PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

II

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

В. БОЛГОВ, Б. ДЕМИДОВИЧ, В. ЕФИМЕНКО,
А. ЕФИМОВ, А. КАРАКУЛИН, С. КОГАН
Г. ЛУНЦ, Е. ПОРШНЕВА, А. ПОСПЕЛОВ,
С. ФРОЛОВ, Р. ШОСТАК, А. ЯНПОЛЬСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Под редакцией
А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. Bolgov, B. Demidovich, V. Efimenko,
A. Efimov, A. Karakulin, S. Kogan,
G. Lunts, E. Porshneva, A. Pospelov,
S. Frolov, R. Shostak, A. Yampolski

PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

PARA LOS CENTROS
DE ENSEÑANZA
TÉCNICA SUPERIOR

CAPÍTULOS ESPECIALES DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

REDACTORES
A. EFIMOV, B. DEMIDOVICH

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por
S. Ya. Kalashnik

На испанском языке
Impreso en la URSS

INDICE

PREFACIO

El segundo tomo del libro «Problemas de matemáticas superiores para los centros de enseñanza técnica superior» contiene tales temas de matemáticas como el cálculo integral de las funciones de varias variables, análisis vectorial, ecuaciones diferenciales, conceptos fundamentales de la teoría de las funciones de variable compleja, series numéricas y funcionales y sus aplicaciones, cálculo operacional.

El material expuesto en este libro refleja las partes correspondientes del programa del curso de matemáticas superiores aprobado por el Ministerio de Enseñanza Superior y Media Especializada de la URSS.

Al igual que en el primer tomo, en el segundo cada párrafo comienza por una introducción teórica breve. A los problemas propuestos para la resolución individual preceden los ejemplos que se analizan detalladamente. Todos los problemas de cálculo tienen respuestas; los problemas marcados con uno o dos asteriscos vienen acompañados por indicaciones para resolverlos o por soluciones.

La particularidad de este libro consiste en que contiene problemas que exigen la utilización de ordenadores para resolverlos; estos problemas se dan en las secciones correspondientes. Luego, la teoría de las series funcionales y potenciales generales se expone aplicando la teoría de la funciones de variable compleja. Este enfoque, a nuestro juicio, permite apreciar de un modo adecuado las propiedades de las series potenciales y la representación de las funciones por series potenciales. Para los centros de enseñanza técnica superior en los cuales la teoría de las series se expone por separado en la región real y en la compleja, en los puntos correspondientes del § 2 del cap. 12 se dan primero los problemas de las series con funciones de variable real y en los problemas del § 3 la variable z puede considerarse real, es decir, se puede poner $z = x$.

Así como en el primer tomo el comienzo de las resoluciones de diversos ejemplos se indica con el signo ◀, el fin, con el signo ▶ ; y el comienzo de las indicaciones para los problemas, con el signo ●.

A pesar de que el trabajo referente a la composición de la recopilación de problemas fue distribuido entre los autores por capítulos, cada miembro del colectivo de autores lleva una responsabilidad completa por la recopilación en total.

El colectivo de autores aprovecha la ocasión para expresar una vez más la gratitud a los profesores Prilepco A. I., Trenóguin B. A. y Pojozháev S. I., jefes de las cátedras de matemáticas en los Institutos de Moscú de Ingeniería Física, de Acero y Aleaciones y Energético, así como a los colaboradores de estas cátedras que tomaron parte en la discusión del manuscrito del libro y hicieron valiosas observaciones mejorando así su contenido.

Los autores piden se comuniquen todas las observaciones y deseos referentes al contenido y la collección de los problemas a la dirección: 117071, Moscú B-71, Leninski prospect 15, Redacción principal de literatura físico-matemática.

CAPÍTULO 8

INTEGRALES MULTIPLES

§ 1. Integral doble

1. Propiedades de la integral doble y su cálculo en coordenadas rectangulares cartesianas. Sea la función $f(x, y) = f(P)$ definida y continua sobre la región cerrada y acotada G del plano Oxy, $\sigma_n = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n\}$ una partición de la región G en subregiones elementales $\Delta\sigma_k$, cuyas áreas designamos también por $\Delta\sigma_k$, y sus diámetros por d_k. Fijemos los puntos $P_k \in \Delta\sigma_k$, $k = 1, \ldots, n$. La expresión

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\Delta\sigma_k$$

se llama suma integral para la función $f(P)$ por la región G. Si existe el límite de sucesión de las sumas integrales S_n para $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} d_k \to 0$ (en este caso $n \to \infty$) y si este límite no depende ni del método de división de la región G en subregiones elementales $\Delta\sigma_k$, ni de la elección de los puntos $P_k \in \Delta\sigma_k$, entonces éste se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ por la región G y se designa mediante $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$.

De este modo,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\Delta\sigma_k.$$

Para la integral doble son válidas las propiedades de linealidad y aditividad (véase el problema 1.1).

El cálculo de la integral doble se reduce al cálculo de las integrales reiteradas del modo siguiente. Sea la región G (fig. 79) limitada por las curvas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, además, las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ siempre son continuas sobre $[a, b]$ y $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$. Entonces

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dy\,dx = \int_b^a dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, x)\,dy, \tag{1}$$

con la particularidad de que primero se calcula la integral interna por la variable y (x es parámetro) y el resultado obtenido se integra según x. Señalemos que si la curva $\varphi_1(x)$ (o la curva $\varphi_2(x)$) en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ está definida por distintas expresiones analíticas, por ejemplo,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)} x & \text{para } a \leqslant x \leqslant c, \\ \varphi_1^{(2)}(x) & \text{para } c < x \leqslant b, \end{cases}$$

entonces la integral por la derecha se escribe en forma de suma de dos integrales

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_a^c dx \int_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

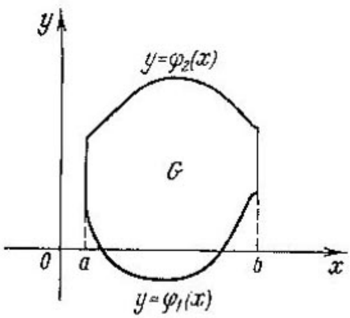


Fig. 79

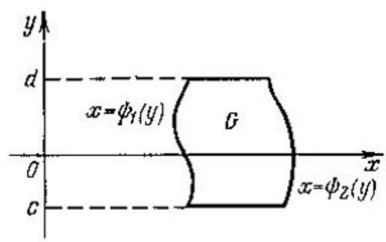


Fig. 80

Análogamente, si la región G está limitada por las curvas $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, y las funciones $\psi_1(y)$ y $\psi_2(y)$ siempre son continuas sobre $[c, d]$ y $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ (fig. 80), entonces

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx. \tag{2}$$

La integral doble representada en forma de (1) ó (2) se llama también integral reiterada.

EJEMPLO 1. Determínense los límites de integración por dos modos y calcúlese la integral doble $I = \iint_G \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$ si la región de integración G está limitada por las líneas $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

◀ La forma de la región G (fig. 81) permite aplicar la fórmula (1) para $\varphi_1(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi_2(x)=x$, $a=1$, $b=2$:

$$I=\iint\limits_G \frac{x^2}{y_2}\,dx\,dy=\int\limits_1^2 x^2\,dx\int\limits_{1/x}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int\limits_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Big|_{1/x}^{x}\right)dx$$

$$=\int\limits_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=2\,\frac{1}{4}.$$

Si para calcular la integral doble se aplica la fórmula (2) entonces se debe poner

$$\psi_1(y)=\begin{cases}\frac{1}{y} & \text{para } \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\\ y & \text{para } 1<y\leqslant 1,\end{cases}\qquad \psi^2(x)=2,$$

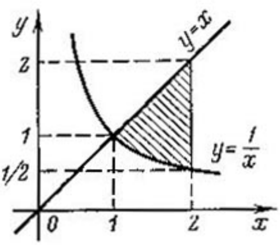


Fig. 81

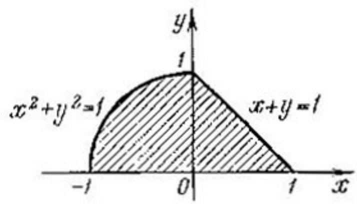


Fig. 82

$c=\frac{1}{2}$, $d=2$. Entonces

$$I=\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy=\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dy}{y^2}\int\limits_{1/y}^{2}x^2\,dx+\int\limits_1^2\frac{dy}{y^2}\int\limits_y^2 x^2\,dx.$$

Es evidente que el primer método de cálculo en este ejemplo es más conveniente que el segundo.

Ejemplo 2. Cámbiese el orden de integración en la integral reiterada

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)\,dx.$$

◀ Construyamos la región de integración G según los límites de integración: $\psi_1(y)=-\sqrt{1-y^2}$, $\psi_2(y)=1-y$, $y=0$, $y=1$

(fig. 82). Superiormente la región G está limitada por la curva

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{para } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x & \text{para } \quad 0<x<1,\end{cases}$$

e inferiormente por la curva $y=0$. Por esto tenemos

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,\ y)\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,\ y)\,dy. \ \blacktriangleright$$

1.1. Utilizando la definición de la integral doble demuéstrense las siguientes propiedades suyas:

a) linealidad:

$$\iint_G (f(x,\ y)\pm g(x,\ y))\,dx\,dy=$$

$$=\iint_G f(x,\ y)\,dx\,dy\pm\iint_G g(x,\ y)\,dx\,dy$$

y

$$\iint_G \lambda f(x,\ y)\,dx\,dy=\lambda\iint_G f(x,\ y)\,dx\,dy \quad (\lambda\in\mathbb{R});$$

b) aditividad: si $G=G_1+G_2$ entonces

$$\iint_G f(x,\ y)\,dx\,dy=\iint_{G_1} f(x,\ y)\,dx\,dy+\iint_{G_2} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Calcúlense las integrales reiteradas:

1.2. $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^2 (x^2+y)\,dy.$ **1.3.** $\displaystyle\int_0^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}} \frac{x\,dy}{x^2+y^2}.$

1.4. $\displaystyle\int_1^3 dy\int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2}.$

1.5 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr.$

1.6. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^3\,dr.$

Para las integrales reiteradas dadas escríbanse las ecuaciones de las curvas que limitan las regiones de integración y constrúyanse estas regiones:

1.7. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x+3} f(x, y)\, dy.$

1.8. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x, y)\, dy.$

1.9. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx.$

1.10. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\, dy.$

Para las regiones G indicadas más abajo escríbase la integral doble

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy$$

en forma de integrales reiteradas tomadas en distintos órdenes

1.11. G es un rectángulo con los vértices A (1, 2), B (5, 2), C (5, 4), D (1, 4).

1.12. G es un paralelogramo limitado por las rectas $y = x$, $y = x - 3$, $y = 2$, $y = 4$.

1.13. G es una región limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 2a^2$, $x^2 = ay$ $(a > 0,\ y > 0)$.

1.14. G es una región limitada por las curvas $y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(a > 0,\ y > 0)$.

1.15. G es una región limitada por las curvas $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(a > 0,\ y > 0)$.

1.16. ¿Según qué variable está tomada la integral exterior en la integral reiterada

$$\int\limits_1^2 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3} f(x, y)\, dy\, dx?$$

¿Cuál es la región de integración?

Cámbiese el orden de integración en las siguientes integrales reiteradas:

1.17. $\int\limits_{-1}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.18. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y)\, dx.$

1.19. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.20. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2/9}^{y} f(x, y)\, dx + \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{y^2/9}^{1} f(x, y)\, dx.$

1.21. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y)\, dy + \int\limits_{2}^{10/3} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y)\, dy.$

1.22. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.23. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y)\, dx.$

1.24. $\int\limits_{3}^{7} dx \int\limits_{9/x}^{3} f(x, y)\, dy + \int\limits_{7}^{9} dx \int\limits_{9/x}^{10-x} f(x, y)\, dy.$

1.25. Muéstrese que

$$\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)\, dy = \int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{y}^{a} f(x, y)\, dx$$

y aplicando esta fórmula, demuéstrese la *fórmula de Dirichlet*

$$\int\limits_{0}^{t} dx \int\limits_{0}^{x} f(y)\, dy = \int\limits_{0}^{t} (t-y)\, f(y)\, dy.$$

Calcúlense las siguientes integrales:

1.26. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las rectas $y=x$, $x+y=2a$, $x=0$.

1.27. $\iint\limits_G \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, donde G es un trapecio con vértices $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(10, 2)$, $D(2, 2)$.

1.28. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $x+y=2$, $x^2+y^2=2y$.

1.29. $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, donde G es un triángulo con vértices $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(0, 1)$.

1.30. $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $y=x^2$ o $y=\sqrt{x}$.

1.31. $\iint\limits_G (4-y)\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $x^2=4y$, $y=1$, $x=0$ $(x>0)$,

1.32. $\iint\limits_G \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, donde la región G está limitada por las curvas $y=x\operatorname{tg} x$, $y=x$.

1.33. $\iint\limits_G \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $y^2-x^2=a^2$, $x=a$, $x=0$, $y=0$ $(y>0)$.

1.34. $\iint\limits_G e^{x+y}\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por las curvas $y=e^x$, $x=0$, $y=2$.

1.35*. $\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy$, donde la región está limitada por el eje Ox y el arco de la elipse $x=a\cos t$, $y=b\operatorname{sen} t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$.

1.36. $\iint\limits_G x\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por el eje Ox y la onda de una cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,

1.37. $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, donde la región G está limitada por los ejes de coordenadas y el arco de una astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\, t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$.

1.38. Hállese el valor medio de la función $f(x, y) = \cos^2 x \cos^2 y$ en la región $G = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$.

1.39*. Estímese la magnitud de la integral

$$I = \iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 3} \frac{dx\,dy}{9 + \mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}^2 (x+y)}.$$

1.40. Hállese el valor medio de la función $f(x, y) = 3x + 2y$ en el triángulo con vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

2. Cambio de variables en la integral doble. Supongamos que las funciones

$$x = \varphi(u, v) \text{ e } y = \psi(u, v) \tag{3}$$

realizan una aplicación biunívoca continuamente diferenciable de la región Γ del plano O_1uv sobre la región G del plano Oxy. Esto significa, que en la región G existe una aplicación continuamente diferenciable inversa $u = \eta(x, y)$ y $v = \chi(x, y)$ y en la región Γ el jacobiano de transformación es diferente de cero, es decir,

$$I(x, v) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{matrix} \right\| \neq 0 \ (u, v) \in \Gamma. \tag{4}$$

Las magnitudes u y v pueden considerarse como coordenadas rectangulares para los puntos de la región Γ y al mismo tiempo como coordenadas *curvilíneas* de los puntos de la región G.

Si en la integral doble

$$\iint\limits_G f(y, y)\,dx\,dy$$

cambiamos las variables según la fórmula (3), la región de integración de la integral obtenida será la región que al elegir adecuadamente las funciones $\varphi(u, v)$ y $\psi(u, v)$ puede resultar más simple que la región G, además tiene lugar la fórmula:

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma f(\varphi(y, v), \psi(u, v))\,|(u, v))|\,du\,dv. \tag{5}$$

Para calcular la integral por la región Γ se emplean los métodos, expuestos en el p. 1, de reducción de la integral doble a las reiteradas.

EJEMPLO 3. Calcúlese $\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dx\,dy$ si la región G está limitada por las curvas $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=p$, $xy=q$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$.

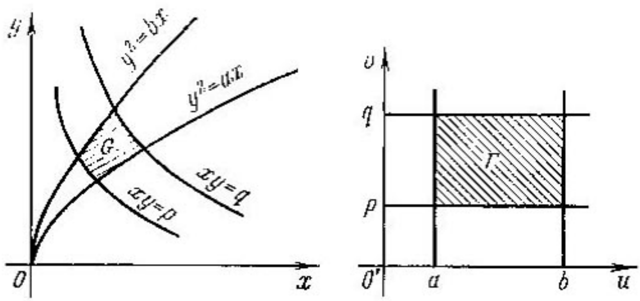


Fig. 83

◀ Pasemos a las nuevas variables u y v según las fórmulas $y^2 = ux$, $xy = v$. Entonces

$$x=u^{-1/3}v^{2/3}, \quad y=u^{1/3}v^{1/3}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3},$$

$$I(u,\ v)=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3u}$$

$$|I(u,\ v)|=\frac{1}{3u} \text{ para } u>0.$$

Las ecuaciones de las líneas toman la forma

$$u=a,\ u=b,\ v=p,\ v=q.$$

La región G del plano Oxy se transforma en el rectángulo Γ del plano $O'uv$ (fig. 83). Empleando la fórmula (5) obtenemos

$$\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dx\,dy=\frac{1}{3}\iint\limits_\Gamma \sqrt{v}\,\frac{du\,dv}{u}=\frac{1}{3}\int_a^b \frac{du}{u}\int_p^q \sqrt{v}\,dv=$$

$$=\frac{1}{3}\ln u\Big|_a^b\cdot\frac{2}{3}v^{3/2}\Big|_p^q=\frac{2}{9}(q^{3/2}-p^{3/2})\ln\frac{b}{a}. \ ▶$$

Entre las coordenadas curvilíneas las más usadas son las coordenadas polares

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r \operatorname{sen}\varphi,$$

para las cuales

$$I(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

y la fórmula (5) se escribe en forma

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint_\Gamma f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{6}$$

EJEMPLO 4. Pasando a las coordenadas polares calcúlese la integral doble

$$\iint_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

donde la región G está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$.

◀ Pongamos $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$ y apliquemos la fórmula (6). Puesto que $x^2 + y^2 = r^2$, entonces

$$\iint_G (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_\Gamma r^3\,dr\,d\varphi.$$

La ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$ se transforma en $r = 2a\cos\varphi$. Por esto la región Γ es la región limitada inferiormente por el eje $r = 0$, superiormente por la cosinusoide $r = 2a\cos\varphi$, con la particularidad de que $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Por consiguiente

$$\iint_\Gamma r^3\,dr\,d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r\,dr^3 =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\bigg|_0^{2a\cos\varphi}\right) d\varphi = 4a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= 8a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 8a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^4. \blacktriangleright$$

Pásese a las coordenadas polares y determínense los límites de integración por las nuevas variables en las integrales siguientes:

1.41. $\displaystyle\int_0^{3a/4} dx \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{3a^2}{4} - x^2}}^{\sqrt{ax - x^2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

1.42. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{ax}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.43. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx.$

1.44. $\iint\limits_G f\left(\frac{y}{x}\right) dx\, dy$, donde la región G está limitada por las líneas $x^2+y^2=\sqrt{6}x$, $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$, $y=0$ $(y\geqslant 0,\ x\leqslant\sqrt{6})$.

Pasando a las coordenadas polares calcúlense las siguentes integrales:

1.45. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy.$

1.46. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$

1.47. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2-9}\, dx\, dy$ donde la región G es un anillo entre dos circunferencias $x^2+y^2=9$ y $x^2+y^2=25$.

1.48. $\iint\limits_G \frac{dx\, dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ donde la región G es una parte del círculo de radio a con el centro en el punto $O(0, 0)$, la cual está situada en el primer cuadrante.

1.49. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\, dx\, dy$, donde la región G está limitada por las curvas $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ $(y>0)$.

1.50. $\iint\limits_G \frac{x\, dx\, dy}{x^2+y^2}$ donde la región G está limitada por las curvas $x^2=ay$, $x^2+y^2=2a^2$, $y=0$ $(x>0,\ a>0)$.

1.51. $\iint\limits_G x\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ dondo la región G está limitada por el pétalo de la lemniscata $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$.

Pásese a las nuevas variables u y v y determínense los límites de integración en las siguientes integrales:

1.52. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ donde la región G está determinada por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y \leqslant a$. Pónganse $u = x + y$, $ay = uv$.

1.53. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ donde la región G está limitada por las curvas $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b)$ $0 < p < q)$. Pónganse $x^2 = uy$, $y^2 = vx$.

1.54. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{1-x}^{3-x} f(x, y)\,dy$. Pónganse $u = x + y$, $v = x - y$.

1.55. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ donde la región G está limitada por las curvas $xy = p$, $xy = q$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < p < q$, $0 < a < b)$. Pónganse $u = xy$, $y = vx$.

Calcúlense las siguientes integrales dobles:

1.56. $\iint\limits_G \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$ $(c > 1)$ donde la región G esta limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (pásese a las *coordenadas polares generalizadas* r y φ aplicando las fórmulas $x = ar\cos\varphi$, $y = br \operatorname{sen}\varphi$).

1.57. $\iint\limits_G e^{(x+y)^2}\,dx\,dy$, donde la región G está dada por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$ (realícese el cambio de las variables $x = u(1 - v)$, $y = uv$).

1.58. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$ donde la región G está limitada por las líneas $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qa$ $(0 < a < b$, $0 < p < q)$ (escójase el cambio adecuado de las variables).

3. Aplicaciones de las integrales dobles. *Aplicaciones geométricas.* El *área* S de la región plana G se expresa, en función del sistema que se analiza, mediante las siguientes integrales

$$S = \iint\limits_G dx\,dy \tag{1}$$

en las coordenadas rectangulares cartesianas,

$$S=\iint\limits_{\Gamma} |I|\,du\,dv \tag{8}$$

en las coordenadas curvilíneas. Aquí

$$I=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ en la región } \Gamma.$$

En particular, en las coordenadas polares $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ tenemos

$$S=\iint\limits_{\Gamma} r\,dr\,d\varphi. \tag{9}$$

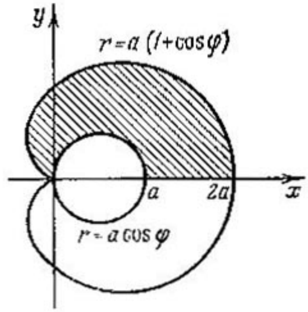


Fig. 84

EJEMPLO 5. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r=a(1+\cos\varphi)$ y $r=a\cos\varphi$ ($a>0$).

◀ En el plano Oxy la figura está representada en la fig. 84. Calcúlese por la fórmula (9) el área de la parte superior y dóblese:

$$S=2\iint\limits_{\Gamma} r\,dr\,d\varphi=2\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr+$$

$$+2\int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi\int\limits_{0}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(r^2\Big|_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)}\right)d\varphi+$$

$$+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(r^2\Big|_{0}^{a(1+\cos\varphi)}\right)d\varphi=a^2\int\limits_{0}^{\pi/2}(1+2\cos\varphi)\,d\varphi+$$

$$+a^2\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=a^2(\varphi+2\operatorname{sen}\varphi)\Big|_0^{\pi/2}+$$

$$+a^2\left(\frac{3\varphi}{2}+2\operatorname{sen}\varphi+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\varphi\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{5}{4}\pi a^2. \ \blacktriangleright$$

Si la superficie suave tiene la ecuación $z=f(x,y)$, entonces el *área* de una parte de esta *superficie* que se proyecta en la región G del plano Oxy es igual a

$$Q=\iint\limits_{G}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \tag{10}$$

(la función $z=f(x,y)$ es unívoca en la región G).

EJEMPLO 6. Hállese el área de una parte de la superficie del paraboloide $y^2+z^2=2ax$ que se encuentra entre el cilindro $y^2=ax$ y el plano $x=a$ $(a>0)$.

◀ La mitad superior del paraboloide dado se describe por la ecuación $z=\sqrt{2ax-y^2}$. Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{a}{\sqrt{2ax-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{2ax-y^2}},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\frac{a^2+y^2}{2ax-y^2}=\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}.$$

Ya que la superficie que se examina es también simétrica respecto al plano Oyz, entonces el área buscada se calcula como el área cuadri-

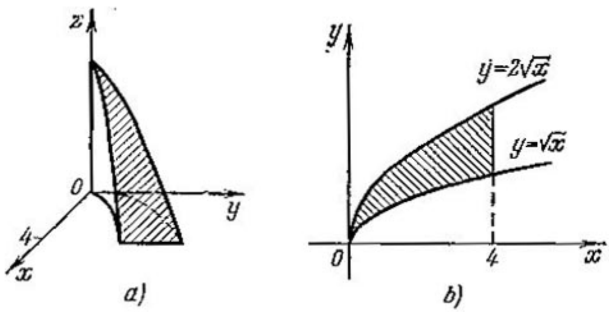


Fig. 85

plicada de una parte de esta superficie situada en el primer octante:

$$Q=4\iint\limits_G\sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}}\,dx\,dy=4\int_0^a\sqrt{2ax+a^2}\,dx\int_0^{\sqrt{ax}}\times$$

$$\times\frac{dy}{\sqrt{2ax-y^2}}=4\int_0^a\sqrt{2ax+a^2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{y}{\sqrt{2ax}}\Big|_0^{\sqrt{ax}}\right)dx=$$

$$=4\int_0^a\sqrt{2ax+a^2}\,\frac{\pi}{4}\,dx=\frac{\pi}{3a}\,(2ax+a^2)^{3/2}\Big|_0^a=$$

$$=\frac{\pi}{3a}\,(3\sqrt{3}\,a^3-a^3)=\frac{\pi a^2}{3}\,(3\sqrt{3}-1).\ ▶$$

El *volumen V del cilindro* limitado superiormente por la superficie continua $z=f(x,y)$, inferiormente por el plano $z=0$ y por los lados mediante la superficie cilíndrica plana que corta en el plano Oxy la región G, se expresa por la integral

$$V = \iint_G f(x, y)\,dx\,dy \qquad (11)$$

(la función $f(x, y) \geqslant 0$ es unívoca en la región G).

Ejemplo 7. Hállese el volumen de cuerpo limitado por las superficies $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

◀ El cuerpo dado es un cilindroide limitado superiormente por el plano $x + z = 4$, inferiormente por el plano $z = 0$ y por los lados mediante los cilindros rectos $y = \sqrt{x}$ e $y = 2\sqrt{x}$ (fig. 85, a). La región de integración está representada en la fig. 85, b.

Tenemos: $z = 4 - x$,

$$V = \iint_G (4 - x)\,dx\,dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4 - x)\,dy =$$

$$= \int_0^4 (4 - x)(2\sqrt{x} - \sqrt{x})\,dx = \int_0^4 (4 - x)\sqrt{x}\,dx =$$

$$= \left(4 \cdot \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{128}{15}. \;\blacktriangleright$$

1.59. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = 4ax + 4a^2$ y $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

1.60. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $xy = 4$ y $x + y = 5$.

1.61. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, $x = 2y$, $x = 0$ $(a > 0)$.

1.62*. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $y = x$, $y = 0$ $(0 < a < b)$.

1.63. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r = a(1 - \cos\varphi)$ y $r = a$ (fuera de la cardioide).

1.64. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ y $x^2 + y^2 = 2ax$.

1.65*. Hállese el área de la figura limitada por el bucle de la curva $(x + y)^4 = ax^2y$ que se encuentra en el primer cuadrante $(a > 0)$.

1.66*. Hállese el área de la figura limitada por la curva $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{c^2}$.

1.67*. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $my^2 = x^3$, $ny^2 = x^3$ $(0 < a < b$, $(0 < m < n)$.

1.68*. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < p < q, 0 < a < < b)$.

1.69. Hállese el área de una parte del plano $x + y + + z = a$, que está cortada por el cilindro $y^2 = ax$ y el plano $x = a$.

1.70. Hállese el área de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está cortada por el cilindro $y^2 = = a(a - x)$.

1.71. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + z^2 = y^2$ que está cortada por el cilindro $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

1.72. Hállese la superficie total del cuerpo limitado por los cilindros $x^2 = ay$, $z^2 = ay$ y el plano $y = 2a$ $(a > 0)$.

1.73. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + z^2 = y^2$ que está cortada por los planos $x = 0$, $x + y = 2a$, $y = 0$.

1.74. Hállese el área de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ que está cortada por el cilindro $z^2 = = 2a\,(2a - x)$.

1.75. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + + z^2 = 2a^2$ que está dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

1.76. Hállese el área de una parte de la superficie del paraboloide $z = x^2 - y^2$ que está entre los paraboloides $z = 3x^2 + y^2 - 2$ y $z = 3x^2 + y^2 - 4$.

1.77. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + + z^2 = a^2$ que se corta por el cilindro con las generatrices paralelas al eje Oz; la rosácea de tres pétalos $r = a$ sen 3φ sirve de directriz de éste.

1.78. Hállese el área de una parte de la superficie helicoidal $z = a$ arctg x que se corta por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

1.79. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + + z^2 = 1$ situada entre los planos $z = \frac{\sqrt{3}}{3}\, y$ y $z = y$ $(z \geqslant 0$, $y \geqslant 0)$.

1.80. Hállese el área de una parte de la superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que se corta por un cilindro con generatrices paralelas al eje Oz; la cardioide $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ sirve de directriz de éste.

1.81. Hállese el área de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se corta de ésta por el cilindro $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

Hállense los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies indicadas:

1.82. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0)$.

1.83*. $z^2 - x^2 = a^2$, $z^2 - y^2 = a^2$, $z = a\sqrt{2}$ $(a > 0)$.

1.84. $y = x^2$, $z = y$, $z + y = 2$.

1.85. $x^2 - y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ (dentro del cilindro; $a > 0$).

1.86. $x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2$, $2(x^2 + y^2) - z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

1.87. $z = ce^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

1.88. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2$ $(a > 0)$.

1.89. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

1.90*. $z = xy$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y^2 = x$, $y^2 = 3x$.

1.91*. $z = x^2 + y^2$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$, $(x > 0,\ y > 0)$.

Aplicaciones mecánicas. Si una placa ocupa la región G del plano Oxy y tiene una densidad superficial variable $\gamma = \gamma(x, y)$, entonces la *masa* M de la placa y sus *momentos estáticos* M_x y M_y respecto a los ejes Ox y Oy se expresan mediante integrales dobles

$$M = \iint_G \gamma(x, y)\,dx\,dy,$$

$$M_x = \iint_G y\gamma(x, y)\,dx\,dy, \tag{12}$$

$$M_y = \iint_G x\gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

Las coordenadas del *centro de masas* $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de la placa se determinan del modo siguiente:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_G x\gamma(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \gamma(x, y)\,dx\,dy}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_G y\gamma(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \gamma(x, y)\,dx\,dy}. \tag{13}$$

Los *momentos de inercia* de la placa respecto a los ejes Ox y Oy son, respectivamente, iguales a

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_G y^2 \gamma(x, y)\, dx\, dy, \\ I_y &= \iint_G x^2 \gamma(x, y)\, dx\, dy, \end{aligned} \tag{14}$$

y el momento de inercia respecto al origen de coordenadas (momento de inercia *polar*) es igual

$$I_O = \iint_G (x^2+y^2)\, \gamma(x, y)\, dx\, dy = I_x + I_y. \tag{15}$$

Si la placa es homogénea entonces en las fórmulas (12)—(15) se debe poner $\gamma(x, y) = 1$.

Ejemplo 8. Hállense las coordenadas del centro de masas de la placa homogénea limitada por las curvas $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

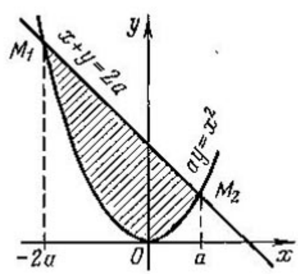


Fig. 86

◀ Las líneas se cortan en los puntos $M_1(-2a, 4a)$, $M_2(a, a)$ (fig. 86). Por esto se puede escribir:

$$S = \iint_G dx\, dy = \int_{-2a}^{a} dx \int_{x^2/a}^{2a-x} dy = \int_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) dx =$$

$$= \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right)\Big|_{-2a}^{a} = \frac{9}{2}a^2;$$

$$M_x = \iint_G y\, dx\, dy = \int_{-2a}^{a} dx \int_{x^2/a}^{2a-x} y\, dy = \frac{1}{2}\int_{-2a}^{a} \left((2a-x)^2 - \frac{x^4}{a^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(2a-x)^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)\Big|_{-2a}^{a} = \frac{36}{5}a^3;$$

$$M_y=\iint\limits_G x\,dx\,dy=\int\limits_{-2a}^{a} x\,dx\int\limits_{x^2/a}^{2a-x} dy=\int\limits_{-2a}^{a} x\,(2a-x-x^2/a)\,dx=$$

$$=\left(ax^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a}=-\frac{9}{4}\,a^3.$$

Sustituyendo los valores hallados en la fórmula (13) tenemos

$$\bar{x}=\frac{M_y}{S}=-\frac{a}{2},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{S}=\frac{8}{5}\,a.\ ▶$$

1.92. Hállese la masa de una placa redonda de radio R si su densidad es proporcional al cuadrado de la distancia del punto hasta el centro y es igual a δ en el borde de la placa.

1.93. Hállense los momentos estáticos respecto a los ejes Ox y Oy de la figura homogénea limitada por la cardioide $r=a\,(1+\cos\varphi)$ y el eje polar.

1.94. Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura homogénea limitada por las curvas $y^2=ax$, $y=x$.

1.95. Hállese la masa de una placa que tiene forma de un triángulo rectángulo con catetos $OB=a$ y $OA=b$, si la densidad en cualquier punto es igual a la distancia del punto hasta el cateto OA.

1.96. Hállense los momentos estáticos respecto a los ejes Ox y Oy de una figura homogénea limitada por la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ y la recta OA que pasa por el origen de coordenadas y el vértice $A\,(\pi/2,\ 1)$ de la sinusoide.

1.97. Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura homogénea limitada por las curvas $xy=a^2$, $y^2=8ax$, $x=2a$ $(a>0)$.

1.98. Hállense los momentos de inercia de un triángulo homogéneo limitado por las rectas $x+y=1$, $x+2y=2$, $y=0$ respecto a los ejes Ox y Oy.

1.99. Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura homogénea limitada por el bucle de la curva $r=a\operatorname{sen}2\varphi$ que está situado en el primer cuadrante.

1.100. Hállense los momentos de inercia de una figura homogénea limitada por la cardioide $r=a\,(1+\cos\varphi)$ con respecto a los ejes Ox, Oy y con respecto al polo.

1.101. Hállense los momentos de inercia de una figura homogénea limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con respecto a los ejes Ox, Oy y con respecto al origen de coordenadas.

1.102*. Hállense los momentos de inercia de una figura homogénea limitada por las curvas $y^2 = ax$, $y = a$, $x = 0$:

a) respecto al origen de coordenadas,

b) respecto a la recta $x = -a$.

1.103. Hállense los momentos de inercia de un triángulo limitado por las rectas $x + y = a$, $x = a$, $y = a$, con respecto a los ejes Ox, Oy y con respecto al origen de coordenadas, si la densidad es proporcional a la ordenada del punto.

1.104. Hállese el momento de inercia de una figura homogénea limitada por la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ respecto al polo.

1.105. Hállense los momentos de inercia de un sector circular homogéneo de radio a, con el ángulo α en el vértice (que coincide con el origen de coordenadas), con respecto a los ejes Ox y Oy.

1.106*. Una placa fina tiene forma de anillo circular con radios R_1 y R_2 $(R_1 < R_2)$. El calor específico de la placa varía según la ley $c = |xy|$, la densidad es constante e igual a γ. Hállese la cantidad de calor Q recibida por la placa al calentarla desde la temperatura t_1 hasta la temperatura t_2.

1.107*. Sobre una placa fina que tiene forma de segmento parabólico con base $2a$ y altura h, está distribuida una carga eléctrica con una densidad superficial de $\sigma = 2x + y$. Hállese la carga total E de la placa.

§ 2. Integral triple

1. La integral triple y su cálculo en coordenadas rectangulares cartesianas. Se llama *integral triple* de una función continua $f(x, y, z)$ sobre una región espacial cerrada y acotada T, al límite de la sucesión de las sumas integrales tridimensionales correspondientes, cuando el mayor de los diámetros d_k de las regiones elementales Δv_k tiende al cero, si este límite no depende ni del procedimiento de partición de la región T en subregiones elementales Δv_k, ni de la elección de los puntos intermedios:

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta v_k, \qquad (1)$$

donde $(x_k, y_k, z_k) \in \Delta v_k$. Con Δv_k se désigna tanto la región elemental, como su volumen. Las propiedades de las integrales triples son semejantes a las de integrales dobles.

El cálculo de la integral triple en coordenadas cartesianas se reduce al cálculo sucesivo de una integral simple y una integral doble o al cálculo de tres integrales simples. Si, por ejemplo, la región de integración T está acotada por abajo por la superficie $z = \varphi_1(x, y)$, por arriba por la superficie $z = \varphi_2(x, y)$ $(\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y))$ y por los lados mediante los cilindros rectos, cuya sección por el plano Oxy es la región G, entonces la integral triple (1) se calcula por la fórmula

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_G dx\, dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (2)$$

Escribiendo la integral doble respecto a la región G con ayuda de una de las integrales reiteradas, obtenemos:

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (3)$$

EJEMPLO 1. Calcúlese $\iiint_T z\, dx\, dy\, dz$ si la región T está limitada por los planos $x+y+z=1$, $z=0$, $y=0$, $x=0$.

◀ Tenemos

$$\iiint_T z\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\, dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{1-x-y} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{(1-x-y)^3}{3} \Big|_{y=0}^{1-x} \right) dx = \frac{1}{6} (1-x)^3\, dx =$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\frac{(1-x)^4}{4} \Big|_{x=0}^{1} \right) = \frac{1}{24}. \ ▶$$

Póngase los límites de integración en la integral triple $\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ para las regiones indicadas T:

2.1. La región T es un tetraedro limitado por los planos $2x + 3y + 4z = 12$, $z = 0$, $x = 0$.

2.2. La región T es el interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.3. La región T está limitada por las superficies $y^2 + 2z^2 = 4x$, $x = 2$.

Calcúlense las integrales:

2.4. $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz.$

2.5. $\iiint_T (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, donde T es un tetraedro limitado por los planos $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2.6. $\int_0^3 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} z\,dz.$

2.7. $\iiint_T xyz\,dx\,dy\,dz$, donde la región T está limitada por las superficies $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

2. Cambio de variables en la integral triple. Si en la integral triple

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

se cambian las variables según las fórmulas $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ y además las funciones $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, w, v)$ realizan una aplicación biunívoca de la región T del espacio $Oxyz$ sobre la región T_1 del espacio $O_1\,uvw$ y el jacobiano de transformación no se anula en la región T_1:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces es válida la fórmula

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{T_1} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\,|\,I\,|\,du\,dv\,dw. \qquad (4)$$

Las coordenadas curvilíneas más usadas son las coordenadas *cilíndricas* r, φ, z (fig. 87): $x = r\cos\varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$, $z = z$, cuyo jacobiano es $I = r$, y las coordenadas *esféricas* r (longitud del radio vector), φ

(longitud), θ (latitud) (fig. 88): $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $z = r\operatorname{sen}\theta$, cuyo jacobiano $I = r^2\cos\theta$. La fórmula (4) toma, respectivamente, la forma

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T_1} f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz \qquad (5)$$

ó

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{T_1} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta. \qquad (6)$$

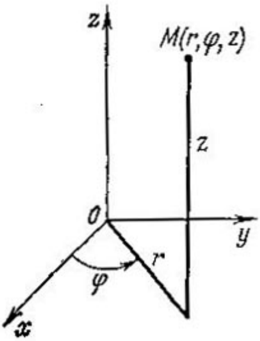


Fig. 87

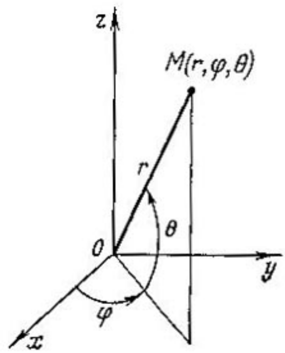


Fig. 88

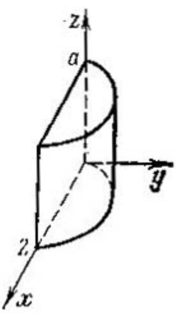


Fig. 89

Ejemplo 2. Pasando a las coordenadas cilíndricas calcúlese $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, donde la región T está dada por las desigualdades $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}$, $0 \leqslant z \leqslant a$ (fig. 89).

◀ Ya que la igualdad $y = \sqrt{2x - x^2}$ en el sistema de coordenadas cilíndricas toma la forma $r = 2\cos\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$, entonces según la fórmula (5)

$$\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2}\,z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T_1} r^2 z\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr \int\limits_0^a z\,dz = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr =$$

$$= \frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{8}{9}a^2.$$ ▶

EJEMPLO 3. Pasando a las coordenadas esféricas calcúlese $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, si la región T es una semiesfera x^2+y^2+ $+z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$.

◀ Para la región T_1 los límites de variación de las coordenadas esféricas son: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant r \leqslant R$. Según la fórmula (6) tenemos:

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{T_1} r^2\cos^2\theta\cdot r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^4\,dr = \frac{4}{15}\pi R^5. \ ▶$$

Calcúlense los integrales:

2.8. $\int\limits_0^{a/\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int\limits_0^{(x^2-y^2)/a} \sqrt{x^2+y^2}\,dz$, pasando a las coordenadas cilíndricas.

2.9*. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ pasando a las coordenadas esféricas, si T es el interior del sector esférico con el centro en el origen de coordenadas, radio a y el ángulo en el vértice 2α $(0<\alpha<\pi)$.

2.10. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{h}{a^2}(x^2+y^2)}^{h} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pasando a las coordenadas cilíndricas.

2.11. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, pasando a las coordenadas esféricas.

3. Aplicaciones de las integrales triples. El *volumen* V de una región espacial T es igual a

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz.$$

La *masa* M de un cuerpo con densidad variable $\gamma(x, y, z)$ que ocupa la región T es:

$$M = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Los *momentos estáticos* de un cuerpo, respecto a los planos coordenados son:

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_T y\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Las *coordenadas del centro de masas* de un cuerpo son

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Los *momentos de inercia* de un cuerpo respecto a los ejes de coordenadas son

$$I_x = \iiint\limits_T (y^2 + z^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_T (z^2 + x^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Si el cuerpo es homogéneo entonces en las fórmulas indicadas más arriba hay que poner $\gamma(x, y, z) = 1$.

EJEMPLO 4. Hállense las coordenadas del centro de masas de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$, si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia de este punto hasta el centro.

◀ Tenemos $\gamma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y a consecuencia de la simetría $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Realicemos los cálculos en las coordenados esféricas:

$$M_{xy}=k\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=k\iiint_{T_1} r^4\times$$

$$\times\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^R r^4\,dr=\frac{1}{5}k\pi R^5.$$

$$M=k\iiint_T\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=k\iiint_{T_1} r^3\times$$

$$\times\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^R r^3\,dr=$$

$$=\frac{1}{2}k\pi R^4;\quad \bar z=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{2}{5}R.$$

De este modo $C\left(0,\ 0,\ \frac{2}{5}R\right)$. ▶

2.12. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por las superficies $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $y=x$, $y^2=x$.

2.13*. ¿Para que valores de a el volumen de un cuerpo limitado por las superficies $x^2+y^2=az$, $x^2+y^2=ax$, $z=0$ es igual al número dado V?

2.14*. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la superficie cerrada $(x^2+y^2+z^2)^2=2\ axyz\ (a>0)$.

2.15*. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la superficie cerrada $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

2.16.* Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ y el paraboloide $x^2+y^2=3az$ (dentro del paraboloide).

2.17*. Hállese el volumen de un cuerpo limitado por la superficie cerrada $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$.

2.18. Hállense la masa y la densidad media de un cuerpo limitado por las superficies $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=0$, $z=a>0$, si la densidad en cada punto es proporcional a la coordenada z y en el plano $z=a$ es igual a γ_0.

2.19. Hállense la masa y la densidad media de un cono circular que tiene por radio de la base R y por altura H, si la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia del punto hasta el plano que pasa por el vértice del cono paralelamente al plano de base y en el centro de la base es igual a γ_0.

2.20. Hállense la masa y la densidad media de un cuerpo limitado por las superficies $x^2 - y^2 = az$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ $(z > 0)$ si la densidad en cada punto es proporcional a la coordenada z y el valor máximo de la densidad es igual a γ_0.

2.21. Hállense la masa y la densidad media de la capa esférica entre las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, si la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia del punto hasta el origen de coordenadas y el valor máximo de la densidad es igual a γ_0.

2.22. Hállense la masa y la densidad media del segmento del paraboloide de revolución que tiene por radio de la base R y por altura H, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde el punto hasta el plano de la base del segmento y en el vértice del segmento es igual a γ_0.

2.23. Hállense la masa y la densidad media de una bola de radio R, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la distancia desde el punto hasta uno de los diámetros de la bola y en la circunferencia del círculo grande situado en el plano perpendicular a este diámetro es igual a γ_0.

2.24. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $z = \frac{h}{a^2}(y^2 - x^2)$, $z = 0$, $y = a$, $y = 0$ $(a > 0, h > 0)$.

2.25. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $y = \frac{b}{a^2}x^2$, $z = \frac{h}{b}(b - y)$, $z = 0$ $(a > 0,\ b > 0,\ h > 0)$.

2.26. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $z = H$.

2.27. Hállense las coordenadas del centro de masas de un cuerpo homogéneo limitado por las superficies $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = H$ $(H > 0,\ R > 0)$.

2.28. Hállense las cordenadas del centro de masas de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la distancia del punto hasta el origen de coordenadas.

2.29. Hállese el momento de inercia con respecto al eje Oz del cuerpo homogéneo de densidad γ, limitado por las superficies $y=\frac{b}{a^2}x^2$, $z=0$, $z=\frac{h}{b}(b-y)$ $(a>0,\ b>0,\ h>0)$.

2.30. Hállese el momento de inercia del segmento homogéneo del paraboloide de revolución de densidad γ y de radio de la base R y altura H, respecto a su eje de revolución.

2.31. Hállese el momento de inercia de una esfera de radio R con respecto a su diámetro, si la densidad en cada punto es inversamente proporcional a la distancia del punto hasta el centro de la esfera y en la superficie de la esfera es igual a γ_0.

2.32.** Hállese el potencial de Newton U de un cuerpo homogéneo de densidad γ, limitado por el elipsoide de revolución $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, en su centro $(b>a)$.

2.33.** Hállese la fuerza de atracción que ejerce un cono homogéneo de densidad γ, altura H y radio de la base R sobre el punto material situado en su vértice y que contiene una unidad de masa.

2.34. Hállese el momento de inercia respecto al eje Oz de un cuerpo homogéneo de densidad γ, limitado por las superficies $z=\frac{h}{a^2}(y^2-x^2)$, $z=0$, $y=\pm a$.

2.35. Hállese el momento de inercia del cono circular homogéneo de densidad γ, radio de la base R y altura H con respecto a su eje.

§ 3. Integrales múltiples impropias

1. Integral respecto a la región infinita. Si la función $f(x, y)$ es continua en una región infinita G, entonces, según la definición,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy=\lim_{D\to G}\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

donde D es una región finita que está situada totalmente en la región G, además $D\to G$ significa que la región D se extiende arbitrariamente de tal modo que entre y quede en ella cualquier punto de la región G (*extensión exhaustiva*). Si existe un límite finito (1) que no depende de la elección de la subregión D y del procedimiento de extensión $D \to G$, entonces la *integral impropia* $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ se llama *convergente*; en el caso contrario, *divergente*.

Análogamente se determina la integral triple por la región infinita.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, entonces para la convergencia de la integral impropia es necesario y suficiente que el límite (1) exista por lo menos para una sola extensión exhaustiva de la región G.

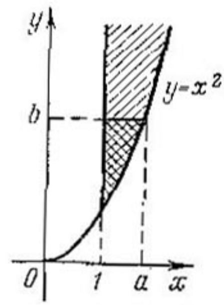


Fig. 90

EJEMPLO 1. Calcúlese la integral impropia

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$$

donde G es una región determinada por las desigualdades $x \geqslant 1$, $y \geqslant x^2$.

◀ Supongamos que la subregión D (fig. 90) está dada por las desigualdades $1 \leqslant x \leqslant a$, $x^2 \leqslant y \leqslant b$, donde $a \to +\infty$, $b \to +\infty$. Entonces

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^4+y^2} = \lim_{D \to G} \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{a\to+\infty \\ b\to+\infty}} \int_1^a dx \int_{x^2}^b \frac{dy}{x^4+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to+\infty \\ b\to+\infty}} \int_1^a \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2} \Big|_{x^2}^b \right) dx =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} \left(\lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{x^2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^a \right) = \frac{\pi}{4}. \ ▶$$

Calcúlense las integrales impropias:

3.1. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^5y^3}$, donde G es una región determinada por las desigualdades $x \geqslant 1$, $xy \geqslant 1$.

3.2. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^3}$, donde G es una región determinada por las desigualdades $x^2+y^2 \geqslant 1$ (parte exterior del círculo).

3.3. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, donde T es una región determinada por la desigualdad $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$ (parte exterior de la esfera).

3.4. $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+y+z)}\,dz$.

Investíguese la convergencia de las integrales impropias:

3.5. $\iint\limits_G \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde G es una región determinada por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3.6. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$, donde G es una región determinada por la desigualdad $x^2+y^2 \geqslant 1$ (parte exterior del círculo).

2. Integral de una función discontinua. Sea la función $f(x, y)$ continua en la región cerrada y acotada G en todos los puntos, excepto el punto $P_0(x_0, y_0)$ (o la línea L). Si existe el límite finito

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy,$$

donde G es una región obtenida de G eliminando ε-entorno del punto P_0 (ε-entorno de la línea L, respectivamente), entonces este límite se llama *integral impropia de la función $f(x, y)$ por la región G* y se designa mediante $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, es decir,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

La integral (2) en este caso se llama *convergente*. Si $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy$ no existe o es igual a ∞, entonces

$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ se llama *divergente*.

De modo análogo se determina la integral triple de la función discontinua.

Ejemplo 2. Investíguese la convergencia de la integral impropia $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $\alpha > 0$, donde G es un círculo $x^2+y^2 \leqslant 1$.

◀ El origen de coordenadas es un punto de discontinuidad de la función $\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$. Eliminemos de G el ε-entorno del origen de coordenadas. Entonces la región G_ε es un anillo entre las circunferencias de radios ε y 1. Pasemos a las coordenadas polares (Γ es una imagen polar de la región G):

$$\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \iint\limits_{\Gamma} \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^{2\alpha}} = \iint\limits_{\Gamma} r^{1-2\alpha}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} r^{1-2\alpha}\,dr\,d\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^1 r^{1-2\alpha}\,dr =$$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{r^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}\Bigg|_\varepsilon^1 = \pi \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\varepsilon^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha} & \text{para } \alpha<1, \\ -\infty & \text{para } \alpha>1. \end{cases}$$

Para $\alpha=1$ tenemos:

$$\iint\limits_{\Gamma} \frac{dr\,d\varphi}{r} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r} = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \ln r \Big|_\varepsilon^1 = +\infty.$$

Así pues para $\alpha<1$ la integral converge y es igual a $\dfrac{\pi}{1-\alpha}$. ▶

Calcúlense las integrales impropias:

3.7. $\iint\limits_{G} \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{xy}}$, donde G es un cuadrado $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

3.8. $\iint\limits_{G} \dfrac{dx\,dy}{\sqrt[3]{1-x^2-y^2}}$, donde G es un círculo $x^2+y^2\leqslant 1$.

3.9. $\iint\limits_{G} \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, donde G es un círculo x^2+ $+y^2\leqslant 1$.

Investíguese la convergencia de las integrales impropias:

3.10*. $\iint\limits_{G} \dfrac{dx\,dy}{(x-y)^\alpha}$, donde G es un triángulo $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x$.

3.11. $\iiint\limits_{T} \dfrac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, donde T es una esfera x^2+ $+y^2+z^2\leqslant 1$.

§ 4. Cálculo de las integrales dependientes de un parámetro

1. Integrales propias dependientes de un parámetro. Si la función $f(x, y)$ está definida y es continua en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, entonces la integral

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \tag{1}$$

se llama *integral dependiente del parámetro* y es una función continua en el intervalo $[A, B]$.

