangle\ APQ$,
$S =$ área $\triangle\ OMN$,
$a = AM$,
$b = AN$.

Tenemos:

$$S = 2\sigma + x + y$$

Es evidente que

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{a}{b} \qquad \frac{y}{\sigma} = \frac{b}{a}$$

Por consiguiente,

$$S = \sigma\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 4\sigma + \sigma\frac{(a-b)^2}{ab}.$$

El valor mínimo $S = 4\sigma$ se obtiene para $a = b$, lo que era necesario demostrar.

427. Sea $a+b=q$ (fig. 140). De acuerdo con el teorema de los cosenos

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi=a^2+(q-a)^2-2a(q-a)\cos\varphi=$$
$$=q^2+2a^2(1+\cos\varphi)-2aq(1+\cos\varphi)=q^2\frac{1-\cos\varphi}{2}+2(1+\cos\varphi)\left(a-\frac{q}{2}\right)^2$$

Puesto que q y φ son invariables, el valor mínimo de c será cuando $a=\frac{q}{2}=$ $=\frac{a+b}{2}$, es decir, cuando sea $a=b$.

428. **Primera resolución.** Examinemos el $\triangle ABC$ con base AC y designemos por a, b y c las longitudes de los lados opuestos respectivamente a los ángulos A, B y C; hagamos $a+b+c=p$.

De las relaciones

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{\operatorname{sen}(A+B)}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

hallamos:

$$p=b+b\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}+b\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} B}=b\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}\operatorname{sen}\left(A+\frac{B}{2}\right).$$

Puesto que $b>0$ y $\operatorname{sen}\frac{B}{2}>0$, entonces, p tendrá su valor máximo cuando sea

$$A+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

En este caso $A=C$ y el $\triangle ABC$ es isósceles.

Segunda resolución. Tracemos con la base dada AB como cuerda un segmento que abarque el ángulo dado φ (fig. 141) y examinemos los dos triángulos inscritos en este segmento: el triángulo isósceles ADB y el no isósceles ACB.

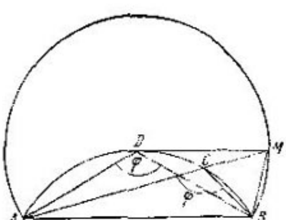

FIG. 141

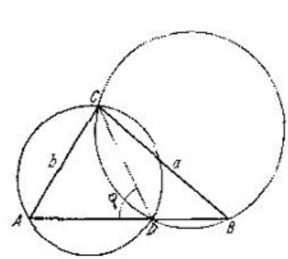

FIG. 142

Desde el punto D describamos una circunferencia de radio $AD=DB$, prolonguemos AC hasta su intersección con la circunferencia en el punto M y unamos el punto M con los puntos D y B. Obtendremos:

$$AD+DB=AD+DM>AM=AC+CM$$

Pero en el triángulo BCM

$$\angle CBM=\angle ACB-\angle CMB=\angle CMB,$$

puesto que $\angle ACB=\angle ADB$ y se mide por el arco AB, mientras que el $\angle AMB$ se mide por la mitad del arco AB. Por consiguiente, $CM=CB$ y $AD+DB>AC+CB$.

429. Designemos por R_1 y R_2 los radios de las circunferencias circunscritas respectivamente a los triángulos ACD y BCD, y hagamos $\angle ADC=\varphi$, $AC=b$ y $BC=a$ (fig. 142). Tenemos:

$$2R_1=\frac{b}{\operatorname{sen}\varphi},\qquad 2R_2=\frac{a}{\operatorname{sen}(\pi-\varphi)}=\frac{a}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

De aquí $\frac{R_1}{R_2}=\frac{b}{a}$. Los radios R_1 y R_2 serán los mínimos cuando sea $\varphi=\frac{\pi}{2}$; en este caso D será el pie de la altura CD.

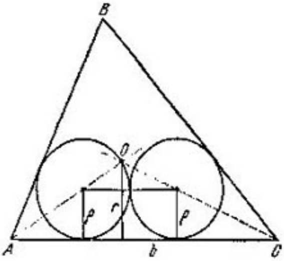

FIG. 143

430. Cada una de las circunferencias cortadas deberá hacer contacto con dos de los lados del $\triangle ABC$ (véase la fig. 143), además, las circunferencias deberán tener contacto una con la otra. En el caso contrario el radio puede ser aumentado. Por esta razón, los centros de las circunferencias se encuentran en dos bisectrices de los ángulos internos, por ejemplo, en las AO y CO, donde O es el centro de la circunferencia inscrita al $\triangle ABC$. Si r es el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$ y ρ es el radio de las circunferencias cortadas, entonces, del $\triangle AOC$ tenemos que

$$\frac{r-\rho}{2\rho}=\frac{r}{b},$$

de donde hallamos que

$$\frac{\rho}{r}=\frac{b}{b+2r}=1-\frac{2r}{b+2r}.$$

De esta fórmula se desprende que ρ sera maximo cuando como b se toma el lado mayor.

B. ESTEREOMETRIA

1. Problemas de cálculo

431. Sea a el lado de la base, d la diagonal de la cara lateral del prisma y l la arista lateral (fig. 144). Tenemos

$$v=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,l.$$

Del $\triangle A_1BC_1$ se desprende que $\frac{1}{2}a=d\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. Por eso

$$l=\sqrt{d^2-a^2}=\frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1-4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}$$

y, por consiguiente,

$$v=\frac{a^3\sqrt{3}}{8\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1-4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}},$$

de donde

$$a=\sqrt[3]{\frac{8v\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-12\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}}}\,.$$

432. Sea H la altura de la pirámide y a la longitud del lado de la base. Examinando los triangulos semejantes OMS y ABS (fig 145) hallaremos

$$\frac{h}{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-h^2}}{H}\,. \qquad (1)$$

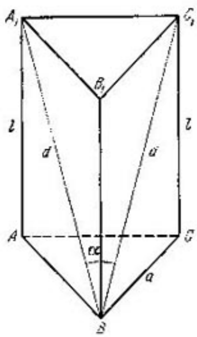

FIG. 144

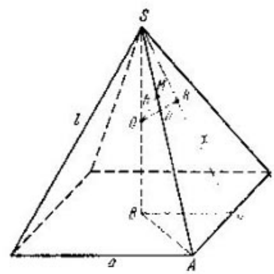

FIG. 145

Análogamente, de los triángulos OKS y CBS obtendremos.

$$\frac{b}{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-b^2}}{H}\,. \qquad (2)$$

Dividiendo miembro a miembro la igualdad (1) por la (2) tendremos:

$$\sqrt{\frac{H^2-4h^2}{H^2-4b^2}}=\frac{h}{b\sqrt{2}}\,,$$

de donde

$$H=\frac{2bh}{\sqrt{2b^2-h^2}}\,.$$

Colocando esta expresión en (1), hallaremos fácilmente que

$$a^2=\frac{8b^2h^2}{h^2-b^2}.$$

En resumen, para el volumen V obtenemos la siguiente expresión:

$$V=\frac{16}{3}\,\frac{b^3h^3}{(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}$$

433. Sea H la altura de la pirámide, x la altura de la cara lateral, trazada desde el vértice de la pirámide, R el radio de la circunferencia inscrita en la base, r el radio de la circunferencia circunscrita a la base y a el lado de la base. De la semejanza de los triángulos CA_1B_1 y CAB (fig. 146) obtenemos:

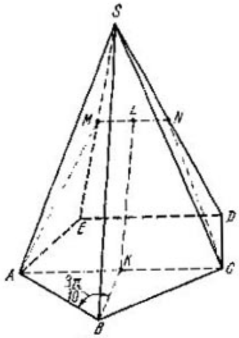

FIG 146

$$\frac{H-h}{H}=\frac{R}{r},$$

de donde

$$H=\frac{hr}{r-R}.$$

Pero, del $\triangle\ ADB$ tenemos que

$$r=\frac{R}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

y, por lo tanto,

$$H=\frac{h}{1-\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Puesto que para el área de la base y el volumen tenemos las siguientes fórmulas

$$S_{\text{base}}=n\,\frac{1}{2}\,r^2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\quad\text{y}\quad V=\frac{1}{3}\,S_{\text{base}}H,$$

entonces,

$$r^2=\frac{6V}{Hn\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}.$$

Colocando aquí el valor hallado de H, hallamos

$$r=\sqrt{\frac{6V\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nh\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}}.$$

Puesto que $x=\sqrt{R^2+H^2}$ y $\frac{a}{2}=r\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$, la superficie lateral es igual a

$$n\,\frac{1}{2}\,xa=nr\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2+H^2},$$

o, definitivamente

$$S_{\text{lat}}=n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{6V\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nh\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}\left[\frac{3V\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nh\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}+\frac{h^2}{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}\right]}.$$

434. Sean M y N los puntos medios de las aristas ES y DS (fig. 147); es fácil ver que $AMNC$ es un trapecio, ya que $MN \parallel ED$ y $ED \parallel AC$. Es evidente también que

$$MN=\frac{1}{2}q.$$

Haciendo uso de la fórmula (1) para el cuadrado de la mediana de un triángulo en la resolución del problema 370, hallaremos:

$$CN=\frac{\sqrt{b^2+2q^2}}{2}.$$

Luego,

$$KC=\frac{AC}{2}=q\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{10},$$

puesto que $\angle ABK=\frac{3\pi}{10}$. Si KL es el segmento que une los puntos medios de la base del trapecio $ACNM$, entonces

$$KL=\sqrt{\frac{b^2+2q^2}{4}-\left(q\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{10}-\frac{q}{4}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{b^2+2q^2}{4}-q^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{4b^2+3q^2}}{4}$$

$\left(\text{aquí aprovechamos que sen}\,\frac{3\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$. Así pues, el área buscada será igual a

$$S_{\text{sec}}=\frac{1}{2}(MN+AC)\,KL=\frac{q}{16}(2+\sqrt{5})\sqrt{4b^2+3q^2}$$

435. Sean E y F los puntos medios de las aristas de la pirámide regular triangular $SABC$ y D el punto medio del segmento EF (fig. 148). Dado que

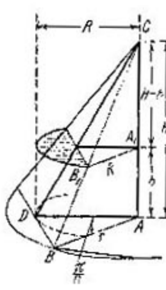

FIG. 147

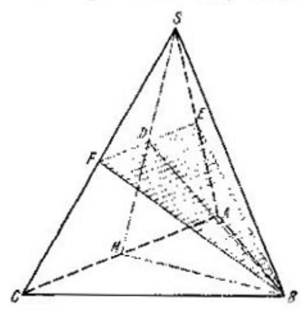

FIG. 148

la sección es perpendicular a la cara CSA, entonces, el $\angle SDB$ es recto. Prolongando SD hasta su intersección con la recta AC en el punto M, examinemos el triángulo MBS. El punto D, obviamente, divide al segmento SM por la mitad. Puesto que, además, $BD \perp MS$, entonces, el triángulo MBS es isósceles; $SB=MB$. Supongamos que el lado de base de la pirámide es igual a a. Entonces,

$$SB=MB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

La altura de la cara lateral es

$$SM=\sqrt{SC^2-CM^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Por eso

$$S_{\text{lat}}=\frac{3a^2\sqrt{2}}{4},$$

y, puesto que el área de la base es igual a

$$S_{\text{base}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

entonces

$$\frac{S_{\text{lat}}}{S_{\text{base}}}=\sqrt{6}.$$

436. Sea a la longitud del lado del cuadrado que se encuentra en la base del prisma, l la longitud de la arista lateral del prisma y d la diagonal de la cara lateral (fig. 149). Designemos por S_{sec} el área de la sección; se ve fácilmente que la superficie total del prisma será igual a $4(S-S_{\text{sec}})$; por eso, es suficiente determinar S_{sec}. Tenemos

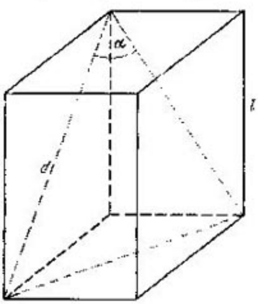

FIG. 149

$$S_{\text{sec}}=\frac{1}{2}d^2\operatorname{sen}\alpha;\quad a=d\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

$$l=\sqrt{d^2-a^2}=a\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}=d\sqrt{\cos\alpha}.$$

Luego,

$$S=S_{\text{sec}}+\frac{a^2}{2}+2\frac{la}{2}=$$

$$=d^2\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}\right).$$

De aquí

$$d^2=\frac{2S}{\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$$

y, por consiguiente,

$$S_{\text{sec}}=\frac{S\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}.$$

En conclusión, después de las correspondientes simplificaciones, hallamos que la superficie total del prisma es igual a

$$S_{\text{tot pris}}=4(S-S_{\text{sec}})=4S\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}.$$

437. El lado de la base de la pirámide es igual a $a = 2r \operatorname{sen} \alpha$ (por el lema conocido al teorema de los senos). La arista lateral (fig. 150) es

$$l = \frac{a}{2} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} = 2r \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Por esta razón, la altura de la pirámide será

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2r \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{3}},$$

y, por consiguiente, el volumen de la pirámide será igual a

$$V = \frac{1}{3} h \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3} r^3 \operatorname{sen}^2 \alpha \sqrt{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

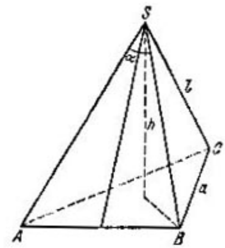

FIG. 150

438. Sea $ABC'D'$ la sección indicada de la pirámide $OABCD$. Tracemos el plano auxiliar OPN a través del vértice O de la pirámide y los puntos medios de sus aristas AB y CD (fig. 151).

Es fácil ver que el plano OPN es perpendicular a AB y CD, y que los segmentos OP y ON son iguales.

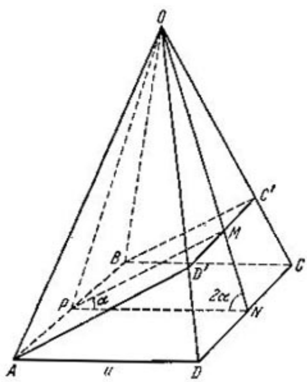

FIG. 151

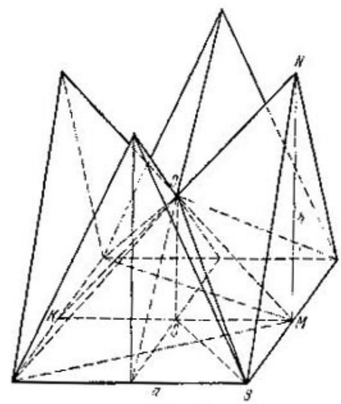

FIG. 152

Aplicando el teorema de los senos al triángulo OPM, hallamos.

$$\frac{OM}{OP} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha}.$$

Puesto que $D'C' \parallel DC$, entonces

$$D'C' = DC \frac{OM}{ON} = a \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha}.$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo PMN, hallamos que

$$\frac{PM}{PN} = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} (\pi - 3\alpha)},$$

de donde

$$PM = a \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha}.$$

Ahora, obtenemos el área buscada de la sección $ABC'D'$:

$$S=\frac{1}{2}(AB+D'C')PM=\frac{1}{2}\left(a+a\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}\right)a\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}=a^2\frac{\operatorname{sen}^2 2\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2 3\alpha}$$

439. Empleando las denotaciones de la fig. 152, examinemos $\frac{1}{8}$ parte del desván $OSBMN$. Esta parte consta de dos pirámides. La primera pirámide tiene como base SBM y su vértice es O; su volumen es

$$V_1=\frac{1}{3}SO\cdot S_{SBM}=\frac{a^2h}{48}$$

La segunda pirámide tiene como base BMN y su vértice es O, su volumen será

$$V_2=\frac{a^2h}{24}.$$

Así pues, el volumen del desván es igual a

$$V=8(V_1+V_2)=\frac{a^2h}{2}$$

440. Sean BM y CM las perpendiculares trazadas desde los vértices B y C de la base (fig. 153) a la arista lateral SA. El ángulo BMC formado por estas

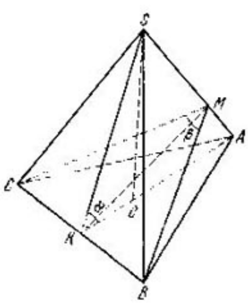

FIG. 153

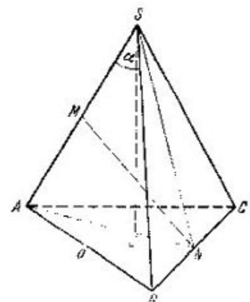

FIG. 154

perpendiculares es el buscado. Designémoslo por β. Es obvio, que

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}=\frac{BK}{BM} \qquad (1)$$

Sea a el lado de la base de la pirámide. Entonces

$$SK=\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$$

$$SB=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{6\cos\alpha}\sqrt{3(1+3\cos^2\alpha)}$$

Del triángulo isósceles ASB hallamos fácilmente su altura BM

$$BM=\frac{a}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$$

De este modo, en virtud de (1)

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1+3\cos^2\alpha}{2}}$$

y, por consiguiente,

$$\beta=2\arcsin\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}.$$

441. Tracemos un plano por la arista SA y el punto N del pie de la perpendicular AN al segmento BC (fig. 154). Sea NM la altura del triángulo ASN. El segmento NM, por ser perpendicular a AS y BC, evidentemente, es igual a d. Designemos por a el lado de la base de la pirámide. Entonces

$$SA=\frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}},$$

y la altura de la pirámide es igual a

$$SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\frac{a}{6\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{9-12\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Puesto que $AN\cdot SO=AS\cdot d$, entonces

$$a=\frac{6d}{\sqrt{3}\sqrt{9-12\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Como resultado, tenemos:

$$V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}SO=\frac{d^3}{3\left(3-4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}.$$

442. Sea $AD=a$, $BC=b$ (fig. 155). Tracemos el segmento EF que une los puntos medios de las bases del trapecio. Es evidente, que el ángulo diedro adyacente a AD es menor que el ángulo adyacente a BC. Sea $\angle SEO=\alpha$; entonces $\angle SFO=2\alpha$.

Tenemos:

$$SO=OF\cdot\operatorname{tg}2\alpha=OE\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Pero,

$$OF=\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\qquad OE=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

y obtenemos la ecuación $a\cdot\operatorname{tg}\alpha=b\cdot\operatorname{tg}2\alpha$, resolviendo la cual, hallaremos

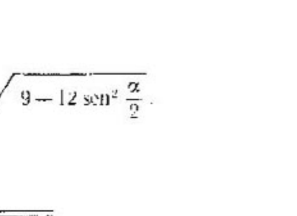

FIG. 155

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{a-2b}{a}}\,^{*)}.$$

Luego, obtenemos:

$$SO=OE\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{a-2b}{a}},$$

$$S_{\text{base}}=\frac{a+b}{2}(OE+OF)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

*) Este resultado demuestra que siendo $a\leqslant 2b$ el problema no tiene sentido.

y, por fin, el volumen de la pirámide será igual a

$$V=\frac{(a+b)^2}{24}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{a(a-2b)}.$$

443. Sea $SL\perp AB$, $SK\perp AC$ y SM perpendicular al plano P (fig. 156). Según la condición del problema $SA=25$ cm, $SL=7$ cm y $SK=20$ cm. Por el teorema de Pitágoras hallamos fácilmente que $AK=15$ cm y $AL=24$ cm. Prolonguemos el segmento KM hasta su intersección con el lado AB en el punto Q. Es fácil ver que el $\angle AQK=30°$ por consiguiente, $AQ=30$ cm. De aquí que sea $LQ=6$ cm y

$$LM=6\operatorname{tg}30°=2\sqrt{3}\text{ cm}$$

Del triángulo rectángulo SML hallamos que

$$SM=\sqrt{7^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{37}\text{ cm}.$$

444. Supongamos que sea S el vértice de la pirámide, SO su altura, $BN=NC$ (fig. 157). Designemos por a el lado de la base de la pirámide. Hagamos pro-

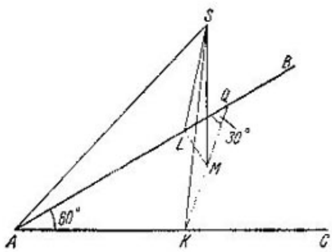

FIG. 156

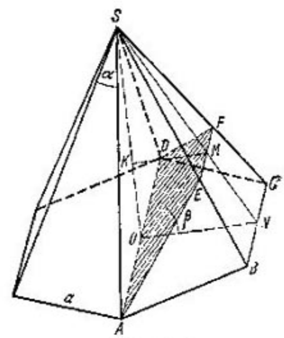

FIG. 157

visionalmente $\frac{SM}{SN}=\lambda$. Entonces, de la semejanza de los triángulos hallamos fácilmente que

$$EF=a\lambda,\qquad KM=a\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,$$

y del $\triangle MKO$ obtenemos que

$$OM=\frac{KM}{\cos\beta}=\frac{a\lambda}{2\cos\beta}\sqrt{3}.$$

El área de la sección es igual a

$$\frac{1}{2}(AD+EF)\,OM=\frac{1}{2}(2a+\lambda a)\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{\cos\beta}a=\frac{\sqrt{3}}{4\cos\beta}\lambda(\lambda+2)a^2.$$

El área de la base, como el área de un hexágono regular con el lado a, es igual a $6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, y la relación buscada de las áreas es igual a

$$\frac{1}{6\cos\beta}\lambda(\lambda+2).\tag{2}$$

Por consiguiente, el problema se reduce a la determinación de λ. Para este fin hagamos $\angle SNO=\varphi$. Entonces, por el teorema de los senos, del $\triangle SOM$ obtendremos:

$$SM=SO\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{sen}(\beta+\varphi)}=SO\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\varphi)}$$

Puesto que $SO=SN\cdot\operatorname{sen}\varphi$, entonces

$$\lambda=\frac{SM}{SN}=\frac{\cos\beta\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\beta+\varphi)}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\varphi}. \tag{3}$$

Queda determinar $\operatorname{cotg}\varphi$. Para ello, observemos que

$$SN=\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},\qquad ON=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$SO=\sqrt{SN^2-ON^2}=\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}-3}$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{cotg}\varphi=\frac{ON}{SO}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}-3}}.$$

Colocando este valor en la fórmula (3), obtendremos

$$\lambda=\frac{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}-3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}-3}+\sqrt{3}\operatorname{tg}\beta}.$$

445. Desde cierto punto S que no coincida con el vértice C y que se encuentre en la arista del ángulo triedro, que no es lado del ángulo plano α, bajemos las perpendiculares SB y SD a los lados del ángulo plano indicado y la perpendicular SA a la respectiva cara (fig. 158). Designemos los ángulos buscados por β_1 y γ_1

$$\angle SCB=\gamma_1,\qquad \angle SCD=\beta_1.$$

Supongamos, a continuación, que $\angle ACB=\alpha'$ y $\angle ACD=\alpha''$. Haciendo $CA=a$, de los triángulos rectángulos CBA, SBA y SBC hallamos:

$$\operatorname{tg}\gamma_1=\frac{SB}{CB}=\frac{a\operatorname{sen}\alpha'}{a\cos\gamma\cos\alpha'}=\sec\gamma\operatorname{tg}\alpha'.$$

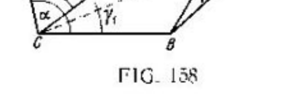

FIG. 158

Análogamente obtenemos:

$$\operatorname{tg}\beta_1=\sec\beta\operatorname{tg}\alpha''.$$

El problema se ha reducido, por consiguiente, a la determinación de $\operatorname{tg}\alpha'$ y $\operatorname{tg}\alpha''$. Tenemos que $\alpha'+\alpha''=\alpha$. Calculando por diferentes métodos el segmento SA, hallamos:

$$SA=a\operatorname{sen}\alpha'\operatorname{tg}\gamma$$
$$SA=a\operatorname{sen}\alpha''\operatorname{tg}\beta.$$

De aquí $\operatorname{sen}\alpha'=\operatorname{sen}\alpha''\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\gamma$ y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\alpha'=\operatorname{sen}(\alpha-\alpha')\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}=(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha'-\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha')\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\gamma.$$

Como resultado, dividiendo ambos miembros de la última igualdad por $\cos\alpha'$, obtenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha'=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\gamma}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\gamma}.$$

Cambiando de lugar a β y γ, hallaremos:

$$\operatorname{tg}\alpha''=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{cotg}\beta}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{cotg}\beta}.$$

De este modo, en resumen obtenemos:

$$\operatorname{tg}\gamma_1=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cosec}\gamma}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cotg}\gamma};$$

$$\operatorname{tg}\beta_1'=\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{cosec}\beta}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{cotg}\beta}.$$

446. Puesto que la suma de los ángulos internos del polígono regular es igual a πn, la cantidad de lados del polígono será $n+2$. Sea PQ la altura de la pirámide (fig. 159). Examinemos una cara lateral cualquiera de la pirámide,

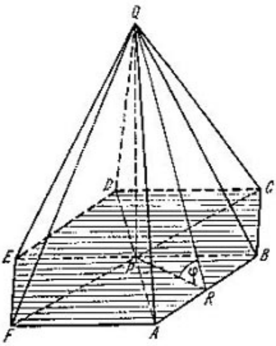

FIG. 159

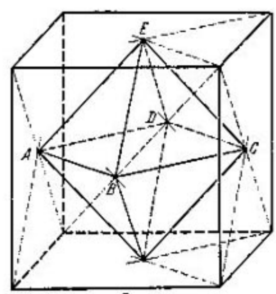

FIG. 160

por ejemplo, el $\triangle QAB$ y su proyección sobre la base, es decir, el $\triangle PAB$. De la condición del problema se deduce:

$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}=\frac{1}{k}.$$

Dado que las áreas de los triángulos son entre sí como sus alturas, bajadas a la base común AB, para el coseno del ángulo diedro de la base tenemos:

$$\cos\varphi=\frac{PR}{QR}=\frac{1}{k}.$$

De aquí se desprende que la apotema de la base de la pirámide es igual a

$$d=h\operatorname{cotg}\varphi=h\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

A continuación, hallamos el lado de la base

$$a=\frac{2h}{\sqrt{k^2-1}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}.$$

Puesto que el área de la base es

$$S = \frac{1}{2}(n+2)\,ad,$$

entonces, el volumen de la pirámide será

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\,\frac{(n+2)\,h^3}{k^2-1}\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}.$$

447. El cuerpo obtenido es un octaedro cuyos vértices se encuentran en los centros de simetría de las caras del cubo (fig. 160). El volumen del octaedro es igual al doble del volumen de la pirámide cuadrangular regular $EABCD$ de altura $\frac{a}{2}$ y el área de la base $ABCD$ de la cual es igual a $\frac{1}{2}a^2$. Por consiguiente, el volumen buscado es igual a

$$2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{6}.$$

448. Es fácil ver que en la sección se obtendrá un trapecio isósceles $ABCD$ (véase la fig. 161). Sea P el punto medio del lado EF de la base de la pirámide. Examinemos el $\triangle SPR$ en el que entra la altura SO de la pirámide. El segmento KO, evidentemente, es la altura del trapecio $ABCD$. Dado que $KO \parallel SR$, entonces $KO = \frac{1}{2}h$, donde h es la apotema de la pirámide. Es obvio también, que $AB = 2a$, donde a es la longitud del lado de la base de la pirámide y que $DC = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}a$. De aquí que sea

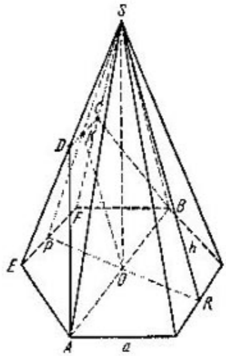

FIG. 161

$$S_{\text{trap}} = \frac{1}{2}\left(2a+\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{h}{2} = \frac{5ah}{8} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}ah\right)$$

y, por consiguiente, la relación buscada es igual a $\frac{5}{4}$.

449. Sea A_1BC_1D el tetraedro dado y $ABCDA_1B_1C_1D_1$ el paralelepípedo obtenido de la construcción indicada. Es fácil comprender que las aristas del tetraedro son las diagonales de las caras laterales de paralelepípedo (fig. 162). El tetraedro puede ser obtenido eliminando del paralelepípedo cuatro pirámides equidimensionales: $ABDA_1$, $BDCC_1$, $A_1B_1C_1B$ y $A_1D_1C_1D$. Puesto que el volumen de cada pirámide es igual a $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo, la relación entre el volumen V_{par} del paralelepípedo y el volumen V_{tetr} del tetraedro será

$$\frac{V_{\text{par}}}{V_{\text{tetr}}} = \frac{V_{\text{par}}}{V_{\text{par}}-\frac{4}{6}V_{\text{par}}} = 3.$$

450. Es fácil ver que los vértices externos de los tetraedros se encuentran en los vértices de cierto cuadrado. Para determinar la longitud de su lado, tracemos por el vértice S de la pirámide y por el vértice externo A de uno de los tetraedros un plano perpendicular a la base de la pirámide cuadrangular (fig. 163). Este plano pasará por el pie O de la altura de la pirámide, por el pie Q de la altura del tetraedro y por el punto medio M de la arista KL. Bajando la perpendicular AB al plano de la base de la pirámide, examinemos el cuadrilátero $SOBA$. Su lado OB es la mitad de la diagonal del cuadrado mencionado y debe ser

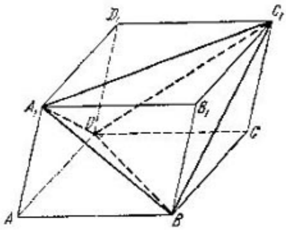

FIG. 162

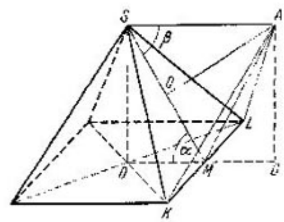

FIG. 163

determinado. Es fácil revelar que $SOBA$ es un rectángulo. En efecto, haciendo $\angle OMS=\alpha$, y $\angle ASM=\beta$, hallamos:

$$\cos\alpha=\frac{OM}{MS}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

y

$$\cos\beta=\frac{QS}{SA}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por eso SA y OB son paralelos y, por consiguiente,

$$OB=SA=a.$$

Así pues, la distancia buscada es igual a $a\sqrt{2}$.

451. Supongamos que el plano secante ha sido trazado por cierto punto de la diagonal HP del cubo dado (fig. 164). Examinemos al principio las secciones que cortan a la diagonal en los puntos del segmento OP. Separemos la seccion QRS que pasa por tres vértices del cubo, ella, evidentemente, pertenece al conjunto que se examina. Es un triangulo equilátero cuyo lado es $a\sqrt{2}$. Es fácil calcular que la distancia desde esta sección hasta el centro del cubo es igual a $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Es evidente, que si $x\geqslant\frac{a\sqrt{3}}{6}$ en la sección se obtienen triángulos equiláteros. Puesto que la relación entre los lados de los triángulos en cuestión es igual a la relación entre sus distancias hasta el punto P, entonces

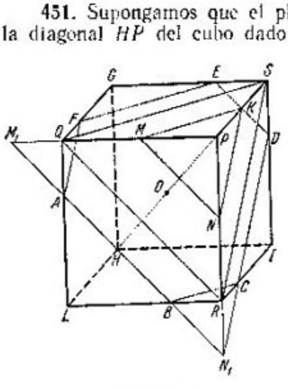

FIG. 164

$$\frac{MN}{QR}=\frac{OP-x}{OP-\frac{a\sqrt{3}}{6}}.$$

De aquí, tomando en consideración que

$$QR = a\sqrt{2} \quad \text{y} \quad OP = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

hallamos.

$$MN = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,a - x\sqrt{6}. \tag{1}$$

Si $\frac{a\sqrt{3}}{6} > x \geq 0$, entonces en la sección se obtienen los hexágonos $ABCDEF$.

Los lados AB, FE y CD del hexágono son respectivamente paralelos a los lados QR, QS y RS del triángulo equilátero QRS. Por esta razón, en su pro longación, intersecándose, forman ángulos de 60°. Teniendo en cuenta que $AF \parallel CD$, etc., llegamos a la conclusión de que todos los ángulos del hexágono son iguales a 120°. Es fácil ver también, que $AB = CD = EF$ y $BC = DE = AF$ (se debe tener en cuenta que los lados del hexágono cortan en las caras triángulos isósceles).

