CAPÍTULO 11

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

§ 1. Funciones elementales

1. Concepto de función de variable compleja. El conjunto de puntos E del plano complejo extendido se llama *conexo*, si cualesquiera dos puntos suyos pueden unirse por una curva continua, todos los puntos de la cual pertenecen al conjunto dado. El conjunto abierto conexo de los puntos del plano complejo se llama *región* y se designa mediante D, G, etc. La región D se llama *simplemente conexa*, si su frontera es un conjunto conexo; en el caso contrario la región D lleva el nombre de *región múltiplemente conexa*. Por ejemplo, el círculo $|z - z_0| < R$ es una región simplemente conexa y el anillo $0 \leqslant \leqslant r < |z - z_0| < R$, una región múltiplemente (doblemente) conexa.

Si a todo número complejo $z = x + iy$ perteneciente a la región D, según cierta regla, está puesto en correspondencia uno o varios números complejos $w = u + iv$, entonces se dice que en el conjunto D está definida la función y se escribe simbólicamente:

$$w = f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Uno de los procedimientos más empleados para definir la función, la definición con ayuda de fórmulas, puede llevar tanto a las funciones uniformes como a las multiformes. Así pues, la función $w = z^2$ es uniforme en el plano complejo extendido, ya que a todo z le corresponde un valor de $w = z^2$ y la función $w = \sqrt{z}$, en virtud de la definición de la raíz del número complejo, es biforme en todos los puntos, excepto los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ en los cuales es uniforme; tales puntos suelen llamarse *puntos de ramificación*. La función $w = \operatorname{Arg} z$ es también multiforme y está definida en todo punto, excepto $z = 0$ y $z = \infty$.

La función uniforme $f(z)$ definida geométricamente en D puede considerarse como aplicación de la región D del plano (z) sobre cierto conjunto G del plano (w), que es colección de los valores de $f(z)$ correspondientes a todo $z \in D$.

EJEMPLO 1. Investíguese la aplicación que realiza la función lineal $w = az + b$.

◀ Se puede considerar esta aplicación como composición de tres aplicaciones elementales. Efectivamente, pongamos

$$w_1 = |a|\,z,$$
$$w_2 = e^{i\arg a}w_1,$$
$$w_3 = w_2 + b.$$

No es difícil ver que $w = w_3 \circ w_2 \circ w_1$. Del sentido geométrico del producto y de la suma de los números complejos está claro que la aplicación w_1 es la aplicación de alargamiento (restricción para $0 <$ $< |a| < 1$), la aplicación w_2 representa el giro de todo el plano (w_1) respecto al origen, en un ángulo $\varphi = \arg a$ y, por fin, la aplicación w_3 es una traslación paralela del plano w_2 sobre el vector que representa el número complejo b. ▶

La función $w = f(z)$ se llama *unifoliada* en la región D, si a los distintos cualesquiera valores arbitrarios $z_1 \neq z_2$ tomados de la región D, les corresponden distintos valores de la función $f(z_1) \neq f(z_2)$.

EJEMPLO 2. Hállese la región de la función unifoliada $w = z^2$.

◀ Sean $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Determínese la condición con la cual $z_1^2 = z_2^2$, aunque $z_1 \neq z_2$. Tenemos $\rho_1^2 e^{i2\varphi_1} = \rho_2^2 e^{i2\varphi_2}$. De aquí sacamos la conclusión de que $\rho_1 = \rho_2$ y $2\varphi_2 = 2\varphi_1 + 2k\pi$ $(k = 0, 1)$. Ya que $z_1 \neq z_2$, entonces $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. De este modo la región de la función unifoliada $w = z^2$ no debe contener dentro puntos, cuyos módulos coinciden y los argumentos difieren en π; es decir, la región de función unifoliada es cualquier semiplano, por ejemplo $\operatorname{Re} z > 0$ o $\operatorname{Im} z > 0$. ▶

Descríbanse las regiones definidas por las siguientes relaciones y determínese si son uniformes:

1.1. $|z - z_0| < R$. **1.2.** $1 < |z - i| < 2$.

1.3. $2 < |z - i| < \infty$. **1.4.** $0 < \operatorname{Re}(2iz) < 1$.

1.5. $|z - z_0| > R$. **1.6.** $0 < |z + i| < 2$.

1.7. $\operatorname{Im}(iz) < 1$. **1.8.** $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} > \dfrac{1}{4}$.

Determínense en el plano complejo los conjuntos de puntos que satisfacen las relaciones indicadas:

1.9. $\operatorname{Im}\dfrac{z+1}{z-1} = 0$. **1.10.** $|z - i| + |z + i| < 4$.

1.11. $\operatorname{Re}\dfrac{z-2i}{z+2i} = 0$. **1.12.** $|z - 5| - |z + 5| < 6$.

1.13. $\arg\dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0$. **1.14*.** $\arg\dfrac{i-z}{z+i} = 0$.

Aplicando las desigualdades anótense los conjuntos abiertos siguientes del plano complejo:

1.15. Del primer cuadrante.

1.16. Del semiplano izquierdo.

1.17. De la franja compuesta de los puntos que se encuentran del eje imaginario a una distancia menor que tres.

1.18. Del interior de la elipse con focos en los puntos $1+i$, $3+i$ y el semieje mayor igual a tres.

1.19. Del interior del ángulo con vértice en el punto z_0 de la abertura $\pi/4$, que es simétrico respecto al rayo paralelo al semieje imaginario positivo.

Hállese $\operatorname{Arg} f(z)$ si $z = re^{i\varphi}$:

1.20. $f(z) = z^2$. **1.21.** $f(z) = z^3$.

1.22. $f(z) = \sqrt[3]{z+1}$. **1.23.** $f(z) = \sqrt{z-8}$.

1.24. $f(z) = \sqrt{z^2-4}$. **1.25.** $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-2}{z+1}}$.

Hállense las regiones de función unifoliada de las funciones siguientes:

1.26. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. **1.27.** $f(z) = e^z$.

1.28. $f(z) = e^{3iz}$. **1.29*.** $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1.30. Para las aplicaciones dadas por las funciones:

a) $w = z^2$, b)** $w = \dfrac{1}{z}$

hállense las imágenes de las líneas $x = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ y la imagen de la región $|z| < r$, $\operatorname{Im} z > 0$.

2. Límite y continuidad de una función de variable compleja. Funciones elementales. El número $A \neq \infty$ se llama *límite* de la función $f(z)$ para $z \to z_0$ y se denota por $A = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal, que para todo $z \neq z_0$ que satisface la desigualdad $|z - z_0| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Decimos que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, si para cualquier $R > 0$ existe $\delta = \delta(R) > 0$ tal, que para todo $z \neq z_0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(z)| > R.$$

Hay que tener en cuenta que para la función dada $f(z)$, la existencia del límite por cualquier camino fijo ($z \to z_0$) no garantiza todavía la existencia del límite $f(z)$ para $z \to z_0$.

EJEMPLO 3. Sea $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right)$. Muéstrese que el $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ no existe.

◀ Para el límite cuando $r \to 0$ por cualquier rayo $re^{i\varphi}$ tenemos

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right) = \operatorname{sen} 2\varphi,$$

es decir, estos límites son distintos para distintas direcciones, ellos completan el segmento $[-1, 1]$ y, por consiguiente,

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar z} - \frac{\bar z}{z}\right)$$

no existe. ▶

La función $f(z)$ se llama *continua en el punto* z_0 si está definida en este punto y $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

La función continua en todo punto de la región D se llama *continua* en esta región.

La función $f(z)$ se llama *uniformemente continua* en la región D, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal, que para cualesquiera puntos z_1 y z_2 de la región D, tales que $|z_1 - z_2| < \delta$, se cumple la desigualdad $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Citemos algunas funciones elementales de variable compleja:

a) Función lineal

$$w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0.$$

b) Función potencial

$$w = z^n, \quad n = \in \mathbb{N}.$$

c) Raíz de índice entero n

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

d) Función lineal fraccional

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0.$$

e) Función racional general

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

f) Función de Zhukovski

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

g) Función exponencial

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

h) Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}.$$

i) Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

j) Función logarítmica

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi).$$

La expresión $\ln |z| + i \arg z$ se llama *valor principal* de la función logarítmica y se designa por $\ln z$. De este modo,

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i.$$

k) Funciones trigonométricas inversas $\operatorname{Arcsen} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$ y funciones hiperbólicas inversas $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$ (véanse el ejemplo 6 y los problemas 1.42—1.46).

Las aplicaciones realizadas por algunas funciones elementales y las propiedades de estas funciones serán estudiadas más adelante (en el § 3); aquí nos limitamos sólo a calcular los valores concretos de estas funciones.

EJEMPLO 4. Calcúlese $\operatorname{sen} i$.

◀ Tenemos:

$$\operatorname{sen} i=\frac{e^{ii}-e^{-ii}}{2i}=\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=i\,\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}=i \operatorname{sh} 1. \ ▶$$

EJEMPLO 5. Calcúlese $\operatorname{ch}(2-3i)$.

◀ Tenemos

$$\operatorname{ch}(2-3i)=\frac{e^{2-3i}+e^{-2+3i}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{2}(\cos 3-i \operatorname{sen} 3)+e^{-2}(\cos 3+i \operatorname{sen} 3)\right)=$$

$$=\cos 3 \operatorname{ch} 2-i \operatorname{sen} 3 \operatorname{sh} 2. \ ▶$$

EJEMPLO 6. Hállese la expresión analítica para la función $\operatorname{Arccos} z$ cualquiera que sea el complejo z. Calcúlese $\operatorname{Arccos} 2$.

◀ Ya que la igualdad $w = \operatorname{Arccos} z$ es equivalente a la igualdad $\cos w = z$, podemos escribir que $z = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$. De aquí hallamos

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática respecto a e^{iw} obtenemos

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

(aquí se consideran ambos valores de la raíz). A partir de esta igualdad hallamos

$$iw = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

es decir,

$$w = \mathrm{Arccos}\, z = -i\, \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

De aquí obtenemos

$$\mathrm{Arccos}\, 2 = -i\, \mathrm{Ln}\,(2 \pm \sqrt{3}) = -i\, \ln\,(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi. \blacktriangleright$$

1.31. Valiéndose de los símbolos lógicos escríbase la definición mencionada más arriba de la continuidad de la función en la región.

1.32. Utilizando la definición dada anteriormente de la función e^z, demuéstrese que e^z tiene un período puramente imaginario $2\pi i$, es decir, $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Demuéstrense las identidades:

1.33. $\mathrm{sen}\, iz = i\, \mathrm{sh}\, z$. **1.34.** $\cos iz = \mathrm{ch}\, z$.

1.35. $\mathrm{tg}\, iz = i\, \mathrm{th}\, z$.

Calcúlense los valores de las funciones en los puntos indicados:

1.36. $\cos\,(1 + i)$. **1.37.** $\mathrm{ch}\, i$.

1.38. $\mathrm{sh}\,(-2 + i)$. **1.39.** $\mathrm{Ln}\,(-1)$.

1.40. $\ln i$. **1.41.** $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Obténganse las expresiones analíticas para las funciones dadas más abajo y para cada una de ellas hállese el valor en el punto correspondiente z_0 (véase el ejemplo 6):

1.42. $w = \mathrm{Arcsen}\, z$, $z_0 = i$.

1.43. $w = \mathrm{Arctg}\, z$, $z_0 = i/3$.

1.44. $w = \mathrm{Arsh}\, z$, $z_0 = i$.

1.45. $w = \mathrm{Arch}\, z$, $z_0 = -1$.

1.46. $w = \mathrm{Arth}\, z$, $z_0 = 1 - i$.

Anteriormente la función potencial fue definida para $n \in \mathbb{N}$. Con ayuda de la función logarítmica se puede introducir también la función potencial general. Precisamente, si u y v son dos números complejos, $u \neq 0$, entonces ponemos

$$u^v = e^{v\,\mathrm{Ln}\, u},$$

con la particularidad de que para precisar consideraremos, que $\mathrm{Ln}\, u = \ln u$ para $u > 0$ reales.

Hállense todos los valores de las potencias:

1.47. 2^i. **1.48.** $(-1)^i$. **1.49.** $(1+i)^i$.

1.50. $(-1)^{\sqrt{2}}$. **1.51.** $(3-4i)^{1+i}$. **1.52.** $(-3+4i)^{1+i}$.

¿Qué determinación complementaria de las funciones dadas en el punto $z=0$ hay que hacer, para que sean continuas en este punto?

1.53. $f(z)=\frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$. **1.54.** $f(z)=\frac{z \operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$.

1.55. $f(z)=e^{-1/|z|}$. **1.56.** $f(z)=z/|z|$.

1.57. Demuéstrese que la función $f(z)=e^{-1/z}$ es continua en el semicírculo $0<|z|\leqslant 1$, $|\arg z|\leqslant \pi/2$, pero no es uniformemente continua en este semicírculo y, en todo sector $0<|z|\leqslant 1$, $|\arg z|\leqslant \alpha<\pi/2$, es uniformemente continua.

§ 2. Funciones analíticas. Condición de Cauchy — Riemann

1. Derivada. Analiticidad de la función. Si en el punto $z\in D$ existe el límite

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},\quad z+\Delta z\in D,$$

entonces éste se llama *derivada* de la función $f(z)$ en el punto z y se designa mediante $f'(z)$ o $\frac{df(z)}{dz}$.

Si en el punto $z\in D$ la función $f(z)$ tiene la derivada $f'(z)$, se dice que la función $f(z)$ es *diferenciable* en el punto z.

La función $f(z)$ diferenciable en todo punto de la región D y que tiene en esta región la derivada continua $f'(z)$ se llama *analítica en la región D*. Diremos también que $f(z)$ es *analítica en el punto* $z_0\in D$, si $f(z)$ es analítica en cierto entorno del punto z_0.

La condición de continuidad de la derivada $f'(z)$ que figura en la definición de la analiticidad de la función $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, puede ser sustituida por una condición más débil de diferenciabilidad en cada punto $(x, y)\in D$ de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

Para que la función $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ sea analítica en la región D es necesario y suficiente que existan en esta región las derivadas parciales continuas de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$, que satisfacen las condiciones de Cauchy—Riemann

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x, y)}{\partial x},$$

o, en coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(r\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\varphi)}{\partial r} &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial v(r\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\varphi)}{\partial\varphi}, \\ \frac{\partial v(r\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\varphi)}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\,\frac{\partial u(r\cos\varphi,\ r\,\text{sen}\,\varphi)}{\partial\varphi}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Si se cumple la condición (1) o (2) la derivada $f'(z)$ puede ser anotada respectivamente:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

o bien

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-i\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right). \qquad (4)$$

Las fórmulas de diferenciación de las funciones de variable compleja, son análogas a las fórmulas correspondientes de diferenciación de las funciones de variable real.

EJEMPLO 1. Demuéstrese que la función $f(z)=e^{2z}$ es analítica y hállese $f'(z)$.

◀ Tenemos

$$e^{2z}=e^{2x}(\cos 2y+i\,\text{sen}\,2y),$$

es decir,

$$u(x,\ y)=e^{2x}\cos 2y,\quad v(x,\ y)=e^{2x}\,\text{sen}\,2y.$$

Por eso

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\,\text{sen}\,2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\,\text{sen}\,2y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y.$$

Por consiguiente, las condiciones (1) se cumplen en todo el plano y según la primera de las fórmulas (3)

$(e^{2z})'=2e^{2x}\cos 2y+i2e^{2x}\,\text{sen}\,2y=2e^{2x}(\cos 2y+i\,\text{sen}\,2y)=2e^{2z}$. ▶

EJEMPLO 2. Muéstrese que la función $w=z^3$ es analítica en todo el plano complejo (excepto $z=\infty$).

◀ En efecto, tenemos $z=re^{i\varphi}$ y

$$w=z^3=r^3e^{i3\varphi}=r^3\cos 3\varphi+ir^3\,\text{sen}\,3\varphi,$$

además

$$\frac{\partial u}{\partial r}=3r^2\cos 3\varphi,\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=3r^2\,\text{sen}\,3\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-3r^3\,\text{sen}\,3\varphi,\qquad \frac{\partial v}{\partial\varphi}=3r^3\cos 3\varphi.$$

es decir, para cualquier $z = re^{i\varphi}$ finito se cumplen las condiciones (2). Aplicando la primera de las fórmulas (4) tenemos

$$f'(z) = (z^3)' = \frac{r}{z}(3r^2\cos 3\varphi + i3r^2 \operatorname{sen} 3\varphi) = 3z^2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Muéstrese que la función logarítmica $w = \operatorname{Ln} z$ es analítica en todos los puntos finitos excepto $z = 0$, además

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

◀ Puesto que

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$$

tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

es decir, están cumplidas las condiciones (2), y a partir de la primera de las fórmulas (4) hallamos

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{r}{z} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{z}. \blacktriangleright$$

Las funciones analíticas se emplean en la descripción de distintos procesos.

EJEMPLO 4. Analicemos el flujo plano, no vertiginoso, de un líquido incompresible ideal. Sean $v_x(x, y)$ y $v_y(x, y)$ los componentes del vector de velocidad v del flujo a lo largo de los ejes x e y, y sea

$$v(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y)$$

la velocidad compleja del flujo. Muéstrese que $v(z)$ es una función analítica.

◀ De la incompresibilidad del líquido se deduce que la divergencia del vector de la velocidad es idénticamente igual a cero, es decir,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Luego, el flujo no es vertiginoso cuando y sólo cuando el rotor de su vector de la velocidad es igual a cero, es decir,

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Pero las igualdades (6) y (7) son las condiciones de Cauchy - Riemann para la función (5), es decir, la velocidad compleja $v(z)$ es una función analítica de variable compleja $z = x + iy$.

Aclárese en qué puntos son diferenciables las funciones:

2.1. $w = \bar{z}$. **2.2*.** $w = \operatorname{Re} z$. **2.3.** $w = z \operatorname{Im} z$.

2.4. $w = z \operatorname{Re} z$. **2.5**.** $w = |z|$. **2.6.** $w = |z-1|^2$.

2.7. Suponiendo que estén cumplidas las condiciones de

Cauchy — Riemann (1) en las coordenadas rectangulares cartesianas, demuéstrese la validez de las condiciones de Cauchy — Riemann (2) en las coordenadas polares y la justeza de las fórmulas (4) para calcular la derivada en las coordenadas polares.

Verifíquese si se cumplen las condiciones de Cauchy — Riemann (1) o (2) y si se cumplen hállese $f'(z)$:

2.8. $f(z) = e^{3z}$. **2.9.** $f(z) = \operatorname{sh} z$.

2.10. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. **2.11.** $f(z) = \cos z$.

2.12. $f(z) = \ln(z^2)$. **2.13.** $f(z) = \operatorname{sen}\frac{z}{3}$.

2.14*. Sea $f(z)$ la función analítica en la región D. Demuéstrese que si una de las funciones

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z),$$
$$f(x, y) = |f(z)|, \quad \theta(x, y) = \arg f(z)$$

conserva un valor constante en esta región, entonces también $f(z) \equiv \text{const}$ en D.

2. Propiedades de las funciones analíticas. Una serie de propiedades, características para las funciones diferenciables de variable real, siguen siendo válidas para las funciones analíticas.

2.15. Demuéstrese que si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas en la región D, entonces las funciones $f(z) \pm g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$ son también analíticas en la región D y el cociente $f(z)/g(z)$ es una función analítica en todos los puntos de la región D, en los cuales $g(z) \neq 0$. En este caso tienen lugar las fórmulas

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z),$$
$$(f(z)\, g(z))' = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z),$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)\, g(z) - f(z)\, g'(z)}{g^2(z)}.$$

2.16. Sea $f(z)$ una función analítica en la región D con el campo de valores $G = \{f(z) \mid z \in D\}$, y sea analítica la función $\varphi(w)$ en la región G. Demuéstrese que $F(z) = \varphi(f(z))$ es una función analítica en la región D.

Empleando las afirmaciones del problema 2.15 hállense las regiones de analiticidad de las funciones y sus derivadas:

2.17. $f(z)=\operatorname{tg} z$. **2.18.** $f(z)=z\cdot e^{-z}$.

2.19. $f(z)=\dfrac{z\cdot\cos z}{1+z^2}$. **2.20.** $f(z)=\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.

2.21. $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z}$. **2.22.** $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$.

2.23. $f(z)=\operatorname{cth} z$. **2.24.** $f(z)=\dfrac{\cos z}{\cos z-\operatorname{sen} z}$.

2.25. Demuéstrese que las partes real e imaginaria de la función $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ analítica en la región D son funciones armónicas en esta región, es decir, sus laplacianos son iguales a cero:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

2.26. Obténgase la expresión del laplaciano Δu en las coordenadas polares ($u=u(r, \varphi)$).

Señalemos que dada la parte real o imaginaria la función analítica en la región D se determina con una exactitud de hasta la constante arbitraria (compleja). Por ejemplo, si $u(x, y)$ es la parte real de la función $f(z)$ analítica en la región D, entonces

$$v(x, y)=\operatorname{Im} f(z)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}=u'_y\,dx+u'_x\,dy$$

donde (x_0, y_0) es un punto fijo en la región D y el camino de integración también se encuentra en la región D.

EJEMPLO 5. Compruébese que la función $u=x^2-y^2-5x+y+2$ es la parte real de cierta función analítica $f(z)$ y hállese $f(z)$.

◀ Ya que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$$

en todo el plano, entonces $u(x, y)$ es una función armónica y en este caso

$$v(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}(2y-1)\,dx+(2x-5)\,dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}(2y_0-1)\,dx+\int_{y_0}^{y}(2x-5)\,dy=(2y_0-1)(x-x_0)+$$

$$+(2x-5)(y-y_0)=2xy-x-5y+5y_0+x_0-2x_0y_0,$$

es decir,

$$v(x, y) = 2xy - x - 5y + C$$

y

$$f(z) = x^2 - y^2 - 5x + y + 2 + i(2xy - x - 5y + C) =$$
$$= (x^2 + 2ixy - y^2) - 5(x + iy) + (-xi + y) + 2 + Ci =$$
$$= z^2 - 5z - iz + 2 + Ci. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Muéstrese que la función del tipo

$$u(x, y) = a(x^2 + y^2) + bx + cy + d, \quad a \neq 0,$$

no es parte real (o imaginaria) de ninguna función analítica.

◀ Efectivamente, esto se deduce de las relaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4a \neq 0. \blacktriangleright$$

Compruébese si son armónicas en las regiones indicadas, las funciones dadas más abajo y hállese, cuando es posible, la función analítica según los datos de su parte real o imaginaria:

2.27. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.28. $v(x, y) = 2e^x \operatorname{sen} y$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.29. $u(x, y) = 2xy + 3$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.30. $v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $0 < |x| < \infty$.

2.31. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, $0 < |z| < \infty$.

2.32. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

2.33. $v(x, y) = xy$, $0 \leqslant |z| < \infty$.

§ 3. Aplicaciones conformes

1. Sentido geométrico del módulo y del argumento de la derivada. Sea $w = f(z)$ la función analítica en el punto z_0 y $f'(z_0) \neq 0$. Entonces $k = |f'(z_0)|$ es igual geométricamente al coeficiente de alargamiento en el punto z_0 para la aplicación $w = f(z)$ (más precisamente, para $k > 1$ tiene lugar el alargamiento y para $k < 1$, la contracción). El argumento de la derivada $\varphi = \arg f'(z_0)$ es igual geométricamente al ángulo, en el que hay que girar la tangente en el punto z_0 a cualquier curva suave L, que pasa por el punto z_0 para obtener la tangente en el punto $w_0 = f(z_0)$ a la imagen L' de esta curva, cuando la aplicación $w = f(z)$. En este caso, si $\varphi > 0$, el giro se realiza en sentido antihorario y si $\varphi < 0$, en sentido horario.

De este modo, el sentido geométrico del módulo y del argumento de la derivada consiste en que, si la aplicación la realiza la función analítica que satisface la condición $f'(z_0) \neq 0$, $k = |f'(z_0)|$, determina el coeficiente de transformación de semejanza del elemento lineal infinitesimal en el punto z_0 y $\varphi = \arg f'(z_0)$ es el ángulo de giro de este elemento.

EJEMPLO 1. Hállense el coeficiente de alargamiento k y el ángulo de giro φ en el punto $z_0 = 1 - i$ para la aplicación $w = z^2 - z$.

◀ Puesto que $w' = 2z - 1$ y $w'|_{z=1-i} = 1 - 2i$, entonces

$$k = |1 - 2i| = \sqrt{5}$$

$$\varphi = \arg(1 - 2i) = -\operatorname{arctg} 2. ▶$$

Hállense el coeficiente de alargamiento k y el ángulo de giro φ para las aplicaciones dadas $w = f(z)$ en los puntos indicados:

3.1. $w = z^2$, $z_0 = \sqrt{2}(1 + i)$. **3.2.** $w = z^2$, $z_0 = i$.

3.3. $w = z^3$, $z_0 = 1 + i$. **3.4.** $w = z^3$, $z_0 = 1$.

3.5. $w = \operatorname{sen} z$, $z_0 = 0$. **3.6.** $w = ie^{2z}$, $z_0 = 2\pi i$.

Determínese qué parte del plano complejo se alarga y qué parte se contrae para las aplicaciones siguientes,

3.7. $w = 1/z$. **3.8.** $w = e^{z-1}$.

3.9. $w = \ln(z + 1)$. **3.10.** $w = z^2 + 2z$.

Hállense los conjuntos de todos los puntos z_0, en los cuales para las aplicaciones siguientes el coeficiente de alargamiento es $k = 1$:

3.11. $w = (z - 1)^2$. **3.12.** $w = z^2 - iz$.

3.13. $w = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$. **3.14.** $w = -z^3$.

Hállense los conjuntos de todos los puntos z_0, en los cuales para las aplicaciones siguientes el ángulo de giro es $\varphi = 0$:

3.15. $w = -\dfrac{i}{z}$. **3.16*.** $w = \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$.

3.17. $w = z^2 + iz$. **3.18.** $w = z^2 - 2z$.

2. Aplicaciones conformes. Funciones lineal y lineal fraccional. La aplicación biunívoca de la región D del plano (z) sobre la región G del plano (w) se llama *conforme*, si en todo punto de la región D posee propiedades de conservación de los ángulos y de constancia de alargamientos.

Criterio del carácter conforme de la aplicación. Para que la aplicación de la región D dada por la función $w = f(z)$ sea conforme, es necesario y suficiente que $f(z)$ sea una función uniforme y analítica en la región D, además $f'(z) \neq 0$ en todos los puntos de D.

En adelante la imagen de la región D que se aplica por la función $w = f(z)$ se designa por E o por $f(D)$.