La integral de una forma más general

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx \tag{2}$$

se llama también integral dependiente del parámetro y es una función continua del argumento y en el intervalo $[A, B]$; si $f(x, y)$ es continua en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son continuas para $y \in [A, B]$ y sus valores se contienen en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 1. Calcúlese el límite

$$\lim_{y \to 0} \int_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

◀ Analicemos la integral siguiente dependiente del parámetro y:

$$F(y) = \int_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

Ya que los límites de integración, así como la función subintegral son continuos para cualesquiera valores de sus argumentos, entonces $F(y)$ es una función continua. Por eso

$$\lim_{y \to 0} \int_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \lim_{y \to 0} F(y) = F(0) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}. \ ▶$$

Si $f(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ son continuas en el triángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, entonces para la integral (1) es válida la *fórmula de di-*

ferenciación bajo el signo de la integral (fórmula de Leibniz):

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,\ y)\,dx=\int_a^b f'_y(x,\ y)\,dx. \tag{3}$$

Si en (2) para las mismas condiciones de f y f'_y los límites de integración $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son diferenciables cuando $y\in(A,\ B)$, entonces es válida la fórmula:

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,\ y)\,dx=$$

$$=f(\psi(y),\ y)\,\psi'(y)-f(\varphi(y),\ y)\,\varphi'(y)+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,\ y)\,dx. \tag{4}$$

EJEMPLO 2. Hállese $F'(y)$ si

$$F(y)=\int_{\operatorname{sen} y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}dx.$$

◀ Ya que la función subintegral $e^{y\sqrt{1-x^2}}$ es continua en el dominio de definición junto con su derivada parcial respecto a y, igual a $\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}$ y los límites de integración son también funciones diferenciables, entonces se puede aplicar la fórmula (4):

$$F'(y)=-e^{y\sqrt{1-\cos^2 y}}\operatorname{sen} y-e^{y\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}\cos y+$$

$$+\int_{\operatorname{sen} y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx=-(e^{y|\operatorname{sen} y|}\operatorname{sen} y+$$

$$+e^{y|\cos y|}\cos y)+\int_{\operatorname{sen} y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx. \ ▶$$

Si $f(x,\ y)$ es continua en el triángulo $a\leqslant x\leqslant b$, $A\leqslant y\leqslant B$, entonces para la integral (1) es válida la fórmula de *integración respecto al parámetro y bajo el signo de la integral*:

$$\int_A^B F(y)\,dy=\int_A^B dy\int_a^b f(x,\ y)\,dx=\int_a^b dx\int_A^B f(x,\ y)\,dy. \tag{5}$$

EJEMPLO 3. Calcúlese la integral

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (b>a>0).$$

◀ Observemos que

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y \, dy.$$

Entonces la integral buscada toma el aspecto

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx = \int_a^b dx \int_a^b x^y \, dy.$$

La función subintegral $f(x, y) = x^y$ es continua en el triángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a \leqslant y \leqslant b$, por eso se puede utilizar la fórmula (5):

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y \, dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \, dx = \int_a^b \frac{1}{y-1} \, dy = \ln \frac{b+1}{a+1}. \ \blacktriangleright$$

Calcúlense los siguientes límites:

4.1. $\lim\limits_{y \to 0} \int_1^2 x^3 \cos xy \, dx.$

4.2. $\lim\limits_{y \to 0} \int_0^1 \sqrt[3]{x^4 + y^2} \, dx.$

4.3. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^{x_0} (f(x+h) - f(x)) \, dx$, si $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ $(a < 0 < x_0 < b)$ y $f(0) = 0$.

Diferénciense las funciones:

4.4. $F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} \, dx.$

4.5. $F(y) = \int_{y-1}^{y+1} \frac{\operatorname{sen} xy}{x} \, dx.$

4.6. $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-yx^2} \, dx.$

4.7. $F(y) = \int_0^y (x - y) \operatorname{sen} xy \, dx.$

4.8. Hállese F''_{xy}, si

$$F(x,\ y)=\int\limits_{x/y}^{xy}(x-yt)\,f(t)\,dt,$$

donde $f(t)$ es una función diferenciable.

4.9. Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable y $F(x)$ una función diferenciable. Demuéstrese que la función

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left(f(x-at)+f(x+at)\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}F(y)\,dy$$

satisface la ecuación de oscilaciones de una cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

4.10*. Hállense las derivadas de las integrales elípticas totales

$$E(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$F(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \qquad (0<k<1)$$

y exprésense mediante las funciones $E(k)$ y $F(k)$.

Integrando bajo el signo de la integral calcúlense las integrales:

4.11. $\displaystyle\int\limits_0^1 \operatorname{sen}\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln x}(x^2-1)\,dx.$

4.12. $\displaystyle\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln x}(x-1)\,dx.$

4.13. Demuéstrense las fórmulas:

a) $\displaystyle\int\limits_0^k F(x)\,x\,dx=E(k)-(1-k^2)\,F(k),$

b) $\displaystyle\int\limits_0^k E(x)\,x\,dx=\frac{1}{3}\left((1+k^2)\,E(k)-(1-k^2)\,F(k)\right),$

donde $E(k)$ y $F(k)$ son integrales elípticas totales (véase el problema 4.10).

2. Integrales impropias dependientes de un parámetro. La integral impropia que depende del parámetro y, es decir,

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx, \tag{6}$$

donde la función $f(x, y)$ es continua en la región $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ se llama uniformemente convergente en el intervalo $[y_1, y_2]$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $B = B(\varepsilon)$ tal que para cualquier $b \geqslant B(\varepsilon)$

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| \leqslant \varepsilon$$

para cualquier $y \in [y_1, y_2]$.

Si la integral (6) es convergente uniformemente en el intervalo $[y_1, y_2]$, entonces es una función continua y en este intervalo.

De modo análogo se define la convergencia uniforme de la integral impropia de la función no acotada, que depende del parámetro.

Al investigar la convergencia uniforme de las integrales dependientes del parámetro, a menudo se emplea la siguiente afirmación:

Criterio de Weierstrass. *Para que la integral* (6) *converja uniformemente es suficiente que exista una función $F(x)$ independiente del parámetro y, tal que*

a) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$ *si* $a \leqslant x < +\infty$,

b) $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\, dx < +\infty$.

La función $F(x)$ se llama *mayorante* para $f(x, y)$.

Ejemplo 4. Demuéstrese la convergencia uniforme de la integral siguiente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

◀ Observemos que

$$\int \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitratio. Suponiendo $B(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, hallamos (para cualquier $b > B$):

$$\left| \int_b^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \right| = \left| \lim_{A \to +\infty} \int_b^A \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \, dx \right| =$$

$$= \left| \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \Big|_b^A \right) \right| = \left| \lim_{A \to +\infty} \frac{A}{A^2+y^2} - \frac{b}{b^2+y^2} \right| =$$

$$= \frac{b}{b^2+y^2} \leqslant \frac{1}{b} < \frac{1}{B} = \varepsilon,$$

lo que demuestra según la definición la convergencia uniforme de la integral indicada respecto al parámetro y por todo el eje. ▶

Ejemplo 5. Establézcase la convergencia uniforme de la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \cos x \, dx, \qquad 0 < y_0 \leqslant y < +\infty.$$

◀ Mostremos que podemos tomar la fnución $F(x) = e^{-xy_0}$ en calidad de mayorante. En efecto, si $y > y_0$ entonces

$$|e^{-xy} \cos x| \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{-xy_0}.$$

Además,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy_0} \, dx = -\frac{1}{y_0} e^{-xy_0} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y_0}.$$

Por consiguiente, basándose en el criterio de Weierstrass la integral indicada converge uniformemente. ▶

Para las integrales impropias dependientes de un parámetro, con un límite infinito, al cumplirse las siguientes condiciones:

a) la función $f(x, y)$ es continua junto con su derivada $f'_y(x, y)$ en la región $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$,

b) $\int_a^{+8} f(x, y) \, dx$ converge para cualquier $y \in [y_1, y_2]$,

c) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) \, dx$ converge uniformemente en el intervalo $[y_1, y_2]$

es válida la *fórmula de diferenciación respecto al parámetro* (*fórmula de Leibniz*):

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) \, dx \tag{7}$$

que es análoga a la relación (3).

Cumpliéndose las condiciones correspondientes la fórmula de Leibniz queda válida también para la integral de la función discontinua, dependiente del parámetro.

EJEMPLO 6. Calcúlese la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

◀ Sea

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, dx = F(\alpha,\ \beta).$$

Señalemos que la integral $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos mx\, dx$ converge uniformemente para $\alpha > 0$ y es igual a $\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}$ (¡compruébese!). La integral inicial converge para cualesquiera $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ y la función subintegral es continua junto con su derivada parcial por α, igual a $-e^{-\alpha x} \cos mx$. Por consiguiente las condiciones a), b), c) están cumplidas y se puede utilizar la relación (7). Entonces

$$\frac{\partial F(\alpha,\ \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos mx\, dx = -\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}.$$

De aquí

$$F(\alpha,\ \beta) = -\frac{1}{2} \ln(\alpha^2+m^2) + C(\beta).$$

Para hallar $C(\beta)$ suponemos en la última igualdad $\alpha = \beta$. Tenemos $0 = -\frac{1}{2}\ln(\beta^2+m^2) + C(\beta)$. De aquí

$$C(\beta) = \frac{1}{2} \ln(\beta^2+m^2)$$

ó

$$F(\alpha,\ \beta) = \frac{1}{2}(\ln(\beta^2+m^2) - \ln(\alpha^2+m^2)) = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}. \ ▶$$

4.14. Formúlese en el lenguaje «$\varepsilon - \delta$» la afirmación: la integral $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,\ y)\, dx$ converge no uniformemente en el segmento $[y_1,\ y_2]$.

Investíguense con respecto a la convergencia uniforme en los intervalos indicadas las siguientes integrales:

4.15. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos x\,dx \quad (0<\alpha_0\leqslant\alpha<\infty).$

4.16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}+1} \quad (1<\alpha<+\infty).$

4.17. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha} x}{x^2}\,dx \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1).$

4.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx \quad (-\infty<\alpha<+\infty).$

4.19. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \quad (0\leqslant\alpha<+\infty).$

4.20. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^{\alpha}\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \left(|\alpha|<\frac{1}{2}\right).$

4.21. $\int\limits_{0}^{1} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^{\alpha}} \quad (0<\alpha<2).$

4.22. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1).$

4.23. Demuéstrese que la función $u(x, y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xf(t)}{x^2+(y-t)^2}\,dt$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Aplicando la diferenciación por el parámetro, calcúlense las integrales siguientes:

4.24. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

4.25. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\operatorname{sen} mx\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ m\neq 0).$

4.26. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx \quad (\alpha \geqslant 0)$.

4.27. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,dx \quad (\alpha > -1)$.

4.28*. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma x^2}\cos\delta x\,dx \quad (\gamma > 0)$.

4.29. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty)$.

4.30. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \leqslant 1)$.

4.31. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| \leqslant 1)$.

RESPUESTAS

1.2. $\frac{8}{3}$. 1.3. $\frac{\pi}{6}$. 1.4. $\frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$. 1.5. $\frac{a^2}{4}(\pi+4)$. 1.6. $3\pi/2$. 1.7. $y=x$, $y=x+3$, $x=1$, $x=2$. 1.8. $y=x^2$, $y=2-x^2$, $x=\pm 1$. 1.9. $x+y=2$, $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=0$, $y=2$. 1.10. $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x^2}$, $x=0$, $x=1$. 1.11. $\int\limits_1^5 dx\int\limits_2^4 f(x,y)\,dy=\int\limits_2^4 dy\int\limits_1^5 f(x,y)\,dx$.

1.12. $\int\limits_2^4 dx\int\limits_2^x f(x,y)\,dy+\int\limits_4^5 dx\int\limits_2^4 f(x,y)\,dy+\int\limits_5^7 dx\int\limits_{x-3}^4 f(x,y)\,dy=\int\limits_2^4 dy\int\limits_y^{y+3} f(x,y)\,dx$. 1.13. $\int\limits_{-a}^a dx\int\limits_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x,y)\,dx=\int\limits_0^a dy\int\limits_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} \times$ $\times f(x,y)\,dx+\int\limits_a^{a\sqrt{2}} dy\int\limits_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y)\,dx$. 1.14. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{ax}} f\times$ $\times f(x,y)\,dy+\int\limits_a^{2a} dx\int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^a dy\int\limits_{y^2/a}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx$.

1.15. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_a^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,\ y)\,dy = \int\limits_0^{a/2} dy\ \times$

$\times \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{(a-\sqrt{a^2-4y^2})/2} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_0^{a/2} dy \int\limits_{(a+\sqrt{a^2-4y^2})/2}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_{a/2}^{a} \times$

$\times\ dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,\ y)\,dx.$ **1.16.** Respecto a la variable x; la región de integración está limitada por las líneas $y=-\sqrt{x}$, $y=x^3$, $x=1$, $x=2$. **1.17.** $\int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,\ y)\,dx.$ **1.18.** $\int\limits_{-1}^{0} dx\ \times$

$\times \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,\ y)\,dy.$ **1.19.** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2-\sqrt{4-y^2}} \times$

$\times f(x,\ y)\,dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,\ y)\,dx.$

1.20. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3\sqrt{x}} f(x,\ y)\,dy.$ **1.21.** $\int\limits_0^{8/3} dy \int\limits_{2y-2}^{\sqrt{4+y^2}} f(x,\ y)\,dx.$ **1.22.** $\int\limits_0^a \times$

$\times\ dy \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,\ y)\ \ x + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_0^{\sqrt{2ay-a^2}} f(x,\ y)\,dx.$ **1.23.** $\int\limits_{-1}^{0} dx\ \times$

$\times \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x,\ y)\,dy.$

1.24. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{9/y}^{10-y} f(x,\ y)\,dx.$ **1.26.** $\frac{4}{3}a^4$. **1.27.** 112/9. **1.28.** 1/4. **1.29.** 1/3. **1.30.** 9/20. **1.31.** 68/15. **1.32.** $\pi^2/32$. **1.33.** $\frac{4}{3}a^3$. **1.34.** e. **1.35.** $\frac{1}{15}a^2b^2$. ● $\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy = \int\limits_0^a x^2\,dx \int\limits_0^{f(x)} y\,dy = \int\limits_{\pi/2}^{0} a^2\cos^2 t\ (-a\ \times$

$\times \operatorname{sen} t)\,dt \int\limits_0^{b \operatorname{sen} t} y\,dy$, donde la última integral se obtiene del anterior sustituyendo $x=a\cos t$. **1.36.** $3\pi^2a^2$. **1.37.** $\frac{8}{105}a^3$. **1.38.** 1/4. ● **Se llama valor medio de la función $f(x,\ y)$ en la región G el número $f_{\text{med}} = \frac{1}{S}\iint\limits_G f(x,\ y)\,dx\,dy$, donde S es el área de la** región G. **1.39.** $1{,}63 < I < 2$. ● **Según el teorema acerca de la** estimación de la integral doble $mS < \iint\limits_G f(x,\ y)\,dx\,dy < MS$ donde m es el valor mínimo de la función en la región G y M es el valor máximo, S es el área de la región G. **1.40.** 5/3. **1.41.** $\int\limits_0^{\pi/6} \times$

$\times\, d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}} f(r)\,r\,dr + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(r)\,r\,dr$. **1.42.** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \times$

$\times \int\limits_{\frac{a\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}}^{2a\operatorname{sen}\varphi} f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\,r\,dr$. **1.43.** $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen} \times$

$\times\, \varphi)\,r\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}} f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\,r\,dr + \int\limits_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}} \times$

$\times\, f(r\cos\varphi,\ r\operatorname{sen}\varphi)\,r\,dr$. **1.44.** $\int\limits_0^{\pi/6} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6}\cos\varphi} r\,dr + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} f \times$

$\times (\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{3\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr$. **1.45.** $\frac{\pi}{4}(e^{a^2}-1)$. **1.46.** a. **1.47.** $\frac{128}{3}\pi$.

1.48. $\frac{\pi a}{2}$. **1.49.** $\frac{45}{64}\pi a^4$. **1.50.** $\frac{a}{2}(2-\ln 2)$. **1.51.** $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$. **1.52.**

$\frac{1}{a}\int\limits_0^a dv \int\limits_0^a f\left(\frac{u(a-v)}{a},\ \frac{uv}{a}\right) u\,du$. **1.53.** $\frac{1}{3}\int\limits_0^b du \int\limits_p^q f \times$

$\times (\sqrt[3]{u^2v},\ \sqrt[3]{uv^2})\,dv$. **1.54.** $\frac{1}{2}\int\limits_1^3 du \int\limits_{-u}^{6-u} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right) dv$, 1.55. $\frac{1}{2}\int\limits_p^q du\int\limits_a^b f\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\ \sqrt{uv}\right)\frac{dv}{v}$. 1.56. $2\pi ab\,(c-\sqrt{c^2-1})$.

1.57. $(e-1)/2$. 1.58. $\frac{5}{48}(a^{-6/5}-b^{-6/5})(q^{8/5}-p^{8/5})$. 1.59. $\frac{64}{3}a^2$.

1.60. $\frac{1}{2}(15-16\ln 2)$. 1.61. $a^2(\pi-1)$. 1.62. $\frac{1}{4}(b^2-a^2)(\pi+2)$.

● Pásese a las coordenadas polares. 1.63. $\frac{1}{4}a^2(8-\pi)$. 1.64. $(\pi-$ $-1)a^2$. ● Pásese a las coordenadas polares. 1.65. $a^2/210$. ● Sustitúyanse las variables: $x=r\cos^2\varphi$, $y=r\,\mathrm{sen}^2\,\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1.66. $\frac{\pi a^3b}{2c^2}$. ● Pásese a las coordenadas polares generalizadas.

1.67. $\frac{8}{15}(b^{5/4}-a^{5/4})(n^{3/4}-m^{3/4})$. ● Realícese el cambio de las variables: $y^2=ux$, $vy^2=x^3$. 1.68. $\frac{(q^2-p^2)(b^3-a^3)}{6a^3b^3}$. ● Realícese el cabmio de las variables: $y^2=ux$, $y=vx$. 1.69. $\frac{4}{\sqrt{3}}a^2$.

1.70. $8\sqrt{2}\ a^2$. 1.71. $2\sqrt{2}\ \pi p^2$. 1.72. $\frac{76}{3}a^2$. 1.73. $\frac{8}{3}\sqrt{2}\ a^2$.

1.74. $16a^2$. 1.75. $4\pi a^3\ (2-\sqrt{2})$. 1.76. $\frac{\pi}{6}\ (27-5\sqrt{5})$.

1.77. $2a^2\ (\pi-2)$. 1.78. $\pi a^3\ (\sqrt{2}+\ln\ (1+\sqrt{2}))$. 1.79. $\pi/6$.

1.80. $3\sqrt{2}\,\pi a^2$. 1.81. $2a^2\ (\pi+4-4\sqrt{2})$. 1.82. $\frac{16}{3}ab^2$. 1.83. $\frac{4}{3}\times$ $\times a^3(2-\sqrt{2})$. ● Intégrese en el plano Oyz. 1.84. 16/15. 1.85. $a^3/2$.

1.86. $\frac{2}{3}\pi a^3\ (3-\sqrt{2})$. 1.87. $\pi abc\left(1-\frac{1}{e}\right)$. 1.88. $\frac{2}{3}\pi a^3\ (2-\sqrt{2})$.

1.89. $\frac{2}{3}\pi abc\ (2-\sqrt{2})$. 1.90. $\frac{1}{2}\ln 3$. ● Realíceso el cambio de las variables $u=xy$, $y^2=vx$. 1.91. 9/8. ● Realícese el cambio de las variables $u=xy$, $v=y/x$. 1.92. $\frac{1}{2}\pi\delta R^4$. 1.93. $M_x=\frac{4}{3}a^3$, $M_y=$ $=\frac{5}{8}\pi a^3$. 1.94. $\bar{x}=\frac{2}{5}=a$, $\bar{y}=\frac{a}{2}$. 1.95. $\frac{a^2b}{6}$. 1.96. $M_x=\frac{\pi}{24}$, $M_y=1-\frac{\pi^2}{12}$. 1.97. $\bar{x}=\frac{141a}{20(7-3\ln 2)}$, $\bar{y}=\frac{81a}{8(7-3\ln 2)}$. 1.98. $I_x=$ $=1/12$, $I_y=7/12$. 1.99. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{128a}{105\pi}$. 1.100. $I_x=\frac{21}{32}\pi a^4$, $I_y=$

$=\frac{49}{32}\pi a^4$, $I_0=\frac{35}{16}\pi a^4$. **1.101.** $I_x=\frac{\pi ab^3}{4}$, $I_y=\frac{\pi a^3 b}{4}$, $I_0=$ $=\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$. **1.102.** a) $\frac{26}{105}a^4$; b) $\frac{61}{105}a^4$. ● $I_{x=-a}=\iint\limits_G (x+$ $+a)^2\,dx\,dy$. **1.103.** $I_x=\frac{ka^5}{5}$, $I_y=\frac{3}{20}ka^5$, $I_0=\frac{7}{20}ka^5$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. **1.104.** $\pi a^4/8$. **1.105.** $I_x=$ $=\frac{2\alpha-\operatorname{sen}2\alpha}{16}a^4$, $I_y=\frac{2\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{16}a^4$. **1.106.** $\frac{1}{2}\gamma(t^2-t_1)(R_2^4-$ $-R_1^4)$. ● $Q=\gamma_1(t_2-t_1)\iint\limits_G |xy|\,dx\,dy$. **1.107.** $\frac{4ah^2}{5}$. ● $E=$ $=\iint\limits_G(2x+y)\,dx\,dy$. **2.1.** $\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{\frac{12-2x}{3}}dy\int\limits_0^{\frac{12-2x-3y}{4}}f(x,\ y,\ z)\,dz$. **2.2.** $\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}f(x,\ y,\ z)\,dz$. **2.3.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\times$ $\times\,dy\int\limits_{-\sqrt{(4x-y^2)/2}}^{\sqrt{(4x-y^2)/2}}f(x,\ y,\ z)\,dz$. **2.4.** 1/6. **2.5.** $a^4/8$. **2.6.** 81/4. **2.7.** 1/96. **2.8.** $a^4/10$. **2.9.** $2\pi a^3\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$. ● Tómese por el eje Oz el eje del sector. **2.10.** $\frac{4}{3}\pi ah$. **2.11.** $\frac{8}{5}\pi R^{5/2}$. **2.12.** $\frac{3}{35}$. **2.13.** $\sqrt[3]{\frac{32V}{3\pi}}$. ● Pásese a las coordenadas cilíndricas. **2.14.** $a^3/45$. ● Pásese a las coordenadas esféricas. **2.15.** $\pi^2 abc/4$. ● Pásese a las coordenadas esféricas generalizadas según la fórmula: $x=ar\cos\varphi\cos\theta$, $y=br\times$ $\times\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $z=cr\operatorname{sen}\theta$. Además $I=abcr^2\cos\theta\left(r\geqslant 0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\right.$ $\left.\leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. **2.16.** $\frac{19}{6}\pi a^3$. ● Pásese a las coordenadas cilíndricas. **2.17.** $\pi a^3/3$. ● Pásese a las coordenadas esféricas. **2.18.** $M=\frac{3}{4}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{med}=\frac{9}{16}\gamma_0$. **2.19.** $M=\frac{1}{5}\pi\gamma_0 R^2H$, $\gamma_{med}=\frac{3}{5}\gamma_0$. **2.20.** $M=\frac{1}{24}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{med}=\frac{1}{12}\pi\gamma_0$. **2.21.** $M=\frac{31}{5}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{med}=$ $=\frac{93}{140}\gamma_0$. **2.22.** $M=\frac{4}{3}\pi\gamma_0 R^3H$, $\gamma_{med}=\frac{8}{3}\gamma_0$. **2.23.** $M=\pi^2\gamma_0 R^3$,

$\gamma_{med} = \frac{3}{4}\pi\gamma_0$. **2.24** $\left(0, \frac{4}{5}a, \frac{4}{15}h\right)$. **2.25.** $\left(0, \frac{3}{7}b, \frac{2}{7}h\right)$. **2.26.** $\left(0, 0, \frac{2}{3}H\right)$. **2.27.** $\left(0, 0, \frac{3}{4}H\right)$. **2.28.** $\left(0, 0, \frac{1}{3}R\right)$. **2.29.** $\frac{8}{21}\gamma abh\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}\right)$. **2.30.** $\frac{1}{6}\pi\gamma HR^4$. **2.31.** $\frac{2}{3}\pi\gamma_0 R^5$.

2.32. $\frac{2\pi\gamma a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$. ◀ Se llama *potencial de Newton* del cuerpo T en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la integral $U = \iiint_T \gamma(x, y, z)\frac{dx\,dy\,dz}{r}$ donde $\gamma(x, y, z)$ es la densidad del cuerpo $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Tenemos $U=\gamma\iiint_T \frac{dx\,dy\,dz}{r} = \gamma\iiint_T \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Pasemos a las coordenadas cilíndricas: $U = \gamma\iiint_{T^1}\frac{r\,dr\,d\varphi\,dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\gamma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^b dz\int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{2\pi\gamma a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$. ▶ **2.33.** $\frac{2\pi\gamma kH}{\sqrt{H^2+R^2}}\times\left(\sqrt{H^2+R^2}-H\right)$, donde k es la constante del principio de gravitación universal. ◀ Tomando el vértice del cono por el origen de coordenadas y su eje por el eje Oz, obtenemos la ecuación del cono en forma de $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$. A consecuencia de la simetría la fuerza resultante de gravitación será dirigida a lo largo del eje Oz y se expresará por la integral $F_z=k\gamma\iiint_T \frac{z\,dx\,dy\,dz}{r^3} = k\gamma\iiint_T\frac{z\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Pasemos a las coordenadas cilíndricas:

$$F_z = k\gamma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r\,dr\int_{\frac{H}{R}r}^{H}\frac{z\,dz}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\gamma kH}{\sqrt{H^2+R^2}}\left(\sqrt{H^2+R^2}-H\right).$$

▶ **2.34.** $\frac{8}{15}\gamma ha^4$. **2.35.** $\frac{1}{10}\gamma\pi HR^4$.

3.1. 1/4. **3.2.** $\pi/2$. **3.3.** 4π. **3.4.** 1. **3.5.** Diverge. **3.6.** Converge para $\alpha>1$. **3.7.** 4. **3.8.** $\frac{3}{2}\pi$. **3.9.** $\pi/2$. **3.10.** Converge para $\alpha<1$.

● Sepárese la recta $y=x$ por una banda estrecha y póngase $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x-y)^\alpha}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{(x-y)^\alpha}$. **3.11.** Converge para $\alpha<3/2$.

4.1. 15/4. **4.2.** 3/7. **4.3.** $f(x_0)$. **4.4.** $\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$. **4.5.** $\frac{2y+1}{y^2+y}\operatorname{sen} y\times$ $\times(1+y)-\frac{2y-1}{y^2-y}\operatorname{sen} y\,(y-1)$. **4.6.** $2ye^{-y^3}-e^{-y^2}-\int\limits_y^{y^2} x^2e^{-yx^2}\,dx$.

4.7. $\int\limits_0^y (x(x-y)\cos xy-\operatorname{sen} xy)\,dx$. **4.8.** $x(2-3y^2)f(xy)+$ $+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f'(xy)$. **4.10.** $E'=\frac{1}{k}(E-F)$, $F'=$ $=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{F}{k}$. ● Al calcular F' muéstrese que $\int\limits_0^{\pi/2}(1-k^2\times$ $\times\operatorname{sen}^2\varphi)^{-3/2}\,d\varphi=\frac{1}{1-k^2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi$, para lo cual utilícese la siguiente identidad: $(1-k^2\operatorname{sen}^2)^{-3/2}=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\times$ $\times\operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2}-\frac{k}{1-k^2}\frac{d}{d\varphi}(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{-1/2})$. **4.11.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{9}$. **4.12.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **4.14.** $F(y)$ converge no uniformemente en $[y_1, y_2]$, si esta integral converge para cualquier $y\in[y_1, y^2]$, pero existe $\varepsilon>0$ tal que para cualquier $B>a$ existe $y=y(B)\in[y_1, y_2[$ para el cual $\left|\int\limits_B^{+\infty} f(x, y)\,dx\right|\geqslant\varepsilon$. **4.15.** Converge uniformemente.

4.16. Converge no uniformemente. **4.17.** Converge uniformemente. **4.18.** Converge uniformemente. **4.19.** Converge no uniformemente. **4.20.** Converge uniformemente. **4.21.** Converge no uniformemente.

4.22. Converge uniformemente. **4.24.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **4.25.** $\operatorname{arctg}\times$ $\times\frac{\beta}{m}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$. **4.26.** $\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$. **4.27.** $\ln(1+\alpha)$. **4.28.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\times$ $\times e^{-\frac{\delta^2}{4\gamma}}$. ● Diferénciense las integrales por el parámetro γ y resuélvase la ecuación $\frac{\partial F}{\partial\delta}=-\frac{\delta}{2\gamma}F$. **4.29.** $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$. **4.30.** $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$. **4.31.** $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

CAPÍTULO 9

ECUACIONES DIFERENCIALES

§ 1. Ecuaciones de primer orden

1. **Conceptos fundamentales.** La ecuación funcional

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

ó

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

que une entre sí la variable independiente, la función buscada $y(x)$ y su derivada $y'(x)$ se llama *ecuación diferencial de primer orden.*

Se llama *solución (solución particular)* de la ecuación (1) ó (2) en el intervalo (a, b) cualquier función $y = \varphi(x)$, la cual si se sustituye en esta ecuación junto con su derivada $\varphi'(x)$ la convierte en identidad respecto a $x \in (a, b)$. La ecuación $\Phi(x, y) = 0$ que determina esta solución como una función implícita recibe el nombre de *integral (integral particular)* de la ecuación diferencial. En el plano con un sistema de coordenadas rectangular cartesiano fijo la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ determina cierta curva que se llama *curva integral* de la ecuación diferencial.

Se llama *solución general* de la ecuación diferencial (1) ó (2) la función $y = \varphi(x, C)$, que para cualquier valor del parámetro C es solución de esta ecuación diferencial. La ecuación $\Phi(x, y, C) = 0$ que determina la solución general como una función implícita se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1. Verifíquese mediante la sustitución que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es solución de la ecuación diferencial $xy' + y = \cos x$.

◀ Tenemos $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $y' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$. Multiplicando y e y' respectivamente por 1 y x, y sumando las expresiones obtenidas tenemos $xy + y' \equiv \cos x$. ▶

EJEMPLO 2. Muéstrese que la función $y = Cx^3$ es la solución general de la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$. Hállese la solución particular que satisface la condición $y(1) = 1$. (Hállese la curva integral que pasa por el punto $M_0(1, 1)$.)

◀ Al obtener $y' = 3Cx^2$ y sustituir las expresiones de y e y' en la ecuación diferencial, para cualquier valor de C obtenemos la identidad $3Cx^2 - 3Cx^3 \equiv 0$. Esto significa que la función $y = Cx^3$ es la solución general de la ecuación diferencial. Poniendo $x = 1$, $y = 1$, hallaremos el valor del parámetro $C = 1$ y de este modo obtendremos la solución particular buscada $y = x^3$. Con otras palabras, la curva integral que pasa por el punto M_0 (1, 1) es la parábola cúbica $y = x^3$. ▶

Sea dada la ecuación

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

que determina en el plano una familia de curvas que dependen del valor del parámetro C. Si formamos el sistema de dos ecuaciones

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_x(x, y, C) = 0,$$

entonces eliminando de este sistema el parámetro C obtendremos, en general, la ecuación diferencial de la familia de curvas dada.

Ejemplo 3. Hállese la ecuación diferencial de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$.

◀ Tenemos el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 2ax,$$
$$2x + 2yy' = 2a.$$

Eliminemos el parámetro a. A partir de la segunda ecuación hallamos $a = x + yy'$ y sustituyendo esta expresión en la primera ecuación obtenemos $x^2 + y^2 = 2x(x + yy')$, es decir, $y^2 - x^2 = 2xyy'$. Esta es la ecuación diferencial buscada. ▶

Muéstrese que las expresiones dadas determinan las soluciones generales o las integrales generales de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

1.1. $y = x(C - \ln|x|)$, $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$.

1.2. $y = x\left(\int\limits_0^x \frac{1}{x} e^x\,dx + C\right)$, $xy' - y = xe^x$.

1.3. $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$, $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$.

Determínese en la familia dada la ecuación de la curva que satisface la condición inicial citada

1.4. $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1$, $y(0) = 1$.

1.5. $y(1 - Cx) = 1$, $y(1) = 0{,}5$.

1.6. $y = 2 + C\cos x$, $y(0) = -1$.

1.7. Escríbase la ecuación a la cual satisfacen todos los puntos del extremo de las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. ¿Cómo diferenciar los puntos del máximo de los puntos del mínimo?

1.8. Escríbase la ecuación a la cual satisfacen todos los puntos de inflexión de las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, en particular de las ecuaciones diferenciales:

$$\text{a) } y' = y + x^3; \quad \text{b) } y' = e^y - x.$$

Fórmense las ecuaciones diferenciales de las familias de curvas siguientes:

1.9. De las parábolas $y = x^2 + 2ax$.

1.10. De las hipérbolas $y = a/x$.

1.11. De las catenarias $y = a \operatorname{ch} x$.

1.12. De las hipérbolas $x^2 - y^2 = 2ax$.

1.13. Fórmese la ecuación diferencial de la familia de curvas para las cuales el segmento de toda normal comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide por la mitad en el punto de tangencia.

1.14. Fórmese la ecuación diferencial de la familia de curvas para las cuales el segmento de cualquier tangente comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide por el punto de tangencia $M(x, y)$ en razón $|AM| : |MB| = 2 : 1$, donde A es el punto de intersección de la tangente con el eje Oy; B, con el eje Ox.

1.15. Fórmese la ecuación diferencial de la familia de curvas para las cuales el área comprendida entre los ejes de coordenadas, de esta curva y ordenada variable, es proporcional a la cuarta potencia de esta ordenada.

2. Método gráfico de construcción de curvas integrales (metodo de isoclinas). La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en el plano con el sistema de coordenadas rectangular cartesiano fijo Oxy determina el *campo de direcciones* por medio de la igualdad $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$.

Se llama *isoclina* de la ecuación (del campo de direcciones) cualquier curva determinada por la ecuación

$$f(x, y) = k$$

para un k fijo.

Para resolver aproximadamente (gráficamente) la ecuación $y' = f(x, y)$ construyamos en el plano las isoclinas para varios valores de k. Sea $M_0(x_0, y_0)$ un punto inicial. La isoclina L_0 que pasa por este punto corresponde al valor de k, igual a $k_0 = f(x_0, y_0)$. Tracemos el segmento M_0M_1 con el coeficiente angular k_0, hasta la intersección con la isoclina más próxima L_1 en el punto M_1 (de este modo sustituimos el arco de la curva integral por el segmento de su tangente). Luego, del punto $M_1(x_1, y_1)$ tracemos un nuevo segmento M_1M_2 con el coeficiente angular $k_1 = f(x_1, y_1)$, hasta la intersección con la isoclina siguiente L_2 en el punto M_2, etc.

Como resultado de tal construcción obtenemos una quebrada, que es la representación aproximada de la curva integral que pasa por el punto inicial M_0. Cuanto más densa se toma la rejilla de isoclinas, tanto más exacta resulta ser la curva integral.

Cambiando la posición del punto inicial M_0 se puede, de modo análogo, construir aproximadamente también otras curvas integrales.

EJEMPLO 4. Aplicando el método de isoclinas constrúyase la curva integral de la ecuación $y' = 2x$ que pasa por el origen de coordenadas.

◀ **Las isoclinas de la ecuación** dada son las rectas paralelas $2x = k$. Poniendo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, obtenemos las isoclinas $x = 0$, $x = \pm 1/2$, $x = \pm 1$, $x = \pm 3/2$, etc. Construyámoslas (fig. 91).

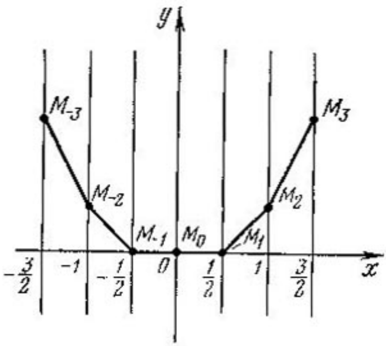


Fig. 91

Partiendo del origen de coordenadas a la izquerda y a la derecha construimos la quebrada $\ldots M_{-3}M_{-2}M_{-1}M_0M_1M_2M_3\ldots$ cuyos lados tienen coeficientes angulares $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, respectivamente. Esta quebrada es la representación aproximada de la curva integral.

Recomendamos al lector que construya la gráfica de la solución particular correspondiente $y = x^2$ y la compare con la quebrada construida. ▶

Aplicando el método de isoclinas constrúyase aproximadamente la familia de las curvas integrales de las ecuaciones diferenciales siguientes:

1.16. $y' = x + y$. **1.17.** $y' = 1 + y$.

1.18. $y' = -\dfrac{y}{x}$. **1.19.** $y' = y - x^2$.

1.20. $y' = \dfrac{y}{x+y}$. **1.21.** $y' = \dfrac{y-3x}{x+3y}$.

3. **Ecuaciones con variables separables.** Supongamos que en la ecuación

$$y' = f(x, y)$$

la función $f(x, y)$ se puede descomponer en factores $f_1(x)$ y $f_2(y)$, cada uno de los cuales depende sólo de una variable, o bien en la ecuación

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

los coeficientes de dx y dy se representan en forma de $M(x, y) = M_1(x)M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x)N_2(y)$. Al dividir por $f_2(y)$ y por $N_1(x)M_2(y)$, respectivamente, estas ecuaciones se reducen a la forma respectiva

$$f_1(x)\,dx = \frac{1}{f_2(y)}\,dy,$$

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy.$$

Integrando los primeros miembros de estas ecuaciones respecto a x y los segundos respecto a y, obtenemos en cada una de éstas la integral general de la ecuación diferencial inicial.

EJEMPLO 5. Resuélvase la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+1}.$$

◀ Separemos las variables

$$(3y^2+1)\,dy=2x\,dx.$$

Integramos

$$\int (3y^2+1)\,dy=\int 2x\,dx+C$$

o bien

$$y^3+y-x^2=C$$

(integral general de la ecuación).

Si en la ecuación con variables separables $y'=f_1(x)\,f_2(y)$ la función $f_2(y)$ tiene una raíz real y_0, es decir, si $f_2(y_0)=0$, entonces la función $y(x)=y_0$ es la solución de la ecuación (es fácil cerciorarse de esto mediante la sustitución directa). Al dividir ambos miembros de esta ecuación por $f_2(y)$ (al separar las variables) la solución $y(x)=y_0$ puede perderse.

De modo análogo, al integrar la ecuación $M_1(x)\,M_2(y)\,dx+N_1(x)\,N_2(y)\,dy=0$ pueden perderse las curvas integrales $x(y)=x_0$ e $y(x)=y_0$, donde x_0 es la raíz real de la función $N_1(x)$, y_0 es la raíz de la función $M_2(y)$.

Por eso, al obtener la integral general de la ecuación aplicando el método de separación de las variables indicado más arriba, es necesario verificar si forman parte de ella (para los valores numéricos adecuados del parámetro C) las soluciones particulares mencionadas. Si forman parte, no hay pérdida de solución. Si no forman parte, entonces es necesario incluirlas como componentes de la integral.

EJEMPLO 6. Resuélvase la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=y\,\mathrm{tg}\,x.$$

◀ Separamos las variables

$$\frac{dy}{y}=\mathrm{tg}\,x\,dx.$$

Integramos

$$\ln|y|=-\ln|\cos x|+C_1$$

o bien

$$\ln|y\cos x|=C_1.$$

Para que sea más cómodo potenciar la igualdad obtenida representemos el parámetro C_1 en forma logarítmica, poniendo $C_1=\ln|C_2|$, $C_2\neq 0$ (en este caso C_1 toma todos los valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$). Entonces

$$\ln|y\cos x|=\ln|C_2|$$

y potenciando obtenemos la integral general en forma de $y\cos x=C_2$, de donde

$$y=C_2\sec x. \tag{3}$$

Señalemos ahora que la ecuación diferencial inicial tiene, evidentemente, además la solución $y = 0$ que no figura en la notación (3), pues $C_2 \neq 0$. Introduzcamos un nuevo parámetro C, que a diferencia de C_2 toma también el valor nulo. Entonces la solución $y = 0$ formará parte de la solución general

$$y = C \sec x. \blacktriangleright$$

Aplicando la sustitución $u(x) = ax + by(x) + d$, también se reducen a las ecuaciones con variables separables, las ecuaciones diferenciales de tipo

$$y' = f(ax + by + d),\ b \neq 0.$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.22. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$. **1.23.** $y' = e^{x+y}$.

1.24. $y' + \dfrac{x \operatorname{sen} x}{y \cos y} = 0$.

1.25. $(1+y^2)\, x\, dx + (1+x^2)\, dy = 0$.

1.26. $xy\, dx + \sqrt{1-x^2}\, dy = 0$.

1.27. $ye^{2x}\, dx - (1+e^{2x})\, dy = 0$.

1.28. $2e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1+e^x)\sec^2 y\, dy = 0$.

1.29. $(1+y)(e^x\, dx - e^{2y}\, dy) - (1+y^2)\, dy = 0$.

1.30. $y' = \cos(x+y)$. **1.31.** $y' = \dfrac{1}{2x+y}$.

1.32. $y' = (4x + y + 1)^2$.

Hállense las soluciones parciales de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales indicadas:

1.33. $(1 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$; $y(1) = 0$.

1.34. $(xy^2 + x)\, dy + (x^2y - y)\, dx = 0$; $y(1) = 1$.

1.35. $y' \operatorname{tg} x = y$; $y(\pi/2) = 1$.

4. Euaciones homogéneas. La ecuación diferencial de primer orden se llama *homogénea* si se puede reducir a la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

o a la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{5}$$

donde $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son *funciones homogéneas* del mismo orden, es decir existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $M(tx, ty) = t^k M(x, y)$ y $N(tx, ty) = t^k N(x, y)$ son idénticos respecto a x, y y $t \neq 0$.

Con ayuda de la sustitución $y/x = u(x)$ las ecuaciones homogéneas (4) y (5) se transforman en ecuaciones con variables separables.

EJEMPLO 7. Resuélvase la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}.$$

◀ Pongamos $\frac{y}{x}=u$, o bien $y=ux$. Entonces $y'=u+x\,\frac{du}{dx}$, lo que da, después de la sustitución en la ecuación inicial, la ecuación con variables separables

$$x\,\frac{du}{dx}=\cos u.$$

Separemos las variables

$$\frac{du}{\cos u}=\frac{dx}{x}$$

e integremos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=Cx.$$

Obtenemos la solución general

$$u=2\operatorname{arctg} Cx-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Volviendo a la función y, hallamos

$$y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Al dividir entre $\cos u$ fueron perdidas las soluciones $y=x\left(\frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. Añadiéndolas a la familia de soluciones obtenida encontramos la integral general en forma de

$$y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx+\frac{\pi}{2}+\pi\,(2n-1)\right),$$

$$y=x\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right);\ n,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),\tag{6}$$

cuando $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$ se reducen a las ecuaciones homogéneas con ayuda del cambio de variables

$$x=u+m,\qquad y=v+n$$

donde m y n se obtienen del sistema de ecuaciones

$$a_1m+b_1n+c_1=0,$$
$$a_2m+b_1n+c_2=0.$$

Ya que aquí $dx = du$, $dy = dv$, la ecuación (6) se transforma en la ecuación del tipo (4) respecto a la función $v(u)$:

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v+a_1m+b_1n+c_1}{a_2u+b_2v+a_2m+b_2n+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)=$$

$$=f\left(\frac{a_1+b_1\dfrac{v}{u}}{a_1+b_2\dfrac{v}{u}}\right)=\varphi\left(\frac{v}{u}\right).$$

Si en la ecuación (6) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$ y por consiguiente, $a_2x+b_2y=$ $=\lambda(a_1x+b_1y)$, entonces ella toma la forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_2y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=\varphi(a_1x+b_1y).$$

Sustituyendo $u(x)=a_1x+b_1y(x)$ esta ecuación se reduce a la ecuación con variables separables.

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.36. $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$. **1.37.** $y'=\frac{y}{x}+\operatorname{sen}\frac{y}{x}$.

1.38. $y'=(x-y)/(x+y)$.

1.39. $(x^2+xy)\,y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$.

1.40. $(x-y)\,dx+x\,dy=0$.

1.41. $(2x-y+1)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0$.

1.42. $(y+2)\,dx-(2x+y-4)\,dy=0$.

1.43. $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas:

1.44. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$; $y(1)=1$.

1.45. $(\sqrt{xy}-x)\,dy+y\,dx=0$; $y(1)=1$.

1.46. $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx-x\,dy=0$; $y(1)=0$.

5. Ecuaciones lineales. La ecuación diferencial de primer orden se llama *lineal* si contiene y e y' de primer grado, es decir, tiene la forma

$$y'=P(x)\,y+Q(x). \tag{7}$$

Para $Q(x)\equiv 0$ la ecuación (7) toma la forma de

$$y'=P(x)\,y$$

y se llama *lineal homogénea*. Es la ecuación con variables separables y su solución general tiene la forma

$$y=Ce^{\int P(x)\,dx} \tag{8}$$

donde C es una constante arbitraria y $\int P(x)\,dx$ es una de las primitivas de la función $P(x)$.

Se puede integrar la ecuación *lineal no homogénea* (7) aplicando uno de los siguientes métodos.

a) Método de variación de la constante. Buscaremos la solución de la ecuación (7) en forma de

$$y = C(x)\,e^{\int P(x)dx} \tag{9}$$

que se obtiene de (8) si cambiamos la constante C por la función $C(x)$. Sustituyendo la expresión (9) en la ecuación (7) tenemos, para la función buscada $C(x)$, la ecuación con variables separables

$$C'(x) = Q(x)\,e^{-\int P(x)dx}.$$

Su solución general es

$$C(x) = \int Q(x)\,e^{-\int P(x)dx}\,dx + C,$$

donde C es una constante arbitraria y $\int Q(x)\,e^{-\int P(x)dx}\,dx$ es una de las primitivas. Sustituyendo la expresión obtenida para $C(x)$ en la fórmula (9) obtenemos la solución general (7):

$$y = e^{\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)\,e^{-\int P(x)dx}\,dx\right). \tag{10}$$

b) Método de sustitución. Pongamos $y(x) = u(x)\,v(x)$. Entonces la ecuación (7) se reduce a la forma

$$v\left(\frac{du}{dx} - P(x)\,u\right) + \left(\frac{dv}{dx}\,u - Q(x)\right) = 0, \tag{11}$$

Escojamos la función $u(x)$ de tal modo que el primer paréntesis en el primer miembro de la ecuación (11) se anule. Para esto integramos la ecuación con variables separables

$$\frac{du}{dx} - P(x)\,u = 0$$

y escogemos cualquier solución particular suya $u = u_1(x)$. Sustituyendo la función $u_1(x)$ en vez de u en el primer miembro de la ecuación (11), obtenemos la ecuación con variables separables respecto a la función $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx}\,u_1(x) - Q(x) = 0.$$

Hallemos la solución general de esta ecuación:

$$v = v(x, C).$$

Multiplicando las funciones halladas $u_1(x)$ y $v(x, C)$, obtenemos la solución general de la ecuación (7):

$$y = u_1(x)\, v(x, C).$$

EJEMPLO 8. Resuélvase mediante el método de variación de la constante la ecuación

$$y' = y \operatorname{ctg} x + \operatorname{sen} x.$$

◀ Analicemos primero la ecuación lineal homogénea correspondiente

$$y' = y \operatorname{ctg} x.$$

Su solución general es $y = C \operatorname{sen} x$. Por consiguiente, buscamos la solución general de la ecuación inicial en forma de $y = C(x) \operatorname{sen} x$. Sustituyendo y e $y' = C'(x) \operatorname{sen} x + C(x) \cos x$ en la ecuación dada:

$$C'(x) \operatorname{sen} x + C(x) \cos x = \operatorname{ctg} x \cdot C(x) \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x,$$

de donde $C'(x) = 1$, y entonces $C(x) = x + C$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación es

$$y = (x + C) \operatorname{sen} x. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 9. Resuélvase mediante el método de sustitución la ecuación, lineal respecto a x y $\dfrac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{y} + \frac{3}{y^2}.$$

◀ Pongamos $x = uv$ y reduzcamos la ecuación a la forma de

$$v\left(\frac{du}{dy} - \frac{2u}{y}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\, u - \frac{3}{y^2}\right) = 0. \qquad (12)$$

Hallemos la función $u_1(y)$ resolviendo la ecuación

$$\frac{du}{dy} - \frac{2u}{y} = 0$$

y escogiendo de su solución general $u = y^2 + C$ una solución particular, por ejemplo, $u_1(y) = y^2$. Sustituyendo $u_1(y)$ en la ecuación (12) tenemos:

$$\frac{dv}{dy}\, y^2 - \frac{3}{y^2} = 0, \quad \text{ó} \quad \frac{dv}{dy} = \frac{3}{y^4}.$$

La solución general de esta ecuación:

$$v(y, C) = C - \frac{1}{y^3}.$$

Multiplicando entre sí $u_1(y)$ y $v(y, C)$, obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$x = Cy^2 - \frac{1}{y}. \blacktriangleright$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.47. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

1.48. $(1+x^2)\,y' - 2xy + (1+x^2)^2$.

1.49. $y' + 2y = e^{3x}$. **1.50.** $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$.

1.51. $y' = \frac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2$. **1.52*.** $y' = \frac{y}{x+y^3}$.

1.53. $(1+y^2)\,dx = (\operatorname{arctg} y - x)\,dy$.

1.54*. $y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y}$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas:

1.55. $y' + y \operatorname{tg} x = 1/\cos x$; $y(0) = 0$.
1.56. $y' = 2y + e^x - x$; $y(0) = 1/4$.
1.57. $y' = y/(2y \ln y + y - x)$; $y(1) = 1$.

6. Ecuación de Bernoulli. Se llama *ecuación de Bernoulli* la ecuación diferencial de primer orden del tipo.

$$y' = P(x)\,y + Q(x)\,y^m, \tag{13}$$

donde $m \neq 0$, $m \neq 1$ (si $m = 0$ la ecuación (13) es lineal y si $m = 1$, es la ecuación con variables separables).

Al igual que la ecuación lineal, la ecuación de Bernoulli puede ser integrada sustituyendo $y = uv$ o reducida a la ecuación lineal aplicando la sustitución $z = y^{1-m}$. Hay que tener en cuenta que si $m > 1$ puede perderse la solución $y = 0$.

EJEMPLO 10. Resuélvase la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}.$$

◀ Suponiendo $y = uv$ reducimos la ecuación a la forma

$$v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\,u - \frac{x^2}{uv}\right) = 0. \tag{14}$$

De la solución general $u = Cx$ de la ecuación

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$$

escogemos en calidad de la función u una solución particular, por ejemplo,

$$u_1 = x.$$

Sustituyendo u_1 en la ecuación (14) obtenemos una nueva ecuación $\frac{dv}{dx}\,x - \frac{x^2}{xv} = 0$, ó $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$. Su solución general es $v = \sqrt{2x + C}$.

Multiplicando entre sí u_1 y v, tenemos la solución general de la ecuación inicial $y = x\sqrt{2x + C}$. ▶

EJEMPLO 11. Resuélvase la ecuación de Bernoulli respecto a $x = x(y)$:

$$\frac{dx}{\partial y} = \frac{x}{2y} - \frac{1}{2x}.$$

◀ Pongamos $x = uv$ y reduzcamos la ecuación a la forma:

$$v\left(\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y}\right) + \left(\frac{dv}{dy}u + \frac{1}{2uv}\right) = 0.$$

Después de analizar la ecuación

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y} = 0,$$

tomemos su solución particular $u_1 = \sqrt{y}$. Entonces llegamos a la ecuación

$$\frac{dv}{dy}\sqrt{y} + \frac{1}{2v\sqrt{y}} = 0$$

cuya solución general es

$$v^2 = \ln\frac{C}{y}.$$

Multiplicando entre sí $u_1^2 = y$ y v^2 obtendremos la integral general de la ecuación inicial

$$x^2 = y\ln\frac{C}{y}. \text{ ▶}$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.58. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

1.59. $y' = y \operatorname{ctg} x + \dfrac{y^2}{\operatorname{sen} x}$.