Con el fin de hallar las longitudes de los lados del hexágono, prolonguemos el lado AB del hexágono hasta su intersección con las prolongaciones de las aristas PQ y PR en los puntos M_1 y N_1. La longitud del segmento M_1N_1 puede ser calculada por la fórmula (1). Conociendo M_1N_1 hallamos el segmento

$$BN_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}M_1N_1 - a\right)\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} - x\sqrt{6}$$

De donde

$$AB = M_1N_1 - 2BN_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2} + x\sqrt{6}. \tag{2}$$

El lado BC se podría hallar análogamente. No es difícil, sin embargo, comprender que $BC = BN_1$ y, por consiguiente,

$$BC = \frac{a}{2}\sqrt{2} - x\sqrt{6}. \tag{3}$$

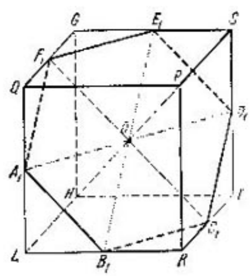

FIG 165

Señalemos que en la sección con el plano π que pasa por el punto O se obtiene un hexágono regular (véase las fórmulas (2) y (3) para $x = 0$). Los vértices de este hexágono se encuentran en los puntos medios de las aristas del cubo (fig. 165). Es fácil ver que si a una de las dos partes en las que el plano π divide al cubo se la hace girar 60° en torno a la diagonal OP, entonces el hexágono coincide consigo mismo y obtendremos dos polígonos dispuestos simétricamente con respecto al plano π. Por consiguiente, la sección que corta a la diagonal en los puntos del segmento HO a la distancia x del punto O, se obtiene de la correspondiente sección del conjunto de planos secantes ya examinado haciéndolo girar a 60°.

452. En la proyección se obtendrá un hexágono regular cuyo lado será igual a $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Para convencerse de esto es cómodo representarse el resultado de la proyección de todas las secciones posibles del cubo, examinadas en el problema 451 (véase la fig. 164). Todas las secciones indicadas se proyectan sin modificar sus dimensiones y obtendremos la figura mostrada en la fig. 166.

Valiéndonos de que el lado del triangulo RQS es igual a $a\sqrt{2}$, del triangulo GOS hallamos:

$$GS\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

de donde $GS=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Puesto que, a continuación, el lado del hexágono regular $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (véase la fig. 164) es igual a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, entonces, la relación buscada resultará igual a

$$\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{4}{3}.$$

453. Sea $AEFD$ el trapecio isósceles que se obtiene en la sección y sean G y H los puntos medios de sus bases (véase la fig. 167). Bajemos desde el punto H la perpendicular HK a la base de la pirámide. Puesto que H es el punto medio de SN, entonces

$$HK=\frac{h}{2}, \quad KN=\frac{a}{4}, \quad GK=\frac{3a}{4} \qquad (1)$$

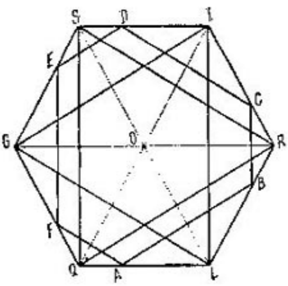

FIG. 166

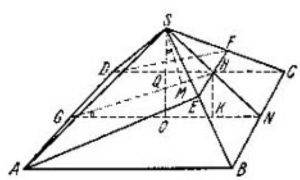

FIG. 167

Determinemos, a continuación, las longitudes de los segmentos QO y QS. Dado que

$$\frac{QO}{HK}=\frac{GO}{GK},$$

entonces, teniendo en cuenta (1), obtenemos que

$$QO=\frac{h}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{4}{3a}=\frac{h}{3},$$

de donde

$$QS=\frac{2}{3}h$$

y

$$GQ=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{3}\right)^2}. \qquad (2)$$

Bajemos desde el punto S la perpendicular SM a GH. Entonces, de la semejanza de los triángulos SMQ y GOQ tenemos que

$$\frac{SM}{QS}=\frac{GO}{GQ}$$

y, por consiguiente, la distancia buscada es igual a

$$SM=QS\cdot\frac{GO}{GQ}=\frac{2ah}{\sqrt{9a^2+4h^2}}.$$

454. El cuerpo que se examina está compuesto por dos pirámides con base común KMN (fig. 168). La altura OR de la pirámide inferior es fácil de hallar, bajando desde el punto P (punto medio del lado KN) la perpendicular PD a la base de la pirámide. El punto D dividirá al segmento QL por la mitad. Valiéndonos de este hecho, del $\triangle APD$ obtenemos:

$$\frac{PD}{RQ}=\frac{DA}{QA}=\frac{5}{4}.$$

De aquí

$$RQ=\frac{4}{5}PD$$

y, por consiguiente,

$$OR=\frac{1}{5}PD=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{30}.$$

Aquí, hemos aprovechado que la altura de un tetraedro regular es igual a $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. El volumen buscado es igual a

$$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{80}.$$

455. Supongamos que sea $AMKN$ el cuadrilátero obtenido en la sección y Q el punto de intersección de sus diagonales (véase la fig. 169). Al examinar el

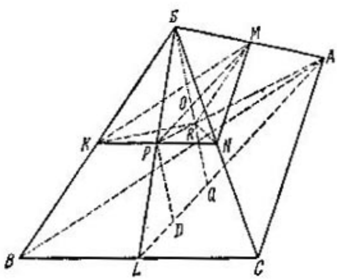

FIG. 168

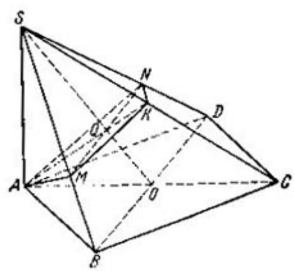

FIG. 169

$\triangle SAC$ es fácil ver que Q se encuentra en la intersección de las medianas de este triángulo. Por eso,

$$\frac{MN}{BD}=\frac{SQ}{SO}=\frac{2}{3}$$

y, por consiguiente,

$$MN=\frac{2}{3}b.$$

Luego, del triángulo rectángulo SAC hallamos que

$$AK=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}\sqrt{q^2+a^2}.$$

Puesto que $AK\perp MN$, entonces

$$S_{sec}=\frac{1}{2}AK\cdot MN=\frac{b}{6}\sqrt{q^2+a^2}.$$

456. Sean NQN_1Q_1 y LML_1M_1 las secciones paralelas del prisma (fig. 170), a la longitud de la diagonal AC de la base y H la longitud del segmento KK_1. Entonces, el área de la primera sección será

$$S=\frac{H}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{4}Ha.$$

El área de la segunda sección será

$$S'=\frac{1}{2}PT(A_2C_2+LM)+\frac{1}{2}P_1T(A_2C_2+L_1M_1).$$

Pero,

$$A_2C_2=a,\quad LM=\frac{a}{4},\quad L_1M_1=\frac{3}{4}a,\quad PT=\frac{3}{4}H,\quad P_1T=\frac{1}{4}H,$$

lo que se ve fácilmente de la semejanza de los triangulos correspondientes. En virtud de esto, obtenemos:

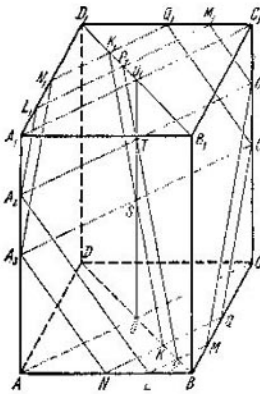

FIG. 170

$$S'=\frac{11}{16}aH$$

y, por consiguiente,

$$S'=\frac{11}{12}S.$$

Observación. Este problema puede ser fácilmente resuelto por otro procedimiento, si se toma en consideración la fórmula

$$S_{\text{proyec}}=S\cos\varphi, \qquad (1)$$

donde S es el área de cierto polígono dispuesto en el plano P, S_{proyec} es el área de la proyección de este polígono sobre el plano Q, y φ es el ángulo entre los planos P y Q.

De acuerdo con la fórmula (1), las áreas de las secciones paralelas examinadas en el problema son entre sí como las áreas de sus proyecciones. Así pues, nuestro problema se reduce a hallar las áreas de dos figuras: $L_1'M_1'CMLA$ y $N_1'Q_1'CQNA$ (fig. 171) (las letras con rasgos significan las proyecciones de los puntos correspondientes sobre la base del prisma).

457. Examinemos la pirámide $KAEF$, que es uno de los poliedros (véase la fig. 172). Consideramos que

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}.$$

Por eso,

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}$$

y, por consiguiente,

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}. \qquad (1)$$

Supongamos, a continuación, que KM y SN son las alturas de las pirámides $KAEF$ y $SABC$. Es fácil ver que

$$\frac{KM}{SN}=\frac{AK}{AS}=\frac{2}{3}.$$

Por eso

$$KM=\frac{2}{3}SN$$

y, por consiguiente, teniendo en cuenta (1), obtenemos que

$$V_{KAEF}=\frac{2}{27}V_{SABC}.$$

La relación buscada es igual a $\frac{2}{25}$.

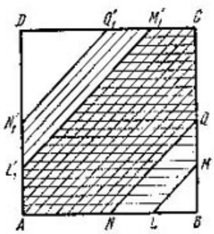

FIG. 171

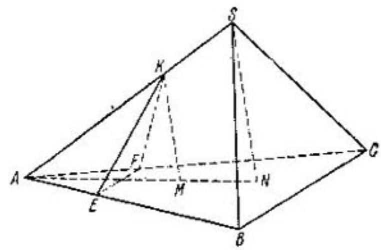

FIG. 172

458. Tomemos la cara de área S_0 como base ABC de la pirámide dada $ABCD$. Sea DO la altura de la pirámide y DA_1, DB_1 y DC_1 las alturas de las caras laterales (fig. 173).

Según el teorema de las tres perpendiculares $OC_1 \perp AB$, $OA_1 \perp BC$ y $OB_1 \perp AC$, en virtud de lo cual los ángulos $\angle DC_1O$, $\angle DA_1O$ y $\angle DB_1O$ son ángulos lineales de los respectivos ángulos diedros y según la condición del problema son iguales. De aquí se deduce la igualdad de los triángulos DOC_1, DOA_1 y DOB_1. Para comodidad del cálculo introduzcamos las siguientes denotaciones:

$$DO=H,\quad DC_1=DA_1=DB_1=h,$$
$$OC_1=OA_1=OB_1=r,\qquad S_1+S_2+S_3=S.$$

Es evidente, que r es el radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$. El volumen de la pirámide $ABCD$ es

$$V=\frac{1}{3}S_0H. \tag{1}$$

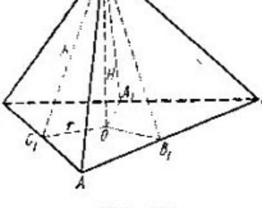

FIG. 173

Del triángulo rectángulo DOC_1 obtendremos.

$$H=\sqrt{h^2-r^2}. \tag{2}$$

Así pues, el problema se reduce a la determinación de la apotema h y del radio r. De la fórmula $S_3=\frac{1}{2}ABh$ y otras análogas obtendremos las expresiones para los lados del triángulo ABC:

$$AB=\frac{2S_3}{h},\qquad BC=\frac{2S_1}{h},\qquad AC=\frac{2S_2}{h}.$$

Por consiguiente, el semiperímetro será

$$p=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)=\frac{S_3}{h}+\frac{S_1}{h}+\frac{S_2}{h}=\frac{S}{h}.$$

Luego,

$$p-AB=\frac{S}{h}-\frac{2S_3}{h}=\frac{S-2S_3}{h},$$

$$p-BC=\frac{S-2S_1}{h}, \quad p-AC=\frac{S-2S_2}{h},$$

y por la fórmula de Heron

$$S_0^2=p(p-AB)(p-BC)(p-AC)=$$
$$=\frac{S}{h}\cdot\frac{S-2S_1}{h}\cdot\frac{S-2S_2}{h}\cdot\frac{S-2S_3}{h}=\frac{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{h^4},$$

de donde

$$h=\frac{\sqrt[4]{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}}{\sqrt{S_0}}. \qquad (3)$$

El radio r de la circunferencia inscrita lo hallaremos de la fórmula que expresa el área S_0 del triángulo ABC por medio de este radio y el semiperímetro:

$$S_0=pr=\frac{S}{h}r,$$

de donde

$$r=h\frac{S_0}{S}.$$

Colocando este valor de r en la fórmula (2), hallaremos:

$$H=\sqrt{h^2-h^2\frac{S_0^2}{S^2}}=\frac{h}{S}\sqrt{S^2-S_0^2}.$$

Colocando aquí el valor de h de la fórmula (3) e introduciendo el resultado obtenido en la fórmula (1), obtendremos definitivamente:

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{S_0(S^2-S_0^2)}\sqrt[4]{\frac{(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{S^3}}$$

459. Cortemos al cubo por la mitad con ayuda de un plano diagonal, perpendicular al eje de rotación, y giremos 90° el poliedro obtenido. Como resultado obtendremos la configuración representada en la fig. 174.

La parte común la componen el paralelepípedo rectangular $ABCDD_1A_1B_1C_1$ y la pirámide regular $SABCD$. La altura del paralelepípedo la hallamos del triángulo BB_1T:

$$h=B_1T=\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}.$$

La altura de la pirámide es

$$H=\frac{a\sqrt{2}}{2}-h=\frac{a}{2}.$$

El área de la base común del paralelepípedo y la pirámide es igual a a^2.

De este modo, el volumen buscado de la parte común será

$$V=2\left[a^2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}\right)+a^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}\right],$$

o bien

$$V=a^3\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right).$$

460. Sea S el vértice del cono, $SO=h$ la altura del cono, ASB el triángulo que se obtiene en la sección, C el punto medio de la cuerda AB, y $AO=r$ (fig. 175). Observando que $\angle AOC=\frac{\beta}{2}$, hallamos:

$$CO=\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}, \qquad h=CO\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}, \qquad r=\frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}.$$

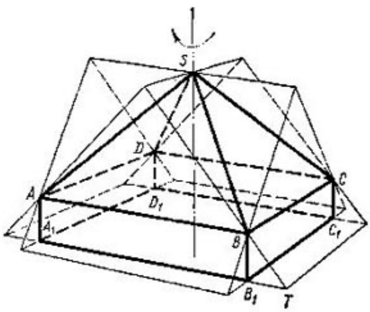

FIG. 174

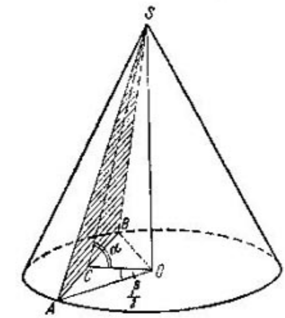

FIG. 175

Por esta razón, el volumen del cono es

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi a^3}{24}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\beta}{2}}{\operatorname{sen}^3\frac{\beta}{2}}.$$

461. Sea α el ángulo buscado, l la generatriz del cilindro, l_1 la generatriz del cono y r el radio de la base del cono y del cilindro (fig. 176). Según la condición del problema

$$\frac{2\pi r(r+l)}{\pi r(r+l_1)}=\frac{7}{4}, \qquad \frac{r+l}{r+l_1}=\frac{7}{8}.$$

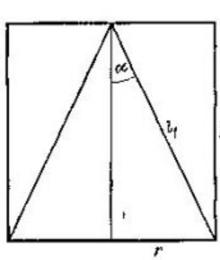

FIG. 176

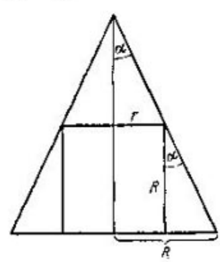

FIG. 177

Por consiguiente,

$$\frac{1+\frac{l}{r}}{1+\frac{l_1}{r}}=\frac{7}{8}, \text{ o bien } \frac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{7}{8}$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\alpha+8\cos\alpha-7=0.$$

Resolviendo esta ecuación hallaremos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}, \quad \alpha=\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}.$$

462. Supongamos que sea α el ángulo buscado, R el radio de la base del cono y r el radio de la base del cilindro (fig. 177). Tenemos:

$$\frac{2\pi r^2+2\pi rR}{\pi R^2}=2\left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R}=\frac{3}{2}.$$

Pero $\frac{R-r}{R}=\operatorname{tg}\alpha$ y, por lo tanto, $\frac{r}{R}=1-\operatorname{tg}\alpha$. Como resultado obtenemos la siguiente ecuación respecto de $\operatorname{tg}\alpha$:

$$4\operatorname{tg}^2\alpha-12\operatorname{tg}\alpha+5=0.$$

Resolviendo esta ecuación, hallamos:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{2}, \text{ o bien } \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}.$$

Sin embargo, se ve fácilmente que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{R-r}{R}<1$, por eso, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ y, por consiguiente,

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

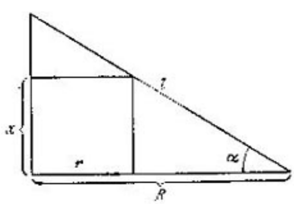

FIG. 178

463. Sea l la longitud de la generatriz, R el radio de la base del cono, x la longitud de la arista del prisma y r el radio de la circunferencia circunscrita a la base del prisma (fig. 178). Examinemos el triángulo formado por la altura del cono, por la generatriz del cono, que pasa por uno de los vértices del prisma, y la proyección de esta generatriz sobre la base del cono. Tenemos:

$$\frac{l\operatorname{sen}\alpha}{l\operatorname{sen}\alpha-x}=\frac{R}{r}.$$

Puesto que

$$r=\frac{x}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} \quad \text{y} \quad R=l\cos\alpha,$$

obtendremos que

$$x=\frac{2l\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{tg}\alpha}.$$

Por consiguiente, la superficie total del prisma será

$$S=\frac{1}{2}nx^2\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}+nx^2=n\left(\frac{2l\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{tg}\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\right).$$

464. Examinemos el trapecio isósceles AB_1C_1D obtenido como resultado de la proyección del trapecio dado $ABCD$ sobre el plano perpendicular al eje del cilindro (fig. 179). Puesto que el trapecio que se examina está circunscrito a una circunferencia, entonces

$$AB_1 = AK + KB_1 = AM + B_1N_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Del triángulo rectángulo APB_1 obtenemos:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

De aquí

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{ab}}{h} \quad \text{y} \quad \alpha = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{ab}}{h}.$$

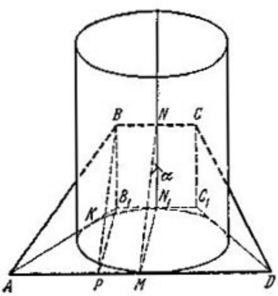

FIG. 179

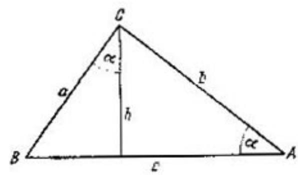

FIG. 180

465. Sea R el radio de la esfera y a, b y c los catetos y la hipotenusa respectivamente del triángulo ABC que se encuentra en la base del prisma (fig. 180). Tenemos:

$$a = \frac{h}{\cos \alpha}, \quad b = \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad c = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{h}{\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}.$$

Es evidente que el radio R es igual al radio de la circunferencia inscrita en el $\triangle ABC$. Por eso

$$R = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{h}{1+\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}$$

y, por consiguiente, el volumen del prisma será

$$V = S_{\triangle ABC} 2R = \frac{2h^3}{\operatorname{sen} 2\alpha\,(1+\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)}.$$

466. El volumen de la pirámide es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides que se obtienen al unir el centro de la esfera inscrita O con todos los vértices de la pirámide. La altura de cada una de estas pirámides es igual al radio r de la esfera inscrita en dada pirámide. Si S es el área de la base de la pirámide y S_1 es la superficie lateral, entonces, el volumen de la pirámide será

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + S)\, r. \tag{1}$$

Puesto que, por otro lado,

$$V = \frac{1}{3} hS,$$

entonces, obtenemos para r la fórmula

$$r=\frac{hS}{S_1+S}. \tag{2}$$

De las condiciones del problema se desprende:

$$S=\frac{na^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n},$$

$$S_1=\frac{na}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}},$$

$$h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}}.$$

Sustituyendo estas expresiones en (2), hallamos:

$$r=\frac{na^2\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}}}{4\left(\frac{na^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}+\frac{na}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}\right)}=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{n}}}{2\left(a+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\sqrt{4b^2-a^2}\right)}.$$

467. Designemos por r el radio de la esfera inscrita y por a la longitud del segmento OE (fig. 181). Entonces,

$$r=a\operatorname{tg}\alpha,$$

donde α es la mitad del ángulo buscado (véase la fig. 181). Por consiguiente el volumen de la esfera será

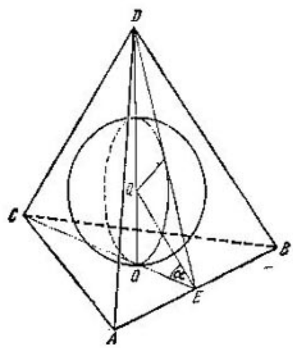

FIG. 181

$$V_{\text{esf}}=\frac{4}{3}\pi a^3\operatorname{tg}^3\alpha.$$

Puesto que $DO=a\operatorname{tg}2\alpha$, y $AB=2\sqrt{3}\,a$, entonces, el volumen de la pirámide será

$$V_{\text{pir}}=\frac{1}{3}DO\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}\,a^3\operatorname{tg}2\alpha.$$

Puesto que por la condición del problema

$$\frac{V_{\text{pir}}}{V_{\text{esf}}}=\frac{27\sqrt{3}}{4\pi},$$

expresando $\operatorname{tg}2\alpha$ por medio de $\operatorname{tg}\alpha$, obtenemos la ecuación

$$\operatorname{tg}^2\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=\frac{2}{9}.$$

De aquí

$$(\operatorname{tg}\alpha)_1^2=\frac{1}{3}\quad \text{y}\quad (\operatorname{tg}\alpha)_2^2=\frac{2}{3}$$

Teniendo en cuenta que α es un ángulo agudo, hallamos:

$$\alpha_1=\frac{\pi}{6}$$

y

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

468. Sea a el lado y b la apotema del polígono de n lados que se encuentra en la base de la pirámide, H la altura de la pirámide. Entonces (fig. 182, a y b)

$$b = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2},$$

$$a = 2b \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 2r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n};$$

el área de la base es

$$S_{\text{base}} = n \frac{ab}{2} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Luego,

$$H = b \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}.$$

De aquí, el volumen de la pirámide será

$$V_{\text{pir}} = \frac{1}{3} nr^3 \operatorname{cotg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

Puesto que el volumen de la esfera es

$$V_{\text{esf}} = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

entonces,

$$\frac{V_{\text{esf}}}{V_{\text{pir}}} = \frac{4\pi}{n} \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$$

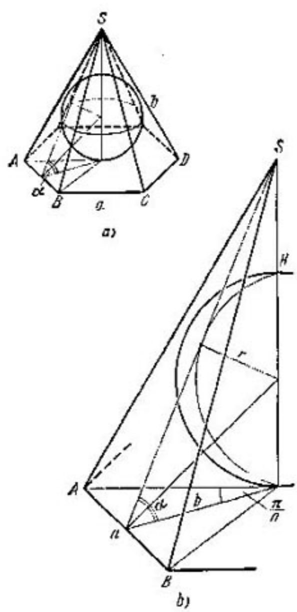

FIG. 182

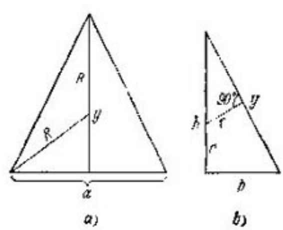

FIG. 183

469. Sea a el lado de la base de la pirámide, b la apotema de la base, R el radio de la circunferencia circunscrita a la base, h la altura de la pirámide, r el radio de la esfera inscrita en la pirámide, y la altura de la cara lateral bajada desde el vértice de la pirámide (fig. 183, a y b). Entonces,

$$a = 2R \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}, \quad b = R \cos \frac{\pi}{n},$$

además,

$$y=R+\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}=R\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right),$$

$$h=\sqrt{y^2-b^2}=R\sqrt{1+2\cos\frac{\pi}{n}}.$$

De la ecuación

$$\frac{r}{h-r}=\frac{b}{y}$$

(vease la fig. 183, *b*) hallamos:

$$r=\frac{hb}{y+b}=\frac{R\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{1+2\cos\frac{\pi}{n}}}{1+2\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Por consiguiente, la relación buscada es igual a

$$\frac{\frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}nab}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\left(1+2\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{4\pi\cos^2\frac{\pi}{n}}.$$

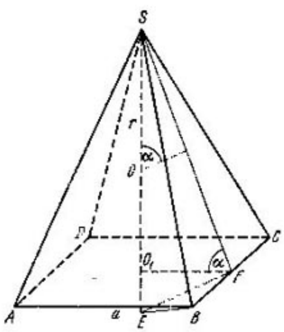

FIG. 184

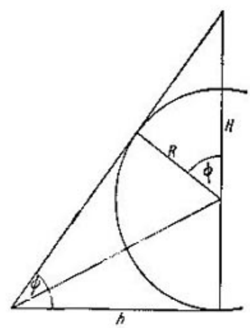

FIG. 185

470. Supongamos que sea a el lado de la base de la pirámide $SABCD$, h la altura de la pirámide y r el radio de la esfera circunscrita a la pirámide (fig. 184). Entonces,

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Si SE es el diámetro de la esfera circunscrita, entonces, del triángulo rectángulo SBE se desprende:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=h(2r-h).$$

Sin embargo, puesto que del triángulo FO_1S tenemos que $\frac{a}{2}=h\operatorname{cotg}\alpha$, entonces, eliminando a a, hallamos:

$$h=\frac{2r}{2\operatorname{cotg}^2\alpha+1}=\frac{1}{1+2\operatorname{cotg}^2\alpha}\left(\frac{6V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

471. Empleando la igualdad de los ángulos diedros, así como en el problema 458 no es difícil demostrar que la perpendicular bajada desde el vértice a la base se proyecta al centro de simetría del rombo. Es fácil también ver que el centro de la esfera inscrita se encuentra en la perpendicular mencionada.

Supongamos que sea a el lado del rombo, $2h$ la altura del rombo y H la altura de la pirámide (fig. 185). Entonces, el área de la base es $S=a^2\operatorname{sen}\alpha$, o puesto que $a=\frac{2h}{\operatorname{sen}\alpha}$,

$$S=\frac{4h^2}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Pero, $h=R\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}$ (véase la fig. 185, donde está representada la sección que pasa por la altura de la pirámide y la altura del rombo). Está también claro, que

$$H=R+\frac{R}{\cos\psi}=R\,\frac{2\cos^2\frac{\psi}{2}}{\cos\psi}$$

Como resultado obtenemos el volumen del prisma

$$V=\frac{8}{3}R^3\,\frac{\cos^4\frac{\psi}{2}}{\operatorname{sen}\alpha\cos\psi\operatorname{sen}^2\frac{\psi}{2}}.$$

472. Tracemos un plano por los vértices S_1 y S_2 de las pirámides y el punto medio A de uno de los lados de la base (fig. 186). El radio de la semicircunferencia, inscrita en el triángulo AS_1S_2 de tal modo que su diámetro se encuentra sobre S_1S_2, evidentemente, es igual al radio de la esfera inscrita. Sea O el centro de la semicircunferencia. Designemos por b la altura del triángulo AS_1S_2 bajada al lado S_1S_2. Dado que b es la apotema del polígono regular de n lados, entonces,

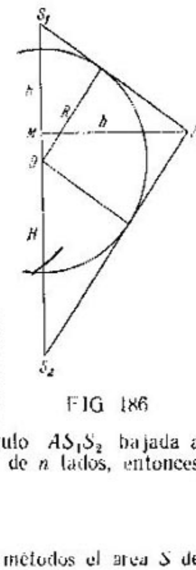

FIG. 186

$$b=\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

El radio de la esfera R lo hallaremos calculando por dos métodos el área S del triángulo AS_1S_2. Por una parte,

$$S=\frac{b}{2}(H+h),$$

por otra parte,

$$S=\frac{R}{2}S_1A+\frac{R}{2}S_2A=\frac{R}{2}\left(\sqrt{h^2+b^2}+\sqrt{H^2+b^2}\right).$$

Como resultado obtenemos la fórmula definitiva

$$R=\frac{\frac{1}{2}a(H+h)\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n}}+\sqrt{H^2+\frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n}}}.$$

473. Sean h_1 y h_2 las alturas de las pirámides, r el radio de la circunferencia circunscrita a la base (fig. 187). Entonces,

$$\frac{a}{2}=r\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.$$

Del triángulo rectángulo S_1AS_2, cuyos vértices son al mismo tiempo los vértices de las pirámides dadas y uno de los vértices de la base, hallaremos que

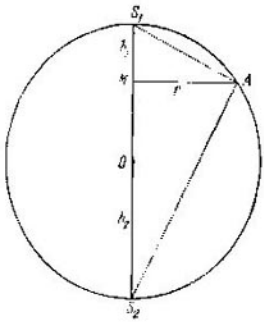

FIG. 187

$$h_1h_2-r^2=\frac{a^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}.$$

Pero,

$$h_1+h_2=2R.$$

De aquí,

$$h_1=R+\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}},$$

$$h_2=R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}}.$$

La solución es posible si $R\geqslant\dfrac{a}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}$.

474. Es fácil demostrar que el punto medio del segmento que une los centros de las bases del prisma es el centro de las esferas inscrita y circunscrita. El radio de la circunferencia inscrita en la base es igual al radio de la esfera inscrita. Sea r el radio de la esfera inscrita, R el radio de la esfera circunscrita. Examinemos el triángulo rectángulo cuyos vértices son uno de los vértices de la base, el centro de la base y el centro de las esferas. Tenemos que $R^2=r^2+r_1^2$, donde

$$r_1=\frac{r}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

De aquí,

$$R=r\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}}.$$

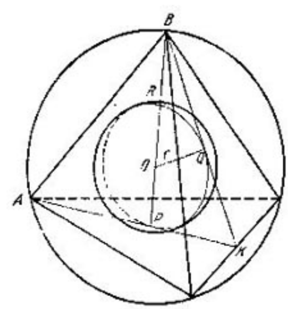

FIG. 188

La relación entre el volumen de la esfera circunscrita y el volumen de la esfera inscrita es

$$\frac{R^3}{r^3}=\left(1+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

475. Los radios de las esferas circunscrita e inscrita son iguales a los segmentos en que el centro común de las esferas divide a la altura del tetraedro. Es fácil revelar que la relación de estos segmentos es 3:1. En efecto, de la semejanza de los triángulos BQO y BPK (fig. 188) tenemos,

$$\frac{R}{r}=\frac{BK}{PK},$$

pero,

$$\frac{BK}{PK}=\frac{BK}{QK}=3.$$

Puesto que las superficies de las esferas son entre sí como los cuadrados de sus radios, la relación buscada es igual a 9.

476. Los volúmenes de los tetraedros regulares son entre sí como los cubos de los radios de las esferas inscritas en estos tetraedros. Puesto que la esfera inscrita en el tetraedro mayor está circunscrita al tetraedro menor, entonces, la relación de los radios mencionados de las esferas inscritas (véase la resolución del problema 475) es igual a 3:1. Por consiguiente, la relación buscada de los volúmenes es igual a $3^3=27$.

477. Supongamos que el problema es soluble. Tracemos el plano $A_1B_1C_1$ (véase la fig. 189, *a*) de tal modo que haga contacto con la esfera menor y que

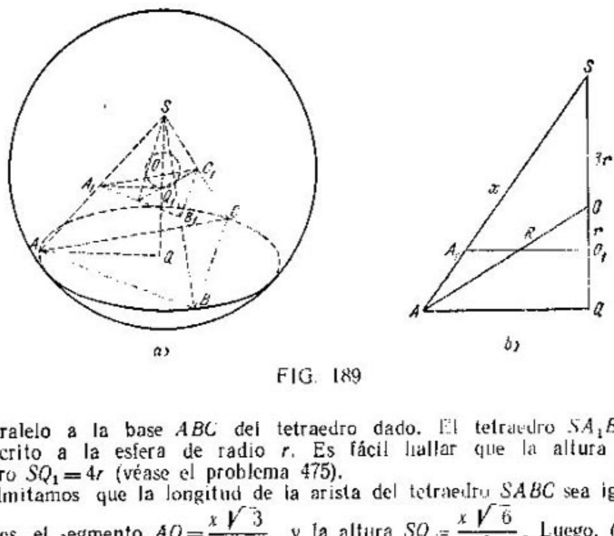

FIG. 189

sea paralelo a la base ABC del tetraedro dado. El tetraedro $SA_1B_1C_1$ está circunscrito a la esfera de radio r. Es fácil hallar que la altura de este tetraedro $SQ_1=4r$ (véase el problema 475).

Admitamos que la longitud de la arista del tetraedro $SABC$ sea igual a x. Entonces, el segmento $AQ=\frac{x\sqrt{3}}{3}$, y la altura $SQ=\frac{x\sqrt{6}}{3}$. Luego, (véase la fig. 189, *b*) tenemos que $QO=\frac{x\sqrt{6}}{3}-3r$ y del triángulo rectángulo AQO se desprende que $\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{6}}{3}-3r\right)^2=R^2$.