EJEMPLO 2. Muéstrese que la aplicación realizada por la función $w = z^3$ es conforme en la región

$$D = \left\{ z \mid 1 < |z| < 2, \quad 0 < \arg z < \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

◀ Es necesario comprobar si la función dada es analítica y unifoliada en D y si $f'(z) \neq 0$ en todos los puntos de D. La analiticidad de la función $w = z^3$ fue mostrada más arriba (véase el ejemplo 2 del § 2), la relación $w' = 3z^2 \neq 0$ para todo $z \in D$ es evidente. El carácter unifoliado se deduce de que la región D está dispuesta en el ángulo con vértice en el origen de coordenadas y de magnitud $\frac{2\pi}{3}$ (véase el problema 1.26). ▶

Aclárese qué funciones de las dadas $w = f(z)$ determinan las aplicaciones conformes de las regiones indicadas D:

3.19. $w = (z+i)^2$, $D = \left\{ z \mid 1 < |z+i| < 3, \; 0 < \arg z < \frac{3}{2}\pi \right\}$.

3.20. $w = |z|^2$, $D = \{z \mid |z| < 1\}$.

3.21. $w = e^z$, $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

3.22. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $D = \left\{ z \,\middle|\, \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}$.

3.23. $w = (z-1)^3$, $D = \{z \mid |z-1| < 1\}$.

La aplicación realizada por la función lineal $w = az + b$ está estudiada más arriba (véase el ejemplo 1 del § 1). Ésta representa una composición del alargamiento ($w_1 = |a| z$), del giro ($w_2 = e^{i \arg a} w_1$) y de la traslación paralela ($w_3 = w_2 + b$). La inversa a la función lineal es también una función lineal $z = \frac{1}{a} w - \frac{b}{a}$. Puesto que $w' = a \neq 0$, entonces la aplicación w es conforme en todo el plano ampliado, además tiene dos puntos inmóviles $z_1 = \frac{b}{1-a}$ (para $a \neq 1$) y $z_2 = \infty$.

EJEMPLO 3. Aclárese si existe la función lineal que aplica el triángulo con vértices 0, 1, i en el plano (z) sobre el triángulo con vértices 0, 2, $1+i$ en el plano (w).

◀ Señalemos que el triángulo con vértices 0, 1, i es semejante al triángulo con vértices 0, 2, $1+i$, con la particularidad de que el vértice en el punto $z_1 = 0$ corresponde al vértice en el punto $w_1 = 1+i$, el vértice en el punto $z_2 = 1$ corresponde al vértice en el punto $w_2 = 0$ y el vértice en el punto $z_3 = i$, al vértice en el punto $w_3 = 2$. Realicemos sucesivamente las transformaciones:

a) $w_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}} z$ es un giro alrededor del origen de coordenadas en un ángulo $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ en el sentido antihorario;

b) $w_2 = \sqrt{2} w_1$ es homotecia con el coeficiente $k = \sqrt{2}$;

c) $w_3 = w_2 + (1 + i)$ es traslación paralela sobre el vector que representa el número complejo $1 + i$.

Como resultado el triángulo con vértices 0, 1, i se aplica sobre el triángulo con vértices 0, 2, $1 + i$ y la función lineal entera que realiza esta aplicación tiene la forma

$$w = w_3 \circ w_2 \circ w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} z + (1+i) =$$
$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z + 1 + i = (1+i)(1-z). \blacktriangleright$$

3.24. Demuéstrese que la aplicación realizada por la función lineal entera tiene dos puntos inmóviles (que coinciden si $a = 1$).

Para las aplicaciones indicadas más abajo hállense el punto inmóvil finito z_0 (si existe), el ángulo de giro φ y el coeficiente de homotecia k:

3.25. $w = 2z + 1$. **3.26.** $w = iz + 4$.

3.27. $w = e^{i\frac{\pi}{4}} z - e^{-i\frac{\pi}{4}}$. **3.28.** $w = az + b$.

La función lineal fraccional

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0,$$

realiza la aplicación conforme del plano ampliado (z) sobre el plano ampliado (w). En este caso por ángulo entre las curvas en el punto $z = \infty$, se entiende el ángulo en el punto $z^* = 0$ entre las imágenes de estas curvas, obtenidas mediante la aplicación $z^* = \frac{1}{z}$. La función lineal fraccional elemental (distinta de la lineal) es la función $w = \frac{1}{z}$ que puede ser representada en la forma de composición de la inversión respecto a la circunferencia unitaria $w_1 = \frac{1}{\bar{z}}$ y a la conjugación compleja $w_2 = \bar{w}_1$. La función lineal fraccional elemental aplica las circunstancias del plano (z) en las circunferencias del plano (w) (la recta se considera como circunferencia de radio infinito). Puesto que la función lineal fraccional general se representa en la forma de composición de la función lineal $w_1 = cz + d$, de la lineal fraccional elemental $w_2 = \frac{1}{w_1}$ y de nuevo de la lineal $w_3 = \frac{bc - ad}{c} w_2 + \frac{a}{c}$, entonces ella también aplica la circunferencia en la circunferencia.

La función lineal fraccional se define completamente si están dadas las aplicaciones de tres puntos $z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$ y $z_3 \to w_3$:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \qquad (1)$$

OBSERVACION. Si uno de los puntos z_1, z_2 ó z_3 o bien w_1, w_2 ó w_3 es un punto infinitamente alejado, entonces en la fórmula (1) todas las diferencias que contienen este punto deben ser sustituidas por unidades.

EJEMPLO 4. Hállese la imagen de la circunferencia $x^2+y^2=2x$ para la aplicación $w=\frac{1}{z}$.

▶ Poniendo $z=x+iy$ tenemos $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la circunferencia, hallamos

$$x^2+y^2-2x=z\cdot\bar{z}-(z+\bar{z})=0,$$

y después del cambio $z=\frac{1}{w}$ tenemos

$$\frac{1}{w\bar{w}}-\frac{1}{w}-\frac{1}{\bar{w}}=0,$$

es decir, $w+\bar{w}=1$. Si $w=u+iv$, entonces $w+\bar{w}=2u$. De este modo la circunferencia $x^2+y^2-2x=0$ se transforma en la recta $u=1/2$ paralela al eje imaginario. ▶

EJEMPLO 5. Hállese la aplicación lineal fraccionaria que hace pasar los puntos -1, i, $i+1$ en el punto 0, $2i$, $1-i$.

◀ Empleando la fórmula (1) tenemos

$$\frac{w-0}{w-2i} \cdot \frac{1-i-2i}{1-i-0} = \frac{z+1}{z-i} \cdot \frac{i+1-i}{i+1+1},$$

de donde

$$\frac{w}{w-2i}=\frac{1}{5}\,\frac{z+1}{z-i}$$

y

$$w=-\frac{2i(z+1)}{4z-5i-1}. \;▶$$

Hállense las imágenes de las siguientes líneas para las aplicaciones $w=\frac{1}{z}$:

3.29. De la circunferencia $x^2+y^2=y/3$.
3.30. De la recta $y=-x/2$.
3.31. De la recta $y=x-1$.
3.32. De la circunferencia $x^2+y^2+2x-2y+1=0$.

3.33. Demuéstrese que la función $w = \frac{1}{z}$ transforma en una recta la circunferencia $A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy = 0$ que pasa por el origen de coordenadas y transforma a toda recta $Bx + Cy + D = 0$ en una circunferencia, que pasa por el origen de coordenadas.

Hállese la transformación homográfica a partir de las condiciones dadas:

3.34. Los puntos i, 1, $1 + i$ pasan a puntos 0, ∞, 1.

3.35. Los puntos 1 e i son inmóviles y el punto 0 pasa a ∞.

3.36. El punto $\frac{1}{2}$ y 2 son inmóviles y $\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ pasan a ∞.

3.37. Demuéstrese que la transformación homográfica $w = \frac{az+b}{cz+d}$ tiene dos puntos inmóviles. ¿Cuál es la condición de coincidencia de estos puntos? ¿Cuándo el punto infinitamente alejado es inmóvil?

Los puntos z_1 y z_2 se llaman simétricos respecto a la recta, si están situados sobre la perpendicular a esta recta a distintos lados de ella y a distancias iguales.

Los puntos z_1 y z_2 se llaman *simétricos respecto a la circunferencia*, si están situados sobre un rayo que sale del centro de esta circunferencia, a distintos lados de ella y de tal modo que el producto de las distancias de estos puntos al centro, es igual al cuadrado del radio.

Los puntos M y N simétricos respecto a la recta o la circunferencia en el plano (z) se aplican por la función lineal fraccionaria en los puntos M' y N', simétricos respecto a la imagen de esta recta o la circunferencia en el plano (w).

3.38. Hállense los puntos simétricos al punto $1 + i$ respecto a las circunferencias:

a) $|z| = 1$; b)* $|z - i| = 2$.

3.39. Para la aplicación $w = \frac{z-i}{z+i}$ hállese la imagen del punto simétrico al punto $1 - i$ respecto a:

a) la recta $y = x$; b) la circunferencia $|z - 1| = 3$.

EJEMPLO 6. Hállese la aplicación del círculo $|z| < 1$ sobre el círculo $|w| < 1$ tal, que el punto $z = \alpha$ ($|\alpha| < 1$) se aplique en el centro del círculo $w = 0$.

◀ Escribamos la transformación homográfica en la forma

$$w = g\,\frac{z - z_0}{z - z_1}.$$

Ya que el punto $z = \alpha$ pasa al punto $w = 0$, entonces $z_0 = \alpha$ y puesto que el punto $w = \infty$ es simétrico al punto $w = 0$, entonces z_1 es simétrico al punto $z = \alpha$ respecto a la circunferencia $|z| = 1$, es decir, $z_1 = \dfrac{1}{\bar{\alpha}}$. Por eso

$$w = g\bar{\alpha}\,\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}\,.$$

Luego, el punto de la circunferencia $|z| = 1$ pasa al punto de la circunferencia $|w| = 1$ y por eso para $z = e^{i\varphi}$ tenemos

$$1 = |g\bar{\alpha}|\left|\frac{e^{i\varphi}-\alpha}{\bar{\alpha}e^{i\varphi}-1}\right|.$$

Pero

$$\left|\frac{e^{i\varphi}-\alpha}{e^{i\varphi}\bar{\alpha}-1}\right|^2 = \frac{(e^{i\varphi}-\alpha)(e^{-i\varphi}-\bar{\alpha})}{(e^{i\varphi}\bar{\alpha}-1)(e^{-i\varphi}\alpha-1)} =$$

$$= \frac{1+|\alpha|^2-e^{i\varphi}\bar{\alpha}-e^{-i\varphi}\alpha}{|\alpha|^2+1-e^{i\varphi}\bar{\alpha}-e^{-i\varphi}\alpha} = 1.$$

Por consiguiente, $|g\bar{\alpha}| = 1$, es decir, $|g\bar{\alpha}| = e^{i\theta}$ y la aplicación buscada tiene el aspecto

$$w = e^{i\theta}\,\frac{z-\alpha}{z\bar{\alpha}-1}\,. \blacktriangleright \tag{2}$$

Para la aplicación (2) del círculo unitario sobre sí mismo hállense los parámetros α y θ según las condiciones dadas:

3.40. $w\,(1/2) = 0$, $\arg w'\,(1/2) = 0$.

3.41. $w\,(0) = 0$, $\arg w'\,(0) = \pi/2$.

3.42. $w = (z_0) = 0$, $\arg w'\,(z_0) = \pi/2$.

3.43. Demuéstrese que la función

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\,, \quad \operatorname{Im}\alpha > 0, \tag{3}$$

aplica el semiplano superior sobre el círculo unitario.

Determínense los parámetros α y θ en la fórmula (3) según las condiciones dadas:

3.44. $w\,(i) = 0$, $\arg w'\,(i) = -\pi/2$.

3.45. $w\,(2i) = 0$, $\arg w'\,(2i) = \pi$.

3.46. $w\,(z_0) = 0$, $\arg w'\,(z_0) = \pi/2$.

Hállese la imagen E de la región D para la transformación homográfica:

3.47. $D=\{z \mid \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0\}$; $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

3.48*. $D=\left\{z \mid 0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}\right\}$; $w=\dfrac{1}{z-1}$.

3.49*. $D=\left\{z \mid 1 \leqslant |z| \leqslant 2,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right\}$; $w=1+\dfrac{1}{z}$.

3.50. $D=\{z \mid |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$; $w=i\,\dfrac{1-z}{1+z}$.

3.51. $D=\{z \mid 0<\operatorname{Re} z<1\}$; $w=\dfrac{z-1}{z-2}$.

3.52. D es una lúnula (circular) comprendida entre las circunferencias $|z-1|=1$, $|z-i|=1$; $w=-\dfrac{z}{z-1-i}$.

3.53.** Hállese la región D en el plano (z), la cual para la aplicación $w=\dfrac{z}{1-z}$ se transforma en el interior del círculo $|w|<r$ del plano (w).

3. Función potencial. La aplicación realizada por la función potencial $w=z^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), es conforme en el plano complejo ampliado en todos los puntos, excepto el punto $z=0$ $(w'|_{z=0}= = nz^{n-1}|_{z=0}=0)$. El ángulo $D=\left\{z \,\middle|\, \dfrac{2k\pi}{n}<\arg z<\dfrac{2(k+1)\pi}{n}\right\}$ para todo $k=0, 1, \ldots, n-1$ se aplica biyectivamente por la función potencial sobre todo el plano (w) con el corte por la parte positiva del eje real (además, al rayo $\arg z=\dfrac{2k\pi}{n}$ le corresponde el extremo superior del corte y al rayo $\arg z=\dfrac{2(k+1)\pi}{n}$, el extremo inferior). La función inversa $w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{\left(i\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$, donde $k=0, 1, \ldots, n-1$, $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, es, como se sabe, multiforme. Su rama uniforme (formada por la representación de la imagen de uno de los puntos) aplica el plano (z) con el corte según la parte negativa del eje real, sobre el sector correspondiente

$$E=\left\{w \,\middle|\, \frac{2k\pi}{n}<\arg w<\frac{2(k+1)\pi}{n}\right\},$$

k está fijo.

EJEMPLO 7. Hállese cómo se aplica el interior de la lúnula con vértices z_1 y z_2, formada por las circunferencias C_1 y C_2 sobre el círculo unitario.

◀ La transformación $w_1=-\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ aplica el punto $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$ en el punto $w_1=1$, el punto $z=z_1$ en el cero y el punto $z=z_2$ en el infinito. De este modo, el segmento que une los puntos z_1 y z_2 se aplica sobre el semieje real positivo. Los arcos de las circunferencias que forman la lúnula se aplican en los rayos $\arg w_1 = \alpha\pi$ y $\arg w_1 = -\beta\pi$. Por consiguiente, la región D se aplica sobre el sector $E_1 = \{w_1 \mid -\beta\pi < \arg w_1 < \alpha\pi\}$ (compárese con el problema 3.52). Giremos este sector en un ángulo $\beta\pi$, es decir, realicemos la transformación $w_2=e^{i\beta\pi}w_1$ y elevemos la función obtenida a la potencia $\frac{1}{\beta+\alpha}$:

$$w_3=(w_2)^{\frac{1}{\beta+\alpha}}.$$

El sector se aplicará en el semiplano superior. La función

$$w_4=e^{i\theta}\,\frac{w_3-w_3^0}{w_3-\overline{w_3^0}}$$

aplica el semiplano sobre el círculo unitario. Las magnitudes w_3^0 y θ se determinan por la representación complementaria de la aplicación

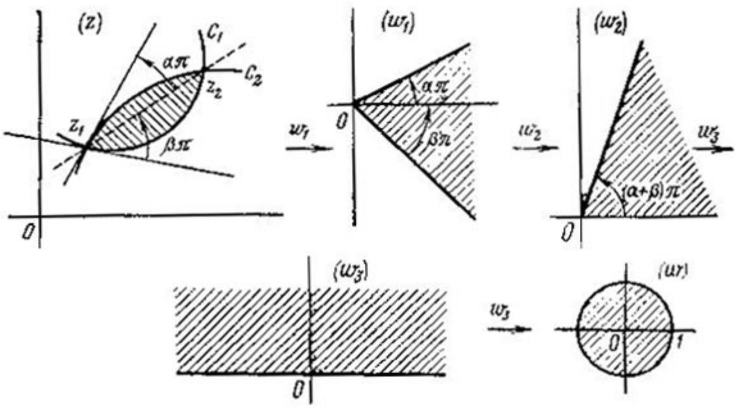

Fig. 94

del punto z_0 en el punto $w=0$ y por la condición $\arg w'(z_0)=\gamma$. Definitivamente, $w = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ (fig. 94). ▶

Hállese la función que aplica la región dada D del plano (z) sobre el semiplano superior (en las respuestas se indica una de las funciones que realizan la aplicación dada, además, si la función es multiforme, entonces se tiene en cuenta una de sus ramas uniformes):

3.54. $D=\{z \mid |z|<1,\ |z-1|<1\}$.

3.55. $D=\left\{z \mid -\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$.

3.56. $D=\{z \mid |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$.

3.57. $D=\{z \mid |z|>1,\ \operatorname{Im} z>0\}$.

3.58. $D = \{z \mid |z| < 2,\ 0 < \arg z < \pi/4\}$.

3.59. $D = \{z \mid |z| > 2,\ 0 < \arg z < 3\pi/2\}$.

3.60. $D = \{z \mid |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 1\}$.

3.61. $D = \{z \mid |z| < 1,\ |z + i| < 1\}$.

3.62. $D = \{z \mid |z| < 1,\ |z + i| > 1\}$.

3.63. $D = \{z \mid |z| > 1,\ |z + i| < 1\}$.

3.64. D es el plano (z) cortado según el segmento $[-i, i]$.

3.65. D es el plano (z) cortado según el segmento que une los puntos $1 + i$ y $2 + 2i$.

3.66. D es el plano con corte según los rayos $(-\infty, -R]$ y $[R, +\infty)$, $R > 0$.

3.67. D es el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ cortado según el segmento que une los puntos 0 e ih $(h > 0)$.

4. Función de Zhukovski. Tenemos $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $w' = \frac{1}{2}\frac{z^2-1}{z^2}$. Por consiguiente, la función de Zhukovski [1]) es conforme en todos los puntos del plano ampliado excepto los puntos $z_{1,2} = \pm 1$ y $z_3 = 0$. Ella aplica tanto el exterior, como el interior del círculo unitario del plano (z) sobre el plano (w) con corte por el segmento $[-1, 1]$. El plano completo (z) se aplica sobre la superficie de dos hojas de Riemann, pegada cruciformemente según los cortes $[-1, 1]$.

La función inversa

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

es biforme, además cada rama aplica el plano (w) con corte por el segmento $[-1, 1]$ sobre el interior o sobre el exterior del círculo unitario en el plano (z).

EJEMPLO 8. Hállese la imagen de la red polar $\rho = \text{const}$ y $\varphi = \text{const}$ para la transformación del plano (z) con ayuda de la función de Zhukovski.

◀ Poniendo $z = \rho e^{i\varphi}$, tenemos

$$w = u + iv = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \times \\ \times \cos\varphi + i\,\frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}\varphi.$$

---

[1]) N. E. Zhukovski fue el primero en emplear la aplicación conforme realizada por la función $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, como método para obtener una sola clase de perfiles aerodinámicos, que recibieron el nombre de perfiles de Zhukovski. Los perfiles de Zhukovski se aplican sobre el círculo, para el cual es fácil resolver el problema del flujo currentilíneo, lo que da la posibilidad de investigar el flujo currentilíneo del ala de avión.

Por consiguiente,

$$u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi,\quad v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}\varphi$$

y para $\rho\neq 1$ tenemos

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2}=1 \tag{4}$$

y

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\operatorname{sen}^2\varphi}=1. \tag{5}$$

De estas igualdades concluimos que las circunferencias $|z|=\rho\neq 1$ se aplican en las elipses del plano (w) con los semiejes $a=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)$ y $b=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)$ para $\rho>1$ ó $b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)$ para $\rho<1$. Los rayos $\varphi=\text{const}$ en el plano (z) se transforman, en las hipérbolas con los semiejes $a=|\cos\varphi|$ y $b=|\operatorname{sen}\varphi|$, en el plano (w).

Señalemos que las distancias focales $c=\sqrt{a^2-b^2}$ de las elipses (4) y $c_1=\sqrt{a^2+b^2}$ de las hipérbolas (5) son iguales a 1, es decir, (4) y (5) son familias de elipses y hipérbolas confocales. ▶

EJEMPLO 9. Hállese la aplicación del plano (z) con los cortes por el segmento que une los puntos 0 y $4i$ y por el segmento que une los puntos $2i$ y $2+2i$, sobre el interior del círculo unitario $|w|<1$.

◀ Hallamos la aplicación buscada w en forma de composición de cinco aplicaciones. La función $w_1=z-2i$ hace pasar el punto $z=2i$ en el origen de coordenadas y la función $w_2=e^{i\frac{\pi}{2}}w_1$ gira el plano (w_1) en ángulo $\pi/2$. El punto $z=4i$ pasa a consecuencia de estas aplicaciones al punto $w_2=-2$; el punto $z=2i$ al punto $w_2=0$; el punto $z=2+2i$ al punto $w_2=2i$ y el punto $z=0$ al punto $w_2=2$. Luego, como resultado de las aplicaciones $w_3=w_2^2$ y $w_4=w_3/4$ el corte se aplica en el segmento $[-1, 1]$ del plano (w_4) y, por fin,

$$w_5=w_4+\sqrt{w_4^2-1}$$

aplica el exterior del segmento $[-1, 1]$ sobre el interior del círculo unitario, con la particularidad de que se escoge la rama de esta función que para $w_4=\infty$ se anula. Así pues, $w=w_5\circ w_4\circ w_3\circ w_2\circ w_1$ (fig. 95). ▶

Hállense en los problemas 3.68—3.70 las imágenes de las regiones dadas para la aplicación $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

3.68. Del interior del círculo $|z|<R$ para $R<1$ y del exterior del círculo $|z|>R$ para $R>1$.

3.69. Del interior del círculo $|z| < 1$ con el corte por el segmento $[1/2, 1]$.

3.70. Del interior del círculo $|z| < 1$ con el corte por el segmento $[-1/2, 1]$.

3.71*. Hállese la aplicación del círculo $|z| < 1$ con el corte por el segmento $[1/3, 1]$ sobre el círculo $|w| < 1$.

3.72*. Hállese la aplicación de la región $D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| > R\}$ (el semiplano superior con el semicírculo eliminado) sobre el semiplano superior.

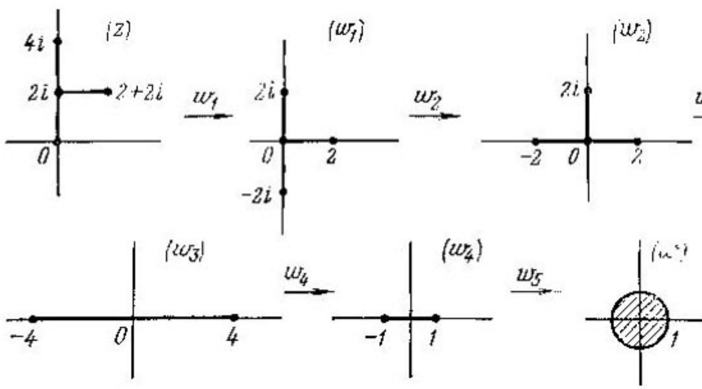

Fig. 95

3.73*. Aplíquese el exterior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ sobre el exterior del círculo unitario.

5. **Función exponencial.** La función $w = e^z$ es unifoliada en cualquier franja de ancho menor que 2π, paralela al eje real. Ella aplica la franja $-\infty < x < +\infty$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$ en el plano completo (w) con el corte por el semieje real negativo. Todo el plano se aplica sobre la superficie de Riemann de hoja infinita. La función inversa $z = \operatorname{Ln} w = \ln w + 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, es uniforme sobre esta superficie de Riemann y su valor principal $\ln w = \ln |w| + i \arg w$ determina la aplicación conforme de todo el plano con el corte $(-\infty, 0]$ sobre la franja $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ de 2π de ancho, paralela al eje real.

EJEMPLO 10. Hállese la aplicación de la franja de ancho H, $0 < \operatorname{Re} z < H$, paralela al eje imaginario, sobre el círculo unitario del plano (w).

◀ La solución buscada la obtendremos, por ejemplo, con ayuda de la composición de aplicaciones:

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} z, \quad w_2 = \frac{\pi}{H} w_1, \quad w_3 = e^{w_2}, \quad w_4 = e^{i\theta} \frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \overline{w}_3^0}.$$

Al realizar sucesivamente estas aplicaciones la franja dada se transforma en las regiones, representadas en la fig. 96. ▶

Hállese la imagen E de la región D para la aplicación $w = e^z$:

3.74. $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$.
3.75. $D = \{z \mid |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$.
3.76. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.
3.77. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.
3.78. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

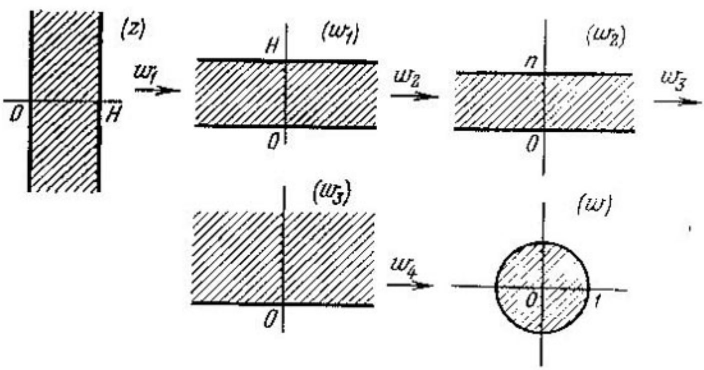

Fig. 96

3.79. Hállense las imágenes de las rectas $x = C$ e $y = C$ para la aplicación $w = e^z$.

Hállense las imágenes de las siguientes regiones para la aplicación $w = \ln z$, $w(i) = \dfrac{\pi i}{2}$:

3.80. $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.
3.81. $\{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.
3.82. $\{z \mid |z| < 1,\ z \notin [0, 1]\}$.
3.83. $\{z \mid z \notin [-\infty, -1] \cup [0, \infty]\}$.

6. Funciones trigonométricas e hiperbólicas. La función $w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ es unifoliada en la semifranja $-\pi < x \leqslant \pi$, $y > 0$ y aplica esta semifranja sobre el plano (w) con el corte $(-\infty, 1]$. La superficie de Riemann de esta función es más compleja que la de las anteriores, ya que las hojas se pegan separadamente por el rayo $(-\infty, -1)$ y por el segmento $[-1, 1]$.

La función $w = \operatorname{sen} z$ se reduce a la anterior con ayuda de la relación $\operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. A los sen z y cos z se reducen también las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{sh} z = -i \operatorname{sen} iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

3.84.** Hállese la imagen E de la semifranja $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ para la aplicación $w = \cos z$.

3.85. Hállese la imagen E de la red rectangular $x = C$, $y = C$ para la aplicación $w = \operatorname{ch} z$.

3.86. Hállese la imagen E del rectángulo $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, -h < \operatorname{Im} z < h, h > 0\}$ para la aplicación $w = \cos z$.