1.60.* $y' = \dfrac{2x}{x^2\cos y + \operatorname{sen} 2y}$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales:

1.61. $3dy = (1 - 3y^3)\, y \operatorname{sen} x\, dx; \quad y(\pi/2) = 1$.

1.62. $y\,dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0; \; y(1/2) = 1$.

7. Ecuaciones diferenciales exactas. La ecuación diferencial de primer orden del tipo

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{15}$$

se llama *ecuación diferencial exacta* (o en diferenciales totales), si su primer miembro es una diferencial total de cierta función $U(x, y)$, es decir,

$$P(x, y)=\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q(x, y)=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Para que la ecuación (15) sea una ecuación diferencial exacta, es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{16}$$

Si la ecuación (15) es una ecuación diferencial exacta, entonces se puede escribirla en forma

$$dU(x, y)=0.$$

La integral completa de esta ecuación es:

$$U(x, y)=C,$$

donde C es una constante arbitraria.

La función $U(x, y)$ puede ser hallada del modo siguiente. Integrando la igualdad $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)$ respecto a x para un y fijo y señalando que la constante arbitraria puede depender en este caso de y, tenemos

$$U(x, y)=\int P(x, y)\,dx+\varphi(y). \tag{17}$$

Luego, de la igualdad

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx+\varphi'(y)=Q(x, y)$$

hallamos la función $\varphi(y)$ y sustituyéndola en (17) obtenemos la función $U(x, y)$.

Es evidente que la función buscada $U(x, y)$ está definida con exactitud de hasta la constante aditiva arbitraria. Para escribir la integral general de la ecuación inicial es suficiente escoger una de las funciones de la familia que obtenemos.

OBSERVACIÓN. Un método más simple de determinación de la función $U(x, y)$ consiste en el cálculo de la así llamada integral curvilínea de segunda especie

$$U(x, y)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy,$$

donde los puntos $M_0(x_0, y_0)$ y $M(x, y)$ y el camino de integración están situados en la región de la continuidad de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ y de sus derivadas parciales, además $M_0(x_0, y_0)$ es cierto punto fijo.

EJEMPLO 12. Resuélvase la ecuación

$$\frac{y}{x}\,dx+(y^3+\ln x)\,dy=0,$$

cerciorándose previamente de que ésta es la ecuación diferencial exacta.

◀ Verifiquemos la condición (16):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}\ ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y^3+\ln x)=\frac{1}{x}\ .$$

La condición (16) está cumplida, por consiguiente la ecuación dada es la ecuación diferencial exacta.

Hallemos la función $U(x, y)$. Integrando respecto de x, si y es constante, la igualdad

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)=\frac{y}{x}$$

obtenemos

$$U(x, y)=\int \frac{y}{x}\,dx+\varphi(y)=y\ln x+\varphi(y). \tag{18}$$

Señalemos que al calcular la primitiva escribimos aquí $\ln x$ en vez de $\ln|x|$, pues la ecuación inicial contiene $\ln x$ y, por consiguiente, tiene sentido sólo para $x>0$.

Sustituyendo (18) en la igualdad

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x, y)=y^3+\ln x$$

tenemos

$$\ln x+\varphi'(y)=y^3+\ln x,$$

de donde

$$\varphi(y)=\frac{1}{4}y^4+C_1. \tag{19}$$

Poniendo, por ejemplo, $C_1=0$ hallamos partiendo de (18) y (19)

$$U(x, y)=y\ln x+\frac{1}{4}y^4.$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación dada tiene la forma

$$y\ln x+\frac{1}{4}y^4=C. \ ▶$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales indicadas más abajo después de cerciorarse que son ecuaciones diferenciales exactas:

1.63. $(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0$.

1.64. $(10xy-8y+1)\,dx+(5x^2-8x+3)\,dy=0$.

1.65. $(2x+e^{x/y})\,dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{x/y}\,dy=0$.

1.66. $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\operatorname{sen} 2y)\,dy=0$.

8. Teorema de existencia y unicidad de la solución. Soluciones singulares. Se llama *problema de Cauchy* para la ecuación diferencial $y'=f(x, y)$, el problema acerca de la determinación de la solución particular de esta ecuación que satisface la condición inicial dada $y(x_0) = y_0$.

TEOREMA DE CAUCHY. *Si en la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ la función $f(x, y)$ es continua en cierta región D del plano Oxy y tiene en esta región la derivada parcial acotada $f'_y(x, y)$, entonces para cualquier punto $(x_0, y_0) \in D$ en cierto intervalo $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ existe una solución y además única $y(x)$ de esta ecuación, que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.*

Geométricamente esto significa, que por cada punto M de la región D pasa una y sólo una curva integral de la ecuación $y' = f(x, y)$.

Los puntos de la región D en los cuales se altera la unicidad de la solución del problema de Cauchy se llaman *puntos singulares* de la ecuación diferencial.

La solución (curva integral) de la ecuación $y' = f(x, y)$, en cada punto de la cual se altera la unicidad de la solución del problema de Cauchy, se llama *solución singular* (*curva integral singular*) de esta ecuación. No se puede obtener la solución singular a partir de la general para ninguno de los valores de C (incluyendo también $C = \pm\infty$).

La envolvente de una familia de curvas determinadas por la solución general $y = \varphi(x, C)$ o por la integral general $\Phi(x, y, C) = 0$, es una curva integral singular. Se determina eliminando, si es posible, el parámetro C del sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C), \\ 0 = \varphi'_C(x, C) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{cases}$$

La función determinada de este modo es conveniente sustituirla en la ecuación diferencial dada y es necesario cerciorarse que es su solución.

EJEMPLO 13. Hállese la región en la cual la ecuación

$$y' = x\sqrt{1 - y^2}$$

tiene una única solución.

◀ Aquí $f(x, y) = x\sqrt{1 - y^2}$ es una función continua para $|y| \leqslant 1$; la derivada parcial $f'_y(x, y) = -\dfrac{xy}{\sqrt{1 - y^2}}$ está acotada para $|y| \leqslant a < 1$. Por consiguiente, la ecuación dada tiene una única solución en cualquier franja $-a \leqslant y \leqslant a$ (para $0 < a < 1$). ▶

EJEMPLO 14. Hállense las soluciones singulares de la ecuación

$$y' = \sqrt{1 - y^2},$$

conociendo su solución general $y = \operatorname{sen}(x + C)$, $|x + C| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

◀ Compongamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sen}(x + C), \\ 0 &= \cos(x + C), \end{aligned} \quad |x + C| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Eliminando C encontramos dos funciones $y = \pm 1$, que evidentemente son soluciones de la ecuación dada y no se obtienen a partir de la solución general para ninguno de los valores de C. Por consiguiente,

$y = \pm 1$ son soluciones singulares.

Hállense las regiones de existencia y unicidad de la solución para las ecuaciones diferenciales:

1.67. $y' = x^2 - y^2$. **1.68.** $y' = \dfrac{y}{y-x}$.

1.69. $y' = 1 + \operatorname{tg} y$. **1.70.** $y' = x^2 + \sqrt{x - y^2}$.

Hállense las soluciones singulares de las siguientes ecuaciones diferenciales, conociendo las soluciones generales (donde están indicadas).

1.71. $y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{x}$.

1.72. $y' = 4x\sqrt{y-1}$; $y = (x^2 + C)^2 + 1$.

1.73. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$; $(y - C)^2 = 4Cx$.

1.74. $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$; $y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + C^2$.

9. Ecuaciones no resueltas respecto a la derivada. Sea la ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$ resoluble, bien respecto a la función buscada, es decir, tiene la forma

$$y = f(x, y'), \tag{20}$$

o bien respecto al argumento, es decir, se escribe en la forma

$$x = f(y, y'). \tag{21}$$

Entonces la ecuación se integra introduciendo el parámetro $p = y'$. Las ecuaciones (20) y (21) se transforman en ecuaciones algebraicas y si las diferenciamos respecto a x o a y, obtenemos los sistemas de ecuaciones

$$y = f(x, p) \qquad x = f(y, p),$$
$$p = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} \;\text{ó}\; \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Partiendo de estos sistemas hallamos respectivamente la solución general de la ecuación (20) ó (21) en la forma explícita o paramétrica.

EJEMPLO 15. Resuélvase la ecuación

$$y = y'^2 + xy' - x.$$

◀ Introduzcamos el parámetro $p = y'$. Entonces

$$y = p^2 + x(p - 1). \tag{22}$$

Diferenciando esta igualdad respecto a x obtendremos

$$p = 2p\frac{dp}{dx} + p - 1 + x\frac{dp}{dx},$$

o bien

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{2p+x}.$$

Escribamos la última igualdad en la forma

$$\frac{dx}{dp}=x+2p.$$

Esta es la ecuación lineal; su solución general es:

$$x=Ce^p-2(p+1). \tag{23}$$

Al sustituir la expresión (23) en la fórmula (22) obtendremos

$$y=Ce^p(p-1)-p^2+2. \tag{24}$$

El sistema de relaciones (23) y (24) determina la solución general de la ecuación inicial en forma paramétrica:

$$x=Ce^p-2(p+1), \quad y=Ce^p(p-1)-p^2+2. \ \blacktriangleright$$

EJEMPLO 16. Resuélvase la ecuación

$$x=y'^2+\frac{y}{y'}.$$

◀ Suponiendo $p=y'$ tenemos

$$x=p^2+\frac{y}{p}.$$

Diferenciamos esta igualtad respecto a y:

$$\frac{1}{p}=2p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

ó bien

$$\frac{dp}{dy}\left(2p-\frac{y}{p^2}\right)=0.$$

De aquí

$$p_1=C \quad \text{y} \quad p_2=\sqrt[3]{\frac{1}{2}y}.$$

Sustituyendo uno tras otro ambos resultados en la expresión para x encontramos la solución general

$$y=Cx-C^3$$

y la solución

$$y=\frac{2}{3\sqrt{3}}x^{3/2},$$

la cual, como es fácil cerciorarse, es singular. ▶

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.75. $y=y'^2+4y'^3$. **1.76.** $y=y'\sqrt{1+y'^2}$.

1.77. $y=(y'-1)\,e^{y'}$. **1.78.** $y=\dfrac{y'^2}{2}+2xy'+x^2$.

1.79. $x=y'^3-y'+2$. **1.80.** $x=y'\cos y'$.

1.81. $x=2y'-\ln y'$. **1.82.** $x=\dfrac{y}{y'}+\dfrac{1}{y'^2}$.

Un caso particular de la ecuación del tipo (20) es la así llamada *ecuación de Lagrange*

$$y=xf(y')+\varphi(y') \tag{25}$$

la cual para $f(y')=y'$ se llama *ecuación de Clairaut*. Introduciendo el parámetro $p=y'$ la ecuación (25) se reduce a la forma

$$y=xf(p)+\varphi(p)$$

en el caso de la ecuación general de Lagrange y a la forma

$$y=xp+\varphi(p)$$

en el caso de la ecuación de Clairaut.

Las soluciones singulares de la ecuación de Lagrange tienen la forma

$$y=xf(p_0)+\varphi(p_0),$$

donde p_0 es cualquiera de las raíces de la ecuación $f(p)=p$.

La solución general de la ecuación Clairaut tiene la forma

$$y=Cx+\varphi(C) \tag{26}$$

y la solución singular,

$$x=-\varphi'(p), \quad y=-\varphi'(p)\,p+\varphi(p) \tag{27}$$

que es la envolvente de una familia de curvas integrales (26).

De este modo se puede enunciar la siguiente *regla práctica*. Sustituyendo en la ecuación Clairaut el símbolo y' por el símbolo C obtendremos inmediatamente la solución general (26). Diferenciándola respecto a C y eliminando C del sistema de dos ecuaciones (de la solución general y del resultado de la diferenciación) obtenemos la solución singular (27).

EJEMPLO 17. Resuélvase la ecuación de Lagrange

$$y=xy'^2+y'.$$

◀ Poniendo $y'=p$ hallamos

$$y=xp^2+p.$$

Diferenciando esta igualdad respecto a x tenemos

$$p=p^2+2xp\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dx}$$

ó

$$\frac{dx}{dp}=x\frac{2p}{p-p^2}+\frac{1}{p-p^2}.$$

Esta ecuación lineal tiene la solución general

$$x=\frac{1}{(1-p)^2}(C+\ln|p|-p),$$

sustituyendo la cual en la fórmula para y obtenemos la solución general de la ecuación inicial en la forma paramétrica:

$$x=\frac{C+\ln|p|-p}{(1-p)^2}, \qquad y=\frac{(C+\ln|p|-p)\,p^2}{(1-p)^2}+p.$$

Además, la ecuación tiene las soluciones singulares $y=0$ e $y=x+1$ que corresponden a las raíces $p_1=0$ y $p_2=1$ de la ecuación $p^2=p$. ▶

EJEMPLO 18. Resuélvase la ecuación

$$y=xy'-y'^4.$$

◀ La ecuación dada tiene la forma (25) para $f(y')=y'$, es decir, es la ecuación de Clairaut. Siguiendo la regla práctica obtenemos la solución general

$$y=Cx-C^4.$$

Eliminando luego el parámetro C del sistema de ecuaciones

$$y=Cx-C^4,$$
$$0=x-4C^3$$

obtendremos la solución singular

$$y=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}x^{4/3}. \ ▶$$

Resuélvanse las ecuacines diferenciales:

1.83. $y=x\dfrac{1+y'^2}{2y'}$. **1.84.** $y=2xy'+\dfrac{1}{y'^2}$.

1.85. $y=xy'^2+y'^3$. **1.86.** $y=\dfrac{1}{2}(xy'+y'\ln y')$.

1.87. $y=xy'-\dfrac{1}{y'}$. **1.88.** $y=xy'+y'+\sqrt{y'}$.

1.89. $y=xy'-e^{y'}$. **1.90.** $y=xy'+\cos y'$.

10. Problemas mixtos de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Defínanse los tipos de las ecuaciones diferenciales e indíquense de modo general los métodos de su resolución:

1.91. $\operatorname{sen} x^3=e^{\frac{y'-x^2}{y}}$. **1.92.** $\sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{2x^2}{y-3x-xy'}$.

1.93. $1+x+(1+x^2)(e^x-e^{2y}y')=0$.

1.94. $2y'(1-x^2)-xy-2xy^2+2x^3y^2=0$.

1.95. $y\,dx+(2x-y^2)\,dy=0.$

1.96. $\left(\frac{x}{y}-x+y^2\right)dx+\left(2xy+y-\frac{x^2}{2y^2}\right)dy=0$

1.97. $y\,dx+(x-2\sqrt{xy})\,dy=0.$

1.98. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0.$

1.99. $y'=\operatorname{sen}(y-x).$ **1.100.** $x=\arccos\frac{y'-a^x}{y}$.

1.101. $\sqrt{y}=\frac{y'-ye^{x^2\operatorname{sen}x}}{x^2+2x-1}$.

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales:

1.102. $y'+xy=x^3.$ **1.103.** $(x-y)\,dy-y\,dx=0.$

1.104. $(x\cos 2y+1)\,dx-x^2\operatorname{sen}2y\,dy=0.$

1.105. $y'=y\operatorname{tg}x-y^2\cos x.$

1.106. $y'=\frac{1-2x}{y^2}$.

1.107. $2y\,dx+(y^2-6x)\,dy=0.$

1.108. $(xye^{x/y}+y^2)\,dx=x^2e^{x/y}\,dy.$

1.109. $(xy^2+x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0.$

1.110. $(2x^3-xy^2)\,dx+(2y^3-x^2y)\,dy=0.$

1.111. $xy'+y=y^2\ln x.$

1.112. $3x+y-2+y'(x-1)=0.$

1.113. $y'=\frac{x+y}{x-y}$. **1.114.** $y'\cos x-y\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}2x.$

1.115. $(2x+\ln y)\,dx+\left(\frac{x}{y}+\operatorname{sen}y\right)dy=0.$

1.116. $y=xy'-\ln y'.$ **1.117.** $y'=\frac{1}{xy+x^2y^3}$.

1.118. $\left(x-y\operatorname{sen}\frac{x}{y}\right)dx+x\operatorname{sen}\frac{y}{x}\,dy=0.$

1.119*. $(1-y^2)\,dx=(\sqrt{1+y^2}\cos y-xy)\,dy.$

1.120. $\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx-\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=0.$

1.121. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\operatorname{sen}^2x}$. **1.122.** $y=y'^2+2xy'+\frac{x^2}{2}$.

1.123*. $(x-2y^3)\,dx+3y^2(2x-y^3)\,dy=0.$

11. Problemas geométricos y físicos que llevan a la resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden. En los problemas de geometría, en los cuales se exige hallar la ecuación de la curva basándose en la propiedad dada de su tangente, normal o área del trapecio curvilíneo, se emplea la interpretación geométrica de la derivada (pendiente de la tangente) y de la integral con límite variable (área del trapecio curvilíneo con ordenada limitadora móvil), así como las fórmulas generales siguientes para determinar las longitudes de los segmentos de la tangente t, de la normal n, de la subtangente s_t y de la subnormal s_n (fig. 92):

$$t=\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|,\quad n=|y\sqrt{1+y'^2}|,$$

$$s_t=\left|\frac{y}{y'}\right|,\qquad s_n=|yy'|.$$

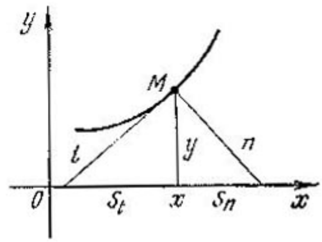


Fig. 92

EJEMPLO 19. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si en cada su punto $M(x, y)$ la subtangente s_t es k veces menor que la subnormal s_n.

◀ Sea $y = f(x)$ la ecuación de la curva buscada. Utilizando las expresiones para la subtangente s_t y la subnormal s_n obtenemos inmediatamente la ecuación diferencial

$$|yy'|=k\left|\frac{y}{y'}\right|$$

ó

$$(y')^2 = k.$$

Integrando esta ecuación y tomando en consideración la condición inicial $y(0) = 0$, obtenemos la ecuación buscada

$$y=\pm\sqrt{k}\cdot x$$

(dos rectas). ▶

EJEMPLO 20. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 1)$, si para cualquier segmento $[1, x]$ el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente de esta curva, es dos veces mayor que el producto de coordenadas del punto $M(x, y)$ de la curva $(x > 0,\ y > 0)$.

◀ Según la condición del problema tenemos

$$\int_1^x y(t)\,dt=2xy(x).$$

Diferenciando esta ecuación respecto a x tenemos la ecuación diferencial $y = 2(y + xy')$ o

$$y'=-\frac{y}{2x}.$$

Integrando esta ecuación y tomando en consideración la condición inicial $y(1) = 1$, hallamos la ecuación de la curva buscada:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}. \blacktriangleright$$

1.124. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(\sqrt{2}, 0)$, si la suma de las longitudes de su tangente y subtangente es igual al producto de corrdenadas del punto de tangencia.

1.125. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 2)$, si su subtangente es dos veces mayor que la abscisa del punto de tangencia.

1.126. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1/2, -1)$, si la longitud del segmento del semieje de las abscisas, que se corta por su tangente, es igual al cuadrado de la abscisa del punto de tangencia.

1.127. Hállense las ecuaciones de las curvas para las cuales la longitud del segmento de la normal es constante e igual a a.

1.128. Hállense las ecuaciones de las curvas cuya subnormal tiene una longitud constante igual a a.

1.129. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 2)$, si el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco de esta curva, es dos veces mayor que la longitud del arco correspondiente.

1.130. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 1/2)$, si para cualquier segmento $[1, x]$ el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente, es igual a la razón entre la abscisa x del punto extremo y la ordenada.

1.131. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 3)$, si la subtangente en todo punto es igual a la suma de la abscisa del punto de tangencia y de la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto de tangencia $\left(\text{limítese a analizar el caso de } \frac{y}{y'} > 0\right)$.

1.132. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1, 0)$ si la longitud del segmento del eje de abscisas que se corta por su normal es en 2 mayor que la abscisa del punto de tangencia.

1.133. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si para cualquier segmento $[a, x]$ el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco correspondiente de esta curva, es igual al cubo de la ordenada del punto extremo del arco.

1.134. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto con coordenadas polares $r = 2$, $\varphi = 0$, si el ángulo α entre su tangente y el radio vector del punto de tangencia es una magnitud constante: $\operatorname{tg} \alpha = a$.

1.135. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 1), si a la longitud del segmento del eje de abscisas que se corta por cualquier tangente a ella, es igual a la longitud de esta tangente.

1.136. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (3, 1), si la longitud del segmento que se corta por cualquier tangente suya sobre el eje de ordenadas, es igual a su subnormal.

1.137. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el origen de coordenadas, si el punto medio del segmento de su normal desde un punto cualquiera de la curva hasta el eje Ox, está situado en la parábola $2y^2 = x$.

1.138. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 0), si el área del trapecio formado por la tangente, los ejes de coordenadas y la ordenada del punto de tangencia es constante e igual a 3/2.

1.139. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (0, 1), si el área del triángulo formado por el eje de abscisas, la tangente y el radio vector del punto de tangencia es constante e igual a 1.

1.140. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 2), si el producto de la abscisa del punto de tangencia por la abscisa del punto de intersección de la normal con el eje Ox, es igual al cuadrado duplicado de la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto de tangencia.

1.141. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto con coordenadas polares $r = \pi$, $\varphi = \pi/2$, si el área del sector limitado por esta curva, el eje polar y el radio polar variable, es seis veces menor que el cubo del radio polar.

Llamamos *trayectorias ortogonales* para la familia uniparamétrica S_1 de líneas $y = \Phi(x, a)$, a otra familia S_2 de líneas que intersecan las líneas de la primera familia bajo el ángulo recto.

EJEMPLO 21. Hállense las trayectorias ortogonales de la familia de las parábolas cúbicas $y = ax^3$.

◀ Hallamos la ecuación diferencial de la familia dada, eliminando a del sistema de ecuaciones

$$y = ax^3,$$
$$y' = 3ax^2.$$

Obtendremos

$$y' = \frac{3y}{x}.$$

La ecuación diferencial de la familia de las trayectorias ortogonales es

$$y' = -\frac{x}{3y}.$$

Su integral general

$$x^2 + 3y^2 = C^2$$

es la ecuación de la familia de las trayectorias ortogonales (elipses).▶

Hállense las trayectorias ortogonales de las familias dadas de las curvas (a es un parámetro):

1.142. $ay^2 = x^3$. **1.143.** $y = ax^2$.

1.144. $x^2 - 2_y{}^2 = a^2$. **1.145.** $y = ae^{2x}$.

Al formar las ecuaciones diferenciales de primer orden en los problemas físicos a menudo se utiliza el *método de las diferenciales*, según el cual las relaciones aproximadas entre los incrementos pequeños de las magnitudes, se sustituyen por las relaciones entre sus diferenciales. Esta sustitución no se refleja en los resultados, pues todo se reduce a la eliminación de los infinitésimos de órdenes superiores. El otro método para formar las ecuaciones diferenciales consiste en la utilización del sentido físico de la derivada como velocidad de la duración del proceso.

EJEMPLO 22. En un recipiente inicialmente se contiene A kg de sustancia disuelto en B litros de agua. Luego, cada minuto en el recipiente entran M litros de agua y salen N litros de disolución ($M \geqslant \geqslant N$), además la concentración se conserva homogénea mediante la agitación. Hállese la cantidad de sustancia en el recipiente dentro de T minutos, después del comienzo del proceso.

◀ Designemos por $x(t)$ la cantidad de sustancia en el recipiente dentro de t minutos después del comienzo del proceso y por $(x + \Delta x)$ en el tiempo $(t + \Delta t)$. Señalemos que $\Delta x < 0$ para $\Delta t > 0$ (es decir, la disolución «se debilita»).

Sea $V(t)$ el volumen de la mezcla en el momento t:

$$V(t) = B + Mt - Nt.$$

La concentración de la sustancia en el momento t es igual, evidentemente, a x/V. En un lapso de tiempo infinitamente pequeño $[t, t + \Delta t]$ la cantidad de sustancia se cambia en una magnitud infinitesimal Δx para la cual es válida la igualdad aproximada

$$\Delta x \approx -\frac{x}{V} N \Delta t = -\frac{Nx}{B+(M-N)\,t}\,\Delta t.$$

Sustituyendo los incrementos Δx y Δt por las diferenciales dx y dt obtenemos la ecuación diferencial:

$$dx = -\frac{Nx}{B+(M-N)\,t}\,dt.$$

Integrando esta ecuación con variables separables y considerando $M > N$ hallamos la solución general:

$$x(t) = \frac{C}{(B+(M-N)\,t)^{\frac{N}{M-N}}}.$$

Utilizando la condición inicial $x = A$ para $t = 0$ hallamos la solución particular

$$x(t) = A\left(\frac{B}{B+(M-N)\,t}\right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

Poniendo $t = T$, obtendremos la respuesta:

$$x(T) = A\left(\frac{B}{B+(M-N)\,T}\right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

El caso de $M = N$ exige un análisis particular (véase el problema 1.154). ▶

1.146. La velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y el medio ambiente que lo rodea (ley de Newton). Hállese la temperatura T en función del tiempo t, si el cuerpo calentado hasta T_0 grados está introducido en un local donde la temperatura es constante e igual a a grados.

1.147. ¿Al cabo de cuánto tiempo la temperatura de un cuerpo calentado hasta 100 °C descenderá hasta 25 °C, si la temperatura en el local es igual a 20 °C y durante los primeros 10 minutos el cuerpo se enfrió hasta 60 °C?

1.148. La acción retardadora del rozamiento sobre un disco que gira dentro de un líquido es proporcional a la velocidad angular de rotación. Hállese esta velocidad angular en función del tiempo, conociendo, que el disco, que comenzó a girar con una velocidad de 5 r.p.s., al cabo de dos minutos gira con una velocidad de 3 r.p.s. ¿Dentro de qué tiempo tendrá una velocidad angular de 1 r.p.s.?

1.149. La velocidad de desintegración del radio es proporcional a la cantidad disponible del mismo. Durante un año se desintegra 0,44 mg de cada gramo de radio. ¿Cuántos años tardará en desintegrarse la mitad de la cantidad disponible de radio?

1.150*. La velocidad con que sale el agua de un recipiente a través de un orificio pequeño se determina por la fórmula $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, donde h es la altura del nivel de agua por encima del orificio, g es la aceleración de la caída libre (póngase $g = 10$ m/s^2). ¿Al cabo de cuánto tiempo saldrá toda el agua del depósito cilíndrico que tiene un diámetro $2R = 1$ y una altura $H = 1{,}5$ m, a través de un orificio en el fondo de $2r = 0{,}05$ m de diámetro?

1.151*. La contidad de luz absorbida al pasar a través de una capa delgada de agua, es proporcional a la cantidad de luz que cae sobre ella y al espesor de la capa. Sabiendo, que al atravesar una capa de agua de 2 m de espesor se absorbe 1/3 del flujo luminoso inicial, hállese qué parte de esta luz alcanzará la profundidad de 12 m.

1.152. Una barca disminuye su movimiento a consecuencia de la resistencia del agua que es proporcional a la velocidad de la barca. La velocidad inicial de ésta es de 1,5m/s, al cabo de 4 segundos se reduce a 1 m/s. ¿Qué tiempo se necesita para que la velocidad disminuya hasta 1 cm/s? ¿Qué trayecto recorrerá la barca hasta parar?

1.153*. Una bala a la velocidad $v_0 = 400$ m/s atraviesa una pared cuyo espesor es $h = 20$ cm y sale a la velocidad de 100 m/s. Suponiendo que la fuerza de resistencia de la pared es proporcional al cuadrado de la velocidad de movimiento de la bala, hállese el tiempo que tardó la bala en atravesar la pared.

1.154. En un depósito se encuentran 100 l de solución que contiene 10 kg de sal. En el depósito entra el agua a una velocidad de 5 l/min y la mezcla sale de él con la misma velocidad. La concentración se supone homogénea. ¿Qué cantidad de sal se quedará en el depósito al cabo de una hora?

1.155. Cierta sustancia se transforma en otra con una velocidad proporcional a la cantidad de sustancia no transformada. Si al cabo de una hora quedan 31,4 g de la primera sustancia y al transcurrir otras tres horas, 9,7 g hállese: a) ¿Cuánta sustancia había al inicio del proceso? b) ¿Cuánto tiempo, después del comienzo del proceso, transcurrirá hasta quedar sólo el 1% de la cantidad inicial?

1.156*. En el local de un taller de 10 800 m³ de capacidad el aire contiene 0,12% de dióxido de carbono. Los ventiladores suministran aire fresco con un contenido de 0,04% de dióxido de carbono, en cantidad de 1500 m³/min. Suponiendo que la concentración de dióxido de carbono en todos los lugares del taller y en cada momento de tiempo, es la misma, hállese el contenido de dióxido de carbono a los 10 min después que el ventilador inició su trabajo.

1.157. La intensidad de la corriente i en un circuito con resistencia R, autoinducción L y tensión u satisface la ecuación

$$L\frac{di}{dt}+Ri=u.$$

Hállese la intensidad de la corriente i en el momento t si $u=E$ sen ωt e $i=0$, para $t=0$, (L, R, E, ω son constantes).

§ 2. Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores

1. Nociones fundamentales. Teorema de Cauchy. La ecuación diferencial de n-ésimo orden tiene la forma

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{1}$$

o bien

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Se llama *solución general* de la ecuación (1) ó (2) una función tal $y=\varphi(x,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)$, que para cualesquiera valores de los parámetros $C_1,\ \ldots,\ C_n$ es la solución de esta ecuación diferencial.

La ecuación

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)=0 \tag{3}$$

que determina la *solución general* como una función implícita, se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

Se llama *problema de Cauchy* para la ecuación diferencial (2) el problema de determinación de la solución $y(x)$, que satisface las condiciones iniciales dadas

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{4}$$

Si es conocida la solución general $y=\varphi(x,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)$ de la ecuación (2), entonces para resolver el problema de Cauchy las constantes $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ se determinan a partir del sistema de ecuaciones (si es resoluble)

$$y_0=\varphi(x_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_n),$$
$$y_0'=\varphi'(x_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0,\ C_1\ldots,\ C_n).$$

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY. *Si la ecuación diferencial* (2) *es tal, que la función* $f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ *en cierta región* D *de variación de sus argumentos es continua y tiene derivadas parciales continuas* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, *entonces para todo punto* $(x_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ *existe tal intervalo* $x_0 - h < x < x_0 + h$, *sobre el cual existe la solución de esta ecuación y además única, que satisface las condiciones iniciales* (4).

EJEMPLO 1. Muéstrese que la función $y = C_1e^{C_2x}$ es la solución general de la ecuación diferencial $yy'' = y'^2$.

◀ Tenemos: $\qquad y' = C_1C_2e^{C_2x}, \quad y'' = C_1C_2^2e^{C_2x}.$

Sustituyendo las expresiones y, y' e y'' en la ecuación dada, obtendremos la identidad

$$C_1e^{C_2x}\cdot C_1C_2^2e^{C_2x}=(C_1C_2e^{C_2x})^2.$$

Por consiguiente, la función $y = C_1e^{C_2x}$ es la solución general de la ecuación dada. ▶

EJEMPLO 2. Hállese el campo de existencia y la unicidad de solución de la ecuación

$$y''=\frac{y\sqrt{y'}}{x}.$$

◀ La función $f(x,\ y,\ y')=\frac{y\sqrt{y'}}{x}$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\sqrt{y'}}{x}$ es continua para $x \neq 0$, $y' \geqslant 0$; la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y}{2x\sqrt{y'}}$ es continua para $x \neq 0$, $y' > 0$.

Por consiguiente la ecuación dada tiene la única solución para $x \neq 0$, $y' > 0$. ▶

Hállese el campo de existencia y la unicidad de solución de las ecuaciones:

2.1. $y''=x+\sqrt{x^2-y'}$. **2.2.** $y''=y'\ln y'$.

Muéstrese que las funciones dadas son soluciones generales de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

2.3. $y=\ln\frac{1}{x+C_1}+C_2;\ \ y''=y'^2.$

2.4. $y = x^2 \ln x + C_1x^2 + C_2x + C_3;\ xy''' = 2.$

Muéstrese que las relaciones dadas son las integrales generales de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

2.5. $e^y \operatorname{sen}^2 (C_1x + C_2) = 2C_1^2;\ y'' = e^y.$

2.6. $C_1y = \operatorname{sen} (C_1x + C_2);\ yy'' + 1 = y'^2.$

Muéstrese que las funciones dadas son las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales correspondientes:

2.7. $y = \frac{1}{2} (x^2 + 1);\ 1 + y'^2 = 2yy''.$

2.8. $y = e^x;\ y^2 + y'^2 = 2yy''.$

Eliminando los parámetros dedúzcanse las ecuaciones diferenciales para las familias de las líneas siguientes:

2.9. Rectas sobre el plano no paralelas al eje Oy.

2.10. Circunferencias de radio constante R.

2.11. Sinusoides $y = A \operatorname{sen} (x + \alpha)$ donde A y α son parámetros.

2.12. Parábolas con el eje paralelo al eje Oy.

2. Ecuaciones que permiten la reducción del orden. Más abajo se dan algunos tipos de ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden que permiten la reducción del orden.

a) Ecuaciones del tipo $y^{(n)} = f(x)$. La solución general se obtiene integrando n veces $y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx + P_{n-1}(x)$, donde $P_{n-1}(x) = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$ o según la fórmula

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt + P_{n-1}(x).$$

Ejemplo 3. Hállense la solución general de la ecuación $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$ y su solución particular, que satisface las condiciones iniciales $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

◀ Integrando por primera vez tenemos $y' = \operatorname{tg} x + C_1$. La integración reiterada nos da $y = -\ln|\cos x| + C_1x + C_2$. Esta es la solución general. Sustituyendo ahora en la solución general obtenida y en la expresión para la primera derivada $x = \frac{\pi}{2}$, y respectivamente $y = \frac{\ln 2}{2}$ y $y' = 1$, obtenemos el sistema de dos ecuaciones con las incógnitas C_1 y C_2. Resolviendo este sistema determinamos los valores de los parámetros $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ que corresponden a la solución particular buscada que, por consiguiente, tiene la forma $y = -\ln|\cos x|$. ▶

b) Ecuaciones del tipo $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, es decir, ecuaciones que no contienen implícitamente la función buscada y sus derivadas hasta el orden $k-1$ inclusive. Sustituyendo $y^{(k)} = p(x)$ el orden de la ecuación se reduce en k unidades: $F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0$. Supongamos que para la ecuación obtenida podemos hallar la solución general $p(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$. Entonces la función buscada $y(x)$ se obtiene integrando k veces la función $\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$.

Ejemplo 4. Hállese la solución particular de la ecuación $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$ que satisface las condiciones iniciales $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = \frac{1}{2}$, $y''(1) = -1$.

◀ La ecuación dada no contiene y e y'. Pongamos $y'' = p$, entonces $y''' = \frac{dp}{dx}$ y la ecuación toma la forma $x^4\frac{dp}{dx} + 2x^3p = 1$, ó $\frac{dp}{dx} + \frac{2}{x}p = \frac{1}{x^4}$. Esta es la ecuación de primer orden. Su solución general es $p = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2}$. Utilizando la condición inicial $y''(1) = p(1) = -1$ obtenemos $C_1 = 0$. Por consiguiente, $y'' = -\frac{1}{x^3}$, de donde $y' = \frac{1}{2x^2} + C_2$. La condición inicial $y'(1) = 1/2$ permite determinar $C_2 = 0$. Integrando otra vez obtenemos $y = -\frac{1}{2x} + C_3$ y de la condición $y(1) = 1/2$ se deduce que $C_3 = 1$. Así pues, la solución particular buscada es $y = 1 - \frac{1}{2x}$ (hipérbola equilátera). ▶

c) Ecuaciones del tipo $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ que no contienen implícitamente variable independiente. Sustituyendo $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$, etc. el orden de la ecuación se reduce en una unidad.

Ejemplo 5. Hállese la integral general de la ecuación $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

◀ Pongamos $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$. Entonces la ecuación se transforma en

$$p\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}\right) - 3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0.$$

Reduciendo los términos semejantes y simplificando en p^2 (en este caso es conveniente tomar en consideración la solución que se pierde $p=0$ ó $y=c$), tenemos

$$p\frac{d^2p}{dy^2}-2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2=0.$$

Poniendo aquí $\frac{dp}{dy}=z$, $\frac{d^2p}{dy^2}=z\frac{dz}{dp}$, llegamos a la ecuación

$$pz\frac{dz}{dp}-2z^2=0.$$

Simplificando en z (en este caso es conveniente tomar en consideración una solución más $z=\frac{dp}{dy}=0$, es decir, $p=C_1$ o $y=C_1x+C_2$) obtendremos $\frac{dz}{z}-\frac{2\,dp}{p}=0$, de donde $\ln|z|-\ln p^2=\ln|C_1|$, ó $z=\frac{dp}{dy}=C_1p^2$. Integrando la última ecuación hallamos que

$$-\frac{1}{p}=C_1y+C_2, \text{ ó } -\frac{dx}{dy}=C_1y+C_2.$$

Definitivamente obtendremos $x=\overline{C}_1y^2+\overline{C}_2y+C_3$, donde $\overline{C}_1=-\frac{C_1}{2}$, $\overline{C}_2=-C_2$, es decir, la familia de parábolas. Señalemos que en la solución general figuran las soluciones particulares que fueron perdidas con anterioridad.

d) Ecuaciones del tipo $\frac{d}{dx}G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})=0$, es decir, tales ecuaciones en las cuales el primer miembro puede ser representado como derivada total con respecto a x de cierta función $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Integrando por x obtendremos una nueva ecuación cuyo orden es en una unidad inferior al orden de la ecuación inicial.

Ejemplo 6. Hállese la solución general de la ecuación

$$(1+x^2)\,y''+2xy'=x^3.$$

◀ El primer miembro de la ecuación es una derivada total respecto a x de la función $(1+x^2)\,y'$ y el segundo, de la función $\frac{x^4}{4}$, es decir, podemos reescribir la ecuación así: $((1+x^2)\,y')'=\left(\frac{x^4}{4}\right)'$. De aquí, integrando obtenemos $(1+x^2)\,y'=\frac{x^4}{4}+\frac{C_1}{4}$, o

$$dy=\frac{x^4+C_1}{4(1+x^2)}\,dx.$$

Por consiguiente,

$$y=\int \frac{x^4+C_1}{4(1+x^2)}\,dx=\int\left(\frac{1}{4}(x^2-1)+\frac{C_1+1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

y definitivamente

$$y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x+\overline{C}_1 \operatorname{arctg} x+C_2$$

donde $\overline{C}_1=\dfrac{C_1+1}{4}$. Esta es la solución general. ▶

e) LA ECUACIÓN $F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=0$, ES HOMOGÉNEA RESPECTO A LA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS, es decir, $F(x,\ ty,\ ty',\ \ldots,\ ty^{(n)})=t^kF(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})$, $t\neq 0$. Sustituyendo $y'=yz$, $y''=y(z^2+z')$, ... el orden de la ecuación se reduce en una unidad.

EJEMPLO 7. Hállese la solución general de la ecuación $xyy''-xy'^2=yy'=0$.

◀ Pongamos $y'=yz$, $y''=y(z^2+z')$. Entonces la ecuación toma la forma

$$xy^2(z^2+z')-xy^2z^2-y^2z=0.$$

Simplificando en y^2 (en este caso se obtiene la solución $y=0$) obtenemos $xz'-z=0$, o $\dfrac{dz}{z}-\dfrac{dx}{x}=0$, de donde $z=C_1x$. Ya que $z=\dfrac{y'}{y}$, entonces llegamos a la ecuación $y'=C_1xy$, o $\dfrac{dy}{y}=C_1x\,dx$, de donde $\ln y=\dfrac{C_1x^2}{2}+\ln|C_2|$ o $y=C_2e^{\overline{C}_1x^2}$, donde $\overline{C}_1=C_1/2$. Esta es la solución general que contiene precisamente la solución particular perdida $y=0$. ▶

En algunos casos es difícil hallar la solución en la forma de función explícita e implícita, sin embargo se consigue recibir la solución en forma paramétrica.

EJEMPLO 8. Hállese la solución general de la ecuación $y''(1+2\times\ln y')=1$.

◀ Pongamos $y'=p$, $y''=\dfrac{dp}{dx}$. Entonces la ecuación toma la forma $\dfrac{dp}{dx}(1+2\ln p)=1$ o $dx=(1+2\ln p)\,dp$ de donde $x=-p+2p\ln p+C_1$. Ya que $dy=p\,dx$, entonces hallamos, $dy=p(1+2\ln p)\,dp$ de donde $y=p^2\ln p+C_2$ y obtenemos la solución general en forma paramétrica:

$$x=p(-1+2\ln p)+C_1,\ y=p^2\ln p+C_2. ▶$$

Resuélvanse las ecuaciones diferenciales aplicando métodos de reducción del orden:

2.13. $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$.   **2.14.** $y''=x+\operatorname{sen} x$.

2.15. $y'' + 2xy'^2 = 0$. 2.16. $xy'' - y' - x \operatorname{sen} \frac{y'}{x} = 0$.

2.17. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. 2.18. $x^3y'' + x^2y' - 1 = 0$.

2.19. $(1 - x^2)\, y'' + xy' - 2 = 0$. 2.20. $(1 + e^x)\, y'' + y' = 0$.

2.21. $y''' = 2\,(y'' - 1) \operatorname{ctg} x$. 2.22. $x^2y''' = y''^2$.

2.23. $y''' = y''^2$. 2.24. $(2y + y')\, y'' = y'^2$.

2.25. $y'' = 1/\sqrt{y}$. 2.26. $y^3y'' + 1 = 0$.

2.27. $yy'' + y - y'^2 = 0$. 2.28. $yy'' - 2yy' \ln y - y'^2 = 0$.

2.29. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$. 2.30. $(y - 1)y'' = 2y'^2$.

2.31. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$. 2.32. $yy'' + y'^2 = x$.

2.33. $y'' = \frac{y - xy'}{x^2}$. 2.34. $\frac{y''^2 - y'y'''}{y'^2} = \frac{1}{x^2}$.

2.35*. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

2.36. $xy'\,(yy'' - y'^2) - yy'^2 = x^4y^3$.

2.37. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$. 2.38. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales que satisfacen las condiciones iniciales dadas:

2.39. $y'' = xe^x$, $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 0$.

2.40. $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$, $y\,(1) = 0$, $y'\,(1) = 1$, $y''\,(1) = 2$.

2.41. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y\,(2) = 0$, $y'\,(2) = 4$.

2.42. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$, $y\,(0) = y'\,(0) = 1$.

2.43. $y'' = e^{2y}$, $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = 1$.

2.44. $y'' \cos y + y'^2 \operatorname{sen} y - y' = 0$, $y\,(-1) = \pi/6$, $y'\,(-1) = 2$.

2.45. $y''/y' = 2yy'/(1 + y^2)$, $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = 1$.

2.46. $yy'' - y'^2 = y^2$, $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 0$.

2.47. $yy'' = 2xy'^2$, $y\,(2) = 2$, $y'\,(2) = 0.5$.

2.48. $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0$, $y\,(0) = y'\,(0) = 1$.

2.49. **Hállese la curva integral de la ecuación $yy'y'' = y'^3 + y''^2$ que es tangente en el origen de coordenadas a la recta $x + y = 0$.**

2.50. Hállese la curva integral de la ecuación $yy'' + y'^2 - 1 = 0$ que pasa por el punto $M_0 = (0, 1)$ y que es tangente en este punto a la recta $x + y = 1$.

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales en la forma paramétrica:

2.51. $(x + 2y')\, y'' = 1$, **2.52.** $y''^2 - 2y'y'' + 3 = 0$.

2.53. $(2 + y')e^{y'}\, y'' = 1$. **2.54.** $(3y - 2y')y'' - y'^2 = 0$.

2.55. Hállense la ecuación de la curva que es tangente al eje de abscisas en el origen de coordenadas, si su curvatura en todo punto es igual a $\cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

2.56. Hállense las ecuaciones de las curvas, cuyo radio de curvatura en cualquier punto es igual a la longitud del segmento de la normal, que está comprendido entre este punto y el eje de abscisas, si la curva es

a) cóncava hacia las y positivas, b) cóncava hacia las y negativas.

2.57*. Hállense las ecuaciones de las curvas cuyo radio de curvatura en cualquier punto es dos veces mayor que la longitud del segmento de la normal comprendido entre este punto y el eje de abscisas si es conocido que la curva es:

a) cóncava hacia las y positivas, b) cóncava hacia las y negativas.

2.58. Determínese la forma de un hilo no extensible, homogéneo, flexible, con extremos fijos, que se encuentra en el estado de equilibrio bajo la acción del propio peso, si el peso de una unidad de longitud del hilo es igual a q (la proyección horizontal de la fuerza de tensión del hilo es $H = \text{const}$). Colóquese el hilo de tal modo que el vértice de la curva coincida con el punto $(a, 0)$, donde $a = H/q$.

2.59. Un hilo no extensible, homogéneo, pesado, flexible, en estado de equilibrio se somete a una tensión, proporcional al área variable de su sección transversal. Determínese la forma del hilo, suponiendo que es plano, si el peso de una unidad de volumen del hilo se igual a q (la proyección horizontal de la fuerza de tensión del hilo es $H = \text{const}$). Colóquese el hilo de tal modo que la curva pase por el origen de coordenadas y tenga en este punto la tangente horizontal.

2.60. Un cuerpo de masa m se mueve rectilíneamente bajo la acción de una fuerza constante P. Hállense la velocidad de movimiento del cuerpo y el trayecto recorrido por el como funciones del tiempo, si en el momento inicial ambos son iguales a cero y la resistencia del ambiente es proporcional al cuadrado de velocidad.

2.61*. Una pelota de 400 g de masa cae desde una altura de 16,7 m sin velocidad inicial. La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad de la pelota e igual a 0,0048 H, a la velocidad de 1 m/s. Calcúlense el tiempo de caída y la velocidad de la pelota en el final de la caída. Tómese $g = 10$ m/s^2.

2.62. Un cuerpo de masa m se eleva verticalmente con una velocidad inicial v_0. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo (con un coeficiente de proporcionalidad igual a k^2), hállense la altura a la que se eleva el cuerpo y la velocidad con que vuelve a su situación inicial, así como el tiempo de subida y caída del cuerpo.

2.63*. Una pelota de 400 g de masa fue lanzada hacia arriba con una velocidad de 20 m/s. Calcúlense el tiempo que la pelota tardó en elevarse y la altura máxima de subida, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad de la pelota (con un coeficiente de proporcionalidad igual a k^2) y además es igual a 0,0048 H, a la velocidad de 1 m/s. Tómese $g = 10$ m/s^2.

2.64. Determínese la ley del movimiento rectilíneo de un punto material de masa m bajo la acción de la fuerza de repulsión, que es inversamente proporcional al cubo de la distancia del punto al centro inmóvil. En el momento inicial el punto está en reposo y se encuentra del centro a la distancia x_0.

2.65. Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente en dirección al centro inmóvil que lo atrae con una fuerza inversamente proporcional al cubo de la distancia desde el centro (el coeficiente de proporcionalidad es igual a mk^2). Determínese la ley de movimiento, si empieza cuando el punto se encuentra en estado de reposo y está del centro a una distancia de x_0. Determínese el tiempo al cabo del cual el punto alcanza el centro.

2.66. Un cohete se mueve verticalmente hacia arriba bajo la acción de la fuerza de repulsión debida a la salida de los gases. La masa del cohete varía en función del tiempo según la ley $m = m_0 \varphi(t)$, donde $m_0 = \text{const}$ (principio de la combustión del combustible). La velocidad relativa de la salida de los gases es constante e igual a u_0. La velocidad inicial del cohete cerca de la superficie de la Tierra es nula. Hállese la altura a que se eleva el cohete como función del tiempo, si la resistencia del aire se desprecia. Analícese el caso particular cuando $m = m_0 (1 - \alpha t)$ y calcúlese para este caso a que altura se eleva el cohete pasando 10 s, 30 s y 50 s, cuando $u_0 = 2000$ m/s y $\alpha = 0{,}01$ s^{-1}. Tómese $g = 9{,}8$ m/s^2.

2.67. Determínese cuánto tiempo tarda en caer sobre la Tierra un cuerpo atraído por la Tierra según la ley de Newton (con una aceleración inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos), si en el momento inicial la velocidad del cuerpo es nula y la distancia entre él y el centro de la Tierra es igual a H. Despréciese la resistencia de la atmósfera. La aceleración de la caída libre sobre la superficie de la Tierra es constante e igual a g.

2.68*. Un cuerpo que se encuentra a la distancia $x_1 = 60{,}27\ R_t$ del centro de la Tierra (lo que corresponde a la distancia entre la Tierra y la Luna), cae sobre la Tierra del estado de reposo bajo la acción de la fuerza de la gravedad, con una aceleración inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la Tierra. Despreciando la resistencia de la atmósfera determínese, cuánto tiempo tardará en caer sobre la Tierra. Tómese $R_t = 6{,}377 \cdot 10^6$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2.

2.69. Determínese la velocidad a la que el meteoro choca contra la Tierra, si cae desde una altura infinitamente grande a partir del estado de reposo y si, moviéndose hacia la Tierra, la aceleración se toma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre él y el centro de la Tierra. Tómese el radio de la Tierra igual a $R_t = 6377$ km, la aceleración de la caída libre igual a $g = 9{,}8$ m/s^2.

2.70. Por el eje Oy en dirección positiva se mueve el punto A (objetivo) con una velocidad constante v. Sobre el plano Oxy se mueve el punto M (perseguidor) con una velocidad constante u ($u > v$) de tal modo, que el vector de velocidad siempre está dirigido hacia el punto A. Determínese el trayecto del punto M (curva de persecución), si en el momento inicial de tiempo $t = 0$ el punto A se encuentra en el origen de coordenadas y el punto M sobre el eje Ox a la distancia $a > 0$ del objetivo.

2.71*. Una viga de largo l, cuyos extremos reposan sobre dos apoyos, está bajo la acción de una carga uniformemente distribuida, de intensidad q. Hállense la ecuación del eje encorvado de la viga y su flexión máxima, escogiendo el origen de coordenadas en la mitad de la viga no cargada.

2.72*. Una viga de largo l, cuyo extremo derecho está empotrado en la pared, se encorva por la fuerza P aplicada al extremo izquierdo y por la carga uniformemente distribuida, de intensidad q. Hállense la ecuación del eje encorvado de la viga y su flexión máxima.

2.73*. Una viga de largo l, con el extremo izquierdo empotrado, se encorva bajo la acción de una carga uniformemente distribuida, de intensidad q. ¿Qué fuerza P, accionando hacia arriba, debe ser aplicada al extremo derecho de la viga, para que la flexión en el extremo derecho de la viga sea nula?

3. Ecuaciones homogéneas lineales. La ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)\,y = 0 \qquad (5)$$

se llama ecuación diferencial *homogénea lineal* de n-ésimo orden. Si se conoce cualquier solución particular $y_1(x)$ de la ecuación (5), entonces la sustitución $y(x) = y_1(x)\,z(x)$ reduce esta ecuación a la ecuación lineal respecto a la función $z(x)$, que no contiene explícitamente esta función. Por esto, haciendo $z'(x) = u(x)$, obtenemos la ecuación homogénea lineal de orden $n-1$ respecto a la función $u(x)$.