Resolviendo esta ecuación cuadrada hallaremos que

$$x_{1,2}=r\sqrt{6}\pm\sqrt{R^2-3r^2}.$$

En esta fórmula debe tomarse solamente la raíz con signo más, puesto que SA en todo caso es mayor que $3r$, y $3r>r\sqrt{6}$. Es evidente que el problema es posible con la condición de que sea $R\geqslant\sqrt{3}r$.

478. Sea $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ el hexágono regular obtenido en la sección del cubo. El problema se reduce a la determinación del radio de la esfera inscrita en la pirámide hexagonal regular $SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (véase la fig. 190). El lado de la base de la pirámide es igual a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ y su altura es igual a $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Valiéndonos de que el radio de la esfera inscrita en la pirámide es igual al triple del volumen de la pirámide dividido por su superficie total (véase la fórmula (1) en la resolución del problema 466), hallamos:

$$r=\frac{a(3-\sqrt{3})}{4}.$$

Por consiguiente, la relación buscada será igual a

$$\frac{2(3+\sqrt{3})^3}{9\pi}.$$

479. Sea O el centro de la esfera, y AS, BS y CS las cuerdas dadas. Es evidente, que el triángulo ABC es equilátero (fig. 191). Es fácil también ver que la perpendicular SO_1 al plano ABC, al ser prolongada, pasa por el centro de la esfera O, puesto que el punto O_1 es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

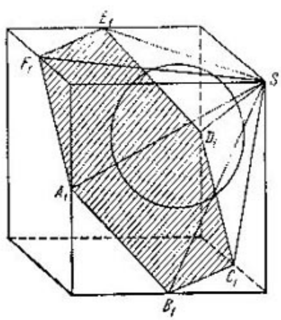

FIG. 190

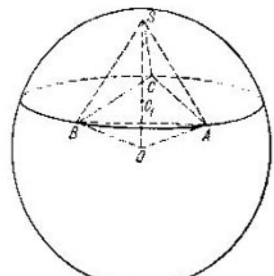

FIG. 191

Designemos, después de estas observaciones, la longitud buscada de las cuerdas por d. Del triángulo SAB hallamos que

$$AB=2d\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}$$

y, por consiguiente,

$$O_1A=AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,d\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Calculando por dos procedimientos distintos el área del triángulo isósceles SOA, obtenemos:

$$\frac{1}{2}R\frac{2}{3}\sqrt{3}\,d\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}d\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}},$$

de donde

$$d=2R\sqrt{1-\frac{4}{3}\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2}}.$$

480. El radio de la esfera inscrita lo hallaremos por la fórmula (veáse la fórmula (1) en la resolución del problema 466)

$$r=\frac{3V}{S},$$

donde S es la superficie total de la pirámide y V su volumen. Hallemos al principio el volumen de la pirámide. Observemos para ello, que los triángulos rectángulos BSC y BSA (fig. 192) son iguales, puesto que son iguales sus hipotenusas y tienen un cateto común. En virtud de esto, el triángulo rectángulo ASC es isósceles. Dado que

$$AS=CS=\sqrt{a^2-b^2},$$

entonces,

$$V=\frac{1}{3}BS\cdot S_{\triangle ASC}=\frac{1}{3}b\cdot\frac{(a^2-b^2)}{2}.$$

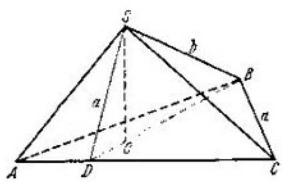

FIG. 192

Es también evidente, que

$$AD=\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

y, por consiguiente,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^4-b^4}$$

Como resultado, después de las simplificaciones correspondientes, obtenemos:

$$r=\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+2b+\sqrt{a^2-b^2}}.$$

481. Designemos por r el radio de la esfera inscrita, y por R el radio de la esfera circunscrita.

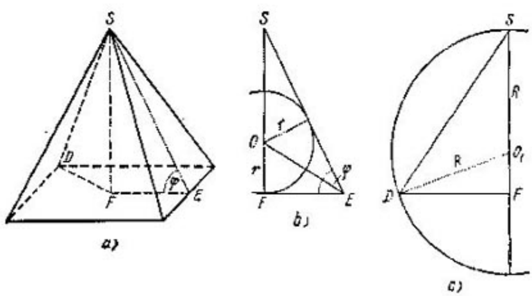

FIG. 193

Examinemos al principio el triángulo SFE, uno de los lados del cual, el lado SF, es la altura de la pirámide, y el otro, el SE, es la altura de la cara lateral (fig. 193, a). Sea O el centro de la esfera inscrita. De los triángulos

SFE y OFE (fig. 193, *b*) tenemos:

$$FE = r \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2},$$

$$SF = r \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

A continuación, es evidente, que

$$DF = EF \cdot \sqrt{2} = r \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{2}.$$

Recurriendo a la fig. 193, *c*, donde está representada la sección trazada por el centro de la pirámide y su arista lateral, hallaremos fácilmente que

$$DO_1^2 = O_1F^2 + DF^2$$

o bien

$$R^2 = (SF - R)^2 + DF^2.$$

De aquí,

$$R = \frac{SF^2 + DF^2}{2SF}. \tag{1}$$

Puesto que $R = 3r$, entonces, colocando aquí las expresiones halladas anteriormente para SF y DF, obtenemos una ecuación respecto de φ:

$$3r = \frac{r^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + r^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 2}{2r \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi},$$

o, después de las simplificaciones correspondientes,

$$6 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi = 2 + \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Hagamos, a continuación, $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = z$. Observando que $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2z}{1 - z^2}$, obtenemos la ecuación

$$7z^4 - 6z^2 + 1 = 0.$$

De aquí

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}}.$$

Puesto que $z > 0$, son posibles solamente dos respuestas:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{2}}{7}}$$

y

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{2}}{7}}.$$

482. En total se obtienen 6 biángulos (por el número de aristas) y 4 triángulos (fig. 194). Designemos por S_1 el área de cada triángulo y por S_2 el área de cada biángulo. Tenemos:

$$4S_1 + 6S_2 = 4\pi R^2. \tag{1}$$

Sea S_0 la suma de las áreas de uno de los triángulos y de tres biángulos adyacentes a este triángulo. S_0 es el área del segmento esférico cortado por el plano de la cara del tetraedro. Este área es igual a $2\pi Rh$, donte h es la altura del segmento. Puesto que la altura del tetraedro se divide por el centro de la esfera en la relación de 3:1, (véase el problema 475), entonces

$$H=R+\frac{1}{3}R=\frac{4}{3}R,$$

de donde hallamos que $h=2R-\frac{4}{3}R=\frac{2}{3}R$. Luego,

$$S_1+3S_2=2\pi R\cdot\frac{2}{3}R=\frac{4}{3}\pi R^2. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema, compuesto de las ecuaciones (1) y (2), respecto a las incógnitas S_1 y S_2, obtenemos:

$$S_1=\frac{2}{3}\pi R^2, \qquad S_2=\frac{2}{9}\pi R^2.$$

483. Sea R el radio de la base del cono, α el ángulo entre el eje del cono y la generatriz, y r el radio de la esfera inscrita En la sección axial del cono tenemos un triángulo isósceles ABC (fig. 195). El radio de la circunferencia

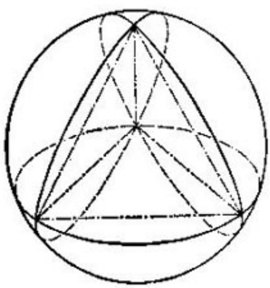

FIG. 194

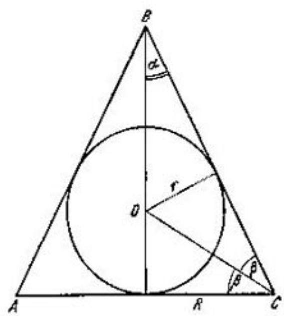

FIG 195

inscrita en este triángulo es igual al radio r de la esfera inscrita en el cono. Sea O el centro de la circunferencia, $\angle OCA=\beta$. Entonces, es evidente, que $\operatorname{tg}\beta=\frac{r}{R}$. Pero, según la condición del problema,

$$\frac{4\pi r^2}{\pi R^2}=4\left(\frac{r}{R}\right)^2=\frac{4}{3}.$$

De aquí que sea $\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ y, por consiguiente, $\beta=\frac{\pi}{6}$. Puesto que, además, $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$, entonces, $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Por consiguiente, el ángulo buscado sera

$$2\alpha=\frac{\pi}{3}.$$

484. Sea r el radio de la semicircunferencia, R el radio de la base del cono, l la generatriz del cono y α el ángulo formado por el eje del cono y la generatriz.

Por la condición del problema tenemos que

$$\frac{\pi R\,(l+R)}{2\pi r^2}=\frac{18}{5}. \qquad (1)$$

Introduzcamos en esta igualdad el ángulo α. Con este fin examinemos el triángulo isósceles ABC (fig. 196), obtenido en la sección axial del cono. Del triángulo ABC hallamos que

$$R=l\,\operatorname{sen}\alpha, \qquad r=R\cos\alpha=l\,\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Sustituyendo estas expresiones en la parte izquierda de (1), obtenemos:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha}=\frac{18}{5}.$$

Puesto que $\cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha$, entonces, simplificando el quebrado por $1+\operatorname{sen}\alpha$, tendremos que

$$36\operatorname{sen}^2\alpha-36\operatorname{sen}\alpha+5=0,$$

de donde

$$\operatorname{sen}\alpha_1=\frac{5}{6} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha_2=\frac{1}{6}.$$

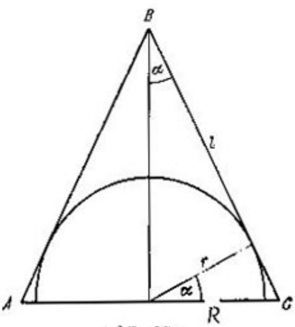

FIG. 196

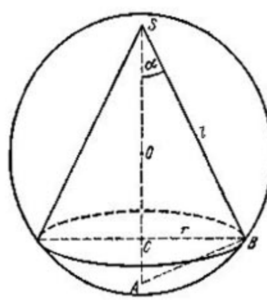

FIG. 197

Por consiguiente, el angulo buscado del vértice del cono es igual a

$$2\arcsen\frac{5}{6} \quad \text{o bien} \quad 2\arcsen\frac{1}{6}.$$

485. Supongamos que sea h la altura del cono, r el radio de la base, l la generatriz del cono y α el ángulo formado por la generatriz y la altura (fig. 197). Según la condición del problema tenemos que $\pi rl=k\pi r^2$; de aquí, $l=kr$ y, por consiguiente, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{k}$. Del triángulo rectángulo ABC obtenemos:

$$r=2R\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha=2R\,\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2}.$$

$$h=2R\cos\alpha\cos\alpha=2R\,\frac{k^2-1}{k^2}.$$

El volumen buscado del cono será

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{8}{3}\pi R^3\left(\frac{k^2-1}{k^3}\right)^2.$$

486. Sea R el radio de la esfera, h la altura del cono y r el radio de la base del cono. La relación del volumen del cono al volumen de la esfera es

$$x=\frac{r^2h}{4R^3}=\frac{q}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Del triángulo SBA (fig. 198) tenemos que $r^2=h(2R-h)$. De aquí

$$\frac{r^2}{R^2}=\frac{h}{R}\left(2-\frac{h}{R}\right)=q(2-q)$$

y, por consiguiente,

$$x=\frac{q^2}{4}(2-q).$$

El problema es soluble, evidentemente, cuando $0<q<2$

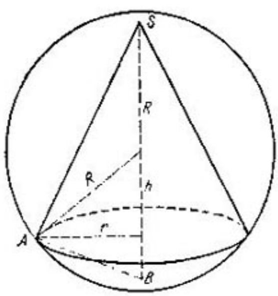

FIG. 198

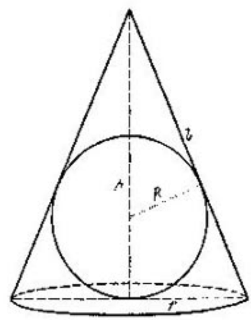

FIG. 199

487. Sea R el radio de la esfera, S_{esf} y V_{esf} la superficie y el volumen de la esfera, S_{cono} y V_{cono} la superficie total y el volumen del cono, h la altura del cono y r el radio de la base del cono (fig. 199). Entonces

$$\frac{V_{\text{esf}}}{V_{\text{cono}}}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi r^2h}=\frac{4R^3}{r^2h},$$

$$\frac{S_{\text{esf}}}{S_{\text{cono}}}=\frac{4\pi R^2}{\pi r(l+r)}=\frac{4R^2}{r(l+r)}.$$

Observemos, sin embargo que,

$$\frac{l}{r}=\frac{h-R}{R}=\frac{h}{R}-1$$

y, por lo tanto,

$$\frac{l+r}{r}=\frac{h}{R},$$

obtenemos:

$$\frac{V_{\text{esf}}}{V_{\text{cono}}}=\frac{S_{\text{esf}}}{S_{\text{cono}}}=\frac{1}{n}.$$

Observación: Se puede obtener el mismo resultado por una vía más corta, valiéndose de la siguiente fórmula:

$$V_{\text{cono}}=\frac{1}{3}S_{\text{cono}}R, \tag{1}$$

donde S_{cono} es la superficie total del cono, y R es el radio de la esfera inscrita en este cono. La fórmula (1) se obtiene fácilmente de la fórmula correspondiente para la pirámide (véase la resolución del problema 466) por el método del paso límite. En efecto, puesto que es evidente que

$$V_{\text{est}}=\frac{1}{3}S_{\text{est}}\cdot R, \tag{2}$$

entonces, dividiendo (2) entre (1), obtendremos que

$$\frac{V_{\text{est}}}{V_{\text{cono}}}=\frac{S_{\text{est}}}{S_{\text{cono}}}=\frac{1}{n}.$$

488. Sea S la superficie total del cono, S_1 la superficie de la esfera, r_1 y r los radios de las bases superior e inferior del cono y l la longitud de su generatriz. Sea, luego, $CMDL$ el trapecio obtenido en la sección axial del cono: O el centro de la esfera inscrita y $AB \perp LD$ y $OF \perp MD$ (fig. 200). Tenemos,

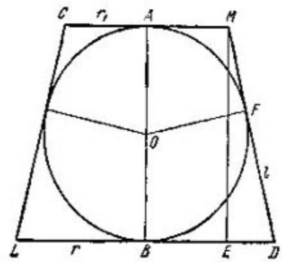

FIG. 200

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\pi l\,(r+r_1)+\pi r_1^2+\pi r^2}{4\pi R^2}=m. \tag{1}$$

Es fácil ver, que $AM=MF$ y que $BD=FD$, puesto que O es el centro de la circunferencia inscrita en el trapecio, por lo tanto,

$$l=r+r_1. \tag{2}$$

Valiéndonos de esta igualdad, de la igualdad (1) obtendremos:

$$l^2+r_1^2+r^2=4mR^2. \tag{3}$$

Del triángulo MED se desprende:

$$l^2=(r-r_1)^2+4R^2. \tag{4}$$

Eliminando l de las igualdades (2) y (4), hallaremos:

$$rr_1=R^2. \tag{5}$$

Con ayuda de esta igualdad, eliminando l de (2) y (3), obtendremos:

$$r^2+r_1^2=R^2\,(2m-1). \tag{6}$$

Resolviendo el sistema (5), (6), hallaremos:

$$r=\frac{R}{2}\left(\sqrt{2m+1}+\sqrt{2m-3}\right);$$

$$r_1=\frac{R}{2}\left(\sqrt{2m+1}-\sqrt{2m-3}\right).$$

Así pues, si $m<\frac{3}{2}$ el problema no tiene solución; cuando $m=\frac{3}{2}$ el cono truncado se transforma en un cilindro.

489. Son posibles dos casos: 1) el vértice del cono y la esfera se encuentran a distintos lados del plano tangente; 2) el vértice del cono y la esfera se encuentran a un mismo lado del plano tangente.

Examinemos el primer caso. Tracemos un plano por el eje del cono y la generatriz del cono BC, de la que se habla en las condiciones del problema, (fig. 201). Este plano dará en la sección con el cono el triángulo ABC y, en la sección con la esfera, una circunferencia con el centro O; el plano perpendicular a BC será intersecado por la recta ME (M es el punto de tangencia). Tracemos $BD \perp AC$ y $OF \perp BC$. Sea $BD = h$, $OD = OF = r$, $CD = R$. Es evidente, que $OMEF$ es un cuadrado y, por lo tanto,

$$h = r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2}.$$

Luego,

$$\frac{R}{h} = \frac{r}{d+r}, \qquad R = \frac{hr}{d+r}.$$

Así pues, en el primer caso, el volumen del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{h^3 r^2}{(d+r)^2} = \frac{\pi r^2 \left(r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2}\right)^3}{3(d+r)^2}.$$

En el segundo caso el problema se resuelve análogamente. El volumen del cono resulta igual a

$$\frac{\pi r^2 \left(r + \sqrt{r^2 + (d-r^2)}\right)^3}{3(d-r)^2}.$$

490. Examinemos la sección axial ABC del cono. Supongamos que sea BF la altura del triángulo ABC, N y M los puntos de tangencia de la circunferencia, inscrita en el triángulo ABC, con los lados AB y BC, O el centro de la

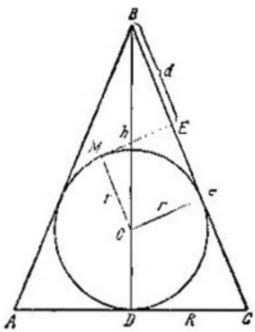

FIG. 201

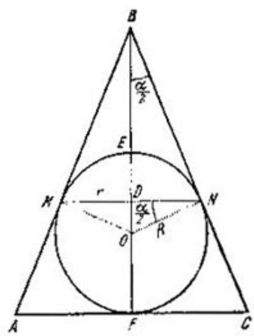

FIG. 202

circunferencia, E el punto de intersección del arco menor MN con el segmento BF, y D el punto de intersección de los segmentos MN y BF (fig. 202). Hagamos $DM = r$, $DE = H$ y $BD = h$. El volumen buscado será

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H).$$

Pero,

$$h = r \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = R \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = R\,\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

y

$$H = R - R \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2};$$

por consiguiente,

$$V=\frac{1}{3}\pi R^3\left[\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}-\left(1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(2+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

491. Designemos por r y r_1 los radios de las esferas y examinemos la sección de las esferas por un plano que pasa por sus centros O y O_1; sea $AA_1=2a$, $KS=R$ y $AS=x$ (fig. 203); entonces $A_1S=2a-x$. La superficie total de la lente es igual a

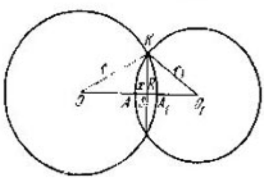

FIG. 203

$$2xar_1+(2a-x)\,2ar=S. \qquad (1)$$

Del triángulo OKS tenemos que

$$r^2=R^2+[r-(2a-x)]^2$$

o bien

$$R^2-2r\,(2a-x)+(2a-x)^2=0. \qquad (2)$$

Análogamente, del triángulo O_1KS tenemos que

$$r_1^2=R^2+(r_1-x)^2$$

o bien

$$R^2-2r_1x+x^2=0. \qquad (3)$$

De (2) y (3) hallamos:

$$r=\frac{R^2+(2a-x)^2}{2\,(2a-x)}, \qquad r_1=\frac{R^2+x^2}{2x}. \qquad (4)$$

Colocando estas expresiones para r y r_1 en la igualdad (1), obtendremos la ecuación

$$\pi\,(R^2+x^2)+\pi\,[R^2+(2a-x)^2]=S$$

o bien

$$x^2-2ax+R^2+2a^2-\frac{S}{2\pi}=0,$$

de donde

$$x=a+\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}. \qquad (5)$$

Colocando este valor de x en la fórmula (4), después de las simplificaciones correspondientes, obtenemos:

$$r=\frac{\frac{S}{4\pi}-a\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}}{a-\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}},$$

$$r_1=\frac{\frac{S}{4\pi}+a\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}}{a+\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}}.$$

La elección de otro signo delante de la raíz cuadrada en (5) se reduce al cambio de las designaciones r y r_1.

492. Sean V_1 y V_2 respectivamente los volúmenes de los segmentos esféricos menor y mayor, en los que el plano, que pasa por la línea de tangencia de la esfera con el cono, divide a la esfera. Sea, a continuación, R el radio de la esfera, h la altura del segmento menor, H la altura del cono, y r el radio de su base (fig. 204). Entonces

$$V_1=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h), \quad V_2=\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{\pi}{3}h^2(3R-h).$$

El problema se reduce a la determinación de la relación $\frac{h}{R}$. Designando por α el ángulo formado por el eje del cono y la generatriz, del $\triangle PKO$ hallamos:

$$\frac{R-h}{R}=\operatorname{sen}\alpha,$$

de donde

$$\frac{h}{R}=1-\operatorname{sen}\alpha.$$

A continuación, según la condición del problema

$$k=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 H}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{1}{4}\,\frac{r^2 H}{R^3}.$$

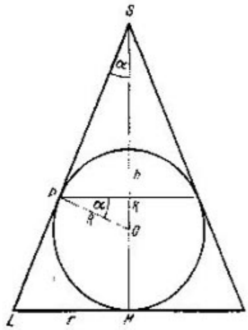

FIG. 204

Expresemos ahora r y H en función de R y α. Tenemos:

$$H=\frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}+R=R\cdot\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},$$

$$r=H\operatorname{tg}\alpha=R\cdot\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Por consiguiente,

$$k=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)^3}{\operatorname{sen}\alpha\,(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\,(1-\operatorname{sen}\alpha)}.$$

Sustituyendo aquí $\operatorname{sen}\alpha=1-\frac{h}{R}$ obtenemos una ecuación respecto a $\frac{h}{r}=z$:

$$k=\frac{1}{4}\,\frac{(2-z)^2}{(1-z)\,z}$$

o, después de las simplificaciones correspondientes,

$$z^2(4k+1)-4(k+1)z+4=0.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$$z_{1,2}=\frac{2(k+1)\pm 2\sqrt{k(k-2)}}{4k+1}. \qquad (1)$$

Definitivamente hallamos:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{z_{1,2}^2\,(3-z_{1,2})}{4-z_{1,2}^2\,(3-z_{1,2})}.$$

El problema tiene dos soluciones, puesto que, siendo $k>2$, ambas raíces de la ecuación cuadrada tienen sentido.

493. El radio r de cada una de las ocho esferas inscritas lo hallaremos examinando el triángulo AOC en el plano que pasa por los centros de estas esferas y el centro O de la esfera S (fig. 205, a). Tenemos:

$$\frac{AB}{AO}=\frac{r}{R-r}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}.$$

De aquí

$$r=R\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}+1}.$$

Trazando una sección que pase por el centro O de la esfera S, el centro O_1 de la esfera S_1 y los centros de las dos esferas opuestas de radio r (fig. 205, b),

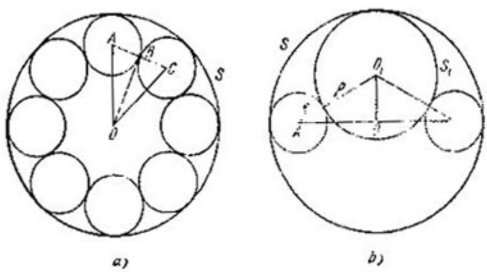

FIG 205

del triángulo rectángulo AOO_1, obtendremos:

$$AO_1^2=AO^2+OO_1^2$$

o bien

$$(r+\rho)^2=(R-r)^2+(R-\rho)^2.$$

De aquí

$$\rho=R\cdot\frac{R-r}{R+r},$$

o bien

$$\rho=R\cdot\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}+1}=\frac{R}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}.$$

494. Puesto que las esferas inscritas son iguales entre sí, sus centros equidistan del centro O de la esfera S. Por consiguiente, el centro de simetría del cubo indicado en las condiciones del problema coincide con el centro O de la esfera S (fig. 206). Sea x el radio buscado de las esferas. Es fácil ver, que entonces la arista del cubo será $AB=2x$, y la mitad de la diagonal del cubo

$$AO=CO-CA=R-x.$$

Puesto que, por otro lado,

$$AO=\frac{1}{2}\cdot 2x\sqrt{3},$$

obtenemos la ecuación

$$R-x=x\sqrt{3},$$

de donde

$$x=\frac{R}{\sqrt{3}+1}.$$

495. Supongamos que sea r el radio de la base de cada uno de los dos conos inscritos. Su parte común se compone de dos conos truncados iguales. Designemos por r_1 y r_2 los radios de las bases superior e inferior respectivamente del cono truncado y por H su altura. La relación buscada de los volúmenes es

$$q=\frac{H\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)}{2R^3}.$$

De la semejanza de los triángulos AQZ, AOS y APC (fig. 207) tenemos:

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{R-H}{R} \quad \text{y} \quad \frac{r_2}{r}=\frac{R}{h}.$$

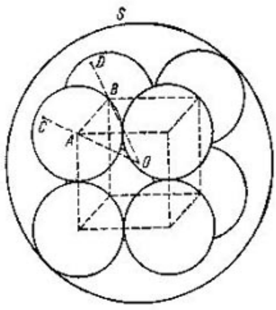

FIG. 206

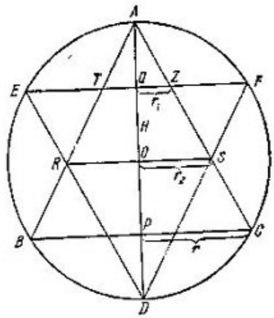

FIG 207

Puesto que, además, $H=h-R$ y $r=\sqrt{R^2-H^2}=\sqrt{2Rh-h^2}$, las dos igualdades anteriores permiten expresar r_1 y r_2 en función de R y h:

$$r_2=\frac{R\sqrt{2Rh-h^2}}{h}, \qquad r_1=r_2\frac{2R-h}{R}.$$

Ya que de la condición del problema $\frac{h}{R}=k$, entonces

$$q=\frac{(h-R)\left\{r_2^2\frac{(2R-h)^2}{R^2}+r_2^2\frac{2R-h}{R}+r_2^2\right\}}{2R^3}=$$

$$=\frac{1}{2}(k-1)\left(\frac{2}{k}-1\right)(k^2-5k+7).$$

496. Supongamos que los radios de las secciones circulares con las áreas S_1 y S_2 sean iguales a R_1 y R_2, y que las distancias desde el centro de la esfera hasta dichas secciones sean respectivamente iguales a l_1 y l_2 $(l_1 < l_2)$. Designemos por R el radio de la esfera, por r el radio de la sección buscada y por l la distancia desde esta sección hasta el centro de la esfera. Entonces, (fig. 208),

$$l_2-l_1=d \tag{1}$$

y

$$l_1^2+R_1^2=l_2^2+R_2^2=R^2.$$

De estas dos ecuaciones hallamos:

$$l_2+l_1=\frac{R_1^2-R_2^2}{d}$$

y, por consiguiente,

$$l_2+l_1=\frac{S_1-S_2}{\pi d}. \qquad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$l_2=\frac{S_1-S_2}{2\pi d}+\frac{d}{2}, \qquad l=\frac{S_1-S_2}{2\pi d}.$$

Por esta razón, el área buscada es

$$S=\pi r^2-\pi(R^2-l^2)=\pi(R_2^2+l_2^2-l^2)=\frac{1}{2}\left(S_1+S_2+\frac{1}{2}\pi d^2\right).$$

497. Designemos por r el radio buscado de la base del cono. Examinemos la figura obtenida en la sección trazada por el centro de una de las esferas y

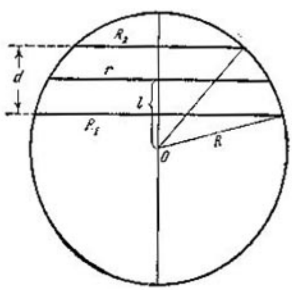

FIG. 208

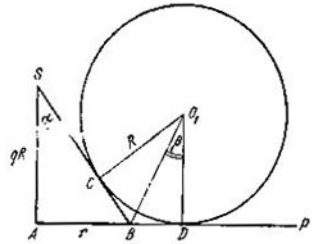

FIG. 209

el eje del cono (fig. 209). Observemos que la distancia entre los centros de dos circunferencias en contacho es igual a $2R$. Valiéndonos del hecho, fácil de demostrar, de que el centro de la base del cono A equidista de los tres puntos de tangencia de las esferas con el plano P, hallamos:

$$AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

Es fácil ver, que el $\angle SBA=\angle CO_1D=2\beta$ y, por consiguiente,

$$2\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

Tomando las tangentes de los ángulos que figuran en ambas partes de esta igualdad, obtenemos:

$$\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (1)$$

De la fig. 209 está claro que $\operatorname{tg}\beta=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R-r\right):R$ y que $\operatorname{tg}\alpha=r:qR$.

Si, ahora, hacemos $\frac{r}{R}=x$, la igualdad (1) nos dará la siguiente ecuación respecto a x:

$$3(q-2)x^2-4\sqrt{3}(q-1)x+q=0.$$

De aquí, siendo $q=2$, obtenemos que $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$, por consiguiente, $r=\frac{\sqrt{3}}{6}R$. Si $q\neq 2$, entonces

$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{3}(q-1)\mp\sqrt{9q^2-18q+12}}{3(q-2)}.$$

Dado que $0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$, entonces, en la fórmula indicada debe tomarse el signo menos. Siendo $q>2$, la segunda raíz, como es fácil demostrar, es mayor que $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, y responde al cono que tiene contacto exterior con las esferas; cuando $q<2$, la segunda raíz es negativa.

498. Los centros de las cuatro primeras esferas se encuentran en los vértices de un tetraedro regular, puesto que la distancia entre los centros de dos esferas cualesquiera en contacto es igual a $2R$. No es difícil demostrar que los centros

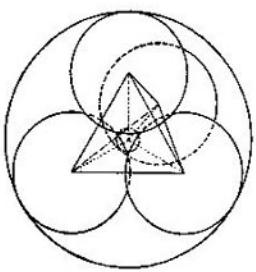

FIG. 210

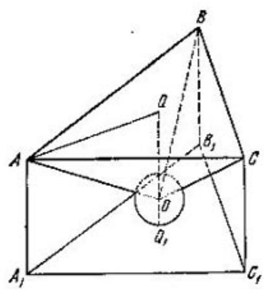

FIG. 211

de la quinta y sexta esferas coinciden con el centro de gravedad del tetraedro (fig. 210). Sea r el radio de la quinta esfera (la mayor), y ρ el radio de la sexta esfera. Es evidente, que

$$r=\rho+2R. \tag{1}$$

Valiéndonos de que la distancia desde el centro de gravedad hasta el vértice del tetraedro que se examina es igual a $\frac{\sqrt{6}}{2}R$, obtenemos:

$$\rho+R=\frac{\sqrt{6}}{2}R. \tag{2}$$

De aquí

$$\rho=R\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right),$$

y de la fórmula (1)

$$r=R\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+1\right).$$

Así pues, la relación buscada de los volúmenes es

$$\frac{V_6}{V_5}=\left(\frac{\rho}{r}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}\right)^3=(5-2\sqrt{6})^3=485-198\sqrt{6}.$$

499. Supongamos que sean A, B y C los centros de las esferas de radio R, A_1, B_1 y C_1 las proyecciones de estos centros sobre el plano, O el centro de la cuarta esfera, el radio r de la cual hace falta hallar (fig. 211). Uniendo los centros de todas las esferas obtendremos, evidentemente, la pirámide triangular regular $OABC$, en la cual $AB=BC=AC=2R$, $AO=BO=CO=R+r$, y $OQ=R-r$. El segmento AQ es el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, por lo tanto,

$$AQ=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Del triángulo AQO, por el teorema de Pitágoras, hallamos:

$$\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2+(R-r)^2=(R+r)^2.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que $r=\frac{R}{3}$.