§ 4. Integral de una función de variable compleja

1. Integral por la curva y su cálculo. Si l es una curva suave a trozos dirigida en el plano (z) y para todo $z \in l$ está determinada la función $f(z)$, entonces, si existe el límite en el segundo miembro, se supone según la definición:

$$\int_l f(z)\,dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k. \tag{1}$$

Aquí $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $z_k \in l$, $k = 0, 1, \ldots, n$, los puntos $\xi_k \in l$ están elegidos en los segmentos l entre los puntos z_k y z_{k+1}. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces la integral se representa en la forma de la suma de dos integrales curvilíneas de segunda especie:

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_l v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy. \tag{2}$$

Si la función $f(z)$ es continua sobre l, entonces la integral (1) existe.

EJEMPLO 1. Valiéndose de la definición (1) calcúlese $\int_l \operatorname{Re} z\,dz$, donde l es el radio vector del punto $1 + i$.

◀ Dividamos el radio vector del punto $1 + i$ en n partes iguales, es decir, pongamos

$$z_k = \frac{k}{n} + i\frac{k}{n}, \quad \Delta z_k = \frac{1}{n}(1 + i), \ k = 0, 1, \ldots, n,$$

y sea $\xi_k = z_k$. Entonces la suma integral se escribe en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1+i}{n} = \frac{1+i}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1+i}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\int_l \operatorname{Re} z\, dz = \lim_{n\to\infty} \frac{(i+1)(n+1)}{2n} = \frac{1+i}{2}. \ \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Empleando la representación de la integral en la forma (2) y la regla para calcular las integrales curvilíneas de segunda especie, calcúlese la integral

$$\int_l |z|\,\bar{z}\, dz,$$

donde l es la semicircunferencia superior $|z| = 1$ con el recorrido antihorario.

◀ Tenemos

$$\int_l |z|\,\bar{z}\, dz = \int_l \sqrt{x^2+y^2}\,(x\,dx + y\,dy) + i\int_l \sqrt{x^2+y^2}\,(-y\,dx + x\,dy).$$

Pasando a la ecuación paramétrica de la curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, y teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2+y^2} = |z| = 1$ en los puntos de la curva, obtenemos

$$\int_l |z|\,\bar{z}\, dz = \int_0^\pi (-\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t)\, dt + i\int_0^\pi (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = \pi i. \ \blacktriangleright$$

4.1. Aplicando la sumación directa calcúlese la integral $\int_l z\, dz$, donde l es el radio vector del punto $2-i$.

4.2. Demuéstrese que si el camino de integración cambia de dirección la integral cambia de signo, es decir,

$$\int_{l^+} f(z)\, dz = -\int_{l^-} f(z)\, dz.$$

4.3. Demuéstrese que si a_1 y a_2 son constantes, entonces $\int_l (a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z))\, dz = a_1 \int_l f_2(z)\, dz + a_2 \int_l f_2(z)\, dz$.

4.4. Demuéstrese que si la curva de integración l es una reunión de las curvas l_1 y l_2, entonces

$$\int_l f(z)\,dz = \int_{l_1} f(z)\,dz + \int_{l_2} f(z)\,dz.$$

4.5*. Demuéstrese que tiene lugar la estimación

$$\left|\int_l f(z)\,dz\right| \leqslant \int_l |f(z)|\,ds,$$

donde ds es la diferencial del arco.

Calcúlense las integrales según los contornos dados:

4.6*. $\int_l (z-z_0)^n\,dz$, n es un número entero, $l = \{z \mid |z-z_0| = R\}$.

4.7. $\int_l (z-z_0)^n\,dz$, n es un número entero, $l = \{z \mid |z-z_0| = R,\ \operatorname{Im}(z-z_0) > 0\}$.

4.8. $\int_l \frac{z}{\bar z}\,dz$, $l = \left\{z \mid |z| = 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

2. Teorema de Cauchy. Fórmula integral de Cauchy. Si la función $f(z)$ es analítica en la región simplemente conexa D limitada por el contorno Γ, y γ es un contorno cerrado en D, entonces

$$\oint_\gamma f(\eta)\,d\eta = 0. \tag{3}$$

Si, además, la función $f(z)$ es continua en la región cerrada $\bar D = D + \Gamma$, entonces

$$\oint_\Gamma f(\eta)\,d\eta = 0, \quad \textit{(teorema de Cauchy)}.$$

Si la función $f(z)$ es analítica en la región múltiplemente conexa D, limitada por el contorno Γ y por los contornos $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ interiores respecto a Γ, y es continua en la región cerrada $\bar D = D + \Gamma^+ + \gamma_1^- + \ldots + \gamma_k^-$, donde los signos de los índices superiores significan la dirección de los recorridos (fig. 97), entonces

$$\oint_{\Gamma^+ + \sum\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu^-} f(\eta)\,d\eta = 0 \tag{4}$$

(teorema de Cauchy para la región múltiplemente conexa).

Si la función $f(z)$ está definida y es continua en la región simplemente conexa D y es tal, que para cualquier contorno cerrado $\gamma \subset D$

$$\oint_{\gamma} f(\eta)\, d\eta = 0,$$

entonces para un $z_0 \in D$ fijo la función

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\eta)\, d\eta$$

es una función analítica en la región D, para la cual $\Phi'(z) = f(z)$.

La función $\Phi(z)$ se llama función primitiva o integral indefinida de $f(z)$, con la particularidad de que si $F(z)$ es una de las primitivas para $f(z)$, entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\, d\eta = F(z_2) - F(z_1).$$

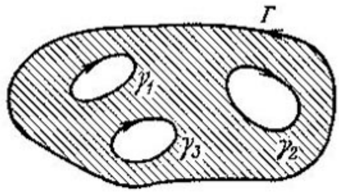

Fig. 97

Si $f(z)$ es analítica en la región D, $z_0 \in D$ y $\gamma \subset D$ es un contorno que rodea el punto z_0, es válida la *fórmula integral de Cauchy*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0}\, d\eta. \qquad (5)$$

En este caso la función $f(z)$ tiene en todos los puntos de D derivadas de cualquier orden, para las cuales son justas las fórmulas

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{k+1}}\, d\eta, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

EJEMPLO 3. Demuéstrese que si $f(z)$ es una función analítica y acotada en la región convexa D, entonces para cualesquiera dos puntos z_1 y z_2 de esta región tiene lugar la estimación

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\, d\eta \right| \leqslant \max_{z \in D} |f(z)|\, |z_2 - z_1|.$$

◀ De la convexidad de la región se deduce que si $z_1 \in D$, $z_2 \in D$, entonces el segmento que une estos puntos también pertenece a la región D. Del teorema de Cauchy se desprende que en calidad de camino de integración se puede tomar precisamente este segmento y, por ende, aplicando la estimación del problema 4.5, tenemos

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\, d\eta \right| \leqslant \max_{z \in D} |f(z)| \left| \int_{z_1}^{z_2} ds \right| = |z_2 - z_1| \max_{z \in D} |f(z)|. \;\blacktriangleright$$

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral

$$\int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2} = F(z) - F(0),$$

si el camino de integración no abarca ninguno de los puntos $z_{1,2} = \pm i$.

◀ Ya que la función subintegral $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ es analítica en todos los puntos, excepto los puntos, $z_{1,2} = \pm i$, entonces la integral $F(z)$ tiene sentido en todos los puntos, excepto $z = \pm i$ y a condición de que el camino de integración no pasa por estos puntos. Por consiguiente, si el camino de integración no abarca ninguno de los puntos $z_{1,2} = \pm i$, entonces a título de una de las funciones primitivas para la función $\frac{1}{z^2+1}$ se puede tomar una función uniforme $F(z) = \operatorname{arctg} z$ y, teniendo en cuenta que $\operatorname{arctg} 0 = 0$, tenemos

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2}. \;▶$$

EJEMPLO 5. Calcúlese la integral

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\operatorname{sen}\frac{iz\pi}{2}}{z^2+1}\, dz.$$

◀ Escribamos la integral en la forma de

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\frac{iz\pi}{2}}{z+i}}{z-i}\, dz$$

y utilizando la fórmula de Cauchy (5), hallamos

$$I = 2\pi i \left.\frac{\operatorname{sen}\frac{iz\pi}{2}}{z+i}\right|_{z=i} = 2\pi i\, \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2i} = -\pi. \;▶$$

EJEMPLO 6. Calcúlese la integral

$$I = \oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\, dz.$$

◀ Puesto que en el interior del contorno de integración el denominador de la función subintegral se reduce a cero en los puntos $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$, analicemos la región múltiplemente conexa D, limitada por la circunferencia $\Gamma = \{z \mid |z-2| = 3\}$ y por los contornos interiores $\gamma_1 = \{z \mid |z| = \rho\}$ y $\gamma_2 = \{z \mid |z - 1| = \rho\}$ $(0 < \rho < 1/2)$. Entonces en esta región D la función $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$ es analítica y según la fórmula (4) podemos escribir

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_1^-} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2^-} f(z)\,dz = 0,$$

de donde se desprende que

$$I = \oint_{\Gamma^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{\gamma_1^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz + \oint_{\gamma_2^+} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz.$$

Aplicando ahora las fórmulas (6) y (5), respectivamente, hallamos

$$\oint_{\gamma_1^+} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=0} = \pi i\,\frac{e^z(z^2-4z+5)}{(z-1)^3}\Bigg|_{z=0} = -5\pi i$$

y

$$\oint_{\gamma_2^+} \frac{e^z/z^3}{z-1}\,dz = 2\pi i\,\frac{e^z}{z^3}\Bigg|_{z=1} = 2\pi e i.$$

De este modo, $I = \pi i\,(2e-5)$. ▶

Calcúlense las integrales (los contornos se recorren en sentido antihorario):

4.9. a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$; b) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$.

4.10. $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{(z+i)^3}\,dz$. **4.11.** $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+2z}$.

4.12. $\displaystyle\oint_{C} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, donde:

a) $C = \{z \mid |z-1| = 1\}$; b) $C = \{z \mid |z+1| = 1\}$;
c) $C = \{z \mid |z| = R,\ R \neq 1\}$.

4.13. $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$.

4.14. Demuéstrese el teorema del valor medio: si la función $f(z)$ es analítica en el círculo $|z - z_0| < R$ y es continua en el círculo cerrado $|z - z_0| \leq R$, el valor de la función en el centro del círculo es igual a la media aritmética de sus valores en la circunferencia, es decir,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi R} \oint_{|\eta - z_0| = R} f(\eta)\, ds,$$

donde ds es la diferencial del arco.

4.15*. Es conocido que si $f(z) \not\equiv \text{const}$ es una función analítica en la región D y continua en la región cerrada $\overline{D} = D + L$, $\max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)|$ se alcanza sólo en la frontera de la región (principio del máximo del módulo). Demuéstrese que si, además, $\forall z \in \overline{D}\ (f(z) \neq 0)$, entonces $\min\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)|$ también se alcanza en la frontera.

4.16. Utilizando la fórmula (6) para $f'(z)$ demuéstrese el teorema de Liouville: si $f(z)$ es una función analítica y acotada por todo el plano (z), entonces $f(z) \equiv \text{const}$.

RESPUESTAS

1.1. El interior del círculo con el centro en el punto z_0 de radio R; simplemente conexa. **1.2.** El anillo entre las circunferencias de los radios 1 y 2 con el centro en el punto $z_0 = i$; doblemente conexa. **1.3.** El exterior del círculo de radio 2 con el centro en el punto $z_0 = i$, con el punto reducido infinitamente alejado; doblemente conexa. **1.4.** La franja horizontal comprendida entre las rectas $y = -1/2$ e $y = \infty$; simplemente conexa. **1.5.** El exterior del radio R con el centro en el punto z_0; simplemente conexa. El punto infinitamente alejado $z = \infty$ es el punto interior de esta región. **1.6.** El interior del círculo con el centro reducido $z_0 = -i$ de radio 2; doblemente conexa. **1.7.** El semiplano situado más a la izquierda de la recta $x = 1$. **1.8.** El interior del círculo de radio 2 con el centro en el punto (2, 0); simplemente conexa. **1.9.** La recta $x - y + 1 = 0$.

● Escríbase $\frac{z+1}{z-i}$ en la forma $\frac{(z+1)(\bar{z}+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)} = \frac{(z+1)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2}$. **1.10.** El interior de la elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. **1.11.** La circunferencia $|z| = 2$. **1.12.** La parte del plano situada a la derecha de la rama izquierda de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. **1.13.** La recta que pasa por los puntos z_1 y z_2 con un segmento recortado que une estos puntos. **1.14.** El interior del segmento que une los puntos $-i$ e i. ● Empléese la igualdad $\arg(-z) = \pi + \arg z$. **1.15.** $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. **1.16.** $\operatorname{Re} z < 0$. **1.17.** $|\operatorname{Re} z| < 3$.

1.18. $|z-(1+i)|+|z-(3+i)|<6$. **1.19.** $\dfrac{3\pi}{6}<\arg(z-z_0)<\dfrac{5\pi}{8}$. **1.20.** $2\varphi+4k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ **1.21.** $3\varphi+6k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ **1.22.** $\dfrac{1}{3}\psi+\dfrac{2k\pi}{3}$, $k=0, \pm 1, \ldots$, donde $\operatorname{tg}\psi=\dfrac{r \operatorname{sen}\varphi}{1+r\cos\varphi}$, $\operatorname{sen}\psi=$ $=\dfrac{r\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1+r^2+2r\cos\varphi}}$. **1.23.** $\dfrac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$, donde $\operatorname{tg}\psi=$ $=\dfrac{r\operatorname{sen}\varphi}{r\cos\varphi-8}$, $\operatorname{sen}\psi=\dfrac{r\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{64+r^2-16r\cos\varphi}}$. **1.24.** $\dfrac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=$ $=0, \pm 1, \ldots$, donde $\operatorname{tg}\psi=\dfrac{r^2\operatorname{sen}2\varphi}{r^2\cos 2\varphi-4}$, $\operatorname{sen}\psi=\dfrac{r^2\operatorname{sen}2\varphi}{\sqrt{r^4+16-8r^2\cos 2\varphi}}$. **1.25.** $\dfrac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$ donde $\operatorname{tg}\psi=\dfrac{3r\operatorname{sen}\varphi}{r^2-2-r\cos\varphi}$, $\operatorname{sen}\psi=$ $=\dfrac{3r\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{9r^2\operatorname{sen}^2\varphi+(r^2-2-r\cos\varphi)^2}}$. **1.26.** Cualquier región situada dentro del ángulo con vértice en el origen de coordenadas y una abertura no mayor que π/n. **1.27.** Cualquier región situada en la franja paralela al eje real y de ancho no mayor que 2π. **1.28.** Cualquier región situada en la franja paralela al eje imaginario y de ancho no mayor que $2\pi/3$. **1.29.** Cualquier región situada bien sea en el interior del círculo unitario ($|z|<1$), o bien fuera de él ($|z|>1$). ● La igualdad $z_1+\dfrac{1}{z_1}=z_2+\dfrac{1}{z_2}$ para $z_1\neq z_2$ se cumple sólo en el caso, cuando $z_2=\dfrac{1}{z_1}$. **1.30.** a) La recta $x=C$ se aplica en la parábola $v^2=4C^2\times$ $\times(C^2-u)$; la circunferencia $|z|=R$ en la circunferencia $|w|=$ $=R^2$ recorrida dos veces; el rayo $\arg z=\alpha$ en el rayo $\arg w=2\alpha$; el semicírculo $|z|<r$, $\operatorname{Im} z>0$ en el círculo $|w|<r^2$ con el corte por el segmento del eje real positivo.

b) ◀ Los puntos situados en la recta $x=C$ se escriben en la forma $z=C+iy$ y por eso $w=\dfrac{1}{C+iy}=\dfrac{C}{C^2+y^2}-i\dfrac{y}{C^2+y^2}$. De aquí $u=\dfrac{C}{C^2+y^2}$, $v=-\dfrac{y}{C^2+y^2}$, $u^2+v^2=\dfrac{1}{C^2+y^2}=\dfrac{u}{C}$. Por consiguiente, la imagen de la recta $x=C$ es la circunferencia u^2+v^2- $-\dfrac{u}{C}=0$. La imagen de la circunferencia $|z|=R$ es la circunferencia $|w|=\dfrac{1}{R}$. El rayo $\arg z=\alpha$, es decir, el rayo $(0, \infty\cdot e^{i\alpha})$ se aplicará en el rayo $(0, \infty\cdot e^{-i\alpha})$ que va del infinito. El semicírculo $|z|<r$, $\operatorname{Im} z>0$, se aplica en el semiplano inferior con el semicírculo cortado $|w|=\leqslant\dfrac{1}{r}$. $\operatorname{Im} w<0$. ▶ **1.31.** $f(z)$ es continua en D si $\forall\varepsilon>0\,\forall z\in D\,\exists\delta=\delta(\varepsilon, z)>0$ $((|\Delta z|<\delta \wedge z+\Delta z\in D)\Rightarrow$ $\Rightarrow|f(z+\Delta z)-f(z)|<\varepsilon)$. **1.36.** $\operatorname{ch} 1\cos 1-i\operatorname{sh} 1\operatorname{sen} 1$.

1.37. $\cos 1$. **1.38.** $\operatorname{sh} 2 \cos 1 + i \operatorname{ch} 2 \operatorname{sen} 1$. **1.39.** $(2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.40. $\frac{\pi}{2}$. **1.41.** $\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.42.** $\operatorname{Arcsen} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$, $\operatorname{Arcsen} i = 2k\pi - i \ln(\sqrt{2}-1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.43.** $\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$, $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3} = k\pi + \frac{i}{2} \ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.44.** $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$, $\operatorname{Arsh} i = \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.45.** $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$, $\operatorname{Arch}(-1) = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.46.** $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$, $\operatorname{Arth}(1-i) = \frac{1}{4} \ln 5 + \frac{i}{2} \operatorname{arctg} 2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.47.** $e^{2k\pi}(\cos \ln 2 + i \operatorname{sen} \ln 2)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.48.** $e^{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.49. $e^{\left(2k-\frac{1}{4}\right)\pi}\left(\cos \frac{\ln 2}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\ln 2}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.50.** $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.51.** $5e^{\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2k\pi}\left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.52.** $-5e^{\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + (2k+1)\pi}\left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \times \frac{4}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\ln 5 - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.53.** $f(0) = 0$. **1.54.** $f(0) = 0$. **1.55.** $f(0) = 0$. **1.56.** $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ no existe.

2.1. No es diferenciable en ningún punto. ● $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ no existe. **2.2.** No es diferenciable en ningún punto. ● Para $\Delta y = k\Delta x$ tenemos $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{1+ik}$, es decir, el límite no existe. **2.3.** Es diferenciable sólo en el punto $z=0$. **2.4.** Es diferenciable sólo en el punto $z=0$. **2.5.** No es diferenciable en ningún punto. ◀ En el punto $z=0$ $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z| - |z|}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta z}$ no existe. Si es que $z \neq 0$, entonces, designando $|z| = r$, $\Delta z = \Delta\rho e^{i\varphi}$, tenemos

$$\frac{|z+\Delta z| - |z|}{\Delta z} = \frac{r\left(\sqrt{1+\frac{2\Delta\rho}{r^2}(x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi) + \left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2} - 1\right)}{\Delta\rho e^{i\varphi}}.$$

De aquí hallamos $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \frac{r\left(\sqrt{1+2\frac{\Delta\rho}{r^2}x + \left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2} - 1\right)}{\Delta\rho} = \frac{x}{r}$

para $\varphi=0$ y $\lim\limits_{|\Delta\rho|\to 0}\dfrac{r\left(\sqrt{1+2\frac{\Delta\rho}{r}y+\left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2}-1\right)}{\Delta\rho}=-\dfrac{iy}{r}$ para $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. De este modo, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|z+\Delta z|+|z|}{\Delta z}$ no existe. ▶ **2.6.** Es diferenciable sólo en el punto $z=1$. **2.7.** ◎ Empléese la regla de la diferenciación de la función compuesta de dos variables $u(x,y)=u(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)$, $v(x,y)=v(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)$ y la condición (1): $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi-\dfrac{\partial v}{\partial x}\operatorname{sen}\varphi$ y $\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}=$ $=-\dfrac{\partial v}{\partial x}r\operatorname{sen}\varphi+\dfrac{\partial v}{\partial y}r\cos\varphi$, es decir, $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}$. Análogamente se comprueba la segunda de las igualdades (2). Para obtener las igualdades (4) es conveniente expresar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ mediante las derivadas por r y φ, obténganse las derivadas $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ a partir de las igualdades $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ y sustitúyanse las expresiones obtenidas en (3). **2.8.** $(e^{3z})'=3e^{3z}$. **2.9.** $(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$. **2.10.** $(z^n)'=nz^{n-1}$ (excepto el punto $z=0$ para n negativos). **2.11.** $(\cos z)'=-\operatorname{sen} z$. **2.12.** $(\ln(z^2))'=2/z$. **2.13.** $\left(\operatorname{sen}\dfrac{z}{3}\right)'=\dfrac{1}{3}\times\cos\dfrac{z}{3}$. **2.14.** ◎ Hágase uso de las condiciones de Cauchy—Riemann. **2.17.** Todo el plano, excepto los puntos $z=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $(\operatorname{tg} z)'=\dfrac{1}{\cos^2 z}$. **2.18.** Todo el plano; $f'(z)=e^{-z}(1-z)$. **2.19.** Todo el plano, excepto los puntos $z_{1,2}=\pm i$; $f'(z)=$ $=\dfrac{(1-z^2)\cos z-z(1+z^2)\operatorname{sen} z}{(1+z^2)^2}$. **2.20.** Todo el plano excepto los puntos $z_\nu=2\pi\nu i$, $\nu\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=-\dfrac{2e^z}{(e^z-1)^2}$. **2.21.** Todo el plano, excepto los puntos $z_\nu=\dfrac{\pi}{2}\nu$; $\nu\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=\cos 2z$. **2.22.** Todo el plano, excepto el punto $z=0$; $f'(z)=\dfrac{e^z(z-1)}{z^2}$. **2.23.** Todo el plano, excepto los puntos $z_k=\pi ki$, $k\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$. **2.24.** Todo el plano, excepto los puntos $z_k=\left(k+\dfrac{1}{4}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=$ $=\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} 2z}$. **2.26.** $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$. **2.27.** $\Delta u=0$.

$v(x, y)=3x^2y-y^3+C$, $f(z)=(x+iy)^3+Ci=z^3+Ci$. **2.28.** $\Delta v\equiv 0$, $u(x, y)=2e^x\cos y+C$, $f(z)=2e^x(\cos y+i\,\mathrm{sen}\,y)+C=2e^z+C$. **2.29.** $\Delta u\equiv 0$, $v(x, y)=-x^2+y^2+C$, $f(z)=-i(x^2-y^2+2ixy)+3+Ci=-iz^2+3+Ci$. **2.30.** $\Delta v\equiv 0$, $u(x, y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$, $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}+C=\ln|z|+i\arg z+C=\ln z+C$.

2.31. $\Delta u\equiv 0$, $v(x, y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+2x+C$, $f(z)=\frac{x-iy}{x^2+y^2}-2y+2ix+Ci=\frac{1}{z}+2iz+Ci$. **2.32.** $\Delta u\equiv 0$, $v(x, y)=-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+2xy+C$, $f(z)=z^2-\frac{i}{2}z^2+Ci=\frac{2-i}{2}z^2+Ci$. **2.33.** $\Delta v\equiv 0$, $u(x, y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)+C$, $f(z)=\frac{1}{2}z^2+C$.

3.1. $k=4$, $\varphi=\pi/4$. **3.2.** $k=2$, $\varphi=\pi/2$. **3.3.** $k=6$, $\varphi=\pi/2$. **3.4.** $k=3$, $\varphi=0$. **3.5.** $k=1$, $\varphi=0$. **3.6.** $k=2$, $\varphi=\pi/2$. **3.7.** La región $|z|>1$ se contrae, mientras que la región $|z|<1$ se alarga. **3.8.** El semiplano $\mathrm{Re}\,z<1$ se contrae y el semiplano $\mathrm{Re}\,z>1$ se alarga. **3.9.** La región $|z+1|>1$ se contrae y la región $|z+1|<1$ se alarga. **3.10.** El interior del círculo $|z+1|<1/2$ se contrae y el exterior de este círculo se alarga. **3.11.** $|z-1|=1/2$. **3.12.** $\left|z-\frac{i}{2}\right|=1/2$. **3.13.** $|z+i|=\sqrt{2}$. **3.14.** $|z|=1/\sqrt{3}$. **3.15.** $\{z\,|\,\mathrm{Im}\,(1-i)\,z=0\}$, es decir, la recta $y=x$. **3.16.** $\{z\,|\,\mathrm{Im}\,(1+i)(i+z)=0\}$, es decir, la recta $x+y+1=0$. ● Empléese la igualdad $\arg\frac{-i}{(i+z)^2}=\frac{3\pi}{2}-2\arg(i+z)=0$ y la relación $-\frac{3\pi}{4}=\arg(-1-i)$. **3.17.** El rayo $0<x<+\infty$, $y=-1/2$. **3.18.** El rayo $1<x<+\infty$, $y=0$. **3.19.** La aplicación es conforme. **3.20.** La aplicación no es conforme. **3.21.** La aplicación es conforme. **3.22.** La aplicación es conforme. **3.23.** La aplicación no es conforme. **3.25.** $z_0=-1$, $\alpha=0$, $k=2$. **3.26.** $z_0=2(1+i)$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $k=1$. **3.27.** $z_0=-\frac{i}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{8}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $k=1$. **3.28.** Para $a\neq 1$ $z_0=\frac{b}{1-a}$, $\alpha=\arg a$, $k=|a|$. **3.29.** La recta $v=-3$. **3.30.** La recta $u-2v=0$. **3.31.** La circunferencia $u^2+v^2-u-v=0$. **3.32.** La circunferencia $u^2+v^2+2u+2v+1=0$. **3.34.** $w=i\,\frac{z-i}{z-1}$. **3.35.** $w=\frac{(i+1)\,z-i}{z}$. **3.36.** $w=\frac{(5-3i)\,z-4}{4z-5-3i}$. **3.37.** $z_{1,2}=\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$, $z_1=z_2$ para $(a-d)^2+4bc=0$. El punto infinitamente alejado es inmóvil sólo cuando $c=0$, es decir, para la función lineal. 3.38. a) $\frac{1}{2}(1+i)$; b) $4+i$. ● El punto $1+i$ y el centro del círculo i están situados en la recta $y=1$. 3.39. a) $w|_{z=-1+i}=\frac{1+2i}{5}$; b) $w|_{z=1-9i}=$ $=\frac{81-2i}{65}$. 3.40. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\theta=\pi$, 3.41. $\alpha=0$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$. 3.42. $\alpha=z_0$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$. 3.44. $\alpha=i$, $\theta=0$. 3.45. $\alpha=2i$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$. 3.46. $\alpha=z_0$, $\theta=\pi$. 3.47. $E=\{w \mid |w|<1,\ \operatorname{Im} w<0\}$ (la semicircunferencia inferior). 3.48. $E=\left\{w \,\middle|\, \left|w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|>\frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{Im} w<0\right\}$

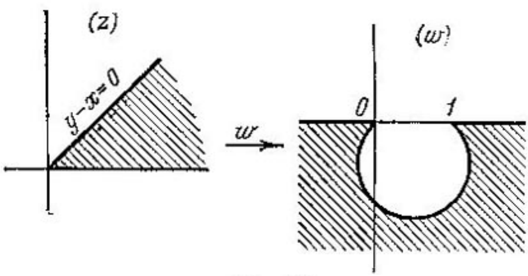

Fig. 98

(fig. 98). ● El rayo $0<x<+\infty$ se transforma en el exterior del segmento $0\leqslant u\leqslant 1$, además los puntos del semiplano superior (z) se aplican en los puntos del semiplano inferior (w). La recta $y-x=0$ se aplica en la circunferencia $w\bar{w}-\frac{1+i}{2}w+\frac{1-i}{2}\bar{w}=0$, es decir, en la circunferencia $\left|w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ con el centro en el punto $w_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. 3.49. $E=\left\{w \,\middle|\, \frac{1}{2}\leqslant|w-1|\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{4}<\right.$ $\left.<\arg(w-1)\leqslant 0\right\}$. ● La circunferencia $|z|=1$ se aplica en la circunferencia $|w-1|=1$, la circunferencia $|z|=2$ en la circunferencia $|w-1|=\frac{1}{2}$, el segmento $1\leqslant x\leqslant 2$ en el segmento $\frac{3}{2}\leqslant$ $\leqslant u\leqslant 2$ y la recta $y=x$ en la recta $u+v=1$ (fig. 99). 3.50. $E=$ $=\{w \mid \operatorname{Im} w>0,\ \operatorname{Re} w>0\}$. 3.51. $E=\left\{w \,\middle|\, \left|w-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},\ \left|w-\frac{3}{4}\right|>\right.$ $\left.>\frac{1}{4}\right\}$. 3.52. $E=\left\{w \,\middle|\, -\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{\pi}{4}\right\}$.