EJEMPLO 9. Hállese la solución general de la ecuación

$$(x^2+1)\,y'' - 2xy' + 2y = 0$$

cerciorándose de que la función $y_1(x) = x$ es una de sus soluciones particulares.

◀ Ya que $y_1'(x) = 1$ e $y_1''(x) = 0$, entonces sustituyendo la expresión $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ en la ecuación dada nos cercioramos de que la función $y_1(x) = x$ es realmente su solución particular. Pongamos $y = xz$, hallemos $y' = xz' + z$, $y'' = xz'' + 2z'$ y sustituyamos las expresiones y, y' e y'' en la ecuación. Obtenemos

$$(x^2+1)(xz'' + 2z') - 2x(xz' + z) + 2xz = 0$$

ó

$$x(x^2+1)\,z'' + 2z' = 0.$$

Ahora, haciendo $z' = u$, $z'' = u'$ llegamos a la ecuación de primer orden respecto a u:

$$x(x^2+1)\,u' + 2u = 0.$$

Esta es la ecuación con variables separables. Su solución general tiene la forma

$$u = C_1\,\frac{x^2+1}{x^2},$$

de donde, considerando $u = z'$, obtenemos la ecuación de primer orden respecto a z:

$$dz = C_1\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Integrando la última ecuación hallamos $z = C_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2$ y por cuanto $y = xz$, entonces obtenemos definitivamente la solución general de la ecuación inicial

$$y = C_1(x^2-1)+C_2x. \blacktriangleright$$

El método expuesto más arriba se generaliza en el caso, cuando son conocidas k soluciones linealmente independientes particulares de la ecuación (5). En este caso, empleando sustituciones adecuadas, el orden de la ecuación puede ser reducido en k unidades.

2.74. Demuéstrese el teorema: si $y_1(x)$ es una solución particular de la ecuación homogénea lineal $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, entonces la función $y_2(x)=y_1(x)\int e^{-\int p(x)\,dx}\times\frac{dx}{y_1^2(x)}$ es también una solución de esta ecuación y la función $y=y_1(x)\left(C_1+C_2\int e^{-\int p(x)\,dx}\frac{dx}{y_1^2(x)}\right)$ es su solución general.

2.75. Hállese la solución general de la ecuación $y''-6y'+5y=0$, si la función e^x es su solución particular.

2.76. Hállese la solución general de la ecuación $y''-2y'-3y=0$, si la función e^{-x} es su solución particular.

2.77. Hállese la solución general de la ecuación $xy''+2y'+xy=0$ si la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es su solución particular.

2.78. Hállese la solución general de la ecuación $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$, si la función x es su solución particular.

2.79. Hállese la solución general de la ecuación $x^3y'''+5x^2y''+2xy'-2y=0$, si se conocen sus soluciones particulares $y_1=x$ e $y_2=1/x$.

Se llama *determinante de Wronksi* (*wronskiano*) del sistema de funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ el determinante

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Si el sistema de funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ es linealmente dependiente en el intervalo (a, b), entonces su wronskiano es nulo en todos los puntos de este intervalo. Si por lo menos en un punto $x_0 \in (a, b)$ tenemos $W(x_0)\neq 0$, entonces el sistema de funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ es linealmente independiente en el intervalo (a, b).

Cualquier sistema de n soluciones linealmente independientes $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ de la ecuación (5) se llama *sistema funda-*

mental de soluciones de esta ecuación. El wronskiano del sistema fundamental de soluciones es diferente de cero en todo el intervalo, donde estas soluciones están determinadas (véase el problema 2.98). Si se conoce el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (5), entonces la solución general de esta ecuación tiene la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

donde $C_1, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

EJEMPLO 10. Está dado el sistema de funciones x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$. Hállese el wronskiano del sistema $W(x)$ y cerciórese de que sobre cierto intervalo el sistema es linealmente independiente. Compóngase la ecuación diferencial homogénea lineal, para la cual este sistema de funciones es un sistema fundamental de soluciones y escríbase la solución general de la ecuación.

◀ Compongamos el wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 1 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}$$

Ya que $W(x) = x$, entonces el sistema es linealmente independiente en todo el eje Ox y, por consiguiente, forma el sistema fundamental de soluciones de cierta ecuación homogénea lineal de tercer orden, cuya solución general es la función $y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$. Para componer la ecuación diferencial hallemos las derivadas y', y'', y''' y eliminemos las constantes arbitrarias de las expresiones para y, y', y'', y'''. Tenemos

$$\begin{aligned} y &= C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x, \\ y' &= C_1 - C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x, \\ y'' &= -C_2 \cos x - C_3 \operatorname{sen} x, \\ y''' &= C_2 \operatorname{sen} x - C_3 \cos x. \end{aligned}$$

Es fácil ver que multiplicando las igualdades primera y tercera por -1 y la segunda y la cuarta por x y sumando estas cuatro igualdades, obtendremos

$$xy''' - y'' + xy' - y = 0. \qquad (6)$$

Esta es la ecuación diferencial buscada.

Se puede obtener de otro modo si se tiene en cuenta que la solución y de la ecuación buscada, junto con las funciones x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, forma el sistema linealmente dependiente y por eso el wronskiano del sistema de las funciones y, x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} y & x & \cos x & \operatorname{sen} x \\ y' & 1 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ y'' & 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \\ y''' & 0 & \operatorname{sen} x & -\cos x \end{vmatrix} = 0.$$

Abriendo el determinante obtendremos la misma ecuación (6) (¡verifíquese!).

Señalemos que en este ejemplo el wronskiano $W(x) = x$ se anula para $x = 0$, lo que, al parecer, contradice a la afirmación indicada más arriba acerca de que el wronskiano del sistema fundamental de soluciones nunca es igual a cero. Sin embargo, se trata de que esta afirmación es válida sólo para las ecuaciones del tipo (5) con coeficientes continuos $a_1(x), \ldots, a_n(x)$. La ecuación (6) escrita en la forma de (5) tiene el aspecto

$$y''' - \frac{1}{x} y'' + y' - \frac{1}{x} y = 0, \tag{7}$$

es decir, tiene sentido sólo para $x \neq 0$. El sistema de funciones x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ es el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (7) en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, donde el wronskiano $W(x) = x$ es diferente de cero en todos los puntos; ¡en completa correspondencia con la afirmación general mencionada más arriba! ▶

Investíguense respecto a la dependencia lineal los siguientes sistemas de funciones:

2.80. $x, \ln x$.

2.81. $\operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} x \cos x$.

2.82. e^{-x}, xe^{-x}.

2.83. $x, 2x, x^2$.

2.84. e^x, xe^x, x^2e^x.

2.85. $\operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x$.

2.86. $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$.

2.87. e^x, e^{x+1}.

2.88. $x, 0, e^x$.

2.89. $1, \operatorname{sen} x, \cos 2x$.

Conociendo el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal fórmese esta ecuación.

2.90. $1, e^{-x}$.

2.91. $e^{2x} \cos x, e^{2x} \operatorname{sen} x$.

2.92. x^3, x^4.

2.93. $1, x, e^x$.

2.94. $1, \operatorname{sen} x, \cos x$.

2.95. $2x, x - 2, e^x + 1$.

2.96. e^{3x}, e^{5x}.

2.97. $e^{2x}, \operatorname{sen} x, \cos x$.

2.98.** Demuéstrese que si $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal de n-ésimo orden con coeficientes continuos en cierto intervalo (a, b) y si el wronskiano $W(x)$ de este sistema es nulo para $x_0 \in (a, b)$, entonces $W(x) \equiv 0$ para $a < x < b$.

2.99*. Está dado el sistema de funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$ y además en cierto intervalo el wronskiano $W(x)$ de este sistema es diferente de cero. Fórmese la ecuación diferencial homogénea lineal para la cual este sistema, es un sistema fundamental de soluciones.

2.100. Conociendo el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal $e^x, \cos x, \operatorname{sen} x$, hállese su solución particular que satisfaga las condiciones iniciales: $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -1$.

2.101. Conociendo el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea lineal e^x, e^{2x}, e^{3x}, hállese su solución particular que satisfaga las condiciones iniciales: $y(0) = 6$, $y'(0) = 14$, $y''(0) = 36$.

4. Ecuaciones no homogéneas lineales. La ecuación de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x), \tag{8}$$

en la cual $f(x) \not\equiv 0$ se llama ecuación diferencial *no homogénea lineal* de n-ésimo orden.

La solución general de la ecuación (8) se determina por la fórmula

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) \tag{9}$$

donde $y_0(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (5) e $\tilde{y}(x)$ es cierta solución particular de la ecuación no homogénea (8).

EJEMPLO 11. Está dada la ecuación diferencial no homogénea lineal $xy''' - y'' + xy' - y = 2x^3$.

Es conocido que la función x^3 es su solución particular. Se exige hallar la solución general de esta ecuación.

◀ Según la fórmula (9) la solución general de la ecuación no homogénea se forma como la suma de la solución general $y_0(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente y de la solución particular $\tilde{y}(x)$ de la ecuación no homogénea. En nuestro caso $y_0(x) = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$ (véase el ejemplo 10) e $\tilde{y}(x) = x^3$. Por consiguiente, la solución general buscada es $y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x + x^3$. ▶

Si es conocida la solución general $y_0(x) = C_1 y_1(x) + \ldots$ $\ldots + C_n y_n(x)$ de la ecuación homogénea (5) correspondiente a la ecuación (8), entonces para determinar la solución particular $\tilde{y}(x)$ de la ecuación (8) se puede emplear el método de Lagrange de variación de las constantes arbitrarias.

Precisamente buscaremos la solución particular de la ecuación no homogénea (8) en forma $\tilde{y}(x) = C_1(x)\, y_1(x) + \ldots + C_n(x)\, y_n(x)$, donde exigiremos complementariamente que las funciones $C_1(x), \ldots$ $\ldots, C_n(x)$ satisfagan las condiciones $\sum\limits_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(k)} \dfrac{dC_\nu(x)}{dx} = 0$ para todos los $k = 0, 1, \ldots, n-2$ (donde $y_\nu^{(0)} = y_\nu$). Entonces para las funciones $C_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{dC_n}{dx} &= 0, \\ y_1' \frac{dC_1}{dx} + y_2' \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n' \frac{dC_n}{dx} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} &= f(x). \end{aligned} \tag{10}$$

El determinante de este sistema es el wronskiano diferente de cero del sistema fundamental de soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, por eso el sistema tiene una única solución respecto a $\frac{dC_\nu}{dx}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

EJEMPLO 12. Conociendo que las funciones $y_1(x)=\frac{\cos x}{x}$ e $y_2(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación $xy''+2y'+xy=0$ (véase el problema 2.77), hállese la solución general de la ecuación

$$xy'' + 2y' + xy = x. \tag{11}$$

◀ La solución general de la ecuación homogénea correspondiente se escribe en la forma $y_0(x)=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Considerando C_1 y C_2 como funciones de x, para determinar la solución particular de la ecuación (11) formemos el sistema del tipo (10):

$$C_1'(x)\frac{\cos x}{x}+C_2'(x)\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0,$$

$$C_1'(x)\left(\frac{\cos x}{x}\right)'+C_2'(x)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)'=1$$

(la ecuación (11) debe ser reducida a la forma (8), es decir, todos sus términos deben ser divididos por x). Sustituyendo los valores $C_2'(x) = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}C_1'(x)$ en la segunda ecuación obtendremos

$$C_1'(x)\left(\frac{-x\operatorname{sen} x-\cos x}{x^2}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2}\right)=1.$$

De aquí tenemos $C_1' = -x \operatorname{sen} x$, $C_2' = x\cos x$.

Después de la integración obtendremos

$$C_1(x) = x\cos x - \operatorname{sen} x + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = x\operatorname{sen} x + \cos x + \overline{C}_2$$

y la solución particular buscada

$$\tilde{y}(x)=(x\cos x-\operatorname{sen} x)\frac{\cos x}{x}+(x\operatorname{sen} x+\cos x)\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1.$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación (11) tiene la forma

$$y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x)=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x}+1. \ ▶$$

Si el segundo miembro de la ecuación no homogénea lineal (8) es la suma de varias funciones

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_r(x)$$

e $\tilde{y}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ son ciertas soluciones particulares de las ecuaciones

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f_i(x)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

respectivamente, entonces la suma

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \ldots + \tilde{y}_r(x)$$

es una solución particular de la ecuación (8) (*principio de superposición de soluciones*).

EJEMPLO 13. Verificando que la función $\tilde{y}_1 = -\frac{1}{4}e^x$ es la solución particular de la ecuación $y'' - 2y' - 3y = e^x$ y la función $\tilde{y}_2 = -\frac{1}{3}e^{2x}$ es la solución particular de la ecuación $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$, hállese la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{2x}.$$

◀ De acuerdo con el principio de superposición la función $\tilde{y} = -\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}$ es la solución particular de la última ecuación. La solución general de la ecuación homogénea lineal correspondiente es la función $y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$ (véase el problema 2.76). Según la fórmula (9) la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}. \ ▶$$

2.102. Empleando la solución del problema 2.92 escríbase la solución general de la ecuación $x^2y'' - 6xy' + 12y = 3x$, cerciorándose previamente de que la función $x/2$ es una de las soluciones de esta ecuación.

2.103. Empleando la solución del problema 2.97 escríbase la solución general de la ecuación $y''' - 2y'' + y' - 2y = 10\, e^{3x}$, cerciorándose previamente de que la función e^{3x} es una de las soluciones de esta ecuación.

2.104. Comprobando que las funciones $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = x$ forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación $(x - 1)\, y'' - xy' + y = 0$, hállese la solución general de la ecuación $(x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^2$.

2.105. Comprobando que las funciones $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = x\cos x$ forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\, y = 0$, hállese la solución general de la ecuación $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\, y = \cos^2 x$.

2.106. Comprobando que la función $\widehat{y}_1(x) = 5x + 6$ es la solución particular de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 25x$ y la función $\widetilde{y}_2(x) = -e^{2x}$ es solución particular de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 3e^{2x}$, hállese la solución general de la ecuación $y'' - 6y' + 5y = 25x + 3e^{2x}$ (véase el problema 2.75).

2.107. Comprobando que la función $\widetilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}e^x$ es la solución particular de la ecuación $y''' + y' = e^x$ y la función $\widetilde{y}_2(x) = -\operatorname{sen} 2x$ es la solución particular de la ecuación $y''' + y' = 6\cos 2x$, hállese a solución general de la ecuación $y''' + y' = e^x + 6\cos 2x$ (véase el problema 2.94).

5. Ecuaciones homogéneas lineales con coeficientes constantes. La forma general de la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1}y' + a_n y = 0, \tag{12}$$

donde a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) son constantes reales.

La ecuación

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{13}$$

obtenida sustituyendo las derivadas $y^{(k)}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) de la función buscada por las potencias λ^k, se llama *ecuación característica* para la ecuación (12). A cada raíz real λ de la ecuación (13) de multiplicidad r corresponden r soluciones linealmente independientes de la ecuación (12):

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda x}$$

y a cada par de raíces complejas $\lambda = \alpha \pm i\beta$ de multiplicidad s corresponden s pares de soluciones linealmente independientes:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

De este modo si la ecuación característica tiene k raíces reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de multiplicidades $r_1, \ldots, r_k$ y l pares de raíces complejas conjugadas $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_l + i\beta_l, \alpha_l - i\beta_l$ de multiplicidades $s_1, \ldots, s_l$ ($r_1 + \ldots + r_k + 2s_1 + \ldots + 2s_l = n$), entonces la solución general de la ecuación (12) se escribirá en forma

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_k(x)e^{\lambda_k x} + (Q_1(x) \times$$
$$\times \cos\beta_1 x + R_1(x)\operatorname{sen}\beta_1 x)e^{\alpha_1 x} + \ldots + (Q_l(x)\cos\beta_l x +$$
$$+ R_l(x)\operatorname{sen}\beta_l x)e^{\alpha_l x}, \tag{14}$$

donde $P_\nu(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $r_\nu - 1$, $\nu = 1, \ldots, k$ y $Q_\mu(x)$ y $R_\mu(x)$ son polinomios arbitrarios de grado $s_\mu - 1$, $\mu = 1, \ldots, l$.

EJEMPLO 14. Hállese la solución general de la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ tiene las raíces $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. Escribamos el sistema fundamental de soluciones $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Por consiguiente, la solución general tiene la forma $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.▶

EJEMPLO 15. Hállese la solución general de la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Por consiguiente, las funciones $y_1 = e^{-x}\cos 2x$, $y_2 = e^{-x}\operatorname{sen} 2x$ forman el sistema fundamental de soluciones y la solución general tiene la forma

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x).$$

EJEMPLO 16. Hállese la solución particular de la ecuación

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

◀ La ecueción característica $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ tiene una raíz única $\lambda = 1$ de multiplicidad $r = 3$. Por eso el sistema fundamental de soluciones tiene la forma $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$. Por consiguiente

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\, e^x$$

es la solución general de la ecuación.

Para determinar las constantes arbitrarias hallemos las derivadas

$$y' = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\, e^x + (C_2 + 2C_3x)\, e^x,$$

$$y'' = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\, e^x + 2\,(C_2 + 2C_3x)\, e^x + 2C_3e^x$$

empleemos las condiciones iniciales. Obtenemos: $C_1 = 1$, $C_1 + C_2 = 2$, $C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 3$, de donde $C_2 = 1$, $C_3 = 0$. Por consiguiente, la solución particular buscada tiene la forma

$$y = (1 + x)\, e^x.$$▶

EJEMPLO 17. Hállese la solución general de la ecuación

$$4y^{IV} + 4y'' + y = 0.$$

◀ La ecuasión característica $4\lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 = 0$ o $(2\lambda^2 + 1)^2 = 0$ tiene dos raíces complejas conjugadas $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,i$ de multiplicidad 2. Por lo tanto, el sistema fundamental de soluciones tiene la forma $\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$, $x\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}$, $x\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}$. De aquí obtenemos la solución general:

$$y = (C_1 + C_2x)\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + (C_3 + C_4x)\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\,.$$ ▶

2.108. Se conoce la solución particular $y_1 = e^{kx}$ de la ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden con coeficientes constantes. La ecuación característica correspondiente tiene un discriminante igual a cero. Hállese la solución particular de esta ecuación que satisface las condiciones iniciales: $y(0) = y'(0) = 1$.

A partir de las raíces dadas de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea lineal con coeficientes constantes fórmese la ecuación diferencial y escríbase su solución general.

2.109. $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2$. **2.110.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

2.111. $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. **2.112.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

2.113. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

2.114. Muéstrese que la solución general de la ecuación

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \alpha^2 x = 0$$

puede ser representada en forma de $x = A \operatorname{sen}(\alpha t + \varphi)$ o $x = A\cos(\alpha t + \varphi)$, donde A y φ son constantes arbitrarias.

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales:

2.115. $y'' - 2y' - 2y = 0$. **2.116.** $y'' + 6y' + 13y = 0$.

2.117. $y'' - 6y' + 9y = 0$. **2.118.** $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

2.119. $4y'' - 8y' + 5y = 0$. **2.120.** $4y'' + 4y' + y = 0$.

2.121. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$.

2.122. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.

2.123. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

2.124. $y^{IV} - y'' = 0$.

2.125. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$, **2.126.** $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$.

2.127. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.

2.128. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

2.129. $y^{VI} - 2y^{V} + 3y^{IV} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$.

2.130. $y^{VI} - 2y^{V} + y^{IV} = 0$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones a base de las condiciones iniciales dadas:

2.131. $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$.

2.132. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$.

2.133. $y''' - y' = 0$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

2.134*. Hállese la curva integral de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

2.135. Hállese la curva integral de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 3y = 0$ que es tangente a la recta $2x - 2y + 9 = 0$ en el punto $M_0(0, 2)$.

6. Ecuaciones no homogéneas lineales con coeficientes constantes. Analicemos la ecuación diferencial no homogénea lineal con coeficientes constantes, es decir, la ecuación del tipo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (15)$$

donde a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes reales y $f(x) \not\equiv 0$.

Según la fórmula (9) la solución general de la ecuación (15) se escribe en la forma $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$, donde $y_0(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente e $\tilde{y}(x)$ es cualquier solución particular de la ecuación (15). La solución general $y_0(x)$ se da por la fórmula (14). Para determinar $\tilde{y}(x)$ en el caso general se puede aplicar el método de Lagrange de variación de las constantes arbitrarias (véase el p. 4).

En el caso particular cuando la función $f(x)$ en la ecuación (15) tiene la forma $f_1(x) = (d_0 x^m + \ldots + d_m) e^{\lambda x}$ o $f_2(x) = ((b_0 x^{m_1} + \ldots + b_{m_1}) \cos \beta x + (c_0 x^{m_2} + \ldots + c_{m_2}) \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x}$ la solución particular $\tilde{y}(x)$ se puede hallar por el método de coeficientes indeterminados. Precisamente, si λ o $\alpha \pm i\beta$ no coinciden con ninguna de las raíces reales o complejas de la ecuación característica (13), respectivamente, entonces $\tilde{y}(x)$ se busca en forma de

$$\tilde{y}(x) = (D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \ldots + D_m) e^{\lambda x} \quad (16)$$

para $f(x) = f_1(x)$ o en forma de

$$\tilde{y}(x) = ((B_0 x^{\tilde{m}} + \ldots + B_{\tilde{m}}) \cos \beta x + (C_0 x^{\tilde{m}} + \ldots$$
$$\ldots + C_{\tilde{m}}) \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x} \quad (17)$$

para $f(x) = f_2(x)$. Aquí D_ν, B_ν y C_ν son coeficientes indeterminados, $\tilde{m} = \max(m_1, m_2)$.

Si λ o $\alpha \pm i\beta$ coinciden con cierta raíz de la ecuación (13) de multiplicidad r, entonces la expresión en el segundo miembro (16) o (17) es conveniente multiplicarla complementariamente por x^r, es decir, buscar la solución respectivamente en forma de

$$\tilde{y}(x) = x^r (D_0 x^m + \ldots + D_m) e^{\lambda x} \quad (18)$$

para $f(x) = f_1(x)$ o

$$\tilde{y}(x) = x^r ((B_0 x^{\tilde{m}} + \ldots + B_{\tilde{m}}) \cos \beta x + (C_0 x^{\tilde{m}} + \ldots$$
$$\ldots + C_{\tilde{m}}) \operatorname{sen} \beta x) e^{\alpha x} \quad (19)$$

para $f(x) = f_2(x)$.

EJEMPLO 18. Hállese la solución general de la ecuación

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x.$$

◀ La solución general de la ecuación homogénea correspondiente $y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$, puesto que $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \operatorname{sen} x$. Para hallar la solución particular de la ecuación no homogénea utilicemos el método de variación de constantes. El sistema (10) en este caso toma la forma

$$C_1' + C_2' \cos x + C_3' \operatorname{sen} x = 0,$$
$$- C_2' \operatorname{sen} x + C_3' \cos x = 0,$$
$$- C_2' \cos x - C_3' \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x.$$

Multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación por $\operatorname{sen} x$, de la tercera por $\cos x$ y sumándolos, obtendremos $C_2' = -\operatorname{sen} x$. Entonces de la segunda ecuación se sigue que $C_3' = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$. Sumando ambos miembros de la primera y tercera ecuaciones hallaremos que $C_1' = \operatorname{tg} x$. La integración nos da:

$$C_1 = -\ln|\cos x|, \quad C_2 = \cos x, \quad C_3 = \operatorname{sen} x - \ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right|.$$

Por consiguiente, la solución general buscada de la ecuación no homogénea tiene la forma

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x - \ln|\cos x| - \operatorname{sen} x \cdot \ln \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right|. \ ▶$$

EJEMPLO 19. Hállese la solución general de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)\, e^{3x}.$$

◀ La ecuación característica de la ecuación homogénea correspondiente $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ tiene la raíz $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Por consiguiente, el sistema fundamental de soluciones tiene la forma $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ y la solución general de la ecuación homogénea es $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Para hallar la solución particular de la ecuación no homogénea empleemos el método de coeficientes indeterminados. Ya que $\lambda = 3$ no es raíz de la ecuación característica, entonces la solución particular la buscaremos en la forma de $\tilde{y} = (D_0 x^2 + D_1 x + D_2)\, e^{3x}$. Determinando las derivadas $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ y sustituyendo $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ e $\tilde{y}''$ en la ecuación inicial obtendremos (al simplificar por e^{3x}):

$$2D_0 x^2 + (6D_0 + 2D_1)\, x + (2D_0 + 3D_1 + 2D_2) = x^2 + x.$$

Comparando los coeficientes de ambos miembros de esta identidad obtendremos el sistema de ecuaciones para determinar las incógnitas D_0, D_1, D_2:

$$2D_0 = 1,$$
$$6D_0 + 2D_1 = 1,$$
$$2D_0 + 3D_1 + 2D_2 = 0,$$

de donde $D_0 = 1/2$, $D_1 = -1$, $D_2 = 1$.

Así pues, $\tilde{y}=\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)e^{3x}=\frac{1}{2}(x^2-2x+2)e^{3x}$, y, por consiguiente, la solución general de la ecuación tiene la forma

$$y=y_0+\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}(x^2-2x+2)e^{3x}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 20. Hállese la solución particular de la ecuación

$$y''+4y=4(\operatorname{sen}2x+\cos 2x)$$

que satisface las condiciones iniciales $y(\pi)=y'(\pi)=2\pi$.

◀ La ecuación característica $\lambda^2+4=0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2}=0\pm\pm 2i$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen}2x$.

La solución particular de la ecuación no homogénea la buscaremos en forma de $\tilde{y}=x(B\cos 2x+C\operatorname{sen}2x)$, ya que $0\pm 2i$ son raíces de la ecuación característica de multiplicidad uno. Hallando $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ y sustituyendo $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ en la ecuación inicial obtendremos

$$-4B\operatorname{sen}2x+4C\cos 2x\equiv 4\operatorname{sen}2x+4\cos 2x,$$

de donde $B=-1$, $C=1$ y, por consiguiente

$$\tilde{y}=x(\operatorname{sen}2x-\cos 2x).$$

La solución general será $y=y_0+\tilde{y}=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen}2x+ + x(\operatorname{sen}2x-\cos 2x)$.

Para determinar C_1 y C_2 utilicemos las condiciones iniciales diferenciando previamente la solución general:

$$y'=-2C_1\operatorname{sen}2x+2C_2\cos 2x+x(2\cos 2x+2\operatorname{sen}2x)+ + (\operatorname{sen}2x-\cos 2x).$$

Tenemos: $2\pi=C_1-\pi\Rightarrow C_1=3\pi$, $2\pi=2C_2+2\pi-1\Rightarrow C_2= =1/2$. La solución particular buscada es la función

$$y=3\pi\cos 2x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+x(\operatorname{sen}2x-\cos 2x). \blacktriangleright$$

EJEMPLO 21. Hállese la solución general de la ecuación

$$y''-4y'+4y=xe^{2x}.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2-4\lambda+4=0$ tiene la raíz de segundo orden de multiplicidad $\lambda=2$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

La solución particular de la ecuación dada la buscaremos en forma de $\tilde{y}=x^2(D_0x+D_1)e^{2x}$, ya que el indicador del exponente en el segundo miembro de la ecuación coincide con la raíz de segundo orden de multiplicidad de la ecuación característica.

Aplicando el método de coeficientes indeterminados (es decir, hallando $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$, sustituyendo $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ e $\tilde{y}''$ en la ecuación inicial, simplificando en e^{2x} y comparando los coeficientes para potencias iguales de x) determinamos $D_0=1/6$, $D_1=0$. Por consiguiente, $\tilde{y}=\frac{1}{6}x^3e^{2x}$ y la solución general toma la forma

$$y = y_0 + \widetilde{y} = (C_1 + C_2x)\, e^{2x} + \frac{1}{6}\, x^3 e^{2x} =$$

$$= \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{6}\, x^3\right) e^{2x}. \blacktriangleright$$

Empleando el método de variación de constantes arbitrarias resuélvanse las ecuaciones siguientes:

2.136. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

2.137. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

2.138. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

2.139. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

Para cada una de las ecuaciones diferenciales no homogéneas dadas escríbase la forma de su solución particular con coeficientes indeterminados (no deben hallarse los valores numéricos de los coeficientes):

2.140. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$.

2.141. $y'' + 16y = \operatorname{sen}(4x + \alpha)$ $(\alpha = \text{const})$.

2.142. $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$.

2.143. $y^{\text{IV}} + 4y'' + 4y = x \operatorname{sen} 2x$.

2.144. $y'' - 4y' = xe^{4x}$.

2.145. $y'' - 7y' = (x - 1)^2$.

2.146. $y'' + 2y' + 5y = e^x((x + 1)\cos 2x + 3\operatorname{sen} 2x)$.

2.147. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}(x^2\cos 3x - x\operatorname{sen} 3x)$.

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones siguientes:

2.148. $y'' - y = e^{-x}$.

2.149. $y'' - y = \operatorname{ch} x$.

2.150. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

2.151. $y'' - 5y' + 6y = 13\operatorname{sen} 3x$.

2.152. $y'' - 2my' + m^2y = \operatorname{sen} nx$ $(m \neq n)$.

2.153. $y'' - 2my' + m^2y = \operatorname{sen} mx$.

2.154. $y'' + y = 4x\cos x$.

2.155. $y'' + 4y = \cos^2 x$.

2.156. $4y'' - y = x^3 - 24x$.

2.157. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.

2.158. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

2.159. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$.

2.160. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$.

2.161. $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.

2.162. $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$.

2.163. $y^{V} - y^{IV} = xe^x - 1$.

Hállense las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfacen las condiciones iniciales:

2.164. $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

2.165. $y''' - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

2.166. $y'' + 4y = x$; $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = \pi/2$.

2.167. $y'' + y = 4e^x$; $y = (0) = 4$, $y'(0) = -3$.

2.168. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$.

2.169. $y^{IV} - y = 8e^x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y'' = (0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

2.170. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$; $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.

7. Ecuaciones diferenciales de Euler. La ecuación del tipo

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \qquad x \neq 0,$$

donde a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes, es un caso particular de la ecuación diferencial lineal con coeficientes variables y se llama *ecuación de Euler*. Introduzcamos una nueva variable independiente t con ayuda de la sustitución de $x = e^t$ (si $x > 0$) o de la sustitución de $x = -e^t$ (si $x < 0$). Para más precisión sea $x > 0$. Entonces $y'_x = e^{-t} y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$, $y'''_{xxx} = e^{-3t}(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t)$, etc., y la ecuación de Euler se transforma en ecuación lineal con coeficientes constantes.

La ecuación del tipo

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(ax + b) y' + a_n y = f(x),$$

donde a, b, a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son constantes, se reduce a la ecuación lineal con coeficientes constantes sustituyendo $ax + b = e^t$ (en la región $ax + b > 0$).

La solución de la ecuación homogénea de Euler

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

se puede buscar (para $x > 0$) en forma de $y = x^{\lambda}$.

Sustituyendo la expresión para y', y'', ..., $y^{(n)}$ en la ecuación homogénea de Euler, hallamos la ecuación característica para determinar el exponente de la potencia λ. Además, si λ es la raíz real de la ecuación característica de multiplicidad r, entonces le corresponde r

soluciones linealmente independientes

$$x^{\lambda},\ x^{\lambda}\ln x,\ x^{\lambda}(\ln x)^2,\ \ldots,\ x^{\lambda}(\ln x)^{r-1},$$

y si $\alpha \pm i\beta$ es un par de raíces complejas de multiplicidad s, entonces le corresponde s pares de soluciones linealmente indepenqdientes

$$x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\cos(\beta\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{s-1}\cos(\beta\ln x),$$

$$x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta\ln x),\ x^{\alpha}\ln x\operatorname{sen}(\beta\ln x),\ \ldots,\ x^{\alpha}(\ln x)^{s-1}\operatorname{sen}(\beta\ln x).$$

EJEMPLO 22. Hállese la solución general de la ecuación no homogénea de Euler $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

◀ Pongamos $x = e^t$ considerando $x > 0$. Entonces $y'_x = e^{-t}y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$ y nuestra ecuación tomará la forma de

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) - 3e^t e^{-t}y'_t + 5y = 3e^{2t}$$

ó

$$y''_{tt} - 4y'_t + 5y = 3e^{2t}.$$

La solución general y_0 de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0 = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t)$ y la solución particular $\widetilde{y}$ de la ecuación no homogénea la buscaremos en forma de $\widetilde{y} = Ae^{2t}$. Entonces $\widetilde{y}' = 2Ae^{2t}$, $\widetilde{y}'' = 4Ae^{2t}$ y, sustituyendo $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$, $\widetilde{y}''$ en la ecuación no homogénea, llegamos a la identidad $Ae^{2t} = 3e^{2t}$, de donde $A = 3$. Por consiguiente, $\widetilde{y} = 3e^{2t}$ y la solución general de la ecuación no homogénea es $y = y_0 + \widetilde{y} = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t + 3)$. Volviendo a la variable independiente inicial x obtendremos definitivamente

$$y = x^2(C_1\cos\ln x + C_2\operatorname{sen}\ln x + 3).$$

Si se considera el caso $x < 0$, entonces la solución general se puede escribir en la forma que abarca ambos casos:

$$y = x^2(C_1\cos\ln|x| + C_2\operatorname{sen}\ln|x| + 3).\ ▶$$

EJEMPLO 23. Hállese la solución general de la ecuación homogénea de Euler

$$(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0.$$

◀ Pongamos $y = (x+2)^{\lambda}$. Entonces tenemos $y' = \lambda(x+2)^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)(x+2)^{\lambda-2}$. Sustituyendo las expresiones y, y', y'' en la ecuación dada obtendremos la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Por consiguiente la solución general es la función

$$y = C_1(x+2) + \frac{C_2}{(x+2)^3}.\ ▶$$

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones de Euler:

2.171. $x^2y'' + xy' + y = 0$.

2.172. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$.

2.173. $x^2y'' - 6y = 12 \ln x$.

2.174. $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$.

2.175. $x^2y''' - 2y' = 0$.

2.176. $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$.

8. Problemas de contorno en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales. En muchos problemas de física se tiene que buscar solución de las ecuaciones diferenciales no a base de las condiciones iniciales dadas, sino por sus valores en los extremos del intervalo. Tales problemas se llaman problemas *de contorno* (*frontera*). El aspecto general de las condiciones de contorno para el intervalo (a, b), en el caso de la ecuación de segundo orden, es el siguiente:

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = A, \quad \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \tag{20}$$

donde α_0, α_1, β_0, β_1 son constantes dadas, simultáneamente diferentes de cero. Las condiciones de contorno se llaman homogéneas, si del hecho de que las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ satisfacen estas condiciones se deduce, que sus combinaciones lineales $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ también satisfacen estas condiciones. Las condiciones de contorno (20) para $A = B = 0$, evidentemente, son homogéneas.

Los problemas de contorno no siempre son resolubles. Cuando se resuelve el problema de contorno, primeramente se determina la solución general de la ecuación diferencial dada y a partir de las condiciones de frontera se obtiene el sistema con ayuda del cual se determinan los valores de las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, con las cuales de la solución general se obtiene la solución del problema de contorno dado.

Ejemplo 24. Hállese la solución de la ecuación $y'' + y = 1$ que satisface las condiciones $y'(0) = y'(\pi) = 0$.

▶ La ecuación inicial tiene la solución general de la forma

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 1.$$

A partir de las condiciones de frontera obtenemos: $y'(0) = C_2 = 0$ e $y'(\pi) = -C_2 = 0$, así pues la función $y(x) = C_1 \cos x + 1$ satisface las condiciones de frontera para cualesquiera C_1. ◀

Ejemplo 25. Hállese la solución particular de la ecuación

$$y'' - 2y' + 2y = e^x$$

que satisface las condiciones de contorno

$$y(0) + y(\pi/2) = e^{\pi/2}, \quad y'(0) + y'(\pi/2) = 1.$$

◀ La ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es $y_0 = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$.

Buscaremos la solución particular de la ecuación no homogénea en forma de $\tilde{y} = Ae^x$. Sustituyendo $\tilde{y}' = Ae^x$ e $\tilde{y}'' = Ae^x$ en la ecuación dada obtendremos $Ae^x = e^x$, de donde $A = 1$. Así, $\tilde{y} = e^x$ y la solución general de la ecuación de partida tiene la forma

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 1).$$

Hallando

$$y' = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + 1) + e^x (-C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x),$$

utilizamos las condiciones de contorno. Obtendremos el sistema de ecuaciones para determinar C_1 y C_2:

$$(C_1 + 1) + e^{\pi 2} (C_2 + 1) = e^{\pi/2},$$

$$(C_1 + C_2 + 1) + e^{\pi/2} (-C_1 + C_2 + 1) = 1.$$

Resolviendo este sistema hallamos

$$C_1 = \frac{e^{\pi} - 1 - e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}}, \quad C_2 = \frac{1 - 2a^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}},$$

es decir, la solución particular buscada es la función

$$y = e^x \left(\frac{e^{\pi} - 1 - e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}} \cos x + \frac{1 - 2e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}} \operatorname{sen} x + 1 \right). \blacktriangleright$$

Hállense las soluciones de las ecuaciones diferenciales que satisfacen las condiciones de contorno dadas:

2.177. $y'' - y = 0;\ y(0) = 0,\ y(2\pi) = 1.$

2.178. $y'' - y = 0;\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

2.179. $y'' + y = 0;\ y'(0) = 0,\ y'(1) = 1.$

2.180. $y'' + y = 0;\ y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 1.$

2.181. $yy'' + y'^2 + 1 = 0;\ y(0) = 1,\ y(1) = 2.$

2.182. $y'' + y = 1;\ y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0.$

2.183. $yy' + y'^2 + yy'' = 0,\ y(0) = 1,\ y(-1) = 0.$

2.184. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2,\ y(0) + 2y'(0) = 1,$ $y(1) - y'(1) = 0.$

9. Problemas de carácter físico

2.185*. Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente bajo la acción de la fuerza de atracción hacia el centro inmóvil, siendo esta fuerza proporcional a la distancia desde el punto hasta el centro (el coeficiente de proporcionalidad es mk^2). La fuerza de resistencia del medio ambiente es proporcional a la velocidad (el coeficiente de proporcionalidad es $2mh > 0$). En el momento inicial la distancia entre el punto y el centro es igual a a y la velocidad está dirigida por la recta que une el punto con el centro y es igual a v_0. Determínese la ley del movimiento del punto, si tenemos que $h < k$.

2.186*. Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente bajo la acción de la fuerza de repulsión a partir de un centro inmóvil, siendo esta fuerza proporcional a la distancia desde el punto hasta el centro (el coeficiente de proporcionalidad es $k > 0$). La fuerza de resistencia del medio ambiente es proporcional a la velocidad (el coeficiente de proporcionalidad $\lambda > 0$). En el momento inicial el punto se encuentra a la distancia a del centro, la velocidad es igual a v_0 y está dirigida por la recta que une el punto con el centro. Determínese la ley del movimiento del punto.

2.187*. Un tubo estrecho y largo gira con una velocidad angular constante ω cerca del eje vertical, perpendicular a él. Una bola que se encuentra dentro del tubo se desliza por el mismo sin rozamiento. Hállese la ley del movimiento de la bola respecto al tubo, si:

a) en el momento inicial la bola se encuentra a la distancia a del eje de rotación y la velocidad inicial de la bola es nula;

b) en el momento inicial la bola se encuentra en el eje de rotación y tiene une velocidad inicial de v_0.

2.188. Un tubo estrecho y largo gira con una velocidad angular constante ω cerca del eje vertical, perpendicular a él. Una bola que se encuentra dentro del tubo se desliza por él con un rozamiento, cuya magnitud es $R = 2m\mu\omega \frac{dr}{dt}$, donde μ es el coeficiente de rozamiento del deslizamiento. Hállese la ley del movimiento de la bola, si en el momento inicial la bola se encuentra a la distancia a del eje de rotación y su velocidad inicial es nula.

2.189*. Una cadena homogénea pesada está echada sobre un clavo liso de tal modo, que por un lado cuelga una parte de la cadena, de 8 m de largo y por el otro, otra parte de 10 m de largo. ¿Cuánto tiempo T tardará la cadena en caer, deslizándose del clavo?

2.190*. Una carga de una masa de 4 kg está colgada de un resorte y lo alarga en 1 cm. Hállese la ley del movimiento de la carga, si el extremo superior del resorte realiza una oscilación armónica vertical $y = 2 \operatorname{sen} 30t$ (cm) y en el momento inicial la carga está en reposo (despréciese la resistencia del medio ambiente).

2.191.* Un circuito eléctrico consta de una fuente de corriente eléctrica con una f.e.m. $e(t) = E \operatorname{sen} \omega t$, una inductancia L, una resistencia R y una capacidad C conectadas en serie; además, $R^2C-4L<0$, $\omega\neq\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$. Hállese la corriente i en el circuito como función del tiempo t, si $i\Big|_{t=0}=\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

2.192.** Un circuito eléctrico consta de una fuente de corriente eléctrica con una f.e.m. $e(t)=E$ sen ωt, una inductancia L y una capacidad C conectadas en serie; además, $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (el caso de resonancia). Hállese la corriente i como función del tiempo t, si $i\Big|_{t=0}=\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

2.193. Un circuito eléctrico consta de una fuente de corriente eléctrica con una f.e.m. $e(t)=E\cos(\omega t+\psi)$, una inductancia L y una capacidad C conectadas en serie; además, $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Hállese la corriente i en el circuito como función del tiempo t, si $i\Big|_{t=0}=\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

§ 3. Sistemas de ecuaciones diferenciales

1. Conceptos principales. Relación con las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden. Si el sistema de k ecuaciones diferenciales que une la variable independiente x y las k funciones $y_1(x), \ldots$ $\ldots, y_k(x)$, está resuelto con respecto a las derivadas de mayor grado de estas funciones $y_1^{(p_1)}(x), \ldots, y_k^{(p_k)}(x)$, es decir, tiene la forma

$$\begin{aligned}
y_1^{(p_1)}(x)&=f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_1^{(p_1-1)},\ \ldots,y_k,\ \ldots,\ y_k^{(p_k-1)}),\\
y_2^{(p_2)}(x)&=f_2(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_1^{(p_1-1)},\ \ldots,y_k,\ \ldots,\ y_k^{(p_k-1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_k^{(p_k)}(x)&=f_k(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_1^{(p_1-1)},\ \ldots,y_k,\ \ldots,\ y_k^{(p_k-1)}),
\end{aligned}\qquad (1)$$

entonces se llama *canónico*; además, el número $n=p_1+p_2+\ldots$ $\ldots+p_k$ se llama orden del sistema. El sistema canónico (1) para $p_1=p_2=\ldots=p_k=1$, es decir, el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\\
y_2'(x) &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n'(x) &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n),
\end{aligned} \tag{2}
$$

se llama sistema *normal.*

Se llama ***solución del sistema*** (2) en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ la colección de funciones $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$ que son continuamente diferenciables en (a, b) y convierten las ecuaciones del sistema (2) en identidades respecto a $x \in (a, b)$.

Se llama ***integral*** del sistema normal (2) la función $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ determinada y continua, junto con las derivadas parciales $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial y_n}$ en cierto dominio D de variación de las variables y que para cualesquier $x \in (a, b)$ toma un valor constante cuando se sustituye en ella la solución arbitraria del sistema.

La igualdad

$$\Psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C,$$

donde $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ es una integral del sistema normal y C es una constante arbitraria, se llama ***primera integral*** del sistema (2).

La ecuación diferencial de n-ésimo orden

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

puede ser reducida al sistema normal (2). Recíprocamente, los sistemas (1) ó (2), en la mayoría de los casos, se reducen a la ecuación de n-ésimo orden, resolviendo la cual se puede hallar la solución del sistema inicial.

Ejemplo 1. Redúzcase el sistema canónico de ecuaciones diferenciales

$$y_1'' = 2y_1 - 3y_2, \quad y_2'' = y_1 - 2y_2$$

a la forma normal.

◀ Pongamos $\frac{dy_1}{dx} = y_3$ y $\frac{dy_2}{dx} = y_4$. Entonces se puede escribir el sistema dado en forma de

$$y_1' = y_3, \; y_2' = y_4, \; y_3' = 2y_1 - 3y_2, \; y_4' = y_1 - 2y_2,$$

que es un sistema normal de cuarto orden. ▶

Ejemplo 2. Redúzcase al sistema normal la ecuación diferencial $y''_{xx} + k^2y = 0$.

◀ Pongamos $y'_x = z$, entonces $y''_{xx} = z'_x$ y la ecuación se reduce al sistema normal de ecuaciones

$$y'_x = z, \quad z'_x = -k^2y. \; ▶$$

Ejemplo 3. Redúzcase el sistema de ecuaciones

$$y'_x = y - z, \quad z'_x = -4y + z \tag{3}$$

a la ecuación de segundo orden y hállese la solución del sistema.

◀ Hallemos $z(x)$ a partir de la primera ecuación $z = y - y'_x$. De aquí tenemos $z'_x = y'_x - y''_{xx}$. Sustituyendo los valores de z y z' en la segunda ecuación del sistema, obtendremos la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 0$ cuya solución general es la función

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

De aquí, empleando la igualdad $z = y - y'_x$, hallamos

$$z(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + C_1e^{-x} - 3C_2e^{3x} = \\ = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x}.$$

De este modo, para cualesquiera constantes C_1 y C_2 el sistema de las funciones

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}, \\ z = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x} \tag{4}$$

es la solución del sistema inicial (3). ▶

El problema de Cauchy para el sistema (2) se plantea del modo siguiente: hállese la solución $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ del sistema (2), que satisface las condiciones iniciales

$$y_1(x_0) = y_1^0, \; y_2(x_0) = y_2^0, \; \ldots, \; y_n(x_0) = y_n^0, \tag{5}$$

donde $y_1^0, \ldots, y_n^0$ son números dados.

Teorema de Cauchy. *Sean determinadas las partes derechas $f_1, f_2, \ldots, f_n$ del sistema normal (2) en el D dominio $(n + 1)$-dimensional, de variación de las variables $x, y_1, \ldots, y_n$. Si en algún entorno Λ del punto $M_0(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$ las funciones f_ν son continuas y tienen las derivadas parciales continuas $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_j}$ respecto a las variables $y_1, \ldots, y_n$, entonces existe el intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ de variación de la variable x en el que existe, además, la única solución del sistema* (2) *que satisface las condiciones iniciales* (5).

Se llama *solución general* del sistema (2) el conjunto de las funciones

$$y_\nu(x, C_1, \ldots, C_n), \; \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

dependientes de n constantes arbitrarias que para cualesquiera valores admisibles de las constantes $C_1, \ldots, C_n$ convierten las ecuaciones del sistema (2) en identidades, y en el dominio, en el cual se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy, a partir del conjunto de las funciones (6) se puede obtener la solución de cualquier problema de Cauchy.

Ejemplo 4. Muéstrese que el sistema de funciones determinado por las igualdades (4) es la solucion general del sistema (3) (véase el ejemplo 3).

◀ En calidad de dominio D para (3) podemos tomar la región $-\infty < x, \; y, \; z < +\infty$; además, para cualesquiera x_0, y_0 y z_0 de esta región se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy. Sustituyendo los valores x_0, y_0, z_0 en el sistema (4) obtendremos el sistema para determinar C_1 y C_2:

$$y_0 = C_1e^{-x_0} + C_2e^{3x_0}, \\ z_0 = 2C_1e^{-x_0} - 2C_2e^{3x_0}.$$

El determinante de este sistema $\Delta = 2e^{2x_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4e^{2x_0}$ es diferente de cero para todo x_0. Por consiguiente, para cualesquiera y_0 y z_0 los números C_1 y C_2 se determinan unívocamente, es decir, del sistema de funciones (4) se puede obtener cualquier solución del problema de Cauchy para el sistema de ecuaciones diferenciales (3).▶

Eliminando los parámetros a y b hállese el sistema de ecuaciones diferenciales que determinan las familias de rectas en el espacio:

3.1. $\begin{cases} y = ax + b, \\ x^2 + y^2 = z^2 - 2bz. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} ax + z = b, \\ y^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$

Sustitúyanse las ecuaciones diferenciales o los sistemas por los sistemas normales de ecuaciones diferenciales (x es una variable independiente):

3.3. $y''' - xyy' + y'^3 = 0$.

3.4. $y^{\mathrm{IV}} - y^2 = 0$.

3.5. $y'' = y' + z'$, $z'' = z' + u'$, $u'' = u' + y'$.

3.6. $z'' + z - 2y = 0$, $y''' + z - y = x$.

3.7. $y'' - z - u = 0$, $z' + uz = x^2$, $u''' = -xy$.

Compruébese que las funciones $y(x)$ y $z(x)$ son soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.8. $y' = -1/z$,

$z' = 1/y$; $y = e^{-x/2}$, $z = 2e^{-x/2}$.

3.9. $y' = 1 - 2\dfrac{y}{x}$,

$z' = y + z + \dfrac{2y}{x} - 1$; $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x^2}$, $z = e^x - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x^2}$.

Verifíquese que las funciones son integrales de los sistemas normales dados:

3.10. $\Psi(x, y, z) = x + y - z$; $y' = \dfrac{z}{y - z}$,

$z' = \dfrac{y}{z - y}$.

3.11 $\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $y' = \dfrac{3x - 4z}{2z - 3y}$,

$z' = \dfrac{4y - 2x}{2z - 3y}$.

3.12. $\Psi(x, y, z) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z}$; $y' = y/z$, $z' = z/y$.

2. Métodos de integración de los sistemas normales. Uno de los métodos utilizados para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales es el método de eliminación de incógnitas, el cual reduce el sistema de ecuaciones a una o varias ecuaciones diferenciales con una función incógnita en cada una. Aclarémoslo con ejemplos (véase también el ejemplo 3).

Ejemplo 5. Hállese la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$y'_x = -z, \quad z'_x = \frac{z^2}{y}$$

y la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(1) = 1$, $z(1) = -\frac{1}{2}$.

◀ Diferenciando ambos miembros de la primera ecuación respecto a x, obtenemos $y''_{xx} = -z'_x$. Puesto que de la segunda ecuación se deduce que $z'_x = \frac{z^2}{y}$, entonces $y''_{xx} = -\frac{z^2}{y}$, pero de la primera ecuación $z^2 = (y'_x)^2$; por eso, el sistema de dos ecuaciones de primer orden se redujo a una ecuación de segundo orden $y''_{xx} = -\frac{(y'_x)^2}{y}$, es decir, a la ecuación $yy''_{xx} + (y'_x)^2 = 0$.

El primer miembro de la ecuación obtenida es $(yy'_x)'_x$, por eso $yy'_x = \frac{1}{2} C_1$, de donde $y\,dy = \frac{1}{2} C_1\,dx$ y $\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} C_1 x + \frac{1}{2} C_2$, es decir, $y = \pm \sqrt{C_1 x + C_2}$. De la primera ecuación del sistema tenemos: $z = -y'_x$, es decir, $z = \mp \frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}$. El sistema de funciones $y = \pm \sqrt{C_1 x + C_2}$, $z = \mp \frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}$ forma la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales dado.

Para hallar la solución particular empleemos las condiciones iniciales $y(1) = 1$, $z(1) = -\frac{1}{2}$. Tenemos: $1 = \sqrt{C_1 + C_2}$, $-\frac{1}{2} = -\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 + C_2}}$, de donde $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Así pues, el par de funciones $y = \sqrt{x}$, $z = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ es, precisamente, la solución particular buscada del sistema. ▶

No todo sistema de ecuaciones diferenciales puede ser reducido a una ecuación.

Ejemplo 6. Muéstrese que el sistema de ecuaciones

$$y' = xy, \qquad z' + y' = z + xy$$

no puede reducirse a una ecuación.