500. Sean A, B, C y D los centros de las esferas grandes. Examinemos la proyección de todas las esferas al plano A, B, C y D (fig. 212). Dado que los centros de las esferas pequeñas equidistan de los centros de las respectivas esferas grandes, se proyectarán a los centros de gravedad O_1 y O_2 de los triángulos equiláteros ABC y BCD. Puesto que, además, los radios de las esferas

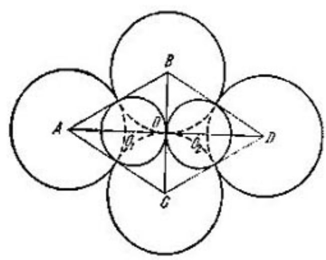

FIG. 212

pequeñas, según la condición del problema, son iguales, el segmento que une sus centros es paralelo al plano que se examina y se divide por el punto de tangencia de las esferas en dos mitades. En virtud de esto, la proyección del punto de tangencia resultará sobre el segmento BC. De aquí se deduce que las esferas pequeñas se proyectarán en circunferencias inscritas en los triángulos ABC y BCD. Por esta razón, el radio de las esferas pequeñas es

$$r=\frac{AB\sqrt{3}}{6}=\frac{2R\sqrt{3}}{6},$$

de donde

$$\frac{R}{r}=\sqrt{3}.$$

2. Problemas de demostración

501. Sean E y F los puntos medios de las bases del trapecio $ABCD$ obtenido en la sección axial del cono (fig. 213). Tracemos por el punto medio O del segmento EF las rectas $OM \perp CD$, $ON \perp EF$ y $CP \perp AD$ Hagamos, para simplificar la escritura, $CD = l$, $EF = h$, $OM = x$, $EC = r$, $DF = R$, y $\angle MON = \angle PCD = \alpha$.

Para la demostración, es suficiente establecer que $x = \frac{h}{2}$ Según la condición del problema, $\pi l (R + r) = \pi l^2$ y, por consiguiente, $R + r = l$. Sin embargo, puesto que de los triángulos OMN y CPD tenemos que

$$x = \frac{R + r}{2} \cos \alpha \quad \text{y} \quad h = l \cos \alpha,$$

entonces, $x = \frac{h}{2}$, lo que era necesario demostrar*).

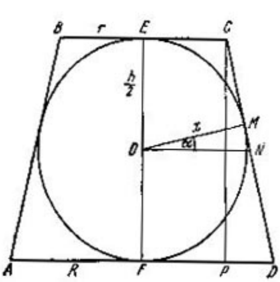

FIG. 213

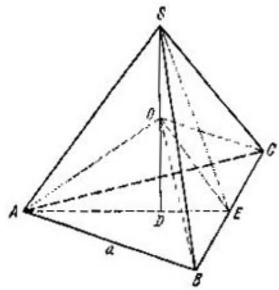

FIG. 214

502. Examinemos el trapecio $ABCD$ que se obtiene en la sección axial del cono (véase la fig. 213). Sean E y F los puntos medios de sus bases y O el punto medio del segmento EF.

$$OM \perp CD, \; ON \perp EF, \; CP \perp AD, \; \text{y} \; \angle MON = \angle PCD = \alpha.$$

Para la resolución del problema es suficiente demostrar que $OM = OE$. Introduzcamos las denotaciones:

$$EC = r, \quad DF = R, \quad OM = x, \quad OE = \frac{h}{2}.$$

Entonces,

$$x = ON \cos \alpha = \frac{R + r}{2} \cos \alpha.$$

Del triángulo CPD tenemos:

$$h = CD \cos \alpha = \sqrt{(R - r)^2 + CP^2} \cos \alpha.$$

---

*) De la igualdad obtenida más arriba $R + r = l$ se desprende que $2R + 2r = l + l$. Esto significa que las sumas de los lados opuestos del cuadrilátero examinado son iguales. Esto último, ya es suficiente para que en el cuadrilátero se pueda inscribir una circunferencia. Sin embargo, nosotros no nos basamos en este hecho.

Pero, puesto que según la condición del problema $CP^2=4Rr$, entonces,

$$h=\sqrt{(R-r)^2+4Rr}\cos\alpha=(R+r)\cos\alpha.$$

Así pues, $x=\frac{h}{2}$, lo que era necesario demostrar.

503. Sea SD la altura de la pirámide $SABC$, O el punto medio de la altura, y E el punto medio del segmento BC cuya longitud designaremos por a (fig. 214)

Tenemos:

$$DE=\frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$SD=\sqrt{SE^2-DE^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3};$$

$$OD=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

De aquí,

$$OE=\sqrt{OD^2+DE^2}=\frac{a}{2}.$$

Por consiguiente, $OE=BE=EC$ y, por lo tanto, $\angle BOC=90°$

504. Sea a el lado de la base de la pirámide dada $SABCD$, α el ángulo diedro formado por la cara lateral y la base, y H la altura SO de la pirámide (fig. 215) Entonces,

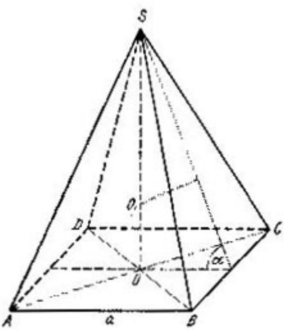

FIG 215

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Además (véase la fórmula (I) en la resolución del problema 481),

$$R=\frac{H^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2H}.$$

Por consiguiente,

$$R=\frac{a}{4}\,\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+2}{\operatorname{tg}\alpha}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{R}{r}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+2}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Haciendo $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=x$, obtenemos:

$$\frac{R}{r}=\frac{1+x^4}{2x^2(1-x^2)}.$$

Suponiendo, además, que sea $x^2=t$, reduciremos el problema a la demostración de la desigualdad

$$\frac{1+t^2}{2t(1-t)}\geqslant 1+\sqrt{2}\quad \text{siendo } 0<t<1.$$

Multiplicando ambas partes de la desigualdad por el denominador y abriendo los paréntesis, obtenemos la desigualdad

$$(2\sqrt{2}+3)\,t^2-2(\sqrt{2}+1)\,t+1\geqslant 0$$

para un trinomio cuadrado. Calculando el descriminante del trinomio, descubrimos que es igual a cero. Por consiguiente, el trinomio no varía de signo cualesquiera que sean los valores de t. Puesto que siendo $t=0$ el trinomio es positivo, la desigualdad queda demostrada.

505. Las pirámides $ASBC$ y $OSBC$ tienen la base SBC común (fig. 216), por lo cual sus volúmenes son entre sí como las alturas bajadas a su base común. Puesto que $OA' \parallel AS$, la relación de las alturas de las pirámides $ASBC$ y $OSBC$, bajadas a la base

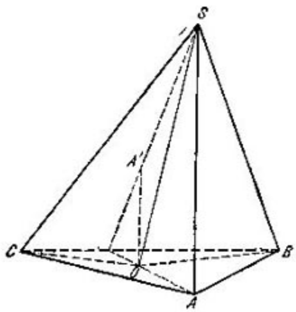

FIG. 216

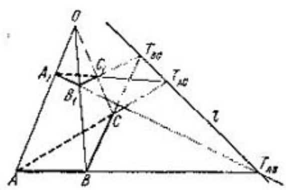

FIG. 217

SBC, es igual a la relación de SA a OA'. Por consiguiente, la relación de sus volúmenes es

$$\frac{V_{OSBC}}{V_{ASBC}}=\frac{OA'}{SA}.$$

Análogamente,

$$\frac{V_{OSCA}}{V_{ASBC}}=\frac{OC'}{SC},\qquad \frac{V_{OSAB}}{V_{ASBC}}=\frac{OB'}{SB}.$$

Sumando estas igualdades, obtenemos:

$$\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=1.$$

506. Sea P el plano del triángulo ABC, P_1 el plano del triángulo $A_1B_1C_1$, y l la línea de intersección de P con P_1 (fig. 217). Designemos por Q_{AB} el plano que pasa por A, B y O. La recta A_1B_1 se encuentra en el plano Q_{AB} y, siendo no paralela a la recta AB, se cruza con ésta en el punto T_{AB}. Este punto se encuentra en los planos P y P_1 y, por lo tanto, sobre la recta l. Análogamente, demostraremos que las rectas BC y B_1C_1 se cruzan en el punto T_{BC} que se encuentra sobre l, y las rectas AC y A_1C_1 se intersecan en el punto T_{AC} que se encuentra también sobre l.

507. Sea O_1 el centro de gravedad de la cara ASC, y BO_1 uno de los segmentos examinados en el problema. Tomemos otra cara cualquiera, por ejemplo, la BSC; designemos su centro de gravedad por O_2 y demostremos que el segmento AO_2 intersecará al segmento BO_1 y que el punto de intersección de estos segmentos O divide al segmento BO_1 en la relación de 1:3, contando desde el punto O_1. En efecto, si M_1 y M_2 son los puntos medios de los segmentos AC y BC (fig. 218), entonces, es evidente que $AB \parallel M_1M_2$; es fácil también ver que $O_1O_2 \parallel M_1M_2$, ya que los puntos O_1 y O_2 dividen respectivamente a los segmentos M_1S y M_2S en una misma relación. Por esta razón, $AB \parallel O_1O_2$, la figura ABO_2O_1 es un trapecio y, por lo tanto, sus diagonales BO_1 y AO_2 se intersecarán. Designemos el punto de intersección de las diagonales por O. Tenemos:

$$\frac{M_1M_2}{AB}=\frac{1}{2}; \quad \frac{O_1O_2}{M_1M_2}=\frac{2}{3}.$$

Multiplicando estas igualdades entre si obtendremos que

$$\frac{O_1O_2}{AB}=\frac{1}{3}.$$

Pero, de la semejanza de los triángulos AOB y O_1OO_2 se desprende que

$$\frac{O_1O}{OB}=\frac{O_1O_2}{AB}.$$

Así pues,

$$\frac{O_1O}{OB}=\frac{1}{3},$$

lo que se afirmaba. Si tomamos, ahora, el centro de gravedad en una cara más y trazamos el segmento correspondiente, entonces, en virtud de lo demostrado, éste también intersecará al segmento BO_1 y, además, en el punto que dividirá a BO_1 en la relación de 1:3, es decir, en el punto O. Por consiguiente, todos los segmentos examinados se intersecan en el punto O. Es también evidente, que el punto O divide a cada uno de estos segmentos en la relación de 1:3, lo que había que demostrar.

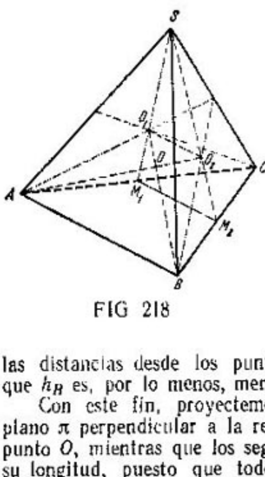

FIG 218

508. Desarrollemos primeramente un razonamiento auxiliar. Supongamos que sean PP_1 y QQ_1 dos rectas que se cruzan, A, B y C tres puntos sobre la recta QQ_1, con la particularidad de que el punto B se encuentre entre los puntos A y C, A_1, B_1 y C_1 los pies de las perpendiculares bajadas desde los puntos A, B y C a la recta PP_1. Designemos por h_A, h_B y h_C las distancias desde los puntos A, B y C hasta la recta PP_1. Demostremos que h_B es, por lo menos, menor que una de las distancias h_A o h_C.

Con este fin, proyectemos la figura representada en la fig. 219 sobre el plano π perpendicular a la recta PP_1. La recta PP_1 tendrá como proyección el punto O, mientras que los segmentos AA_1, BB_1 y CC_1 se proyectan sin variar su longitud, puesto que todos ellos son paralelos al plano π. En este caso, el punto B' resulta entre los puntos A' y C'. Examinando ahora el triángulo $A'OC'$ podemos confirmar que la línea inclinada OB' es menor que una de las líneas inclinadas OA' o OC'. En efecto, bajando desde el punto O una perpendicular a $A'C'$ (en la fig. 219 no se muestra), estableceremos que el punto B' está dispuesto más cerca del pie de la perpendicular que uno de los dos puntos A' o C'. De aquí se desprende que h_B es menor que h_A o que h_C.

Sea, ahora, $ABCD$ una pirámide triangular arbitraria, y EFG una sección triangular tal, que, por lo menos, uno de los vértices F no es vértice de la pirámide. Demostremos que, entonces, el área del triángulo EFG es menor que el área de uno de los triángulos AEG o DEG (fig. 220).

En efecto, los tres triángulos tienen el lado EG común y, según lo demostrado anteriormente, la distancia desde F hasta la recta EG es menor que la distancia desde A o D hasta esta misma recta. Si $S_{\triangle EFG} < S_{\triangle AEG}$, entonces todo queda demostrado. Pero, si $S_{\triangle EFG} < S_{\triangle DEG}$ y, por ejemplo, el punto E no es vértice de la pirámide, entonces, hacemos uso del razonamiento anterior para el $\triangle DEG$, comparando su área con las áreas de los triángulos DGA y BDG. Valiéndonos, en caso de necesidad, una vez más del mismo razonamiento para el $\triangle BDG$, demostremos la afirmación hecha en el problema. De la resolución expuesta, está claro, que si la sección de la pirámide no coincide con su cara, entonces, su área es estrictamente menor que el área de una de las caras.

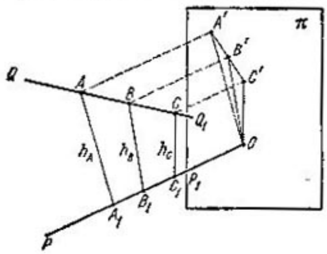

FIG. 219

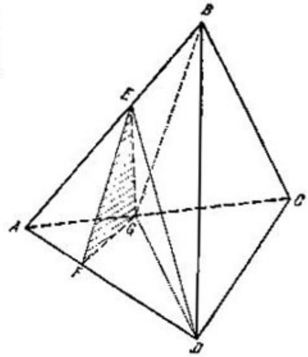

FIG. 220

509. En vez de comparar las sumas de los ángulos planos de los vértices S y S', comparemos entre sí las sumas de los ángulos planos de las caras laterales de ambas pirámides en cada uno de los tres vértices de la base común. Demostremos que cada una de estas sumas de los ángulos de la pirámide exterior es mayor que la suma correspondiente de los angulos de la pirámide interior. Demostremos, por ejemplo, que (fig. 221)

$$\angle ACS + \angle SCB > \angle ACS' + \angle S'CB. \quad (1)$$

De la desigualdad (1) y otras análogas (para los vértices A y B) obtendremos la solución del problema. En efecto, sumando las tres desigualdades indicadas, estableceremos que la suma $\sum$ de todos los seis ángulos planos de las caras laterales en la base de la pirámide exterior es mayor que la suma correspondiente $\sum'$ para la pirámide interior:

$$\sum > \sum'. \quad (2)$$

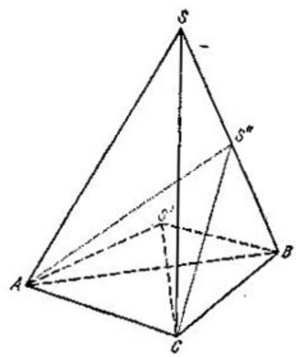

FIG 221

Pero, las magnitudes que nos interesan en el problema suplementan a $\sum$ y $\sum'$ hasta 540° ($= 180° \cdot 3$) y, por consiguiente, para ellas tiene lugar la desigualdad de sentido contrario. Así pues, nos queda demostrar la validez de (1). Prolonguemos el plano ACS' hasta su intersección con la pirámide exterior. Examinando el ángulo triédrico $CS'S''B$, deducimos que

$$\angle S'CS'' + \angle S''CB > \angle S'CB. \quad (3)$$

Adicionando a ambas partes de la desigualdad el $\angle ACS'$, obtendremos:

$$\angle ACS'' + \angle S''CB > \angle ACS' + \angle S'CB. \quad (4)$$

Pero, para el ángulo triédrico $CASS''$ tenemos:

$$\angle ACS + \angle SCS'' > \angle ACS''. \quad (5)$$

Sustituyendo en la desigualdad (4) al $\angle ACS''$ por una magnitud mayor, de acuerdo con (5), obtendremos:

$$\angle ACS + (\angle SCS'' + \angle S''CB) > \angle ACS' + \angle S'CB,$$

es decir, la desigualdad (1).

510. Designemos por O_1, O_2, O_3 y O_4 los centros de las esferas dadas, y por P_{ik} el plano tangente común para las esferas de centros O_i y O_k $(i < k)$. Tales planos son en total seis: P_{12}, P_{13}, P_{23}, P_{14}, P_{24} y P_{34}.

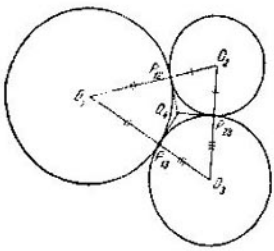

FIG. 222

Demostremos primeramente que los planos P_{12}, P_{13} y P_{23} se cruzan por una recta. En efecto, cada uno de estos planos es perpendicular al plano $O_1O_2O_3$, puesto que éste es perpendicular a la línea de los centros de las esferas divididas por el mismo, que se encuentra sobre este plano.

Además, es fácil ver que los planos que se examinan (fig. 222) pasan por el punto O_4 de intersección de las bisectrices del triángulo $O_1O_2O_3$. Así pues, los planos P_{12}, P_{13} y P_{23} se cruzan, en efecto, por cierta recta que, como hemos establecido de paso, es perpendicular al plano de los centros $O_1O_2O_3$ y pasa por el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo $O_1O_2O_3$. Designemos esta recta por L_4.

Análogamente se demuestra que los planos P_{23}, P_{24} y P_{34} determinan la recta común para ellos L_1 perpendicular al plano del triángulo $O_2O_3O_4$, que

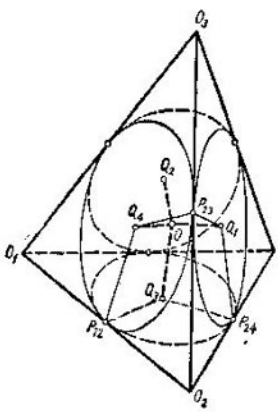

FIG. 223

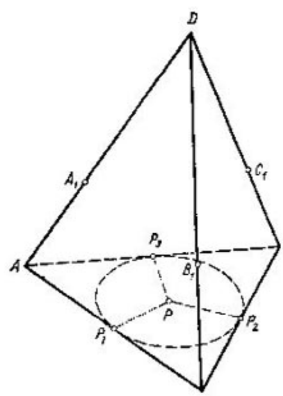

FIG. 224

pasa por el centro de la circunferencia inscrita en este triángulo, y así sucesivamente. Como resultado llegamos al siguiente problema (fig. 223): en cada cara de la pirámide triangular $O_1O_2O_3O_4$ hay inscrita una circunferencia por cuyo centro pasa la perpendicular a la cara. Es necesario demostrar que las cuatro perpendiculares L_1, L_2, L_3 y L_4 tienen un punto común, si se sabe que los puntos de contacto de dos circunferencias con una misma arista coinciden.

Este hecho es casi evidente. Designemos por O el punto de intersección de las rectas L_1 y L_4; estas últimas se intersecan, puesto que se encuentran en un mismo plano P_{23} y no son paralelas. Demostremos, ahora, que las rectas

L_3 y L_2 pasan también por el punto O. En efecto, el punto O se encuentra en la línea de intersección de los planos P_{12} y P_{24}, puesto que la recta L_4 pertenece al plano P_{12}, y la recta L_1, al plano P_{24}. Pero, la línea de intersección de P_{12} con P_{24} es la recta L_3. Por consiguiente, L_3 pasa por el punto O. Análogamente demostramos que la recta L_2 pasa por el punto O

511. Si se conocen tres puntos A, B y C no pertenecientes a una misma recta, entonces, estos puntos son los centros de tres esferas que hacen contacto entre sí de dos en dos. En efecto, si P es el punto de intersección de las bisectrices del $\triangle ABC$, y P_1, P_2 y P_3 son los pies de las perpendiculares bajadas desde P respectivamente a los lados AB, BC y CA, entonces,

$$AP_1 = AP_3, \quad BP_1 = BP_2, \; CP_2 = CP_3$$

y las esferas de centros A, B y C, cuyos radios son respectivamente iguales a

$$r_A = AP_1, \quad r_B = BP_2, \quad r_C = CP_3,$$

hacen contacto entre sí de dos en dos.

Sea $ABCD$ la pirámide dada (fig. 224). Examinemos las tres esferas de radios r_A, r_B y r_C, cuyos centros son A, B y C y que hacen contacto entre sí de dos en dos. Designemos por A_1, B_1 y C_1 los puntos en los cuales las superficies de las esferas se cruzan con las aristas AD, BD y CD, y demostremos que

$$A_1D = B_1D = C_1D.$$

Según la condición del problema

$$AD + BC = BD + AC.$$

De acuerdo con la construccion tenemos que

$$AD = r_A + A_1D; \quad BC = r_B + r_C;$$
$$BD = r_B + B_1D; \quad AC = r_A + r_C.$$

Colocando las últimas cuatro expresiones en la igualdad anterior, obtendremos:

$$A_1D = B_1D.$$

Análogamente, valiéndonos de la igualdad

$$BD + AC = CD + AB,$$

hallaremos:

$$B_1D = C_1D.$$

Por consiguiente, la esfera de centro D y de radio

$$r_D = A_1D = B_1D = C_1D$$

hace contacto con cada una de las tres primeras esferas y, por lo tanto, las cuatro esferas construidas hacen contacto entre sí de dos en dos.

512. Designemos los radios de las esferas por r_1, r_2 y r_3, y sea $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$. Tracemos un plano tangente a las dos primeras esferas. Además, tracemos por los centros de estas esferas un plano perpendicular al plano tangente y examinemos la circunferencia de radio r que hace contacto con las dos circunferencias grandes obtenidas en la sección y con su recta tangente común (fig. 225). La tercera esfera puede, evidentemente, hacer contacto con las dos primeras esferas y con el plano que tiene contacto con ellas, si esta esfera "no es demasiado pequeña", a saber, si $r_3 \geqslant r$. Tenemos (fig. 225) que

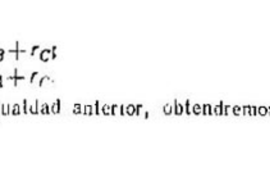

FIG. 225

$$\sqrt{O_1O_2^2 - O_1C^2} = AO + OB$$

o bien

$$\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=\sqrt{(r_1+r)^2-(r_1-r)^2}+\sqrt{(r_2+r)^2-(r_2-r)^2}.$$

De esta ecuación, hallaremos:

$$r=\frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}.$$

Por consiguiente, los radios de las esferas deberán satisfacer la relación

$$r_3\geqslant\frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$$

513. Supongamos que el número de caras laterales de la pirámide sea igual a n. Unamos el punto arbitrario O, tomado en el plano de su base, con todos los vértices y examinemos n pirámides triangulares con un vértice común en el punto O. Es evidente que el volumen V de la pirámide dada es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides triangulares obtenidas. Tenemos:

$$V=\frac{1}{3}S(r_1+r_2+\ldots+r_n),$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las distancias desde el punto O hasta las caras laterales, y S el área de la cara lateral.

Por consiguiente, $r_1+r_2+\ldots+r_n=\frac{3V}{S}$ es una magnitud constante que no depende de la posición del punto O en el plano de la base, lo que era necesario demostrar.

514. Examinemos los dos planos sombreados en la fig. 226 y el triángulo ADE en el plano P que pasa por los vértices A, D, H y E del paralelepípedo dado. El plano P corta al plano del $\triangle BCD$ por la recta KD que pasa por

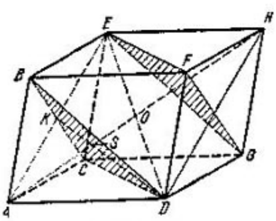

FIG. 226

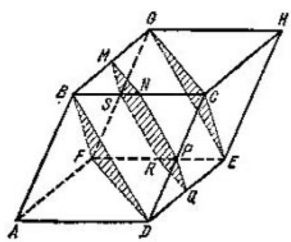

FIG. 227

el punto K de intersección de las diagonales del paralelepípedo $ABEC$, y, por consiguiente, el segmento KD es una mediana del $\triangle AED$. Es evidente, que AO es tambien una mediana del $\triangle AED$. Por esta razón, el punto S que nos interesa, es el punto de intersección de las medianas del $\triangle AED$ y, por lo tanto,

$$AS=\frac{2}{3}AO=\frac{1}{3}AH,$$

con lo cual el problema queda demostrado.

515. Tracemos el plano indicado en el problema por los vértices B, D y F (fig. 227) y otro plano, paralelo al primero, por los vértices C, E y G. Ambos planos forman en su intersección con el paralelepípedo triángulos equiláteros iguales. Designemos la longitud de cado lado de estos triángulos por a. Si, ahora, trazamos por el punto medio de una de las seis aristas que unen los vértices de los dos triángulos mencionados, por ejemplo, por el punto medio N de la arista BC, un plano paralelo a los planos indicados, éste dará en la sección con el paralelepípedo el hexágono $MNPQRS$, todos los lados del cual, evidentemente, resultarán iguales a $\frac{a}{2}$. Observemos, además, que $MN \parallel DF$ y $NP \parallel BD$. Por esta razón, el $\angle MNP$ complementa al $\angle BDF$ hasta 180° y, por consiguiente, el $\angle MNP = 120°$. Análogamente establecemos que los demás ángulos del hexágono son también iguales a 120°.

516. Sea $SABC$ el tetraedro dado, P y Q los puntos medios de las aristas opuestas AC y SB, $MPNQ$ cierta sección del tetraedro en la que se encuentra el segmento PQ (fig. 228). Examinemos la sección plana SPB que, evidentemente, divide al tetraedro en dos partes

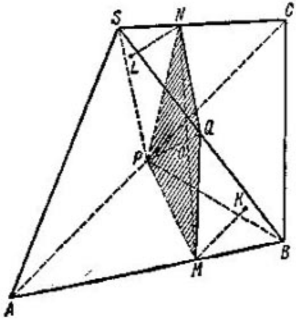

FIG. 228

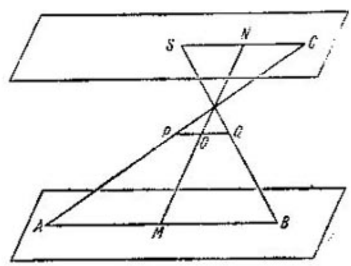

FIG. 229

equidimensionales. El problema quedará solucionado si demostramos que las pirámides $SPQN$ y $MPQB$ son equidimensionales.

Bajemos sobre el plano SPB las perpendiculares desde los puntos M y N y designemos sus pies respectivamente por K y L. Puesto que los triángulos PQB y SPQ son equidimensionales, entonces, para resolver el problema es suficiente demostrar que $LN = MK$. Estableceremos esta igualdad al demostrar que

$$MO = NO. \qquad (1)$$

Examinemos, con este fin, un par de planos paralelos en los que se encuentran las rectas que se cruzan SC y AB (fig. 229). Dado que el segmento PQ une los puntos medios de los segmentos AC y SB, él, evidentemente, está dispuesto en un plano paralelo a los planos dados y que equidista de éstos. En virtud de esto, el segmento MN, al intersecarse con el segmento PQ, será dividido por el punto de intersección por la mitad.

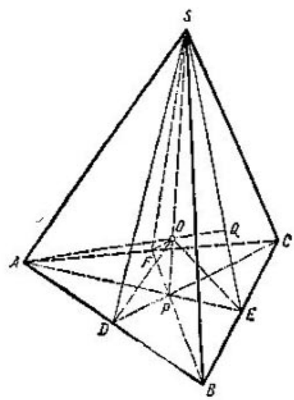

FIG. 230

517. Sea $SABC$ la pirámide dada (fig. 230). Bajemos desde el vértice S la altura SP de la cara ABC, y las alturas SD, SE y SF de las tres caras restantes. Es fácil ver, que los triángulos SPD, SPE y SPF, en virtud de la igualdad de los ángulos SDP, SEP y SFP, son iguales entre sí (compárese con el problema 458). Tracemos, a continuación, por las aristas AB, BC y AC planos que dividan los correspondientes ángulos diedros por la mitad. Estos planos se intersecan en el punto O equidistante de las cuatro caras de la pirámide y, por consiguiente, que es el centro de la esfera inscrita en la pirámide. Es fácil ver, que en el caso que se examina, en virtud de la igualdad indicada de los triángulos, el punto O resultará sobre la altura SP de la pirámide. Repitiendo los razonamientos, estableceremos que todas las alturas de la pirámide se intersecan en el punto O. Valiéndonos de este hecho, podemos afirmar que, por ejemplo, los triángulos APS y SPE se encuentran en un mismo plano y, por consiguiente, los segmentos AP y PE pertenecen a una misma recta. Por eso, AE es simultáneamente la bisectriz y la altura del $\triangle ABC$. Por la misma causa, las demás bisectrices del $\triangle ABC$ son al mismo tiempo sus alturas. Por consiguiente, el $\triangle ABC$ es equilátero. Repitiendo los razonamientos, estableceremos que todas las caras de la pirámide representan triángulos equiláteros, con lo cual el problema queda demostrado.

518. Supongamos que el segmento AB se encuentra en el plano Q, y el segmento CD, en el plano P, y sea $P \| Q$ (fig. 231). Tracemos por el punto A una recta paralela a CD y tracemos el segmento $AA_1 = CD$. A base de los lados

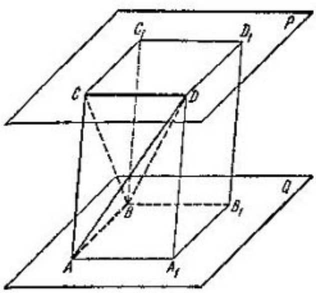

FIG 231

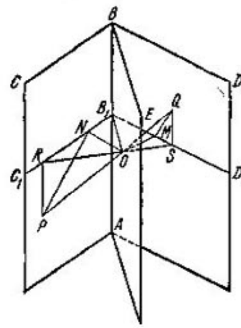

FIG. 232

AB y AA_1 construyamos el paralelogramo ABB_1A_1. Realicemos una construcción análoga en el plano P. Uniendo A con C, B con C_1, A_1 con D y B_1 con D_1 obtendremos el paralelepípedo $ABB_1A_1DCC_1D_1$. Examinando la cara ACB como base de la pirámide $DACB$, observamos que el volumen de la pirámide es igual a $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo. Puesto que, sin embargo, el volumen del paralelepípedo no varía al trasladar los segmentos (no varían ni el área de la base ABB_1A_1, ni la altura, es decir, la distancia entre los planos P y Q), entonces, tampoco varía el volumen de la pirámide.

519. Sean P y Q los puntos de intersección de la recta dada con las caras CBA y DBA del ángulo diedro (fig. 232). Tracemos por la arista AB el plano bisector ABE y, luego, por el punto O de su intersección con la recta PQ, tracemos el plano $C_1B_1D_1$ perpendicular a la arista AB. Sea, a continuación, $OM \perp B_1D_1$, $ON \perp B_1C_1$ y SR la proyección de PQ sobre el plano $D_1B_1C_1$ de tal modo que $QS \perp B_1D_1$ y $PR \perp B_1C_1$. Si los puntos P y Q equidistan de la arista, es decir, si

$$B_1R + B_1S, \tag{1}$$

entonces, el triángulo B_1RS es isósceles, $SO = RO$ y, por consiguiente, $QO = PO$, como líneas inclinadas que tienen iguales proyecciones. Teniendo en cuenta, además, que según la construcción

$$MO = NO, \tag{2}$$

podemos deducir que los triángulos OMQ y ONP son rectángulos e iguales. De aquí se desprende la igualdad de los ángulos:

$$\angle MQO = \angle NPO. \tag{3}$$

Así pues, en un sentido la afirmación queda demostrada.

Si, ahora, al contrario, se cumple la igualdad de los ángulos (3), entonces, en virtud de (2), tiene lugar la igualdad de los triángulos QMO y PNO. Como consecuencia de esto, $QO = PO$ y, por lo tanto, $SO = OR$. De aquí se desprende ya la igualdad (1).

520. Unamos los puntos B y C, A y D con segmentos de rectas (fig. 233). Tracemos por el punto A una recta paralela a MN hasta que se encuentre en el punto K con la recta que pasa por los puntos B y N. Observemos que $AK = 2MN$, puesto que MN es la media del triángulo ABK. Luego,

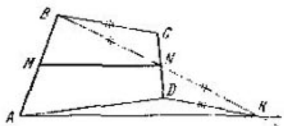

FIG. 233

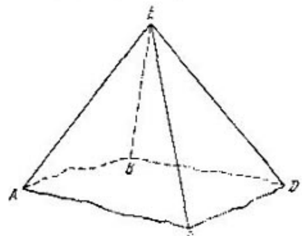

FIG. 234

$\triangle BNC = \triangle KND$, ya que $BN = NK$, $CN = ND$ y $\angle BNC = \angle KND$. Por eso, $DK = BC$. Del triángulo ADK se desprende:

$$DK + AD > AK = 2MN$$

(aquí tiene importancia que D no se encuentra sobre la recta AK, de lo contrario, tendríamos que haber puesto el signo $\geqslant$). Así pues,

$$BC + AD > 2MN,$$

lo que era necesario demostrar.