3.53.

$$D=\begin{cases} z \mid \left|z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right|<\dfrac{r}{1-r^2} & \text{para } r<1,\\ z \mid \operatorname{Re} z<\dfrac{1}{2} & \text{para } r=1,\\ z \mid \left|z-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right|>\dfrac{r}{r^2-1} & \text{para } r>1.\end{cases}$$

◀ Ya que $|w|<r$, entonces de la relación $w(1-z)=z$ obtenemos $|z|<r|1-z|$. Elevando ambos miembros de esta desi-

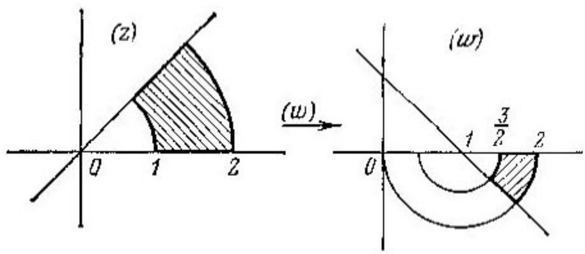

Fig. 99

gualdad al cuadrado escribimos la desigualdad obtenida en forma de $z\bar{z}<r^2(1-z)(1-\bar{z})$ de donde obtenemos

$$(r^2-1)z\bar{z}-r^2(z+\bar{z})+r^2>0. \qquad (*)$$

Si $r<1$ entonces de (*) tenemos

$$z\bar{z}+\frac{r^2}{1-r^2}(z+\bar{z})<\frac{r^2}{1-r^2}. \qquad (**)$$

Pero $z\bar{z}+\dfrac{r^2}{1-r^2}(z+\bar{z})=\left(z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right)\left(\bar{z}+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right)-\dfrac{r^4}{(1-r^2)^2}$. Luego, ya que $\dfrac{r^4}{(1-r^2)^2}+\dfrac{r^2}{1-r^2}=\dfrac{r^2}{(1-r^2)^2}$ entonces de (**) obtenemos $\left|z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right|^2<\left(\dfrac{r}{1-r^2}\right)^2$, es decir, $D=\left\{z \mid \left|z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right|<\dfrac{r}{1-r^2}\right\}$ (el interior del círculo). Análogamente en el caso de $r>1$ hallamos $z\bar{z}-\dfrac{r^2}{r^2-1}(z+\bar{z})>-\dfrac{r^2}{r^2-1}$, es decir, $\left|z-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right|^2>\dfrac{r^4}{(r^2-1)^2}-\dfrac{r^2}{r^2-1}=\dfrac{r^2}{(r^2-1)^2}$. Por consiguinte, $D=\left\{z \mid \left|z-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right|>\dfrac{r}{r^2-1}\right\}$ (el exterior del círculo). Por fin, si

$r=1$, entonces de $(*)$ obtenemos $z+\bar{z}<1$, es decir, $D=\left\{z \mid \operatorname{Re} z<\right.$ $\left.<\frac{1}{2}\right\}$ (un semiplano). ▶ 3.54. $w=-\frac{(z-z_1)^3}{(z-z_2)^3}$, $z_1=\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3.55. $w=e^{\frac{\pi i}{3}}\cdot z^{\frac{4}{3}}$. 3.56. $w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. 3.57. $w=$ $=-\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. 3.58. $w=\left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$. 3.59. $w=-\left(\frac{z^{2/3}+\sqrt[3]{4}}{z^{2/3}+\sqrt[3]{4}}\right)^2$.
3.60. $w=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. 3.61. $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^{3/2}$.
3.62. $w=\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^3$. 3.63. $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. 3.64. $w=\sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$. 3.65. $w=\sqrt{\frac{z-1-i}{2+2i-z}}$. 3.66. $w=\sqrt{\frac{z+R}{z-R}}$.
3.67. $w=\sqrt{z^2+h^2}$. 3.68. Tanto el interior del círculo $|z|<R$ para $R<1$, como el exterior del círculo $|z|>R$ para $R>1$, se aplican sobre el exterior de la elipse $\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+$ $+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$. 3.69. El plano con corte por el segmento $[-1,\ 5/4]$. 3.70. El plano con corte por los rayos $(-\infty,\ -5/4]$, $[1,\ +\infty)$. 3.71. Una de las respuestas: $w=\frac{3}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{4}+$ $+\sqrt{\left(\frac{3}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{4}\right)^2-1}$ (con la particularidad de que se elige la rama que pasa el punto $z=0$ al interior del círculo $|w|<$ <1). ● $w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $w_2=\frac{3w_1-1}{3}$, $w_3=\frac{3}{4}w_2$, $w_4=$ $=w_3+\sqrt{w_3^2-1}$, $w=w_4\circ w_3\circ w_2\circ w_1$. 3.72. $w=\frac{1}{2R}\left(z+\frac{R^2}{z}\right)$.
● Realícese la transformación de semejanza $w_1=\frac{z}{R}$ y para la aplicación $w_2=\frac{1}{2}\left(w_1+\frac{1}{w_1}\right)$ obsérvese la transformación de la frontera de la región. 3.73. $w=\frac{1}{a+b}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)$ donde $c=$ $=\sqrt{a^2-b^2}$. ● Realizando la transformación de semejanza $w_1=$ $=\frac{z}{c}$ y determinando R a partir de la condición $\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)=$

$=\frac{a}{c}$, $\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)=\frac{b}{a}$, hallamos $w_2=w_1+\sqrt{w_1^2-1}$ y $w_3=$ $=\frac{1}{R}w_2$. **3.74.** $E=\{w \mid \operatorname{Im} w<0\}$. **3.75.** $E=\{w \mid \operatorname{Re} w>0\}$. **3.76.** $E=\{w \mid |w|>1,\ w \notin [1, +\infty]\}$. **3.77.** $E=\left\{w \mid |w|>1,\ 0<\right.$ $\left.<\arg w<\frac{\pi}{2}\right\}$. **3.78.** $E=\{w \mid 1<|w|<e,\ \operatorname{Im} w>0\}$. **3.79.** Si $w=\rho e^{i\psi}$, entonces la recta $x=C$ se aplica en la circunferencia $\rho=e^C$ por la que pasa un número infinito de veces y la recta $y=C$ en el rayo $\psi=C$. **3.80.** $E=\{w \mid 0<\operatorname{Im} w<\pi\}$. **3.81.** $E=$

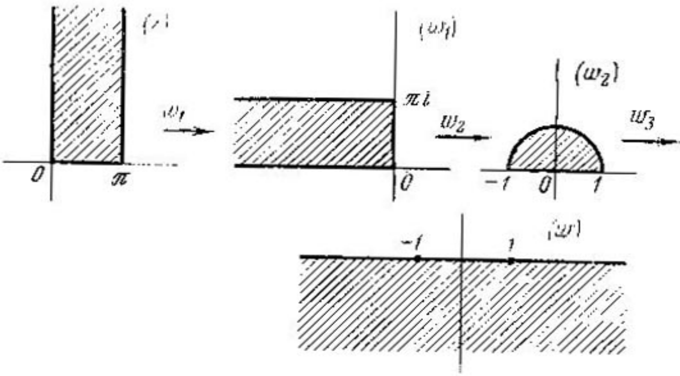

Fig. 100

$=\{w \mid \operatorname{Re} w<0,\ 0<\operatorname{Im} w<\pi\}$. **3.82.** $E=\{w \mid \operatorname{Re} w<0,\ 0<$ $<\operatorname{Im} w<2\pi\}$. **3.83.** $E=\{w \mid 0<\operatorname{Im} w<2\pi,\ w \neq u+i\pi$ para $u>0\}$. **3.84.** $E=\{w \mid \operatorname{Im} w<0\}$.

◀ Represéntese $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ en forma de composición de las aplicaciones $w_1=iz$, $w_2=e^{w_1}$, $w_3=\frac{1}{2}\left(w_2+\frac{1}{w_2}\right)$ (fig. 100).

▶ **3.85.** Las rectas $x=C$ se transforman en elipses $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$ donde $a^2=\frac{1}{4}(e^C+e^{-C})^2=(\operatorname{ch} C)^2$, $b^2=\frac{1}{4}(e^C-e^{-C})^2=(\operatorname{sh} C)^2$, y las rectas $y=C$ en las hipérbolas $\frac{u^2}{\cos^2 C}-\frac{v^2}{\operatorname{sen}^2 C}=1$. **3.86.** Puesto que la región D contiene puntos con partes imaginarias simétricas, entonces el campo de valores E será biforme: cada uno de los rectángulos $D_1=\{z \mid -\pi<\operatorname{Re} z<\pi,\ -h<\operatorname{Im} z<0$ y $D_2=$ $=\{z \mid -\pi<\operatorname{Re} z<\pi,\ 0<\operatorname{Im} z<h\}$ se aplicará sobre la mitad infe-

rior del interior de la elipse $\dfrac{u^2}{\frac{1}{4}(e^h+e^{-h})^2}+\dfrac{v^2}{\frac{1}{4}(e^h-e^{-h})^2}=$
$=1$, $v<0$.

4.1. $\dfrac{(2-i)^2}{2}$. 4.5. ● Estímese la suma integral (1) y tomando en consideración que $|\Delta z_k| \leqslant \Delta s_k$, pásese al límite para $\text{máx}\,\Delta s_k \to 0$. 4.6. $\oint\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 \text{ para } n \neq 1, \\ 2\pi i \text{ para } n=-1. \end{cases}$ ● Realícese el cambio de la variable $z-z_0=Re^{i\theta}$. 4.7. $\int\limits_{\substack{|z-z_0|=R \\ 0\leqslant \arg(z-z_0)\leqslant \pi}} (z-z_0)^n\,dz =$

$$=\begin{cases} \pi i \text{ para } n=-1, \\ 0 \quad \text{para } n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq -1, \\ -\dfrac{2R^{2k+1}}{2k+1} \text{ para } n=2k. \end{cases}$$

4.8. $-\dfrac{1+i}{3}$. 4.9. a) 0; b) $-8\pi i$. 4.10. $-\pi\,\mathrm{sh}\,1$. 4.11. 0. 4.12. a) $\dfrac{3\pi i}{8}$; b) $-\dfrac{3\pi i}{8}$; c) 0. 4.13. 0. 4.15. ● Analícese la función $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

CAPITULO 12

SERIES Y SUS APLICACIONES

§ 1. Series numéricas

1. Convergencia de la serie. Criterio de Cauchy. La expresión

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \tag{1}$$

donde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión numérica dada real o compleja, se llama *serie numérica*. Las sumas finitas

$$\begin{aligned}&S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ \ldots,\\&S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,\ \ldots\end{aligned} \tag{2}$$

se llaman *sumas parciales* de la serie (1).

Si existe el límite finito de la sucesión de las sumas parciales (2) $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, entonces la serie (1) se llama *convergente* y el número S, *suma de la serie* (1).

CRITERIO DE CAUCHY. *Para que la serie numérica* (1) *sea convergente es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon>0$ exista $N=N(\varepsilon)$ tal, que para todos los $n>$ y $p=1, 2, \ldots$ se cumpla la desigualdad*

$$|S_{n+p}-S_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

CRITERIO NECESARIO DE CONVERGENCIA. *Si la serie* (1) *converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

EJEMPLO 1. Muéstrese que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ converge y hállese su suma.

◀ Puesto que la fracción $\frac{1}{x(x+1)}$ es representable en forma de

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1},$$

entonces la suma parcial de la serie puede escribirse del modo siguiente

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}+\frac{1}{n\,(n+1)}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$
$$=1-\frac{1}{n+1}\,.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

es decir, la serie dada converge y su suma es igual a 1. ▶

EJEMPLO 2. Investíguese la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ y si converge, hállese su suma.

◀ Tenemos

$$S_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}.$$

Si $q=1$, entonces $S_n=n$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ y por consiguiente, la serie diverge. Sea ahora $q\neq 1$, entonces

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}\;\frac{q^n}{1-q}\,.$$

Pongamos $q=re^{i\varphi}$, entonces $q^n=r^ne^{in\varphi}$. Para $0<r<1$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\lim_{n\to\infty} r^ne^{in\varphi}=0,$$

es decir, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}=0$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\,\frac{1}{1-q}$. Si $r>1$, entonces $r^n\to\infty$, y por consiguiente, no existen el límite finito $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}$, ni el límite de la sucesión de sumas parciales. Por fin, para $r=1$ y $\varphi\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ el límite

$$\lim_{n\to\infty} e^{in\varphi}=\lim_{n\to\infty}(\cos n\varphi+i\,\mathrm{sen}\,n\varphi)$$

(y por eso también el límite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$) tampoco existe.

De este modo, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, llamada **progresión geométrica** infinita, converge para $|q|<1$ y su suma es igual a $\frac{1}{1-q}$, y diverge para $|q|\geqslant 1$. ▶

EJEMPLO 3. Demuéstrese que la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

diverge, a pesar de que sus términos tienden a cero cuando $n\to\infty$

◀ Analicemos la diferencia de las sumas parciales con números $2n$ y n. Tenemos

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Sustituyendo cada sumando por una magnitud menor $1/2n$ tenemos

$$S_{2n}-S_n>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Esta desigualdad significa que si $p=n$, para la serie armónica no se cumple el criterio de Cauchy y, por consiguiente, la serie diverge. ▶

Muéstrese que las series siguientes convergen y hállense sus sumas:

1.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

1.3*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{3^n}$. **1.4.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$.

Utilizando el criterio de Cauchy o el criterio necesario de convergencia de la serie, establézcase la divergencia de las series siguientes:

1.5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. **1.6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$.

1.7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. **1.8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^{10}}$.

1.9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{n2^n}$. **1.10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n}+in}$.

1.11. Demuéstrese que si los términos de la serie convergente se multiplican por un mismo número, entonces su convergencia no se perturbará.

1.12. Demuéstrese que si las series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergen y sus sumas son u y v, respectivamente, entonces también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, además su suma es igual a $u+v$. Póngase un ejemplo, cuando la afirmación recíproca no es válida.

1.13. Demuéstrese que la omisión de un número finito de los términos de la serie no influye sobre la convergencia de esta serie (¡pero influye sobre la suma!).

2. Convergencia absoluta y condicional. Criterios de convergencia absoluta. La serie (1) se llama *absolutamente convergente*, si converge la serie de módulos de los términos de esta serie, es decir, converge la serie

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{3}$$

Si la serie (1) converge y la serie (3) diverge, entonces la serie (1) se llama condicionalmente convergente.

CRITERIO DE COMPARACIÓN DE LAS SERIES. *Si los términos de la serie* (1) *para todos* $n > N_0$ $(N_0 \geqslant 1)$ *satisfacen la condición* $|u_n| \leqslant b_n$, *además la serie de signo positivo* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge, entonces la serie* (1) *absolutamente converge. Si para* $n > N_1$ *los términos de la serie* (1) *son reales y satisfacen la condición* $0 < c_n \leqslant |u_n|$, *además la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *diverge, entonces la serie* (1) *también diverge.*

EJEMPLO 4. Conociendo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, (véase el ejemplo 1) establézcase la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

◀ Ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, entonces, tomando en consideración la desigualdad

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

según el criterio de comparación nos cercioramos de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ▶

En la práctica resulta más eficaz el siguiente

CRITERIO LÍMITE DE COMPARACIÓN. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *converge absolutamente y existe el límite finito* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{v_n}\right| = q < +\infty$, *entonces la serie* (1) *también converge absolutamente. Si los términos de las series* u_n *y* v_n *son positivos y*

$$0 < \lim_{v\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty,$$

entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *bien ambas convergen, o bien ambas divergen.*

EJEMPLO 5. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n}. \tag{4}$$

◀ Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (véase el ejemplo 4) y ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n} : \frac{1}{n^2} = 3 \neq 0,$$

entonces la serie (4) también converge. ▶

EJEMPLO 6 Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}. \tag{5}$$

◀ Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n} : \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$$

y la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (véase el ejemplo 3), entonces a serie (5) también diverge. ▶

CRITERIO DE D'ALEMBERT. *Si los términos de la serie (1) son tales, que existe el límite finito*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l,$$

entonces para $0\leqslant l<1$ *la serie* (1) *converge absolutamente, para* $l>1$ *diverge y para* $l=1$ *se requiere una investigación complementaria.*

EJEMPLO 7. Investíguese la convergencia de la serie ▶

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}. \tag{6}$$

◀ Tenemos $u_n=\frac{n^3}{2^n}$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\,2^n}{2^{n+1}n^3}=\frac{1}{2}<1.$$

Así pues, la serie (6) converge.

CRITERIO DE CAUCHY *Sea* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=l$ *En este caso, si* $0\leqslant l<1$, *entonces la serie* (1) *converge absolutamente; si* $l>1$, *la serie* (1) *diverge y para* $l=1$ *se requiere una investigación complementaria.*

EJEMPLO 8. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}.$$

◀ Tenemos $u_n=\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$, por eso

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2<1.$$

Por consiguiente, la serie dada converge. ▶

Al aplicar el criterio de Cauchy suele ser útil la siguiente *fórmula de Stirling:*

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}},\quad 0<\theta<1.$$

EJEMPLO 9. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}.$$

Tenemos:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n\sqrt{2\pi n}}{n^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}\right)^{1/n}=$$

$$=\frac{2}{e}\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\cdot e^{\frac{0}{12n^2}}=\frac{2}{e}<1,$$

es decir, la serie converge. ▶

CRITERIO INTEGRAL DE CAUCHY. *Sea la función $f(x)$ positiva y monótona para $x\geqslant 1$ y supongamos que para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple la igualdad $f(n)=|u_n|$. Entonces la serie numérica* (3) *converge (es decir, la serie* (1) *converge absolutamente) o diverge simultáneamente con la integral impropia*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\quad a\geqslant 1.$$

EJEMPLO 10. Aclárese para qué valores del parámetro p converge la *serie de Dirichlet* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

▶ Puesto que la función $f(x)=\frac{1}{x^p}$ satisface las condiciones del criterio integral de Cauchy, entonces la investigación de la convergencia de la serie de Dirichlet se reduce a la investigación de la convergencia de la integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

$$\text{Pero}\quad\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty & \text{para}\quad p=1,\\ \lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{b^{1-p}}{1-p}-\dfrac{1}{1-p}=+\infty & \text{para}\quad 0<p<1,\\ \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{(p-1)\,b^{p-1}}\right)=\dfrac{1}{p-1} & \text{para}\quad p>1.\end{cases}$$

De aquí deducimos que la serie de Dirichlet converge para $p>1$ y diverge para $p\leqslant 1$ ▶

1.14. Demuéstrese que cualquier serie absolutamente convergente es una serie convergente.

1.15. Demuéstrese que se pueden agrupar los términos de la serie convergente sin alterar su orden, de un modo arbitrario.

1.16. Demuéstrese que se pueden reordenar de un modo arbitrario los términos de la serie absolutamente convergente; en este caso la suma de la serie no cambia.

Empleando el criterio de comparación o el criterio límite de comparación, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$. **1.18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3-1}$. **1.20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

1.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$. **1.22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$.

Aplicando el criterio de d'Alembert, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$. **1.24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

1.25. $\frac{3}{1}+\frac{3\cdot 5}{1\cdot 4}+\ldots+\frac{3\cdot 5\ldots(2n+1)}{1\cdot 4\ldots(3n-2)}+\ldots$

1.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}$. **1.27.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} tn}{3^n}$.

Empleando el criterio de Cauchy, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. **1.29.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.30. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, donde $u_{2k-1}=\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$, $u_{2k}=$
$=\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{k/2}$.

1.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3}\right)^n$.

Empleando el criterio integral de Cauchy, investíguese la convergencia de las series siguientes:

1.32. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. 1.33. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

1.34. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. 1.35. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

Investíguese la convergencia de las series:

1.36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. 1.37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

1.38. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. 1.39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

1.40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$. 1.41. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

1.42. $100+\frac{100\cdot 103}{1\cdot 5}+\frac{100\cdot 103\cdot 106}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots$
$\ldots+\frac{100\cdot 103\ldots(97+3n)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$

1.43. $1+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\ldots+\frac{1\cdot 11\cdot 21\ldots(10n-9)}{(2n-1)!}+\ldots$

1.44. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{(4n-2)!!}+\ldots$

1.45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 1.46. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n^2}$.

1.47. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. 1.48. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

1.49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$. 1.50*. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$.

1.51. $2+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\,\ldots\,(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\,\ldots\,(4n-3)}+\ldots$

1.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$. **1.53.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1.54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$. **1.55.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n$.

1.56. $\frac{1}{100}+\frac{1\cdot 4}{100\cdot 102}\,\frac{1\cdot 4\cdot 7}{100\cdot 102\cdot 104}+\ldots$

$\ldots+\frac{1\cdot 4\cdot 7\,\ldots\,(3n-2)}{100\cdot 102\,\ldots\,(98+2n)}+\ldots$

1.57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$. **1.58.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}$.

1.59. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$. **1.60.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(3n+1)\,(2\sqrt{n}-1)}$.

1.61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i}$. **1.62.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n\,n}{2^n}$.

1.63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n\cdot n}{2^n}$. **1.64.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$.

1.65. Investíguese la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^{\alpha}}$ para diversos valores reales p y α.

1.66. Investíguese la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^{\alpha}(\ln\ln n)^{\beta}}$ para distintos valores reales p, α y β.

1.67. Cerciórese de que el criterio de d'Alembert no es aplicable a la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, donde $u_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^k}$, $u_{2k}=\frac{2^k}{3^k}$, mientras que el criterio de Cauchy muestra que esta serie converge.

3. Criterios de convergencia condicional. CRITERIO DE LEIBNIZ. *Sean reales y monótonamente decrecientes los términos a_n de la serie de signo alterno*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \tag{7}$$

es decir,

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots, \tag{8}$$

y sea

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{9}$$

Entonces la serie (7) converge, además para su suma S tenemos la estimación $S < a_1$.

EJEMPLO 11. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

◀ Ya que $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, quedan cumplidas las condiciones (8) y (9) y la serie dada converge. La serie de magnitudes absolutas de términos, es decir, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Por consiguiente, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge condicionalmente. ▶

CRITERIO DE ABEL — DIRICHLET. *Supongamos que los términos de la sucesión (b_n) decrecen monótonamente: $b_1 > b_2 > \ldots > b_n > \ldots$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, mientras que las sumas parciales $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, están acotadas en su conjunto, es decir,*

$$\left| \sum_{n=1}^{n} a_k \right| \leqslant M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

EJEMPLO 12. Investíguese la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◀ Es obvio que en los puntos $x = m\pi$ todos los términos de la serie son nulos, es decir, para $x = m\pi$ la serie converge y su suma es igual a cero. Supongamos ahora que $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Calculemos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} kx =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x \right) =$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} .$$

De aquí concluimos que para cualesquiera $n = 1, 2, \ldots$ y $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx \right| \leqslant \frac{2}{2 \left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right|} = \frac{1}{\left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right|} .$$

Después, la sucesión $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbf{N}}$ decrece monótonamente $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. Así pues, para $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ se cumplen las condiciones del criterio de Abel—Dirichlet y por eso la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$ converge. Por consiguiente, la serie converge para cualquier x. ▶

Investíguese la convergencia absoluta y condicional de las series siguientes:

1.68. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}$. **1.69.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{n}}$.

1.70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}$.

1.71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n$.

1.72. $\frac{1}{3}-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7}-\ldots$

$$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\,\ldots\,(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\,\ldots\,(2n+1)}+\ldots$$

1.73. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

1.74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\,(2n-1)}$.

1.75. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\,(\ln\ln n)^3}$.

1.76. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

1.77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{(\ln 3)^n}$. **1.78*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4}}{n}$.

1.79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

Cerciórese de que no se puede aplicar el criterio de Leibniz a las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ con los términos ($k\in\mathbb{N}$) mencionados más abajo. Investíguese la convergencia de estas series utilizando otros procedimientos.

1.80*. $u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}$, $u_{2k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$.

1.81. $u_{2k-1}=\frac{1}{3k+2}$, $u_{2k}=-\frac{1}{3k-1}$.

1.82. $u_{2k-1}=\frac{1}{3^k}$, $u_{2k}=-\frac{1}{2^k}$.

1.83. $u_{2k-1}=\frac{1}{2k-1}$, $u_{2k}=-\frac{1}{k^2}$.

1.84*. Demuéstrese que de la convergencia de las series

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ se deduce la convergencia absoluta de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Se llama *producto, según Cauchy*, de las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, cuyos términos se obtienen según las fórmulas

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Investíguese la convergencia del producto, según Cauchy, de las series siguientes:

1.85.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

1.86*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

1.87*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

1.88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

1.89. Demuéstrese que si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces el producto, según Cauchy, converge.

Sean $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión numérica arbitraria, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, las sumas parciales de la serie convergente $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ y $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$, el resto de esta serie. Verifíquese la validez de las relaciones (llamadas *transformaciones de Abel*):

1.90. $\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) S_k - v_1 S_0 + v_n S_n$.