◀ Efectivamente, sustituyendo en la segunda ecuación en vez de y' su valor xy, obtendremos dos ecuaciones diferenciales no relacionadas entre sí, cada una de las cuales contiene sólo una función

$$y' + xy, \qquad z' = z;$$

a partir de estas ecuaciones hallamos $y = C_1 e^{x^2/2}$ y $z = C_2 e^x$. ▶

Otro método de integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales es el *método de separación de las combinaciones integrables*, es decir, de obtención a partir del sistema (2) de una ecuación tal, que se puede integrar y obtener la primera integral del sistema. Si están determinadas n primeras integrales del sistema independientes (2), entonces su conjunto da la integral general de este sistema.

Ejemplo 7. Hállese la integral general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$y'_x = \frac{z + e^y}{z + e^x}, \qquad z'_x = \frac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x}.$$

◀ Multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación del sistema por e^{-x} y sumándolos con los miembros correspondientes de la primera ecuación y con la identidad $-e^{-x}z \equiv -e^{-x}z$, obtendremos $(e^{-x}z)'_x + y'_x = 0$, de donde

$$e^{-x}z + y = C_1 = \Psi_1(x, y, z).$$

Esta es la primera integral del sistema.

Ahora multiplicando ambos miembros de la segunda ecuación por e^{-y} y sumándolos con las igualdades $-e^{-y}zy' = -e^{-y}z\,\dfrac{z + e^y}{z + e^x}$ y $(x)'_x = 1$ obtendremos $(e^{-y}z)'_x + x'_x = 0$ de donde

$$e^{-y}z + x = C_2 = \Psi_2(x, y, z).$$

Esta es también la primera integral del sistema. Ya que el jakobiano del sistema Ψ_1, Ψ_2 es diferente de cero (¡compruébese!), entonces ambas primeras integrales son independientes entre sí, por eso su conjunto determina implícitamente la solución general del sistema de ecuaciones dado.

Para separar las combinaciones integrables del sistema (2), es más cómodo escribir este último en la así llamada forma simétrica:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots =$$
$$= \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1} \tag{7}$$

y emplear las propiedades siguientes de fracciones iguales: si $\dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2} = \ldots = \dfrac{u_n}{v_n} = \gamma$, entonces para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tiene lugar la relación

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n} = \gamma. \tag{8}$$

Los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se escogen habitualmente de tal modo, que el numerador en (8) sea el diferencial total del denominador o que el denominador sea nulo.

En la relación (7) la variable independiente y las funciones buscadas son equitativas.

EJEMPLO 8. Hállese la solución general del sistema de ecuaciones

$$y' = \frac{mz - lx}{ly - nz}, \qquad z' = \frac{nx - my}{ly - nz}.$$

Escribamos el sistema en la forma simétrica:

$$\frac{dx}{ly - nz} = \frac{dy}{mz - lx} = \frac{dz}{nx - my} = \gamma$$

y empleemos la relación (8). Escojemos $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = n$ y $\alpha_3 = l$, entonces tenemos

$$\frac{d(mx + ny + lz)}{0} = \gamma,$$

es decir, $d(mx + ny + lz) = 0$ de donde

$$mx + ny + lz = C_1. \tag{9}$$

De modo análogo, escojiendo $\alpha_1 = 2x$, $\alpha_2 = 2y$ y $\alpha_3 = 2z$, llegamos a la igualdad $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, de donde

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2. \tag{10}$$

Las relaciones (9) y (10) forman las dos primeras integrales del sistema que implícitamente determinan la solución general. ▶

Hállense las soluciones generales de los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.13. $x_t' = \frac{1}{y}$, $y_t' = \frac{1}{x}$. 3.14. $\frac{dt}{xy} = \frac{dx}{ty} = \frac{dy}{tx}$.

3.15. $y_x' = \frac{z}{(z-y)^2}$, $z_x' = \frac{y}{(z-y)^2}$.

3.16. $x_t' = \frac{x-y}{z-t}$, $y_t' = \frac{x-y}{z-t}$, $z_t' = x - y + 1$.

3.17. $y_x' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}$, $z_x' = \frac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}$.

3.18. $\frac{dt}{xt} = \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{txy - 2t^2}$.

3.19. $\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$.

3.20. $x_t' = \frac{y^2}{x}$, $y_t' = \frac{x^2}{y}$.

Hállense la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales, así como la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales dadas:

3.21. $y'_x = \frac{z-1}{z}$, $z'_x = \frac{1}{y-x}$; $y(0) = -1$, $z(0) = 1$.

3.22. $y'_x = \frac{x}{yz}$, $z'_x = \frac{x}{y^2}$; $y(0) = z(0) = 1$.

3.23*. Para el sistema de ecuaciones diferenciales $x'_t = \frac{x^2-t}{y}$, $y'_t = -x$ y las funciones

$$\text{a) } \varphi_1 = t^2 + 2xy; \quad \text{b) } \varphi_2 = x^2 - ty,$$

verifíquese si las relaciones $\varphi_i = C$ $(i = 1, 2)$ son las primeras integrales de este sistema.

3. Sentido físico del sistema normal. Para simplificar limitémonos a examinar el sistema de dos ecuaciones diferenciales, además a título de variable independiente consideraremos el tiempo t:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, x, y), \\ \dot{y} &= f_2(t, x, y). \end{aligned} \tag{11}$$

La solución $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ de este sistema es cierta curva en el plano Oxy con un sistema de coordenadas rectangular cartesiano fijo. El plano Oxy se llama *plano de fases* y la curva $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *trayectoria de fases* del sistema (11). El mismo sistema (11) se llama *sistema dinámico*. El sistema dinámico se llama *autónomo* (*estacionario*) si en el segundo miembro de la ecuación de este sistema el tiempo t no figura explícitamente.

El sistema dinámico determina el campo de velocidades de un punto, que se mueve en el plano, en cualquier momento de tiempo t. La solución del sistema dinámico $x = x(t)$, $y = y(t)$ se halla en las ecuaciones del movimiento del punto: ellas determinan la situación del punto en movimiento, en cualquier momento de tiempo t. Las condiciones iniciales prefijan la situación del punto en el momento inicial: $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Las ecuaciones de movimiento determinan también la trayectoria del movimiento, siendo ecuaciones de esta curva en la forma paramétrica.

EJEMPLO 9. Hállese la trayectoria del sistema dinámico autónomo

$$\dot{x} = \frac{x^2}{y}, \qquad \dot{y} = x,$$

que pasa por el punto $M_0(2, 3)$.

◀ Diferenciemos la segunda ecuación respecto a t y sustituyamos la expresión $x'_t = y''_{tt}$ y $x = y_t$ en la primera ecuación. Obtendremos $y''_{tt} = \frac{(y'_t)^2}{y}$ ó $yy''_{tt} - y'^2_t = 0$, es decir, una ecuación de segundo orden con una función incógnita y.

Dividamos ambos miembros de la última ecuación por y^2 y reescribámosla así: $\left(\frac{y'_t}{y}\right)' = 0$. De aquí se deduce que $\frac{y'_t}{y} = C_1$, ó $\frac{dy}{y} = C_1\,dt$ de donde $y = C_2 e^{C_1 t}$.

Hallemos $y'_t = C_1 C_2 e^{C_1 t}$ y sustituyámoslo en la segunda ecuación del sistema: obtendremos $x = C_1 C_2 e^{C_1 t}$. Así pues, el sistema de funciones $x = C_1 C_2 e^{C_1 t}$, $y = C_2 e^{C_1 t}$ es la solución general de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales.

Eliminando de la solución general el tiempo t $(C_2 e^{C_1 t} = y)$ tenemos que las trayectorias de fases del sistema son las rectas $x = C_1\,y$, además, por el punto dado $M_0\,(2, 3)$ pasa la recta $y = \frac{3}{2}\,x$. ▶

Para los sistemas dados hállense las trayectorias de fases que pasan por los puntos dados M_0:

3.24. $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$, $\dot{y} = 2x$; $M_0\,(1, 2)$.

3.25. $\dot{x} = 1 - x^2 - y^2$, $\dot{y} = 2xy$; $M_0\,(2, 1)$.

3.26. $\dot{x} = 2x$, $\dot{y} = x + 2y$; $M_0\,(1, 1)$.

3.27. $\dot{x} = y - x$, $\dot{y} = y - 2x$; $M_0\,(1, 1)$.

4. Sistemas homogéneos lineales. El sistema homogéneo lineal normal de n-ésimo orden tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &+ a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n \end{aligned} \tag{12}$$

o en la forma matricial

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t), \tag{13}$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

En la región de continuidad de los coeficientes $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, el sistema (12) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy.

Se llama *sistema fundamental de soluciones* del sistema (12) al conjunto de arbitrarias n soluciones linealmente independientes $X_h(t) = (x_1^{(h)}(t), x_2^{(h)}(t), \ldots, x_n^{(h)}(t))^{\top}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Si $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, es el sistema fundamental de soluciones del sistema (12), entonces la solución general tiene la forma $X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t)$, donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

La integración del sistema (12) suele realizarse por el *método de eliminación* (véase el ejemplo 3).

Resuélvanse los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:

3.28. $y'_x = -\dfrac{y}{x} + xz, \quad z'_x = -\dfrac{2y}{x^3} + \dfrac{z}{x}.$

3.29. $xy'_x = -y + zx, \quad x^2 z'_x = -2y + zx.$

3.30. $\dot{x} = -\dfrac{y}{t}, \quad \dot{y} = -\dfrac{x}{t}.$

3.31. $\dot{x} = -\dfrac{2}{t}x, \quad \dot{y} = y + \dfrac{t+2}{t}x.$

En el caso particular de los *sistemas con coeficientes constantes*, cuando la matriz $A(t)$ en la parte derecha de (13) no depende de t, para hallar el sistema fundamental de soluciones $X_h(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, pueden ser aplicados los métodos de álgebra lineal.

De la ecuación característica

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{14}$$

se hallan las diferentes raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ y para toda raíz λ (teniendo en cuenta su multiplicidad) se determina la solución particular $X^{(\lambda)}(t)$ que le corresponde. La solución general del sistema tiene la forma

$$X(t) = \sum_{k=1}^{s} C_h X^{(\lambda_k)}(t). \tag{15}$$

Con esto son posibles los siguientes casos:

a) λ es la raíz real de multiplicidad 1. Entonces

$$X^{(\lambda)}(t) = Y^{(\lambda)} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ y_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

donde $Y^{(\lambda)}$ es el vector propio de la matriz A que corresponde al valor propio λ (es decir, $AY^{(\lambda)} = \lambda Y^{(\lambda)}$, $Y^{(\lambda)} \neq 0$).

EJEMPLO 10. Hállese la solución particular del sistema homogéneo

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2,$$
$$\dot{x}_3 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_2,$$

que satisface las condiciones $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = -6$, $x_3(0) = 24$.

◀ La ecuación característica (14) para este sistema tiene la forma

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sus raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Los vectores propios, por ejemplo, son así

$$Y^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad Y^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Por eso

$$X^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t}, \quad X^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad X^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

De aquí la solución general del sistema tiene la forma

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Para hallar la solución particular las constantes C_1, C_2, C_3 se determinan a partir del sistema siguiente:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3C_1 + C_3 \\ -9C_1 + C_3 \\ 7C_1 + C_2 + 5C_3 \end{pmatrix},$$

de donde $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$. Definitivamente para la solución particular buscada obtenemos

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} e^{5t}. \ ▶$$

b) λ es la raíz compleja de multiplicidad 1. Entonces la raíz de la ecuación característica (14) es el número $\overline{\lambda}$ conjugado de λ. En vez de las soluciones particulares complejas $X^{(\lambda)}(t)$ y $X^{(\bar{\lambda})}(t)$ de la forma (15), es conveniente tomar las soluciones particulares reales $X_1^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Re} X^{(\lambda)}(t)$ y $X_2^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Im} X^{(\lambda)}(t)$.

EJEMPLO 11. Hállese la solución general del sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_1 + x_2,$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1 + 3x_2.$$

◀ La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tiene las raíces complejas conjugadas $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Para encontrar el vector propio que corresponda a la raíz $\lambda = 2 + i$ obtenemos el sistema

$$(-1-i)\, y_1^{(\lambda)} + y_2^{(\lambda)} = 0,$$
$$-2y_1^{(\lambda)} + (1-i)\, y_2^{(\lambda)} = 0.$$

Poniendo $y_1^{(\lambda)} = 1$ hallamos $y_2^{(\lambda)} = 1 + i$, es decir,

$$Y^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \text{ y } X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}.$$

De aquí el par de soluciones particulares reales tiene la forma siguiente:

$$X_1^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t},$$

$$X_2^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\operatorname{sen} t \\ e^{2t}(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Definitivamente obtenemos la solución general

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t} =$$
$$= \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \\ (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{2t}. ▶$$

c) λ es la raíz de multiplicidad $r \geqslant 2$. La solución del sistema (13) que corresponde a esta raíz se busca en forma del vector

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} t + \ldots + \alpha_1^{(r)} t^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} t + \ldots + \alpha_2^{(r)} t^{r-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} t + \ldots + \alpha_n^{(r)} t^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \qquad (16)$$

cuyos coeficientes $\alpha_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$, se determinan del sistema de ecuaciones lineales, obtenido igualando los coeficientes para las potencias iguales de t como resultado de la sustitución del vector (16) en el sistema inicial (13).

Ejemplo 12. Hállese la solución general del sistema

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1 - x_2,$$

$$\dot{x}_2(t) = 4x_1 + 6x_2.$$

◀ La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0$$

tiene la raíz $\lambda = 4$ de multiplicidad $r = 2$. Por eso buscamos la solución del sistema en forma de

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t \\ \alpha_2 + \beta_2 t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Sustituimos esta expresión en el sistema inicial y simplificamos en e^{4t}:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta_1 - 4\beta_2 \\ 4\beta_1 + 6\beta_2 \end{pmatrix} t.$$

Igualando los coeficientes para las potencias iguales de t obtenemos:

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \beta_2 - 4\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0, \\ 2\beta_1 + \beta_2 \qquad\quad &= 0, \\ -2\beta_2 + 4\beta_1 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Poniendo $\alpha_1 = C_1$ y $\beta_1 = C_2$ tenemos $\beta_2 = -2C_2$ y $\alpha_2 = -2C_1 - C_2$. De este modo la solución general del sistema tiene la forma

$$X(t) = X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -(2C_1 + C_2) - 2C_2 t \end{pmatrix} e^{4t}. \ ▶$$

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En los casos, cuando se dan las condiciones iniciales, además de la solución general, hállese la solución particular:

3.32. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2x + 3y$.

3.33. $\dot{x} = x + 3y$, $\dot{y} = -x + 5y$, $x(0) = 3$, $y(0) = 1$.

3.34. $\dot{x} = 3x - 2y$, $\dot{y} = 4x + 7y$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

3.35. $\dot{x} = 2x - 5y$, $\dot{y} = 5x - 6y$.

3.36. $\dot{x} = x - 4y$, $\dot{y} = x - 3y$.

3.37. $\dot{x} = -x + 2y$, $\dot{y} = -2x - 5y$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

3.38. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$, $\dot{z} = x$, $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

3.39. $\dot{x} = y + z$, $\dot{y} = z + x$, $\dot{z} = x + y$, $x(0) = y(0) = 2$, $z(0) = -1$.

3.40. $\dot{x} = x - 2y - z$, $\dot{y} = -x + y + z$, $\dot{z} = x - z$.

3.41. $\dot{x} = 5x + 2y - 3z$, $\dot{y} = 4x + 5y - 4z$, $\dot{z} = 6x + 4y - 4z$.

5. Sistemas no homogéneos lineales. El sistema no homogéneo lineal normal de ecuaciones diferenciales tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n + f_1(t), \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n + f_2(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n + f_n(t), \end{aligned} \tag{17}$$

donde, por lo menos, una de las funciones $f_h(t)$ no es igual idénticamente a cero. En la forma matricial el sistema (17) tiene la forma

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t) + F(t) \tag{18}$$

donde $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^{\mathsf{T}}$. Se puede integrar el sistema (17) por el método de eliminación (véase el ejemplo 3), sin embargo, a veces es preferible hallar la solución previa $X_0(t)$ del sistema homogéneo correspondiente

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t) \tag{19}$$

y una solución particular cualquiera $\widetilde{X}(t)$ del sistema (18). Entonces la solución general del sistema (18) tiene la forma

$$X(t) = X_0(t) + \widetilde{X}(t). \tag{20}$$

Si es conocido el sistema fundamental $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, de soluciones del sistema homogéneo (19), entonces la solución general $X(t)$ se puede hallar por el método de variación de constantes arbitrarias. Precisamente, poniendo

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\,X_k(t) \tag{21}$$

determinamos las funciones $C_k(t)$ sustituyendo (21) en el sistema (18). Teniendo en cuenta en este caso las igualdades

$$\dot{X}_k(t) - A(t) X_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

llegamos al sistema de ecuaciones respecto a $\dot{C}_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t) X_k(t) = F(t). \tag{22}$$

A partir de este sistema hallamos $\dot{C}_k(t) = \varphi_k(t)$ e integrando obtenemos las funciones $C_k(t)$ con una exactitud de hasta las constantes arbitrarias. Sustituyéndolas en (21) obtenemos la solución general buscada del sistema no homogéneo (18).

Ejemplo 13. Conociendo el sistema fundamental de soluciones

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t}$$

del sistema homogéneo

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2,$$

hállese la solución general del sistema no homogéneo

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + x_2 + t,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 + 1.$$

◀ Apliquemos el método de variación de las constantes arbitrarias. Para las magnitudes $\dot{C}_1(t)$ y $\dot{C}_2(t)$ formemos el sistema de la forma (22)

$$\dot{C}_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \dot{C}_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hallando

$$\dot{C}_1(t) = \frac{5t+1}{6} e^{-7t}, \qquad \dot{C}_2(t) = \frac{1-t}{6} e^{-t}$$

e integrando, obtenemos

$$C_1(t) = -\left(\frac{5}{42} t + \frac{2}{49}\right) e^{-7t} + C_1, \qquad C_2(t) = \frac{1}{6} te^{-t} + C_2.$$

De este modo, la solución general del sistema se escribirá en la forma

$$X(t) = \left(-\left(\frac{5}{42} t + \frac{2}{49}\right) e^{-7t} + C_1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} +$$
$$+ \left(\frac{1}{6} te^{-t} + C_2\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} +$$
$$+ \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} t - \frac{2}{49} \\ \frac{5}{7} t - \frac{2}{49} \end{pmatrix}. \ ▶$$

Si los coeficientes $a_{ij}(t)$ del sistema (17) son constantes, es decir, $a_{ij}(t) = a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, y las funciones $f_i(t)$ tienen la forma de productos

$$(P(t) \cos \beta t + Q(t) \operatorname{sen} \beta t)\, e^{\alpha t}, \tag{23}$$

donde $P(t)$ y $Q(t)$ son polinomios, entonces la solución particular $\overline{X}(t)$ se puede hallar por el método de coeficientes indeterminados, escribiendo $\widetilde{X}(t)$ en la forma análoga a (23), considerando la coincidencia o no coincidencia de los números $\alpha \pm i\beta$ con las raíces de la ecuación característica.

Debe tenerse en cuenta que si k es el grado mayor de los polinomios $P(t)$ y $Q(t)$ en (23) y $\lambda = \alpha + i\beta$ es la raíz de multiplicidad r de la ecuación característica, entonces la solución particular $\widetilde{X}(t)$ se busca en forma de

$$\widetilde{X}(t) = \operatorname{Re} t^{r-1} \begin{pmatrix} \gamma_{10} t^{k+1} + \gamma_{11} t^k + \ldots + \gamma_{1,\ k+1} \\ \gamma_{20} t^{k+1} + \gamma_{21} t^k + \ldots + \gamma_{2,\ k+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{n0} t^{k+1} + \gamma_{n1} t^k + \ldots + \gamma_{n,\ k+1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Ejemplo 14. Hállese la solución particular del sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2 + t^2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + e^t.$$

◀ Ya que la ecuación característica $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ tiene las raíces $\lambda_{1,2} = \pm i$, buscamos la solución particular del sistema en la forma de la suma de un polinomio de segundo grado y la función del tipo De^t:

$$x_1 = A_1 t^2 + B_1 t + C_1 + D_1 e^t, \quad x_2 = A_2 t^2 + B_2 t + C_2 + D_2 e^t.$$

Sustituyendo estas funciones en el sistema dado obtenemos las igualdades

$$2A_1 t + B_1 + D_1 e^t = -A_2 t^2 - B_2 t - C_2 - D_2 e^t + t^2,$$
$$2A_2 t + B_2 + D_2 e^t = A_1 t^2 + B_1 t + C_1 + D_1 e^t + e^t.$$

Igualando los coeficientes para las potencias iguales de t y para e^t obtendremos el sistema

$$2A_1 = -B_2, \quad B_1 = -C_2, \quad D_1 = -D_2, \quad 1 - A_2 = 0,$$
$$2A_2 = B_1, \quad B_2 = C_1, \quad D_2 = D_1 + 1, \quad A_1 = 0.$$

De aquí $A_1 = B_2 = C_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_1 = 2$, $C_2 = -2$, $D_2 = 1/2$, $D_1 = -1/2$, y la solución particular buscada tiene la forma

$$x_1 = 2t - \frac{1}{2} e^t,$$

$$x_2 = t^2 - 2 + \frac{1}{2} e^t. \ ▶$$

EJEMPLO 15. Hállese la solución general del sistema

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t),$$

donde

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F=\begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-6\lambda+8+1=(\lambda-3)^2=0$$

tiene la raíz $\lambda = 3$ de multiplicidad 2. La solución general del sistema homogéneo la buscamos en la forma de $X_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha t+\beta \\ \gamma t+\delta \end{pmatrix} e^{3t}$, si sustituimos la expresión obtenida en el sistema homogéneo y simplificamos en e^{3t} tenemos

$$3\begin{pmatrix} \alpha t+\beta \\ \gamma t+\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha t+\beta \\ \gamma t+\delta \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el sistema

$$3(\alpha t+\beta) + \beta = 2(\alpha t+\beta) - (\gamma t+\delta),$$
$$3(\gamma t+\delta) + \delta = \alpha t+\beta + 4(\gamma t+\delta),$$

del cual se deducen dos relaciones independientes $\alpha = -\gamma$ y $\beta + \alpha = -\delta$. Poniendo $\alpha = C_1$ y $\beta = C_2$ tenemos $\gamma = -C_1$ y $\delta = -C_1 - C_2$, es decir,

$$X_0(t)=\begin{pmatrix} C_1t+C_2 \\ -C_1t-(C_1+C_2) \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Puesto que $F(t)$ contiene el factor e^{3t} y en este caso $\lambda = 3$ es la raíz de la ecuación característica de multiplicidad 2, hallamos la solución particular en la forma de

$$\widetilde{X}(t)=t\begin{pmatrix} A_1t^2+B_1t+D_1 \\ A_2t^2+B_2t+D_2 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} A_1t^3+B_1t^2+D_1t \\ A_2t^3+B_2t^2+D_2t \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\left(\text{y no en la forma de } t^2\begin{pmatrix} A_1t+B_1 \\ A_2t+B_2 \end{pmatrix} e^{3t}\right).$$

Sustituyendo $\widetilde{X}(t)$ en el sistema dado y simplificando en e^{3t} obtenemos la igualdad matricial

$$3\begin{pmatrix} A_1t^3+B_1t^2+D_1t \\ A_2t^3+B_2t^2+D_2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3A_1t^2+2B_1t+D_1 \\ 3A_2t^2+2B_2t+D_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1t^3+B_1t^2+D_1t \\ A_2t^3+B_2t^2+D_2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix},$$

a cual puede escribirse en la forma de las igualdades

$$A_1t^3 + B_1t^2 + D_1t + 3A_1t^2 + 2B_1t + D_1 =$$
$$= -A_2t^3 - B_2t^2 - D_2t + t + 1,$$
$$-A_2t^3 - B_2t^2 - D_2t + 3A_2t^2 + 2B_2t + D_2 =$$
$$= A_1t^3 + B_1t^2 + D_1t + 2t.$$

Comparando los coeficientes para las potencias iguales de t, obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0, & A_1 + A_2 &= 0,\\ B_1 + 3A_1 + B_2 &= 0, & B_1 + B_2 - 3A_2 &= 0,\\ D_1 + 2B_1 + D_2 &= 1, & D_1 + D_2 - 2B_2 &= -2,\\ D_1 &= 1, & D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Encontramos $D_1 = 1$, $D_2, = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 3/2$, $A_1 = -1/2$, $A_2 = 1/2$. Por consiguiente,

$$\widetilde{X}(t) = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 1 \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t \end{pmatrix} e^{3t},$$

y la solución general buscada se escribe en la forma

$$X(t) = X_0(t) + \widetilde{X}(t) = \begin{pmatrix} C_1t + C_2 - \frac{1}{2}t^3 + t \\ -C_1t - (C_1 + C_2) + \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix} e^{3t}. \blacktriangleright$$

Hállense las soluciones de los sistemas de ecuaciones siguientes:

3.42. $\dot{x} = 3x - 2y + t$, $\dot{y} = 3x - 4y$.

3.43. $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = x + y + e^t$.

3.44. $\dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}$, $\dot{y} = 3x - y + e^{3t}$.

3.45. $\dot{x} = x + y - \cos t$, $\dot{y} = -2x - y + \operatorname{sen} t + \cos t$.

3.46. $\dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1$, $\dot{y} = -x + \operatorname{tg} t$.

3.47*. $\ddot{x} = 2x + 3y$, $\ddot{y} = 4x - 2y$.

3.48*. La sustancia A se descompone en dos sustancias P y Q. La velocidad de formación de cada una de ellas es proporcional a la cantidad de sustancia no descompuesta A. Hállense las leyes según las cuales varían las cantidades x e y de las sustancias P y Q en función del tiempo t, si al cabo de una hora después de iniciarse el proceso de descomposición $x = \frac{a}{8}$, $y = \frac{3a}{8}$, donde a es la cantidad inicial de la sustancia A.

3.49*. Un punto material de masa m se atrae por el centro O con una fuerza proporcional a la distancia. El movimiento comienza del punto A a la distancia a del centro con una velocidad inicial v_0 perpendicular al segmento OA. Hállese la trayectoria del movimiento.

§ 4. Elementos de la teoría de estabilidad

1. Conceptos fundamentales. Sea dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

con las condiciones iniciales en el punto t_0. La solución $X_0(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^\top$ del sistema (1) se llama *estable según Liapunov*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ se halla $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda solución $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ del mismo sistema, cuyos valores en el punto t_0 satisfacen las desigualdades

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

para todo $t > t_0$, son válidas las desigualdades

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Si tenemos que $\delta > 0$ es tan pequeño como se quiera y que, aunque sea para una solución $X(t)$, las desigualdades (3) no se cumplen, entonces la solución $X_0(t)$ se llama *inestable*.

Si la solución $X_0(t)$ es no sólo estable sino que, además, para la condición (2) satisface la relación

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

entonces esta solución se llama *asintóticamente estable*.

Ejemplo 1. Investíguese si es estable la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = ax$ ($a \in \mathbb{R}$) determinada por la condición inicial $x_0(t_0) = C_0$.

◀ Si $a \neq 0$, la solución tiene la forma

$$x_0(t) = C_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Sea $x(t) = Ce^{a(t-t_0)}$ una solución arbitraria de esta ecuación que satisface la condición $|C - C_0| < \delta = \varepsilon$. Entonces para $a < 0$

tenemos

$$|x(t)-x_0(t)| = |Ce^{-|a|(t-t_0)} - C_0e^{-|a|(t-t_0)}| =$$
$$= e^{-|a|(t-t_0)}|C-C_0| < \varepsilon,$$

de donde

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)-x_0(t)| = |C-C_0| \lim_{t\to\infty} e^{-|a|(t-t_0)} = 0,$$

es decir, la solución es asintóticamente estable.

Para $a > 0$

$$|x(t)-x_0(t)| = e^{|a|(t-t_0)}|C-C_0|$$

puede ser un número tan grande como se quiere para t suficientemente grandes. Esto significa, que para $a > 0$ la solución es inestable.

Si $a = 0$ la solución tiene la forma $x_0(t) = C_0$.

Para toda solución $x(t) = C$ con la condición $|C - C_0| < \delta = \varepsilon$ tenemos

$$|x(t) - x_0(t)| = |C - C_0| < \varepsilon.$$

Pero

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)-x_0(t)| = |C-C_0| \neq 0,$$

y por eso la solución es estable, pero no es asintóticamente estable.▶

La investigación de la solución $X_0(t)$ del sistema (1) a la estabilidad, puede ser reducida a la investigación de la estabilidad de la solución trivial (nula), o sea, del *punto de reposo* de cierto sistema análogo al sistema (1).

Investíguense a la estabilidad las soluciones de las ecuaciones y de los sistemas de ecuaciones siguientes:

4.1. $\dot{x} = t(x-1)$, $x(0) = 1$.

4.2. $\dot{x} = t - 1$, $x(0) = -1$.

4.3. $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = x - y$; $x(0) = y(0) = 0$.

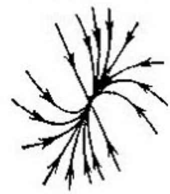
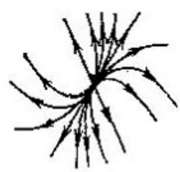
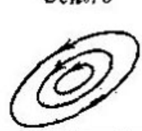
4.4. $\dot{x} = -2x - 3y$, $\dot{y} = x + y$; $x(0) = y(0) = 0$.

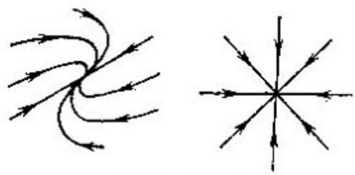
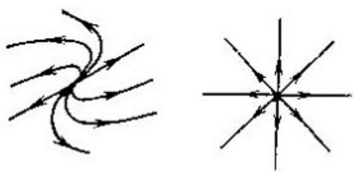
4.5. $\dot{x} = \alpha x - y$, $\dot{y} = \alpha y - z$, $\dot{z} = \alpha z - x$; $x = (0) = y(0) = z(0) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.6*. Escríbase el sistema de ecuaciones diferenciales, si la investigación del punto de reposo de éste a la estabilidad es equivalente a la investigación a la estabilidad de la solución $X_0(t)$ del sistema.

4.7. Formúlense las definiciones de la estabilidad, de la estabilidad asintótica y de la inestabilidad para el punto pe reposo del sistema de ecuaciones diferenciales.

Tabla 4.1

Raíces λ_1, λ_2		Carácter del punto de reposo	Estabilidad del punto de reposo
Reales: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	***Nudo estable*** 	**Asintóticamente estable**
	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	*Nudo inestable* 	**Inestable**
	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	*Ensilladura* 	**Inestable**
Complejas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0$, $\beta \neq 0$	*Foco estable* 	**Asintóticamente estable**
	$\alpha > 0$, $\beta \neq 0$	***Foco inestable*** 	**Inestable**
	$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$	***Centro*** 	**Estable**

Raíces λ_1, λ_2		Carácter del punto de reposo	Estabilidad del punto de reposo
Real, de multiplicidad 2: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$	$\lambda<0$	***Nudo estable*** 	Asintóticamente estable
	$\lambda>0$	***Nudo inestable*** 	Inestable

4.8. Demuéstrese que si una solución cualquiera del sistema lineal de ecuaciones diferenciales es estable según Liapunov entonces son estables todas las soluciones de este sistema.

2. Tipos elementales de los puntos de reposo. Para investigar a la estabilidad el punto de reposo del sistema de dos ecuaciones diferenciales homogéneas lineales con coeficientes constantes

$$\begin{aligned}\dot{x}&=a_{11}x+a_{12}y,\\ \dot{y}&=a_{21}x+a_{22}y,\end{aligned}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{4}$$

es necesario componer la ecuación característica

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\Delta=0$$

y hallar sur raíces λ_1 y λ_2. En la table 4.1 se da la clasificación de puntos de reposo del sistema (4) en dependencia de las raíces λ_1, λ_2 de la ecuación característica.

EJEMPLO 2. Determínese el carácter e investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-2x+\alpha y,\\ \dot{y}&=x+y\end{aligned}$$

en dependencia del parámetro α.

◀ La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & \alpha \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda-(\alpha+2)=0$$

tiene las raíces $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{9+4\alpha}$.
Investigando el comportamiento de las raíces λ_1, λ_2 en dependencia del parámetro α y empleando los datos de la tabla 4.1, obtenemos:

un foco estable, si $\alpha < -9/4$ (las raíces son complejas, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$);

un nudo estable, si $\alpha = -9/4$ (las raíces son reales e iguales);

un nudo estable, si $-9/4 < \alpha < -2$ (las raíces son reales y negativas);

una ensilladura y el punto de reposo es inestable, si $-2 < \alpha$ (las raíces son reales y de signos diferentes). ▶

Determínese el carácter de los puntos de reposo de los sistemas siguientes:

4.9. $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = -3x + y$.

4.10. $\dot{x} = -2x + \frac{1}{3}y$, $\dot{y} = -2x + \frac{1}{2}y$.

4.11. $\dot{x} = -x + 3y$, $\dot{y} = -x + 2y$.

4.12. $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x - 2y$.

4.13. $\dot{x} = -6x - 5y$, $\dot{y} = -2x - 5y$.

4.14. $\dot{x} = -x + 2y$, $\dot{y} = -2x - 5y$.

Determínese para qué valores del parámetro α el punto de reposo del sistema es estable.

4.15. $\dot{x} = \alpha x - y$, $\dot{y} = x + 2y$.

4.16. $\dot{x} = -3x + \alpha y$, $\dot{y} = -\alpha x + y$.

4.17. Investíguese a la estabilidad la ecuación de oscilaciones elásticas

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = 0$$

tomando en consideración el rozamiento y la resistencia del medio (para $\alpha > 0$).

4.18*. Sea dado el sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Demuéstrese que si todas las raíces de la ecuación característica de este sistema tienen parte real negativa, entonces el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. Si por lo menos una de las raíces de la ecuación característica tiene una parte real positiva, entonces el punto de reposo es inestable.

Empleando el resultado del problema 4.18 investíguese a la estabilidad el punto de reposo de cada uno de los sistemas siguientes:

4.19. $\dot{x} = 2x,\ \dot{y} = 3x + 2y,\ \dot{z} = -x - y - z.$

4.20. $\dot{x} = -2x - y,\ \dot{y} = x - 2y,\ \dot{z} = x + 3y - z.$

3. Método de funciones de Liapunov. Este método aplicado al sistema autónomo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{5}$$

donde $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, consiste en la investigación directa de la estabilidad de su punto de reposo con ayuda de *la función de Liapunov* $V(x_1, \ldots, x_n)$ escogida de modo adecuado.

Son válidos los siguientes teoremas de Liapunov:

TEOREMA 1 (sobre la estabilidad). *Si existe una función diferenciable* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *que satisface en el entorno del origen de coordenadas las siguientes condiciones:*

a) $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, ademas $V = 0$ *sólo para* $x_1 = \ldots = x_n = 0$;

b) $$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0,$$

entonces el punto de reposo del sistema (5) *es estable.*

TEOREMA 2 (sobre la estabilidad asintótica). *Si existe una función diferenciable* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *que satisface en el entorno del origen de coordenadas las siguientes condiciones:*

a) $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *además* $V = 0$ *sólo cuando* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

b) $$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \text{ además } \frac{dV}{dt} = 0 \text{ sólo para}$$

$x_1 = \ldots = x_n = 0$, *entonces el punto de reposo del sistema* (5) *es asintóticamente estable.*

TEOREMA 3. (Sobre la inestabilidad). *Si existe una función diferenciable* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *que satisface en el entorno del origen de coordenadas las condiciones:*

a) $V(0, \ldots, 0) = 0$ *y tan cerca del origen de coordenadas como se quiera, hay puntos en los cuales* $V(x_1, \ldots, x_n) > 0$;

b) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *además* $\dfrac{dV}{dt} = 0$ *sólo para* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

entonces el punto de reposo del sistema (5) *es inestable.*

Ejemplo 3. Con ayuda de la función de Liapunov investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -x + y,$$
$$\dot{y} = -2y^3 - x.$$

◀ En calidad de función de Liapunov tomemos $V = x^2 + y^2$. Entonces

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-x + y) + 2y(-2y^3 - x) = -2(x^2 + 2y^4),$$

y la función V junto con $\dfrac{dV}{dt}$ satisfacen las condiciones del teorema 2. Lo que quiere decir que el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. ▶

Ejemplo 4. Investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = x(2 + \cos x),$$
$$\dot{y} = -y.$$

◀ Tomemos la función $V(x, y) = x^2 - y^2$. En este caso $\dfrac{dV}{dt} = 2x^2(2 + \cos x) + 2y^2 = 2(2x^2 + y^2 + x^2 \cos x) = 2\left(x^2 + 2x^2 \cos^2 \dfrac{x}{2} + y^2\right) > 0$ en todos los puntos, excepto en el origen de coordenadas. Además, tan cerca del origen de coordenadas como se quiera existen tales puntos, en los cuales $V > 0$ (por ejemplo, a lo largo de la recta $y = 0$ $V = x^2 > 0$). Por consiguiente, quedan cumplidas las condiciones del teorema 3 y el punto de reposo es inestable. ▶

No existe el método general de construcción de la función de Liapunov. En los casos elementales es conveniente buscarla en la forma: $V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $V = ax^2 + by^4$, escogiendo de modo adecuado las constantes $a > 0$ y $b > 0$.

Ejemplo 5. Investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -x + \frac{3}{2} y + 3xy^3,$$
$$\dot{y} = -x - \frac{1}{2} y - 2x^2y^2.$$

◀ Buscaremos la función de Liapunov en la forma de $V = ax^2 + by^2$, $a > 0$, $b > 0$. Entonces tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = 2ax\left(-x + \frac{3}{2}y + 3xy^3\right) + 2by\left(-x - \frac{y}{3} - 2x^2y^2\right) =$$

$$= -\left(2ax^2 + \frac{2}{3}by^2\right) + (xy + 2x^2y^3)(3 - 2b).$$

Poniendo $b = \frac{3}{2}a$ obtendremos que $\frac{dV}{dt} = -a(2x^2 + y^2) \leqslant 0$ para cualquier $a > 0$. Del teorema 2 se deduce que el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. ▶

Investíguense a la estabilidad los puntos de reposo de los sistemas siguientes:

4.21. $\dot{x} = -x - y - x^3 - y^2$, $\dot{y} = x - y + xy$.

4.22. $\dot{x} = y + x^3$, $\dot{y} = -x + y^3$.

4.23. $\dot{x} = xy^4$, $\dot{y} = -x^4y$.

4.24. $\dot{x} = -y + x^5$, $\dot{y} = x + y^5$.

4.25. $\dot{x} = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5$, $\dot{y} = -2x - 2x^3y - \frac{1}{2}y^3$.

4.26. $\dot{x} = -2x + 4xy^2$, $\dot{y} = y + 2x^2y$.

4. Estabilidad según la primera aproximación. Supongamos que las partes derechas del sistema (5), es decir las funciones $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, son diferenciables suficiente número de veces en el origen de coordenadas. Desarrollémoslas según la fórmula de Taylor en el entorno del origen de coordenadas:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + F_i(x_1, \ldots, x_n),$$

donde $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0, \ldots, 0)}{\partial x_j}$ y F_i son términos de segundo orden de infinitud respecto de $x_1, \ldots, x_n$. Entonces el sistema inicial (5) puede ser escrito en la forma

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + F_1(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + F_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Analicemos el sistema

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \ldots, x_n, \tag{6}$$

llamado sistema de ecuaciones de *primera aproximación* para el sistema (5).

Es justa la siguiente afirmación: si todas las raíces de la ecuación característica del sistema (6) tienen partes reales negativas, entonces el punto de reposo del sistema (6), así como del sistema inicial (5) es asintóticamente estable; si por lo menos una de las raíces de la ecuación característica del sistema (6) tiene parte real positiva, entonces el punto de reposo del sistema (6) (y del sistema (5)) es inestable.

Se dice que en este caso es posible investigar el sistema (5) a la *estabilidad según la primera aproximación*. En los demás casos es imposible realizar, hablando en general, tal investigación ya que empiezan a influir los términos de segundo orden de infinitud.

EJEMPLO 6. Investíguese a la estabilidad el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = 2x + 8 \operatorname{sen} y,$$
$$\dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y.$$

◀ Desarrollando las funciones sen y, cos y, e^x según la fórmula de Taylor y separando los términos de primer orden de infinitud podemos reescribir el sistema inicial en la forma de

$$\dot{x} = 2x + 8y + F_1(x, y),$$
$$\dot{y} = -x - 3y + F_2(x, y),$$

donde F_1, F_2 son términos de segundo orden de infinitud respecto de x e y. El sistema correspondiente de ecuaciones de primera aproximación de la forma (6) se escribe del modo siguiente:

$$\dot{x} = 2x + 8y,$$
$$\dot{y} = -x - 3y.$$

Las raíces de su ecuación característica $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ tienen partes reales negativas. Por consiguiente, el punto de reposo de este sistema, así como del inicial, es estable. ▶

Investíguense a la estabilidad según la primera aproximación los puntos de reposo de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

4.27. $\dot{x} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y, \ \dot{y} = \frac{1}{5}x - \operatorname{sen} y.$

4.28. $\dot{x} = 5x + y \cos y, \ \dot{y} = 3x + 2y - y^3e^y.$

4.29. $\dot{x} = 7x + 2 \operatorname{sen} y$, $\dot{y} = e^x - 3y - 1$.

4.30. $\dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2y$, $\dot{y} = -y - 2x$.

4.31. $\dot{x} = \ln(4y + e^{-3x})$, $\dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}$.

4.32. $\dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x$, $\dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y$.

4.33. Demuéstrese que es imposible investigar la estabilidad según la primera aproximación del punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -4y - x^3, \quad \dot{y} = 3x - y^3.$$

Realícese la investigación aplicando el método de funciones de Liapunov.

§ 5. Integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Problema de Cauchy. El problema de hallar la solución particular $y = y(x)$ $(y(x_0) = y_0)$ de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, llamado problema de Cauchy, puede ser resuelto aproximadamente valiéndose de los métodos numéricos.

MÉTODO DE EULER. Los valores de la función buscada $y = y(x)$ en el segmento $[x_0, X]$ se determinan por la fórmula

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \tag{1}$$

donde $y_k = y(x_k)$, $x_{k+1} = x_k + h$ $(x_n = X)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, y $h = \frac{X - x_0}{n}$ (paso). Basándose en el error absoluto límite dado ε se establece el paso inicial de cálculos de h, con ayuda de la desigualdad $h^2 < \varepsilon$.

MÉTODO DE EULER CON ITERACIONES. Para calcular los valores de la función $y = y(x)$ se emplea la fórmula

$$y_{k+1}^{(m)} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_k, y_{k+1}^{(m-1)})\right). \tag{2}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad m = 1, 2, \ldots, M,$$

donde $y_{k+1}^{(0)} = y_{k+1}$ se calcula por la fórmula (1). Para cada valor de k los cálculos se continúan hasta cumplir la desigualdad

$$|y_{k+1}^{(m)} - y_{k+1}^{(m-1)}| < \varepsilon \tag{3}$$

donde ε es el error absoluto límite dado. Luego, poniendo $y_{k+1} = y_{k+1}^{(m)}$ se pasa a la determinación del valor siguiente y_{k+2} de la función buscada. Si la desigualdad (3) no se obtiene, disminuyen el paso h y realizan todos los cálculos de nuevo. Basándose en el error absoluto límite dado ε se establece el paso inicial de cálculos de h, con ayuda de la desigualdad $h^3 < \varepsilon$. La estimación a posteriori de exactitud se hace con ayuda de la regla de Runge—Romberg (véase más abajo).

EJEMPLO 1. Aplicando el método de Euler con iteraciones, resuélvase el problema de Cauchy en el segmento [0, 1] para la ecuación $y' = 2x - y$, con la condición inicial $y = -1$ para $x = 0$. Hay que escoger el paso de tal modo que se satisfaga la desigualdad $h^3 < 0{,}01$.

◀ Partiendo de la desigualdad $h^3 < 0{,}01$ escojamos el paso de cálculos de $h = 0{,}2$. Entonces $n = \dfrac{1-0}{0{,}2} = 5$. Calculando con un solo signo de reserva hallamos por la fórmula (1) el valor de

$$y_1^{(0)} = -1 + 0{,}2\,(2\cdot 0 - (-1)) = -0{,}800.$$

Introduzcamos la elaboración iterativa de y_1 según la fórmula (2):

$$y_1^{(1)} = -1 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0 - (-1) + 2\cdot 0{,}2 - (-0{,}800)) = -0{,}780,$$

$$y_1^{(2)} = -1 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0 - (-1) + 2\cdot 0{,}2 - (-0{,}780)) = -0{,}782,$$

$$y_1^{(3)} = -1 + \frac{0{,}2}{1}\,(2\cdot 0 - (-1) + 2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782)) = -0{,}782.$$

Obtenemos $y_1 = -0{,}782$.

Calculamos por la fórmula (1) el valor de $y_2^{(0)}$:

$$y_2^{(0)} = -0{,}782 + 0{,}2\,(2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782)) = -0{,}546.$$

Efectuamos la elaboración iterativa:

$$y_2^{(1)} = -0{,}782 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782) + 2\cdot 0{,}4 - (-0{,}546)) = -0{,}529,$$

$$y_2^{(2)} = -0{,}782 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2 = (-0{,}782) + 2\cdot 0{,}4 - (-0{,}529)) = -0{,}531.$$

$$y_2^{(3)} = -0{,}782 + \frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2 - (-0{,}782) + 2\cdot 0{,}4 - (-0{,}531)) = -0{,}531.$$

Obtenemos $y_2 = -0{,}531$.

Calculando de modo análogo hallamos $y_3 = -0{,}253$, $y_4 = 0{,}047$, $y_5 = 0{,}366$. Redondeando hasta centésimas obtenemos $y_0 = -1{,}00$, $y_1 = -0{,}78$, $y_2 = -0{,}53$, $y_3 = -0{,}25$, $y_4 = 0{,}05$, $y_5 = 0{,}37$. Los valores hallados de y_k coinciden con una exactitud de hasta 0,01 con los valores de la solución particular $y = e^{-x} + 2x - 2$ en los puntos correspondientes del segmento [0, 1]. ▶

MÉTODO DE RUNGE — KUTTA. Los valores de la función buscada $y = y(x)$ en el segmento $[x_0, X]$ se determinan sucesivamente según las fórmulas

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \tag{4}$$

donde

$$\Delta y_k = \frac{1}{6}\left(q_1^{(k)} + 2q_2^{(k)} + 2q_3^{(k)} + q_4^{(k)}\right),$$

$$q_1^{(k)} = h\cdot f(x_k, y_k),\ q_2^{(k)} = h\cdot f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{q_1^{(k)}}{2}\right),$$

$$q_3^{(k)} = h\cdot f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{q_2^{(k)}}{2}\right),\ q_4^{(k)} = h\cdot f(x_{k+1},$$

$$y_k + q_3^{(k)}),$$

$$x_{k+1} = x_k + h\ (x_n = X),\ h = \frac{X - x_0}{n}.$$

A partir del error absoluto límite dado ε se determina el paso inicial de cálculos de h, con ayuda de la desigualdad $h^4 < \varepsilon$. La estimación a posteriori de exactitud se realiza según la regla de Runge—Romberg.

REGLA DE RUNGE—ROMBERG. Sean $y_k^{(h)}$ e $y_k^{(2h)}$ los valores de la función buscada obtenidos por uno de los métodos anteriormente mencionados para los pasos de cálculos h y $2h$, respectivamente, y sea ε el error absoluto límite dado. Entonces se considera que está alcanzada la exactitud dada de cálculos, si se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{2^s - 1}\cdot\left|y_{2k}^{(h)} - y_k^{(2h)}\right| < \varepsilon \tag{5}$$

para todos los k y cuando $s = 2,\ 3,\ 4$, respectivamente, para los métodos de Euler, de Euler con iteraciones y de Runge—Kutta. La solución del problema es la función $\{y_k^{(h)}\}$.

Aplicando la regla indicada se calculan sucesivamente los valores de la función buscada con el paso $2h$ y con el paso h y se comparan los resultados obtenidos por la fórmula (5). Los cálculos terminan cuando la desigualdad (5) se cumple para todos los k.

EJEMPLO 2. Aplicando el método Runge—Kutta resuélvase con una exactitud de hasta 0,001 el problema de Cauchy en el segmento $[0,\ 0{,}6]$ para la ecuación $y' = x + y$ con la condición inicial $y = 1$ para $x = 0$.

◀ Partiendo de la desigualdad $H^4 < 0{,}001$ escogemos el paso inicial de cálculos $H = 0{,}15$. Entonces $n = 4$. Calculando con un solo dígito de reserva encontramos y_1 según la fórmula (4):

$$y_1 = 1 + \Delta y_0 = 1 + \frac{1}{6}\left(q_1^{(0)} + 2q_2^{(0)} + 2q_3^{(0)} + q_4^{(0)}\right),$$

donde $q_1^{(0)} = 0{,}1500$, $q_2^{(0)} = 0{,}1725$, $q_3^{(0)} = 0{,}1742$, $q_4^{(0)} = 0{,}1986$. Tenemos:

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0{,}1500 + 2\cdot 0{,}1725 + 2\cdot 0{,}1742 + 0{,}1986) = 1{,}1737.$$

Luego,

$$y_2 = 1{,}1737 + \frac{1}{6}\left(q_1^{(1)} + 2q_2^{(1)} + 2q_3^{(1)} + q_4^{(1)}\right),$$

donde $q_1^{(1)}=0{,}1986$, $q_2^{(1)}=0{,}2247$ $q_3^{(1)}=0{,}2267$, $q_4^{(1)}=0{,}2551$. Por consiguiente,

$$y_2=1{,}1737+\frac{1}{6}(0{,}1986+2\cdot 0{,}2247+2\cdot 0{,}2267+0{,}2551)=1{,}3998.$$

De modo análogo calculamos $y_3 = 1{,}6867$ e $y_4 = 2{,}0443$.

Disminuimos el paso en dos veces, es decir, escogemos $h = 0{,}075$, ahora $n = 8$. Encontramos $y_1^{(h)}$ por las fórmulas (4):

$$y_1^{(h)}=1+\Delta y_0=1+\frac{1}{6}(\widetilde{q}_1^{(0)}+2\widetilde{q}_2^{(0)}+2\widetilde{q}_3^{(0)}+\widetilde{q}_4^{(0)})=$$

$$=1+\frac{1}{6}(0{,}075+2\cdot 0{,}0806+2\cdot 0{,}0808+0{,}0867)=1{,}0808.$$

De modo análogo encontramos los demás valores de $y_k^{(h)}$.

Ponemos los resultados en la tabla:

$y_k^{(2h)}$	$y_k^{(h)}$	$y_k^{(2h)}-y_k^{(h)}$
$y_0^{(2h)}=1$	$y_0^{(h)}=1$	0
	$y_1^{(h)}=1{,}0808$	
$y_1^{(2h)}=1{,}1737$	$y_2^{(h)}=1{,}1737$	0
	$y_3^{(h)}=1{,}2796$	
$y_2^{(2h)}=1{,}3998$	$y_4^{(h)}=1{,}3997$	0,0001
	$y_5^{(h)}=1{,}5350$	
$y_3^{(2h)}=1{,}6867$	$y_6^{(h)}=1{,}6866$	0,0001
	$y_7^{(h)}=1{,}8559$	
$y_4^{(2h)}=2{,}0443$	$y_8^{(h)}=2{,}0442$	0,0001

Es evidente que el primer miembro de la desigualdad (5) en este caso no supera a 0,00002. Por eso, $y_k^{(h)}$ con una exactitud de hasta 0,00002 representa la función que se busca, es decir, todos los dígitos hallados son válidos. ▶

MÉTODO DE MILNE. Los valores de la función buscada $y = y(x)$ en el segmento $[x_0, X]$ se hallan sucesivamente por dos fórmulas:

$$\tilde{y}_k = y_{k-4} + \frac{4h}{3}(2 \cdot f(x_{k-3}, y_{k-3}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}) + + 2 \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1})), \tag{6}$$

$$y_k = y_{k-2} + \frac{h}{3}(f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 4f(x_{k-1}, y_{k-1}) + + f(x_k, \tilde{y}_k)),$$

$$k = 4, 5, \ldots, n, \ h = \frac{X - x_0}{n}, \ x_k = x_{k-1} + h.$$

Los cuatro primeros valores de y_0, y_1, y_2, y_3 deben ser dados y para esto previamente se determinan y_1, y_2, y_3 por cualquier otro método. El error absoluto límite ε del valor y_k de la solución aproximada se determina por la igualdad

$$\varepsilon = \frac{1}{29}|\tilde{y}_k - y_k|. \tag{7}$$

EJEMPLO 3. Empleando los valores de y_1, y_2, y_3 que fueron obtenidos en el ejemplo 2 por el método de Runge—Kutta, hállese el valor de y_4 mediante el método de Milne.