521. Sean A, B C y D puntos arbitrarios que se encuentran en las aristas del ángulo tetraédrico con el vértice E (fig. 234). Demostremos, por ejemplo, que

$$\angle CED < \angle CEA + \angle AEB + \angle BED. \tag{1}$$

Tracemos el plano CEB. Según la propiedad de los ángulos planos de un angulo triédrico

$$\angle CED < \angle CEB + \angle BED \tag{2}$$

y por la misma causa

$$\angle CEB < \angle CEA + \angle AEB. \tag{3}$$

De las desigualdades (2) y (3) se desprende (1). De este modo, la desigualdad (1) queda demostrada.

Es fácil comprender que nuestro razonamiento conserva su vigor también para el caso cuando el ángulo tetraédrico no es convexo, es decir, cuando la arista ED resulta al otro lado del plano CEB.

522. Supongamos que sea dado el ángulo tetraédrico convexo con el vértice S (fig. 235). Prolonguemos los planos BSC y ASD hasta que se crucen por la recta l_1. Luego, prolonguemos los planos ASB y DSC hasta que se crucen por la recta l_2. Las rectas l_1 y l_2, evidentemente, no coinciden (de lo contrario, todas las caras en su prolongación pasarian por una misma recta). Designemos por P el plano en el que se encuentran las rectas l_1 y l_2. Valiéndonos de la convexidad del ángulo tetraédrico, es fácil demostrar que el plano P tiene solamente un punto común con el ángulo dado, el punto de intersección S, de modo que todo el ángulo se encuentra a un lado del plano P (este hecho es casi evidente). Demostremos, ahora, que todo plano que corte al ángulo tetraédrico y que sea paralelo al plano P, formará en la sección con este ángulo un paralelogramo. En efecto, en virtud de lo expuesto, tal plano cortará a las cuatro aristas del ángulo tetraédrico. Designando los respectivos puntos de

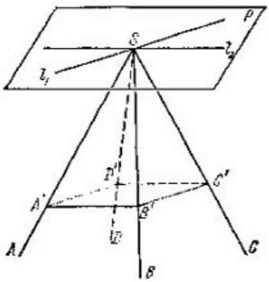

FIG 235

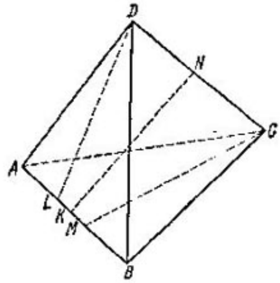

FIG. 236

intersección por A', B', C' y D', observemos que $A'D' \parallel B'C'$, puesto que estos dos segmentos son por separado paralelos a l_1; por la misma causa $A'B' \parallel D'C'$.

Por consiguiente, el cuadrángulo $A'B'C'D'$ es un paralelogramo, lo que era necesario demostrar.

523. Sean DL y CM las alturas de los triángulos ADB y ACB, bajadas a su base común AB (fig. 236). Dado que estos triángulos son equidimensionales, entonces, $DL=CM$ Supongamos, además, que sea KN la perpendicular común a las aristas que se cruzan AB y DC.

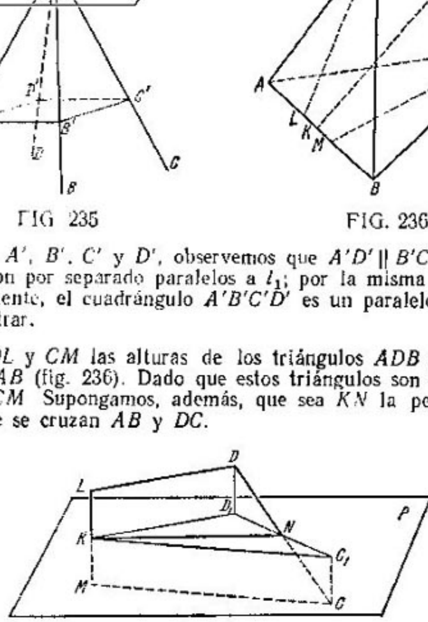

FIG. 237

Tracemos por el segmento KN el plano P perpendicular a la arista AB. Proyectemos el cuadrilátero $LMCD$ sobre el plano P (fig. 237). Puesto que los segmentos DL y CM se proyectan sin que varíen sus longitudes (ambos son paralelos al plano P), y el segmento LM tiene como proyección un punto, en la proyección se obtiene el triángulo isósceles KD_1C_1. Según la construcción tenemos que $KN \perp DC$, por consiguiente, $KN \perp D_1C_1$ y, por lo tanto, KN es la altura del $\triangle KD_1C_1$. Por eso, N es el punto medio del segmento D_1C_1 y, por lo tanto, también del segmento DC.

De este modo, para las condiciones del problema, el pie de la perpendicular común a dos aristas que se cruzan de la pirámide divide a estas aristas por la mitad.

De la fig. 237 es fácil observar que $LK=KM$, puesto que $DD_1=CC_1$. Por eso (véase la fig. 236) $AL=BM$ y de la igualdad de los triángulos rectángulos ALD y BMC se desprende que

$$AD=BC.$$

Análogamente se demuestra que $AC = BD$ y que $AB = DC$. Por consiguiente, todas las caras son iguales entre sí, como triángulos que tienen tres lados iguales.

3. Lugar geométrico de los puntos

524. Sea P uno de los planos que pasa por el punto dado A, y M la proyección del punto dado B sobre el plano P. Supongamos, a continuación, que sea C el punto medio del segmento AB (fig. 238). Puesto que el triángulo AMB es rectángulo, entonces, $CM = \frac{1}{2} AB$. De este modo, todos los puntos M

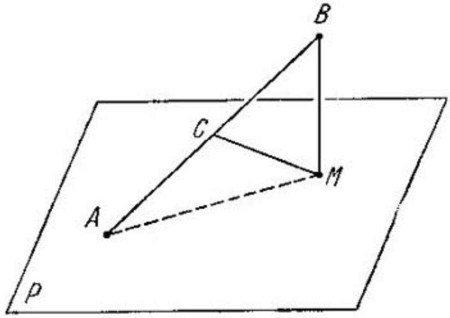

FIG. 238

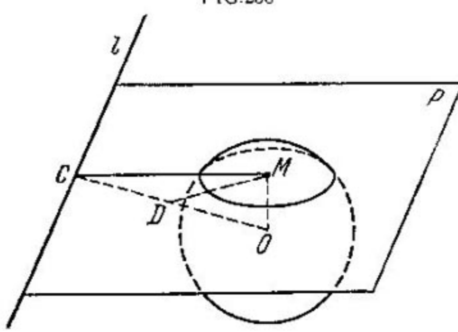

FIG. 239

se encuentran a una misma distancia $\frac{1}{2} AB$ del punto C y, por consiguiente, están dispuestos en una esfera de radio $\frac{1}{2} AB$ cuyo centro es el punto C. Es fácil ver, además, que cualquier punto de dicha esfera coincide con una de las proyecciones del punto B. Así pues, el lugar geométrico buscado es una esfera cuyo diámetro es AB.

525. Sea O el centro de la esfera dada. Tracemos por la recta dada l cierto plano P que corta a la esfera por una circunferencia con centro en el punto M (fig. 239). Como es sabido, $OM \perp P$. Tracemos, a continuación, por el punto O el plano P_1 perpendicular a la recta l. Designemos el punto de intersección del plano P_1 con la recta l por C. Dado que los planos P_1 y P son perpendiculares, el segmento OM se encontrará en el plano P_1. Examinemos, ahora, el triángulo rectángulo OMC. El punto C no depende de la elección del plano secante P, y la hipotenusa OC del triángulo rectángulo OMC es una magnitud constante. Si D es el punto medio de OC, entonces $MD=\frac{OC}{2}$. Por consiguiente, si l no tiene puntos comunes con la esfera, el lugar geométrico buscado es una parte del arco de una circunferencia de radio $\frac{OC}{2}$, encerrada dentro de la esfera (el arco se encuentra en el plano P_1 y pasa por el centro de la esfera). Si l tiene contacto con la esfera, el lugar geométrico buscado será una circunferencia de radio $\frac{R}{2}$, donde R es el radio de la esfera. Si, por fin, l cruza a la esfera, el lugar geométrico de los puntos M será una circunferencia de radio $\frac{OC}{2}$.

526. El lugar geométrico buscado es una superficie de revolución, obtenida como resultado de la rotación del arco de una circunferencia o de toda la circunferencia (véase la resolución del problema anterior) alrededor de su diámetro OC.

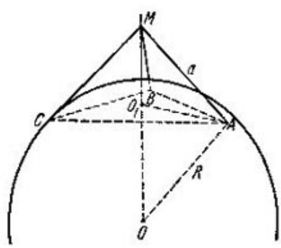

FIG 240

527. Demostremos que el lugar geométrico buscado es una esfera de radio $R\frac{\sqrt{6}}{2}$ y que el centro de esta esfera coincide con el centro de la esfera dada.

Sea M un punto arbitrario del lugar geométrico buscado, los segmentos MA, MB y MC (fig. 240), por ser segmentos tangentes a la esfera, trazados desde un mismo punto, son iguales entre sí. Por eso, los triángulos rectángulos AMC, CMB y AMB son también iguales. Por consiguiente, el $\triangle ABC$ es equilátero. Es evidente, que el segmento OM cortará a este triángulo en su centro de gravedad O_1. Sea $AM=a$, entonces

$$AC=a\sqrt{2} \quad \text{y} \quad AO_1=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Colocando estos valores en la igualdad

$$OM\cdot AO_1=OA\cdot AM$$

(aquí nos valemos de que el $\triangle OAM$ es rectángulo y escribimos su área por dos métodos), obtendremos:

$$OM\cdot a\frac{\sqrt{6}}{3}=Ra.$$

De aquí,

$$OM=\frac{\sqrt{6}}{2}R.$$

Así pues, el punto M se encuentra en la esfera mencionada más arriba. Girando la esfera dada junto con las tangentes AM, CM y BM alrededor del centro O, nos convenceremos de que cualquier punto de la esfera pertenece al lugar geométrico examinado.

528. Designemos el punto dado del espacio por A, el punto de intersección de las rectas por B, y el pie de la perpendicular bajada desde A al plano por C. Tomemos, a continuación, cualquier recta que pase por el punto B y bajemos a esta recta la perpendicular AD (fig. 241). Entonces, por el teorema conocido, $CD \perp BD$.

Por consiguiente, el punto D se encuentra sobre una circunferencia cuyo diámetro es el segmento BC. Es fácil demostrar que también, al contrario, cualquier punto de la circunferencia indicada es el pie de la perpendicular bajada desde el punto A a cierta recta de la familia examinada. Por eso, el lugar geométrico buscado es una circunferencia de diámetro BC.

529. Son posibles dos casos. 1) La recta AB no es paralela al plano examinado P. Designemos por D el respectivo punto de intersección de AB con P (fig. 242). Sea M el punto de tangencia del plano con una de las esferas del conjunto examinado. Tracemos un plano por las rectas AB y DM. Este plano cortará a la esfera por una circunferencia que hace con-

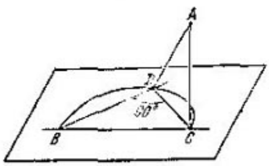

FIG. 241

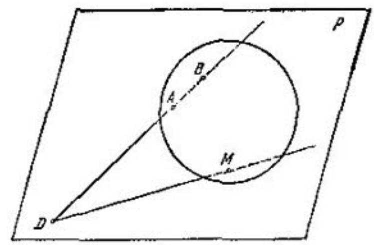

FIG. 242

tacto con la recta DM en el punto M. Por la conocida propiedad de la tangente y la secante trazadas desde un mismo punto a una circunferencia, tenemos:

$$DB \cdot DA = DM^2.$$

Por consiguiente, el segmento DM tiene una longitud constante igual a $\sqrt{BD \cdot DA}$, que no depende de la elección de la esfera y, por lo tanto, todos los puntos M se encuentran en una circunferencia de radio $r = \sqrt{DB \cdot DA}$ cuyo centro es el punto D. Designemos esta circunferencia por C. Supongamos, ahora, lo contrario, que M es cierto punto de la circunferencia C; demostremos que este punto pertenece al lugar geométrico examinado.

Tracemos por los puntos A, B y M una circunferencia auxiliar y designemos su centro por O_1 (fig. 243). Puesto que en las condiciones del problema $DB \cdot DA = DM^2$, entonces, la recta DM es tangente a esta circunferencia y, por consiguiente, $O_1M \perp DM$. Levantemos, ahora, en el punto M una perpendicular al plano P, y en el punto O_1, una perpendicular al plano de la circunferencia auxiliar. Estas dos perpendiculares se encuentran en un plano perpendicular a la recta DM en el punto M, y no son paralelas (en el caso contrario, el punto O_1, y junto con éste los puntos A y B, se encontrarían en el plano P). Por esta razón, estas perpendiculares se intersecan en cierto punto O. Es fácil ver, que $OA = OB = OM$, puesto que las proyecciones de estos segmentos O_1A, O_1B y O_1M son iguales entre sí como radios de una circunferencia. Por eso, si se construye una esfera de radio OM, cuyo centro sea el punto O, entonces, esta esfera hará contacto con el plano P y pasará por los puntos A y B. De este modo, al contrario, cualquier punto de la circunferencia C pertenece a nuestro lugar geométrico. Por consiguiente, el lugar geométrico buscado es la circunferencia C.

2) En el caso, cuando la recta AB es paralela al plano, el lugar geométrico buscado representa una recta que se encuentra en el plano P y que es perpendicular a la proyección del segmento AB sobre el plano P y la divide por la mitad.

530. Caso a). Sea D el punto medio del segmento AB (fig. 244), C el punto móvil, Q el centro de gravedad del $\triangle ABC$, y Q' el centro de gravedad del

$\triangle ASB$. Puesto que el punto Q divide al segmento DC en la relación de 1:2, el lugar geométrico de estos puntos es, evidentemente, un rayo paralelo a la arista SE, que pasa por el punto Q', o sea, por el centro de gravedad del $\triangle ASB$.

Caso b). Si, ahora, es el punto B el que se desplaza por e la arista SG, entonces, los centros de gravedad Q' de los triángulos ASB se encontrarán sobre un rayo paralelo a la arista SG, que pasa por el punto Q'' que divide al

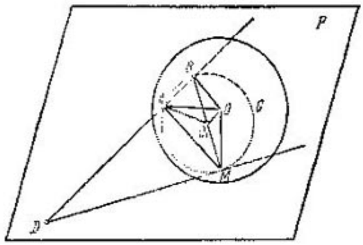

FIG. 243

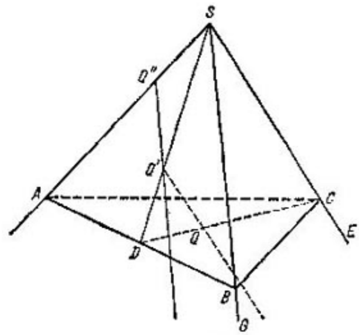

FIG. 244

segmento AS en la relación de 2:1, contando de A a S, y los rayos examinados en el caso a), correspondientes a cada posición fijada del punto B, llenarán la sección del ángulo triédrico con un plano que pasa por el punto Q'' paralelamente a las aristas SG y SE.

4. Valores máximos y mínimos

531. Sin derogar la comunidad, se puede considerar, que el plano secante se cruza con e la arista CE del cubo (fig. 245). Es fácil ver, que en la sección se obtiene siempre cierto paralelogramo $AMBN$. El área S del paralelogramo puede ser hallada por la fórmula

$$S = AB \cdot MK,$$

FIG 245

donde por MK se ha designado la perpendicular bajada desde el punto M de la arista CE a la diagonal AB. Así pues, el área S será mínima junto con la longitud del segmento MK. Pero, entre los segmentos que unen los puntos de las rectas que se cruzan CE y AB, la menor longitud la tiene la perpendicular común a estas rectas. No es difícil comprender, que la perpendicular común a dichas rectas es el segmento $M'O$ que une el punto medio de la arista CE y de la diagonal AB. En efecto, el $\triangle AM'B$ es isósceles y por eso $M'O \perp AB$. Puesto que también el $\triangle COE$ es isósceles, $M'O \perp CE$. Así pues, la sección de menor área es la sección que divide a la arista CE por la mitad; el área correspondiente S es

$$S = a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Este mismo problema puede ser resuelto de otra manera, si se emplea el siguiente teorema: el cuadrado del área de un polígono plano es igual a la suma de los cuadrados de las áreas de sus proyecciones sobre tres planos perpendiculares entre sí. Este teorema se demuestra sin dificultad a base de la fórmula, por la cual el área de la proyección de un polígono plano sobre un plano es igual al área del polígono multiplicada por el coseno del ángulo entre los planos (véase la fórmula (1) en la resolución del problema 456).

Considerando a este teorema demostrado, designemos por x la longitud del segmento CM (véase la fig. 245). Las proyecciones del paralelogramo que nos interesa sobre los planos ACD, $ECDB$ y BDN están representadas en el orden correspondiente en la fig. 246, a, b y c. Las áreas de las proyecciones son respectivamente iguales a a^2, ax y a^2-ax, así que, en virtud del teorema mencionado,

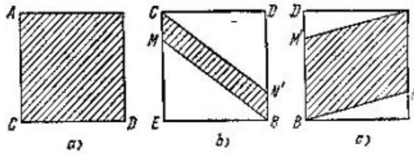

FIG. 246

$$S^2=(a^2)^2+(ax)^2+(a^2-ax)^2=2a^2(x^2-ax+a^2)$$

Representando al trinomio cuadrado x^2-ax+a^2 en la forma

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2,$$

hallamos (compárese con (I), pág. 47) que S^2 tendrá su valor mínimo cuando $x=\frac{a}{2}$, y el valor mínimo del área es

$$S_{\min}=\sqrt{2a^2\,\frac{3}{4}a^2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

532. El cuadrilátero $MNKL$ obtenido en la sección de la pirámide $ABCD$ (fig. 247) es un paralelogramo, puesto que $LK \parallel CD$ y $MN \parallel CD$; por consiguiente, $LK \parallel MN$ y, análogamente, $LM \parallel KN$, si $\angle LKN=\alpha$, entonces, el área del paralelogramo, por la fórmula conocida, es

$$S=KN\cdot KL \operatorname{sen}\alpha.$$

Puesto que $\angle LKN$ es igual al ángulo formado por las rectas que se cruzan AB y CD, el seno de este ángulo es una magnitud constante para todas las secciones paralelas examinadas. De este modo, el área de la sección depende solamente de la magnitud del producto $KN\cdot KL$. Designemos la longitud del segmento AK por x. Entonces, en virtud de la semejanza de los triángulos, tenemos:

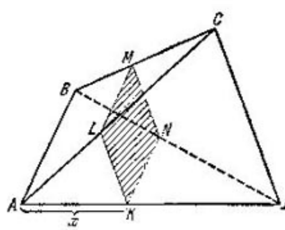

FIG. 247.

$$\frac{KN}{AB}=\frac{AD-x}{AD}; \quad \frac{KL}{CD}=\frac{x}{AD}.$$

Multipliquemos estas igualdades entre sí: $KN\cdot KL=\frac{AB\cdot CD}{AD^2}(AD-x)\,x.$

Dado que $\frac{AB\cdot CD}{AD^2}$ es una magnitud constante, de la fórmula anterior se desprende que el producto que nos interesa $KN\cdot KL$ adquiere su valor máximo junto con el producto $(AD-x)\,x$.

Examinando este producto como el trinomio cuadrado $-x^2+ADx$ y representándolo en la forma

$$-\left(x-\frac{AD}{2}\right)^2+\left(\frac{AD}{2}\right)^2,$$

nos convencemos de que éste alcanza su valor máximo cuando $x=AD/2$ (compárese con (I), pág. 47).

TRIGONOMETRIA

I. Transformación de las expresiones que contienen funciones trigonométricas

533. Empleando la fórmula

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab],$$

obtenemos

$$\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x=(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)[(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)^2-3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x]=$$
$$=1-3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x.$$

534. Designemos la parte izquierda de la identidad por S y sustituyemos el producto $2\cos\alpha\cos\beta$ de la fórmula (14) pág. 79 por la suma $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$. Entonces S se escribirá en la siguiente forma:

$$S=\cos^2\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

Aplicando de nuevo la fórmula (14), hallamos:

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta).$$

Si, ahora, sustituimos $\cos^2\alpha$ por $\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, definitivamente obtendremos:

$$S=\frac{1-\cos 2\beta}{2}=\operatorname{sen}^2\beta,$$

lo que era necesario demostrar.

535. De la fórmula

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

se desprende que

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)[1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta],$$

de donde

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Suponiendo en la ultima igualdad $\alpha=x$, $\beta=2x$, obtenemos la fórmula requerida

536. Tenemos:

$$\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=$$
$$=\operatorname{tg} x\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}=\frac{\operatorname{tg} x(3-\operatorname{tg}^2 x)}{1-3\operatorname{tg}^2 x} \qquad (1)$$

Por otra parte, empleando por segunda vez la fórmula para la tangente de la suma de dos ángulos, hallaremos fácilmente que

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} x\,(3-\operatorname{tg}^2 x)}{1-3\operatorname{tg}^2 x}. \tag{2}$$

Comparando (1) y (2), obtenemos la solución del problema.

Observación: La fórmula (2) puede ser también deducida de las fórmulas (7) y (8) pág. 79.

537. Valiéndonos de las fórmulas para la suma y la diferencia de los senos, representamos la parte izquierda de la identidad en la forma siguiente:

$$2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right].$$

De aquí, empleando la fórmula para la diferencia de los cosenos, obtenemos fácilmente que la parte izquierda de la identidad coincide con la derecha.

538. Utilizando la identidad del problema 537, obtendremos

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=4\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma+\alpha}{2}=4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

puesto que,

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2},\quad \frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2},\quad \frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}.$$

539. Valiéndonos de la identidad indicada en el problema 537, obtendremos:

$$\operatorname{sen} 2n\alpha+\operatorname{sen} 2n\beta+\operatorname{sen} 2n\gamma=$$
$$=4\operatorname{sen} n(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen} n(\beta+\gamma)\cdot\operatorname{sen} n(\gamma+\alpha). \tag{1}$$

A continuación, tenemos que

$$\operatorname{sen} n(\alpha+\beta)=\operatorname{sen} n(\pi-\gamma)=(-1)^{n+1}\operatorname{sen} n\gamma.$$

Transformando análogamente los otros dos factores en la parte derecha de (1), obtenemos la solución del problema.

540. Para la demostración multiplicamos ambos miembros de la igualdad $\cos(\alpha+\beta)=0$ por $2\operatorname{sen}\beta$ y empleamos la fórmula (15) pág. 79.

541. Los valores admisibles de los argumentos se determinan de la condición de que $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)\neq 0$. Observemos que la igualdad

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha, \tag{1}$$

que se necesita demostrar, contiene los argumentos $\alpha+\beta$ y α. Por esta razón, es natural introducir estos mismos argumentos en la igualdad inicial. Tenemos:

$$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha,\qquad 2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha.$$

Colocando estas expresiones para β y $2\alpha+\beta$ en la igualdad inicial

$$3\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}(2\alpha+\beta) \tag{2}$$

y valiéndonos de las fórmulas para el senos de la suma y la diferencia de dos ángulos, transformemos la igualdad (2) a la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\alpha. \tag{3}$$

Dividiendo ambos miembros de (3) por $\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)$, obtendremos (1).

542. Todos los valores de α y β son admisibles, excepto aquellos para los cuales $\cos(\alpha+\beta)=0$ y $\cos\beta=A$. Observando que $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(\alpha+\beta-\beta)$, escribamos la igualdad inicial en la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\beta=A\operatorname{sen}(\alpha+\beta). \qquad (1)$$

Dividiendo ambos miembros de (1) por $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$, obtendremos que $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cos\beta-\operatorname{sen}\beta=A\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Expresando de aquí $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, hallaremos la igualdad requerida.

543. Es fácil comprobar que, en virtud de las condiciones del problema, $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, puesto que de lo contrario tendríamos que $|m|\leqslant|n|$. Por esta razón, la igualdad a demostrar tiene sentido. Representemos esta igualdad en la forma

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{m+n}{m-n}\operatorname{tg}\alpha, \qquad (1)$$

de donde

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{m+n}{m-n}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Sustituyamos en la relación (2) las tangentes de los ángulos α y $\alpha+\beta$ por los senos y cosenos, reduzcamos el quebrado a un denominador común y eliminemos el denominador común. Obtendremos:

$$m[\cos\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta)]-$$
$$-n[\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)]=0 \qquad (3)$$

o bien

$$m\operatorname{sen}\beta-n\operatorname{sen}(2\alpha+\beta)=0. \qquad (4)$$

Así pues, la demostración se reduce a la demostración de la relación (4). Dado que la relación (4) se cumple por las condiciones del problema, entonces tiene lugar (3) y, por consiguiente, también (2).

Pero, de (2) se desprende (1), y de (1) se deriva la relación

$$\frac{1+\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{m-n},$$

que era necesario demostrar.

544. Examinemos la identidad

$$\cos(x+y+z)=\cos(x+y)\cos z-\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}z=$$
$$=\cos x\cos y\cos z-\cos z\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y-\cos y\operatorname{sen}x\operatorname{sen}z-\cos x\operatorname{sen}y\operatorname{sen}z.$$

Puesto que según la condición del problema $\cos x\cos y\cos z\neq 0$, de esta identidad se desprende que

$$\cos(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z\,(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x).$$

545. Primera resolución. Según la condición del problema

$$0<\alpha<\pi,\quad 0<\beta<\pi,\quad 0<\gamma<\pi\quad \text{y}\quad \alpha+\beta+\gamma=\pi. \qquad (1)$$

Por eso, de (1) se desprende que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}. \qquad (2)$$

Por otra parte, por la fórmula de la tangente de la suma, tendremos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}. \qquad (3)$$

Igualando los segundos miembros de las igualdades (2) y (3) y liberándonos de los denominadores, obtenemos la igualdad requerida.

Segunda resolución. De la fórmula

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)=$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

demostrada en el problema anterior, hallamos directamente que

$$1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0,$$

puesto que

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

546. Por el sentido de la expresión que se examina en el problema, $\cos x\cos y\cos z\neq 0$. Por esta razón, de la fórmula obtenida en el problema 544, hallamos:

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x=1-\frac{\cos(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}=1-\frac{\cos\frac{\pi}{2}k}{\cos x\cos y\cos z}.$$

Si k es impar, entonces, la expresión examinada es igual a 1 y no depende de x, y y z. Si k es par, entonces depende de x, y y z.

547. Primera resolución. Observemos, primeramente, que $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\neq 1$, puesto que, en el caso contrario, tendríamos que $\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=0$, lo que es incompatible con la igualdad $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1$. Por esta razón, de la condición del problema se deduce que

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=-\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\operatorname{tg}(-\beta-\gamma),$$

de donde hallamos que $\alpha=k\pi-\beta-\gamma$, es decir, que $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$.

Segunda resolución. En el problema 544 fue demostrada la fórmula para el coseno de la suma de tres ángulos. Análogamente se puede obtener la fórmula

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma),$$

suponiendo que $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\neq 0$. Por esta fórmula hallamos que, según las condiciones de este problema,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)=0,\text{ es decir, }\alpha+\beta+\gamma=k\pi.$$

548. Designemos la suma dada por S. Transformemos los dos primeros sumandos de la forma siguiente:

$$\operatorname{cotg}^2 2x-\operatorname{tg}^2 2x=\frac{\cos^2 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}-\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{\cos^2 2x}=$$
$$=\frac{\cos^4 2x-\operatorname{sen}^4 2x}{\operatorname{sen}^2 2x\cos^2 2x}=\frac{\cos^2 2x-\operatorname{sen}^2 2x}{\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 4x}=\frac{4\cos 4x}{\operatorname{sen}^2 4x}.$$

Por consiguiente,

$$S=\frac{4\cos 4x}{\operatorname{sen}^2 4x}(1-2\operatorname{sen}4x\cos 4x)=\frac{4\cos 4x}{\operatorname{sen}^2 4x}(1-\operatorname{sen}8x).$$

Puesto que $1-\operatorname{sen}8x=2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$, entonces, obtendremos definitivamente:

$$S=\frac{8\cos 4x\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)}{\operatorname{sen}^2 4x}.$$

549. Designemos la expresión que se examina por S. Transformemos los dos primeros sumandos por la fórmula (16) pág. 79, y sustituyamos el producto $\cos\alpha\cos\beta$ por la suma de la fórmula (14) pág. 79, y por fin, sustituyamos $\operatorname{sen}^2\gamma$ por $1-\cos^2\gamma$. Entonces, obtendremos

$$S=-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\cos^2\gamma+[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma.$$

Transformando la suma $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$ en un producto y abriendo los corchetes, obtenemos:

$$S=-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma.$$

Agrupando los sumandos en esta expresión, hallamos que

$$S=-[\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma][\cos(\alpha+\beta)-\cos\gamma].$$

Por consiguiente,

$$S=4\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

550. La expresión que se examina se puede transformar de la manera siguiente (véase (13) pág. 79):

$$\frac{1-4\operatorname{sen}10^\circ\operatorname{sen}70^\circ}{2\operatorname{sen}10^\circ}=\frac{1-2(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ)}{2\operatorname{sen}10^\circ}=\frac{2\cos 80^\circ}{2\cos 80^\circ}.$$

Así pues,

$$\frac{1}{2\operatorname{sen}10^\circ}-2\operatorname{sen}70^\circ=1.$$

551. En virtud de la fórmula (12), expuesta en la pág. 79, la parte izquierda de la identidad es igual a

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}. \tag{1}$$

Multiplicando y dividiendo (1) por $2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}$ y haciendo uso de la fórmula para $\operatorname{sen}2\alpha$, obtendremos:

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}}.$$

Pero,

$$\cos\frac{\pi}{10}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5},$$

y

$$\cos\frac{3\pi}{10}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}.$$

Por consiguiente, la parte izquierda de la identidad es igual a $\frac{1}{2}$.

552. Multiplicando y dividiendo la parte izquierda de la identidad por $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$ y valiéndonos de las fórmulas que expresan el producto de funciones trigonométricas por las sumas, hallaremos:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}+\operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}.$$

De aquí se deduce que la suma examinada es igual a $-\frac{1}{2}$

553. Empleando para todos los sumandos de la suma S que se examina, al principio la fórmula (16), y a continuación la (17) pág. 79 hallaremos que

$$S=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)+$$
$$+\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right)$$

Las sumas entre paréntesis son iguales a cero, puesto que

$$\cos\frac{\pi}{8}=-\cos\frac{7\pi}{8},\quad \cos\frac{3\pi}{8}=-\cos\frac{5\pi}{8},$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=-\cos\frac{3\pi}{4},\quad \cos\frac{5\pi}{4}=-\cos\frac{7\pi}{4}.$$

Por consiguiente, $S=\frac{3}{2}$.

554. Si en la identidad

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha. \tag{1}$$

hacemos $\alpha=20^\circ$ (véase el problema 536), entonces, obtendremos directamente que

$$\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}. \tag{2}$$

Expongamos otra resolución sin emplear la fórmula (1). Transformemos a parte el producto de los senos y los cosenos. Empleando las formulas (13) y (15) pag 79, obtendremos:

$$\operatorname{sen}20^\circ\operatorname{sen}40^\circ\operatorname{sen}80^\circ=\frac{1}{2}(\cos20^\circ-\cos60^\circ)\operatorname{sen}80^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}100^\circ+\operatorname{sen}60^\circ}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}80^\circ\right)$$

Observando que

$$\operatorname{sen} 100^\circ = \operatorname{sen} 80^\circ,$$

hallamos.

$$\operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}. \tag{3}$$

Luego,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{2 \operatorname{sen} 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \operatorname{sen} 20^\circ} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 80^\circ \cos 80^\circ}{4 \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 160^\circ}{8 \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{8 \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Así pues,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}. \tag{4}$$

De (3) y (4) se desprende (2).

2. Ecuaciones trigonométricas y sistemas de ecuaciones

555. La ecuación puede escribirse así:

$$4 \operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 1$$

o bien

$$-2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x = - \operatorname{sen} 4x = 1.$$

Respuesta:

$$x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

556. La ecuación pierde el sentido cuando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, para los demás valores de x es equivalente a la siguiente:

$$\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} 2x$$

Después de simples simplificaciones, obtenemos:

$$\operatorname{sen} x (3 + \operatorname{sen} 2x + \cos 2x) = 0.$$

La ecuación $\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + 3 = 0$, evidentemente, no tiene raices, por eso, la ecuación inicial se reduce a la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$.

Respuesta: $x = k\pi$.

557. La ecuación se puede escribir en la forma siguiente:

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x + \cos x) + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$$

o bien

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)(1 + 2 \cos x) = 0.$$

Igualando cada uno de los paréntesis a cero, hallamos todas las raíces.