1.91. $\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m+1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) (S_k - S_m) + v_n \times$
$\times (S_n - S_m)$.

1.92. $\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m+2}^{n} (v_k - v_{k-1}) R_{k-1} +$
$+ v_{m+1} R_m - v_n R_n$.

1.93. Demuéstrese que para el resto R_n de la serie de signo alterno (7) que satisface las condiciones del criterio de Leibniz es válida la desigualdad $| R_n | < a_{n+1}$.

§ 2. Series de funciones

1. Región de convergencia de la serie de funciones. Supongamos que las funciones $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, están definidas en la región D. La expresión

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

se llama *serie de funciones*. Si para $z_0 \in D$ la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ converge, entonces decimos que la serie de funciones (1) *converge en el punto* z_0. Si en cada punto $z \in D_1 \subset D$ las series numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ convergen, la serie (1) lleva el nombre de *convergente en la región* D_1.

CRITERIO DE CAUCHY. *Para que la serie de funciones* (1) *sea convergente en la región* D_1 *es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *y cualquier* $z \in D_1$ *exista* $N = N(\varepsilon, z)$ *tal, que*

$$| f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z) | < \varepsilon$$

para todos los $n > N(\varepsilon, z)$ *y* $p \in \mathbb{N}$

Para definir la región de la convergencia absoluta de la serie de funciones (1) se debe emplear el criterio de d'Alembert o el criterio de Cauchy. Precisamente, si

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = l(z)$$

ó

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|f_n(z)|}=l(z),$$

entonces para determinar la región de la convergencia absoluta de la serie (1) es necesario resolver la desigualdad funcional $l(z)<1$ y para determinar la región de divergencia, la desigualdad funcional $l(z)>1$. En este caso, para estudiar el comportamiento de la serie en los puntos de frontera de la región que se obtiene, es decir, en los puntos descritos por la ecuación $l(z)=1$, se requiere una investigación complementaria.

EJEMPLO 1. Hállese la región de la convergencia para la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n3^n\sqrt{(x+2)^n}},\quad x\in\mathbb{R},\quad x>-2.$$

◀ Puesto que $|f_n(x)|=\dfrac{1}{n3^n\sqrt{(x+2)^n}}$ y $x>-2$, entonces, empleando el criterio de Cauchy, tenemos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n3^n\sqrt{(x+2)^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3(x+2)^{1/2}\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{3\sqrt{x+2}}.$$

Por consiguiente, la serie converge si $\dfrac{1}{3\sqrt{x+2}}<1$, es decir, para $x>-\dfrac{17}{9}$. Para $x=-\dfrac{17}{9}$ obtenemos la serie de signo alterno $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ que converge según el criterio de Leibniz. De este modo, la región de convergencia de la serie es un semiintervalo $[-17/9,\ +\infty)$. ▶

Hállense las regiones de convergencia de las series ($x\in\mathbb{R}$). Investíguense la convergencia absoluta de las series

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$. **2.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{x^n}$. **2.4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,(x+3)^n}$.

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^x$. **2.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\dfrac{1}{n2^nx^n}\right)$.

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{e^{nx}}$. **2.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x}$. **2.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$.

EJEMPLO 2. Hállese la región de convergencia de la serie de funciones $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^n}$, $z \in \mathbb{C}$.

◀ Aplicando el criterio de d'Alembert podemos escribir la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(z-i)^n}{(z-i)^{n+1}\, n} \right| = \frac{1}{|z-i|} < 1,$$

de donde deducimos que la serie converge absolutamente fuera del círculo de radio 1 y con el centro en el punto i, es decir, para $|z-i| > 1$. Sobre la circunferencia $|z-i| = 1$ la serie, obviamente, diverge ▶

Hállense las regiones de convergencia absoluta de las series dadas más abajo ($z \in \mathbb{C}$):

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}$. **2.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+1)^n}$.

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{(z-3i)^{2n}}$. **2.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, e^{-nz}$.

2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nz^2}$. **2.16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{nz}$.

2.17*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z}$. **2.18*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$.

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2}{1-2z}\right)^n$. **2.20*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$.

2. Convergencia uniforme. La serie de funciones convergente en la región D_1 se llama *uniformemente convergente* en esta región, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal, que para el resto de la serie (1)

$$R_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z),$$

cuando todos $n > N$ y $z \in D_1$, tiene lugar la estimación

$$|R_n(z)| < \varepsilon.$$

CRITERIO DE CAUCHY DE LA CONVERGENCIA UNIFORME. *Para que la serie de funciones (1) sea uniformemente convergente en la región D_1, es necesario y suficiente, que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista $N = N(\varepsilon)$ tal, que para todos los $n > N(\varepsilon)$ y $z \in D_1$ se cumplan las desigualdades*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \ p = 1, 2, \ldots .$$

EJEMPLO 3. Hállense la región de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z^n - z^{n+1}),$$

la suma de la serie y muéstrese que en toda la región de convergencia la serie converge no uniformemente.

◀ Puesto que las sumas parciales de la serie tienen la forma

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} (z^k - z^{k+1}) = 1 - z^{n+1},$$

podemos concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)$ existe sólo para $|z| < 1$ y en el punto $z = 1$, es decir, la región de convergencia de la serie es la región

$$D_1 = \{z \mid |z| < 1 \quad \text{y} \quad z = 1\},$$

además la suma de la serie es igual a

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{para } |z| < 1, \\ 0 & \text{para } z = 1. \end{cases}$$

El resto de la serie $R_n(z) = S(z) - S_n(z)$ tiene la forma

$$R_n(z) = \begin{cases} z^{n+1} & \text{para } |z| < 1, \\ 0 & \text{para } z = 1. \end{cases}$$

De aquí llegamos a la conclusión de que existen $\varepsilon_0 > 0$ y $N(\varepsilon_0)$ tales, que para cualquier $n > N(\varepsilon_0)$ haya z_n tal, que $|z_n| < 1$, pero $|R_n(z_n)| > \varepsilon_0$. Así, por ejemplo, tomando $\varepsilon_0 = 1/4$ y $z_n = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{n+1}}} e^{i\varphi_n}$ y eligiendo φ_n arbitrariamente, tenemos $|R_n(z_n)| = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$. Esto significa que en toda la región de convergencia D_1 no hay convergencia uniforme. Observemos, sin embargo, que en cualquier región $D_r = \{z \mid |z| \leqslant r < 1\}$ la serie convergirá uniformemente, ya que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $N = N(\varepsilon) = \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln r}$ tal, que para todos los $z \in D_r$ y $n > N(\varepsilon)$ tenemos $|R_n(z)| = |z|^{n+1} \leqslant r^{n+1} < \varepsilon$. ▶

CRITERIO DE WEIERSTRASS. *Supongamos que la serie de funciones* (1) *converge en la región* D_1 *y que existe la serie numérica convergente de signo positivo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tal, que para todo* $z \in D_1$ *y para* $n > N_0$ *los términos de la serie* (1) *satisfacen la condición*

$$|f_n(z)| \leqslant a_n.$$

Entonces la serie (1) *converge absoluta y uniformemente en la región* D_1.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se llama *mayorante* para la serie (1).

EJEMPLO 4. Hállese la región de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ y muéstrese que en esta región la serie converge uniformemente.

◀ Apliquemos el criterio de d'Alembert. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}n^2}{(n+1)^2 z^n} \right| = |z|.$$

Por consiguiente, en el círculo $|z| < 1$ la serie converge. En la frontera del círculo, es decir, para $|z| = 1$, obtenemos la serie convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

En este caso la serie inicial converge en el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$. Pero como para todos los $|z| \leqslant 1$

$$|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

la serie converge absoluta y uniformemente. ▶

Hállense la región de convergencia y la región de convergencia uniforme de las series dadas ($x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$):

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$. **2.22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$. **2.24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$. **2.26.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n^2}$.

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$. **2.28.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+2)^n}$.

2.29*. Demuéstrese que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, converge absolutamente en todos los puntos, pero no converge uniformemente en ningún intervalo, dentro o en la frontera del cual se encuentra el punto $x = 0$.

2.30. Demuéstrese, que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, converge absoluta y uniformemente en todo el eje numérico, mientras que la serie de magnitudes absolutas de los términos de la serie dada (la serie del problema 2.29) en todo el eje numérico converge no uniformemente.

2.31. Empleando el principio de máximo del módulo de la función analítica, demuéstrese que si los términos de la serie (1) son funciones analíticas en la región D y continuas en la región cerrada $\overline{D} = D + \Gamma$, y si la serie (1) converge uniformemente en Γ, entonces converge uniformemente en la región cerrada $\overline{D}$ (*segundo teorema de Weierstrass*).

2.32. Hállense la región de convergencia y la región de convergencia uniforme, así como la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n^n} - \frac{1}{1+z^{n+1}} \right).$$

3. Propiedades de las series convergentes uniformemente. Enunciemos varias propiedades en forma de problemas.

2.33. Demuéstrese que si los términos de la serie de funciones (1) convergente uniformemente en la región D_1 se multiplican por una misma función $\varphi(z)$ acotada en la región D_1, entonces la convergencia uniforme de la serie no se altera.

2.34. Demuéstrese que si las funciones $f_n(z)$ son continuas en la región D_1 y la serie (1) converge uniformemente en esta región, su suma $f(z)$ es continua en la región D_1.

2.35. Demuéstrese que si las funciones $f_n(z)$ son continuas en la región D_1 y la serie (1) converge uniformemente en esta región, se puede integrar término a término a lo largo de cualquier curva l, situada enteramente en la región

D_1, es decir, tiene lugar la igualdad

$$\int_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) \right) d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f_n(\eta)\, d\eta.$$

2.36*. Demuéstrese que si las funciones $f_n(x)$ son diferenciables en el segmento $[a, b]$, la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge y la serie de las derivadas $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente, entonces la serie inicial puede diferenciarse término a término, es decir, se cumple la igualdad

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Para las series convergentes uniformemente de las funciones analíticas se verifica el

TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Si los términos de la serie de funciones (1), es decir, las funciones $f_n(z)$, son funciones analíticas en la región D y en cualquier subregión cerrada $\overline{D}_1 \subset D$ la serie (1) converge uniformemente, entonces*

a) *la suma de la serie (1), es decir, la función $f(z)$, es analítica en la región D;*

b) *la serie (1) puede diferenciarse término a término cualquier número de veces, es decir, son válidas las igualdades*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad z \in D; \tag{2}$$

c) *en cualquier subregión cerrada $\overline{D}_1 \subset D$ las series (2) obtenidas como resultado de la diferenciación, convergen uniformemente.*

2.37. Empleando la afirmación de los problemas 2.34, 2.35 y el teorema de Morera (teorema inversa al teorema de Cauchy), demuéstrese la afirmación a) del teorema de Weierstrass.

2.38. Valiéndose de la fórmula de Cauchy para la derivada y de la afirmación del problema 2.35, demuéstrese la afirmación b) del teorema de Weierstrass.

§ 3. Series de potencias

1. Región de convergencia y propiedades de las series de potencias. La serie

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+$$
$$+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad (1)$$

se llama *serie potencial* de potencias $(z-z_0)$. En particular, la serie

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n \qquad (2)$$

es potencial de potencias de z. Sustituyendo $z-z_0=Z$ la serie (1) se reduce a la serie (2).

TEOREMA DE ABEL. *Si la serie de potencias* (2) *converge en el punto* $z=z_1\neq 0$, *converge absolutamente para todos los* z *tales, que* $|z|<|z_1|$, *además la convergencia será uniforme en cualquier círculo cerrado* $|z|\leqslant r<|z_1|$. *Si la serie* (2) *diverge en el punto* $z=z_2$, *también diverge para todos los* z *tales, que* $|z|>|z_2|$.

Del teorema de Abel se deduce que la región de convergencia de la serie potencial es un círculo con el centro en el origen de coordenadas (con el centro en el punto z_0), cuyo radio puede ser definido, aplicando bien sea el criterio de d'Alembert o el criterio de Cauchy, es decir, de las condiciones

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_nz^n}\right|=|z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|<1$$

o

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_nz^n|}=|z|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}<1.$$

De aquí, para calcular el radio R del círculo de convergencia obtenemos la relación

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} \quad \text{o} \quad R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

EJEMPLO 1. Investíguese la convergencia de la serie

$$\frac{(z+2)^2}{1\cdot 3}+\frac{(z+2)^4}{4\cdot 3^2}+\ldots+\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}.$$

◀ Apliquemos el criterio de d'Alembert:

$$u_n=\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n},\quad u_{n+1}=\frac{(z+2)^{2(n+1)}}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2)^{2(n+1)}\,n^2\cdot 3^n}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}\,(z+2)^{2n}}\right|=\frac{|z+2|^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{|z+2|^2}{3}.$$

De aquí llegamos a la conclusión de que la serie converge en el círculo $|z+2| < \sqrt{3}$. Luego, en la frontera del círculo, es decir, para $|z+2| = \sqrt{3}$ tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(z+2)^{2n}}{n^2 \cdot 3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

lo que significa que la serie converge absolutamente en el círculo cerrado $|z+2| \leqslant \sqrt{3}$, además, la convergencia en este círculo es uniforme. ▶

3.1. Enúnciese el teorema de Abel para la serie (1).

3.2*. Determínese que la serie potencial **(1)** posee las propiedades siguientes:

a) en el círculo de convergencia $|z - z_0| < R$ la suma de la serie potencial $f(z)$ es una función analítica;

b) en el círculo de convergencia $|z - z_0| < R$ la serie potencial se puede diferenciar término a término cualquier número de veces, además, las series diferenciables tienen el mismo círculo de convergencia $|z - z_0| < R$;

c) la serie (1) puede ser integrada término a término sobre cualquier curva situada en el círculo de convergencia, con la particularidad de que la integral depende sólo de los extremos de la curva de integración y la serie, obtenida de la serie (1) como resultado de la integración desde z_0 hasta z, tiene el mismo círculo de convergencia $|z - z_0| < R$.

3.3*. Supongamos que la serie de potencias (1) converge en el círculo $|z - z_0| < R$, $R > 0$, y que $f(z)$ es la suma de esta serie. Muéstrese que los valores de las derivadas $f^{(n)}(z)$ en el punto z_0 pueden expresarse mediante los coeficientes de la serie (1) según las fórmulas

$$f^{(n)}(z_0) = n! c_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Hállense las regiones de convergencia absoluta y las regiones de convergencia uniforme de las series siguientes ($z \in \mathbb{C}$). Sustituyendo en estas series z por $x \in \mathbb{R}$, investíguese la convergencia absoluta y uniforme de ellas.

3.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$. **3.5.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n \cdot 2^n \sqrt{2n+1}}$.

3.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+2)^{2n}}{n}$.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1} (z-4)^n}{(n+1) \sqrt{\ln (n+1)}}$.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (z-2)^{2n}}{n}$. 3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3)^{2n}}{(2n+1)\, 3^n}$.

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} nz^n$. 3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nz^n}{3n-2}$.

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\, z^n}{n!}$.

3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n+1} 2^n (z-1)^n$.

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, (z-i)^n$.

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n+1}}{3^n (2n+1)}$. 3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^n}$.

3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n+1)(z-1)^n$.

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-3)^n}{(2n+1)4^n}$.

3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{n!}$. 3.20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n 2^n \cdot \ln n}$.

3.21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{z^{3n-1}}{8^{n+1} n \ln^3 n}$. 3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n+1} (z-1)^n$.

3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. 3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n (z-3)^{2n-1}}{n(n+1)}$.

3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{n \sqrt{n}}$. 3.26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n}}{n 2^n \ln^2 n}$.

3.27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{2n-1}(z+3)^n$.

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, z^{n!}$. 3.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (z-5)^n}{(3n+1)^{10}}$.

3.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!\, 2^n}$. 3.31. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} z^{n^2}$.

3 32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^{n^n}}{n^n}$.

2. Desarrollo de las funciones en serie de Taylor. Tiene lugar el siguiente

TEOREMA DE TAYLOR *La función $f(z)$ analítica en el círculo $|z-z_0| < R$ se representa univocamente en este círculo por su serie de Taylor*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

cuyos coeficientes se determinan por las fórmulas [1])

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|\eta-z_0|=r\\ r<R}} \frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}\,d\eta,$$

$$n=0,\ 1,\ \ldots$$

COROLARIO. Si la función $f(z)$ es analítica en la región D y $z_0 \in D$, entonces en el círculo $|z-z_0| < R(z_0, D)$, donde $R(z_0, D)$ es la distancia mínima del punto z_0 hasta la frontera de la región D o hasta el punto más próximo z', en que $f(z)$ no es analítica, $f(z)$ puede representarse en forma de una serie de potencias

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n \tag{3}$$

cuyos coeficientes se determinan según las fórmulas

$$c_n(z_0)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|\eta-z_0|=r\\ r<R(z_0,\, D)}} \frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}\,d\eta,$$

$$n=0,\ 1,\ \ldots$$

---

[1]) Aquí y en adelante para anotar las integrales curvilíneas a lo largo de un contorno cerrado (integrales de contorno) empleamos el signo ordinario de la integral.

Si $z_0 = 0$, la serie de Taylor se llama también *serie de Maclaurin*.

EJEMPLO 2. Desarróllese la función $f(z) = \operatorname{sh} z$ en serie de potencias de z (es decir, en serie de Maclaurin).

◀ Ya que $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ es analítica en todo el plano, entonces según el teorema de Taylor su serie de Maclaurin convergirá a ella en todo el plano. Tenemos

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n+1)} = \operatorname{ch} z, \quad n = 0, 1,$$

y

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n)} = \operatorname{sh} z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente, $c_{2n} = \dfrac{f^{2n}(0)}{(2n)!} = 0$ y $c_{2n+1} = \dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{(2n+1)!}$, y el desarrollo buscado tiene la forma

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}. ▶$$

OBSERVACION. Si se examina la serie de Taylor de la función $f(x)$ de variable real, es decir, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

entonces, para que la igualdad (3) sea justa (cuando $z = x$ y $z_0 = x_0$) es necesario y suficiente que el término residual de la fórmula de Taylor $R_n(x)$ tienda hacia el cero para $n \to \infty$. El término residual puede ser anotado, por ejemplo, en la forma de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

$$\text{donde } 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

o en la forma de Cauchy

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

o en cualquier forma arbitraria.

EJEMPLO 3. Desarróllese la función e^x en serie de Taylor de potencias de x.

◀ La función $f(x) = e^x$ es infinitamente diferenciable y $(e^x)^{(n)} = e^x$. Por consiguiente, $f^{(n)}(0) = 1$. La fórmula de Taylor con el término residual en la forma de Lagrange tiene la forma

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

En cualquier segmento finito $x \in [-a, a]$, $a > 0$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \leqslant e^{a} \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

y por eso para todo $x \in \mathbb{R}$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} . \blacktriangleright$$

Para resolver varios problemas se recomienda emplear los siguientes desarrollos de las funciones elementales:

a) $e^{z} = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $\quad z \in \mathbb{C}$.

b) $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$
$\times \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\quad z \in \mathbb{C}$.

c) $\operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$
$\times \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad z \in \mathbb{C}$.

d) $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{z^n}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times$
$\times \dfrac{z^n}{n}$, $\quad |z| < 1$.

e) $\operatorname{arctg} z = z - \dfrac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times$
$\times \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $\quad |z| < 1$.

f) $(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots +$
$+ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots = 1 +$
$+ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$, $\quad |z| < 1$, $\quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(en el caso cuando $\alpha = m \in \mathbb{N}$ la función $(1 + z)^m$ se desarrolla según el binomio de Newton en polinomio, además el desarrollo se realiza en todo el plano).

g) para $\alpha = -1$ de f) obtenemos una progresión geométrica infinita con denominador $-z$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots,$$
$$|z| < 1.$$

EJEMPLO 4. Desarróllese la función $\ln(2-5z)$ en serie de potencias de $(z+3)$.

◀ Transformemos el argumento de nuestra función formando la expresión $(z+3)$ con cierto coeficiente. Tenemos:

$$\ln(2-5z) = \ln(2-5(z+3)+15) = \ln 17\left(1 - \frac{5}{17}(z+3)\right) =$$
$$= \ln 17 + \ln\left(1 - \frac{5(z+3)}{17}\right).$$

Apliquemos el desarrollo d) para $\ln(1+u)$, poniendo $u = -\frac{5}{17}(z + 3)$. Ya que el desarrollo d) se verifica para $|u| < 1$, entonces nuestro desarrollo se cumplirá para $\frac{5}{17}|z+3| < 1$. De este modo,

$$\ln(2-5z) = \ln 17 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(-\frac{5}{17}(z+3)\right)^n \frac{1}{n} =$$
$$= \ln 17 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{17}\right)^n \frac{(z+3)^n}{n}, \quad |z+3| < \frac{17}{5}.$$

Señalemos que en el eje real en el punto $x = 2/5$ la serie diverge (serie armónica) y en el punto $x = -32/5$, según el criterio de Leibniz, converge. Por consiguiente, $[-32/5, 2/5)$ es el intervalo de convergencia en el eje real. ▶

A menudo para desarrollar la función en serie es cómodo diferenciar o integrar los desarrollos conocidos y para desarrollar las fracciones racionales es conveniente desarrollarlas en fracciones simples.

EJEMPLO 5. Obténgase el desarrollo d) para la función $f(z) = \ln(1+z)$.

◀ Tenemos

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta},$$

donde el camino de integración no rodea el punto $z = -1$. Señalemos que la función $\frac{1}{1+\eta}$ para $|\eta| < 1$ es la suma de la progresión geométrica con denominador $(-\eta)$, es decir,

$$\frac{1}{1+\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\eta)^n,$$

además, si $|\eta|\leqslant|z|<1$, la serie converge uniformemente y se puede integrar término a término. Por eso para z tales, que $|z|<1$, tenemos:

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{d\eta}{1+\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-\eta)^n\,d\eta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}.\ ►$$

EJEMPLO 6. Desarróllese la función

$$f(z)=\frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)}$$

en serie de potencias de z.

◄ Desarrollemos $f(z)$ en fracciones simples. Tenemos

$$f(z)=\frac{1}{2z+5}+\frac{2}{(z-3)^2}.$$

Según la fórmula de la suma de la progresión geométrica

$$\frac{1}{2z+5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{2z}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2z}{5}\right)^n,\quad |z|<\frac{5}{2},$$

y

$$\frac{2}{z-3}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n,\quad |z|<3.$$

Teniendo presente que

$$\left(\frac{2}{z-3}\right)'=-\frac{2}{(z-3)^2}$$

y considerando la afirmación b) del problema 3 2, obtenemos

$$\frac{2}{(z-3)^2}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^n}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{3^{n+1}},\quad |z|<3.$$

Sumando las series para $\frac{1}{2z+5}$ y $\frac{2}{(z-3)^2}$ tenemos

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}+\frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\right)z^n, \quad |z|<\frac{5}{2}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 7. Desarróllese la función

$$f(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$$

en serie de potencias de x $(x \in \mathbb{R})$.

◀ Conociendo el desarrollo de la función $\operatorname{sen} u=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \times$ $\times \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (véase el desarrollo c)), tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} u}{u}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{2k}}{(2k+1)!}, \quad u\in\mathbb{R}$$

y por eso, utilizando la propiedad c) del problema 3.2, obtendremos

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^x\frac{u^{2k}}{(2k+1)!}\,du=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+1)}, \quad x\in\mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Recurriendo al teorema de Taylor (a la fórmula de Taylor con término residual en una forma cualquiera para la función de variable real) desarróllense en series de potencias de z las siguientes funciones, verificando de este modo la validez de las relaciones respectivas de a) — f):

3.33. e^z. **3.34.** $\cos z$. **3.35.** $\operatorname{sen} z$. **3.36.** $(1+z)^\alpha$.

3.37. 2^z. **3.38.** $\operatorname{sen}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$. **3.39.** $\cos^2 z$.

Escríbanse los primeros tres términos no nulos del desarrollo en serie de potencias de z de las siguientes funciones:

3.40*. $\operatorname{tg} z$. **3.41.** $\frac{1}{\cos z}$. **3.42.** $\operatorname{th} z$. **3.43.** $e^z\cos z$.

Empleando los desarrollos de las principales funciones elementales a) – g), así como la posibilidad de diferenciar e integrar término a término las series potenciales, desarróllense las funciones en series de potencias de z o indíquense las regiones de convergencia de las series obtenidas [1]):

3.44. e^{-z^2}. **3.45.** $\operatorname{tg}^2 z$. **3.46.** $\frac{z}{4+z^2}$.

3.47. $\frac{z}{3+4z}$. **3.48.** $\sqrt[3]{27-z}$. **3.49.** $\frac{1}{\sqrt{9+z^2}}$.

3.50*. $\frac{3z+1}{(z-2)^2}$. **3.51.** $\frac{3}{1+z-2z^2}$.

3.52. $(1-z)\,e^{-2z}$. **3.53.** $\operatorname{ch} z$.
3.54. $\operatorname{sen} 2z + 2z\cos 2z$. **3.55.** $\operatorname{sen} 2z \cos 2z$.
3.56. $\ln(1+z-2z^2)$. **3.57.** $\ln(z^2+3z+2)$.

3.58. $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$. **3.59.** $\operatorname{arctg} z$.

3.60. $\operatorname{arcsen} z$. **3.61.** $\int\limits_0^z e^{-\eta^2/2}\,d\eta$.

3.62. $\int\limits_0^z \frac{\operatorname{sen}\eta^2}{\eta}\,d\eta$. **3.63*.** $\frac{z\cos z-\operatorname{sen} z}{z^2}$.

3.64*. $\frac{z\operatorname{sen} z-1+\cos z}{z^2}$.

Desarróllense las funciones en series de potencias de $(z-z_0)$ y determínense las regiones de convergencia de las series obtenidas:

3.65. z^3-2z^2-5z-2, $z_0=-4$.

3.66. $\frac{1}{1-z}$, $z_0=2$. **3.67.** $\frac{1}{1-z}$, $z_0=3i$.

3.68. $\frac{1}{z^2-6z+5}$, $z_0=3$. **3.69.** $\frac{1}{z^2+3z+2}$, $z_0=-4$.

3.70. $\sqrt[3]{z}$, $z_0=1$ **3.71*.** $\frac{1}{z^2}$, $z_0=2$.

3.72. e^{z^2-4z+1}, $z_0=2$. **3.73.** e^{2z-z^2}, $z_0=1$.
3.74. $\operatorname{sen}(z^2+4z)$, $z_0=-2$.
3.75*. $\ln(5z+3)$, $z_0=1$.
3.76. $\ln(z^2+6z+12)$, $z_0=-3$.

---

[1]) Véanse también los problemas 4.31.—4.36

Hállense las regiones de convergencia de las series indicadas y sus sumas:

3.77. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n$.

3.78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^n$. **3.79.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{n+1}$.

3.80. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{-2n-2}z^{2n}$, $a\neq 0$.

3.81. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n}$.