◀ Tenemos $y_0 = 1{,}0000$; $y_1 = 1{,}0808$, $y_2 = 1{,}1737$, $y_3 = 1{,}2796$ y $h = 0{,}075$. Calculando $\tilde{y}_4$ e y_4 según las fórmulas (6), obtenemos:

$$\tilde{y}_4 = 1 + \frac{4 \cdot 0{,}075}{3}(2(0{,}075 + 1{,}0808) - (0{,}15 + 1{,}1737) + + 2(0{,}225 + 1{,}2796)) = 1{,}3997,$$

$$y_4 = 1{,}1737 + \frac{0{,}075}{3}((0{,}15 + 1{,}1737) + 4(0{,}225 + 1{,}2796) + + (0{,}3 + 1{,}3997) = 1{,}3997.$$

Ya que $\tilde{y}_4 - y_4 = 0$ de la fórmula (7) concluimos que todos los dígitos de los valores de y_4 son válidos. ▶

En los problemas 5.1—5.19 se exige hallar con una exactitud de hasta 0,0001, la solución de la ecuación diferencial de primer orden para las condiciones iniciales indicadas en el segmento dado:

a) mediante el método de Euler con iteraciones,
b) mediante el método de Runge — Kutta,
c) mediante el método de Milne.

5.1. $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$.
5.2. $y' - 2y = 3e^x$, $y(0{,}3) = 1{,}415$, $[0{,}3, 0{,}6]$.
5.3. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}3]$.

5.4. $y' = y^3 - x^2$, $y(1) = 1$, $[1, 2]$.
5.5. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0{,}27$, $[0, 1]$.
5.6. $y' + xy(1 - y^2) = 0$, $y(0) = 0{,}5$, $[0, 1]$.
5.7. $y' = x^2 - xy + y^2$, $y(0) = 0{,}1$, $[0, 1]$.
5.8. $y' = (2y - x)/y$, $y(1) = 2$, $[1, 2]$.
5.9. $y' = x^2 + xy + y^2 + 1$, $y(0) = 0$, $[0, 1]$.
5.10. $y' + y = x^3$, $y(1) = -1$, $[1, 2]$.
5.11. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}1]$.
5.12. $y' = 2xy + x^2$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}5]$.

5.13. $y' = x + \operatorname{sen} \frac{y}{2}$, $y(0) = 1$, $[0, 2]$.
5.14. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}4]$.
5.15. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}1]$.
5.16. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = 0{,}5$, $[0, 0{,}5]$.
5.17. $y' = xy^3 - y$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$.
5.18. $y' = y^2 \cdot e^x - 2y$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$.

5.19. $y' = \frac{1}{y^2 - x}$, $y(1) = 0$, $[1, 2]$.

En los problemas 5.20—5.22 fórmense en Fortran los subprogramas de la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ mediante los métodos indicados.

5.20. Método de Euler con iteraciones. Los parámetros son F, X0, Y0, H, N, Y, donde F es el nombre del subprograma-función para calcular los valores de la función $f(x, y)$, X0 es el valor inicial del argumento, Y0 es el valor inicial de la función, H es el paso de cálculos, N es el número de valores de la función buscada $y = y(x)$, Y es la tabla de dimensión N de los valores de la función $y = y(x)$.

5.21. Método de Runge — Kutta. Los parámetros son F, X0, Y0, H, N, Y, EPS, donde H es el paso inicial de cálculos, EPS es el error absoluto límite dado, parámetro de entrada; los demás parámetros son los mismos que en el problema 5.20.

5.22. Método de Milne. Los parámetros son F, X0, H, N, Y, EPS, donde EPS es el error absoluto límite obtenido durante los cálculos, parámetro de salida, N es el número de valores de la función buscada, incluyendo el inicial. Los demás parámetros son los mismos que en el problema 5.20. Los cuatro primeros elementos de la tabla Y deben ser determinados antes de recurrir al subprograma.

En los problemas 5.23—5.25 compóngase en Fortran el programa de la solución de uno de los problemas 5.1—5.19, empleando con este fin uno de los subprogramas indicados.

5.23. Subprograma obtenido en el problema 5.20.
5.24. Subprograma obtenido en el problema 5.21.
5.25. Subprograma obtenido en el problema 5.22.

Los métodos considerados más arriba pueden ser empleados en la solución del problema de Cauchy para el sistema normal de dos ecuaciones diferenciales de primer orden y para la ecuación diferencial de segundo orden.

EJEMPLO 4. Aplicando el método de Euler con iteraciones resuélvase el problema de Cauchy en el segmento $[3, 4]$ con una exactitud de hasta 0,01 para la ecuación

$$y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} + 1,$$

cuando las condiciones iniciales son $y(3) = 6$, $y'(3) = 3$.

◀ Partiendo de la desigualdad $h^3 < 0{,}01$ escojamos el paso de cálculos de $h = 0{,}2$. Entonces $n = \frac{4-3}{0{,}2} = 5$.

Reducimos la ecuación de segundo orden al sistema de dos ecuaciones de primer orden, introduciendo una nueva función $p = y'$:

$$p' = -\frac{p}{x} + \frac{y^2}{x} + 1 = f(x, y, p),$$
$$y' = p = \varphi(x, y, p).$$

Las condiciones iniciales para el sistema dado son: $y = 6$, $p = 3$ para $x = 3$.

Conservando un signo de reserva calculemos los valores de las funciones $p = p(x)$ e $y = y(x)$ en los puntos $x_1 = 3{,}2$, $x_2 = 3{,}4$, $x_3 = 3{,}6$, $x_4 = 3{,}8$, $x_5 = 4$, según las fórmulas (1) y (2).

Para $x_1 = 3{,}2$ tenemos:

$$p_1^{(0)} = p_0 + h\cdot f(x_0, y_0, p_0) = 3 + 0{,}2\left(-\frac{3}{3} + \frac{6}{3^2} + 1\right) = 3{,}133,$$
$$y_1^{(0)} = y_0 + h\cdot\varphi(x_0, y_0, p_0) = y_0 + h\cdot p_0 = 6 + 0{,}2\cdot 3 = 6{,}600,$$
$$p_1^{(1)} = p_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0, p_0) + f(x_1, y_1^{(0)}, p_1^{(0)})\right) =$$
$$= 3 + 0{,}1\left(\left(-\frac{3}{3} + \frac{6}{3^2} + 1\right) + \left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}600}{3{,}2^2} + 1\right)\right) = 3{,}133,$$
$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left(\varphi(x_0, y_0, p_0) + \varphi(x_1, y_1^{(0)}, p_1^{(0)})\right) =$$
$$= y_0 + \frac{h}{2}\left(p_0 + p_1^{(0)}\right) = 6 + 0{,}1\,(3 + 3{,}133) = 6{,}613.$$

Obtenemos los valores de $p_1 = 3,133$ e $y_1 = 6,613$.

Para $x_2 = 3,4$ tenemos:

$$p_2^{(0)} = p_1 + h\cdot f(x_1, y_1, p_1) = 3,133 + 0,2\left(-\frac{3,133}{3,2} + \frac{6,613}{3,2^2} + 1\right) = 3,266,$$

$$y_2^{(0)} = y_1 + h\cdot \varphi(x_1, y_1, p_1) = y_1 + h\cdot p_1 = 6,613 + 0,2\cdot 3,133 = 7,240,$$

$$p_2^{(1)} = p_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1, p_1) + f(x_2, y_2^{(0)}, p_2^{(0)})\right) =$$

$$= 3,133 + 0,1\left(\left(-\frac{3,133}{3,2} + \frac{6,613}{3,2^2} + 1\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{3,266}{3,4} + \frac{7,240}{3,4^2} + 1\right)\right) = 3,266,$$

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left(\varphi(x_1, y_1, p_1) + \varphi(x_2, y_2^{(0)}, p_2^{(2)})\right) =$$

$$= y_1 + \frac{h}{2}(p_1 + p_1^{(0)}) = 6,613 + 0,1\,(3,133 + 3,266) = 7,253.$$

De aquí obtenemos los valores de $p_2 = 3,266$ e $y_2 = 7,253$.

Realizando cálculos análogos para $x_3 = 3,6$, $x_4 = 3,8$ y $x_5 = 4$ hallamos

$$p_3 = 3,399, \quad y_3 = 7,920,$$
$$p_4 = 3,532, \quad y_4 = 8,613,$$
$$p_5 = 3,665, \quad y_5 = 9,333.$$

Redondeando hasta centésimas obtenemos la respuesta: $y_0 = 6,00$, $y_1 = 6,61$, $y_2 = 7,25$, $y_3 = 7,92$, $y_4 = 8,61$, $y_5 = 9,33$. ▶

En los problemas 5.26—5.31 se exige hallar la solución del sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden o la solución de la ecuación diferencial de segundo orden, con exactitud de hasta 0,001 para las condiciones iniciales indicadas en el segmento dado:

5.26. $y' = \frac{z}{x}$, $z' = \frac{2z^2}{x(y-1)} + \frac{z}{x}$, $y(1) = 0$, $z(1) = \frac{1}{3}$, $[1, 2]$.

5.27. $y' = (z - y)\,x$, $z' = (z + y)\,x$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$, $[0, 1]$.

5.28. $y' = \cos(y + 2z) + 2$, $z' = \frac{2}{x + 2y^2} + x + 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0,05$, $[0, 0,3]$.

5.29. $y' = e^{-(y^2-z^2)} + 2x$, $z' = 2y^2 + z$, $y(0) = 0{,}5$, $z(0) = 1$, $[0, 0{,}3]$.

5.30. $y'' - y = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0{,}5$, $[0, 1]$.

5.31. $y'' - 2y' = x^2 - 1$, $y(1) = -\frac{1}{6}$, $y'(1) = -\frac{3}{4}$, $[1, 2]$.

5.32. Fórmese en Fortran aplicando el método de Runge—Kutta el subprograma de la solución del sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x, y, z),\\
z' &= \varphi(x, y, z)
\end{aligned}
$$

con las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$, en el segmento $[x_0, X]$. Los parámetros son F, F1, X0, Y0, H, N, Y, Z, EPS, donde F y F1 son los nombres de los subprogramas-funciones para calcular los valores de las funciones $f(x, y, z)$ y $\varphi(x, y, z)$, X0 es el valor inicial del argumento $x = x_0$, Y0 es el valor inicial de la función, H es el paso inicial de cálculos, N es el número de valores de las funciones buscadas $y = y(x)$ y $z = z(x)$, Y y Z son tablas de dimensión N de los valores de las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$, EPS es el error absoluto límite dado.

5.33. Utilizando el subprograma obtenido al resolver el problema 5.32, compóngase en Fortran el programa de la solución de uno de los problemas 5.26—5.31.

2. Problema de contorno para la ecuación lineal. El problema de contorno para la ecuación diferencial lineal

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x),$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ son ciertas funciones continuas en el segmento $[a, b]$, consiste en hallar su solución $y = y(x)$ que satisfaga las condiciones de frontera

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A,\\
\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B,
\end{aligned}
$$

donde α_0, α_1, β_0, β_1, A, B son constantes y $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$. Este problema puede ser resuelto numéricamente por el método de diferencias finitas; aplicándolo, los valores de las funciones $y = y(x)$ se hallan a partir del sistema de ecuaciones lineales de $(n+1)$-ésimo orden del tipo:

$$\frac{y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k}{h^2}+p(x_k)\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+q(x_k)\,y_k=f(x_k), \tag{8}$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2,$$

$$\alpha_0 y_0+\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=A,$$

$$\left(h=\frac{b-a}{n}\right),$$

$$\beta_0 y_n+\beta_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=B$$

con $n+1$ incógnitas $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

EJEMPLO 5. Resuélvase el problema de contorno para la ecuación diferencial

$$y''+x^2y+2=0$$

con las condiciones de frontera $y(-1)=0$, $y(1)=0$ en el segmento $[-1, 1]$ mediante el método de diferencias finitas, partiendo este segmento en cuatro partes iguales.

◀ Tenemos: $n=4$, $h=0{,}5$, $y_0=0$, $y_4=0$. Por consiguiente, se exige calcular tres valores $y_1=y(-0{,}5)$, $y_2=y(0)$, $y_3=y(0{,}5)$. Formemos el sistema (8) poniendo por turno $k=0, 1, 2$:

$k=0$:

$$\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}+x_1^2y_1+2=0, \text{ ó } 4(y_2-2y_1+y_0)+\frac{1}{4}y_1=-2;$$

$k=1$:

$$\frac{y_3-2y_2-y_1}{h^2}+x_2^2y_2+2=0, \text{ ó } 4(y_3-2y_2+y_1)=-2;$$

$k=2$:

$$\frac{y_4-2y_3+y_2}{h^2}+x_3^2y_3+2=0, \text{ ó } 4(y_4-2y_3+y_2)+\frac{1}{4}y_3=-2.$$

Añadiendo las condiciones de frontera obtenemos el siguiente sistema de cinco ecuaciones respecto a cinco incógnitas y_0, y_1, y_2, y_3, y_4:

$$\begin{aligned}
16y_0-31y_1+16y_2 &= -8,\\
2y_1+4y_2+2y_3 &= -1,\\
16y_2-31y_3+16y_4 &= -8,\\
y_0 &= 0,\\
y_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema hallamos $y_0=0$, $y_1=0{,}8$, $y_2=1{,}05$, $y_3=0{,}8$, $y_4=0$. ▶

En los problemas 5.34—5.39 se exige hallar la solución de la ecuación diferencial de segundo orden con las condiciones de frontera indicadas, aplicando el método de diferencias finitas y dividiendo el segmento dado en n partes iguales.

5.34. $x^2y'' - xy' = 3x^3$; $y(1) = 2$, $y(2) = 9$, $[1, 2]$, $n = 4$.

5.35. $x^2y'' + xy' - y = x^2$; $y(1) = 1{,}333$, $y'(3) = 3$, $[1, 3]$, $n = 7$.

5.36. $y'' + xy' + y = 2x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $[0, 1]$, $n = 10$.

5.37. $y'' + y\,\mathrm{ch}x = 0$; $y(0) = 0$, $y(2, 2) = 1$, $[0, 2.\ 2]$, $n = 11$.

5.38. $y'' + (x - 1)\,y' + 3{,}125y = 4x$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1{,}368$, $[0, 1]$, $n = 10$.

5.39. $x^2y'' - 2y = 0$, $y(1) - 2y'(1) = 0$, $y(2) = 4{,}5$, $[1, 2]$, $n = 5$.

5.40. Empleando el subprograma de la solución del sistema lineal de las ecua iones algebraicas obtenido en el problema 5.16 del cap. 4, fórmese en Fortran el programa de la solución de uno de los problemas 5.34—5.39.

RESPUESTAS

1.4. $y(\ln|1-x^2|+1)=1$. **1.5.** $y(1+x)=1$. **1.6.** $y=2-3\cos x$. **1.7.** $f(x, y)=0$, para $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ tenemos máx, para $\frac{\partial f}{\partial x}>0$ tenemos mín. 1.8. $\frac{\partial f}{\partial x}+f(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}=0$, a) $y+x^3+3x^2=0$, b) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})-\ln 2$. 1.9. $x^2+y=xy'$. 1.10. $xy'+y=0$. **1.11.** $y'=y\,\mathrm{th}\,x$. **1.12.** $2xyy'=x^2+y^2$. **1.13.** $yy'=x$. 1.14. $xy'+2y=0$. **1.15.** $y'=\frac{1}{4ky^2}$. **1.22.** $\mathrm{arctg}\,y-\mathrm{arcsen}\,x=C$; $x=\pm 1$. **1.23.** $e^x+e^{-y}=C$. **1.24.** $y\,\mathrm{sen}\,y+\cos y-x\cos x+\mathrm{sen}\,x=C$. 1.25. $\mathrm{arctg}\ y+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=C$. 1.26. $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; $x=\pm 1$. **1.27.** $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$. **1.28.** $(1+e^x)^2\,\mathrm{tg}\,y=C$. **1.29.** $e^x-\frac{1}{2}e^{2y}-2\ln|1+y|-\frac{(y-1)^2}{2}=C$, $y=-1$. **1.30.** $\mathrm{tg}\,\frac{x+y}{2}-x=C$. 1.31. $4x+2y+1=Ce^{2y}$. 1.32. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}$

$\frac{1}{2}(4x+y+1)-x=C$. **1.33.** $x^2-y^2=1$. **1.34.** $\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=1$. **1.35.** $y=\operatorname{sen} x$. **1.36.** $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$. **1.37.** $y=2x(\operatorname{arctg} Cx+\pi n)$, $y=(2n-1)\pi x$, $n\in\mathbb{Z}$. **1.38.** $x^2-2xy-y^2=C$. **1.39.** $\operatorname{arcsen}\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2}-\ln|x|=C$, $y=\pm x$. **1.40.** $xe^{y/x}=C$, $x=C$. **1.41.** $x^2-xy+y^2+x-y=C$. **1.42.** $x+y-1=C(y+2)^2$, $y=-2$. **1.43.** $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$. **1.44.** $y=xe^{1-x}$. **1.45.** $\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2$. **1.46.** $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$. **1.47.** $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$. **1.48.** $y=(x+C)(1+x^2)$. **1.49.** $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{5}e^{3x}$. **1.50.** $y=x\ln x+\frac{C}{x}$. **1.51.** $y=(x+1)^2(e^x+C)$. **1.52.** $x=Cy+\frac{1}{2}y^3$. ● Escríbase la ecuación en la forma de $\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^3}{y}$; es lineal respecto a x y $\frac{dx}{dy}$. **1.53.** $x=\operatorname{arctg} y-1+Ce^{-\operatorname{arctg} y}$. **1.54.** $\operatorname{sen} y=Ce^{-x}+x-1$. ● Póngase $\operatorname{sen} y=z$. **1.55.** $y=\operatorname{sen} x$. **1.56.** $y=e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$. **1.57.** $x=y\ln y+\frac{1}{y}$. **1.58.** $y=e^{-2x^2}\left(C+\frac{1}{2}x^3\right)^2$. **1.59.** $y=\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2\cos x+C}}$; $y=0$. **1.60.** $x^2=Ce^{\operatorname{sen} y}-2(\operatorname{sen} y+1)$. ● Escríbase la ecuación en la forma de $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2\cos y+\operatorname{sen} 2y}{2x}$. **1.61.** $y^3=1/(3-2e^{\cos x})$. **1.62.** $x^2=1/(y+3y^2)$. **1.63.** $x^2+xy+y^2=C$. **1.64.** $5x^2y-8xy+x+3y=C$. **1.65.** $x^3+ye^{x/y}=C$. **1.66.** $x^3\cos^2 y+y^2=C$. **1.67.** Todo el plano Oxy. **1.68.** $y\neq x$. **1.69.** $y\neq\frac{2n+1}{2}\pi$. **1.70.** $x>y^2$. **1.71.** $y=0$. **1.72.** $y=1$. **1.73.** $y=-x$. **1.74.** $y=x^2/4$. **1.75.** $x=2p+6p^2+C$, $y=p^2+4p^3$; $y=0$ (solución particular). **1.76.** $x=2\sqrt{p^2+1}-\ln(1+\sqrt{p^2+1})+\ln p+C$, $y=p\sqrt{1+p^2}$; $y=0$ (solución particular). **1.77.** $x=e^p+C$, $y=(p-1)e^p$. **1.78.** $y=Cx+\frac{1}{2}(C^2-x^2)$, $y=-x^2$ (solución particular). **1.79.** $x=p^3-p+2$, $y=\frac{3}{4}p^4-\frac{p^2}{2}+C$. **1.80.** $x=p\cos p$, $y=p^2\cos p-p\operatorname{sen} p-\cos p+C$. **1.81.** $x=2p-\ln p$, $y=p^2-p+C$. **1.82.** $x=Cy+C^2$, $x=-\frac{1}{4}y^2$ (solución particular). **1.83.** $y=\frac{1}{2}Cx^2+\frac{1}{2C}$, $y=\pm x$ (solución particular). **1.84.** $x=\frac{C}{p^2}-\frac{2}{p^3}$; $y=\frac{2C}{p}-\frac{3}{p^2}$. **1.85.** $x=-p-\frac{1}{2}+\frac{C}{(1-p)^2}$, $y=-\frac{1}{2}p^2+\frac{Cp^2}{(1-p)^2}$; $y=0$, $y=x+$

$+1$ (solución particular). **1.86.** $x = Cp - \ln p - 2$, $y = \frac{1}{2} Cp^2 - p$. **1.87.** $y = Cx - \frac{1}{C}$, $y^2 = -4x$ (solución particular). **1.88.** $y = Cx + C + \sqrt{C}$, $y = -\frac{1}{4(x+1)}$ (solución particular). **1.89.** $y = Cx - e^C$, $y = x(\ln x - 1)$ (solución particular) **1.90.** $y = Cx + \cos C$, $y = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2}$ (solución particular). **1.91.** Lineal; $y = uv$. **1.92.** Homogénea; $y = ux$. **1.93.** Con las variables separables. **1.94.** Ecuación de Bernoulli; $y = uv$. **1.95.** Lineal respecto a x; $x = uv$. **1.96.** Ecuación en diferenciales totales **1.97.** Homogénea; $x = uy$. **1.98.** Ecuación de Bernoulli respecto a x; $x = uv$. **1.99.** La que se reduce a la ecuación con variables separables; $u = y - x$. **1.100.** Lineal; $y = uv$. **1.101.** Ecuación de Bernoulli; $y = uv$. **1.102.** $y = x^2 - 2 + Ce^{-x^2/2}$. **1.103.** $\ln|y| + \frac{x}{y} = C$, $y = 0$ (solución particular). **1.104.** $\frac{1}{2} x^2 \cos 2y + x = C$. **1.105.** $y = \frac{1}{(x+C)\cos x}$. **1.106.** $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$. **1.107.** $x = \frac{1}{2} y^2 + Cy^3$. **1.108.** $\ln|x| + e^{x/y} = C$, $x = 0$ (solución particular). **1.109.** $1 + y^2 = C(1 - x^2)$. **1.110.** $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$. **1.111.** $y = 1/(1 + \ln x + Cx)$. **1.112.** $(3x + 2y - 1)(x - 1) = C$. **1.113.** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C$. **1.114.** $2y \cos x + \cos 2x = C$. **1.115.** $x^2 + x \ln y - \cos y = C$. **1.116.** $y = Cx - \ln C$, $y = 1 + \ln$ (solución particular). **1.117.** $x = 1/(Ce^{-y^2/2} + 2 - y^2)$. **1.118.** $\ln|x| - \cos \frac{y}{x} = C$. **1.119.** $x\sqrt{1+y^2} - \operatorname{sen} y = C$. ● Escríbase la ecuación en forma $\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1+y^2} x = \frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}$ **1.120.** $x + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$. **1.121.** $y = \left(\frac{C + \ln|\operatorname{sen} x|}{x} - \operatorname{ctg} x\right)^2$. **1.122.** $y = C^2 + Cx - \frac{x^2}{4}$, $y = -\frac{x^2}{2}$ (solución particular). **1.123.** $(x + y^3)^3 = C(y^3 - x)$. ● Póngase $y = z^{1/3}$. **1.124.** $y = \pm \ln|x^2 - 1|$. **1.125.** 1) $y^2 = 4x$, 2) $xy^2 = 4$. **1.126.** $y = \pm \frac{x}{x-1}$. **1.127.** $(x + C)^2 + y^2 = a^2$. **1.128.** $y^2 = \pm 2a(x + C)$. **1.129.** $y = 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}$. **1.130.** $y^2 = x^2/(x^2 + 3)$. **1.131.** $y^2 = 6x + 9$. **1.132.** 1) $y^2 = 4(x - 1)$, 2) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$. **1.133.** $y^2 = \frac{2}{3} x$. **1.134.** $r = 2e^{\varphi/a}$. **1.135.** $x^2 + y^2 = 2y$. **1.136.** $x = y(3 \pm \ln|y|)$. **1.137.** $y^2 = 2x + 1 - e^{2x}$. **1.138.** $y = \frac{1}{x} - x^2$. **1.139.** $x = \pm\left(\frac{1}{y} - y\right)$. **1.140.** $y = x\sqrt{5x^2 - 1}$.

1.141. $r=\varphi+\frac{\pi}{2}$. 1.142. $2x^2+3y^2=C^2$. 1.143. $x^2+2y^2=C^2$. 1.144. $y=C/x^2$. 1.145. $x+y^2=C$. 1.146. $T=a+(T_0-a)e^{-kt}$. 1.147. Al cabo de 40 min. 1.148. $\omega=5\cdot(3/5)^{t/120}$ (r.p.s.); al cabo de 6 min 18 s. ● La ecuación tiene la forma de $\frac{d\omega}{dt}=-k\omega$. 1.149. Al cabo de 1575 años. 1.150. En 6 min 5 s. ● La ecuación tiene el aspecto de $wv(h)\,dt=-S(h)\,dh$ donde w es el área del orificio, $v(h)$ es la velocidad de salida del agua, h es el nivel del agua, $S(h)$ es el área de la sección transversal del recipiente, t es el tiempo. 1.151. 0,0878. ● La ecuación tiene la forma de $dQ=-kQdh$. 1.152. ≈ 50 s; ≈ 15 m. 1.153. $t\approx 0{,}0011$ s. ● La ecuación tiene el aspecto de $m\frac{dv}{dt}=-kv^2$. 1.154. 0,5 kg. 1.155. a) 56,5 g; b) 7,84 h. 1.156. 0,06 %. ● La ecuación tiene la forma de $(0{,}01\,x-0{,}0004)\,1500\,dt=-10800\cdot 0{,}01\,dx$, donde x es el contenido de dióxido de carbono (en %) en el aire en el momento de tiempo t. 1.157. $i=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\left(R\operatorname{sen}\omega t-L\omega\cos\omega t+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

2.1. $y'<x^2$. 2.2. $y'>0$. 2.9. $y''=0$. 2.10. $\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=R^2$. 2.11. $y''+y=0$. 2.12. $y'''=0$. 2.13. $y=(C_1+\operatorname{arctg}x)\,x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$. 2.14. $y=\frac{x^3}{6}-\operatorname{sen}x+C_1x+C_2$. 2.15. $y=\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{x}{C_1}+C_2$, $y=\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{x-C_1}{x+C_1}\right|+C_2$, $y=C-\frac{1}{x}$. 2.16. $C_1^2y=(C_1^2x^2+1)\operatorname{arctg}C_1x-C_1x+C_2$, $2y=k\pi x^2+C$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. 2.17. $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x-\frac{1}{C_1}\right)+C_2$, $y=\frac{ex^2}{2}+C$. 2.18. $y=\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$. 2.19. $y=C_1\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\right)+x^2+C_2$, $y=C_1\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x\right)+x^2+C_2$. 2.20. $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$. 2.21. $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)\,x^2+C_2x+C_3$. 2.22. $2y=C_1x^2-2C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x+C_3$. 2.23. $y=C_3-(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x$, $y=C_1x+C_2$. 2.24. $x=2C_1p-\ln|p|+C_2$, $y=C_1p^3-p$; $y=Ce^{-x}$; $y=C$. 2.25. $x=\pm\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}+C_2$. 2.26. $\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2+1}=C_2\pm x$. 2.27. $C_1^2y+1=\pm\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$, $C_1^2y-1=\operatorname{sen}(C_1x+C_2)$, $2y=(x+C)^2$, $y=0$. 2.28. $\ln y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$, $\ln\left|\frac{\ln y-C_1}{\ln y+C_2}\right|=2C_1x+C_2$, $(C-x)\ln y=1$, $y=C$. 2.29. $\operatorname{ctg}y=C_2+C_1x$. 2.30. $y=1+$

$+\dfrac{1}{C_1x+C_1}$. **2.31.** $y=\dfrac{1}{12}(x^3+6x^2)+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$. **2.32.** $y^2=\dfrac{x^3}{3}+C_1x+C_2$. **2.33.** $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x}$. **2.34.** $y=C_2\Big(xe^{C_1x}-$ $-\dfrac{1}{C_1}e^{C_1x}\Big)+C_3$.

2.35. $y=C_2xe^{-C_1x}$. ● La equación es homogénea respecto a y, y', y''. **2.36.** $y=C_2e^{\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{3/2}}$. **2.37.** $y^2=C_1x^3+C_2$. **2.38.** $y=$ $=\dfrac{C_2}{\cos^2(x+C_1)}$. **2.39.** $y=(x-2)e^x+x+3$. **2.40.** $y=-\dfrac{x}{2}\ln^2 x+\dfrac{3}{2}x^2-$ $-2x+\dfrac{1}{2}$. **2.41.** $y=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\dfrac{16}{5}$. **2.42.** $y=2\ln|x+1|-x+1$. **2.43.** $y=-\ln|x-1|$. **2.44.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right|=2(x+1)$. **2.45.** $y=$ $=\operatorname{tg}x$, $-\pi/2<x<\pi/2$. **2.46.** $y=e^{x^2/2}$. **2.47.** $(3-x)y^5=8(x+2)$. **2.48.** $y=1+\operatorname{sen}x$. **2.49.** $y=1-e^x$, $y=-1+e^{-x}$. **2.50.** $y=1-x$. **2.51.** $x=C_1e^p-2p-2p-2$, $y=C_1(p-1)e^p-p^2+C_2$. **2.52.** $x=$ $=\dfrac{\ln|t|}{2}+\dfrac{3}{4t^2}+C_1$, $y=\dfrac{t}{4}+\dfrac{3}{4t^3}+C_2$. **2.53.** $x=(p+1)e^p+C_1$, $y=$ $=p^2e^p+C_2$. **2.54.** $x=3C_1p^2+\ln|p|+C_2$, $y=2C_1p^3+p$; $y=C$. **2.55.** $y=\pm\ln\cos x$. **2.56.** a) $y=\dfrac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$ para $y''>0$; b) $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$ para $y''<0$. **2.57.** a) $4(C_1y-1)=C_1^2(x+C_2)^2$ para $y''>0$; b) $x=\dfrac{C_1}{2}(t-\operatorname{sen}t)+C_2$, $y=\dfrac{C_1}{2}(1-\cos t)$ para $y''<$ <0. ● $\displaystyle\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy$ se calcula sustituyendo $y=C_1\operatorname{sen}^2\dfrac{t}{2}$. **2.58.** $y=$ $=\dfrac{H}{q}\operatorname{ch}\left(\dfrac{q}{H}x\right)$. **2.59.** $e^{y/a}=\dfrac{1}{\cos x/a}$, donde $a=\dfrac{k}{q}$. **2.60.** $v=$ $=\sqrt{\dfrac{P}{k}}\operatorname{th}\left(\dfrac{\sqrt{kp}}{m}t\right)$, $x=\dfrac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\left(\dfrac{\sqrt{kp}}{m}t\right)$. **2.61.** 1,89 s, 16,6 m/s. ● Empléense las respuestas al problema **2.60.** poniendo $P=mg$. **2.62.** El tiempo de subida es $T_s=\dfrac{1}{k}\sqrt{\dfrac{m}{g}}\operatorname{arctg}\dfrac{kv_0}{\sqrt{mg}}$; la altura de elevación es $h_{\text{máx}}=\dfrac{m}{2k^2}\ln\left(1+\dfrac{k^2v_0^2}{mg}\right)$; la velocidad de caída $V_c=v_0\sqrt{\dfrac{mg}{mg+k^2v_0^2}}$; el tiempo de caída es $T_c=\dfrac{1}{2k}\sqrt{\dfrac{m}{g}}\ln\times$ $\times\dfrac{\sqrt{mg}+kV_c}{\sqrt{mg}-kV_c}$. **2.63.** 1,75 s, 16,3 m/s. ● Empléense las respuestas al problema 2.62. **2.64.** $x=\sqrt{x_0^2+\frac{k}{mx_0^2}t^2}$. **2.65.** $x=\sqrt{x_0^2-\frac{k^2}{x_0^2}t^2}$, $T=\frac{x_0^2}{k}$. **2.66.** $x=-\frac{gt^2}{2}+u_0\int\limits_0^t \ln\frac{\varphi(0)}{\varphi(t)}\,dt$; $x=-\frac{gt^2}{2}+$ $+\frac{u_0}{\alpha}((1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t)$, $x(10)=0{,}54$ km, $x(30)=5{,}65$ km, $x(50)=18{,}44$ km. **2.67.** $\sqrt{\frac{H}{2gR^2}}\left(\sqrt{R(H-R)}+\frac{H}{2}\times\right.$ $\left.\times \operatorname{arcsen}\left(1-\frac{2R}{H}\right)+\frac{H}{4}\right)$. **2.68.** ≈ 116 h. ● Empléese la respuesta al problema 2.67. **2.69.** $\approx 11{,}18$ km/s. **2.70.** $y=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+k}\times\right.$ $\left.\times\left(\frac{x}{a}\right)^{1+k}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k}\right)+\frac{ka}{1-k^2}$, donde $k=\frac{v}{u}<1$. **2.71.** $EIy=\frac{q}{4}\left(\frac{l^2x^2}{4}-\frac{x^4}{6}-\frac{5l^4}{96}\right)$, $EIy_{\text{máx}}=-\frac{5l^4q}{384}$. ● $EIy''=$ $=\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)$, donde E es el módulo de elasticidad (módulo de Younge), I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje Ox **2.72.** $EIy=\left(\frac{Pl^2}{2}+\frac{ql^3}{6}\right)x-\frac{Px^3}{6}-$ $-\frac{qx^4}{24}-\frac{Pl^3}{3}-\frac{ql^4}{8}$, $EIy_{\text{máx}}=-\frac{Pl^3}{3}-\frac{ql^4}{8}$. ● $EIy''=-Px-$ $-\frac{qx^2}{2}$, donde E es el módulo de elasticidad (módulo de Younge), I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje Ox. **2.73.** $P=\frac{3}{8}ql$. ● $EIy''=P(l-x)-\frac{q(l-x)^2}{2}$, $EIy=\frac{P(l-x)^3}{6}-\frac{q(l-x)^4}{24}+\left(\frac{Pl^2}{2}-\frac{ql^3}{6}\right)x-\frac{Pl^3}{6}+\frac{ql^4}{24}$, donde E es el módulo de la elasticidad (módulo de Younge), I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje Ox. **2.75.** $y=C_1e^{5x}+C_2e^x$. **2.76.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$. **2.77.** $y=$ $=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. **2.78.** $y=C_1\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right)+C_2x$. **2.79.** $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+\frac{C_3}{x}$. **2.80.** Linealmente independiente. **2.81.** Linealmente dependiente. **2.82.** Linealmente independiente. **2.83.** Linealmente dependiente. **2.84.** Linealmente independiente. **2.85.** Linealmente independiente. **2.86.** Linealmente independiente. **2.87.** Linealmente independiente. **2.88.** Linealmente dependiente. **2.89.** Linealmente independiente. **2.90.** $y''+y'=0$. **2.91.** $y''-$ $-4y'+5y=0$. **2.92.** $x^2y''-6xy'+12y=0$. **2.93.** $y'''-y''=0$. **2.94.** $y'''+y'=0$. **2.95.** $y'''-y''=0$. **2.96.** $y''-8y'+15y=0$.

2.97. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$. **2.98.** ◀ De la igualdad $W(x_0) = 0$ se deduce que el sistema homogéneo de ecuaciones algebraicas lineales con incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ &\alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

tiene tal solución $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ que no todos α_n^* son iguales a cero. La función $y(x) = \alpha_1^* y_1(x) + \alpha_2^* y_2(x) + \ldots + \alpha_n^* y_n(x)$ es la solución de la ecuación homogénea lineal dada y, como se deduce de las igualdades (*), satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Pero a las mismas condiciones iniciales las satisface también la función $y \equiv 0$, que es también la solución de la ecuación dada (la función $y \equiv 0$ es la solución de cualquier ecuación diferencial homogénea lineal). De aquí, basándose en el teorema de Cauchy sobre la existencia y unicidad de la solución, concluimos que $\alpha_1^* y_1(x) + \ldots + \alpha_n^* y_n(x) \equiv 0$ en (a, b), es decir, el sistema de las funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ es linealmente dependiente en (a, b). Pero, entonces, el wronskiano $W(x)$ de este sistema es igual a cero en todos los puntos de (a, b), lo que se requería demostrar. ▶

2.99. $\begin{vmatrix} y & y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y' & y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$. ● Cualquier solución y de la ecuación buscada junto con las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ forma un sistema linealmente dependiente. **2.100.** $y = e^x + 2\cos x + 3\,\mathrm{sen}\, x$. **2.101.** $y = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x}$. **2.102.** $y = C_1x^3 + C_2x^4 + \frac{1}{2}x$. **2.103.** $y = C_1e^{2x} + C_2\,\mathrm{sen}\, x + C_3\cos x + e^{3x}$. **2.104.** $y = C_1e^x + C_2x - x^2 - 1$. **2.105.** $y = C_1\cos x + C_2 x\cos x - \mathrm{sen}\, x\cos x$. **2.106.** $y = C_1e^{5x} + C_2e^x + 5x + 6 - e^{2x}$. **2.107.** $y = C_1 + C_2\,\mathrm{sen}\, x + C_3\cos x + \frac{1}{2}e^x - \mathrm{sen}\, 2x$. **2.108.** $y = e^{kx}(1 + (1-k)x)$. **2.109.** $y'' - y' - 6y = 0$, $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$. **2.110.** $y'' - 2y' + y = 0$, $y = (C_1 + C_2x)e^x$. **2.111.** $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y = (C_1\cos 2x + C_2\,\mathrm{sen}\, 2x)e^{3x}$. **2.112.** $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$, $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x}$. **2.113.** $y''' - 8y'' + 16y' = 0$, $y = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{4x}$. **2.115.** $y = C_1e^{(1+\sqrt{3})x} + C_2e^{(1-\sqrt{3})x}$. **2.116.** $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\,\mathrm{sen}\, 2x)$. **2.117.** $y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$. **2.118.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. **2.119.** $y = e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\right)$. **2.120.** $y = e^{-x/2}(C_1 + C_2x)$. **2.121.** $y = C_1e^x + e^{2x}(C_2\cos 3x + C_3\,\mathrm{sen}\, 3x)$. **2.122.** $y = C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\, x + C_3\cos\sqrt{3}x + C_4\,\mathrm{sen}\sqrt{3}x$. **2.123.** $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^{-x}$. **2.124.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}$. **2.125.** $y = C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\, x + x(C_3\cos x + C_4\,\mathrm{sen}\, x)$. **2.126.** $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x}$. **2.127.** $y = C_1 +$

$+ C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x + x (C_4 \cos 2x + C_5 \operatorname{sen} 2x)$. **2.128.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{3x} (C_4 + C_5 x)$. **2.129.** $y = (C_1 + C_2 x) e^x + (C_3 + C_4 x) \cos x + (C_5 + C_6 x) \operatorname{sen} x$. **2.130.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x} (C_5 + C_6 x)$. **2.131.** $y = e^x$. **2.132.** $y = (7 - 3x) e^{x-2}$. **2.133.** $y = 2 + e^{-x}$. **2.134.** $y = \operatorname{sh} x$. Las condiciones iniciales son: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.135. $y = \frac{5}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{3x}$. **2.136.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln (e^x + 1)$. **2.137.** $y = (C_1 - \ln |\operatorname{sen} x|) \cos 2x + \left(C_2 - x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \right) \operatorname{sen} 2x$. **2.138.** $y = \left(C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin \frac{x}{2} \right) e^x$.

2.139. $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2 \right) e^{-2x}$. **2.140.** $(Ax^3 + Bx^2) e^{4x}$.

2.141. $x (A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x)$. **2.142.** $Ax + B \cos 8x + C \operatorname{sen} 8x$. **2.143.** $(Ax + B) \operatorname{sen} 2x + (Cx + D) \cos 2x$. **2.144.** $(Ax^2 + Bx) e^{4x}$. **2.145.** $Ax^3 + Bx^2 + Cx$. **2.146.** $e^x ((Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \times \operatorname{sen} 2x)$. **2.147.** $xe^{2x} ((Ax^2 + Bx + C) \cos 3x + (Dx^2 + Ex + F) \times \operatorname{sen} 3x)$.

2.148. $y = C_1 e^x + \left(C_2 - \frac{x}{2} \right) e^{-x}$. **2.149.** $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + \frac{x \operatorname{sh} x}{2}$. **2.150.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36} \right) e^{-x}$.

2.151. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6} (5 \cos 3x - \operatorname{sen} 3x)$. **2.152.** $y = (C_1 + C_2 x) e^{mx} + \frac{(m^2 - n^2) \operatorname{sen} nx + 2mn \cos nx}{(m^2 + n^2)^2}$. **2.153.** $y = (C_1 + C_2 x) \times e^{mx} + \frac{1}{2m^2} \cos mx$.

2.154. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x (x \operatorname{sen} x + \cos x)$. **2.155.** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8} (1 + x \operatorname{sen} 2x)$. **2.156.** $y = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-x/2} - x^3$ **2.157.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-x} + xe^{-2x}$. **2.158.** $y = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{x}{3} e^{3x} + 2x + 3x^2$. **2.159.** $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + x) e^{-x} + x^3 - 3x^2$.

2.160. $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \frac{x^3}{6} \right) e^x$. **2.161.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x + \frac{x^2}{12} (x^2 + 2x - 12)$. **2.162.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x + \frac{x}{8} (x - 3) e^x - \frac{x}{4} \operatorname{sen} x$. **2.163.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \frac{x^4}{24} + \left(\frac{x^2}{2} - 4x + C_5 \right) e^x$.

2.164. $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$. **2.165.** $y = e^x - e^{-x} + x^2$. **2.166.** $y = \frac{x}{4} + \cos 2x + \frac{7}{16}\pi \operatorname{sen} 2x$. **2.167.** $y = 2\cos x - 5 \operatorname{sen} x + 2e^x$
2.168. $y = 2xe^x$. **2.169.** $y = \cos x + 2 \operatorname{sen} x + e^{-x} - 3e^x + 2xe^x$. **2.170.** $y = e^x\,((2x - \pi - 1) \operatorname{sen} x - \pi \cos x)$. **2.171.** $y = C_1 \times \times \cos \ln |x| + C_2 \operatorname{sen} \ln |x|$. **2.172.** $y = C_1 \cos (2 \ln |x|) + C_2 \times \times \operatorname{sen} (2 \ln |x|) + 2x$. **2.173.** $y = C_1x^3 + \frac{C_2}{x_2} - 2 \ln x + \frac{1}{3}$. **2.174.** $y = C_1 + C_2x^2 + C_3x^4$. **2.175.** $y = C_1 + C_2 \ln |x| + C_3x^3$. **2.176.** $y = (2x + 1)\,(C_1 + C_2 \ln |2x + 1|)$.

2.177. $y = \frac{1}{\operatorname{sh} 2\pi} \cdot \operatorname{sh} x$. **2.178.** $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}$. **2.179.** $y = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} 1} \times$ $\times$(solución única). **2.180.** No hay soluciones. **2.181.** $(x-2)^2 + y^2 = 5$. **2.182.** $y = 1 - \operatorname{sen} x - \cos x$. **2.183.** $y = \sqrt{\frac{e - e^{-x}}{e - 1}}$. **2.184.** $y = \frac{x}{2} - x^2 + x^2 \ln x$. **2.185.** $x = e^{-ht}\left(a \cos \beta t + \frac{ah + v_0}{\beta} \operatorname{sen} \beta t\right)$ donde $\beta = \sqrt{k^2 - h^2}$. ● La ecuación tiene la forma $\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$. **2.186.** $x = e^{-\alpha t}\left(a \operatorname{ch} \beta t + \frac{\alpha a + v_0}{\beta} \operatorname{sh} \beta t\right)$, donde $\alpha = \frac{\lambda}{2m}$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{k}{m}}$. ● La ecuación tiene la forma de $m \times \times \frac{d^2x}{dt^2} = kx - \lambda \frac{dx}{dt}$. **2.187.** a) $r = a \operatorname{ch} \omega t$; b) $r = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t$. ● La ecuación tiene la forma $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$. **2.188.** $r = ae^{-\mu\omega t} \times \times \left(\operatorname{ch} \omega \sqrt{1+\mu^2}t + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \operatorname{sh} \omega \sqrt{1+\mu^2}t\right)$. **2.189.** $T = \frac{3}{\sqrt{g}} \times \times \ln (9 + \sqrt{80}) \approx 3$ s. ● La ecuación tiene la forma de $\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{g}{9}s = \frac{g}{9}$, donde s es el camino recorrido durante el tiempo t por el extremo de la parte de la cadena que desciende. **2.190.** $x = \frac{2g \operatorname{sen} 30t - 60\sqrt{g} \operatorname{sen} \sqrt{g}t}{g - 900}$ (cm). ● Si x se calcula a partir del estado de reposo de la carga, entonces $4\frac{d^2x}{dt^2} = 4g - k\,(x_0 + x - y - e)$, donde x_0 es la distancia del punto de reposo de la carga desde el punto inicial de suspensión del resorte, l es la longitud del resorte en estado de reposo, por esto $k\,(x_0 - 1) = 4g$ y, por consiguiente, $4\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,(x - y)$, donde $k = 4g$, $g =$

-981 cm/s². **2.191.** $i=e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{E}{\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2+R^2}\left(\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\times\right.$
$\times\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t-\frac{R}{2}\left(\omega+\frac{1}{LC\omega}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}\operatorname{sen}\times$
$\times\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\Big)+\frac{E}{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2}\left(\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\cos\times\right.$
$\times\,\omega t+R\operatorname{sen}\omega t\Big)$. La ecuación diferencial del circuito es: $L\frac{d^2i}{dt^2}+$
$+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt}$. **2.192.** $i=\frac{E}{2L}t\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. ◀ Tenemos $\frac{de}{dt}=E\omega\cos\omega t$. La ecuación diferencial del circuito es: $L\frac{d^2i}{dt^2}+$
$+\frac{1}{C}i=E\omega\cos\omega t$. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es: $i_0=C_1\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+C_2\operatorname{sen}\frac{1}{LC}t$. La solución particular de la ecuación no homogénea lineal tiene la forma de $\tilde{i}=t\,(A\cos\omega t+B\operatorname{sen}\omega t)$. Entonces $\frac{d\tilde{i}}{dt}=t\,(-A\omega\operatorname{sen}\omega t+$
$+B\omega\cos\omega t)+A\cos\omega t+B\operatorname{sen}\omega t$, $\frac{d^2\tilde{i}}{dt^2}=t\,(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\times$
$\times\operatorname{sen}\omega t)+(-2A\omega\operatorname{sen}\omega t+2B\omega\cos\omega t)$. Sustituyendo en la ecuación la expresión $\tilde{i}$ y $\frac{d^2\tilde{i}}{dt^2}$ y considerando que $L\omega^2-\frac{1}{C}=0$, obtendremos la identidad $L\,(-2A\omega\operatorname{sen}\omega t+2B\omega\cos\omega t)\equiv E\omega\cos\omega t$, de donde $A=0$, $B=\frac{E}{2L}$. Por consiguiente, $\tilde{i}=\frac{E}{2L}t\operatorname{sen}\frac{t}{\sqrt{LC}}$. La solución general: $i=C_1\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+C_2\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L}t\operatorname{sen}\times$
$\times\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. Calculando $\frac{di}{dt}=-\frac{C_1}{\sqrt{LC}}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{C_2}{\sqrt{LC}}\cos\times$
$\times\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L\sqrt{LC}}t\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t$ y empleando las condiciones iniciales, obtendremos $C_1=C_2=0$. La solución particular buscada es: $i=\frac{E}{2L}t\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. ▶ **2.193.** $i=$
$-\frac{E}{2\omega L}\cos\psi\operatorname{sen}\omega t+\frac{E}{2L}t\cos(\omega t+\psi)$.