Respuesta. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

558. Escribamos la ecuación dada de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen} x + 1 - \cos 2x = \cos x - \cos 3x + \operatorname{sen} 2x.$$

Después de las simplificaciones comprensibles, obtenemos

$$\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen} x\,(1 + 2 \operatorname{sen} x)(1 - 2 \cos x) = 0.$$

Respuesta:

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6}(-1)^{k+1} + k\pi, \quad x_3 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

559. Escribamos la ecuación dada en la forma

$$\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x\right)^2 - \frac{1}{4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{5}{4} = 0$$

o bien

$$4 \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0. \qquad (1)$$

Resolviendo la ecuación cuadrada (1), hallamos:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1, \quad x = \frac{7\pi}{12} + k\pi.$$

La segunda raíz de la ecuación cuadrada (1), igual a $\frac{5}{4}$, no da solución, puesto que $|\cos \alpha| \leqslant 1$.

560. Dividiendo ambos miembros de la ecuación por 2, la reduciremos a la forma

$$\operatorname{sen} 17x + \operatorname{sen}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

de donde

$$2 \operatorname{sen}\left(11x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(6x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Respuesta: $x_1 = -\frac{\pi}{66} + \frac{k\pi}{11}$, $x_2 = \frac{\pi}{36} + \frac{(2k+1)\pi}{12}$.

561. La ecuación dada pierde el sentido cuando $\cos x = 0$; por eso, se puede considerar que $\cos x \neq 0$. Observando que el segundo miembro de la ecuación es igual a $3 \operatorname{sen} x \cos x + 3 \cos^2 x$, y dividiendo ambos miembros por $\cos^2 x$, obtendremos:

$$\operatorname{tg}^2 x\,(\operatorname{tg} x + 1) = 3\,(\operatorname{tg} x + 1),$$

o bien

$$(\operatorname{tg}^2 x - 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0.$$

Respuesta: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

562. Valiéndonos de la fórmula para la suma de los cubos de dos números transformemos el primer miembro de la ecuación de la siguiente manera:

$(\operatorname{sen} x + \cos x)(1 - \operatorname{sen} x \cos x) = \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)(\operatorname{sen} x + \cos x)$. Por consiguiente, la ecuación inicial toma la forma

$$\left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right)(\operatorname{sen} x + \cos x - 1) = 0.$$

El primer paréntesis no se reduce a cero. Por eso, es suficiente examinar la ecuación $\operatorname{sen} x+\cos x-1=0$. Esta última ecuación se reduce a la forma

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Respuesta, $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

563. Empleando las fórmulas conocidas, escribamos la ecuación dada en la forma siguiente:

$$\operatorname{cosec}^2 x-\sec^2 x-\operatorname{cotg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x-\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=-3. \qquad (1)$$

Puesto que

$$\operatorname{cosec}^2 x=1+\operatorname{cotg}^2 x \quad \text{y} \quad \sec^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x,$$

la ecuación (1) se reduce a la forma

$$\operatorname{tg}^2 x=1.$$

Respuesta $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

564. Utilizando la identidad

$$\operatorname{sen}^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\left(\operatorname{sen}^2\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}\right)^2-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}=1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{2}{3}x,$$

transformemos la ecuación a la forma

$$\operatorname{sen}^2\frac{2x}{3}=\frac{3}{4}.$$

Respuesta $x=\frac{3n\pm 1}{2}\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

565. Utilizando la identidad, que figura en la resolución del problema anterior, obtendremos la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 2x+\operatorname{sen} 2x-1=0.$$

Resolviendo esta ecuación, hallamos:

$$\operatorname{sen} 2x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Respuesta: $x=(-1)^k\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{k\pi}{2}$.

566. Escribamos la ecuación dada en la forma

$$(1+k)\cos x\cos(2x-\alpha)=\cos(x-\alpha)+k\cos 2x\cos(x-\alpha) \qquad (1)$$

Dado que

$$\cos x\cos(2x-\alpha)=\frac{1}{2}[\cos(3x-\alpha)+\cos(x-\alpha)],$$

$$\cos(x-\alpha)\cos 2x=\frac{1}{2}[\cos(3x-\alpha)+\cos(x+\alpha)]$$

la ecuación (1) toma la forma

$$k[\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha)]=\cos(x-\alpha)-\cos(3x-\alpha)$$

o bien

$$k\operatorname{sen} x\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(2x-\alpha)\operatorname{sen} x. \qquad (2)$$

La ecuación (2) se descompone en dos:

a) sen $x=0$; entonces $x=l\pi$;
b) sen $(2x-\alpha)=k$ sen α;

entonces

$$x=\frac{\alpha}{2}+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(k\operatorname{sen}\alpha)+\frac{\pi}{2}n.$$

Para que la última expresión tenga sentido, k y α deberán estar enlazadas por la condición

$$|k\operatorname{sen}\alpha|\leqslant 1.$$

567. Dado que los números a, b, c y d son los términos sucesivos de una progresión aritmética, entonces se puede hacer $b=a+r$, $c=a+2r$, $d=a+3r$ (r es la diferencia de la progresión). Empleando la fórmula

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

representemos la ecuación en la forma

$$\cos(2a+r)x-\cos(2a+5r)x=0$$

o bien

$$\operatorname{sen}(2a+3r)x\cdot\operatorname{sen}2rx=0,$$

de donde

$$x_1=\frac{k\pi}{2a+3r},\qquad x_2=\frac{k\pi}{2r}.$$

Las fórmulas escritas tienen sentido, puesto que

$$2a+3r=b+c>0 \quad \text{y} \quad r\neq 0.$$

568. Escribamos la ecuación dada en la forma siguiente:

$$\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-1\right)$$

o, después de simples transformaciones, en la forma

$$\left(\cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\left(3\cos^2\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

La ecuación

$$3\cos^2\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

es equivalente a la siguiente:

$$2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3=0$$

y no tiene soluciones reales.

Respuesta: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

569. Primera resolución. La ecuación pierde el sentido cuando $x=k\pi$, y para los demás valores de x es equivalente a la siguiente:

$$\cos x-\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}x. \tag{1}$$

Sustituyendo el producto que figura en el segundo miembro de (1) por la suma, según la fórmula (13) pág. 79, obtenemos:

$$\cos x - \operatorname{sen} x = \cos x - \cos 3x, \qquad \operatorname{sen} x = \cos 3x,$$

de donde

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

y, por consiguiente,

$$2 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Respuesta

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \\ x_2 &= \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{aligned} \qquad (2)$$

Segunda resolución. Empleando la fórmula (20), pág. 80, y suponiendo que sea $\operatorname{tg} x = t$, obtenemos la ecuación

$$t^3 + 3t^2 + t - 1 = 0.$$

Descomponiendo el primer miembro en factores, obtenemos:

$$(t+1)(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2}) = 0,$$

de donde,

$$(\operatorname{tg} x)_1 = -1, \qquad (\operatorname{tg} x)_2 = \sqrt{2} - 1, \qquad (\operatorname{tg} x)_3 = -1 - \sqrt{2}.$$

Respuesta:

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} + k\pi; \qquad x_2 = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) + k\pi;$$

$$x_3 = -\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) + k\pi.$$

Observación. Las dos últimas series de soluciones se pueden escribir mediante una sola fórmula (2).

570. Aplicando al primer miembro de la ecuación la fórmula (14), pág. 79, obtenemos:

$$\cos(2x - \beta) + \cos\beta = \cos\beta,$$

de donde

$$\cos(2x - \beta) = 0.$$

Por consiguiente,

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi + \frac{\beta}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} \pm \frac{\pi}{4}\right).$$

571. La ecuación inicial se puede escribir en la forma

$$\operatorname{sen}\alpha + [\operatorname{sen}(2\varphi + \alpha) - \operatorname{sen}(2\varphi - \alpha)] = \operatorname{sen}(\varphi + \alpha) - \operatorname{sen}(\varphi - \alpha),$$

o, después de simples transformaciones, en la forma

$$\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos 2\varphi = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\varphi.$$

Suponiendo que $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ (en el caso contrario $\cos\varphi$ es indeterminable), obtenemos:

$$1 + 2\cos 2\varphi - 2\cos\varphi = 0, \qquad 4\cos^2\varphi - 2\cos\varphi - 1 = 0,$$

$$\cos\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Puesto que el ángulo φ se encuentra en el tercer cuadrante, entonces, $\cos\varphi < 0$. Por consiguiente,

$$\cos\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

572. Empleando la fórmula $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$, escribamos la ecuación en la forma

$$\cos 2(\alpha+x) + \cos 2(\alpha-x) = 2a-2$$

o bien

$$\cos 2\alpha \cos 2x = a-1,$$

de donde

$$\cos 2x = \frac{a-1}{\cos 2\alpha}. \qquad (1)$$

Puesto que, por otra parte,

$$\operatorname{cotg} x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}},$$

entonces, de (1) hallamos que

$$\operatorname{cotg} x = \pm\sqrt{\frac{a-1+\cos 2\alpha}{1-a+\cos 2\alpha}}$$

De la fórmula (1) se desprende que el problema tiene sentido cuando $\cos 2\alpha \neq 0$ y $|\cos 2\alpha| \geqslant |a-1|$.

573. Utilizando las fórmulas (18) y (19), pág. 80, reducimos la relación dada $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ a la forma

$$(2+\sqrt{7})\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - (2-\sqrt{7}) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación respecto a $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, obtendremos.

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_1 = \frac{3}{2+\sqrt{7}} = \sqrt{7}-2$$

y

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2 = \frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$

Comprobemos si satisfacen los valores hallados de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ las condiciones del problema

Puesto que $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{8}$, entonces,

$$0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1.$$

El valor

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2 = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$$

satisface la condición del problema, ya que $\frac{\sqrt{7}-2}{3} < \sqrt{2}-1$. La raíz $\sqrt{7}-2$

debe suprimirse, puesto que

$$\sqrt{7}-2 > \sqrt{2}-1.$$

574. Haciendo $\operatorname{sen} x-\cos x=t$ y valiéndonos de la identidad $(\operatorname{sen} x-\cos x)^2=$ $=1-2\operatorname{sen} x\cos x$, escribamos la ecuación inicial en la forma

$$t^2+12t-13=0.$$

Esta ecuacion tiene las raíces $t_1=-13$ y $t_2=1$. Pero, $t=\operatorname{sen} x-\cos x=$ $=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, de donde $|t|\leqslant\sqrt{2}$, por consiguiente, la raíz $t_1=-13$ puede no examinarse. Por esta razón, la ecuación inicial se reduce a la siguiente:

$$\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Respuesta: $x_1=\pi+2k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

575 Transformemos la ecuación dada a la forma

$$2\cos^2\frac{x}{2}(2+\operatorname{sen} x)+\operatorname{sen} x=0.$$

Utilizando la formula $2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x$ y abriendo los paréntesis, obtenemos.

$$2+2(\operatorname{sen} x+\cos x)+\operatorname{sen} x\cdot\cos x=0. \tag{1}$$

Esta ecuacion es del mismo tipo que la del problema 574. Sustituyendo $\operatorname{sen} x+\cos x=t$, la ecuación (1) se lleva a la ecuación cuadrada $t^2+4t+3=0$, cuyas raíces son $t_1=-1$ y $t_2=-3$. Puesto que $|\operatorname{sen} x+\cos x|\leqslant\sqrt{2}$, a la ecuación inicial la pueden satisfacer solamente las raíces de la ecuación

$$\operatorname{sen} x+\cos x=-1. \tag{2}$$

Resolviendo la ecuación (2), obtenemos:

$$x_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$
$$x_2=(2k+1)\pi.$$

La segunda serie de raíces se debe despreciar, puesto que $\operatorname{sen} x_2=0$ y la ecuación inicial pierde el sentido.

Respuesta $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

576. La ecuacion dada pierde el sentido cuando $x=k\pi$, y cuando $x\neq k\pi$ puede ser escrita en la forma

$$\cos^3 x+\cos^2 x=\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen}^2 x.$$

Pasando todos los términos de la ecuación a la parte izquierda y descomponiéndolos en factores, obtenemos:

$$(\cos x-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen} x+\cos x)=0.$$

De aquí se desprenden dos posibilidades:

a) $\operatorname{sen} x-\cos x=0$, entonces,

$$x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi; \tag{1}$$

b) $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen} x+\cos x=0. \quad (2)$

La ecuación (2) es análoga a la examinada en el problema 574 y tiene las soluciones

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (3)$$

y

$$x_3 = (2k+1)\pi \qquad (4)$$

Pero, los valores de x que figuran en la fórmula (4), no son raíces de la ecuación inicial, puesto que, siendo $x = n\pi$ la ecuación inicial pierde el sentido. Por consiguiente, la ecuación tiene las raíces determinadas por las fórmulas (1) y (3).

577. Escribamos la ecuación de la manera siguiente.

$$2\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} + 1\right).$$

Reduciendo los quebrados a un común denominador y liberándonos de este último, obtendremos la ecuación

$$2(\operatorname{sen} 3x \cos 2x - \cos 3x \operatorname{sen} 2x)\cos 2x = \operatorname{sen} 2x(\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x + \cos 2x \cos 3x).$$

Pero, la expresión que figura entre paréntesis en el primer miembro es igual a $\operatorname{sen} x$, y la que figura entre paréntesis en el segundo miembro es igual a $\cos x$. Por esta razón, llegamos a la ecuación

$$2 \operatorname{sen} x(\cos 2x - \cos^2 x) = -2 \operatorname{sen}^3 x = 0,$$

de donde $x = k\pi$.

578. La ecuación dada se puede escribir en la forma

$$3\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} - \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$$

o bien

$$\frac{3 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x} = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x \cos 2x}.$$

Observemos que esta ecuación tiene sentido si

$$\operatorname{sen} 2x \neq 0, \quad \operatorname{sen} 3x \neq 0, \quad \cos 2x \neq 0$$

Para los valores de x, para los cuales la ecuación (1) tiene sentido,

$$3 \operatorname{sen} x \cos 2x = \operatorname{sen} 3x,$$

o bien

$$\operatorname{sen} x(3 - 4 \operatorname{sen}^2 x - 3\cos 2x) = 0,$$

o bien

$$2 \operatorname{sen}^3 x = 0.$$

Puesto que la última ecuación es equivalente a la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$, entonces, en virtud de la observación hecha más arriba, la ecuación inicial no tiene raíces.

579. Escribimos la ecuación en la forma

$$6(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} 3x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 3x,$$

después de lo cual la transformamos de la siguiente manera:

$$6\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$$

o bien

$$\frac{6\cos 2x}{\cos x \operatorname{sen} 3x}=\frac{\cos x}{\cos 2x \operatorname{sen} 3x};$$
$$6\cos^2 2x=\cos^2 x;$$
$$12\cos^2 2x-\cos 2x-1=0.$$

Resolviendo la última ecuación, hallamos

$$\cos 2x=\frac{1\pm 7}{24},$$

de donde

$$1)\ \cos 2x=\frac{1}{3},\qquad x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+k\pi;$$
$$2)\ \cos 2x=-\frac{1}{4},\qquad x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+k\pi.$$

Durante la resolución se realizó la multiplicación de ambos miembros de la ecuación por $\cos x\cos 2x\operatorname{sen} 3x$. Pero, es fácil ver, que para ninguno de los valores hallados de x este producto se reduce a cero. Por consiguiente, todos los valores hallados de x son raíces de la ecuación inicial.

580. Reduciendo los quebrados que figuran en el segundo miembro de la ecuación a un común denominador y empleando la fórmula

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4),$$

obtenemos:

$$\operatorname{sen} x\cos x(\operatorname{sen} x-\cos x)(\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^3 x\cos x+\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x+$$
$$+\operatorname{sen} x\cos^3 x+\cos^4 x)=\operatorname{sen} x-\cos x.$$

De aquí se desprende, que o bien

$$\operatorname{sen} x-\cos x=0, \tag{1}$$

o bien

$$\operatorname{sen} x\cos x(\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^3 x\cos x+\operatorname{sen} x\cos^3 x+\cos^4 x+\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x)-1=0, \tag{2}$$

Transformemos, ahora, la ecuación (2), aprovechando que

$$\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x=(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)^2-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x,$$

y que

$$\operatorname{sen}^3 x\cos x+\cos^3 x\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} x\cos x.$$

Haciendo, además, en la ecuación (2) $\operatorname{sen} x\cos x=y$, escribamos la ecuación (2) en la forma

$$y^3-y^2-y+1=0 \tag{3}$$

o (después de descomponer el primer miembro en factores) en la forma

$$(y-1)^2(y+1)=0.$$

Si $y=1$, es decir, si $\operatorname{sen} x\cos x=1$, entonces, $\operatorname{sen} 2x=2$, lo que es imposible. Si $y=-1$, entonces, $\operatorname{sen} 2x=-2$, lo que es también imposible.

Así pues, la ecuación (2) no tiene raíces. Por consiguiente, las raíces de la ecuación inicial son las raíces de la ecuación (1), es decir, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$.

581. El primer miembro de la ecuación pierde el sentido cuando $x=k\pi$ y cuando $x=\frac{\pi}{2}+m\pi$, puesto que siendo $x=2l\pi$ la función $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ es indeterminada, siendo $x=(2l+1)\pi$ es indeterminada la función $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, y siendo

$x=\frac{\pi}{2}+m\pi$, el denominador del segundo miembro se hace igual a cero. Si $x \neq k\pi$ tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Por consiguiente, si $x \neq k\pi$ y $x \neq \frac{\pi}{2}+m\pi$ (k y m son números enteros arbitrarios), el segundo miembro de la ecuación es igual a $-2\operatorname{sen} x\cos x$.

El primer miembro de la ecuación no tiene sentido cuando $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ y $x=\frac{\pi}{4}+l\cdot\frac{\pi}{2}$ ($l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), y para los demás valores de x, es igual a $-\operatorname{tg} x$, puesto que

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{cotg}\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{cotg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

Así pues, si $x \neq k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}+m\pi$ y $x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$, entonces la ecuación inicial tiene la forma

$$\operatorname{tg} x=2\operatorname{sen} x\cos x.$$

Esta ecuación tiene las raíces

$$x=k\pi \quad \text{y} \quad x=\frac{\pi}{4}+l\frac{\pi}{2}.$$

De aquí se desprende que la ecuación inicial no tiene raíces.

582. Multiplicando el segundo miembro de la ecuación por $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, la llevamos a la forma

$$(1-a)\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x\cos x-(a+2)\cos^2 x=0. \quad (1)$$

Supongamos, al principio, que $a \neq 1$. Entonces, de (1) se desprende que $\cos x \neq 0$, puesto que, en el caso contrario, tendríamos que $\operatorname{sen} x=\cos x=0$, lo cual es imposible. Dividiendo ambos miembros de (1) por $\cos^2 x$ y haciendo $\operatorname{tg} x=t$, obtendremos la ecuación

$$(1-a)t^2-t-(a+2)=0. \quad (2)$$

La ecuación (1) tiene solución cuando, y sólo cuando, las raíces de la ecuación (2) son reales, es decir, cuando su discriminante es

$$D=-4a^2-4a+9\geqslant 0. \quad (3)$$

Resolviendo la desigualdad (3), hallamos:

$$-\frac{\sqrt{10}+1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{10}-1}{2}. \quad (4)$$

Sean t_1 y t_2 las raíces de la ecuación (2). Entonces, las correspondientes soluciones de la ecuación (1) tienen la forma

$$x_1=\operatorname{arctg} t_1+k\pi, \quad x_2=\operatorname{arctg} t_2+k\pi.$$

Examinemos ahora el caso en que $a=1$.

En este caso, la ecuación (1) se escribe en la forma

$$\cos x\,(\operatorname{sen} x+3\cos x)=0$$

y tiene las soluciones siguientes:

$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\qquad x_2=-\operatorname{arctg} 3+k\pi.$$

583 Empleando las fórmulas

$$\operatorname{sen}^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2,\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

y haciendo $\cos 2x=t$, escribamos la ecuación dada en la forma siguiente:

$$t^2-6t+4a^2-3=0. \tag{1}$$

La ecuación inicial tendrá solución solamente para tales valores de a, para los cuales las raíces t_1 y t_2 de la ecuación (1) sean reales y, por lo menos, una de estas raíces, por su valor absoluto, no sea mayor que la unidad.

Resolviendo la ecuación (1), hallamos:

$$t_1=3-2\sqrt{3-a^2},\quad t_2=3+2\sqrt{3-a^2}.$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación (1) son reales si

$$|a|\leqslant\sqrt{3}. \tag{2}$$

Si se cumple la condición (2), entonces $t_2>1$, y por esta razón, esta raíz puede ser despreciada. De este modo, el problema se reduce a la determinación de aquellos valores de a que satisfacen la condición (2), para los cuales $|t_1|\leqslant 1$, es decir, para los cuales

$$-1\leqslant 3-2\sqrt{3-a^2}\leqslant 1. \tag{3}$$

De (3) hallamos que

$$-4\leqslant -2\sqrt{3-a^2}\leqslant -2,$$

de donde

$$2\geqslant\sqrt{3-a^2}\geqslant 1. \tag{4}$$

Puesto que la desigualdad $2\geqslant\sqrt{3-a^2}$ se cumple siendo $|a|\leqslant\sqrt{3}$, entonces, el sistema de desigualdades (4) se reduce a la desigualdad

$$\sqrt{3-a^2}\geqslant 1,$$

de donde hallamos que $|a|\leqslant\sqrt{2}$.

Así pues, la ecuación inicial es soluble si $|a|\leqslant\sqrt{2}$, y tiene la solución

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(3-2\sqrt{3-a^2}\right)+k\pi.$$

584. Transformemos la ecuación dada, multiplicando ambos miembros por $32\operatorname{sen}\frac{\pi x}{31}$. Empleando unas cuantas veces la fórmula $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha$, obtendremos:

$$\operatorname{sen}\frac{32}{31}\pi x=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{31}$$

o bien

$$\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\cos\frac{33}{62}\pi x=0. \tag{1}$$

De aqui hallamos dos series de raíces:

$$x_1=2n, \quad x_2=\frac{31}{33}(2n+1) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Puesto que durante la resolución se realizó la multiplicación de ambos miembros de la ecuación dada por el factor $32 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{31}$, que puede reducirse a cero, la ecuación (1) puede tener raíces ajenas para la ecuación inicial. Serán raíces ajenas únicamente las raíces de la ecuación

$$\operatorname{sen} \frac{\pi x}{31}=0, \tag{2}$$

que no satisfagan a la ecuación inicial.

Las raíces de la ecuación (2) se dan por la fórmula

$$x=31k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{3}$$

y, como es fácil ver, no satisfacen a la ecuación inicial. Por esta razón, de la serie hallada de raíces de la ecuación (1), deben ser excluidas todas aquellas que tienen la forma (3). Para las raíces de la primera serie esto conduce a la ecuación $2n=31k$, que es posible solamente para los valores pares de k, es decir, para $k=2l$ y $n=31l$ $(l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Para las raíces de la segunda serie análogamente obtenemos la igualdad $\frac{31}{33}(2n+1)=31k$ o bien $2n+1=33k$, que es posible únicamente cuando k es impar, o sea, cuando $k=2l+1$ y $n=33l+16$ $(l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Así pues, las raíces de la ecuación inicial son:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=2n, \text{ donde } n \neq 31l, \\ x_2=\frac{31}{33}(2n+1), \text{ donde } n \neq 33l+16. \end{array}\right\} \quad l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

585. Escribamos la ecuación de la manera siguiente:

$$\frac{1}{2}\cos 7x+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 7x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 5x,$$

o bien

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos 7x+\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} 7x=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos 5x+\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen} 5x,$$

es decir,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+7x\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+5x\right).$$

Pero, $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$ cuando, y sólo cuando, o bien $\alpha-\beta=2k\pi$, o bien $\alpha+\beta=(2m+1)\pi$ $(k, m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Por consiguiente,

$$\frac{\pi}{6}+7x-\frac{\pi}{3}-5x=2k\pi$$

o bien

$$\frac{\pi}{6}+7x+\frac{\pi}{3}+5x=(2m+1)\pi.$$

Así pues, las raíces de la ecuación serán:

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}(12k+1), \\ x=\frac{\pi}{24}(4m+1) \end{array}\right\} \quad (k, m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

586. Puesto que el primer miembro de la ecuación es igual a
$2-(7+\operatorname{sen} 2x)(\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^4 x)=$

$$=2-(7+\operatorname{sen} 2x)\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=2-(7+\operatorname{sen} 2x)\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x,$$

haciendo $t=\operatorname{sen} 2x$, escribamos la ecuación en la forma

$$t^3+7t^2-8=0. \qquad (1)$$

La ecuación (1) tiene la raíz evidente $t_1=1$. Sus otras dos raíces se hallan de la ecuación

$$t^2+8t+8=0. \qquad (2)$$

Estas raíces son iguales a

$$-4+2\sqrt{2} \quad \text{y} \quad -4-2\sqrt{2}.$$

Ambos estos valores se pueden despreciar, puesto que en valor absoluto son mayores que la unidad. Por consiguiente, las raíces de la ecuación inicial son las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} 2x=1$.

Respuesta. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$

587. Se puede considerar que $a^2+b^2\neq 0$, puesto que, en el caso contrario la ecuación toma la forma $c=0$ y no permite hallar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Es conocido, que si $a^2+b^2\neq 0$, entonces, siempre existe un ángulo φ, $0\leqslant\varphi<2\pi$, tal, que

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (1)$$

Dividiendo esta ecuación miembro a miembro por $\sqrt{a^2+b^2}$ y utilizando (1), obtenemos la siguiente ecuación equivalente:

$$\operatorname{sen}(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Puesto que siempre $|\operatorname{sen}(x+\varphi)|\leqslant 1$, esta ecuación tiene solución si, y sólo si, $|c|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ o si $c^2\leqslant a^2+b^2$. Esta es precisamente la condición de resolubilidad del problema. A continuación, hallamos:

$$\cos(x+\varphi)=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x+\varphi)}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (3)$$

Observando que

$$\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}(x+\varphi-\varphi)=\operatorname{sen}(x+\varphi)\cos\varphi-\cos(x+\varphi)\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\cos x=\cos(x+\varphi-\varphi)=\cos(x+\varphi)\cos\varphi+\operatorname{sen}(x+\varphi)\operatorname{sen}\varphi,$$

y colocando (2) y (3) en la parte derecha de la expresión (1), definitivamente obtendremos dos soluciones:

$$\text{a)}\ \operatorname{sen} x=\frac{bc-a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},$$

$$\cos x=\frac{ac+b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2};$$

$$\text{b)}\ \operatorname{sen} x=\frac{bc+a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},$$

$$\cos x=\frac{ac-b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

588. Observando que $(b\cos x+a)(b\,\mathrm{sen}\,x+a)\neq 0$ (en el caso contrario, la ecuación pierde el sentido), nos liberamos de los denominadores. Como resultado obtenemos:

$$ab\,\mathrm{sen}^2 x+(a^2+b^2)\,\mathrm{sen}\,x+ab=ab\cos^2 x+(a^2+b^2)\cos x+ab,$$

de donde

$$(a^2+b^2)(\mathrm{sen}\,x-\cos x)-ab(\mathrm{sen}^2 x-\cos^2 x)=0,$$

y la ecuación se descompone en dos

$$1^{\text{a}}.\ \mathrm{sen}\,x=\cos x,\quad \text{de donde } x=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

y

$$2^{\text{a}}.\ \mathrm{sen}\,x+\cos x=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Pero la última ecuación no tiene soluciones, puesto que $\dfrac{a^2+b^2}{|ab|}\geqslant 2$, mientras que

$$|\mathrm{sen}\,x+\cos x|=\sqrt{2}\left|\mathrm{sen}\,x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{2}\left|\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}.$$

Respuesta: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

589. Valiéndonos de la identidad

$$\cos^6 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=\frac{1}{8}(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)$$

y de la fórmula

$$\cos 6x=4\cos^3 2x-3\cos 2x \quad \text{(véase (8), pág. 79),}$$

llevamos la ecuación a la forma

$$4\cos^2 2x+5\cos 2x+1=0. \tag{1}$$

De (1) hallamos que

$$(\cos 2x)_1=-1,\qquad (\cos 2x)_2=-\frac{1}{4}.$$

Respuesta:

$$x_1=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi;$$

$$x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+k\pi.$$

590. Empleando las fórmulas

$$\mathrm{sen}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\ \text{ y }\ \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

representemos la ecuación en la forma

$$(1-\cos 2x)^3+3\cos 2x+2(2\cos^2 2x-1)+1=0,$$

o bien

$$7\cos^2 2x-\cos^3 2x=0,$$

de donde

$$\cos 2x=0,\qquad x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}.$$

591. De las fórmulas para $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$, hallaremos:

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}, \qquad \operatorname{sen}^3 x = \frac{3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{4}.$$

Por consiguiente, la ecuación se puede presentar en la forma

$$\cos 3x(\cos 3x + 3\cos x) + \operatorname{sen} 3x(3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x) = 0,$$

o bien

$$3(\cos 3x\cos x + \operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} x) + \cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = 0,$$

o bien

$$3\cos 2x + \cos 6x = 0. \tag{1}$$

Pero, puesto que

$$\cos^3 2x = \frac{\cos 6x + 3\cos 2x}{4},$$

la ecuación (1) toma la forma

$$4\cos^3 2x = 0,$$

de donde

$$\cos 2x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n.$$

592. Utilizando la identidad $(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$, obtendremos:

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x,$$

de donde

$$\operatorname{sen}^8 x + \cos^8 x = \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^4 2x = \frac{17}{32},$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sen}^4 2x = \frac{17}{32}, \quad \operatorname{sen}^4 2x - 8\operatorname{sen}^2 2x + \frac{15}{4} = 0.$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada obtenida, hallaremos:

$$\operatorname{sen}^2 2x = 4 \pm \frac{7}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{2}, \qquad 2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},$$

de donde

$$x = \frac{2k+1}{8}\pi.$$

593. Sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ por $\frac{1-\cos 2x}{2}$ y $\frac{1+\cos 2x}{2}$ respectivamente, escribamos la ecuación en la forma siguiente:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^6 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^6 = \frac{29}{16}\cos^4 2x,$$

o bien

$$(1-\cos 2x)^6 + (1+\cos 2x)^6 = 58\cos^4 2x.$$

Haciendo $\cos 2x = y$, después de simples transformaciones, obtenemos la siguiente ecuación bicuadrada respecto a y:

$$24y^4 - 10y^2 - 1 = 0.$$

Esta ecuación tiene solamente dos raíces reales: $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Por consiguiente, $\cos 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, de donde $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

594. Valiéndonos de la identidad obtenida en el problema 261, escribamos la ecuación inicial en la forma

$$(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x)(\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 3x)(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x)=0,$$

o, después de descomponer las sumas de los senos en factores, en la forma

$$\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen}\frac{5x}{2}\cos x\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Igualando cada uno de los factores a cero, obtendremos cinco series de soluciones

$$1)\ x=\frac{2n_1}{3}\pi;\quad 2)\ x=\frac{n_2}{2}\pi;\quad 3)\ x=\frac{2n_3}{5}\pi;$$
$$4)\ x=\frac{2n_4+1}{2}\pi;\quad 5)\ x=(2n_5+1)\pi,$$

donde n_1, n_2, n_3, n_4 y n_5 son números enteros arbitrarios.

Observando, que las soluciones de las series 4) y 5) se contienen en la serie 2), definitivamente obtendremos las siguientes tres series de soluciones

$$1)\ x=\frac{2n_1}{3}\pi;\quad 2)\ x=\frac{n_2}{2}\pi;\quad 3)\ x=\frac{2n_3}{5}\pi,$$

donde n_1, n_2 y n_3 son números enteros cualesquiera.

595. Primera resolución. Cuando $n=1$ la ecuación se transforma en una identidad. Si $n>1$, entonces, de la identidad

$$1=(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)^n=\operatorname{sen}^{2n} x+\binom{n}{1}\operatorname{sen}^{2(n-1)} x\cos^2 x+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n}{n-1}\operatorname{sen}^2 x\cos^{2(n-1)}x+\cos^{2n} x,$$

en virtud de la ecuación dada, obtenemos:

$$\binom{n}{1}\operatorname{sen}^{2(n-1)} x\cos^2 x+\ldots+\binom{n}{n-1}\operatorname{sen}^2 x\cos^{2(n-1)} x=0.$$

Dado que ninguno de los sumandos es negativo, entonces, o bien $\operatorname{sen}^2 x=0$, o bien $\cos^2 x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}k$.