3. Teorema de unicidad. Prolongación analítica. Enunciemos *el teorema de unicidad*:

Si las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en la región D y en el conjunto de distintos puntos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiene el punto límite $a\in D$, se cumplen las igualdades $f(z_n)=g(z_n)$, $n\in\mathbb{N}$, entonces $f(z)=g(z)$ en todos los puntos de D.

Supongamos que la función $f(z)$ es analítica en la región D y la función $g(z)$ es analítica en la región D_1 tal, que la intersección $D\cap D_1=D_2$ contiene una sucesión de distintos puntos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiene por lo menos un punto límite $a\in D_2$. Sea, además, $f(z)=g(z)$ para $z\in D_2$. Entonces la función

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & \text{para } z\in D,\\ g(z) & \text{para } z\in D_1\setminus D_2\end{cases}$$

se llama *prolongación analítica* de la función $f(z)$ de la región D a la región $D_1\setminus D_2$.

EJEMPLO 8. Demuéstrese que si la función $f(z)$ es continua en la región D que contiene el punto $z=0$, y si $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n}$ para $n=n_0+1, n_0+2, \ldots$, entonces $f(z)$ no es analítica en la región D ($n_0\geqslant 1$ es entero).

◀ Puesto que $f(z)$ es continua en D, es también continua en el segmento del eje real, mientras que en los puntos vecinos $x=\frac{1}{n}$ y $x=\frac{1}{n+1}$, $n>n_0$, ella toma los valores de los signos opuestos Por eso existen los puntos $x_n\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ en los cuales $f(x_n)=0$ y, además, $x_n\to 0$. Por consiguiente, en los puntos $x_n\in D$ la función $f(z)$ coincide con la función analítica $g(z)\equiv 0$; ya que $f(z)\not\equiv 0$, $f(z)$ no puede ser una función analítica. ▶

EJEMPLO 9. Demuéstrese que la función

$$g(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{z}{(1-z)^2}+\ldots+\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}+\ldots$$

es prolongación analítica de la función

$$f(z) = 1 + 2z + 2^2z^2 + \ldots + 2^nz^n + \ldots$$

◀ Determinemos la región de convergencia de las series para $g(z)$ y $f(z)$. Tenemos:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{|1-z|^{n+1}}} = \left|\frac{z}{1-z}\right| < 1$$

y

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|2^nz^n|} = 2|z| < 1,$$

es decir, la serie para $g(z)$ converge en la región $D_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z < 1/2\}$ (véase el problema (2.20)), mientras que la serie para $f(z)$ converge en la región $D_2 = \{z \mid |z| < 1/2\}$.

Determinemos las sumas de estas series en las regiones indicadas:

$$g(z) \frac{z}{1-z}\left(1 + \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{(1-z)^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-z}} = \frac{1}{1-2z}$$

y

$$f(z) = \frac{1}{1-2z}.$$

Ya que $D_2 \subset D_1$ y en la región D_2 se verifica la identidad $f(z) = g(z)$, la función $g(z)$ es una prolongación analítica de la función $f(z)$ de la región D_2 a la región D_1. ▶

3.82. Demuéstrese que para todo $a \neq 0$ y $|a| \neq 1$ la ecuación funcional $f(z) = f(az)$ no tiene solución, que sea analítica en el punto $z = 0$ y su entorno, y distinta de $f(z) \equiv \text{const}$.

3.83*. Demuéstrese el teorema de unicidad en el caso cuando $\forall z \in D$ $(g(z) = 0)$, es decir, demuéstrese el teorema siguiente: si la función $f(z)$ analítica en la región D se reduce a cero en los puntos $(z_h)_{h\in\mathbb{N}}$ situados en la región D y tales, que $\lim_{k\to\infty} z_k = a \in D$, entonces $\forall z \in D$ $(f(z) = 0)$.

3.84. ¿Será analítica la función $f(z)$ en el punto $z = 0$ y su entorno, si para todos los $n > n_0$ enteros satisface la relación $f\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}$?

3.85. Hállense las funciones analíticas $f(z)$ en el entorno del punto $z=0$, que satisfacen las condiciones:

a) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$;

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}$.

3.86. Muéstrese que la función

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

es prolongación analítica de la función

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Hállese la expresión analítica de estas funciones en la parte común de las regiones de convergencia de las series.

3.87. Muéstrese que la función

$$g(z)=\ln(2+2i)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1-2i)^n}{n(2+2i)^n}$$

es prolongación analítica de la función

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}.$$

Hállese la expresión analítica de estas funciones en la parte común de las regiones de convergencia de las series.

§ 4. Aplicación de las series de potencias

1. Cálculo de los valores de las funciones. Los desarrollos a) – g) del § 3 permiten obtener los valores de las funciones correspondientes en los puntos dados con cualquier exactitud.

EJEMPLO 1. Hállese el número e con exactitud hasta 0,00001.

◀ Sustituyendo $x=1$ en el desarrollo da la función e^x tenemos

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Estimemos el resto

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ldots k} <$$

$$< \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}.$$

Por consiguiente, la igualdad $e = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ tiene un error absoluto límite igual a $\frac{1}{n!\,n}$. Hallemos n para el cual $\frac{1}{n!\,n} < 0{,}00001$ ó $n!\,n > 100\,000$. Obtenemos $n \geqslant 8$. Calculando $2 + \sum\limits_{k=2}^{8} \frac{1}{k!}$ y redondeando, hallamos la respuesta con la exactitud requerida de $e = 2{,}71828$. ▶

4.1. Determínese el número de términos que hay que tomar en el desarrollo de la función $\ln(1+x)$, para calcular $\ln 2$ con exactitud de hasta 0,0001.

4.2. Determínese el número de términos de la serie que hay que tomar en el desarrollo de la función $\cos x$, para calcular el $\cos 10°$ con exactitud hasta 0,0001.

4.3. ¿Con qué error absoluto límite se puede calcular

$$\sqrt[5]{36}\,(32+4)^{1/5} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/5}$$

tomando tres términos de la serie binomial?

4.4. ¿Para qué x el polinomio $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ da el valor de la función $\operatorname{sen} x$ con exactitud hasta 0,0001?

4.5. ¿Cuál es el error absoluto límite de la igualdad

$$\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3}$$

al calcular la $\sqrt{5}$?

Empleando los desarrollos correspondientes, calcúlense los valores indicados de la función con exactitud hasta 0,0001:

4.6. $\sqrt{e}$ **4.7.** $\frac{1}{e}$. **4.8.** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$.

4.9. sen 12°. 4.10. cos 1. 4.11*. sen 1000.
4.12*. $\sqrt[3]{520}$. 4.13*. $\sqrt{15}$. 4.14*. $\sqrt[4]{700}$.

4.15*. ln 2. 4.16. $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4.17. $I_0(0{,}5)$, donde $I_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$.

4.18. sh 1. 4.19. ch 1.

En los problemas 4.20—4.29, empleando los desarrollos en series potenciales, se requiere formar en Fortran los subprogramas-funciones para calcular los valores de las funciones indicadas, con el error absoluto límite dado. Utilícense los parámetros X, EPS, donde X es el argumento y EPS es el error absoluto límite. Se debe escoger los nombres de los subprogramas que no coinciden con los nombres de los subprogramas funciones estándares correspondientes.

4.20*. $y=\operatorname{sen} x$. 4.21. $y=\cos x$.
4.22*. $y=e^x$. 4.23*. $y=(1+x)^\alpha$.

4.24. $y=\ln(1+x)$. 4.25*. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$,

4.26. $y=\operatorname{arctg} x$.
4.27. $y=I_0(x)$ (véase el problema 4.17).
4.28. $y=\operatorname{sh} x$. 4.29. $y=\operatorname{ch} x$.

4.30. Compóngase en Fortran el programa de la resolución de uno de los problemas 4.6—4.19, aplicando los subprogramas-funciones recibidos al resolver los problemas 4.20—4.29. En el programa es necesario prever la comparación de los resultados calculados por medio de la composición de un subprograma-función y empleando el subprograma-función estándar que entra en la biblioteca de los subprogramas obligatorios.

2. Integración de funciones. Desarrollando la función subintegral $f(t)$ en serie potencial, se puede, aplicando el teorema de la integración de las series potenciales, representar la integral $\int_0^x f(t)\,dt$ en forma de serie potencial y calcular el valor de esta integral con exactitud prefijada para cualquier valor de x, a partir de la integral de convergencia de la serie obtenida

EJEMPLO 2. Desarróllese la función $\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ en serie potencial de potencias de x.

◀ Empleando el desarrollo $e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ obtenemos

$$e^{-t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}$$

en todo el eje numérico. Haciendo uso de la integración término a término, hallamos

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}\,. \text{ ▶}$$

Desarróllense las funciones dadas en series de potencias de x:

4.31. $\int\limits_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt.$ **4.32.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}\int\limits_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\,dt.$

4.33. $\int\limits_0^x \cos t^2\,dt.$ **4.34.** $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}.$

4.35. $\int\limits_0^x I_0(t)\,t\,dt$ (véase el problema 4.17).

4.36. $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$

Calcúlense las integrales con exactitud hasta 0,0001:

4.37. $\int\limits_0^{0,3} \frac{\ln(1+t)}{d}\,dt.$ **4.38.** $\int\limits_0^{0,2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt.$

4.39. $\int\limits_0^{0,5} e^{-t^2}\,dt.$ **4.40.** $\int\limits_0^{0,6} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$

4.41. $\int\limits_0^{0,8} \frac{dx}{1-x^5}.$ **4.42.** $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$

En los problemas 4.43—4.47, empleando los desarrollos en series potenciales, fórmese en Fortran el subprograma-función para calcular las integrales dadas con el error absoluto límite prefijado. Los parámetros son X y EPS, donde X es el límite superior de integración y EPS es el error absoluto límite.

4.43. $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$ **4.44.** $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$

4.45. $\int_0^x (1+t^s)^\alpha\, dt \quad (s>0,\ \alpha \neq 0).$

4.46. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\, dt.$ **4.47.** $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt.$

4.48. Empleando los subprogramas-funciones obtenidas, resolviendo los problemas 4.43—4.47, fórmese en Fortran el programa de resolución de uno de los problemas 4.37—4.42.

3. Obtención de las sumas de series numéricas. Aceleración de la convergencia. Determinando la suma de una serie numérica se calcula su suma parcial, para la cual la magnitud del resto de la serie no sobrepasa el error absoluto prefijado. Aplicando los desarrollos en series potenciales conocidos, se puede expresar, en algunos casos, la suma de la serie numérica en forma del valor de la función en un punto determinado.

Demuéstrense las igualdades indicadas:

4.49. $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+n}.$

4.50*. $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)} = \frac{1}{2(\alpha+n)(\alpha+n+1)}.$

4.51*. $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+k+p)} =$

$= \frac{1}{p(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+p-1)} \ (p \in \mathbb{N}).$

4.52*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2.$

4.53*. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

Hállense las sumas de las series sin calcular las sumas parciales:

4.54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$. **4.55.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}$.

4.56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

4.57. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}$. **4.58.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$.

4.59. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n\cdot(2n)!}$. **4.60.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Cuando se determina la suma de una serie numérica se requiere tomar un número grande de términos, si el resto de esta serie tiende lentamente a cero. Esta serie debe ser transformada en serie, cuyo resto tiende a cero más rápidamente. Esta transformación se llama *aceleración de convergencia* de la serie. Uno de los métodos de aceleración de convergencia es *el método de Kummer*. La suma desconocida A de la serie convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

se calcula según la fórmula

$$A=qB+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-qb_k), \tag{2}$$

donde B es la suma conocida de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tal, que existe el límite

$$q=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}\neq 0.$$

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-qb_k) \tag{3}$$

converge más rápidamente, que la serie inicial (1), es decir, el resto de la serie (3) es un infinitésimo de orden más elevado, que el resto de la serie (1).

EJEMPLO 3. Hállese la suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ con exactitud hasta 0,001.

◀ Aclaremos cuántos términos de la serie dada hay que tomar para alcanzar la exactitud requerida. Estimando el resto (véase el problema 4.49) obtenemos

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} < 0{,}001,$$

de donde se deduce que $n > 1000$, es decir, para obtener la exactitud indicada se requiere tomar 1001 términos de la serie inicial.

Mejoremos la convergencia de la serie. Poniendo en la fórmula (2)

$$a_k = \frac{1}{k^2},\ b_k = \frac{1}{k(k+1)},\ q = 1,\ a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)},$$

hallamos (véase el problema 4.49 para $\alpha = 0$ y $n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}. \qquad (4)$$

Apliquemos la fórmula (2) para transformar la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \times$ $\times \frac{1}{k^2(k+1)}$, poniendo ahora $a_k = \frac{1}{k^2(k+1)}$, $b_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, $q = 1$ y $a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$. Entonces, considerando (4), tenemos (véase el problema 4.50 para $\alpha = 0$ y $n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}.$$

El cálculo de la suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ se redujo al cálculo de la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 (k+1)(k+2)}.$$

Estimando el resto

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 (k+1)(k+2)} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-1) k (k+1)(k+2)} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k (k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3n (n+1)(n+2)},$$

obtenemos $\frac{1}{3n^3} < 0{,}001 \cdot 2$, de donde $n^3 > \frac{1}{3} \cdot 2000 \approx 666{,}7$ ó $n \geqslant 9$, es decir, la exactitud requerida se obtiene para $n = 9$. Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + 2 \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{k^2 (k+1)(k+2)} = 1 + 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}1975 = 1{,}645.$$

Aplicando una vez más la transformación a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \times$ $\times \frac{1}{k^2 (k+1)(k+2)}$ se podría mejorar más la convergencia. ▶

En los problemas 4.61—4.65, aplicando la transformación de Kummer, hállense las sumas de las series indicadas con exactitud hasta 0,0001, tomando con este fin no más de 10 términos de la serie obtenida. Utilícense las relaciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \zeta(p) \qquad (p > 1).$$

Los valores de la función zeta $\zeta(p)$ se toman de la tabla

p	ζp
2	1,6449340668
3	1,2020569032
4	1,0823232337
5	1,0369277551
6	1,0173430620
7	1,0083492774
8	1,0040773562

4.61*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{}^{2}+1}$. **4.62*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}$.

4.63*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$. **4.64*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(5n+3)}$.

4.65*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2}$.

4.66. Fórmese en Fortran el programa para resolver uno de los problemas 4.61—4.65.

4. Integración de las ecuaciones diferenciales aplicando las series. Las series potenciales se emplean ampliamente en la resolución de ecuaciones diferenciales. Para una serie de ecuaciones diferenciales se ha mostrado, que la solución $y(x)$ es representable en forma de la serie potencial

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{5}$$

cuyos coeficientes se pueden determinar de distintos modos, teniendo en cuenta la igualdad dada.

a) Sea que se requiere hallar la solución de la ecuación $y'' = f(x, y, y')$, que satisfaga las condiciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, además, la función $f(x, y, y')$ en el punto (x_0, y_0, y_1) tiene derivadas parciales de cualquier orden. En este caso los coeficientes $y^{(k)}(x_0)$ de la serie (5) se determinan diferenciando sucesivamente la ecuación inicial y sustituyendo en ella x_0 y los valores ya hallados de $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, . . .

EJEMPLO 5. Hállese la solución de la ecuación $y'' = x^2y$, que satisface las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

◀ Tenemos $y(0)=0$, $y'(0)=1$ y a partir de la ecuación dada hallamos $y''(0)=0$. Luego, diferenciando la ecuación, tenemos

$$y''' = x^2y' + 2xy,$$

$$y^{IV} = x^2y'' + 4xy' + 2y,$$

$$y^{V} = x^2y''' + 6xy'' + 6y',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k+2)} = x^2y^{(k)} + 2kxy^{(k-1)} + k(k-1)\,y^{(k-2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y para $x=0$ recibimos de aquí

$$y^{(k+2)}(0) = k(k-1)\,y^{(k-2)}(0), \quad k=2,\ 3,\ \ldots$$

Puesto que $y(0)=y''(0)=y'''(0)=0$ e $y'(0)=1$, entonces

$$y^{(4n)}(0) = y^{(4n+2)}(0) = y^{(4n+3)}(0) = 0$$

e

$$y^{(4n+5)}(0) = (4n+2)(4n+3)\,y^{(4n+1)}(0) =$$
$$= 2\cdot3\cdot6\cdot7\,\ldots\,(4n+2)(4n+3), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Por consiguiente,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot3\cdot6\cdot7\,\ldots\,(4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!}\,x^{4n+1}.$$

Según el criterio de d'Alembert la serie obtenida converge para todo $x\in\mathbb{R}$, es decir, la función $y(x)$ definida por esta serie es la solución de la ecuación dada para cualquier x. ▶

Hállense las soluciones de las ecuaciones que satisfacen las condiciones dadas:

4.67. $y'' = x^2y$, $y(0) = y'(0) = 1$.

4.68. $y'' = -x^2y' - 2xy + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Hállense los cinco primeros términos del desarrollo de la solución de la ecuación diferencial en serie potencial:

4.69. $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.

4.70. $y'' = -2xy$, $y(0) = y'(0) = 1$.

4.71. $y'' = y\cos x + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

b) Si la ecuación diferencial inicial es lineal respecto a la función buscada y sus derivadas, además el coeficiente de la derivada de alto orden en el punto x_0 es diferente de cero, entonces es necesario buscar la solución en forma de la serie (5) con coeficientes indeterminados a_k, $k=0, 1, \ldots$ El carácter legítimo de este método se deduce de la afirmación que se demuestra en la teoría analítica de ecuaciones diferenciales, que citamos para la ecuación de segundo orden.

TEOREMA 1. *Si en la ecuación diferencial*

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = f(x) \tag{6}$$

las funciones $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $f(x)$ son analíticas en el entorno del punto x_0 y $p_0(x_0) \neq 0$, existe una solución de la ecuación (6), que es representable en la forma de la serie potencial $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

EJEMPLO 6. Hállese la solución (en la forma de la serie potencial) de la ecuación

$$y'' - xy' + y = 1,$$

que satisface las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$.

◀ Buscamos la solución en forma de la serie $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, en la cual, en virtud de las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$, tenemos $a_0 = a_1 = 0$. Por consiguiente, $y(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k x^k$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación, obtenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 1.$$

De aquí hallamos que $2\cdot 1\cdot a_2 = 1$, es decir, $a_2 = \frac{1}{1\cdot 2}$, y

$$(k+1)(k+2)\,a_{k+2} = (k-1)\,a_k \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Ya que $a_1 = 0$, entonces $a_{2m+1} = 0$ para todos los $m = 0, 1, \ldots$ y para $k = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$, obtenemos la fórmula recurrente

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)\,a_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

de la cual deducimos las igualdades

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}.$$

Por consiguiente, la solución buscada tiene la forma

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}\, x^{2m+2},$$

con la particularidad de que la serie obtenida converge para cualquier $x \in \mathbb{R}$. ▶

Empleando las series potenciales, intégrense las siguientes ecuaciones diferenciales:

4.72. $y'' + xy' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

4.73. $y'' - xy' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

4.74. $y'' + xy' + y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

c) Si el coeficiente de la derivada mayor en la ecuación lineal en el punto x_0 se reduce a cero, es necesario aplicar el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Si en la ecuación diferencial*

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0 \tag{7}$$

las funciones $p_0(x)$, $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son analíticas en el entorno del punto x_0, además el punto x_0 es cero de orden s de la función $p_0(x)$, cero de orden no inferior a $s-1$ de la función $p_1(x)$ y cero de orden no inferior a $s-2$ de la función $p_2(x)$, entonces la solución de la ecuación (7) en el entorno del punto x_0 existe y puede representarse en la forma de la serie potencial generalizada

$$y(x) = (x-x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

donde $a_0 \neq 0$ y $r \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO 7. Hállese la solución (en la forma de la serie potencial generalizada) de la ecuación

$$xy'' + y' + xy = 0,$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

◀ Los coeficientes de la ecuación satisfacen las condiciones del teorema 2, por eso buscamos la solución en forma de serie potencial generalizada

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0.$$

Tenemos

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)\,a_k x^{k+r-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)\,a_k x^{k+r-2}$$

Sustituyendo estas series en la ecuación tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)\,a_k x^{k+r-1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)\,a_k x^{k+r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+1} = 0,$$

es decir,

$$r^2 a_0 x^{r-1} + (r+1)^2 a_1 x^r + \sum_{k=2}^{\infty} \left((k+r)^2 a_k + a_{k-2}\right) x^{k+r-1} = 0.$$

De aquí siguen las igualdades

$$r^2 a_0 = 0, \quad (r+1)^2 a_1 = 0, \quad (k+r)^2 a_k + a_{k-2} = 0.$$

Según la condición $a_0 \neq 0$. Por consiguiente, $r = 0$ y entonces

$$a_1 = 0 \quad \text{y} \quad k^2 a_k = -a_{k-2}, \quad k = 3, 4, \ldots$$

A partir de estas igualdades concluimos que $a_{2m+1} = 0$ para todo $m = 0, 1, \ldots$ Teniendo presente la condición inicial $y(0) = 1$ hacemos la conclusión de que $a_0 = 1$ y tenemos la fórmula recurrente

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2}$$

de la cual obtenemos

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{((2m)!!)^2} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}.$$

Por lo tanto, la solución buscada se escribe en la forma de

$$y(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2^{2m}(m!)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Hállese la solución general de la ecuación diferencial en forma de la serie potencial generalizada:

4.75*. $xy'' + 2y' + xy = 0$. **4.76.** $4xy'' + 2y' + y = 0$.

5. Ecuación y funciones de Bessel. El caso particular de la ecuación (6), cuyos coeficientes satisfacen las condiciones del teorema 2, es la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0. \tag{8}$$

Sus soluciones son las funciones cilíndricas de Bessel de primer orden

$$I_\nu(x) = a_0^{(\nu)} x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)} \tag{9}$$

y para los ν no enteros

$$I_{-\nu}(x) = a_0^{(\nu)} x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,(1-\nu)(2-\nu)\ldots(k-\nu)}. \tag{10}$$

Si ν es un número entero, $\nu = n$, entonces la segunda solución particular de la ecuación de Bessel (8) es la función de Neumann (o de Weber), que se determina de la relación

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{I_\nu(x)\cos \nu\pi - I_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}$$

y que es la función cilíndrica de segundo género de orden n. En las fórmulas (9) y (10) suele tomarse la siguiente constante $a_0^{(\nu)}$:

$$a_0^{(\nu)} = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \tag{11}$$

donde $\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1}\, dx$ es la función gamma de Euler.

4.77. Empleando la representación (9) para $I_\nu(x)$ demuéstrense las relaciones siguientes:

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu I_\nu(x)\right) = x^\nu I_{\nu-1}(x), \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{I_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \tag{13}$$

4.78. Partiendo de las relaciones (12) y (13) dedúzcanse las relaciones

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x),$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x).$$

4.79*. Empleando la representación (9) y el valor $a_0^{(\nu)}$ de (11), exprésense $I_{-1/2}(x)$ e $I_{1/2}(x)$ mediante las funciones elementales.

4.80. Demuéstrese que si $I_\nu(s)$ es la solución de la ecuación (8), entonces $I_\nu(\alpha x)$ es la solución de la ecuación

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)\,y = 0. \tag{14}$$

Escríbase la solución general de la ecuación (14).

Utilizando el resultado del problema 4.80, hállese la solución general de la ecuación:

4.81. $xy'' + y' + 4xy = 0.$

4.82. $9x^2y'' + 9xy' + (36x^2 - 1)\,y = 0.$

4.83. $x^2y'' + xy' + (3x^2 - 4)\,y = 0.$

4.84. $x^2y'' + xy' + \left(9x^2 - \frac{1}{25}\right) y = 0.$

§ 5. Series de Laurent

1. **Series de Laurent. Teorema de Laurent.** Se llama *serie de Laurent* la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n, \tag{1}$$

además, la serie

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\,(z-z_0)^n$$

se denomina *parte principal* de la serie de Laurent y la serie

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

parte regular. Si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}=r<R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

la región de convergencia de la serie (1) es un anillo $K=\{z \mid 0\leqslant r<|z-z_0|<R\}$. En este anillo K, la suma de la serie $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ es una función analítica, además los coeficientes de la serie c_n están relacionados con la función $f(z)$ mediante las fórmulas

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta-z_0|=r'} \frac{f(\eta)}{(\eta-z)^{n+1}}\,d\eta, \quad n=0, \pm 1, \ldots, \tag{2}$$

donde $r<r'<R$.

EJEMPLO 1. Hállense la región de convergencia y la suma de la serie de Laurent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}.$$

◀ Aplicando el criterio de Cauchy a cada uno de estos sumandos tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n |z-1|^{n+1}}}=\frac{1}{2|z-1|}<1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n|z-1|^{n-1}}{3^n}}=\frac{|z-1|}{3}<1.$$

De aquí concluimos que la región de convergencia de la serie inicial es un anillo

$$K=\left\{z \,\middle|\, \frac{1}{2}<|z-1|<3\right\}.$$

Observando que los sumandos son derivadas de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^n (z-1)^n} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n},$$

podemos escribir que en el anillo K

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (z-1)^{n-1}}{3^n} =$$

$$= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (z-1)^n} \right)' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n} \right)' =$$

$$= -\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2(z-1)}} \right)' + \left(\frac{1}{1 - \frac{z-1}{3}} \right)' =$$

$$= -2 \left(\frac{z-1}{2z-3} \right)' + \left(\frac{3}{4-z} \right)' = \frac{3}{(4-z)^2} + \frac{2}{(2z-3)^2}.$$

De este modo, la suma de la serie dada es la función

$$f(z) = \frac{3}{(4-z)^2} + \frac{2}{(2z-3)^2}, \quad \frac{1}{2} < |z-1| < 3. \blacktriangleright$$

TEOREMA DE LAURENT. *Si la función $f(z)$ es analítica en el anillo $0 \leqslant r < |z - z_0| < R$, entonces en este anillo es representable de modo único en la forma de serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

cuyos coeficientes se calculan según las fórmulas (2)

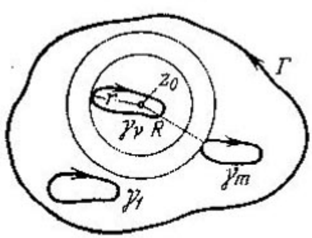

Fig. 101

COROLARIO. Sea $f(z)$ analítica en la multiplemente conexa D, limitada por el contorno Γ y los contornos interiores $\gamma_1^-, \gamma_2^-, \ldots, \gamma_m^-$ (fig. 101). Si el punto z_0 está situado en el interior (o en la frontera) de uno de los contornos interiores γ_ν y la magnitud $r = \max\limits_{\eta \in \gamma_\nu} |z_0 - \eta|$ es menor que la distancia R de z_0 hasta la parte restante de la frontera de la región D o hasta el punto en el cual $f(z)$ no es analítica, es decir,

$$0 \leqslant r = \max_{\eta \in \gamma_\nu} |z_0 - \eta| < R = \min_{\eta \in \Gamma \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_{\nu-1} \cup \gamma_{\nu+1} \cup \ldots \cup \gamma_m} |z_0 - \eta|,$$

entonces en el anillo $r < |z - z_0| < R$ la función $f(z)$ puede ser representada por su serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n, \quad r < |z-z_0| < R,$$

cuyos coeficientes $c_n(z_0)$ se determinan según las fórmulas (2).