3.1. $x^2+y^2-z^2-2z(y-xy')$, $x+yy'-zz'-z'(y-xy')$. 3.2. $yy'+zz'=0$, $y^2+2xzz'=x^2z'^2$. 3.3. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{xyz-z^3}$. 3.4. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{u}=\frac{du}{v}=\frac{dv}{w}=\frac{dw}{y^2}$. 3.5. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{du}{t}=$ $=\frac{dv}{v+w}=\frac{dw}{w+t}=\frac{dt}{t+v}$. 3.6. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{du}=\frac{du}{2y-z}=\frac{dv}{w}=$ $=\frac{dw}{x+y-1}$. 3.7. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{t}=\frac{dz}{x^2-uz}=\frac{dt}{z+u}=\frac{du}{v}=\frac{dv}{w}=$ $=\frac{dw}{-xy}$. 3.13. $C_1x^2=2t+C_2$, $y^2=C_1(2t+C_2)$. 3.14. $x^2=t^2+C_1$, $y^2=t^2+C_2$. 3.15. $y^2=\frac{(C_1+C_2-x)^2}{2(C_2-x)}$, $z^2=\frac{(C_1-C_2+x)^2}{2(C_2-x)}$. 3.16. $x=\ln|C_3(C_1t+C_2)|$, $y=\ln|C_3(C_1t+C_2)|-C_1$, $z=$ $=(C_1+1)t+C_2$. 3.17. $x^2+y^2+z^2=C_1y$, $z=C_2y$. 3.18. $x=C_1t$, $y=C_2e^t+\frac{2}{C_1}$. 3.19. $z-2y=C_1$, $2\sqrt{z-x-y}+y=C_2$. 3.20. $x^2=$ $=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$, $y^2=C_1e^{2t}-C_2e^{-2t}$. 3.21. $y=x+\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$, $z=C_2e^{C_1x}$; $y=x-e^x$, $z=e^{-x}$. 3.22. $z=C_1y$, $y^3=\frac{3x^2}{2C_1}+C_2$; $z=y$, $y^3=\frac{3}{2}x^2+1$. 3.23. a) Sí; b) no. ● La relación $\varphi(t, x, y)=C$ es la primera integral del sistema $x'_t=f_1(t, x, y)$, $y'_t=f_2(t, x, y)$, cuando y sólo cuando $\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f_1(t, x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f_2(t, x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$. 3.24. $2e^{z-y}=x^2+(y-1)^2$. 3.25. $2y^3+3y(x^2-1)-8=0$. 3.26. $y=$ $=x(1+\ln\sqrt{|x|})$. 3.27. $(y-x)^2+x^2=1$. 3.28. $y=C_1x^{1+\sqrt{2}}+$ $+C_2x^{1-\sqrt{2}}$, $z=x^{\sqrt{2}-1}C_1(2+\sqrt{2})+x^{-\sqrt{2}-1}C_2(2-\sqrt{2})$. 3.29. $y=C_1+C_2x$, $z=2C_2+\frac{C_1}{x}$. 3.30. $x=C_1t+\frac{C_2}{t}$, $y=-C_1t+$ $+\frac{C_2}{t}$. 3.31. $x=\frac{C_2}{t^2}$, $y=C_1e^t-\frac{C_2}{t^2}$. 3.32. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}$, $y=$ $=C_1e^t+2C_2e^{2t}$. 3.33. $x=3C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$; $x=3e^{2t}$, $y=e^{2t}$. 3.34. $x=e^{5t}(C_1\cos 2t+C_2\operatorname{sen} 2t)$, $y=e^{5t}((C_1-C_2)\operatorname{sen} 2t-$ $-(C_1+C_2)\cos 2t)$; $x=e^{5t}(\cos 2t-\operatorname{sen} 2t)$, $y=2e^{5t}\operatorname{sen} 2t$. 3.35. $x=$ $=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\operatorname{sen} 3t)$, $y=\frac{1}{5}e^{-2t}((4C_1-3C_2)\cos 3t+(3C_1+$ $+4C_2)\operatorname{sen} 3t)$. 3.36. $x=(2C_1t+2C_2+1)e^{-t}$, $y=(C_1t+C_2)e^{-t}$. 3.37. $x=(C_1t+C_2)e^{-3t}$, $y=\left(-C_1t+\frac{C_1}{2}-C_2\right)e^{-3t}$; $x=2te^{-3t}$,

$y=(1-2t)e^{-3t}$. 3.38. $x=C_1e^t+e^{-t/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $y=C_1e^t+\frac{1}{2}e^{-t/2}\left((C_3\sqrt{3}-C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-(C_2\sqrt{3}+C_3)\operatorname{sen}\times\right.$ $\left.\times\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $z=C_1e^t+\frac{1}{2}e^{-t/2}\left((C_2\sqrt{3}-C_3)\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t-(C_3\sqrt{3}+\right.$ $\left.+C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; $x=y=z=e^t$. 3.39. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$, $y=$ $=C_1e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1e^{2t}-(C_2+C_3)e^{-t}$; $x=e^{2t}+e^{-t}$, $y=e^{2t}+e^{-t}$, $z=e^{2t}-2e^{-t}$. 3.40. $x=C_1+3C_2e^{2t}$, $y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+$ $+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$. 3.41. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$, $y=C_1e^t+2C_3e^{3t}$, $z=2C_1e^t+C_2e^{2t}+2C_3e^{3t}$. 3.42. $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\frac{2}{3}t-\frac{5}{18}$, $y=C_1e^{2t}+3C_2e^{-3t}-\frac{t}{2}-\frac{1}{12}$. 3.43. $x=(C_1\cos t+C_2\operatorname{sen}t-1)e^t$, $y=(C_1\operatorname{sen}t-C_2\cos t)e^t$. 3.44. $x=\left(C_1+C_2t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}-3e^t\right)e^{2t}$, $y=\left(C_1-\frac{C_2}{3}+C_2t+\frac{t^3}{2}-2e^t\right)e^{2t}$. 3.45. $x=C_1\cos t+C_2\operatorname{sen}t-$ $-t\cos t$, $y=(C_2-C_1)\cos t-(C_1+C_2)\operatorname{sen}t+t(\cos t+\operatorname{sen}t)$. 3.46. $x=C_1\cos t+C_2\operatorname{sen}t+\operatorname{tg}t$, $y=-C_1\operatorname{sen}t+C_2\cos t+2$. 3.47. $x=3(C_1e^{2t}+C_2e^{-2t})+C_3\cos 2t+C_4\operatorname{sen}2t$, $y=2(C_1e^{2t}+$ $+C_2e^{-2t})-2(C_3\cos 2t+C_4\operatorname{sen}2t)$. ● Búsquese la solución del sistema en forma de $x=Ae^{kt}$, $y=Be^{kt}$. 3.48. $x=a(1-2^{-t})/4$, $y=$ $=3a(1-2^{-t})/4$. ● El sistema de ecuaciones diferenciales es: $\dot{x}=k_1(a-x-y)$, $\dot{y}=k_2(a-x-y)$. 3.49. $x=a\cos\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $y=$ $=\frac{v_0\sqrt{m}}{k}\operatorname{sen}\frac{k}{\sqrt{m}}t$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{mv_0^2}=1$. ● La ecuación diferencial del movimiento es $m\ddot{x}=-k^2x$, $m\ddot{y}=-k^2y$.

4.1. Inestable. 4.2. Estable. 4.3. Inestable. 4.4. Asintóticamente estable. 4.5. Asintóticamente estable si, $\alpha<-1/2$; estable, si $\alpha=$ $=-1/2$ e inestable para $\alpha>-1/2$. 4.6. $\dot{z}_i=-\dot{\varphi}_i+f_i(t, z_1+$ $+\varphi_1(t), \ldots, z_n+\varphi_n(t))=F_i(t, z_1, \ldots, z_n)$ $i=1, 2, \ldots, n$. ● Transfórmese el sistema (1) para nuevos variables, poniendo $z_i=$ $=x_i-\varphi_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. 4.7. El punto de reposo $x_i=0$ ($i=$ $=1, 2, \ldots, n$) del sistema de ecuaciones diferenciales es estable, si para cualquier $\varepsilon>0$ se encuentra $\delta(\varepsilon)>0$ tal que de la desigualdad $\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t_0)<\delta^2(\varepsilon)$ se deduce $\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)<\varepsilon$ para todos los $t\geqslant t_0$. Si, además, se cumple la relación $\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)=0$, entonces el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable. El punto de reposo es inestable, si existen $\varepsilon > 0$ y el número ι tales, que para todo $\delta > 0$ de la desigualdad $|x_i(t_0)| < \delta$ se deduce $|x_i(t)| > \varepsilon$ para cierto $t > t_0$. **4.9.** Foco inestable. **4.10.** Ensilladura. **4.11.** Foco inestable. **4.12.** Nudo estable. **4.13.** Nudo estable. **4.14.** Nudo estable. **4.15.** Para ningún α. **4.16.** $|\alpha| \geqslant 2$. **4.17.** $\alpha < 0$, $|\alpha| \geqslant |\beta|$ es el caso de un «rozamiento negativo» grande, el punto de reposo es un nudo inestable; $\alpha < 0$, $|\alpha| < |\beta|$ es el caso de un «rozamiento negativo», el punto de reposo es un foco inestable; $\alpha = 0$, el punto de reposo es estable, centro; $\alpha > 0$, $|\alpha| < |\beta|$, el punto de reposo es un foco estable; $\alpha > 0$, $|\alpha| \geqslant |\beta|$, la resistencia del medio es grande, el punto de reposo es un nudo estable. ● Sustitúyase la ecuación por el sistema normal equivalente $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -2\alpha y - \beta^2 x$. **4.18.** Empléese la notación de la solución particular del sistema homogéneo para diferentes valores de la raíz característica. **4.19.** Inestable. **4.20.** Estable. **4.21.** $V = x^2 + y^2$; estable. **4.22.** $V = x^2 + y^2$; inestable. **4.23.** $V = x^4 + y^4$; estable. **4.24.** $V = x^2 + y^2$; inestable. **4.25.** $V = 2x^2 + y^2$; estable. **4.26.** $V = y^2 - \frac{1}{2}x^4$; inestable. **4.27.** Estable. **4.28.** Inestable. **4.29.** Inestable. **4.30.** Estable. **4.31.** Estable. **4.32.** Inestable. **4.33.** $V = 3x^2 + 4y^2$; asintóticamente estable.

5.1[1]. $y(1) = 1{,}3280$. **5.2.** $y(0{,}6) = 4{,}4828$. **5.3.** $y(0{,}3) = 0{,}0451$. **5.4.** $y(2) = -0{,}8407$. **5.5.** $y(1) = 0{,}7899$. **5.6.** $y(1) = 0{,}3305$. **5.7.** $y(1) = 0{,}3635$. **5.8.** $y(2) = 3{,}4547$. **5.9.** $y(1) = 3{,}7190$. **5.10.** $y(2) = 2{,}3683$. **5.11.** $y(0{,}1) = 0{,}1057$. **5.12.** $y(0{,}5) = 0{,}0461$. **5.13.** $y(2) = 4{,}2489$. **5.14.** $y(0{,}4) = 0{,}4647$. **5.15.** $y(0{,}1) = 0{,}1098$. **5.16.** $y(0{,}5) = 0{,}6842$. **5.17.** $y(1) = 0{,}4388$. **5.18.** $y(1) = 0{,}3679$. **5.19.** $y(2) = 0{,}7895$.

5.20.

```
      SUBROUTINE EULER (F, X0, Y0, H, N, Y)
      DIMENSION Y(N)
      H3 = H**3
      X = X0 - H
      U = Y0
      K = 0
    3 X = X + H
      FUNC = F (X, Y)
      Y1 = U + H*FUNC
    1 Y2 = U + (FUNC + F (X, Y1))* H/2.
      IF (ABS (Y2-Y1).LT.H3) GO TO 2
      Y1 = Y2
      GO TO 1
    2 K = K + 1
      Y (K) = Y2
```

[1] En las respuestas a los problemas 5.1—5.19, así como a 5.26—5.31 se dan los valores de la solución buscada en el extremo del segmento dado.

```
      U = Y2
      IF (K.LT.N) GO TO 3
      RETURN
      END
```

5.21.

```
      SUBROUTINE RK (F, X0, Y0, H, N, Y, EPS)
      DIMENSION Y (N)
      M = 1
      DO 1 I = 1, N
    1 Y (I) = 0
    2 X = X0
      U = Y0
      DO 4 j = 1, N
      DO 3 K = 1, M
      Q1 = F (X, U)* H
      Q2 = F (X + H/2., U + Q1/2.) * H
      Q3 = F (X + H/2., U + Q2/2.) * H
      Q4 = F (X + H, U + Q3) * H
      DY = (Q1 + 2 * Q2 + 2 * Q3 + Q4)/6.
      U = U + DY
    3 X = X + H
      A = ABS ((U — Y (J))/15.)
      Y (J) = U
      IF (A.GT.EPS) KIND = 1
    4 CONTINUE
      IF (KIND.EQ.I) GO TO 5
      RETURN
    5 H = H/2.
      M = M*2.
      KIND = 0
      GO TO 2
      END
```

5.22.

```
      SUBROUTINE MILN (F, X0, H, N, Y, EPS)
      DIMENSION
      NI = N — 4
      EPS = 0.
      X = X0
      FI = F (X + H, Y (2))
      F2 = F (X + 2.*H, Y (3))
      F3 = F (X + 3.*H, Y (4))
      DO 1 K = 1, NI
      YW = Y (K) + (2. F1 — F2 + 2.*F3) * 4*H/3.
```

```
Y (K + 4) = Y (K + 2) + (F2 + 4.*F3 + F (X + 4.*H, YW))*
  *H/3.
A = ABS (YW — Y (K + 4))/29.
EPS = AMAX1 (A, EPS)
F1 = F2
F2 = F3
F3 = F (K + 4)
1 X = X + H
RETURN
END
```

5.23. En la tarea para la calculadora entran tres unidades de programa:

a) subprograma

```
SUBROUTINE EULER (F, X0, Y0, H, N, Y)
```

b) subprograma-función (para el problema 5.12)

```
FUNCTION F (X, Y)
F = 2.*X*Y + X*X
RETURN
END
```

c) programa principal

```
EXTERNAL F
DIMENSION Y (20), A (40)
CALL EULER (F, 0., 0., 0.025, 20, Y)
CALL EULER (F, 0., 0., 0.0125, 40, A)
B = 0
DO 1 K = 1,20
C = ABS (Y (K) — A (2*K — 1))/7.
1 B = AMAX1 (B, C)
WRITE (3,2) A,B
2 FORMAT (5 (1H, 8F12.6), 'ERROR = ', F10.8)
STOP
END
```

5.24. Tarea para la calculadora para el problema 5.18:

a) subprograma

```
SUBROUTINE RK (F, X0, Y0, H, N, Y, EPS)
```

b) subprograma-función

```
FUNCTION F (X, Y)
F = Y*Y*EXP (X) — 2.*Y
RETURN
END
```

c) programa principal

```
EXTERNAL F
DIMENSION Y (10)
```

```
      CALL RK (F, 0., 1., 0.1, 10, Y, 1E-4)
      WRITE (3,1) Y
    1 FORMAT (1H, 5F15.6)
      STOP
      END
```

5.25. Tarea para la calculadora para el problema 5.19:

a) subprograma

```
      SUBROUTINE MILN (F, X0, H, N, Y, EPS)
```

b) subprograma-función

```
      FUNCTION F (X, Y)
      F = 1./(Y*Y + X)
      RETURN
      END
```

c) programa principal

```
      EXTERNAL F
      DIMENSION Y (21)
      DATA Y (1)/0.63212/,Y(2)/0.652562/,Y(3)/0.677129/,Y(4)/0.705863/
      CALL MILN (F, 1., 0.05, 21, Y, EPS)
      WRITE (3, 1) Y, EPS
    1 FORMAT (3 (1H, 7F12.6)/' ERROR = ', F8.6)
      STOP
      END
```

5.26. $y(2) = 0{,}25$, $z(2) = 0{,}375$. 5.27. $y(1) = 1{,}261$, $z(1) = 2{,}346$. 5.28. $y(0{,}3) = 1{,}505$, $z(0{,}3) = 0{,}577$. 5.29. $y(0{,}3) = 0{,}638$, $z(0{,}3) = 1{,}568$. 5.30. $y(1) = 1{,}359$. 5.31. $y(2) = -1{,}833$.

5.32.

```
      SUBROUTINE RKD (F, F1, X0, Y0, Z0, H, N, Y, Z, EPS)
      DIMENSION Y (N), Z (N)
      M = 1
      DO 1 I = 1, N
      Y (I) = 0.
    1 Z (I) = 0.
    2 X = X0
      U = Y0
      V = Z0
      DO 4 J = 1,N
      DO 3 K = 1,M
      Q1Y = F (X, U, V)*H
      Q1Z = F1 (X, U, V)*H
      Q2Y = F (X + H/2., U + Q1Y/2., V + Q1Z/2.)*H
      Q2Z = F1 (X + H/2., U + Q1Y/2., V + Q1Z/2.)*H
      Q3Y = F (X + H/2., U + Q2Y/2., V + Q2Z/2.)*H
```

```
      Q3Z = FI (X + H/2., U + Q2Y/2., V + Q2Z/2.)*H
      Q4Y = F (X + H, U + Q3Y, V + Q3Z)*H
      Q4Z = FI (X + H, U + Q3Y, V + Q3Z)*H
      DY = (Q1Y + 2*Q2Y + 2*Q3Y + Q4Y)/6.
      DZ = (Q1Z + 2*Q2Z + 2*Q3Z + Q4Z)/6.
      U = U + DY
      V = V + DZ
    3 X = X + H
      A = ABS ((U - Y (J))/15.)
      B = ABS ((V - Z (J))/15.)
      Y (J) = U
      Z (J) = V
      IF (A.GT.EPS.OR.B.GT.EPS) KIND = 1
    4 CONTINUE
      IF (KIND.EQ.1) GO TO 5
      RETURN
    5 H = H/2.
      M = M*2
      KIND = 0
      GO TO 2
      END
```

5.33. Tarea para la calculadora, para el problema 5.29:

a) subprograma

```
      SUBROUTINE RKD (F, FI, X0, Y0, Z0, H, N, Y, Z, EPS)
```

b) subprograma-función

```
      FUNCTION F (X, Y, Z)
      F = EXP (-1.*(Y**2 + Z**2)) + 2.*X
      RETURN
      END
```

c) subprograma-función

```
      FUNCTION FI (X, Y, Z)
      FI = 2.*Y**2 + Z
      RETURN
      END
```

d) programa principal

```
      EXTERNAL F, FI
      DIMENSION (Y20), Z (20)
      CALL RKD (F, FI, 0., 0.5, 1., 0.1, 20, Y, Z, 1E - 4)
      WRITE (3,1) Y, Z
    1 FORMAT (1H, 10F10.4)
      STOP
      END
```

5.34. $y_1 = 2{,}953$, $y_2 = 4{,}375$, $y_3 = 6{,}359$. **5.35.** $y_1 = 1{,}926$, $y_2 = 2{,}593$, $y_3 = 3{,}333$, $y_4 = 4{,}148$, $y_5 = 5{,}037$, $y_6 = 6$. **5.36.** $y_1 = 0{,}874$, $y_2 = 0{,}743$, $y_3 = 0{,}611$, $y_4 = 0{,}482$, $y_5 = 0{,}362$, $y_6 = 0{,}253$, $y_7 = 0{,}161$, $y_8 = 0{,}087$, $y_9 = 0{,}033$. **5.37.** $y_1 = 2{,}019$, $y_2 = 3{,}956$, $y_3 = 5{,}720$, $y_4 = 7{,}212$, $y_5 = 8{,}316$, $y_6 = 8{,}908$, $y_7 = 8{,}855$, $y_8 = 8{,}044$, $y_9 = 6{,}413$, $y_{10} = 3{,}998$. **5.38.** $y_1 = 1{,}17$, $y_2 = 1{,}31$, $y_3 = 1{,}42$, $y_4 = 1{,}50$, $y_5 = 1{,}64$, $y_6 = 1{,}66$, $y_7 = 1{,}63$, $y_8 = 1{,}58$, $y_9 = 1{,}49$. **5.39.** $y_0 = 2$, $y_1 = 2{,}273$, $y_2 = 2{,}674$, $y_3 = 3{,}185$, $y_4 = 3{,}796$.

5.40. Tarea para la calculadora para el problema 5.38:

a) subprograma

```
      SUBROUTINE EXCLUS (A, B, N)
```

b) programa principal

```
      DIMENSION A (11, 11), B (11)
      READ (1, 1) A, B
    1 FORMAT (9F8.4)
      CALL EXCLUS (A, B, 11)
      WRITE (3, 2) B
    2 FORMAT (", 9F8.3)
      STOP
      END
```

CAPÍTULO 10

ANALISIS VECTORIAL

§ 1. Campos escalares y vectoriales. Gradiente

1. Características geométricas de los campos escalares y vectoriales. Sea D un dominio en el espacio de dos, tres o n dimensiones. Se dice que en el dominio D está definido *el campo escalar*, si en D está dada la función escalar del punto $u(P) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(\boldsymbol{r})$ que se llama función del campo ($\boldsymbol{r}$ es el radio vector del punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Si a cada punto $P \in D$ está puesto en correspondencia el vector $\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(r)$, entonces se dice que en el dominio D está definido el campo vectorial determinado por la función vectorial $\boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$.

Las características geométricas más elementales de los campos escalares son *líneas de nivel* $u(x, y) = C$ en el espacio de dos dimensiones, *superficies de nivel*, o *superficies equipotenciales*, $u(x, y, z) = C$ en el espacio de tres dimensiones y *hipersuperficies de nivel* $u(x_1, \ldots, x_n) = C$ en el espacio $n > 3$ dimensiones. Las características geométricas más elementales de los campos vectoriales son líneas vectoriales y tubos vectoriales. Se llama *línea vectorial* la línea, cuya tangente en cada punto tiene una dirección que coincide con la dirección del vector del campo que le corresponde. Las líneas vectoriales para el vector $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ se determinan por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}$$

(análogamente para los campos planos y multidimensionales). Se llama *tubo vectorial* la superficie formada por las líneas vectoriales que pasan por los puntos de cierta curva cerrada situada en el campo y que no coincide (incluso parcialmente) con cualquier línea vectorial

Determínese el tipo de líneas o superficies (hipersuperficies) de nivel de los campos escalares siguientes:

1.1. $u = y^2 + x$. **1.2.** $u = xy$.

1.3. $u = y/x$. **1.4.** $u = x + y + z$.

1.5. $u = x^2 + y^2 - z^2$. **1.6.** $u = x^2 + y^2 - z$.

1.7. $u = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. **1.8.** $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Hállense las líneas vectoriales de los campos siguientes:

1.9. $a = yi - xj$. **1.10.** $a = xi - yj$.

1.11. $a = yi + j$. **1.12.** $a = r = xi + yj + zk$.

1.13. $a = [r, c]$ (c es vector constante).

1.14. $a = \frac{i}{x} + \frac{i}{y} + \frac{k}{z}$.

1.15. $a = (y - z)\, i + (z - x)\, j + (x - y)\, k$.

1.16. $a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_4 e_4$.

1.17. Determínese el tipo de tubos vectoriales: a) en el problema 1.12; b) en el problema 1.15.

2. Derivada direccional y gradiente del campo escalar. Sea $s = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k$ el vector unitario de la dirección dada s, $r_0 = x_0 i + y_0 j + z_0 k$ el radio vector del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. *La derivada* del campo escalar $u(P)$ en el punto P_0 respecto *a la dirección* s, designada mediante $\frac{\partial u}{\partial s}$ se determina por la relación

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{u(r_0 + \tau s) - u(r_0)}{\tau}$$

y caracteriza la velocidad de variación de la función $u(P)$ en la dirección s. La derivada $\frac{\partial u}{\partial s}$ se calcula según la fórmula

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{r=r_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{r=r_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{r=r_0} \cos\gamma. \qquad (1)$$

Se llama *gradiente* del campo escalar $u(P)$, designado mediante el símbolo grad u, el vector cuyas proyecciones son las derivadas parciales de la función $u(P)$ respecto a las coordenadas correspondientes, es decir,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \qquad (2)$$

De modo análogo se determina la derivada respecto a la dirección y el gradiente para los campos escalares n-dimensionales.

Partiendo de la expresión de la derivada respecto a la dirección (1) y de la definición del gradiente (2) demuéstrense las siguientes propiedades del gradiente:

1.18. La derivada del campo respecto a la dirección s es igual al producto escalar del gradiente del campo por el vector unitario de la dirección dada, es decir, es igual a la proyección del gradiente en la dirección dada

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\operatorname{grad} u, \boldsymbol{s}) = |\operatorname{grad} u| \cos \varphi,$$

donde φ es el ángulo entre el gradiente y el vector $\boldsymbol{s}$.

1.19. La dirección del gradiente es la dirección del más rápido crecimiento de la función del campo.

1.20. En cada punto del campo el gradiente está dirigido por la normal a la superficie de nivel correspondiente, en dirección del crecimiento del potencial del campo, es decir,

$$|\operatorname{grad} u| = \frac{\partial u}{\partial n},$$

donde n es la normal a la superficie de nivel dirigida hacia el crecimiento de la función del campo.

Hállense las derivadas de los campos siguientes en los puntos dados, según la dirección prefijada:

1.21. $u + x^2 + \frac{1}{2} y^2$ en el punto $P_0(2, -1)$ en dirección de P_0P_1, donde $P_1(6, 2)$.

1.22. $u = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 + z$ en el punto $P_0(2, 1, 1)$ en dirección de la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$ hacia el crecimiento del campo.

1.23. $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ en el punto P_0 (1, 3, 2, —1) en dirección del vector $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_4$.

1.24. Hállese el ángulo entre los gradientes del campo $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ en los puntos P_1 (2, 3, —1) y P_2 (1, —1, 2).

1.25. Hállense la velocidad y la dirección del más rápido crecimiento del campo $u = xyz$ en el punto P_0 (1, 2, —2).

1.26. Hállese el vector unitario de la normal a la superficie de nivel del campo $u = x^2 + 2xy - 4yz$ en el punto P_0 (1, 1, —1), dirigido hacia el crecimiento del campo.

1.27. Hállense los puntos estacionarios del campo $u = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$.

1.28. Cerciórese de la ortogonalidad de las líneas de nivel de los campos:

a) $u = x^2 - y^2$, $v = xy$;

b) $u = 2x^2 + y^2$, $v = \frac{y^2}{x}$.

1.29. Cerciórese de la ortogonalidad de las superficies de nivel de los campos siguientes:

a) $x^2 + y^2 - z^2$, $v = xz + yz$;

b) $u = x^2 + y^2 - 2z^2$, $v = xyz$;

c) $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, $v = x_1x_3 + x_2x_4$, $w = x_1x_4 - x_2x_3$.

1.30. Hállese la familia de líneas del más rápido crecimiento para los campos siguientes:

a) el campo plano $u = x^2 - y^2$;

b) el campo tridimensional $u = xyz$;

c) el campo tridimensional $u = x^2 + y^2 - z^2$.

§ 2. Integrales curvilíneas y de superficie

1. Integrales curvilíneas de primera especie. Sean $\breve{AB}$ el arco de una curva suave a trozos; $u(P)$, el campo escalar definido en AB; $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ — la partición arbitraria del arco AB y P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) — son puntos arbitrarios en los arcos parciales $\overset{\frown}{A_{\nu-1}A_\nu}$, cuyas longitudes se designan mediante Δs_ν. Si existe el límite de la sucesión de las sumas integrales $\sum\limits_{\nu=1}^{n} u(P_\nu) \times \Delta s_\nu$ para $\max\limits_{\nu} \Delta s_\nu \to 0$ (y $n \to \infty$), que no depende ni del modo de la partición del arco $\breve{AB}$ por los puntos A_ν ni de la elección de los puntos P_ν en los arcos parciales $\breve{A_{\nu-1}A_\nu}$, entonces este límite se llama *integral curvilínea de primera especie* de la función $u(P)$ según la curva $\breve{AB}$ y se designa mediante

$$\int\limits_{\breve{AB}} u(P)\, ds = \int\limits_{\breve{AB}} u(x, y, z)\, ds$$

(ds es la diferencial del arco), es decir,

$$\int\limits_{\breve{AB}} u(P)\, ds = \lim_{\substack{\max \Delta s_\nu \to 0 \\ \nu}} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\, \Delta s_\nu. \qquad (1)$$

Si la función $u(P)$ es continua en $\breve{AB}$, entonces la integral (1) existe.

Desde el punto de vista físico la integral (1) puede interpretarse como masa de la curva $\breve{AB}$. El cálculo de la integral (1) se reduce al cálculo de la integral definida. Por ejemplo, si la ecuación del arco $\breve{AB}$

tiene por expresión $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, entonces

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} u(P)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} u(x(t),\ y(t),\ z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

La integral curvilínea de primera especie no depende de la dirección en la que se pasa el arco $\widetilde{AB}$, en otras palabras

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} u(P)\,ds = \int\limits_{\widetilde{BA}} u(P)\,ds.$$

EJEMPLO 1. Determínese la masa M de la primera espira de la hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = ht$, si la densidad $\mu(P)$ en cada punto de ésta es proporcional a la longitud del radio vector de este punto.

◀Puesto que $\mu = kr = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, entonces en los puntos de la hélice $\mu = k\sqrt{a^2+h^2t^2}$. A la primera espira corresponde la variación del parámetro t desde 0 hasta 2π y

$$ds = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt = \sqrt{a^2+h^2}\,dt.$$

De aquí

$$M = \int\limits_0^{2\pi} k\sqrt{a^2+h^2}\,\sqrt{a^2+h^2t^2}\,dt =$$

$$= k\sqrt{a^2+h^2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{a^2+h^2t^2}+\frac{a^2}{2h}\ln\left(ht+\sqrt{a^2+h^2t^2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= k\sqrt{a^2+h^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi^2h^2}+\frac{a^2}{2h}\ln\frac{2\pi h+\sqrt{a^2+4\pi^2h^2}}{a}\right).\ ▶$$

2.1. Hállese la masa de toda la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, si $\mu(P) = |xy|$.

2.2. Hállese la masa de toda la cardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$, si $\mu(P) = k\sqrt{r}$.

2.3. Hállese la masa de toda la lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, si $\mu(P) = kr$.

2.4. Calcúlese $\displaystyle\int\limits_{\widetilde{AB}} \frac{y}{x+3z}\,ds$ si $\widetilde{AB}$ es el arco de la línea $x = t$, $y = \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}$, $z = \dfrac{t^3}{3}$, $A(0,\ 0,\ 0)$ y $B\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.5. Hállese la masa del arco de la hélice cónica $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \operatorname{sen} t$, $z = ae^t$, si $\mu = ke^t$ desde el punto O (0, 0, 0) hasta el punto A (a, 0, a).

2.6. Hállese la fuerza con la cual la masa M distribuida uniformemente a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $z = c$, atrae la masa puntual m colocada en el origen de coordenadas.

2.7. Hállese la masa de la cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ situada en el primer cuadrante, si su densidad en cada punto de la circunferencia es proporcional a la abscisa de este punto (el coeficiente de proporcionalidad es α).

2.8. Hállese la masa de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ situada en el semiplano superior, si la densidad de esta semicircunferencia en cada punto es proporcional al cubo de la ordenada de este punto (el coeficiente de proporcionalidad es β).

2. Integral de superficie de primera especie. Sean G la superficie suave a trozos; $u(P)$, el campo escalar dado en G; $G_1, G_2, \ldots, G_n$, la partición arbitraria de la superficie G en superficies parciales cuyas áreas son iguales $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ y sean P_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) puntos arbitrarios en las superficies parciales G_ν. Si existe el límite de la sucesión de las sumas integrales $\sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta\sigma_\nu$ para $\max_\nu \Delta\sigma_\nu \to 0$ (y $n \to \infty$) que no depende ni del modo de partir la superficie G en superficies parciales ni de la elección de los puntos P_ν en estas superficies parciales, entonces este límite se llama *integral de superficie* de primera especie de la función $u(P)$ según la superficie G y se designa mediante

$$\iint_G u(P)\,d\sigma = \iint_G u(x, y, z)\,d\sigma$$

($d\sigma$ es la diferencial del área de superficie), es decir,

$$\iint_G u(P)\,d\sigma = \lim_{\max_\nu \Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta\sigma_\nu. \qquad (2)$$

Si $u(P)$ es continua en G, la integral (2) existe. El cálculo de la integral (2) se reduce al cálculo de la integral doble ordinaria. Supongamos que la recta paralela al eje Oz corta la superficie G sólo en un punto, es decir, la ecuación de la superficie tiene la forma $z = f(x, y)$ y que G se proyecta sobre el plano Oxy en el dominio D. El elemento $d\sigma_1$ del área D se expresa en forma de $d\sigma_1 = d\sigma \cos\gamma$, donde γ es un ángulo agudo formado por la normal a la superficie G con el eje Oz:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

De este modo,

$$\iint_G u(x,\ y,\ z)\,d\sigma = \iint_D u(x,\ y,\ z)\,\frac{d\sigma_1}{\cos\gamma} =$$

$$= \iint_D u(x,\ y,\ z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Si la recta paralela al eje Oz corta la superficie G en dos puntos o más, entonces G se divide en partes, cada una de las cuales se interseca con la recta paralela al eje Oz sólo en un único punto. La integración debe realizarse respecto a cada una de las partes obtenidas.

La superficie G puede proyectarse sobre los planos Oxz o Oyz, en vez de proyectarse sobre el plano Oxy.

Para las superficies de dos caras la integral de superficie de primera especie no depende de la cara por la cual se toma. El sentido físico de la integral de superficie de primera especie depende del carácter físico del campo escalar dado: éste puede determinar la masa distribuida por la superficie definida, la carga eléctrica, etc.

EJEMPLO 2. Determínense el momento estático respecto al plano Oxy y la posición del centro de masas de la semiesfera homogénea G: $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z \geqslant 0)$

◀ Tenemos

$$M_{xy} = \iint_G z\,d\sigma = \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $z=0$. Ya que en la semiesfera $x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$ entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

de donde

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

y

$$M_{xy} = \iint_G z\,d\sigma = \iint_G R\,dx\,dx = R\iint_G dx\,dy = R\cdot\pi R^2 = \pi R^3.$$

Determinemos ahora las coordenadas del centro de masas de la semiesfera. En virtud de la simetría

$$x_0 = y_0 = 0.$$

Luego, ya que el área Q de la superficie de la semiesfera G es $2\pi R^2$, entonces

$$z_0=\frac{M_{xy}}{Q}=\frac{R}{2}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Por toda la superficie del cono con una altura h y un radio de la base a están distribuidas las cargas eléctricas. En cada punto de la superficie la densidad de la carga es proporcional a la z-coordenada de este punto ($e = kz$). El vértice del cono está en el origen de las coordenadas, su eje está dirigido a lo largo del eje Oz. Determínese la carga sumaria de toda la superficie del cono.

◀ La carga sumaria de la base del cono es igual al producto de su área πa^2 por la densidad de la carga puntual, es decir, kh. Así pues, $F_b = k\pi a^2 h$. La carga de la superficie lateral G se determina por la integral

$$E_{s.l}=\iint_G kz\,d\sigma.$$

La ecuación de la superficie del cono es $z^2=\frac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$, $0\leqslant z\leqslant h$. Diferenciando hallamos $z\,dz=\frac{h^2}{a^2}(x\,dx+y\,dy)$, de donde $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{h^2}{a^2}\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{h^2}{a^2}\frac{y}{z}$ y por consiguiente

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{h^4}{a^4}\cdot\frac{x^2+y^2}{z^2}}=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}.$$

Por eso

$$E_{s.l}=k\iint_G z\,d\sigma=\frac{kh}{a}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,dx\,dy,$$

donde D es el círculo $x^2+y^2\leqslant a^2$, $z=0$. Pasando a las coordenadas polares obtenemos

$$E_{s.l}=\frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\iint_D r^2\,dr\,d\varphi=$$

$$=\frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^2\,dr=\frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2+h^2}.$$

Hallamos toda la carga:

$$E=E_{eje}+E_{s.l}=k\pi a^2h+\frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2+h^2}=$$

$$=\frac{k\pi ah}{3}(3a+2\sqrt{a^2+h^2}). \blacktriangleright$$

2.9. Determínese la masa distribuida en una parte de la superficie del paraboloide hiperbólico $2az = x^2 - y^2$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, si la densidad en cada punto de la superficie es igual a $k \mid z \mid$.

2.10. Determínese el momento de inercia de la superficie lateral homogénea del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant a)$ respecto del eje Oz.

2.11. Determínese la carga eléctrica sumaria distribuida en una parte de la superficie del hiperboloide de dos hojas $z^2 = x^2 + y^2 + a^2$ $(a \leqslant z \leqslant a\sqrt{2})$, si la densidad de la carga en cada punto es proporcional a la z-coordenada de este punto $(e = kz)$.

2.12. Determínese la masa distribuida por la superficie del cubo $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$, si la densidad superficial en el punto $P(x, y, z)$ es igual a $k\sqrt[3]{\mid xyz \mid}$ $(k = \text{const})$.

2.13. Determínese la carga eléctrica sumaria distribuida en una parte de la superficie del paraboloide $2az = x^2 + y^2$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, si la densidad de la carga en cada punto es igual a $k\sqrt{z}$ $(k = \text{const})$.

3. Integral curvilínea de segunda especie. Supongamos que en el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la curva suave a trozos está definido el campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r) = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$ y que $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ es una partición arbitraria del arco $\overset{\frown}{AB}$ en arcos parciales, P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ son puntos arbitrarios en los arcos $\overset{\frown}{A_{\nu-1}A_\nu}$ y Δr_ν es un incremento del radio vector $r(P)$ en los extremos del arco $\overset{\frown}{A_{\nu-1}A_\nu}$. Entonces, si existe el límite de la sucesión de las sumas integrales $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta r_\nu)$ para $\max\limits_{\nu} \mid \Delta r_\nu \mid \to 0$ (y $n \to \infty$) que no depende ni del modo de partir el arco $\overset{\frown}{AB}$ en arcos parciales, ni de la elección de los puntos P_ν en estos arcos parciales, este límite se llama *integral curvilínea de segunda especie* respecto al arco $\overset{\frown}{AB}$ y se designa mediante

$$\iint\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \iint\limits_{\overset{\frown}{AB}} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz,$$

es decir,

$$\iint\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \lim_{\max\limits_{\nu} \mid \Delta r_\nu \mid \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta r_\nu). \qquad (3)$$

Aquí $(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$ y $(\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{r}_\nu)$ son productos escalares de los vectores. Si la función vectorial $\boldsymbol{a}(P)$ es continua en $\overset{\frown}{AB}$, entonces la integral (3) existe.

La integral (3) se llama también *integral lineal* del vector $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Análogamente se definen las integrales lineales en los campos vectoriales planos y multidimensionales. Si se dan las ecuaciones paramétricas del arco $\overset{\frown}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, entonces

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a_x(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) +$$

$$+ a_y(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))\, z'(t))\, dt. \qquad (4)$$

Aquí t_0 y t_1 son valores del parámetro t correspondientes a los puntos A y B. A diferencia de las integrales curvilíneas de primera especie las integrales lineales (3) dependen de la dirección por la cual se realiza la integración a lo largo del arco $\overset{\frown}{AB}$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}).$$

El sentido físico más simple de la integral lineal es el trabajo del campo de fuerzas $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, cuando en éste se desplaza un punto material por la curva $\overset{\frown}{AB}$, del punto A al punto B.

EJEMPLO 4. Determínese el trabajo del campo de fuerzas $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, cuando el punto material se desplaza a lo largo de la primera espira de la hélice cónica $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \operatorname{sen} t$, $z = ae^t$, del punto $A(0, 0, 0)$ al punto $B(a, 0, a)$.

◀ Ya que $dx = ae^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\, dt$, $dy = ae^t(\operatorname{sen} t + \cos t)\, dt$, $dz = ae^t\, dt$ y

$$(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = x\, dx + y\, dy + z\, dz = a^2e^{2t}((\cos t - \operatorname{sen} t)\cos t +$$
$$+ (\operatorname{sen} t + \cos t)\operatorname{sen} t + 1)\, dt = 2a^2e^{2t}\, dt,$$

entonces, teniendo en cuenta que $t = -\infty$ en el punto A y $t = 0$ en el punto B, tenemos

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = 2a^2 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}\, dt = a^2. \ ▶$$

OBSERVACIÓN. Este ejemplo se puede resolver de un modo más simple, si se toma en consideración que en este caso $(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} d(r^2)$, además $r = |\boldsymbol{r}| = 0$ en el punto A y $r = a\sqrt{2}$ en el punto B. Tenemos

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{a\sqrt{2}} d(r^2) = \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a\sqrt{2}} = a^2.$$

La integral lineal del vector $\boldsymbol{a}$, tomada por el contorno cerrado C se llama *circulación* del vector del campo por el contorno dado y se designa con el símbolo $\oint\limits_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$. La dirección del recorrido del contorno se indica de antemano, con la particularidad de que se considera positivo el recorrido en sentido antihorario y negativo en sentido horario.

Para los campos planos vectoriales $\boldsymbol{a} = a_x(x, y)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y)\,\boldsymbol{j}$ tiene lugar la siguiente afirmación:

Si la función vectorial $\boldsymbol{a} = a_x(x, y)\,\boldsymbol{i} + a_i(x, y)\,\boldsymbol{j}$ es continua junto con las derivadas $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ y $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ en la región cerrada $\overline{G} = G + C$, entonces

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_G a_x\,dx + a_y\,dy$$

(*fórmula de Green*).

EJEMPLO 5. Calcúlese la integral curvilínea

$$\oint\limits_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

◀ Aplicando la fórmula de Green podemos escribir:

$$\oint\limits_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy = \iint\limits_{K_C} (-1-1)\,dx\,dy = -2\pi r^2,$$

puesto que $\iint\limits_{K_C} dx\,dy$ es el área del círculo K_C: $x^2+y^2 \leqslant r^2$. ▶

2.14. Calcúlese el trabajo del campo de fuerzas $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$, cuando el punto material se desplaza a lo largo de la mitad superior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, del punto $A\ (a, 0)$ al punto $B\ (-a, 0)$.

2.15. Calcúlese la integral lineal $\int\limits_{OB} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, si $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$, $O\ (0, 0)$, $B\ (1, 1)$ respecto a las líneas siguientes:

a) al segmento de la recta OB; b) al arco de la parábola $x^2 = y$; c) al arco de la parábola $y^2 = x$; d) a la quebrada OAB, donde $A\ (1, 0)$; e) a la quebrada OCB, donde $C\ (0, 1)$.

2.16. Calcúlese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ a lo largo de la circunferencia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ en sentido negativo.

2.17. Calcúlese la integral lineal $\int\limits_{\overset{\frown}{OA}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, si $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ y la ecuación del arco $\overset{\frown}{OA}$ es $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2.18. Calcúlese la integral lineal $\int\limits_{\overset{\frown}{OA}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, si $\boldsymbol{a} = -yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, $\overset{\frown}{OA}$ es la primera espira de la hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = ht$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

2.19.** Calcúlese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^3 = R^2$, $x + y + z = R$ en sentido positivo respecto al versor $\boldsymbol{k}$.

2.20. Calcúlese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ a lo largo de la elipse $\frac{x^2+y^2}{2} + z^2 = a^2$, $y = x$ en dirección positiva respecto al versor $\boldsymbol{i}$.

2.21. Calcúlese el trabajo del campo de fuerzas $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k}$, cuando el punto material se desplaza a lo largo de la sección del hiperboloide $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ por el plano $y = x$, del punto $(a, a, 0)$ al punto $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$.

Aplicando la fórmula de Green calcúlense las integrales:

2.22. $\oint\limits_C (x^2 - y^2)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$, donde C es el contorno formado por la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje Ox.

2.23. $\oint\limits_C (x + y)^2\,dx - (x - y)^2\,dy$, donde C es el contorno formado por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y el segmento del eje Ox para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2.24. $\oint\limits_{x^2+y^2=r^2} x^2y\,dx - xy^2\,dy$.

2.25. $\oint\limits_C (x + y)^2\,dx - (x^2 + y^2)\,dy$, donde C es el triángulo con vértices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ y $B(0, 1)$.

4. Integral de superficie de segunda especie. La superficie suave G en el espacio tridimensional se llama *de dos caras*, si la normal a la superficie, al recorrer cualquier contorno cerrado que se encuentra sobre la superficie G y que no tiene puntos comunes con su frontera, retorna a la posición inicial. La elección de una cara determinada de la superficie, es decir, la elección de la dirección de la normal hacia la superficie se llama *orientación* de la superficie.

Sea G la superficie orientada suave a trozos y $\boldsymbol{a} = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$, el campo vectorial. Dividamos la superficie G en superficies parciales $G_1, G_2, \ldots, G_n$, cuyas áreas designamos mediante $\Delta\sigma_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) y las áreas de las superficies parciales G_ν, provistas de normales unitarias $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$ en los puntos $P_\nu \in G$, la denotamos por $\Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu$ (es decir, consideramos cada área de tal índole como un vector de longitud $\Delta\sigma_\nu$ y de dirección $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$). Pues, si existe el límite de la sucesión de sumas integrales $\sum_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu)$ para $\max\limits_{\nu} \Delta\sigma_\nu \to 0$ (y $n \to \infty$), el cual no depende ni del modo de partir la superficie G en superficies parciales, ni de la elección de los puntos P_ν en estas superficies parciales, entonces este límite se llama *integral de superficie de segunda especie* respecto a la superficie G y se designa mediante

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint_G a_x\,dy\,dz + a_y\,dx\,dz + a_z\,dx\,dy, \tag{5}$$

es decir,

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \lim_{\max\limits_{\nu} \Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{\sigma}_\nu).$$

Si el campo $\boldsymbol{a}(P)$ es continuo en G, la integral (5) existe.

La integral de superficie de segunda especie se llama también *flujo* del campo vectorial $\boldsymbol{a}(P)$ a través de la superficie G. Puede ser interpretada como la cantidad de líquido o gas que pasa por unidad de tiempo en la dirección dada a través de la superficie G. El paso a otra cara de la superficie cambia la dirección de la normal hacia la superficie y por eso, también el signo de la integral de superficie de segunda especie.

El cálculo de la integral de superficie de segundo género se reduce al cálculo de la integral de superficie de primer género

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint_G (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\,d\sigma \tag{6}$$

donde $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ es la normal unitaria a la superficie, o al cálculo de la suma de tres integrales dobles

$$\iint_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint_{D_1} a_x(x(y, z), y, z)\,dy\,dz +$$

$$+ \iint_{D_2} a_y(x, y(x, z), z)\,dx\,dz + \iint_{D_3} a_z(x, y, z(x, y))\,dx\,dy,$$

donde D_1, D_2 y D_3 son las proyecciones de G respectivamente sobre los planos Oyz, Oxz y Oxy, y $x(y, z)$, $y(x, z)$ y $z(x, y)$ son las expresiones obtenidas de la ecuación de la superficie G resolviendo respecto a las coordenadas correspondientes.

EJEMPLO 6. Hállese el flujo del vector $r = xi + yj + zk$ a través de una parte de la superficie del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ situada en el primer octante, en dirección de la normal exterior.

◀ En virtud de (6) tenemos

$$\iint_G (r, n)\, d\sigma = \iint (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Puesto que en el primer octante la normal exterior del elipsoide forma con todos los ejes de coordenadas ángulos agudos, todos los tres cosenos directores son no negativos. Por eso

$$\iint_G (r, n)\, d\sigma = \iint_{D_1} x\, dy\, dz + \iint_{D_2} y\, dx\, dz + \iint_{D_3} z\, dx\, dy =$$

$$= 3v = 3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi abc}{2}$$

(cada una de las integrales respecto a D_1, D_2 y D_3 determina el volumen de una octava parte del elipsoide). ▶

EJEMPLO 7. Hállese el flujo del vector $a = x^2 i - y^2 j + z^2 k$ a través de toda la superficie del cuerpo $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3R^2$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ en dirección de la normal exterior.

▶ Tenemos

$$\iint_G (a, n)\, d\sigma = \iint_G (x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iint_G x^2\cos\alpha\, d\sigma - \iint_G y^2\cos\beta\, d\sigma + \iint_G z^2\cos\gamma\, d\sigma.$$

La superficie dada está limitada por arriba por el segmento de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$; por los lados, por parte de la superficie del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$; por abajo por el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $z = 0$ (fig. 93). Sobre los planos Oyz y Oxz la superficie G se proyecta dos veces por distintas caras, por eso, en virtud de la simetría de la superficie respecto a estos planos, las dos primeras integrales en la notación del flujo son iguales a cero:

$$\iint_G x^2\cos\alpha\, d\sigma = \iint_G y^2\cos\beta\, d\sigma = 0.$$

Sobre el plano Oxy el segmento esférico se proyecta en el círculo (dominio D_3') $x^2 + y^2 \leqslant 2R^2$; parte de la superficie del hiperboloide, en el anillo (dominio D_3'') $R^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2R^2$ y de base inferior sirve el círculo situado en este plano, (dominio D_3''') $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. No

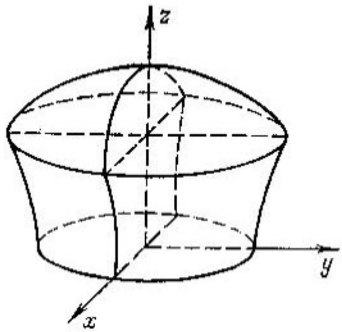


Fig. 93

obstante, para el segmento de la esfera $\cos\gamma > 0$, para el hiperboloide $\cos\gamma < 0$ y en la base inferior $z = 0$. Por eso

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iint\limits_G z^2 \cos\gamma\, d\sigma = \iint\limits_{D_3'} (3R^2 - x^2 -$$

$$- y^2)\, dx\, dy - \iint\limits_{D_3''} (x^2 + y^2 - R^2)\, dx\, dy.$$

Para calcular las integrales pasemos a las coordenadas polares

$$\iint\limits_{D_3'} (3R^2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{2}} (3R^2 - r^2)\, r\, dr = 4\pi R^4,$$

$$\iint\limits_{D_3''} (x^2 + y^2 - R^2)\, dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_R^{R\sqrt{2}} (r^2 - R^2)\, r\, dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Así pues, definitivamente hallamos: $\iint\limits_G (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\, d\sigma = \frac{7}{2}\pi R^4$. ▶

2.26. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de la superficie del cuerpo $\frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant H$ en dirección de la normal exterior.

2.27. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ a través de una parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$,

$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant H$, en dirección de la normal exterior.

2.28. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) = z,\ z \leqslant H$, en dirección de la normal interior.

2.29. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$, en dirección de la normal exterior.

2.30. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cubo $x = \pm a,\ y = \pm a$, $z = \pm a$ en dirección de la normal exterior.

2.31. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 2x^2\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$ en dirección de la normal exterior.

2.32. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, cortada por los planos $x = R,\ z = 0$, $x = 0$ y orientada según la dirección del versor $\boldsymbol{k}$.

2.33. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ a través de una parte de la superficie del paraboloide $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, cortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y orientada según la dirección del versor $\boldsymbol{k}$.

§ 3. Relaciones entre las distintas características de los campos escalares y vectoriales

1. Divergencia del campo vectorial y el teorema de Gauss—Ostrogradski. Se llama *divergencia* del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, designada por $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$, la magnitud escalar igual al límite de la razón entre el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a}$ a través de la superficie cerrada Σ_P y la magnitud v_P del volumen del cuerpo limitado por esta superficie, para $v_P \to 0$, es decir, a condición de que la superficie se concentre en el punto P.

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{a})_P = \lim_{v_P \to 0} \frac{\oint\!\!\oint_{\Sigma_P} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{\sigma})}{v_P}. \qquad (1)$$

La divergencia caracteriza la potencia del flujo del campo vectorial «saliente» del punto P, referida a una unidad de volumen, es decir, la potencia del manantial (para $(\operatorname{div} \boldsymbol{a})_P > 0$) o del sumidero (para $(\operatorname{div} \boldsymbol{a})_P < 0$) que se encuentra en el punto P.

En el espacio euclídeo tridimensional la divergencia del campo se expresa del modo siguiente:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

TEOREMA DE GAUSS—OSTROGRADSKI. *El flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ a través de una superficie cerrada $\sum$, situada en este campo en dirección de su normal exterior, es igual a la integral triple de la divergencia de este campo vectorial sobre el recinto V, limitado por esta superficie, es decir,*

$$\oiint\limits_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{a})\, d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dv.$$

EJEMPLO 1. Empleando el teorema de Gauss—Ostrogradski hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + R^2z\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) \leqslant z \leqslant H$ en dirección de la normal exterior.

◀ Tenemos $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 3(x^2 + y^2) + R^2$. Por eso

$$\oiint\limits_{G} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{v} (3(x^2 + y^2(+ R^2)\, dv.$$

Para calcular la integral triple pasemos a las coordenadas cilíndricas. La ecuación de la superficie tomará la forma $z = \frac{H}{R^2}r^2$,

$$\iiint\limits_{v} (3(x^2+y^2)+R^2)\, dv = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} (3r^2+R^2)\, r\, dr \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{Hr^2}{R^2}}^{H} dz = 2\pi \int\limits_0^{R} (3r^2+R^2)\left(H - \frac{Hr^2}{R^2}\right) r\, dr =$$

$$= \frac{2\pi H}{R^2} \int\limits_0^{R} (R^4+2R^2r^2-3r^4)\, r\, dr = \pi H R^4. \ ▶$$

Empleando el teorema de Gauss — Ostrogradski resuélvanse los problemas siguientes:

3.1. Demuéstrese que el flujo del radio vector $\boldsymbol{r}$ a través de cualquier superficie cerrada suave a trozos en dirección de la normal exterior es igual al volumen triplicado del cuerpo, limitado por esta superficie.

3.2. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} - z^3\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cubo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$ $0 \leqslant z \leqslant a$ en dirección de la normal exterior.

3.3. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r$ a través de toda la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en dirección de la normal exterior.

3.4*. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ dirigido en el sentido negativo del eje Ox a través de la superficie de una parte del paraboloide $y^2 + z^2 = Rx$ que se corta por el plano $x = R$.

3.5. Extiéndase el concepto de flujo y de divergencia en el caso de un campo plano (bidimensional) y formúlese el teorema de Gauss — Ostrogradski para este caso.

3.6*. Utilizando la solución del problema anterior, transfórmese la circulación del vector por un contorno cerrado L en un campo plano, en la integral doble sobre el área limitada por este contorno.

3.7. Con ayuda del teorema de Gauss — Ostrogradski hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $x^2 + y^2 - z^2 \leqslant R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ en dirección de la normal exterior.

3.8. Hállese el flujo del vector $\boldsymbol{a} = x^2y\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\,z\boldsymbol{k}$ a través de toda la superficie del cuerpo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$ en dirección de la normal exterior.