Segunda resolución. Es evidente, que la ecuación se satisface si x toma valores múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, es decir, si $x=\frac{\pi}{2}k$ (k es un número entero). Demostremos que la ecuación

$$\operatorname{sen}^{2n} x+\cos^{2n} x=1$$

no tiene otras raíces. Sea $x_0\neq k\cdot\frac{\pi}{2}$; entonces $\operatorname{sen}^2 x_0<1$ y $\cos^2 x_0<1$, de donde se desprende que para $n>1$ tendremos que $\operatorname{sen}^{2n} x_0<\operatorname{sen}^2 x_0$ y $\cos^{2n}x_0<\cos^2 x_0$ y, por lo tanto,
$\operatorname{sen}^{2n} x_0+\cos^{2n} x_0<\operatorname{sen}^2 x_0+\cos^2 x_0=1$. Con esto el problema queda demostrado.

596. Hagamos $\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=y$, entonces, $\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}=\pi-3\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\pi-3y$ la ecuación toma la forma

$$\operatorname{sen} 3y=2\operatorname{sen} y.$$

Con ayuda de la fórmula (7), pág. 79, la última ecuación se puede escribir así:

$$\operatorname{sen} y\,(4\operatorname{sen}^2 y-1)=0. \qquad (1)$$

La ecuación (1) tiene las siguientes soluciones:

$$y_1=k\pi, \quad y_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, \quad y_3=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k.$$

Volviendo al argumento x, por la fórmula $x=\frac{3\pi}{5}-2y$, definitivamente obtendremos tres series de soluciones de la ecuación inicial

$$x_1=\frac{3\pi}{5}-2k\pi, \quad x_2=\frac{3\pi}{5}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}-\pi k,$$

$$x_3=\frac{3\pi}{5}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}-\pi k.$$

597. Puesto que $|\cos\alpha|\leqslant 1$ y $\operatorname{sen}\alpha\geqslant -1$, entonces,

$$|\cos 4x-\cos 2x|\leqslant 2, \quad \operatorname{sen} 3x+5\geqslant 4.$$

Así pues, el primer miembro de la ecuación no sobrepasa de 4, el segundo miembro no es menor de 4. Por consiguiente, $|\cos 4x-\cos 2x|=+2$ (y, entonces, o bien $\cos 4x=-1$ y $\cos 2x=1$, o bien $\cos 4x=1$ y $\cos 2x=-1$) y $\operatorname{sen} 3x=-1$. Examinemos los casos posibles.

a) $\cos 4x=-1, \qquad x=\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi;$

$\cos 2x=1, \qquad x=\pi k;$

$\operatorname{sen} 3x=-1, \qquad x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}l.$

No hay raíces comunes.

b) $\cos 4x=1, \qquad x=\frac{\pi n}{2};$

$\cos 2x=-1, \qquad x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi;$

$\operatorname{sen} 3x=-1, \qquad x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi l=\frac{4l-1}{6}\pi.$

Las raíces comunes son:

$$x=\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

598. Transformemos la ecuación a la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{2\operatorname{sen} x\cos x},$$

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen} 2x}$$

o bien

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen} 2x=1. \qquad (1)$$

Puesto que $|\operatorname{sen}\alpha|\leqslant 1$, entonces, (1) tiene lugar, si, o bien

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 2x=-1,$$

o bien

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 2x=1.$$

Pero, las dos primeras ecuaciones no tienen raíces comunes, y las dos segundas ecuaciones tienen las raíces comunes $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Por consiguiente, la ecuación dada tiene las raíces:

$$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi.$$

599. Dividiendo la ecuación dada miembro a miembro por 2 y observando que

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3},$$

obtendremos la ecuación equivalente

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen} 4x=1.$$

La última igualdad es posible solamente en el caso cuando

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 4x=\pm 1,$$

de donde

$$x=-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad \text{y} \quad x=\frac{1}{4}\left(\pm\frac{\pi}{2}+2m\pi\right),$$

donde n y m son números enteros. Igualando ambos valores entre sí, después de simplificar por π, obtenemos la ecuación

$$-\frac{1}{3}\pm\frac{1}{2}+2n=\pm\frac{1}{8}+\frac{m}{2},$$

o después de la multiplicación por 24

$$12m-48n=-8\pm 9.$$

Para cualesquiera valores enteros de m y n, la parte izquierda es un número entero par, y la parte derecha, un número impar (1 ó -17). La última igualdad, para valores enteros de m y n, es imposible, lo que había que demostrar.

600. **Primera resolución.** El problema es equivalente al siguiente: ¿qué valores puede tomar la función $\lambda=\sec x+\operatorname{cosec} x$, si el argumento x varía en los límites de $0<x<\frac{\pi}{2}$?

Examinemos la función

$$\lambda^2=(\sec x+\operatorname{cosec} x)^2=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2}{\operatorname{sen} x\cos x}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}+\frac{2}{\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{4}{\operatorname{sen}^2 2x}+\frac{4}{\operatorname{sen} 2x}.$$

Cada uno de los sumandos que figuran en la parte derecha, al aumentar x desde cero hasta $\frac{\pi}{2}$ se porta de la siguiente manera: al principio disminuye desde $+\infty$ hasta 4 $\left(\text{cuando } 0<x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$, y luego aumenta desde 4 hasta $+\infty$

$\left(\text{cuando } \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right)$; para $x=\frac{\pi}{4}$, ambos sumandos adquieren simultáneamente sus valores mínimos, por consiguiente, también la suma tendrá sus valores mínimos cuando $x=\frac{\pi}{4}$. Al mismo tiempo, $\lambda^2=8$. Por esta razón, si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, entonces, $\lambda^2 \geqslant 8$, y puesto que $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$ en el primer cuadrante son positivos, entonces, $\lambda \geqslant 2\sqrt{2}$. La gráfica de la función $\lambda(x)$ se muestra en la fig. 248.

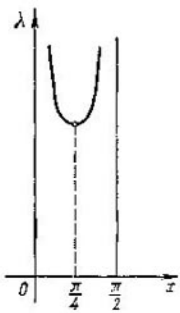

FIG. 248

Segunda resolución. Observemos en seguida que debemos limitarnos a examinar solamente los valores positivos de λ, puesto que siendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, las funciones $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$ son positivas. Transformando la ecuación a la forma

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \lambda \operatorname{sen} x \cos x,$$

elevemos ambos miembros de esta ecuación al cuadrado, como resultado obtendremos:

$$1 + \operatorname{sen} x \cos x = \lambda^2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x.$$

Haciendo, ahora, $\operatorname{sen} 2x = z$, tendremos:

$$\lambda^2 z^2 - 4z - 4 = 0,$$

de donde

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}. \tag{1}$$

Puesto que por la condición del problema $0 < x < \frac{\pi}{2}$, entonces $z = \operatorname{sen} 2x > 0$, y debemos tomar en la igualdad (1) el signo más, es decir,

$$z = \frac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}.$$

Si ahora conseguimos satisfacer la desigualdad

$$\frac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2} \leqslant 1, \tag{2}$$

entonces, la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}$$

tendrá una solución x tal, que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Esto último satisfará también a la ecuación inicial, de lo cual es fácil convencerse. Si no se satisface la desigualdad (2), no existe la solución necesaria. Así pues, el problema se ha reducido a la resolución de la desigualdad (2). Liberando esta desigualdad del denominador, obtenemos fácilmente que $\lambda \geqslant 2\sqrt{2}$.

601. Del sistema dado obtenemos directamente que

$$x+y=k\pi, \qquad x-y=l\pi.$$

De aquí

$$x=\frac{k+l}{2}\pi, \qquad y=\frac{k-l}{2}\pi.$$

Según la condición del problema $0 \leqslant k+l \leqslant 2$, $0 \leqslant k-l \leqslant 2$.

A estas desigualdades las satisfacen los siguientes 5 pares de valores de k y l

1) $k=0$, $l=0$, 2) $k=1$, $l=0$;

3) $k=1$, $l=-1$; 4) $k=1$, $l=1$;

5) $k=2$, $l=0$.

Respuesta: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=\frac{\pi}{2}$, $y_2=\frac{\pi}{2}$;

$$x_3=0,\quad y_3=\pi;\qquad x_4=\pi,\quad y_4=0;\qquad x_5=\pi,\quad y_5=\pi.$$

602. Transformemos el sistema a la forma

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x &= 1+\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,\\ \cos^2 x &= 1+\cos x \cos y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Sumando y sustrayendo las ecuaciones del sistema (1), obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x-\cos(x+y)&=0,\\ 1+\cos(x-y)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

La primera ecuación del sistema (2) se puede escribir así:

$$\cos 2x-\cos(x+y)=2\operatorname{sen}\left(\frac{3x+y}{2}\right)\operatorname{sen}(y-x)=0$$

Si $\operatorname{sen}(x-y)=0$, entonces, $x-y=k\pi$. Pero, de la segunda ecuación del sistema (2) hallamos:

$$\cos(x-y)=-1,\qquad x-y=(2n+1)\pi$$

Por consiguiente, en este caso, tenemos una cantidad innumerable de soluciones: $x-y=(2n+1)\pi$.

Si $\operatorname{sen}\left(\frac{3x+y}{2}\right)=0$, entonces, $3x+y=2k\pi$. Pero $x-y=(2n+1)\pi$. Por consiguiente,

$$x=\frac{2k+2n+1}{4}\pi,\qquad y=\frac{2k-6n-3}{4}\pi.$$

603. Elevemos ambas ecuaciones al cuadrado, sumémoslas miembro a miembro y hagamos uso de la identidad

$$\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x$$

(véase el problema 533). Obtendremos: $\operatorname{sen}^2 2x=1$. Si $\operatorname{sen} 2x=1$, entonces, o bien $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, o bien $x=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$. En el primer caso, del sistema inicial hallaremos que $\operatorname{sen} y=\cos y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y en el segundo caso, $\operatorname{sen} y=\cos y=$ $=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Análogamente se examina el caso cuando $\operatorname{sen} 2x=-1$.

Respuesta: $x_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $y_1=\frac{\pi}{4}+2l\pi$;

$$x_2=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi,\qquad y_2=\frac{\pi}{4}+(2l+1)\pi;$$

$$x_3=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\qquad y_3=\frac{3\pi}{4}+2l\pi;$$

$$x_4=\frac{3}{4}\pi+(2k+1)\pi,\qquad y_4=\frac{3}{4}\pi+(2l+1)\pi.$$

604. La primera ecuación se puede escribir en la forma

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cos y}=1,$$

de donde, en virtud de la segunda ecuación, obtenemos:

$$\operatorname{sen}(x+y)=\cos x \cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por consiguiente, o bien

$$x+y=\frac{\pi}{4}+2k\pi, \tag{1}$$

o bien

$$x+y=-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi. \tag{2}$$

Transformemos la segunda ecuación del sistema inicial de la siguiente manera:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\sqrt{2}.$$

De aquí

$$\cos(x-y)=\sqrt{2}-\cos(x+y). \tag{3}$$

Si tiene lugar (1), entonces $\cos(x+y)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, y de la fórmula (3) hallamos:

$$\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2l\pi.$$

Si tiene lugar (2), entonces $\cos(x+y)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos(x-y)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, lo cual, es imposible.

Así pues, para la determinación de x e y hemos obtenido el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\\ x-y&=\pm\frac{\pi}{4}+2l\pi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En concordancia con la elección del signo en la segunda ecuación del sistema (4) obtenemos dos series de soluciones:

$$x_1=\frac{\pi}{4}+(k+l)\pi, \quad y_1=(k-l)\pi$$

y

$$x_2=(k+l)\pi, \quad y_2=\frac{\pi}{4}+(k-l)\pi.$$

605. Dividiendo miembro a miembro la primera ecuación por la segunda, obtendremos:

$$\cos x \cos y=\frac{3}{4\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Sumando esta ecuación a la primera y sustrayendo de (1) la primera ecuación, obtendremos un sistema equivalente al inicial:

$$\left.\begin{aligned} \cos(x-y)&=\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos(x+y)&=\frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\\ x+y&=\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2l\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En concordancia con la elección de los signos en la ecuación (2) obtenemos las siguientes cuatro series de soluciones:

$$\text{a)}\ x_1=(k+l)\,\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8},$$

$$y_1=(l-k)\,\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8};$$

$$\text{b)}\ x_2=(k+l)\,\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8},$$

$$y_2=(l-k)\,\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8};$$

$$\text{c)}\ x_3=(k+l)\,\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8},$$

$$y_3=(l-k)\,\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}.$$

$$\text{d)}\ x_4=(k+l)\,\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8},$$

$$y_4=(l-k)\,\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}.$$

606. Transformemos la segunda ecuación a la forma

$$\frac{1}{2}\,[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=a.$$

Pero, puesto que $x+y=\varphi$, entonces, $\cos(x-y)=2a-\cos\varphi$. Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\varphi,\\ x-y&=\pm\arccos(2a-\cos\varphi)+k\pi. \end{aligned}\right\}$$

Respuesta:

$$x=\frac{\varphi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos(2a-\cos\varphi)+k\pi,$$

$$y=\frac{\varphi}{2}\mp\frac{1}{2}\arccos(2a-\cos\varphi)-k\pi,$$

con la particularidad de que a y φ deberán estar enlazados por la condición $|2a-\cos\varphi|\leqslant 1$.

607. Puesto que el primer miembro de la primera ecuación del sistema no supera a la unidad, el sistema puede tener solución solamente cuando $a=0$. Suponiendo que sea $a=0$, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}x\cdot\cos 2y&=1,\\ \cos x\cdot\operatorname{sen}2y&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

De la segunda ecuación del sistema (1) se desprende que, o bien $\cos x=0$, o bien $\operatorname{sen} 2y=0$. Si $\cos x=0$, entonces, para $x_1=\frac{\pi}{2}+2m\pi$, de la primera ecuación hallamos que $y_1=n\pi$, y para $x_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, obtenemos que $y_2=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi$. El caso $\operatorname{sen} 2y=0$ no da nuevas soluciones. Así pues, el sistema de ecuaciones es soluble solamente en el caso en que $a=0$, y tiene las dos series de soluciones siguientes:

$$x_1=\frac{\pi}{2}+2m\pi, \qquad y_1=n\pi,$$

$$x_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \qquad y_2=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

608. Observemos que $\cos y$ no puede ser igual a cero. En efecto, si $\cos y=0$, entonces $y=\frac{\pi}{2}+k\pi$ y

$$\cos(x-2y)=\cos(x-\pi)=-\cos x=0,$$
$$\operatorname{sen}(x-2y)=\operatorname{sen}(x-\pi)=-\operatorname{sen} x=0.$$

Pero, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ no pueden ser al mismo tiempo iguales a cero, puesto que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$. Es evidente, que $a\neq 0$ (en el caso contrario, $\cos(x-2y)=-\operatorname{sen}(x-2y)=0$).

Dividiendo la segunda ecuación miembro a miembro por la primera (en virtud de la observación hecha más arriba, tal división es posible), obtendremos:

$$\operatorname{tg}(x-2y)=1, \qquad x-2y=\frac{\pi}{4}+k\pi. \tag{1}$$

Examinemos dos casos:

a) k es un número par. En este caso

$$\cos(x-2y)=\frac{1}{\sqrt{2}}=a\cos^3 y, \qquad \cos y=\sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}}=\lambda;$$

$$y=\pm\arccos\lambda+2m\pi$$

Colocando este valor de y en (1), obtenemos:

$$x=\pm 2\arccos\lambda+(4m+k)\pi+\frac{\pi}{4}.$$

b) k es un número impar. Entonces, $\cos(x-2y)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=a\cos^3 y$,

$$y=\pm\arccos(-\lambda)+2m\pi.$$

De (1) hallamos.

$$x=\pm 2\arccos(-\lambda)+(4m+k)\pi+\frac{\pi}{4}.$$

El sistema es soluble cuando $a>\frac{1}{\sqrt{2}}$

609. Elevando las relaciones dadas al cuadrado, obtendremos:

$$\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y+\operatorname{sen}^2 y=a^2, \tag{1}$$
$$\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=b^2. \tag{2}$$

Sumando y sustrayendo (1) y (2) miembro a miembro, hallaremos:

$$2+2\cos(x-y)=a^2+b^2, \tag{3}$$
$$\cos 2x+\cos 2y+2\cos(x+y)=b^2-a^2. \tag{4}$$

La ecuación (4) puede ser transformada a la forma

$$2 \cos (x+y) [\cos (x-y)+1]=b^2-a^2. \qquad (5)$$

De (3) y (5) hallaremos:

$$\cos (x+y)=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}.$$

610. Valiéndonos de la fórmula

$$\cos 2x+\cos 2y=2 \cos (x+y) \cos (x-y),$$

escribamos la segunda ecuación del sistema en la forma

$$4 \cos (x-y) \cos (x+y)=1+4 \cos^2 (x-y).$$

El sistema inicial puede ser sustituido por el siguiente equivalente:

$$\left.\begin{aligned} 4 \cos \alpha \cos (x+y) &= 1+4 \cos^2 \alpha, \\ x-y &= \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

Comparemos ambos miembros de la ecuación (1).
Tenemos:

$$|4 \cos \alpha \cdot \cos (x+y)| \leqslant 4 |\cos \alpha|.$$

Por otra parte, de la desigualdad $(1 \pm 2 \cos \alpha)^2 \geqslant 0$ se desprende que

$$4 |\cos \alpha| \leqslant 1+4 \cos^2 \alpha,$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar solamente en el caso en que $2 |\cos \alpha|=1$. Por consiguiente, el sistema (1)—(2) puede tener solución solamente con la condición de que $|\cos \alpha|=\frac{1}{2}$.

Examinemos dos posibilidades:

a) $\cos \alpha=\frac{1}{2}$.

De (1) hallamos que $\cos (x+y)=1$, es decir,

$$x+y=2k\pi. \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema (2)—(3), obtenemos:

$$x_1=\frac{\alpha}{2}+k\pi, \qquad y_1=k\pi-\frac{\alpha}{2}.$$

b) $\cos \alpha=-\frac{1}{2}$.

Actuando análogamente, hallamos:

$$x_2=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{\alpha}{2}, \qquad y_2=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{\alpha}{2}.$$

611. Este problema es análogo al anterior. Expongamos, sin embargo, una resolución un poco diferente. Empleando la fórmula (14), pág. 79, representemos la primera ecuación del sistema en la forma

$$4 \cos^2 (x-y)+4 \cos (x+y) \cos (x-y)+1=0$$

Haciendo $\cos (x-y)=t$ y valiéndonos de que $x+y=\alpha$, obtendremos la ecuación

$$4t^2+4t \cos \alpha+1=0. \qquad (1)$$

Esta ecuación tiene raices reales solamente con la condición de que $D=16 (\cos^2 \alpha-1) \geqslant 0$, es decir, cuando $|\cos \alpha|=1$. Examinemos dos casos posibles: $\cos\alpha = 1$ y $\cos\alpha = -1$. Si $\cos\alpha = 1$, entonces, de (1) se desprende que

$$t = \cos(x-y) = -\frac{1}{2}.$$

Obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x-y &= \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \\ x+y &= \alpha, \end{aligned}\right\}$$

del cual hallamos que

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi + \frac{\alpha}{2}, \quad y_1 = \mp\frac{\pi}{3} - k\pi + \frac{\alpha}{2}.$$

Si $\cos\alpha = -1$, entonces, actuando análogamente, obtendremos:

$$x^2 = k\pi + \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}, \quad y^2 = \frac{\alpha}{2} - k\pi \mp \frac{\pi}{6}.$$

612. Examinemos la primera ecuación del sistema.
En virtud de la desigualdad (1), pág. 22, tenemos que

$$\left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right| \geqslant 2,$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar solamente en el caso en que $\operatorname{tg} x = 1$ y $\operatorname{tg} x = -1$. Puesto que el segundo miembro de la primera ecuación satisface la condición

$$\left|2\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 2,$$

la primera ecuación del sistema puede satisfacerse solamente en los casos siguientes:

$$\text{a)}\ \left.\begin{aligned} &\operatorname{tg} x = 1, \\ &\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = 1; \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \text{b)}\ \left.\begin{aligned} &\operatorname{tg} x = -1, \\ &\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = -1. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

El sistema (1) tiene las soluciones siguientes:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad y_1 = \frac{\pi}{4} + 2l\pi, \tag{3}$$

y el sistema (2), las soluciones

$$x_2 = -\frac{\pi}{4} + m\pi, \qquad y_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi. \tag{4}$$

Es fácil comprobar que las soluciones, determinadas por las fórmulas (3), no satisfacen a la segunda ecuación del sistema inicial, y las soluciones obtenidas por las fórmulas (4), satisfacen a la segunda ecuación (y, por lo tanto, a todo el sistema) solamente en el caso en que sea m un número impar. Suponiendo en (4) que sea $m = 2k+1$, escribimos las soluciones del sistema inicial en la forma

$$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,$$

$$y = -\frac{3}{4}\pi + 2n\pi.$$

613. Observemos que $\cos x \neq 0$ y $\cos y \neq 0$, puesto que, en el caso contrario, la tercera ecuación del sistema no tiene sentido. Por esta razón, las dos primeras ecuaciones pueden ser transformadas a la forma

$$(a-1)\operatorname{tg}^2 x = 1-b, \tag{1}$$
$$(b-1)\operatorname{tg}^2 y = 1-a. \tag{2}$$

Pero, $a \neq 1$, puesto que si $a=1$, entonces, de (1) tendremos que $b=1$, lo que contradice a la condición $a \neq b$. Análogamente, si $b=1$, entonces, también $a=1$. Por consiguiente, (1) puede ser dividida miembro a miembro por (2). Dividiéndolas, obtendremos:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Convencémosnos, además, de que $a \neq 0$. En efecto, si $a=0$, entonces, de la segunda ecuación tendremos que $\operatorname{sen} y \neq 0$, y de la tercera tendremos que $b=0$, es decir, que $a=b=0$, lo cual es imposible.

En virtud de esta observación, de la tercera ecuación podemos hallar que

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Así pues,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Si $\frac{b}{a} = \frac{1-b}{1-a}$, entonces $a=b$, lo cual es imposible.

Si $\frac{b}{a} = -\frac{1-b}{1-a}$, entonces $a+b=2ab$.

Respuesta: $a+b=2ab$. Para $a \neq b$, esta condición es suficiente para la solubilidad del sistema.

614. La segunda relación, en virtud de la primera, se puede escribir así:

$$\frac{A \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha} = \frac{B \operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$$

o bien

$$\operatorname{sen}\beta\,(A\cos\beta - B\cos\alpha) = 0.$$

Esta relación puede ser cumplida cuando $\operatorname{sen}\beta = 0$ y, entonces, también $\operatorname{sen}\alpha = 0$, $\cos\beta = \pm 1$, $\cos\alpha = \pm 1$, o bien cuando $A\cos\beta - B\cos\alpha = 0$. En este último caso, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= A\operatorname{sen}\beta, \\ A\cos\beta &= B\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Elevando cada una de estas ecuaciones al cuadrado y haciendo las sustituciones por las fórmulas $\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ y $\cos^2\beta = 1-\operatorname{sen}^2\beta$ obtendremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha + A^2\operatorname{sen}^2\beta &= 1, \\ B^2\cos^2\alpha + A^2\operatorname{sen}^2\beta &= A^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

De aquí, $\cos^2\alpha$ y $\operatorname{sen}^2\beta$ se hallan de la única manera cuando, y sólo cuando, $A^2(1-B^2) \neq 0$; en este caso

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-A^2}{1-B^2}}, \quad \operatorname{sen}\beta = \pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{A^2-B^2}{1-B^2}}.$$

Examinemos los casos particulares, cuando $A^2(1-B^2)=0$. Si $A=0$, entonces, de (1) obtenemos que $\cos\alpha=\pm 1$ y $B=0$; en este caso $\cos\alpha=\pm 1$, $\operatorname{sen}\beta$ queda indeterminado. Si $B^2=1$, entonces, de (2) obtenemos que $A^2=1$, y las ecuaciones dadas no contienen los parámetros A y B; por eso, la tarea de expresar $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta$ en función de A y B pierde el sentido.

615. De la segunda ecuación deducimos que

$$\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-2y\right),$$

y, por consiguiente, o bien

$$x=\frac{\pi}{2}-2y+2k\pi, \tag{1}$$

o bien

$$x=2y-\frac{\pi}{2}+(2l+1)\pi. \tag{2}$$

Diriguéndonos a la primera ecuación del sistema dado, en el caso (1) hallamos:

$$\operatorname{cotg} 2y=\operatorname{tg}^3 y \quad \text{o} \quad \frac{1-\operatorname{tg}^2 y}{2\operatorname{tg} y}=\operatorname{tg}^3 y.$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada, obtenemos que $\operatorname{tg} y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. En el segundo caso, introduciendo x de la fórmula (2) en la ecuación $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3 y$, nos convencemos de que no existen raíces reales. Así pues,

$$\operatorname{tg} y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad x=\frac{\pi}{2}-2y+2k\pi,$$

de donde

$$y_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi, \quad x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi-2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-2\pi n$$

y

$$y_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi, \quad x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi+2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-2\pi n$$

o bien

$$x_1=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+2m\pi,$$
$$y_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi$$

y

$$x_2=\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+2m\pi,$$
$$y_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi,$$

donde m y n son números enteros cualesquiera.

616. Transformando ambos miembros de la primera ecuación, obtendremos:

$$2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=0.$$

Esta ecuación se satisface en los casos siguientes:

1º. $x=-y+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$

2º. $y=2l\pi$, x es un número cualquiera $(l=0, \pm 1, \ldots)$.

3º. $x=2m\pi$, y es un número cualquiera $(m=0, \pm 1, \ldots)$.

La relación 1º es compatible con la segunda ecuación del sistema $|x|+|y|=1$ únicamente con la condición de que $k=0$; en efecto, de 1º se desprende la desigualdad

$$|x|+|y|\geqslant 2|k|\pi,$$

la cual, con la condición de que sea $|x|+|y|=1$, es posible solamente en el caso en que sea $k=0$.

Resolviendo el sistema

$$x=-y, \quad |x|+|y|=1,$$

hallamos dos soluciones:

$$x_1=\frac{1}{2}, \quad y_1=-\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x_2=-\frac{1}{2}, \quad y_2=\frac{1}{2}.$$

Razonando análogamente en los casos 2º y 3º, hallamos dos pares más de soluciones:

$$x_3=1, \quad y_3=0; \quad x_4=-1, \quad y_4=0,$$

y también

$$x_5=0, \quad y_5=1; \quad x_6=0, \quad y_6=-1.$$

Así pues, el sistema examinado en el problema tiene las seis soluciones indicadas.

617. Elevemos ambos miembros de cada ecuación del sistema al cuadrado y, sumando las igualdades obtenidas, tendremos:

$$\operatorname{sen}^2(y-3x)+\cos^2(y-3x)=4(\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x),$$

es decir,

$$\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}. \tag{1}$$

Examinemos la identidad

$$\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x, \tag{2}$$

demostrada en el problema 533.

Comparando (1) y (2), hallamos:

$$\operatorname{sen}^2 2x=1, \qquad \operatorname{sen} 2x=\pm 1,$$

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1) \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Multiplicando entre sí las ecuaciones del sistema dado, tendremos:

$$\operatorname{sen}(y-3x)\cos(y-3x)=4\operatorname{sen}^3 x\cos^3 x,$$

es decir,

$$\operatorname{sen} 2(y-3x)=\operatorname{sen}^3 2x.$$

Pero, $\operatorname{sen} 2x=\pm 1$, por eso,

$$\operatorname{sen} 2(y-3x)=\pm 1,$$

$$y-3x=\frac{\pi}{4}(2m+1) \qquad (m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Por consiguiente,

$$y=\frac{3\pi}{4}(2n+1)+\frac{\pi}{4}(2m+1).$$

Durante la resolución del sistema se realizó la multiplicación de ambos miembros de las ecuaciones por expresiones que contenían incógnitas, por eso es posible que se hayan obtenido soluciones ajenas. Comprobemos si todos los pares de soluciones obtenidos de x e y son soluciones. Deberá ser:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(2m+1)=2\operatorname{sen}^3\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

$$\cos\frac{\pi}{4}(2m+1)=2\cos^3\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

o, suponiendo que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(2m+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{\pi m}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi m}{2}$$

y

$$\cos\frac{\pi}{4}(2m+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi m}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{\pi m}{2},$$

y haciendo una sustitución análoga en la parte derecha, después de simplificar por el factor constante, obtendremos:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi m}{2}+\cos\frac{\pi m}{2}=\left(\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}\right)^3,$$

$$\cos\frac{\pi m}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi m}{2}=\left(\cos\frac{\pi n}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}\right)^3.$$

Puesto que la base de la potencia en la parte derecha de estas nuevas igualdades puede tomar para los valores enteros de n solamente los valores 0, $+1$, -1 y estos valores no varían al ser elevados a la tercera potencia, entonces,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}=\left(\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}\right)^3,$$

$$\cos\frac{\pi n}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}=\left(\cos\frac{\pi n}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}\right)^3;$$

de aquí obtenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}m-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n=\cos\frac{\pi}{2}n-\cos\frac{\pi}{2}m,$$

$$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}m+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n=\cos\frac{\pi}{2}n-\cos\frac{\pi}{2}m.$$

Sumando y sustrayendo estas últimas relaciones, obtendremos:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}m-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n=0,$$

$$\cos\frac{\pi}{2}n-\cos\frac{\pi}{2}m=0, \qquad (3)$$

o bien

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(m-n)\cos\frac{\pi}{4}(m+n)=0,$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(m-n)\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(m+n)=0.$$

Puesto que

$$\cos\frac{\pi}{4}(m+n) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(m+n)$$

no se reducen a cero simultáneamente, el sistema obtenido es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}(m-n)=0,$$

de donde

$$m-n=4k \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Así pues, los pares de los valores de x e y obtenidos

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1), \qquad y=\frac{3\pi}{4}(2n+1)+\frac{\pi}{4}(2m+1)$$

dan las soluciones del sistema cuando, y sólo cuando, los números enteros n y m están enlazados por la relación (4). Por consiguiente,

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

$$y=\frac{\pi}{4}[3(2n+1)+2(n+4k)+1]=\pi[2(n+k)+1].$$

Pero, $n+k$ es un número entero arbitrario. Designándolo por p, tendremos definitivamente que

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1), \quad y=\pi(2p+1) \quad (n,\ p=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

618. Elevando ambos miembros de la primera y segunda ecuaciones al cuadrado y escribiendo la tercera ecuación en la forma inicial, obtendremos el sistema:

$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y)^2&=4a^2,\\ (\cos x+\cos y)^2&=4b^2,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y&=c.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Buscaremos las condiciones que deberán satisfacer los números a, b, c, para que el sistema (1) tenga por lo menos una solución. Puesto que el sistema dado lo sustituimos por el sistema (1) no equivalente, hace falta demostrar que, para unas mismas condiciones impuestas a los números a, b, c, ambos sistemas tienen por lo menos una solución.

Si el sistema dado tiene solución para ciertos valores de a, b y c, entonces, es evidente, que también el sistema (1) tendrá solución para los mismos valores de a, b y c. Es justa también la afirmación inversa: si el sistema (1) tiene solución para ciertos valores de a, b y c, entonces también el sistema dado tendrá solución para los mismos valores de a, b y c.

En efecto, sean x_1 e y_1 las soluciones del sistema (1); entonces se cumple una de las cuatro posibilidades:

o bien

$$\operatorname{sen}x_1+\operatorname{sen}y_1=2a, \qquad \cos x_1+\cos y_1=2b,$$

o bien

$$\operatorname{sen}x_1+\operatorname{sen}y_1=-2a, \qquad \cos x_1+\cos y_1=2b,$$

o bien

$$\operatorname{sen}x_1+\operatorname{sen}y_1=-2a, \qquad \cos x_1+\cos y_1=-2b,$$

o bien

$$\operatorname{sen}x_1+\operatorname{sen}y_1=2a, \qquad \cos x_1+\cos y_1=-2b$$

Si tiene lugar el primer caso, entonces x_1 e y_1 son las soluciones del sistema dado; en el segundo caso, el sistema dado tiene, por ejemplo, la solución $-x_1$, $-y_1$; en el tercer caso, la solución $\pi+x_1$, $\pi+y_1$; en el cuarto, la solución

$\pi-x_1$, $\pi-y_1$. Por consiguiente, el sistema dado tiene por lo menos una solución cuando, y sólo cuando, tiene por lo menos una solución el sistema (1).