Se llama serie de Laurent para la función $f(z)$ *en el entorno del punto* $z = \infty$ la serie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \left(\text{ó} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\right), \tag{3}$$

que converge en cierto anillo $r < |z| < \infty$ ($r < |z-a| < \infty$, respectivamente), además, la parte principal de la serie de Laurent es $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n\right)$ y la parte regular es la serie $\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n \times$ $\times \left(\sum_{n=-\infty}^{0} c_n (z-a)^n\right)$.

Ejemplo 2. Desarróllese en serie de Laurent de potencias de z la función $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$.

◀ Ya que la analiticidad de la función se altera en los puntos $z = 0$ y $z = 1$, la región de convergencia de la serie de Laurent será el anillo $0 < |z| < 1$. Señalando que para $n \leqslant -2$ la función $\frac{1}{z^{n+2}(1-z)}$ es analítica en el círculo $|z| \leqslant \rho < 1$, podemos escribir que

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{1}{z^{n+2}(1-z)}\, dz = 0$$

$$\text{para } n = -2, -3, \ldots$$

Luego, aplicando la fórmula de Cauchy para la función $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$ y sus derivadas, para $n \geqslant -1$ podemos escribir

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{\varphi(z)}{z^{n+2}}\, dz = \frac{\varphi^{n+1}(0)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left.\frac{(n+1)!}{(1-z)^{n+2}}\right|_{z=0} = 1.$$

De este modo, para $0 < |z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{4}$$

es decir, la parte principal contiene un término y la parte regular, un número infinito de términos. ▶

El cálculo de las integrales de contorno (2), como regla general, es bastante difícil. Por eso, para desarrollar las funciones en las series de Laurent se emplean procedimientos artificiales. Así pues, en el ejemplo 2 se podría representar la función $f(z)$ en forma de la suma de fracciones, es decir,

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z},$$

con la particularidad de que el primer sumando es ya el desarrollo en serie de Laurent de potencias de z y el segundo sumando es la suma de la progresión geométrica con denominador z, es decir, tenemos el desarrollo (4).

Hállense las regiones de convergencia y las sumas de las series siguientes:

5.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n}$. **5.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n2^n}{(z+i)^{n+1}}$.

5.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n+3}}{n!}$.

5.4. $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}(n+1)\,i^{n+2}(z-1)^n$.

Hállense todos los desarrollos de las funciones indicadas en series de Laurent de potencias de $z-z_0$ y determínense las regiones de convergencia de los desarrollos obtenidos:

5.5. $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$. **5.6*.** $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=\infty$.

5.7*. $\frac{z}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$.

5.8*. $\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0=\infty$.

5.9. $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=0$. **5.10.** $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=\infty$.

5.11. $\operatorname{sen}\frac{1}{z-2}$, $z_0=2$. **5.12.** $z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$.

5.13. $z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=\infty$. **5.14.** $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

5.15. Hállense los tres primeros términos del desarrollo de la función $f(z)=\operatorname{sen}\frac{1}{1-z}$ en serie de Laurent en el entorno del punto $z_0 = \infty$. ¿Cuál es la región de convergencia de esta serie?

2. Carácter de los puntos singulares aislados. El punto z_0 se llama *regular* para la función $f(z)$ analítica en la región D, si existe tal serie potencial $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n$ con el radio de convergencia $r(z_0) > 0$ tal, que en la parte común del círculo de convergencia $|z-z_0| < r(z_0)$ y la región D la suma de esta serie $\varphi_{z_0}(z)$ coincide con $f(z)$. Los puntos que no son regulares se llaman *singulares*.

El punto z_0 se llama punto singular *aislado* de la función $f(z)$, si $f(z)$ es una función uniforme analítica en el anillo $0 < |z-z_0| < R$ y z_0 es un punto singular.

Análogamente el punto $z_0 = \infty$ se llama punto singular aislado de la función $f(z)$, si $f(z)$ es una función uniforme analítica en el anillo $r < |z| < \infty$ y $z = \infty$ es un punto singular.

El punto singular aislado z_0 de la función $f(z)$ se llama:

punto singular evitable, si existe el límite finito

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a \neq \infty;$$

polo de orden $m \geqslant 1$, si para la función $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ el punto z_0 es un cero de orden m, es decir, $g(z)$ tiene el aspecto $g(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$ (es evidente que si z_0 es polo, entonces $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$);

punto singular esencial, si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ no existe

Es cómodo investigar el carácter del punto singular infinitamente alejado, sustituyendo $z = \dfrac{1}{\eta}$; esta sustitución hace pasar el punto infinitamente alejado $z = \infty$ al punto $\eta = 0$.

EJEMPLO 3. Hállense todos los puntos singulares de la función $f(z) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}} + 1}$ y determínese su carácter.

Los puntos singulares son el punto $z = 0$ y los puntos en los qu el denominador se reduce a cero.

Tenemos $e^{\frac{1}{z}} + 1 = 0$ ó $e^{\frac{1}{z}} = -1 = e^{2\pi m i + \pi i}$, es decir, $e^{\frac{1}{z}} + 1 = 0$, si $\dfrac{1}{z_m} = (2m+1)\pi i$, $m \in \mathbb{Z}$, además estos puntos son ceros de primer orden. Por consiguiente, en los puntos $z_m = \dfrac{1}{(2m+1)\pi i}$, $m \in \mathbb{Z}$, la función $f(z)$ tiene polos de primer orden. El punto $z = 0$ no es un punto singular aislado, ya que es el límite de los polos, pues $\lim\limits_{m\to\infty} z_m = 0$. ▶

5.16*. Demuéstrese, que si en el desarrollo (1) falta la parte principal, es decir, todos los coeficientes c_n con números negativos ($n = -1, -2, \ldots$) son nulos, entonces esto hecho es una condición necesaria y suficiente, de que el punto z_0 es un punto singular evitable de la función $f(z)$.

5.17*. Demuéstrese que la existencia en la parte principal del desarrollo (1) de no más que $m \geqslant 1$ términos, además $c_{-m} \neq 0$ y $c_{-n} = 0$ para $n \geqslant m+1$, es una condición necesaria y suficiente de que el punto z_0 es el polo de orden m para la función $f(z)$.

5.18*. Demuéstrese que si z_0 es un punto singular esencial de la función $f(z)$, entonces existe la sucesión de puntos (z_n), $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, tal, que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

5.19*. Apoyándose en el resultado del problema 5.18 demuéstrese, que si z_0 es un punto singular esencial de la función $f(z)$, entonces para cualquier número complejo $A \neq \infty$ existe la sucesión de puntos $(z_n(A))$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(A) = z_0$ tal, que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n(A)) = A$.

5.20. Determínese la región de convergencia de las partes regular y principal del desarrollo de Laurent (3) en el entorno del punto infinitamente alejado.

Indíquense todos los puntos singulares finitos de las funciones dadas más abajo y determínese su carácter:

5.21. $\dfrac{1}{(z^2+i)^3}$. **5.22.** $\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$.

5.23. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$. **5.24.** $\operatorname{tg}^2 z$.

5.25. $e^{\frac{1}{z-3i}}$. **5.26.** $\cos\dfrac{1}{z+2i}$.

5.27. $\operatorname{tg}\dfrac{1}{z-1}$. **5.28.** $\dfrac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}$.

5.29. $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$. **5.30.** $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^5}$.

5.31. $\dfrac{1}{e^z-3}$.

Para las funciones dadas más abajo aclárese el carácter del punto singular infinitamente alejado (considérese regular el punto singular evitable):

5.32. $\dfrac{z^2}{5-2z^2}$. **5.33.** $\dfrac{3z^5-5z+2}{z^2+z-4}$.

5.34. $\frac{z}{1-3z^4}$. 5.35. $1-z+2z^2$.

5.36. e^{-z}. 5.37. $\cos z$.

5.38. $e^{\frac{1}{z}}+2z^2-5$. 5.39. $e^{\frac{1}{z^2}}$.

5.40. $e^{\frac{1}{3-2z}}$. 5.41. $e^{-2z}+3z^3-z+8$.

§ 6. Residuos y sus aplicaciones

1. Residuo de la función y su cálculo. Si la función $f(z)$ es analítica en cierto entorno del punto z_0, excepto, quizás, el mismo punto z_0, entonces se llama *residuo* de la función $f(z)$ respecto al punto z_0, designado por res $[f(z);\ z_0]$, el número igual al valor de la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\eta)\,d\eta$, donde C es un contorno cerrado simple, situado en la región de analiticidad de $f(z)$, que contiene en su interior sólo un punto singular z_0. En calidad de C es cómodo tomar la circunferencia $|\eta-z_0|=\rho$ de radio bastante pequeño ρ.

El residuo de la función coincide con el coeficiente c_{-1} del desarrollo de $f(z)$ en la serie de Laurent según las potencias de $(z-z_0)$, es decir,

$$\operatorname{res}[f(z);\ z_0]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta-z_0|=\rho} f(\eta)\,d\eta.$$

Si $z_0=\infty$ es un punto singular aislado de la función $f(z)$, entonces

$$\operatorname{res}[f(z);\ \infty]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R^-} f(\eta)\,d\eta,$$

donde $C_R^-=\{\eta \mid |\eta|=R\}$, R es bastante grande y el recorrido del contorno se realiza en sentido horario. Señalemos que si

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,\qquad r<|z|<\infty,$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=\rho>r}\frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}}\,d\eta,\quad n=0,\ \pm 1,\ \ldots,$$

entonces

$$\operatorname{res}[f(z);\ \infty]=-c_{-1}.$$

Si z_0 es un polo de primer orden de la función $f(z)$, entonces

$$\operatorname{res}[f(z);\ z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\,f(z).$$

además, si $f(z)$ es representable en la forma de $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, donde $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\text{res}\,[f(z),\ z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Si z_0 es un polo de orden $m \geqslant 2$ de la función $f(z)$, entonces

$$\text{res}\,[f(z);\ z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}((z-z_0)^m f(z))}{\partial z^{m-1}}.$$

EJEMPLO 1. Hállese $\text{res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+9};\ 3i\right]$.

◀ Puesto que el punto $z_0 = 3i$ es un polo de primer orden, entonces

$$\text{res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+9};\ 3i\right] = \lim_{z \to 3i} (z-3i)\frac{e^{iz}}{(z+3i)(z-3i)} =$$

$$= \frac{e^{i \cdot 3i}}{6i} = -\frac{i}{6e^3}. \ ▶$$

EJEMPLO 2. Hállese $\text{res}\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3};\ 1\right]$.

◀ El punto $z_0 = 1$ es un polo de tercer orden, por eso

$$\text{res}\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3};\ 1\right] = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 1} \frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3 \frac{\cos 2z}{(z-1)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} (-2^2 \cos 2z) = -2 \cos 2. \ ▶$$

EJEMPLO 3. Hállese $\text{res}\,[e^{\frac{3}{z-2}};\ 2]$.

◀ El punto $z_0 = 2$ es esencialmente singular, por eso para hallar el residuo determinemos el coeficiente c_{-1} del desarrollo $e^{\frac{3}{z-2}}$ en la serie de Laurent de potencias de $(z-2)$. Ya que

$$e^{\frac{3}{z-2}} = 1 + \frac{3}{z-2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{z-2}\right)^2 + \ldots,\quad 0 < |z-2| < \infty,$$

entonces $c_{-1} = 3$. Por consiguiente,

$$\text{res}\,[e^{\frac{3}{z-2}};\ 2] = 3. \ ▶$$

Hállense los residuos de las funciones dadas más abajo respecto a cada uno de sus polos distintos de ∞:

6.1. $\frac{z^2+1}{z-2}$. **6.2.** $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$. **6.3.** $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

6.4. $\frac{\operatorname{sen} 2z}{(z+1)^3}$. **6.5.** $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. **6.6.** $\operatorname{tg} z$.

6.7. $\operatorname{ctg}^2 z$. **6.8.** $\dfrac{\cos^3 z}{z^3}$. **6.9.** $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

6.10. $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$. **6.11.** $\dfrac{1}{z^2-z^5}$. **6.12.** $\dfrac{\cos 4z}{(z-2)^6}$.

Hállense los residuos de las funciones respecto al punto $z_0 = 0$:

6.13. $e^{\frac{1}{z}}$. **6.14.** $\cos\dfrac{1}{z}$. **6.15.** $\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$.

Hállense los residuos de las funciones respecto al punto $z_0 = \infty$:

6.16. $\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$. **6.17.** $\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$.

6.18*. $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2+9}$. **6.19.** $\dfrac{z^4+z}{z^6-1}$. **6.20.** $z\cos^2\dfrac{\pi}{4}$.

6.21. $\dfrac{z^2}{z-1}\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$.

2. Teoremas sobre los residuos y sus aplicaciones al cálculo de las integrales de contorno.

PRIMER TEOREMA SOBRE LOS RESIDUOS. *Si la función $f(z)$ es analítica en la región D, excepto los puntos singulares aislados $z_1, z_2, \ldots, z_N$ situados en esta región, entonces para cualquier contorno cerrado simple $C \subset D$ que abarca los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_N$, se tiene*

$$\int_{C^+} f(\eta)\,d\eta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z);\ z_k].$$

SEGUNDO TEOREMA SOBRE LOS RESIDUOS. *Si $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, excepto los puntos singulares aislados $z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}$ y $z_N = \infty$, entonces*

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z);\ z_k] = 0.$$

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^z}{z^2+4}\,dz$, donde $C = \{z \mid |z| = 3\}$.

◀ Puesto que en el interior del contorno C se encuentran dos puntos singulares de la función subintegral, los polos de primer orden $z_{1,2} = \pm 2i$, entonces, aplicando el primer teorema sobre los residuos, podemos escribir

$$\int_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ 2i\right] + \operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ -2i\right]\right) =$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^z}{2z}\bigg|_{z=2i}+\frac{e^z}{2z}\bigg|_{z=-2i}\right)=2\pi i\left(\frac{e^{2i}}{4i}-\frac{e^{-2i}}{4i}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^{2i}-e^{-2i})=\pi i\operatorname{sen}2=\pi\operatorname{sh}2i.\ ▶$$

Ejemplo 5. Calcúlese la integral

$$I=\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^{10}+1}.$$

◀ La función subintegral $f(z)=\frac{1}{z^{10}+1}$ tiene diez puntos singulares $z_k=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}$, $k=0,1,\ldots,9$, que son polos simples situados en la circunferencia unitaria. Ya que el desarrollo de la función en el entorno del punto infinitamente alejado tiene la forma

$$\frac{1}{z^{10}+1}=\frac{1}{z^{10}\left(1+\frac{1}{z^{10}}\right)}=\frac{1}{z^{10}}\left(1-\frac{1}{z^{10}}+\frac{1}{z^{20}}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z^{10}}-\frac{1}{z^{20}}+\frac{1}{z^{30}}-\ldots,\quad 1<|z|<\infty,$$

entonces $-c_{-1}=\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ \infty\right]=0$. Por eso, aplicando el segundo teorema sobre los residuos podemos escribir que

$$\sum_{k=0}^{9}\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right]=-\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ \infty\right]=0.$$

De este modo,

$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{9}\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right]=0.\ ▶$$

Empleando los teoremas sobre los residuos, calcúlense las siguientes integrales:

6.22. $\int\limits_{C^+}\frac{dz}{z^4+1}$, donde $C=\{z\mid |z-1|=1\}$.

6.23. $\int\limits_{C^-}\frac{dz}{z^4+1}$, donde $C=\{z\mid |z-1|=1\}$.

6.24. $\int\limits_{C^+}\frac{z\,dz}{(z-1)(z-1)}$, donde $C=\{z\mid |z-2|=2\}$.

6.25. $\displaystyle\int_{C^+} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, donde $C=\left\{z \mid |z-2|=\frac{1}{2}\right\}$.

6.26. $\displaystyle\int_{C^-} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, donde $C=\left\{z \mid |z-2|=\frac{1}{2}\right\}$.

6.27. $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^z\,dz}{z^2(z^2+9)}$, donde $C=\{z \mid |z|=1\}$.

6.28*. $\displaystyle\int_{C^+} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+9}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=4\}$.

6.29. $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, donde $C=\{z \mid |z|=1\}$,

n es un número natural y $0 \leqslant |a| < 1 < |b|$.

6.30*. $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, donde $C=\{z \mid |z|=1\}$,

n es un número natural y $0 \leqslant |a| < |b| < 1$.

6.31. $\displaystyle\int_{C^+} \operatorname{sen}\frac{1}{z}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=r>0\}$.

6.32. $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, donde $C=\{z \mid |z|=R<1\}$.

6.33. $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, donde $C=\{z \mid |z|=R>1\}$.

6.34. $\displaystyle\int_{C^+} \frac{z+1}{e^z+1}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=2\}$.

6.35. $\displaystyle\int_{C^+} \frac{z+1}{e^z+1}\,dz$, donde $C=\{z \mid |z|=4\}$.

3. Aplicación de los residuos al cálculo de las integrales definidas.

a) Las integrales de tipo $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde R es el símbolo de la función racional se reduce, sustituyendo $z=e^{ix}$, a las integrales de contorno de las funciones racionales respecto a z.

EJEMPLO 1. Calcúlese la integral de Poisson

$$I(p)=\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{1-2p\cos x+p^{2}}, \quad |p|\neq 1.$$

◀ Sustituyendo $z=e^{ix}$, $dz=ie^{ix}\,dx=iz\,dx$,

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{z+\dfrac{1}{z}}{2}=\frac{z^{2}+1}{2z},$$

obtenemos

$$I(p)=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(1-p\,\dfrac{z^{2}+1}{z}+p^{2}\right)}=$$

$$=-i\int_{|z|=1}\frac{dz}{-pz^{2}+p^{2}z+z-p}=i\int_{|z|=1}\frac{dz}{p\,(z-p)\left(z-\dfrac{1}{p}\right)}.$$

Puesto que para todo p, $|p|\neq 1$, dentro del círculo $|z|<1$ se encuentra sólo una raíz del denominador de la función subintegral, para $|p|<1$ tenemos:

$$I(p)=\frac{2\pi i^{2}}{p}\operatorname{res}\left[\frac{1}{(z-p)\left(z-\dfrac{1}{p}\right)};\ p\right]=\frac{2\pi}{1-p^{2}},$$

y si $|p|>1$, entonces

$$I(p)=\frac{2\pi i^{2}}{p}\operatorname{res}\left[\frac{1}{(z-p)\left(z-\dfrac{1}{p}\right)};\ \frac{1}{p}\right]=\frac{2\pi}{p^{2}-1}.$$

De este modo,

$$I(p)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{1-p^{2}} & \text{para}\quad |p|<1,\\[2ex] \dfrac{2\pi}{p^{2}-1} & \text{para}\quad |p|>1. \ ▶\end{cases}$$

b) Las integrales de tipo $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, donde $f(x)$ es una función continua en $(-\infty, +\infty)$, analítica en el semiplano superior, excepto un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_N$, situados en la parte finita del semiplano superior, y que satisface, para $|z|$ suficientemente grandes la condición

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad M>0, \quad \delta>0.$$

En este caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z);\ z_k]. \qquad (1)$$

EJEMPLO 7. Calcúlese la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

◀ En el semiplano superior la función $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)^2}$ tiene un polo de segundo orden en el punto $z_0=3i$ y $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{|z|^4}$ para z suficientemente grandes. Por eso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{1}{(z^2+9)^2};\ 3i\right] =$$

$$= 2\pi i \frac{d}{dz}\left((z-3i)^2 \frac{1}{(z^2+9)^2}\right)\Big|_{z=3i} =$$

$$= 2\pi i \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+3i)^2}\right)\Big|_{z=3i} = -\frac{4\pi i}{(z+3i)^3}\Big|_{z=3i} =$$

$$= -\frac{4\pi i}{(6i)^3} = \frac{\pi}{54}. \ ▶$$

OBSERVACIÓN. La fórmula (1) es válida también en el caso, cuando la función $f(z)$ tiene la forma $f(z) = e^{i\alpha z} F(z)$, donde $\alpha > 0$ y la función $F(z)$ es analítica en el eje real; en el semiplano superior tiene sólo el número finito de los puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_N$ y $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$.

EJEMPLO 8. Calcúlese la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2-2x+10}\,dx$.

◀ La función subintegral es la parte imaginaria de la función $\dfrac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}$, cuyos valores coinciden con los valores de la función $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+10}\,e^{iz}$ en el eje real. La función $F(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+10}$ tiene en el semiplano superior el polo de primer orden en el punto $z_0=1+3i$ y $\lim\limits_{z\to\infty} F(z)=0$, es decir, están cumplidas las condiciones enunciadas en la observación y por eso podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10};\ 1+3i\right] =$$

$$=2\pi i\,\frac{(1+3i)\,e^{i(1+3i)}}{2\,(1+3i-1)}=\frac{\pi}{3}\,(1+3i)\,e^{-3+i}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\,e^{-3}\,(\cos 1-3\,\mathrm{sen}\,1+i\,(3\cos 1+\mathrm{sen}\,1)).$$

De este modo,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^2-2x+10}\,dx=\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx=$$

$$=\frac{\pi e^{-3}}{3}\,(3\cos 1+\mathrm{sen}\,1).$$

Señalemos que simultáneamente calculamos la integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx=\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx=$$

$$=\frac{\pi e^{-3}}{3}\,(\cos 1-3\,\mathrm{sen}\,1).\ \blacktriangleright$$

Aplicando uno de los métodos estudiados más arriba calcúlense las integrales definidas.

6.36. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x},\ a>1.$

6.37. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2},\ a>b>0.$

6.38. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$

6.39. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n},\quad z\in\mathbb{N}.$

6.40. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)},\ a>0,\ b>0.$

6.41. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2},\ a>0.$

6.42. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+4x+20}\, dx.$

6.43. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2+x+1}\, dx.$

6.44. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2+b^2}\, dx,\ a>0,\ b>0.$

6.45. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\, dx.$ **6.46.** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+5x^2+4}\, dx.$

4. Principio del argumento. Supongamos que la función $f(z)$ en la región D acotada por el contorno cerrado simple C, tiene un número finito N de ceros y un número finito P de polos, donde cada cero y cada polo se cuentan tantas veces, cuanta es su multiplicidad, con la particularidad de que no tienen ceros ni polos en el contorno C. Entonces la diferencia $\omega = N - P$ es igual al número de revoluciones del radio vector $w = f(z)$, cuando el punto z recorre el contorno C.

Si $f(z)$ es analítica en D, $P = 0$ y $\omega = N$.

EJEMPLO 9. Hállese el número de ceros del polinomio $p(z) = z^3 - 3z + 1$ situado en el semiplano derecho.

◀ Examinemos el contorno C que consta de la semicircunferencia C_R de radio R, situada en el semiplano derecho y del segmento del eje imaginario $[-iR, iR]$, y apliquemos a este contorno para R suficientemente grande, el principio del argumento.

Ya que

$$p(z) = z^3\left(1 - \frac{3}{z^3}\,\frac{1}{z^3}\right),$$

entonces es evidente, que cuando el punto z recorre el contorno C_R en sentido antihorario, $\arg z$ adquiere el incremento π y por eso $\arg(z^3)$ recibe el incremento 3π $\left(C_R \text{ se aplica en la curva } w = R^3 e^{i\varphi},\ -\frac{3\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right)$. Puesto que el segundo factor en (2) para R suficientemente grande es próximo a 1, entonces el incremento del argumento de este factor es también pequeño. Sea ahora $z = it$, es decir, el punto z se mueve por el eje imaginario desde el punto iR hasta el punto $-iR$. En este caso se tiene

$$p(it) = u + iv = 1 - i(t^3 + 3t), \quad \text{es decir,} \quad u = 1,$$
$$v = -t^3 - 3t.$$

Esto significa, que al variar t desde R hasta $-R$ para $R \to +\infty$, $\arg p(it)$ varía en π $\left(\text{desde } -\frac{\pi}{2} \text{ hasta } +\frac{\pi}{2}\right)$. Así pues el incremento total $\arg p(z)$ al recorrer el contorno es igual a 4π, lo que significa que $N = 2$, es decir, en el semiplano derecho el polinomio $p(z) = z^3 - 3z + 1$ tiene dos ceros. ▶

Para los polinomios dados hállese la cantidad de raíces situadas en el semiplano derecho:

6.47*. $p(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$.
6.48. $p(z) = 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$.
6.49. $p(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$.

6.50*. Demuéstrese que si las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en la región cerrada $\bar{D} = D + \Gamma$ y para los puntos $\eta \in \Gamma$ es válida la desigualdad $|\varphi(\eta)| < |f(\eta)|$, entonces el número de ceros de la función $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, situados en la región D, coincide con el número de ceros de la función $f(z)$ (*teorema de Rouchè*).

6.51*. Demuéstrese el teorema fundamental del álgebra superior: el polinomio $p_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ del grado n tiene en el plano (z) exactamente n ceros.

Apoyándose sobre el teorema de Rouchè (problema 6.50), hállese el número de ceros de las funciones dadas en las regiones indicadas:

6.52. $F(z) = z^5 + 2z^2 + 8z + 1$: a) en el círculo $|z| < 1$; b) en el anillo $1 \leqslant |z| < 2$.

6.53. $F(z) = z^8 - 5z + 1$: a) en el círculo $|z| < 1$; b) en el anillo $1 \leqslant |z| < 2$; c) en el anillo $2 \leqslant |z| < 3$.

§ 7. Series de Fourier. Integral de Fourier

1. Desarrollo de las funciones en series trigonométricas de Fourier. Sistema trigonométrico de funciones.

1, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 2x$, ..., $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$, ... es *ortogonal* en el segmento $[-\pi, \pi]$ (como, además, en cualquier segmento de 2π de longitud), es decir, la integral respecto a este segmento, del producto de dos cualesquiera funciones distintas de este sistema, es igual a cero.

$$\text{Si } f(x) \in L(-\pi, \pi) \left(\text{es decir, } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \infty\right),$$

entonces existen los números

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx,$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

que se llaman *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$; la serie

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\,\text{sen}\,kx) \tag{1}$$

se denomina *serie de Fourier* de la función $f(x)$. Los términos de la serie (1) pueden ser anotados en forma de armónicas

$$a_k\cos kx+b_k\,\text{sen}\,kx=A_k\cos(kx-\varphi_k)$$

con una *amplitud* $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$, *frecuencia* $\omega_k=k$ y *fase* $\varphi_k=$ $=\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}$.