2. Rotor del campo vectorial. Teorema de Stokes. Se llama *rotor* del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, designado por rot $\boldsymbol{a}$, el vector que en todo punto P de la diferenciabilidad del campo se determina del modo siguiente:

$$(\text{proyecc}_s \text{ rot } \boldsymbol{a})_P = \lim_{\sigma_P \to 0} \frac{\oint\limits_{l_P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})}{\sigma_P}.$$

Aquí s es el vector unitario de la dirección arbitraria, l_P es el contorno cerrado menor, que rodea el punto P, situado en el plano perpendicular al vector s y recorrido en el sentido positivo con respecto al vector s; σ_P es el área del recinto limitado por el contorno l_P: el límite se busca a condición de que el contorno se contrae en el punto P. En el espacio tridimensional rot $\boldsymbol{a}$ se expresa mediante las coordenadas rectangulares cartesianas del vector $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ del modo siguiente:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

TEOREMA DE STOKES. *La circulación de un campo vectorial diferenciable $\boldsymbol{a}$ por un contorno arbitrario cerrado suave a trozos L, es igual al flujo del vector rot $\boldsymbol{a}$ a través de la superficie G, limitada por este contorno L:*

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \iint_G (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma})$$

o en la forma coordenada

$$\oint_L (a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz) = \iint_G \left(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) d\sigma.$$

En este caso el vector unitario $\boldsymbol{n}$ de la normal a la superficie G está dirigido de tal modo para que el contorno L se recorra en el sentido positivo respecto a $\boldsymbol{n}$.

EJEMPLO 2. Compruébese la respuesta al problema 2.19 del capítulo presente con ayuda del teorema de Stokes.

◀ Puesto que $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, entonces rot $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Tomemos como superficie G limitada por el contorno L, el propio círculo formado como resultado de la sección de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ por el plano $x + y + z = R$. El centro del círculo es $O'\left(\frac{R}{3}, \frac{R}{3}, \frac{R}{3}\right)$; su radio es $R_1 = R\sqrt{\frac{2}{3}}$. El vector unitario de la normal es $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

Por cuanto $(\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, hallamos

$$\oint_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \iint_G (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \sqrt{3} \iint_G d\sigma = \sqrt{3}\,\pi R_1^2 = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}. \text{ ▶}$$

Ejemplo 3. Hállese la circulación del vector $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ a lo largo de la elipse formada como resultado de la sección del hiperboloide $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ por el plano $y = x$, en el sentido positivo respecto al versor $\boldsymbol{i}$. Verifíquese la respuesta con ayuda del teorema de Stokes.

◀ Las ecuaciones paramétricas de la elipse dada son $x = R\cos t$, $y = R\cos t$, $z = R\,\mathrm{sen}\,t$. Para recorrer en una dirección determinada hay que variar el parámetro t desde 0 hasta 2π. Por consiguiente

$$\oint\limits_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_L y\,dx - 2z\,dy + x\,dz = R^2 \int\limits_0^{2\pi} (-\mathrm{sen}\,t\cos t + {}$$
$$+ 2\,\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = 3\pi R^2.$$

Apliquemos el teorema de Stokes. Tenemos $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. De superficie G limitada por el contorno L nos servirá una parte del plano secante, situada dentro de la elipse. El vector unitario de la normal dirigido en sentido necesario tiene la forma $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$.

Por eso, $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ y

$$\iint\limits_G (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}} \iint\limits_G d\sigma = \frac{3}{\sqrt{2}}\pi ab.$$

Ya que la elipse tiene semiejes $a = R\sqrt{2}$ y $b = R$, entonces

$$\iint\limits_G (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = 3\pi R^2. \blacktriangleright$$

3.9*. El medio líquido gira con una velocidad angular de $\omega = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$ alrededor del eje que pasa por el origen de coordenadas. Hállese el rotor del campo de velocidades de este medio.

3.10. Dedúzcase la fórmula de Green (véase la respuesta al problema 3.6) aplicando el teorema de Stokes al campo vectorial bidimensional $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$.

3.11. Empleando la fórmula de Green cerciórese de que el área Q del dominio plano D, limitado por el contorno suave a trozos L, pude hallarse con ayuda de cualquiera de los tres integrales siguientes:

$$Q = \oint\limits_L x\,dy, \quad Q = -\oint\limits_L y\,dx, \quad Q = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx.$$

3.12. Utilizando la última fórmula del problema anterior hállese el área de las figuras, limitadas por las curvas siguientes:

a) por el bucle del folio de Decartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

b) por la evoluta de la elipse $x = \frac{a^2}{c}\cos^3 t$, $y = \frac{b^2}{c}\,\mathrm{sen}^3\,t$ (a y b son semiejes de la elipse, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$)

3.13. Aplicando el teorema de Stokes hállese la circulación del vector $a = z^2 i + x^2 j + y^2 k$ por la sección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ producida por el plano $x + y + z = R$ en el sentido positivo respecto al versor k.

3.14. Hállese la circulación del vector $a = z^3 i + x^3 j + y^3 k$ por la sección del hiperboloide $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ producida por el plano $x + y = 0$ en el sentido positivo respecto al versor i. Verifíquese aplicando el teorema de Stokes.

3.15. Hállese la circulación del vector $a = y^2 i + xyj + (x^2 + y^2) k$ a lo largo del contorno cortado en el primer octante del paraboloide $x^2 + y^2 = Rz$ por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = R$, en dirección positiva respecto a la normal exterior del paraboloide. Verifíquese con ayuda del teorema de Stokes.

3. Operador de Hamilton y su aplicación. Todas las operaciones del análisis vectorial pueden ser expresadas aplicando el operador de Hamilton, vector simbólico ∇ (se lee: nabla), definido por la igualdad

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

Empleando las operaciones conocidas de multiplicación del vector por el escalar, del producto escalar y vectorial de dos vectores, hallamos:

$$\operatorname{grad} u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (s, \operatorname{grad} u) = (s, \nabla u) = (s, \nabla)\, u;$$

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\nabla, a);$$

$$\operatorname{rot} a = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\nabla, a].$$

Por analogía con la derivada en dirección de la función escalar $\frac{\partial u}{\partial s}$, se introduce el concepto de derivada en dirección del vector unitario

s de la función vectorial $a(r)$. Precisamente,

$$\frac{\partial a}{\partial s}=(s,\nabla)\,a=i\,(s,\ \operatorname{grad} a_x)+j\,(s,\ \operatorname{grad} a_y)+$$
$$+k\,(s,\ \operatorname{grad} a_z)=\frac{\partial a_x}{\partial s}\,i+\frac{\partial a_y}{\partial s}\,j+\frac{\partial a_z}{\partial s}\,k.$$

Las derivadas en dirección de cualquier vector arbitrario c (no unitario) se diferencian de las derivadas en dirección del vector unitario sólo en que en ellas entra el factor escalar complementario $|c|$:

$$(c,\ \nabla)\,u=(c,\ \operatorname{grad} u),$$

$$(c,\ \nabla)\,a=(c,\ \operatorname{grad} a_x)\,i+(c,\ \operatorname{grad} a_y)\,j+(c,\ \operatorname{grad} a_z)\,k.$$

Con ayuda del operador de Hamilton es cómodo realizar las operaciones diferenciales del análisis vectorial sobre las expresiones complejas (el producto de dos y más funciones escalares, el producto de la función escalar por el vector, los productos escalar y vectorial de los vectores, etc.). Es necesario recordar sólo que es un operador de diferenciación, y no olvidar la regla de diferenciación del producto.

EJEMPLO 4. Hállese el gradiente del producto de dos funciones escalares u y v

◀ Tenemos

$$\operatorname{grad}(uv)=\nabla(uv)=\nabla(\overset{\downarrow}{u}v)+\nabla(u\overset{\downarrow}{v})$$

(la flecha indica la función sobre la cual «actúa» el operador). Pero

$$\nabla(\overset{\downarrow}{u}v)=v\,\nabla u=v\operatorname{grad} u,$$
$$\nabla(u\overset{\downarrow}{v})=u\,\nabla v=u\operatorname{grad} v$$

De este modo,

$$\operatorname{grad} uv=v\operatorname{grad} u+u\operatorname{grad} v. \ ▶$$

EJEMPLO 5. Hállese el rot $[a,\ c]$, donde c es vector constante.

◀ Puesto que según la fórmula conocida del álgebra vectorial $[a,\ [b,\ c]]=(a,\ c)\,b-(a,\ b)\,c$, entonces, considerando la relación $[\nabla,\ [a,\ c]]=0$, tenemos

$$\operatorname{rot}[a,\ c]=[\nabla,\ [a,\ c]]=[\nabla,[\overset{\downarrow}{a},\ c]]+[\nabla,\ [a,\ \overset{\downarrow}{c}]]=(\nabla,\ c)\,\overset{\downarrow}{a}-(\nabla,\ \overset{\downarrow}{a})\,c.$$

Pero $(\nabla,\ c)\,\overset{\downarrow}{a}=(c,\ \nabla)\,\overset{\downarrow}{a}$, lo que es la derivada del vector a en dirección del vector c. Luego,

$$(\nabla,\ a)\,c=c\,(\nabla,\ a)=c\operatorname{div} a.$$

De este modo, $\operatorname{rot}[a,\ c]=(c,\ \nabla)\,a-c\operatorname{div} a.$

Realícense las siguientes operaciones diferenciales (aquí y más abajo, en los problemas de este párrafo, c es un vector constante, a y b son vectores variables):

3.16. Hállense div (cu) y div (au).

3.17.** Hállense grad $(a,\ c)$ y grad $(a,\ b)$.

3.18. Hállense div $[a, c]$ y div $[a, b]$.

3.19*. Hállense rot (cu), rot (au) y rot $[a, b]$.

4. Operaciones diferenciales de segundo orden. Se puede realizar cinco operaciones diferenciales de segundo orden:

1) div grad $u = (\nabla, \nabla)\, u = \nabla^2 u = \nabla u$ (laplaciano de la función);

2) rot grad $u = [\nabla, \nabla]\, u$;

3) grad div $a = \nabla\,(\nabla, a)$;

4) div rot $a = (\nabla, [\nabla, a])$;

5) rot rot $a = [\nabla, [\nabla, a]]$.

Además, se puede aplicar la operación ∇^2 también a los campos vectoriales, es decir, analizar la operación $\nabla^2 a$.

Las operaciones segunda y cuarta llevan al cero:

$$\text{rot grad } u = [\nabla, \nabla]\, u \equiv 0, \quad \text{div rot } a = (\nabla, [\nabla, a]) \equiv 0.$$

Esto deriva del sentido vectorial del operador ∇: en el primer caso tenemos formalmente el producto vectorial de dos vectores colineales, en el segundo, el producto mixto de vectores coplanares.

3.20. Obténganse las expresiones para

$$\text{div grad } u = \nabla^2 u,$$
$$\text{grad div } a = \nabla\,(\nabla, a),$$
$$\text{rot rot } a = [\nabla\,[\nabla, a]],$$
$$\nabla^2 a = \nabla^2 a_x i + \nabla^2 a_y j + \nabla^2 a_z k$$

a partir de las derivadas de los campos escalar o vectorial.

3.21. Hállese grad div a, si $a = x^3 i + y^3 j + z^3 k$.

3.22. Hállese rot rot a, si $a = xy^2 i + yz^2 j + zx^2 k$.

3.23. Hállese $\nabla^2 a$, si $a = (y^2 + z^2)\, xi + (x^2 + z^2)\, yj + (x^2 + y^2)\, zk$.

3.24. Hállese div grad (uv).

3.25. Hállese grad div (uc) y grad div (ua) (c es un vector constante, a es un vector variable).

3.26. Hállese rot rot (uc).

§ 4. Tipos especiales de campos vectoriales

1. Campo vectorial potencial. El campo vectorial $a = a(r)$ se llama *potencial* si el vector del campo a es el gradiente de una función escalar $u = u(P)$:

$$a(r) = \text{grad } u(P). \tag{1}$$

La función $u(P)$ se denomina, en este caso, *potencial* del campo vectorial. La condición necesaria y suficiente de potencialidad del campo

$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ dos veces diferenciable en la región simplemente conexa, es la igualdad a cero del rotor de este campo:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \equiv 0. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. Verifíquese que el rotor del campo vectorial tridimensional $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$, sea idénticamente igual a cero (la función $u(P)$ se supone dos veces diferenciable).

◀ Ya que $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k}$, entonces, tomando en consideración la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden, obtenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \boldsymbol{i} + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \boldsymbol{k} \equiv 0. \text{ ▶}$$

En el punto 4 del párrafo anterior esta igualdad fue obtenida utilizando las propiedades del vector simbólico nabla.

El campo potencial posee las siguientes propiedades.

1. En la región donde el potencial del campo es continuo la integral lineal del vector del campo, tomada entre dos puntos del campo, no depende del camino de la integración y es igual a la diferencia de valores del potencial del campo al final y al principio del camino de integración

$$\int_A^B (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_A^B (\operatorname{grad} u, d\boldsymbol{r}) = \int_A^B du = u(B) - u(A) \tag{3}$$

(se aplica la fórmula $(\operatorname{grad} u, d\boldsymbol{r}) = du$ fácil de comprobar).

2. La circulación del vector del campo a lo largo de cualquier contorno cerrado, situado por completo en la región de continuidad del campo, es igual a cero.

3. Si el campo $\boldsymbol{a}$ es potencial, entonces el potencial del campo $u(P)$ en un punto arbitrario P puede ser calculado según la fórmula (3):

$$u(P) = \int_A^P (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C, \tag{4}$$

además $C = u(A)$, lo que es fácil de obtener sustituyendo en (4) el punto fijo A, en vez del punto variable P.

Para calcular la integral (4) se puede escoger cualquier camino: como camino se escoge simplemente una quebrada, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas, que une los puntos A y P. Como punto A es cómodo tomar el origen de coordenadas (si este está en la región de continuidad del campo).

Ejemplo 2. Hállese el potencial del campo $\boldsymbol{a} = 2xy\boldsymbol{i} + (x^2 - 2yz)\boldsymbol{j} - y^2\boldsymbol{k}$.

◀ Cerciorémonos de que el campo es potencial

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z} = -2y, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} = 2x.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0.$$

Como camino de integración tomemos la quebrada $OABP$, donde $O(0, 0, 0)$, $A(X, 0, 0)$, $B(X, Y, 0)$, $P(X, Y, Z)$. Hallamos

$$u(X, Y, Z) = \int\limits_{OABP} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C = \int\limits_{0}^{A} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \int\limits_{A}^{B} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \int\limits_{B}^{P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C,$$

$$(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = 2xy\,dx + (x^2 - 2yz)\,dy - y^2\,dz.$$

Puesto que en OA tenemos $y = z = 0$, $dy = dz = 0$, $0 \leqslant x \leqslant X$, entonces

$$\int\limits_{0}^{A} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = 0.$$

Análogamente en AB tenemos $x = X$, $dx = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, $0 \leqslant y \leqslant Y$, por eso

$$\int\limits_{A}^{B} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{0}^{Y} X^2\,dy = X^2 Y.$$

En BP tenemos $x = X$, $y = Y$, $dx = dy = 0$, $0 \leqslant z \leqslant Z$, lo que significa

$$\int\limits_{B}^{P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -\int\limits_{0}^{Z} Y^2\,dz = -Y^2 Z.$$

Así pues, $u(X, Y, Z) = X^2 Y - Y^2 Z + C$. Volviendo a las variables x, y, z, obtenemos

$$u(P) = x^2 y - y^2 z + C. \ ▶$$

OBSERVACIÓN. El método expuesto para determinar el potencial del campo se emplea para resolver los problemas del análisis matemático equivalentes al problema examinado, tales como la reconstrucción de una función de dos, tres y n variables a partir de sus diferenciales totales, así como para integrar las ecuaciones diferenciales en diferenciales totales.

Hállense los potenciales de los siguientes campos planos y tridimensionales:

4.1. $a = (3x^2y - y^3)\,\boldsymbol{i} + (x^3 - 3xy^2)\,\boldsymbol{j}$.

4.2. $a = \dfrac{\operatorname{sen} 2x \cos 2y \cdot \boldsymbol{i} + \cos 2x \operatorname{sen} 2y \cdot \boldsymbol{j}}{\sqrt{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \cos^2 y}}$.

4.3. $a = (yz - xy)\,\boldsymbol{i} + \left(xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2\right)\boldsymbol{j} + (xy + y^2z)\,\boldsymbol{k}$.

4.4*. $a = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{z^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)\boldsymbol{k}$.

4.5*. $a = \left(\dfrac{z}{y^2} - \dfrac{y}{z^2} - \dfrac{2yz}{x^3}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{x}{z^2} - \dfrac{2xz}{y^3}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2xy}{z^3}\right)\boldsymbol{k}$.

4.6.** Demuéstrese que en el campo vectorial potencial siempre continuo las líneas vectoriales no pueden ser cerradas.

Si en el campo potencial plano existen puntos en los cuales el campo pierde su propiedad de continuidad (los así llamados puntos *singulares*), entonces la circulación a lo largo del contorno cerrado que rodea tal punto puede ser distinta de cero. En este caso la circulación a lo largo del contorno que recorre un punto singular dado una vez, en sentido positivo, no depende de la forma del contorno y se llama *constante cíclica* respecto al punto singular dado.

Propiedades análogas las tienen los campos tridimensionales con líneas singulares a lo largo de las cuales el campo pierde su propiedad de continuidad.

4.7. Cerciórese de que el campo $a = \dfrac{x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}}{x^2 + y^2}$ es potencial. Determínense su punto singular y su constante cíclica.

4.8*. Demuéstrese la propiedad formulada más arriba de que la circulación a lo largo del contorno cerrado, que rodea el punto singular, no depende de la forma del contorno.

4.9*. Valiéndose de la fórmula (4) para determinar el potencial del campo, cerciórese de que el potencial del campo plano, que contiene puntos singulares, es una función multiforme.

2. Campo solenoidal. Un campo vectorial $a = a(r)$ se llama *solenoidal*, si la divergencia de este campo es igual a cero: $\operatorname{div} a \equiv 0$.

Para un campo tridimensional esta condición puede anotarse así:

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv 0. \tag{5}$$

En tal campo, en virtud del teorema de Gauss—Ostrogradski, el flujo del vector del campo a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero. Puede haber una sola exclusión cuando en tal campo existen puntos singulares (en los cuales el vector del campo no está definido y la divergencia del campo, si se determina en este punto con ayuda de la fórmula (1) del § 3, es distinta de cero). En este caso el flujo a través de la superficie cerrada puede ser diferente de cero, pero tendrá el mismo valor para todas las superficies cerradas que rodean el grupo dado de puntos singulares.

EJEMPLO 3. Demuéstrese que para todo campo vectorial tridimensional dos veces diferenciable $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ el campo de rotores es solenoidal.

◀ Tenemos

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Considerando la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden, obtenemos

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = 0. \ ▶$$

En el punto 4 del párrafo antecedente esta relación ha sido demostrada con ayuda del operador nabla.

4.10. Demuéstrese que en el campo solenoidal el flujo del vector a través de la superficie cerrada, que no contiene dentro puntos singulares, es igual a cero.

Verifíquese si son solenoidales los campos siguientes:

4.11. $\boldsymbol{a} = (x^2y + y^3)\boldsymbol{i} + (x^3 - xy^2)\boldsymbol{j}$.

4.12. $\boldsymbol{a} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} - (x^2 + y^2)z\boldsymbol{k}$.

4.13. $\boldsymbol{a} = \frac{x}{yz}\boldsymbol{i} + \frac{y}{xz}\boldsymbol{j} - \frac{(x+y)\ln z}{xy}\boldsymbol{k}$

4.14. $\boldsymbol{a} = \frac{x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{(x^2 - y^2)z\boldsymbol{k}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.

4.15*. Demuéstrese que en el campo solenoidal el flujo del vector del campo a través de la sección transversal de cualquier tubo vectorial (que está determinado en el mismo sentido) tiene valor constante.

3. Campo laplaciano (o armónico). El campo vectorial se llama *laplaciano* (*o armónico*) si es al mismo tiempo potencial y solenoidal, es decir, si

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0. \tag{6}$$

EJEMPLO 4. Demuéstrese que el potencial u del campo laplaciano bidimensional o tridimensional es *una función armónica* de

dos o tres variables $\left(\text{es decir, } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ ó } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right.$
$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \right)$

◀ En efecto, tenemos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

para dos variables,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

para tres variables ▶

Ejemplo 5. Muéstrese que el potencial del campo de las fuerzas de gravitación, que surge en el espacio que rodea cierta masa puntual, es igual a k/r (k es constante) y que el campo de las fuerzas de gravitación es laplaciano.

◀ Coloquemos el origen de coordenadas en el centro de atracción. Entonces

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \frac{k}{r} = k \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -k \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{k\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Pero éste es un vector de la fuerza de atracción. Efectivamente, está dirigido hacia el centro de atracción, puesto que $\boldsymbol{r}/r$ es un vector unitario del radio vector del punto $P(\boldsymbol{r})$ dirigido hacia el origen de coordenadas y su módulo es igual a k/r^2, es decir, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de atracción. Mostremos que $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = -k \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$. Tenemos

$$a_x = -\frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = -k \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = -k \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{r^5}.$$

Análogamente

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = -k \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -k \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^5},$$

y por eso,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = -\frac{k}{r^5} ((y^2 + z^2 - 2x^2) +$$
$$+ (x^2 + z^2 - 2y^2) + (x^2 + y^2 - 2z^2)) \equiv 0.$$

Así pues, el campo de las fuerzas de gravitación es laplaciano. ▶

4.16. Demuéstrese que el campo vectorial plano, de cuyo potencial sirve la función $u = \ln r$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$), es laplaciano.

4.17*. Para las funciones armónicas u y w en la región G demuéstrense las siguientes *fórmulas de Green:*

a) $$\oint\!\!\!\oint_S u\,\frac{\partial w}{\partial n}\,d\sigma=\iiint_G (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} w)\,dv$$

(la primera fórmula de Green),

b) $$\oint\!\!\!\oint_S \left(u\,\frac{\partial w}{\partial n}-w\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=0$$

(la segunda fórmula de Green),

c) $$\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial (uw)}{\partial n}\,d\sigma=2\iiint_G (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} w)\,dv$$

(la tercera fórmula de Green).

4.18. Verifíquese si son armónicas las siguientes funciones:

a) $u=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

b) $u=r-x=\sqrt{x^2+y^2}-x$;

c) $u=Ax+By+C$;

d) $u=Ax^2+2Bxy+Cy^2$;

e) $u=Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3$;

f) $u=Ax+By+Cz+D$;

g) $u=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+$
$+2a_{23}yz$;

h) $u=a_{111}x^3+a_{222}y^3+a_{333}z^3+3a_{112}x^2y+3a_{113}x^2z+$
$+3a_{122}xy^2+3a_{223}y^2z+3a_{133}xz^2+3a_{233}yz^2+6a_{123}xyz.$

§ 5. Aplicación de las coordenadas curvilíneas al análisis vectorial

1. Coordenadas curvilíneas. Relaciones principales. En el espacio el sistema de coordenadas está definido, si a todo punto P están puestos en correspondencia tres números q_1, q_2, q_3, además, a cada tres números distintos corresponden distintos puntos del espacio. Los números q_1, q_2, q_3 se llaman *coordenadas* (o *coordenadas curvilíneas*) del punto $P=P(q_1, q_2, q_3)$. Son de mayor aplicación los sistemas de coordenadas siguientes:

1) Sistema de coordenadas rectangular cartesiano. Aquí $q_1=x$ es la abscisa del punto P, $q_2=y$ es la ordenada y $q_3=z$ es z-coordenada.

2) *Sistema de coordenadas cilíndrico.* En este sistema por q_1 se toma la distancia r del punto P al eje z, $q_1 = r$ $(0 \leqslant r < \infty)$, $q_2 = \varphi$ es el ángulo formado por la proyección del radio vector OP sobre el plano Oxy con sentido positivo del eje Ox $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ y $q_3 = z$ es z-coordenada del punto P.

En este caso las coordenadas cilíndricas están relacionadas con las coordenadas rectangulares cartesianas mediante las fórmulas

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad z = z$$

y recíprocamente

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

3) *Sistema esférico de coordenadas.* Aquí $q_1 = r$ es la longitud del radio vector del punto P $(0 \leqslant r < \infty)$, $q_2 = \theta$ es el ángulo entre el sentido positivo del eje Oz y el radio vector OP del punto P $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$[1], $q_3 = \varphi$ es ángulo entre el sentido positivo del eje Ox y la proyección del radio vector OP sobre el plano Oxy $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Tienen lugar las fórmulas:

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$
$$z = r\cos\theta$$

y recíprocamente

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

La línea a lo largo de la cual varía sólo una coordenada q_1 se llama *q_1-línea coordenada* y el vector unitario tangente a esta línea y dirigido en el sentido en que crece q_1, se llama *versor unitario coordenado* $\boldsymbol{e}_{q_1}$ en el punto $P(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$. De modo análogo se definen q_2- y q_3- líneas y los versores unitarios $\boldsymbol{e}_{q_2}$ y $\boldsymbol{e}_{q_3}$.

Si los vectores $\boldsymbol{e}_{q_1}, \boldsymbol{e}_{q_2}, \boldsymbol{e}_{q_3}$, son ortogonales dos a dos en todo punto del espacio, entonces el correspondiente sistema de coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 se denomina *ortogonal*.

Supongamos que $P(q_1, q_2, q_3)$ es un punto arbitrario del espacio, $P_1(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)$ es un punto situado en la q_1-línea del punto P y $|\overset{\frown}{PP_1}|$ es la longitud del arco $\overset{\frown}{PP_1}$. Entonces el número

$$L_1 = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{|\overset{\frown}{PP_1}|}{\Delta q_1}$$

[1] A veces por la coordenada q_2 del sistema esférico se toma el ángulo entre el radio vector OP y el plano Oxy (véase el § 2, cap. 8).

lleva el nombre de *coeficiente de Lamé* de la coordenada q_1 en el punto P. De modo análogo se determinan los coeficientes de Lamé L_2 y L_3 de las coordenadas q_2 y q_3.

Si el punto $P(x, y, z)$ tiene las coordenadas curvilíneas $q_1 = q_1(x, y, z)$, $q_2 = q_2(x, y, z)$, $q_3 = q_3(x, y, z)$, las diferenciales de los radio vectores dr_{q_ν} de las líneas coordenadas y las diferenciales de sus arcos ds_{q_ν} se definen con ayuda de las igualdades

$$dr_{q_\nu} = i\frac{\partial x}{\partial q_\nu}dq_\nu + j\frac{\partial y}{\partial q_\nu}dq_\nu + k\frac{\partial z}{\partial q_\nu}dq_\nu = L_\nu e_{q_\nu}dq_\nu,$$

$$ds_{q_\nu} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\nu}\right)^2}\, dq_\nu = L_\nu\, dq_\nu,$$

($\nu = 1, 2, 3$), donde L_ν es el coeficiente de Lamé

El conjunto de puntos $P(q_1, q_2, q_3)$ para los cuales una de las coordenadas es constante, se llama *superficie coordenada*.

Las diferenciales de las áreas de las superficies coordenadas se determinan por las fórmulas

$$d\sigma_{q_1} = L_2L_3\, dq_2\, dq_3, \quad d\sigma_{q_2} = L_1L_3\, dq_1\, dq_3,$$
$$d\sigma_{q_3} = L_1L_2\, dq_1\, dq_2$$

y la diferencial de volumen

$$dv = L_1L_2L_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

Determínese el tipo de líneas coordenadas y las superficies coordenadas y constrúyanse éstas en un punto arbitrario para los casos siguientes:

5.1. Para el sistema rectangular cartesiano de coordenadas.

5.2. Para el sistema cilíndrico de coordenadas.

5.3. Para el sistema esférico de coordenadas.

Calcúlense los coeficientes de Lamé:

5.4. En el sistema rectangular cartesiano de coordenadas.

5.5. En el sistema cilíndrico de coordenadas.

5.6. En el sistema esférico de coordenadas.

Hállense las diferenciales de los arcos de las líneas coordenadas, las diferenciales de las áreas de las superficies coordenadas y la diferencial de volumen:

5.7. En el sistema rectangular cartesiano de coordenadas.

5.8. En el sistema cilíndrico de coordenadas.

5.9 En el sistema esférico de coordenadas.

2. Operaciones diferenciales del análisis vectorial en las coordenadas curvilíneas. Las operaciones mencionadas se definen por las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{L_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}e_{q_1} + \frac{1}{L_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}e_{q_2} + \frac{1}{L_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}e_{q_3},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_1L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(L_2L_3a_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(L_1L_3a_{q_2}) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}(L_1L_2a_{q_3})\right),$$

$$\text{donde } \boldsymbol{a} = a_{q_1}\boldsymbol{e}_{q_1} + a_{q_2}\boldsymbol{e}_{q_2} + a_{q_3}\boldsymbol{e}_{q_3}),$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(L_3a_{q_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3}(L_2a_{q_2})\right)e_{q_1} +$$
$$+ \frac{1}{L_1L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}(L_1a_{q_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1}(L_3a_{q_3})\right)e_{q_2} +$$
$$+ \frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(L_2a_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2}(L_1a_{q_1})\right)\boldsymbol{e}_{q_3},$$

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{1}{L_1L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{L_2L_3}{L_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{L_1L_3}{L_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{L_1L_2}{L_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right).$$

Para las coordenadas cilíndricas r, φ, y z hállense las expresiones:

5.10. grad u. **5.11.** Δu. **5.12** div. $\boldsymbol{a}$. **5.13.** rot $\boldsymbol{a}$

Para las coordenadas esféricas r, θ, φ hállense las expresiones:

5.14. grad u. **5.15.** Δu. **5.16.** div $\boldsymbol{a}$. **5.17.** rot $\boldsymbol{a}$.

Ejemplo 1. Pásese a las coordenadas cilíndricas en la expresión del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ y hállense div $\boldsymbol{a}$ y rot $\boldsymbol{a}$.

◀ Puesto que en el caso dado $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = \boldsymbol{r}$, entonces

$$\boldsymbol{a} = \frac{r\boldsymbol{e}_r - z\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

Por las fórmulas obtenidas al resolver los problemas 5.12 y 5.13, hallamos:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{2r(r^2+z^2) - r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} - r\frac{(r^2+z^2)-z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{2z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z = -\frac{2rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_\varphi. \blacktriangleright$$

5.18. Dedúzcanse las fórmulas:

a) $\operatorname{div} \boldsymbol{e}_\nu = \dfrac{1}{L_1 L_2 L_3}\dfrac{\partial (L_j L_k)}{\partial q_\nu}$;

b) $\operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\nu = \dfrac{1}{L_\nu}[\operatorname{grad} L_\nu, \boldsymbol{e}_\nu]$.

5.19. Empleando las fórmulas deducidas al resolver el problema 5.18, hállense $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ y $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ para los vectores coordenados unitarios del sistema cilíndrico de coordenadas:

a) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r$; b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi$; c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_z$.

5.20. Un problema, análogo al 5.19, para el sistema esférico de coordenadas:

a) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r$; b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\theta$; c) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi$.

5.21. Hállense todas las funciones armónicas del tipo:

a) $u = f(r)$; b) $u = f(\varphi)$; c) $u = f(z)$

(r, φ, z son coordenadas cilíndricas).

5.22. Hállense todas las funciones armónicas del tipo:

a) $u = f(r)$; b) $u = f(\theta)$; c) $u = f(\varphi)$

(r, θ, φ son coordenadas esféricas).

5.23. Pásese a las coordenadas esféricas en la expresión del campo escalar $u = \dfrac{2xy(z^2 - x^2 - y^2)}{x^2+y^2}$ y hállense u, $\operatorname{grad} u$ y $\nabla^2 u$.

5.24. Pásese a las coordenadas cilíndricas en la expresión del campo escalar $u = \dfrac{2xyz + (x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y hállense u, $\operatorname{grad} u$ y $\nabla^2 u$.

5.25. Pásese a las coordenadas esféricas en la expresión del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ y hállense $\boldsymbol{a}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ y $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

5.26. Pásese a las coordenadas cilíndricas en la expresión del campo vectorial $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - z\sqrt{x^2+y^2}\,\boldsymbol{k}$ y hállense $\boldsymbol{a}$, div $\boldsymbol{a}$ y rot $\boldsymbol{a}$.

3. Campos escalares centrales, axiales y simétricos al eje. El campo escalar se llama *central* si la función del campo $u = u(P)$ depende sólo de la distancia entre el punto P del campo y cierto punto constante, su centro. Si el origen de coordenadas se coloca en el centro del campo, entonces la función u toma la forma

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Al estudiar tales campos es razonable valerse de las coordenadas esféricas. Las superficies de nivel de tal campo serán esferas con el centro en el centro del campo y por eso estos campos a menudo llevan el nombre de *esféricos*.

El campo escalar se llama *axial* si la función del campo $u(P)$ depende sólo de la distancia entre el punto del campo P y cierto eje. Si este eje se toma por el eje Oz y la distancia del punto P al eje se designa con r, entonces la función u toma la forma

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Al investigar tales campos es conveniente aplicar las coordenadas cilíndricas. Las superficies de nivel de estos campos son cilindros circulares, cuyos ejes coinciden con el eje del campo. Estos campos también se llaman *cilíndricos*.

Si la función $u(P)$ del campo escalar toma los mismos valores en los puntos correspondientes de todos los semiplanos que pasan por la misma recta (eje del campo), este campo se llama *simétrico al eje*. Las superficies de nivel de tal campo son superficies de revolución, cuyos ejes coinciden con el eje del campo. Si el eje del campo se toma por eje Oz, al investigar tales campos es conveniente aplicar las coordenadas cilíndricas o esféricas. La función $u = u(P)$ puede ser representada, en este caso, en forma de

$$u = u(r, \theta)$$

(en coordenadas esféricas), o

$$u = u(r, z)$$

(en coordenadas cilíndricas).

Hállense los gradientes y laplacianos de los campos siguientes:

5.27. $u = f(r)$, $\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5.28. $u = f(r)$, $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$.

5.29. $u = F(r, \theta)$ (r, θ son coordenadas esféricas).

5.30. $u = F(r, z)$ (r, z son coordenadas cilíndricas).

OBSERVACIÓN. Los gradientes de los campos centrales, axiales y simétricos al eje forman campos vectoriales del mismo carácter: campos centrales, axiales y simétricos al eje.

RESPUESTAS

1.1. Las líneas de nivel son parábolas $y^2 = C - x$. **1.2.** Las líneas de nivel son hipérbolas $xy = C$ (para $C = 0$ es un conjunto de ejes coordenados). **1.3.** Las líneas de nivel son rectas $y = Cx$. **1.4.** Las superficies de nivel son planos paralelos $x + y + z = C$. **1.5.** Las superficies de nivel son hiperboloides de una hoja y de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = \pm C^2$ (para $C = 0$ es un cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$). **1.6.** Las superficies de nivel son paraboloides de revolución $x^2 + y^2 = z + C$. **1.7.** Las hipersuperficies de nivel son planos paralelos cuadridimensionales $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = C$. **1.8.** Las hipersuperficies de nivel son esferas cuadridimensionales $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = C^2$. **1.9.** Circunferencias $x^2 + y^2 = C^2$. **1.10.** Hiperboloides $xy = C$ (para $C = 0$ es un conjunto de ejes coordenadas). **1.11.** Parábolas $y^2 = 2(x + C)$. **1.12.** Rectas $\dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$. **1.13.** Circunferencias que son secciones de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ por los planos $c_x x + c_y y + c_z z = C_2$ perpendiculares al vector $\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}$. **1.14.** Líneas de intersección de los cilindros hiperbólicos $y^2 - x^2 = C_1$ con cilindros idénticos $z^2 - x^2 = C_2$. **1.15.** Circunferencias que son líneas de intersección de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ con los planos $x + y + z = C_2$. **1.16.** Rectas del espacio cuadridimensional perpendiculares al eje Ox_3 y rectas que lo intersecan: $\dfrac{x_1}{l_1} = \dfrac{x_2}{l_2} = \dfrac{x_4}{l_4}$; $x_3 = C$. **1.17.** a) Superficies cónicas con vértices en el origen de coordenadas de cuyas directrices sirven las curvas cerradas dadas; b) superficies toroidales generadas por las circunferencias con centros en la recta $x = y = z$ situados en los planos $x + y + z = C$ de cuyas secciones sirven las curvas cerradas dadas. **1.21.** $13/5$.

1.22. $4/\sqrt{5}$. **1.23.** $14/3$. **1.24.** $\cos\varphi = -4/\sqrt{41}$. **1.25.** $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 2\sqrt{6}$, $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$. **1.26.** $\dfrac{1}{\sqrt{17}}(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})$. **1.27.** $P(3, 3, -3)$.

1.30. a) $xy = C$; b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ x^2 - z^2 = C_2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2/x. \end{cases}$

2.1. $\dfrac{9}{64}k\pi a^3$. **2.2.** $2k\pi a\sqrt{2a}$. **2.3.** $k\pi a^2$. **2.4.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **2.5.** $\dfrac{ka\sqrt{3}}{2}$. **2.6.** $F = -\dfrac{Mmc}{(a^2 + c^2)^{3/2}}$. **2.7.** αr^2. **2.8.** $\dfrac{4}{3}\beta r^4$. **2.9.** $\dfrac{8ka^3}{15}(\sqrt{2} + 1)$. **2.10.** $\dfrac{\pi a^4\sqrt{2}}{2}$. **2.11.** $\dfrac{k\pi a^3}{3}(3\sqrt{3} - 1)$. **2.12.** $\dfrac{27}{2}ka^3$. **2.13.** $\dfrac{\pi k}{4}a^2\sqrt{a} \times (3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$. **2.14.** πab. **2.15.** a) 2,3; b) 0,7; c) 0,7; d) 1.

e) 1. 2.16. $2\pi R^3$. 2.17. 91/60. 2.18. $2\pi^2 a^2 h$. 2.19. $\frac{2\pi R^3}{3}$. ◀ $z=R-x-y$, $x^2+y^2+(R-x-y)^2=R^2$ ó $x^2+xy+y^2=R(x+y)$. Ponemos $y=tx$. Entonces tenemos: $x=\frac{R(1+t)}{1+t+t^2}$ $y=\frac{R(t+t^2)}{1+t+t^2}=R-\frac{R}{1+t+t^2}$,

$z=-\frac{Rt}{1+t+t^2}$. Al valor $t=0$ corresponde el punto $A(R, 0, 0)$, a los valores $t=\pm\infty$, el punto $B(0, R, 0)$; al valor $t=-1$, el punto $C(0, 0, R)$. Al recorrido en el sentido positivo respecto al eje Oz corresponde el recorrido $BCAB$, es decir, la variación de t desde $-\infty$ a través -1 y 0 hasta $+\infty$.

Luego, $dx=-\frac{R(t^2+2t)}{(1+t+t^2)^2}\,dt$, $dy=\frac{R(2t+1)}{(1+t+t^2)^2}\,dt$, $dz=\frac{R(t^2-1)}{(1+t+t^2)^2}\,dt$.

Obtenemos $z\,dx+x\,dy+y\,dz=\frac{R^2(1+2t+3t^2+2t^3+t^4)}{(1+t+t^2)^3}\,dt=\frac{R^2\,dt}{1+t+t^2}$,

de donde $\oint_C (a, dr)=R^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t+t^2}=R^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}=$

$=\frac{2R^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$. ▶ 2.20. $2\pi a^2$. 2.21. $\left(2\sqrt{2}-\frac{7}{3}\right)a^3$.

2.22. $2r^2$. 2.23. -4π. 2.24. $\frac{\pi r^4}{2}$. 2.25. $-1/3$. 2.26. $\frac{\pi R^2 H}{3}$. 2.27. $\frac{\pi R^2 H}{4}$.

2.28. $\frac{\pi R^2 H^2}{3}$. 2.29. $\frac{\pi R^4}{8}$. 2.30. 0. 2.31. πR^4. 2.32. $-\frac{R^2 H}{3}$. 2.33. 0.

3.2. a^5. 3.3. $4\pi R^2$. 3.4. $-\pi R^3$. ◉ Ciérrese la superficie, añadiendo la base del segmento parabólico y calcúlese la parte del flujo que le corresponde. 3.5. Si $a=a_x i+a_y j$ entonces, el flujo del vector a a través del arco $\overset{\frown}{AB}$ se determina por la fórmula $\int_{\overset{\frown}{AB}}(a, n)\,ds=\int_{\overset{\frown}{AB}}a_x\,dx-a_y\,dy$. El teorema de Gauss—Ostrogradski para el campo plano es: $\oint_L (a, n)\,ds=\oint_L a_x\,dy-a_y\,dx=$ $=\iint_Q\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)dx\,dy$. 3.6. $\oint_L a_x\,dx+a_y\,dy=\iint_Q\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy$ (fórmula de Green). ◉ Póngase en la fórmula anterior (problema 3.5) $a_x=a_y$, $a_y=-a_x$. 3.7. $\frac{R^5}{3}$. 3.8. $\frac{\pi R^4 H}{2}$.

3.9. rot $v=2\omega$. ◉ La velocidad v del punto $P(r)$ que gira con una velocidad angular ω alrededor del eje que pasa por el origen de coordenadas, es igual a $[\omega, r]$. 3.12. a) a^2. ◉ Páseso a la forma paramétrica poniendo $y=tx$; al bucle corresponde la variación de t desde 0 hasta $+\infty$. b) $\frac{3}{8}\pi\frac{a^2b^2}{c^2}$. **3.13.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **3.14.** $\frac{3}{2}\pi R^4$.

3.15. $\frac{R^3}{3}$. **3.16.** $\operatorname{div}(\boldsymbol{c}u)=(\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} u)$ $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}, u)=u\operatorname{div}\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}, \operatorname{grad} u)$.

3.17. $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})=[\boldsymbol{c}, \operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+(\boldsymbol{c}, \nabla)\boldsymbol{a}$, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=[\boldsymbol{b}, \operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+$ $+[\boldsymbol{a}, \operatorname{rot}\boldsymbol{b}]+(\boldsymbol{b}, \nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}, \nabla)\boldsymbol{b}$. ▶ Previamente hállese $[\boldsymbol{c}, \operatorname{rot}\boldsymbol{a}]$. Tenemos $[\boldsymbol{c}, \operatorname{rot}\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c}, [\nabla, \boldsymbol{a}]]=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\nabla-(\boldsymbol{c}, \nabla)\boldsymbol{a}=\nabla(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})-(\boldsymbol{c}, \nabla)\boldsymbol{a}$.

De aquí, $\nabla(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})=[\boldsymbol{c}, \operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+(\boldsymbol{c}, \nabla)\boldsymbol{a}$; luego, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b})+$ $+\nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{a})$ y empleemos el resultado anterior. ▶ **3.18.** $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]=$ $=(\boldsymbol{c}, \operatorname{rot}\boldsymbol{a})$, $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{b}, \operatorname{rot}\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}, \operatorname{rot}\boldsymbol{b})$. **3.19.** $\operatorname{rot}(\boldsymbol{c}u)=$ $=[\operatorname{grad} u, \boldsymbol{c}]$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}u)=u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+[\operatorname{grad} u, \boldsymbol{a}]$, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{b}, \nabla)\boldsymbol{a}-$ $-(\boldsymbol{a}, \nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. ● Véase la solución del ejemplo 5.

3.20. $\operatorname{div}\operatorname{grad} u=\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\nabla(\nabla, \boldsymbol{a})=$ $=\frac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{a})}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{a})}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{a})}{\partial z}\boldsymbol{k}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=[\nabla[\nabla, \boldsymbol{a}]]=$ $=\nabla(\nabla, \boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\nabla^2\boldsymbol{a}$, $\nabla^2\boldsymbol{a}=\nabla^2 a_x\boldsymbol{i}+\nabla^2 a_y\boldsymbol{j}+\nabla^2 a_z\boldsymbol{k}$. **3.21.** $6\boldsymbol{r}=6(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$. **3.22.** 0. **3.23.** $4\boldsymbol{r}=4(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$. **3.24.** $u\operatorname{div}\operatorname{grad} v+2(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)+v\operatorname{div}\operatorname{grad} u$. **3.25.** $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})=$ $=(\boldsymbol{c}, \nabla)\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{a}\operatorname{grad} u+[\operatorname{grad} u,$ $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+(\operatorname{grad} u, \nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}, \nabla)\operatorname{grad} u$. **3.26.** $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c}, \nabla)\operatorname{grad} u-$ $-\boldsymbol{c}\nabla^2 u$.

4.1. x^3y-xy^3+C. **4.2.** $2\sqrt{\cos^2 x\operatorname{sen}^2 y+\operatorname{sen}^2 x\cos^2 y}+C$. **4.3.** $xyz-\frac{x^2y}{2}+\frac{y^2z^2}{2}+C$. **4.4.** $\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+C$. ● Tómese por punto inicial A el punto $(1, 1, 1)$ ó cualquier otro punto no situado en los ejes de coordenadas. **4.5.** $\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}-\frac{xy}{z^2}+C$. ● Véase la indicación al problema anterior.

4.6. ◀ Si en todo punto del campo potencial continuo pudiesen existir líneas vectoriales cerradas, entonces la circulación a lo largo de tal línea no podría ser igual a cero, ya que el producto $(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$ a lo largo de toda la línea conservaría un signo constante y por eso $\oint (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})\neq$ $\neq 0$. ▶ **4.7.** El punto singular es $O(0, 0)$, la constante cíclica es igual a 2π. **4.8.** ● Tómense dos contornos arbitrarios cerrados que cercan el punto singular dado: AMA y BNB. Únanse los puntos M y N mediante el segmento de una recta y aplíquese al contorno compuesto $AMNBNMA$ la fórmula de Green. **4.9.** ● Al determinar el potencial utilícense los contornos que recorren los puntos singulares varias veces y en distintas direcciones. **4.15.** ● Aplíquese el teorema de Gauss—Ostrogradski y téngase en consideración que en la superficie lateral del tubo $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})=0$. **4.17.** ● Aplíquese el teorema de Gauss—Ostrogradski y considérese que para las funciones armónicas $\nabla^2 u=0$. **4.18.** a) No; b) no; c) sí; d) sólo para $A+C=0$; e) sólo si $A+C=$ $=B+D=0$; f) sí; g) sólo cuando $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$; h) sólo

si $a_{111}+a_{122}+a_{133}=a_{112}+a_{222}+a_{233}=$
$=a_{113}+a_{223}+a_{333}=0$. **5.1.** Líneas x: $\frac{x}{1}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{0}$; líneas y: $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-z_0}{0}$; líneas z: $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z}{1}$.
5.2. líneas r: $\varphi=\varphi_0$, $z=z_0$ (los rayos que parten de los puntos del eje Oz y que se encuentran en los planos horizontales); líneas φ: $r=r_0$, $z=z_0$ (las circunferencias con centros en el eje Oz y radio r_0 las cuales se encuentran en los planos $z=z_0$); líneas z: $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$ (las rectas paralelas al eje Oz). **5.3.** Líneas r: $\theta=\theta_0$, $\varphi=\varphi_0$ (los rayos que parten del origen de coordenadas), líneas θ: $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$ (las semicircunferencias de radio r_0 y con centro en el origen de coordenadas, las cuales se encuentran en los semiplanos $\varphi=\varphi_0$ que pasan por el eje Oz, es decir, meridianos). Líneas φ: $r=r_0$, $\theta=\theta_0$ (las circunferencias de radio r_0 sen θ_0 y con centro en el eje O_z, las cuales se encuentran en los planos horizontales, es decir, las paralelas). **5.4.** $L_x=L_y=L_z=1$. **5.5.** $L_r=L_z=1$, $L_\varphi=r$. **5.6.** $L_r=1$, $L_\theta=r$, $L_\varphi=r\operatorname{sen}\theta$. **5.7.** $ds_x=dx$, $ds_y=dy$, $ds_z=dz$; $d\sigma_x=dy\,dz$, $d\sigma_y=dx\,dz$, $d\sigma_z=dx\,dy$; $dv=dx\,dy\,dz$. **5.8.** $ds_r=dr$, $ds_\varphi=r\,d\varphi$, $ds_z=dz$; $d\sigma_r=r\,d\varphi\,dz$, $d\sigma_\varphi=dr\,dz$, $d\sigma_z=r\,dr\,d\varphi$; $dv=r\,dr\,d\varphi\,dz$. **5.9.** $ds_r=dr$, $ds_\theta=r\,d\theta$, $ds_\varphi=r\operatorname{sen}\theta\,d\varphi$; $d\sigma_r=r^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi$, $d\sigma_\theta=r\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\varphi$, $d\sigma_\varphi=r\,dr\,d\theta$; $dv=r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

5.10. $\frac{\partial u}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}e_z$. **5.11.** $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+r\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$. **5.12.** $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_r)}{\partial r}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$. **5.13.** $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)e_r+\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)e_\varphi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)e_z$. **5.14.** $\frac{\partial u}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}e_\varphi$. **5.15.** $\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)$. **5.16.** $\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2a_r)+r\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\operatorname{sen}\theta)+r\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)$. **5.17.** $\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\varphi\operatorname{sen}\theta)-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)e_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right)e_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)e_\varphi$.
5.19. a) $\operatorname{div}e_r=\frac{1}{r}$, $\operatorname{rot}e_r=0$; b) $\operatorname{div}e_\varphi=0$, $\operatorname{rot}e_\varphi=\frac{e_z}{r}$; c) $\operatorname{div}e_z=0$, $\operatorname{rot}e_z=0$. **5.20.** a) $\operatorname{div}e_r=\frac{2}{r}$, $\operatorname{rot}e_r=0$; b) $\operatorname{div}e_\theta=\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}$, $\operatorname{rot}e_\theta=\frac{e_\varphi}{r}$; c) $\operatorname{div}e_\varphi=0$, $\operatorname{rot}e_\varphi=\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}e_r-\frac{1}{r}e_\theta$.

5.21. a) $u=C_1\ln r+C_2$; b) $u=C_1\varphi+C_2$; c) $u=C_1 z+C_2$. **5.22.** a) $u=\frac{C_1}{r}+C_2$; b) $u=C_1\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+C_2$; c) $u=C_1\varphi+C_2$. **5.23.** $u=r^2\operatorname{sen}2\varphi\cos 2\theta$, $\operatorname{grad} u=2r\left(\operatorname{sen}2\varphi\cos 2\theta\,\mathbf{e}_r-\operatorname{sen}2\varphi\operatorname{sen}2\theta\,\mathbf{e}_\theta+\frac{\cos 2\varphi\cos 2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,\mathbf{e}_\varphi\right)$, $\nabla^2 u=2\operatorname{sen}2\varphi\,(1-2\operatorname{ctg}^2\theta)$. **5.24.** $u=rz\operatorname{sen}2\varphi+r\cos 2\varphi$, $\operatorname{grad} u=(z\operatorname{sen}2\varphi+\cos 2\varphi)\,\mathbf{e}_r+2(z\cos 2\varphi-\operatorname{sen}2\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi+r\operatorname{sen}2\varphi\,\mathbf{e}_z$, $\nabla^2 u=-\frac{3u}{r^2}$. **5.25.** $\mathbf{a}=\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}=\frac{1}{r}(2\cos\theta\,\mathbf{e}_r-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\theta)$. **5.26.** $\mathbf{a}=rz(\mathbf{e}_r-\mathbf{e}_z)$, $\operatorname{div}\mathbf{a}=2z-r$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}=(r+z)\,\mathbf{e}_\varphi$. **5.27.** $\operatorname{grad} u=f'(r)\,\mathbf{e}_r=f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$, $\nabla^2 u=f''(r)+\frac{2f'(r)}{r}$. **5.28.** $\operatorname{grad} u=f'(r)\,\mathbf{e}_r=f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$, $\nabla^2 u=f''(r)+\frac{f'(r)}{r}$. **5.29.** $\operatorname{grad} u=\frac{\partial F}{\partial r}\,\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\,\mathbf{e}_\theta$, $\nabla^2 u=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}$. **5.30.** $\operatorname{grad} u=\frac{\partial F}{\partial r}\,\mathbf{e}_r+\frac{\partial F}{\partial z}\,\mathbf{e}_z$, $\nabla^2 u=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$.