¿Cuándo tiene solución el sistema (1)? Sumando y sustrayendo la primera y la segunda ecuaciones del sistema (1), hallaremos:

$$\cos(x-y)=2(a^2+b^2)-1,$$
$$\cos 2x+\cos 2y+2\cos(x+y)=4(b^2-a^2),$$

o bien

$$\cos(x-y)=2(a^2+b^2)-1,$$
$$\cos(x+y)\cos(x-y)+\cos(x+y)=2(b^2-a^2),$$

de donde

$$\cos(x-y)=2(a^2+b^2)-1,$$
$$(a^2+b^2)\cos(x+y)=b^2-a^2.$$

Hemos obtenido el sistema

$$\left.\begin{aligned}\cos(x-y)&=2(a^2+b^2)-1,\\ (a^2+b^2)\cos(x+y)&=b^2-a^2,\\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y&=c,\end{aligned}\right\}$$

equivalente al sistema (1).

Si $a^2+b^2=0$, la segunda ecuación se satisface cualesquiera que sean los valores de x e y. De la primera ecuación obtenemos:

$$x-y=\pi+2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

la tercera ecuación nos da:

$$\operatorname{tg}(y+\pi+2k\pi)\operatorname{tg} y=c$$

o bien

$$\operatorname{tg}^2 y=c.$$

Esta última ecuación tiene solución para cualquier valor de $c\geqslant 0$. Si $a^2+b^2\neq 0$, tenemos:

$$\left.\begin{aligned}\cos(x-y)&=2(a^2+b^2)-1,\\ \cos(x+y)&=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Este sistema tiene solución cuando, y sólo cuando,

$$|2(a^2+b^2)-1|\leqslant 1, \qquad (3)$$

$$\left|\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right|\leqslant 1. \qquad (4)$$

La desigualdad (4), con la condición de que

$$a^2+b^2\neq 0,$$

evidentemente, es justa, y la desigualdad (3) es equivalente a la siguiente:

$$0<a^2+b^2\leqslant 1.$$

Representemos el primer miembro de la tercera ecuación del sistema (1) en la forma siguiente:

$$\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}{\cos x\cos y}=\frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]} \qquad (5)$$

y sustituyamos en (5) $\cos(x+y)$ y $\cos(x-y)$ por sus valores de (2). Como resultado obtendremos que la solución del sistema (2) satisfará a la tercera ecuación del sistema inicial, si

$$c=\frac{2(a^2+b^2)-1-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}}{\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}+2(a^2+b^2)-1}=\frac{(a^2+b^2)^2-b^2}{(a^2+b^2)^2-a^2}.$$

Hemos llegado al siguiente resultado: el sistema dado tiene por lo menos una solución en dos casos:

1) $0<a^2+b^2\leqslant 1$ y $c=\frac{(a^2+b^2)^2-b^2}{(a^2+b^2)^2-a^2}$;

2) $a=b=0$ y c es cualquier número no negativo.

3. Funciones trigonométricas inversas

619. De la definición de los valores principales de las funciones trigonométricas inversas se desprende que

$$\arccos(\cos x)=x,\quad \text{si}\quad 0\leqslant x\leqslant \pi.$$

Con el fin de utilizar esta fórmula, sustituyamos sen $\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ con ayuda de las fórmulas de reducción al coseno del ángulo incluido entre 0 y π. Escribamos las igualdades siguientes:

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{7}\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{9\pi}{14}$$

En resumen obtenemos:

$$\arccos\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]=\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{14}\right)=\frac{9\pi}{14}$$

620. Por analogía con la resolución del problema anterior tenemos:

$$\cos\frac{33}{5}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{3}{5}\pi\right)=\cos\frac{3}{5}\pi=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{5}\pi\right)=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{arcsen}\left(\cos\frac{33}{5}\pi\right)=\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right]=-\frac{\pi}{10}$$

621. Supongamos que sea $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\alpha_1$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\alpha_2$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\alpha_3$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\alpha_4$. Es evidente, que $0<\alpha_i<\frac{\pi}{4}$, $i=1, 2, 3, 4$. Por eso,

$$0<\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4<\pi.$$

Para la demostración de la identidad es suficiente establecer que

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=1.$$

Puesto que

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{4}{7},\qquad \operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)=\frac{3}{11},$$

entonces,

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)+\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)}{1-\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)}=1$$

622. Haciendo $\arcsen x=\alpha$, $\arccos x=\beta$, tendremos:

$$x=\operatorname{sen}\alpha \quad \text{y} \quad x=\cos\beta=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).$$

Según la definición de los valores principales tenemos que

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi.$$

De la última desigualdad se deriva la desigualdad

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto, $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$, puesto que los ángulos α y $\frac{\pi}{2}-\beta$ están incluidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ y los senos de estos ángulos son iguales entre sí. La fórmula queda demostrada.

623. Aprovechando que $\arcsen x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ (véase la resolución del problema 622), transformemos la ecuación a la forma

$$12\pi t^2-6\pi^2 t+(1-8\alpha)\pi^3=0, \tag{1}$$

donde $t=\arcsen x$. Siendo $\alpha<\frac{1}{32}$, el discriminante de esta ecuación será

$$D=36\pi^4-48\pi^4(1-8\alpha)<0.$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación (1) son irreales y por eso, para $\alpha<\frac{1}{32}$, la ecuación inicial no tiene soluciones.

624. Hagamos $\arccos x=\alpha$, $\arcsen\sqrt{1-x^2}=\beta$.

a) Si $0\leqslant x\leqslant 1$, entonces $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ y $0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ (puesto que $0\leqslant\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$). Queda solamente convencerse de que $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$. Pero, en virtud de la desigualdad $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, tenemos que $\operatorname{sen}\alpha=+\sqrt{1-x^2}$.

Por otra parte, para todos los valores de y ($|y|\leqslant 1$) tenemos que $\operatorname{sen}\arcsen y=y$, en particular, $\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\arcsen\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}$. Por consiguiente, para $0\leqslant x\leqslant 1$, tiene lugar la fórmula

$$\arccos x=\arcsen\sqrt{1-x^2}.$$

b) Si $-1\leqslant x\leqslant 0$, entonces $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-\beta\leqslant\pi$. Puesto que, ademas, $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-x^2}$ y $\operatorname{sen}(\pi-\beta)=\operatorname{sen}\beta=\sqrt{1-x^2}$, entonces $\alpha=\pi-\beta$, es decir, para $-1\leqslant x\leqslant 0$ tiene lugar la fórmula

$$\arccos x=\pi-\arcsen\sqrt{1-x^2}.$$

625. Demostremos que $\arcsen(-x)=-\arcsen x$. Hagamos $\arcsen(-x)=\alpha$; entonces $-x=\operatorname{sen}\alpha$ y, según la definición de los valores principales,

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Puesto que $\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha=x$ y, puesto que de la desigualdad (1) se deriva la desigualdad $-\frac{\pi}{2}\leqslant-\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, entonces $-\alpha=\arcsen x$ de donde $\alpha=$ $=-\arcsen x$, o sea, $\arcsen(-x)=-\arcsen x$.

Análogamente se demuestra la fórmula $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

626. De la definición de los valores principales de las funciones trigonométricas inversas se desprende que $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\alpha)=\alpha$, si $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Si $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$, entonces $-\frac{\pi}{2}\leqslant x-2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}$ Pero, entonces $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)=\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(x-2k\pi)]=x-2k\pi$.

627. Según la condición del problema

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+x}{1-x}. \tag{1}$$

Utilizando la fórmula

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

en virtud de (1), obtendremos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

de donde

$$y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\alpha)=\operatorname{arcsen}\frac{1-x^3}{1+x^2}=\beta. \tag{2}$$

Puesto que $0<x<1$, entonces

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}<\frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$$

De aquí se desprende que

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\pi\leqslant 0$$

y

$$\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(\alpha-\pi)]=\operatorname{arcsen}(-\operatorname{sen}\alpha)=-\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\alpha)=-y.$$

Pero el ángulo $\alpha-\pi$ se encuentra en los límites del valor principal $\operatorname{Arcsen} x$. Por consiguiente,

$$y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\alpha)=\pi-\alpha. \tag{3}$$

De (2) y (3) obtenemos que $\alpha+\beta=\pi$.

628. En las fórmulas $\operatorname{arcsen}\cos\operatorname{arcsen} x$ y $\arccos\operatorname{sen}\arccos x$ se toman los valores principales de las funciones trigonométricas inversas. Examinemos $\cos\operatorname{arcsen} x$. Esto es el coseno de un arco, el seno del cual es igual a x. Por consiguiente,

$$\cos\operatorname{arcsen} x=+\sqrt{1-x^2}, \quad \text{donde } -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Aquí, claro está, es esencial que $-\frac{\pi}{2}\leqslant\operatorname{arcsen} x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Análogamente

$$\operatorname{sen}\arccos x=+\sqrt{1-x^2}, \quad \text{donde } -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Designemos $y=+\sqrt{1-x^2}$; entonces $0\leqslant y\leqslant 1$.

Así pues, hay que hallar la relación entre $\operatorname{arcsen} y$ y $\arccos y$ siendo $0\leqslant y\leqslant 1$. Estos dos ángulos complementan uno al otro hasta $\frac{\pi}{2}$ (véase la resolución del problema 622). Así pues,

$$\operatorname{arcsen}\cos\operatorname{arcsen} x+\arccos\operatorname{sen}\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

4. Desigualdades trigonométricas

629. La desigualdad dada es equivalente a la siguiente

$$\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-1>0. \tag{1}$$

Descomponiendo el trinomio cuadrado, que figura en la parte izquierda de (1), en factores, obtendremos.

$$\left(\operatorname{sen} x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\operatorname{sen} x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)>0. \tag{2}$$

Pero,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$$

y por eso,

$$\operatorname{sen} x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0.$$

Por consiguiente, la desigualdad inicial es equivalente a la siguiente:

$$\operatorname{sen} x>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

y tiene la solución

$$2k\pi+\varphi<x<\pi-\varphi+2k\pi,$$

donde

$$\varphi=\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

630. Cuando $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, la expresión que se examina no tiene sentido. Para los demás valores de x multipliquemos ambas partes de la desigualdad por $\cos^2 x$. Obtendremos la desigualdad equivalente

$$(\operatorname{sen} 2x)^2+\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x-2>0.$$

Resolviendo la desigualdad cuadrada obtenida hallaremos que o bien

$$\operatorname{sen} 2x<\frac{-3-\sqrt{41}}{4},$$

o bien

$$\operatorname{sen} 2x>\frac{\sqrt{41}-3}{4}.$$

La primera de estas desigualdades no puede ser cumplida. Por consiguiente,

$$k\pi+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{41}-3}{4}<x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{41}-3}{4}+k\pi.$$

631. Transformando el producto de los senos en una suma, sustituyamos la desigualdad dada por la siguiente equivalente:

$$\cos 3x>\cos 7x \quad \text{o bien} \quad \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x>0.$$

Pero, cuando $0<x<\frac{\pi}{2}$ tenemos que $\operatorname{sen} 2x>0$ y, por consiguiente, la desigualdad inicial es equivalente a la siguiente $\operatorname{sen} 5x>0$.

Respuesta: $0<x<\frac{\pi}{5}$ y $\frac{2}{5}\pi<x<\frac{\pi}{2}$.

632. La expresión que figura en el denominador de la parte izquierda de la desigualdad es positiva, puesto que

$$|\operatorname{sen} x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}.$$

Por esta razón, la desigualdad es equivalente a la siguiente,

$$\operatorname{sen}^2 x>\frac{1}{4}\quad\text{o bien}\quad|\operatorname{sen} x|>\frac{1}{2}.$$

Respuesta: $\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+k\pi.$

633. Escribamos la desigualdad en la forma
$(\cos x-\operatorname{sen} x)[1-(\cos x+\operatorname{sen} x)]=$

$$=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)(\cos x-\operatorname{sen} x)>0. \qquad (1)$$

Pero $\operatorname{sen}\frac{x}{2}>0$, puesto que $0<x<2\pi$. Examinemos dos casos posibles, en los cuales se cumple la desigualdad (1).

Caso 1.

$$\left.\begin{aligned}&\cos x-\operatorname{sen} x>0,\\&\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}>0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Según la condición del problema, $0<x<2\pi$. Teniendo en cuenta este hecho, de (2) hallamos que la primera desigualdad se cumple cuando $0\leqslant x<\frac{\pi}{4}$ o bien $\frac{5}{4}\pi<x<2\pi$, y la segunda, cuando $\frac{\pi}{2}<x<2\pi$. Por consiguiente, en este caso, $\frac{5}{4}\pi<x<2\pi$.

Caso 2.

$$\left.\begin{aligned}&\cos x-\operatorname{sen} x<0,\\&\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}<0\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

El sistema (3), teniendo en cuenta que $0<x<2\pi$, se cumple cuando $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$.

Respuesta:

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\quad\text{y}\quad\frac{5}{4}\pi<x<2\pi.$$

634. Hagamos $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Entonces, la desigualdad dada toma la forma

$$t>\frac{2t-2+2t^2}{2t+2-2t^2}$$

o bien

$$\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^2-t-1}>0. \qquad (1)$$

Puesto que, $t^2+t+1>0$ para todos los valores reales de t, la desigualdad (1) es equivalente a la desigualdad

$$\frac{t-1}{t^2-t-1} > 0. \tag{2}$$

El trinomio t^2-t-1 tiene las raíces $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Resolviendo (2), hallaremos que, o bien

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

o bien

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 1.$$

Respuesta:

$$\text{a) } 2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \pi + 2k\pi.$$

$$\text{b) } 2k\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

635 De las fórmulas para $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$ (véase la pág. 79) hallamos:

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}, \quad \operatorname{sen}^3 x = \frac{3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{4}.$$

Valiéndonos de estas fórmulas, escribamos la desigualdad dada en la forma

$$(\cos 3x + 3\cos x)\cos 3x - (3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x)\operatorname{sen} 3x > \frac{5}{2}$$

o bien

$$\operatorname{sen}^2 3x + \cos^2 3x + 3(\cos 3x \cos x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x) > \frac{5}{2},$$

o bien

$$\cos 4x > \frac{1}{2},$$

de donde

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

o bien

$$-\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi n < x < \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

636. La desigualdad a demostrar se puede escribir en la forma

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} > \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} + \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}. \tag{1}$$

Pero, $\operatorname{sen}\varphi > 0$ cuando $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, por eso, después de multiplicar ambas partes de la desigualdad (1) por $\operatorname{sen}\varphi$, obtendremos la desigualdad equivalente

$$2\cos^2\frac{\varphi}{2} > \cos^2\frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2} + \operatorname{sen}\varphi$$

o bien $1 > \operatorname{sen}\varphi$. La última desigualdad se cumple cuando $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, por consiguiente, es justa también la desigualdad inicial.

637. Haciendo $\operatorname{tg} x = t$, obtendremos:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}.$$

La parte izquierda pierde el sentido para aquellos valores de x con los cuales $t^2 = 1$, $t^2 = \frac{1}{3}$. Para los demás valores de x, la parte izquierda de la desigualdad es igual a $t^4 + 2t^2 + 1$ y, por consiguiente, adquiere valores positivos.

638. En virtud de que

$$\operatorname{cotg}^2 x - 1 = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}, \qquad 3\operatorname{cotg}^2 x - 1 = \frac{3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x},$$

$$\operatorname{cotg} 3x \cdot \operatorname{tg} 2x - 1 = \frac{\cos 3x \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 3x \cos 2x}{\operatorname{sen} 3x \cos 2x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 3x \cos 2x}.$$

La parte izquierda de la desigualdad puede ser escrita en la forma

$$-\frac{\operatorname{sen} x\,(3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} 3x}$$

Pero,

$$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(x + 2x) = \operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x\,(3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x),$$

por eso, la desigualdad dada se reduce a la desigualdad evidente

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}^4 x} \leqslant -1.$$

639. Utilizando la fórmula

$$\operatorname{tg}(\theta - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\varphi}$$

y la condición

$$\operatorname{tg}\theta = n \operatorname{tg}\varphi,$$

obtendremos:

$$\operatorname{tg}^2(\theta - \varphi) = \frac{(n-1)^2 \operatorname{tg}^2\varphi}{(1 + n\operatorname{tg}^2\varphi)^2} = \frac{(n-1)^2}{(\operatorname{cotg}\varphi + n\operatorname{tg}\varphi)^2}.$$

Hace falta demostrar que

$$(\operatorname{cotg}\varphi + n\operatorname{tg}\varphi)^2 \geqslant 4n$$

o bien

$$(1 + n\operatorname{tg}^2\varphi)^2 \geqslant 4n\operatorname{tg}^2\varphi.$$

Obtenemos, pues, la desigualdad evidente

$$(1 - n\operatorname{tg}^2\varphi)^2 \geqslant 0.$$

640. La desigualdad dada se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{2} + \frac{1 - \operatorname{sen} x}{2 - \operatorname{sen} x} - \frac{2 - \operatorname{sen} x}{3 - \operatorname{sen} x} \geqslant 0$$

y, multiplicándola por $2(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)>0$, puede ser sustituida por la siguiente equivalente:

$$\operatorname{sen}^2 x-5 \operatorname{sen} x+4 \geqslant 0$$

o bien

$$(4-\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x) \geqslant 0, \tag{1}$$

De (1) desprendemos que la última desigualdad, y junto con ésta también la inicial, se cumple para todos los valores de x, con la particularidad de que cuando $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, tiene lugar el signo de igualdad.

641. Establezcamos primeramente que

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|.$$

Examinemos un círculo trigonométrico de radio 1 y supongamos que x denota el valor en radianes de cierto ángulo AOM positivo o negativo (fig. 249). Para cualquier posición del punto M

$$\overset{\frown}{AM}=|x| \cdot OA=|x|,$$
$$|BM|=|\operatorname{sen} x|.$$

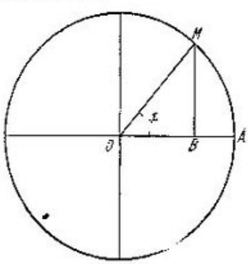

FIG. 249

Puesto que $|BM| \leqslant \overset{\frown}{AM}$, entonces $|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$ (la igualdad tiene lugar solamente cuando $x=0$). En virtud de esto deducimos que $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, es decir, si $0 \leqslant \cos \varphi \leqslant 1<\frac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{sen} \cos \varphi < \cos \varphi$. Pero, $0 \leqslant \operatorname{sen} \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ y por eso $\cos \varphi \leqslant \cos \operatorname{sen} \varphi$. Definitivamente tenemos que $\cos \operatorname{sen} \varphi \geqslant \cos \varphi > \operatorname{sen} \cos \varphi$.

La desigualdad queda demostrada.

642. Utilicemos el método de inducción completa. Sea $n=2$, entonces $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Por consiguiente,

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}>2 \operatorname{tg} \alpha,$$

puesto que $0<1-\operatorname{tg}^2 \alpha<1$. Supongamos que sea

$$\operatorname{tg} n\alpha>n \operatorname{tg} \alpha \tag{1}$$

con la condición de que

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4(n-1)}. \tag{2}$$

Demostremos que $\operatorname{tg}(n+1)\alpha>(n+1) \operatorname{tg} \alpha$, si $0<\alpha<\frac{\pi}{4n}$.

Empleemos la fórmula

$$\operatorname{tg}(n+1)\alpha=\frac{\operatorname{tg} n\alpha+\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} n\alpha}. \tag{3}$$

Puesto que la desigualdad (1) se cumple al cumplirse la condición (2), entonces, se cumplirá, además, cuando $0<\alpha<\frac{\pi}{4n}$. Pero,

$$0<\operatorname{tg} \alpha<1, \tag{4}$$

y, puesto que $0 < n\alpha < \frac{\pi}{4}$, entonces

$$0 < \operatorname{tg} n\alpha < 1. \tag{5}$$

De (4) y (5) obtendremos:

$$0 < 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} n\alpha < 1. \tag{6}$$

De (6) y (3) se desprende que $\operatorname{tg}(n+1)\alpha > (n+1)\operatorname{tg}\alpha$, lo que era necesario demostrar.

643. Puesto que a mayor ángulo del primer cuadrante le corresponde mayor valor de la tangente, entonces,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_i < \operatorname{tg}\alpha_n \tag{1}$$

para $i=1, 2, \ldots, n$. Además, $\cos\alpha_i > 0$ ($i=1, 2, \ldots, n$). Por esta razón, la desigualdad (1) se puede escribir en la forma

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \cos\alpha_i < \operatorname{sen}\alpha_i < \operatorname{tg}\alpha_n \cos\alpha_i. \tag{2}$$

Demos en la desigualdad (2) a i los valores $1, 2, \ldots, n$ y sumemos todas las desigualdades obtenidas. Hallaremos:

$$\operatorname{tg}\alpha_1(\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n) < \operatorname{sen}\alpha_1 + \ldots + \operatorname{sen}\alpha_n < \\ < \operatorname{tg}\alpha_n(\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n). \tag{3}$$

Dividiendo todas las partes de la desigualdad (3) por $\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n$ (lo cual es posible, puesto que $\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n > 0$), tendremos:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\operatorname{sen}\alpha_1 + \ldots + \operatorname{sen}\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n$$

644. Designemos la parte izquierda de la desigualdad que se examina por t. Entonces

$$t = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{A+B}{2},$$

puesto que

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}.$$

Haciendo

$$\cos\frac{A+B}{2} = x,$$

después de las transformaciones evidentes, obtendremos:

$$t = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right) + \\ + \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} = \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2.$$

Por consiguiente,

$$t \leqslant \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

645. Transformemos la parte izquierda de la desigualdad dada de la manera siguiente:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x(\cos x-\operatorname{sen} x)}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{tg} x)}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg} x)}=$$
$$=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg} x)}.$$

Para simplificar la escritura, hagamos $\operatorname{tg} x=t$. Puesto que $0<x<\frac{\pi}{4}$, entonces

$$0<t<1. \qquad (1)$$

De este modo, el problema se reduce a la demostración de la desigualdad

$$\frac{1+t^2}{t}\cdot\frac{1}{t(1-t)}>8$$

con la condición de que $0<t<1$. Pero, en virtud de la desigualdad (1), pág. 22, tenemos que

$$\frac{1+t^2}{t}>2.$$

Además,

$$t(1-t)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1+t^2}{t}\cdot\frac{1}{t(1-t)}>2\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}}=8,$$

lo que era necesario demostrar.

5. Problemas diferentes

646. Hagamos $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}=\beta$ y examinemos $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)$. Valiéndonos de la fórmula para la tangente de la diferencia de dos ángulos, obtenemos:

$$\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg} 2\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (1)$$

Pero, dado que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$, entonces $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12}$. Sustituyendo $\operatorname{tg} 2\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$ en la fórmula (1), hallamos que

$$\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)=0.$$

Entonces

$$\operatorname{sen}(2\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)=0.$$

647. Demostremos que $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=1$. Para hallar $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)$ empleemos la fórmula

$$\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg} 2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 2\beta}. \qquad (1)$$

Calculemos previamente el valor de $\operatorname{tg} 2\beta$ por la fórmula

$$\operatorname{tg} 2\beta=\frac{\operatorname{sen} 2\beta}{\cos 2\beta}=\frac{2\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{\cos 2\beta}.$$

Hace falta hallar $\cos\beta$ y $\cos 2\beta$. Pero,

$$\cos\beta = +\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(puesto que β es un ángulo del primer cuadrante) y

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta = \frac{4}{5}.$$

Por consiguiente, $\operatorname{tg} 2\beta = 3/4$. Colocando el valor hallado de $\operatorname{tg} 2\beta$ en (1), obtendremos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = 1.$$

Demostremos, ahora, que $\alpha + 2\beta = \pi/4$.

Puesto que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$ entonces

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{3}$$

y, además, según la condición del problema, α y β son ángulos del primer cuadrante, por lo tanto, $0 < \alpha < \pi/4$ y $0 < \beta < \pi/4$. De aquí hallamos que $0 < \alpha + 2\beta < 3/4\pi$. Pero, el único ángulo comprendido entre 0 y $3/4\pi$, cuya tangente es igual a 1 es el ángulo $\pi/4$. Así pues, $\alpha + 2\beta = \pi/4$.

648. Es necesario que $\cos x \neq 0$, $\operatorname{sen} x \neq 0$, $\operatorname{sen} x \neq -1$, de donde $x \neq k\pi/2$ (k es un número entero). Para todos los valores de x, excepto $x = k\pi/2$, y tiene sentido y es igual a

$$y = \frac{\operatorname{sen} x\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)}{\cos x\left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x\,(1 + \cos x)}{\cos^2 x\,(1 + \operatorname{sen} x)}. \tag{1}$$

De (1) se desprende que $y > 0$, puesto que, siendo $x \neq k\pi/2$,

$$\cos x < 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x < 1.$$

649. Transformando el producto $\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen} 2\alpha\cdot\operatorname{sen} 3\alpha$ en una suma, por la fórmula (13), pág. 79, obtendremos:

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen} 2\alpha\cdot\operatorname{sen} 3\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha\,(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha\cdot\cos 4\alpha \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < \frac{4}{5}.$$

650. Puesto que $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 3x\cos 2x + \cos 3x \operatorname{sen} 2x$, con ayuda de las fórmulas (5)—(8), pág. 79, después de simples cálculos, hallaremos que

$$\operatorname{sen} 5x = 5\operatorname{sen} x - 20\operatorname{sen}^3 x + 16\operatorname{sen}^5 x. \tag{1}$$

Suponiendo en la fórmula (1) $x = 36°$, obtendremos la ecuación $16t^5 - 20t^3 + 5t = 0$ para la determinación de $\operatorname{sen} 36°$. Esta ecuación tiene las siguientes raíces:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = +\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \quad t_3 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},$$

$$t_4 = +\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \quad \text{y} \quad t_5 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

De estas raíces son positivas las raíces t_2 y t_4. Pero, $\operatorname{sen} 36° \neq t_2$, puesto que $\frac{5+\sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}$ y, por consiguiente, $t_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Así pues,

$$\operatorname{sen} 36° = t_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

651. Utilizando la identidad demostrada en el problema 533, obtendremos:

$$\varphi(x) = \frac{1+3\cos^2 2x}{4},$$

de donde se desprende que el valor máximo de $\varphi(x)$ es igual a 1, y el mínimo, a 1/4.

652. Como resultado de simples transformaciones obtenemos que

$$y = 1 - \cos 2x + 2(1+\cos 2x) + 3\operatorname{sen} 2x = 3 + 3\operatorname{sen} 2x + \cos 2x.$$

Introduciendo el ángulo auxiliar $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, tendremos que

$$y = 3 + \sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos 2x\right) = 3 + \sqrt{10}\operatorname{sen}(2x+\varphi).$$

Por consiguiente, el valor máximo de y es $3+\sqrt{10}$, y el mínimo, es igual a $3-\sqrt{10}$.

653. Si n es un número entero que satisface a la condición del problema, entonces, para todos los valores de x, tenemos:

$$\cos n(x+3\pi)\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{n}(x+3\pi) = \cos nx\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{n}x. \qquad (1)$$

Suponiendo, en particular, que $x=0$, de (1) desprendemos que n deberá satisfacer a la ecuación $\operatorname{sen}\frac{15\pi}{n}=0$. A esta ecuación la satisfacen solamente aquellos números enteros que son divisores del número 15.

$$n = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 15. \qquad (2)$$

Por medio de la comprobación directa nos convencemos de que, para cada uno de estos valores, la función $\cos nx\cdot\operatorname{sen}\frac{5}{n}x$ tiene el período 3π. Con la fórmula (2) se agotan todos los valores buscados de n.

654. Puesto que la suma que se examina, siendo $x=x_1$, es igual a cero, entonces

$$a_1\cos(\alpha_1+x_1)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+x_1) = (a_1\cos\alpha_1+\ldots$$
$$\ldots+a_n\cos\alpha_n)\cos x_1 - (a_1\operatorname{sen}\alpha_1+\ldots+a_n\operatorname{sen}\alpha_n)\operatorname{sen} x_1 = 0. \qquad (1)$$

Pero, según la condición del problema,

$$a_1\cos\alpha_1+\ldots+a_n\cos\alpha_n = 0. \qquad (2)$$

Además, $\operatorname{sen} x_1 \neq 0$, puesto que $x_1 \neq k\pi$. De (1) y (2) obtenemos que

$$a_1\operatorname{sen}\alpha_1+\ldots+a_n\operatorname{sen}\alpha_n = 0. \qquad (3)$$

Sea, ahora, x un número cualquiera. Entonces,

$$a_1\cos(\alpha_1+x)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+x) =$$
$$= (a_1\cos\alpha_1+\ldots+a_n\cos\alpha_n)\cos x - (a_1\operatorname{sen}\alpha_1+\ldots+a_n\operatorname{sen}\alpha_n)\operatorname{sen} x = 0,$$

puesto que, en virtud de (2) y (3) las sumas que figuran entre paréntesis son iguales a cero

655. Supongamos lo contrario, es decir, admitamos que existe $T \neq 0$ tal, que para todos los valores de $x \geqslant 0$ será

$$\cos \sqrt{x+T} = \cos \sqrt{x} \tag{1}$$

(la limitación $x \geqslant 0$ es necesaria por el hecho de que siendo $x < 0$, el radical $\sqrt{x}$ será imaginario. Hagamos primeramente en la fórmula (1) $x=0$; entonces

$$\cos \sqrt{T} = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

y, por lo tanto,

$$\sqrt{T} = 2k\pi. \tag{3}$$

Luego, coloquemos en (1) el valor $x=T$. Entonces, evidentemente, tendremos que, de acuerdo con (1) y (2), $\cos \sqrt{2T} = \cos \sqrt{T} = 1$, de donde

$$\sqrt{2T} = 2l\pi.$$

Puesto que por suposición $T \neq 0$, dividiendo (4) por (3), obtendremos que $\sqrt{2} = \frac{l}{k}$, donde l y k son números enteros. Esto último, como es sabido, es imposible.

656. Primera resolución. Examinemos la suma

$$S = (\cos x + i \operatorname{sen} x) + (\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x) + \ldots + (\cos nx + i \operatorname{sen} nx)$$

y, empleando la fórmula de Moivre, $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$, calculemos la suma S como la suma de una progresión geométrica. Obtendremos:

$$S = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^{n+1} - (\cos x + i \operatorname{sen} x)}{\cos x + i \operatorname{sen} x - 1}.$$

La suma $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx$ es igual a la parte imaginaria de S.

Segunda resolución. Multiplicando la parte izquierda por $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ y empleando la fórmula (13), pág. 79, obtendremos:

$$\left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3}{2} x\right) + \left(\cos \frac{3}{2} x - \cos \frac{5}{2} x\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\cos \frac{2n-1}{2} x - \cos \frac{2n+1}{2} x\right) = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \frac{nx}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x,$$

de donde, precisamente, se deduce la fórmula necesaria.

657 Designemos la suma buscada por A y agreguémosle la segunda sum

$$B = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{4}}{2^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi n}{4}}{2^n},$$

multiplicándola previamente por i Obtendremos:

$$A + Bi = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{4}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2^n}\left(\cos n \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} n \frac{\pi}{4}\right).$$

Empleando la fórmula de Moivre, hallamos:

$$A+Bi=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)}.$$

En la última expresión se ha usado la fórmula para la suma de los términos de una progresión geométrica. La suma buscada A puede ser hallada como la parte real de la expresión obtenida. Observando que

$$\cos\frac{\pi}{4}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

hallamos sucesivamente que

$$A+Bi=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(\cos n\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right)}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{i}{2\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{(1+i)\left[\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)-i\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right]}{2^n\left[(2\sqrt{2}-1)-i\right]}=$$

$$=\frac{(1+i)(2\sqrt{2}-1+i)}{2^n\left[(2\sqrt{2}-1)^2+1\right]}\left[\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)-i\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$=\frac{\left[(2\sqrt{2}-2)+2i\sqrt{2}\right]\left[\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)-i\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right]}{2^n(10-4\sqrt{2})}.$$

Separando la parte real, obtenemos:

$$A=\frac{(\sqrt{2}-1)\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}}{2^n(5-2\sqrt{2})}.$$

658. La afirmación quedará demostrada si establecemos que $A=B=0$. Sea $A^2+B^2\neq 0$, es decir, por lo menos uno de los números A, B difiere de cero. Entonces

$$f(x)=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\operatorname{sen} x\right)\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(x+\varphi),$$

donde $\operatorname{sen}\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\varphi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Sea, ahora, x_1 y x_2 los dos valores del argumento indicados en el problema; entonces, $f(x_1)=f(x_2)=0$, y puesto que $\sqrt{A^2+B^2}\neq 0$, $\operatorname{sen}(x_1+\varphi)=\operatorname{sen}(x_2+\varphi)=0$. De aquí $x_1+\varphi=m\pi$, $x_2+\varphi=n\pi$ y, por consiguiente, $x_1-x_2=k\pi$ para cierto valor entero de k. Esta igualdad conduce a una contradicción, puesto que según la condición $x_1-x_2\neq k\pi$.

Por consiguiente, $A^2+B^2=0$, de donde $A=B=0$.