Para la función $f(x)$ tal, que $f^2(x)\in L(-\pi,\pi)$ es válida la *igualdad de Parseval*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Si es que $f(x)\in L\left(-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$ el coeficiente de Fourier se escribe en la forma

$$\alpha_k=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)\cos\frac{2\pi kx}{l}\,dx,\quad \beta_k=\frac{2}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)\times$$
$$\times\,\text{sen}\,\frac{2\pi kx}{l}\,dx, \tag{2}$$

y la serie de Fourier, en la forma

$$S(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos\frac{2\pi kx}{l}+\beta_k\,\text{sen}\,\frac{2\pi kx}{l}\right)=$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{i\frac{2\pi kx}{l}}. \tag{3}$$

La última serie se llama *serie de Fourier en forma compleja*. Aquí

$$c_k=\frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2}f(x)e^{-i\frac{2\pi kx}{l}}\,dx,\quad k=0,1,\ldots,$$

y para $k\geqslant 0$

$$c_k=\frac{\alpha_k-i\beta_k}{2},\qquad c_{-k}=\frac{\alpha_k+i\beta_k}{2}=\bar{c}_k.$$

Las sumas de las series (1) y (3) tienen los períodos 2π y l, respectivamente.

La función $f(x)$ se llama *suave a trozos* en el segmento $[a, b]$, si la misma función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ tienen en $[a, b]$ un número finito de puntos de descontinuidad de primer género.

TEOREMA. *Si la función periódica $f(x)$ con período l es suave a trozos en el segmento $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$, entonces la serie de Fourier* (3) *converge hacia el valor de $f(x)$ en cada punto de continuidad suyo y hacia el valor $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ en los puntos de descontinuidad, es decir,*

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k x}{l}}. \qquad (4)$$

Si, adicionalmente, $f(x)$ es continua en todo el eje, la serie (4) *converge hacia $f(x)$ uniformemente.*

EJEMPLO 1. Desarróllese en serie de Fourier la función

$$f(x)=\operatorname{sign} x, \quad -\pi < x < \pi,$$

y empleando el desarrollo, hállese la suma de la serie de Leibniz

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

◀ Puesto que la función es impar, entonces (véase el problema 7.2)

$$a_k=0, \quad k=0, 1, \ldots,$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sign} x \operatorname{sen} nx\, dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{x=0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi(2m-1)} & \text{para } n=2m-1,\\ 0 & \text{para } n=2m,\end{cases} \quad m\in\mathbb{N}.$$

Por consiguiente, para $-\pi < x < \pi$

$$\operatorname{sign} x=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2m-1)x}{2m-1}$$

de donde para $x=\pi/2$ obtendremos

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1},$$

es decir,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=\frac{\pi}{4}. \blacktriangleright$$

7.1. Demuéstrese que si $f(x)$ tiene el período l, entonces para todo $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+l} f(x)\,dx = \int_0^l f(x)\,dx = \int_{-l/2}^{l/2} f(x)\,dx.$$

7.2. Anótense las expresiones de los coeficientes de Fourier (2) para las funciones par o impar en $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$.

Desarróllese la función periódica con el período l en serie de Fourier, constrúyanse las gráficas de sus primeras sumas parciales $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ y hállese el valor de $S(x_0)$ de la suma de la serie obtenida en el punto dado x_0:

7.3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{para } -\pi < x < 0, \end{cases}$ $l = 2\pi$, $x_0 = \pi$.

7.4. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ para $0 < x < 2\pi$, $l = 2\pi$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

7.5. $f(x) = |x|$ para $x \in (-1, 1)$, $l = 2$, $x_0 = 1$.

En los problemas 7.6—7.10, definiendo complementariamente de un modo determinado la función $f(x)$ dada en el intervalo $(0, a)$ hasta la periódica, obténgase para ella la serie de Fourier requerida.

7.6. $f(x) = e^x$ para $x \in (0, \ln 2)$. Desarróllese en serie de cosenos.

7.7. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x < \pi/2, \\ 0 & \text{para } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$

Desarróllese en serie de senos.

7.8. $f(x) = x^2$ para $0 \leqslant x < 1$. Desarróllese en serie de cosenos.

7.9. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leqslant x < 1, \\ 2 - x & \text{para } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$

Desarróllese en serie de senos.

7.10. $f(x) = x \operatorname{sen} x$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Desarróllese en serie de senos.

7.11. Empleando la serie de Fourier, obtenida en el problema 7.5, hállense las sumas de las series siguientes:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; b)* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(4k+1)^2 (4k+3)^2}$.

7.12. Empleando la serie de Fourier, obtenida en el problema 7.8, hállese la suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}$.

7.13. Empleando la igualdad de Parseval para la función del problema 7.4, hállese la suma de serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

7.14*. Conociendo la expresión del *núcleo de Dirichlet*

$$\mathscr{D}_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}},$$

hállese la expresión del *núcleo de Fejer* $\mathscr{F}_n(x)$:

$$\mathscr{F}_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathscr{D}_k(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos kx.$$

2. Series dobles de Fourier. Si la función $f(x, y)$ tiene un período l respecto a la variable x, período h respecto a la variable y, es continua y tiene las derivadas parciales continuas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ en el cuadrado $K=\left\{(x, y)\mid -\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2},\ -\frac{h}{2}<y<\frac{h}{2}\right\}$, entonces $f(x, y)$ es representable por la serie doble de Fourier

$$f(x, y)=\sum_{m, n=0}^{\infty}\lambda_{m\,n}\left(a_{m,\,n}\cos\frac{2\pi mx}{l}\cos\frac{2\pi ny}{h}+\right.$$

$$+b_{m,\,n}\operatorname{sen}\frac{2\pi mx}{l}\cos\frac{2\pi ny}{h}+c_{m,\,n}\cos\frac{2\pi mx}{l}\operatorname{sen}\frac{2\pi ny}{h}+$$

$$\left.+d_{mn}\operatorname{sen}\frac{2\pi mx}{l}\operatorname{sen}\frac{2\pi ny}{h}\right),$$

donde

$$\lambda_{m,\,n}=\begin{cases}1/4 & \text{para } m+n=0,\\ 1/2 & \text{para } m>0,\ y=0 \text{ ó } m=0,\ n>0,\\ 1 & \text{para } m>0,\ n>0\end{cases}$$

y para $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$

$$a_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint\limits_K f(x, y)\cos\frac{2\pi mx}{l}\cos\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy,$$

$$b_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint\limits_{K} f(x,\,y)\operatorname{sen}\frac{2\pi mx}{l}\cos\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy,$$

$$c_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint\limits_{K} f(x,\,y)\cos\frac{2\pi mx}{l}\operatorname{sen}\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy,$$

$$d_{m,\,n}=\frac{4}{lh}\iint\limits_{K} f(x,\,y)\operatorname{sen}\frac{2\pi mx}{l}\operatorname{sen}\frac{2\pi ny}{h}\,dx\,dy$$

En la forma compleja la serie de Fourier para $f(x,\,y)$ se anota en la forma siguiente

$$f(x,\,y)=\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty} c_{m,\,n}e^{2\pi i\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)},$$

donde

$$c_{m,\,n}=\frac{1}{lh}\iint\limits_{K} f(x,\,y)\,e^{-2\pi i\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}\right)}dx\,dy,\quad m,\ n\in\mathbb{Z}.$$

EJEMPLO 2. Desarróllese en serie doble de Fourier la función $f(x,\,y)=xy$ en el cuadrado $-\pi<x<\pi$, $-\pi<y<\pi$.

◀ Tomando en consideración la paridad o imparidad de las funciones subintegrales, hallamos

$$a_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{K} xy\cos mx\cos ny\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} y\cos ny\,dy\int_{-\pi}^{\pi} x\cos mx\,dx=0,\quad m,\ n\geqslant 0;$$

$$b_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} y\cos ny\,dy\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} mx\,dx=0,\quad m,\ n\geqslant 0;$$

$$c_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} y\operatorname{sen} ny\,dy\int_{-\pi}^{\pi} x\cos mx\,dx=0,\qquad m,\ n\geqslant 0;$$

$$d_{m,\,n}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} y\operatorname{sen} ny\,dy\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} mx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int_{0}^{\pi} y\operatorname{sen} ny\,dy\int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen} mx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{y}{n}\cos ny\Big|_0^\pi+\frac{\operatorname{sen} ny}{n^2}\Big|_0^\pi\right)\left(-x\,\frac{\cos mx}{m}\Big|_0^\pi+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sen} mx}{m^2}\Big|_0^\pi\right)=\frac{4}{\pi^2}\,\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{\pi(-1)^{m+1}}{m}=(-1)^{m+n}\frac{4}{mn},$$

$$m,\ n\geqslant 1.$$

Por consiguiente, para $x\in(-\pi,\ \pi)$, $y\in(-\pi,\ \pi)$

$$xy=4\sum_{m,\ n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\,\frac{\operatorname{sen} mx\operatorname{sen} ny}{mn}. ▶$$

Desarróllense en serie doble de Fourier las funciones siguientes:

7.15. $f(x,\ y)=xy$ para $0<x<2\pi$, $0<y<2\pi$, $l=h=2\pi$.

7.16. $f(x,\ y)=\frac{\pi-x}{2}\cdot\frac{\pi-y}{2}$ para $-\pi<x<\pi$, $-\pi<y<\pi$, $l=h=2\pi$.

7.17. $f(x,\ y)=x^2y$ para $-1<x<1$, $-2<y<2$, $l=2$, $h=4$.

7.18. $f(x,\ y)=x\left(\frac{\pi-y}{2}\right)^2$ para $-1<x<1$, $-\pi<y<\pi$, $l=2$, $h=2\pi$.

3. **Integral de Fourier.** Si la función $f(t)$ es absolutamente integrable en $(-\infty,\ +\infty)$, es decir, $f(t)\in L(-\infty,\ +\infty)$ y es suave a trozos en cada segmento finito del eje real, entonces es representable en forma de la integral de Fourier

$$f(t)=\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}\hat{f}(\nu)\times$$

$$\times e^{2\pi i\nu t}\,d\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu t}\,d\nu, \tag{5}$$

donde

$$\hat{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-2\pi i\nu t}\,dt. \tag{6}$$

La transformación (6), que se designará por $\mathfrak{F}[f]$, se llama *directa* y la (5), *transformación inversa de Fourier*, expresada en la forma compleja. En la forma real estas transformaciones se anotan así

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt,\ b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen}\omega t\,dt \tag{7}$$

(directa) y

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}(a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\operatorname{sen}\omega t)\,d\omega \tag{8}$$

(inversa), $\omega=2\pi\nu$.

Si la función $f(t)$ es par, (7) y (8) se escriben en la siguiente forma simétrica:

$$\mathfrak{F}_c[f]=\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \tag{9}$$

y

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega \tag{10}$$

y se llaman par de *coseno-transformaciones de Fourier*. Si la función $f(t)$ es impar, tenemos un par de *seno-transformaciones de Fourier*

$$\mathfrak{F}_s[f]=\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen}\omega t\,dt$$

y

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\hat{f}_s(\omega)\operatorname{sen}\omega t\,d\omega.$$

EJEMPLO 3. Hállese la transformación de Fourier para la función $f(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$.

◀ Sustituyendo $f(t)$ dada en (6), obtenemos

$$\hat{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-2\pi i\nu t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{-(2\pi i\nu-\alpha)t}\,dt+$$

$$+\int_{0}^{+\infty} e^{-(2\pi i\nu+\alpha)t}\,dt=\frac{1}{\alpha-2\pi i\nu}\,e^{(\alpha-2\pi i\nu)t}\Big|_{-\infty}^{0}-$$

$$-\frac{1}{\alpha+2\pi i\nu}\,e^{-(2\pi i\nu+\alpha)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\alpha-2\pi i\nu}+\frac{1}{\alpha+2\pi i\nu}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2},$$

es decir,

$$\mathfrak{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2}, \quad \alpha > 0.$$

Sustituyendo esta expresión en (5) obtenemos

$$e^{-\alpha|t|} = 2\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i\nu t}}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2}\, d\nu = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha^2+\omega^2} \times$$

$$\times\, d\omega = \frac{2\alpha}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\alpha^2+\omega^2}\, d\omega.$$

La última igualdad se deriva de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\alpha^2+\omega^2} d\omega = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\alpha^2+\omega^2}\, d\omega = 0. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 4. Hállese la transformación de Fourier para la función

$$f(t) = e^{-\alpha t^2}, \quad \alpha > 0.$$

◀ Ya que la función $f(t)$ es par, obtendremos un par de coseno-transformaciones de Fourier. Por lo tanto, valgámonos de las fórmulas (9) y (10). Utilizando el resultado del problema 4.28 del cap. 8, obtendremos

$$\mathfrak{F}_c\{e^{-\alpha t^2}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} \cos \omega t\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

y

$$e^{-\alpha t^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cos \omega t\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cos \omega t\, d\omega. \blacktriangleright$$

Hállense las transformaciones de Fourier en forma compleja para las funciones:

7.19. $f(t) = \operatorname{sing}(t-a) - \operatorname{sing}(t-b), \quad b > a.$

7.20. $f(t) = \begin{cases} h\left(1 - \dfrac{|t|}{a}\right) & \text{para } |t| < a, \\ 0 & \text{para } |t| > a. \end{cases}$

7.21. $f(t)=\begin{cases}\cos at & \text{para } |t|<\pi/a,\\ 0 & \text{para } |t|>\pi/a,\end{cases}\quad a>0,$

7.22. $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sign} t & \text{para } |t|<1,\\ 0 & \text{para } |t|<1.\end{cases}$

Hállese el par de coseno-transformación o seno-transformación de Fourier de las funciones indicadas:

7.23*. $f(t)=\dfrac{1}{a^2+t^2}$, $a>0$.

7.24*. $f(t)=\dfrac{t}{a^2+t^2}$, $a>0$.

7.25. $f(t)=te^{-t^2}$.

7.26. $f(t)=e^{-\alpha|t|}\cos\beta t$, $\alpha>0$.

7.27. Demuéstrese que la transformación (6) es una función continua, además $\lim\limits_{\nu\to\pm\infty}\widehat{f}(\nu)=0$.

4. Características espectrales de la serie y de la integral de Fourier. Se llama *función espectral* $S(\nu_k)$ de la serie de Fourier o *densidad espectral*, la relación entre el coeficiente de Fourier de la función $f(x)$ de período l

$$c_k=c(\nu_k)=\frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} f(u)\,e^{-2\pi i\nu_k u}\,du,$$

$\nu_k=\dfrac{k}{l}$, $k\in\mathbb{Z}$, y el incremento de la frecuencia $\Delta\nu_k=\dfrac{k+1}{l}-\dfrac{k}{l}=$ $=\dfrac{1}{l}$, es decir,

$$S(\nu_k)=\frac{c(\nu_k)}{\Delta\nu_k}=\int_{-l/2}^{l/2} f(u)\,e^{-2\pi i\nu_k u}\,du.$$

Llamamos *espectro de amplitud* $\rho(\nu_k)$ al módulo de la función espectral y *espectro de fase* $\Phi(\nu_k)$, al argumento de la función espectral tomado con el signo inverso, es decir,

$$\rho(\nu_k)=|S(\nu_k)|=l\,|c(\nu_k)|$$

y

$$\Phi(\nu_k)=-\arg S(\nu_k).$$

En las gráficas de $\rho(\nu_k)$ y $\Phi(\nu_k)$ por lo común se construyen sólo las ordenadas ρ y Φ en los puntos ν_k y el espectro se llama reglado.

EJEMPLO 5. Hállese la función espectral de la serie de Fourier y constrúyanse los espectros de amplitud y de fase para la función

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ para } x\in(-2,\ -1), \\ 1 \text{ para } x\in(-1,\ 1), \\ 0 \text{ para } x\in(1,\ 2), \end{cases} \qquad f(x+4)=f(x).$$

◀ Tenemos $\nu_k=k/4$ y

$$S(\nu_k)=\int_{-2}^{2} f(x)\,e^{-2\pi i\nu_k x}\,dx=\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-2\pi i\nu_k x}\,dx=$$

$$=\frac{e^{-2\pi i\nu_k x}}{-2\pi i\nu_k}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi\nu_k}\,\frac{e^{2\pi i\nu_k}-e^{-2\pi i\nu_k}}{2i}=\frac{\operatorname{sen} 2\pi\nu_k}{\pi\nu_k}.$$

Por consiguiente,

$$\rho(\nu_k)=|S(\nu_k)|=\frac{|\operatorname{sen} 2\pi\nu_k|}{\pi\,|\nu_k|},$$

$$\Phi(\nu_k)=-\arg S(\nu_k)=\begin{cases} 0, \text{ si } \operatorname{sen} 2\pi\nu_k\geqslant 0, \\ -\pi, \text{ si } \operatorname{sen} 2\pi\nu_k<0. \end{cases}$$

Las gráficas $\rho(\nu_k)$ y $\Phi(\nu_k)$ están representadas en la fig. 102. ▶

Llamamos *función espectral* de la integral de Fourier la transformación directa de Fourier

$$S(\nu)=\hat{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-2\pi i\nu t}\,dt. \tag{11}$$

La magnitud $\rho(\nu)=|S(\nu)|$ lleva el nombre de *espéctro de amplitud* y la magnitud $\Phi(\nu)=-\arg S(\nu)$, *espectro de fase*.

Hállense las funciones espectrales $S(\nu_k)$ ó $S(\nu)$ y constrúyanse los espectros de amplitud y de fase de las funciones siguientes:

7.28. $f(t)=\begin{cases} 0 \text{ para } t\in(-2T,\ -T), \\ -1 \text{ para } t\in(-T,\ 0), \\ 1 \text{ para } t\in(0,\ T), \\ 0 \text{ para } t\in(T,\ 2T), \end{cases} \qquad f(t+4T)=f(t).$

7.29. $f(t)=\begin{cases} 2 \text{ para } t\in(0,\ 1), \\ 0 \text{ para } t\in(1,\ 3), \end{cases} \qquad f(t+3)=f(t).$

7.30. $f(t)=\begin{cases} 1 \text{ para } |t|<a, \\ 0 \text{ para } |t|>a, \end{cases} \qquad a>0.$

7.31*. $f(t) = \begin{cases} \cos \pi t & \text{para } |t| \leqslant 1/2, \\ 0 & \text{para } |t| > 1/2. \end{cases}$

7.32. $f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{para } t \in (-1, 0), \\ 1-t & \text{para } t \in (0, 1), \\ 0 & \text{para } |t| > 1. \end{cases}$

7.33. $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{para } t \in (0, 2), \\ 0 & \text{para } t \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \end{cases}$

5. Transformación discreta de Fourier (TDF). El cálculo analítico de la transformación de Fourier (de la función espectral) (11) y de la transformación inversa (5) provoca como regla, grandes dificultades. Están elaborados los métodos de su realización numérica. Uno de estos métodos es la así llamada *transformación discreta de Fourier*:

$$\widetilde{S}(\nu_n) = y_n = \frac{T}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} \times$$

$$\times f(t_k) e^{-i\frac{\pi k n}{N}}, \quad n = 0, 1, \ldots, 2N-1, \tag{12}$$

donde $t_k = k\dfrac{T}{2N}$ (T es longitud del intervalo prefijado) y $\nu_n = n\dfrac{1}{T}$. La transformación inversa a (12) tiene la forma

$$f(t_k) = x_k = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{2N-1} y_n e^{i\frac{\pi k n}{N}},$$

$$k = 0, 1, \ldots, 2N-1. \tag{13}$$

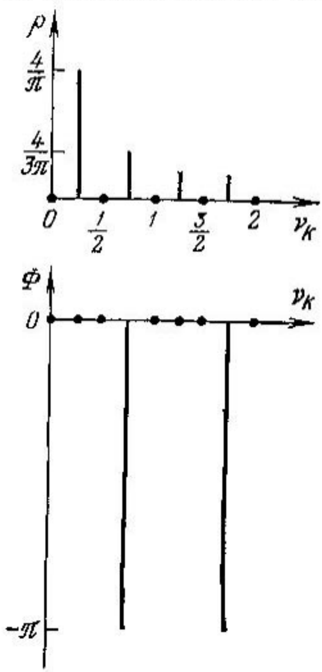

Fig. 102

Las transformaciones (12) y (13) se realizan con ayuda de los así llamados *algoritmos rápidos* (TAR), que consisten en que, si $2N = r_1 r_2 \ldots r_n$, r_ν son enteros $\geqslant 2$, entonces la matriz de la transformación (12) (ó (13))

$$W=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & q & q^2 & \dots & q^{2N-1}\\ 1 & q^2 & q^4 & \dots & q^{2(N-1)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & q^{2N-1} & q^{2(2N-1)} & \dots & q^{(2N-1)^2}\end{pmatrix},$$

donde $q=e^{-i\frac{\pi}{N}}$ ($q=e^{i\frac{\pi}{N}}$ para (13)), se representa en forma del producto de n matrices cuadradas W_ν de orden $2N$,

$$W=W_nW_{n-1}\dots W_2W_1, \tag{14}$$

cada una de las cuales tiene $r_\nu\cdot 2N$ elementos distintos de cero. La multiplicación de la matriz W_ν ($\nu=1, 2, \dots, n$) por el vector columna $Z=(z_0, z_1, \dots, z_{2N-1})^\top$ eliminando la multiplicación por ceros, puede ser realizada mediante $r_\nu\cdot 2N$ operaciones de la multiplicación compleja por los factores q^k y mediante la sumación. Toda la transformación discreta de Fourier se calcula, entonces, por $(r_1+ + r_2+\dots+r_n)\,2N$ operaciones de este tipo y por la multiplicación del resultado final por el factor $T/2N$.

Si $2N=2^n$ ($r_1=r_2=\dots=r_n=2$), en calidad de matriz $W_m=(c_{k,j}^{(m)})$, $k, j=1, 2, \dots, 2^n$, se puede tomar para el desarrollo (14) la matriz, cuyos elementos se expresan del modo siguiente ($q= =e^{-i\frac{\pi}{2^{n-1}}}$): sea $\nu=0, 1, \dots, 2^{n-m}-1$ y $\mu=1, 2, \dots, 2^{m-1}$, entonces

$$c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+\mu,\ \nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+2^{m-1}+\mu,\ \nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=1,$$

$$c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+\mu,\ 2^{n-1}+\nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=$$

$$=-c^{(m)}_{\nu\cdot 2^m+2^{m-1}+\mu,\ 2^{n-1}+\nu\cdot 2^{m-1}+\mu}=q^{(\mu-1)2^{n-m}}, \tag{15}$$

$c^{(m)}_{k,j}=0$ para los pares restantes (k, j).

7.34. Escríbanse las matrices W_1, W_2 y W_3 correspondientes a las fórmulas (15) para $2N=2^3=8$.

7.35. Sea $X=(x_0, x_1, \dots, x_7)^\top$. Fórmense los productos $Z^{(1)}=W_1X$, $Z^{(2)}=W_2Z^{(1)}=W_2(W_1X)$ y $Z^{(3)}= =W_3Z^{(2)}=W_3(W_2W_1X)$. Compárese el resultado obtenido con el producto WX.

Para la sucesión finita de los números complejos $(x_0, x_1, \dots \dots, x_{N-1})$, TDF según la fórmula (12) se puede representar en la forma

$$y_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x_ke^{-\frac{2\pi ink}{N}}\qquad (n=0, 1, \dots, N-1)$$

y TDF inversa (TDFI) en la forma

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{2\pi i n k}{N}} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1).$$

Designemos brevemente TDF y TDFI, respectivamente,

$$Y = \mathfrak{F}[X] \quad \text{y} \quad X = \mathfrak{F}^{-1}[Y],$$

donde $X = (x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{N-1})^{\top}$, $Y = (y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{N-1})^{\top}$.

7.36. Fórmese en Fortran el subprograma para calcular las transformaciones de Fourier directa e inversa valiéndose el algoritmo rápido. Los parámetros son: N, N1, KIND, A, B, AA, BB, donde N1 es el número de elementos de la sucesión inicial (y de la transformación), N es el exponente de la potencia en la igualdad $N1 = 2^N$, KIND es el cero ó el 1 (cero cuando se calcula TDF y 1 cuando se calcula TDFI), A y B son tablas de entrada de dimensión N1 para las partes real e imaginaria de la sucesión inicial, AA y BB son tablas de salida de dimensión N1 para las partes real e imaginaria de la transformación obtenida.

En los problemas 7.37—7.41 fórmese en Fortran el subprograma para obtener la sucesión compleja $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{128})$, poniendo $x_k = x(t_k) + i\cdot 0$ para las funciones indicadas $x = x(t)$, $t \in [1,\ 128]$, $t_k = k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 128$. Los parámetros son A, B, donde A y B son tablas de 128 elementos para las partes real e imaginaria de la sucesión.

7.37. $x = 25$. **7.38.** $x = \begin{cases} 0, & t \in [1,\ 32] \cup [97,\ 128], \\ 20, & t \in [33,\ 96]. \end{cases}$

7.39. $x = \frac{1}{32} t\,(128 - t)$.

7.40. $x = \begin{cases} t, & t \in [\ 1,\ \ 64], \\ 128 - t, & t \in [65,\ 128]. \end{cases}$

7.41. $x = t$.

7.42. Empleando los subprogramas obtenidos en la resolución de los problemas 7.36 y 7.37—7.41 para una de las sucesiones $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{128})$, fórmese en Fortran el programa de las transformaciones siguientes:

a) hállese $Y = \mathfrak{F}[X]$;

b) para $m = 24,\ 32,\ 40$ de la sucesión $(y_n \mid n = 1,\ \ldots,\ 128)$ obténgase la sucesión $(\widetilde{y}_n \mid n = 1,\ \ldots,\ 128)$, cuyos elementos se determinan por las igualdades

$$\tilde{y}_n = \begin{cases} y_n, & n = 1, 2, \ldots, 64-m, 65+m, \ldots, 128, \\ 0, & n = 64-m+1, \ldots, 65+m-1; \end{cases}$$

c) hállese $\widetilde{X} = \widetilde{\mathfrak{F}}^{-1}[\widetilde{Y}]$;

d) compárense las sucesiones (x_k) y $(\tilde{x}_k)$ hallando sus diferencias.

RESPUESTAS

1.1. $\frac{1}{4}$. **1.2.** $\frac{1}{2}$. **1.3.** $\frac{3}{2}\frac{6e-e^2-1}{(3e-1)(3-e)}$. ● Empléese la fórmula de Euler $\cos in = \frac{e^{-n}+e^n}{2}$. **1.4.** $1+i$. **1.17.** Diverge. **1.18.** Converge. **1.19.** Converge. **1.20.** Converge. **1.21.** Diverge. **1.22.** Diverge. **1.23.** Converge. **1.24.** Diverge. **1.25.** Converge. **1.26.** Converge. **1.27.** Converge absolutamente. **1.28.** Converge. **1.29.** Diverge. **1.30.** Converge. **1.31.** Converge absolutamente. **1.32.** Converge. **1.33.** Diverge. **1.34.** Diverge. **1.35.** Converge. **1.36.** Converge. **1.37.** Converge. **1.38.** Diverge. **1.39.** Converge. **1.40.** Converge. **1.41.** Converge. **1.42.** Converge. **1.43.** Converge. **1.44.** Converge. **1.45.** Converge. **1.46.** Converge. **1.47.** Converge. **1.48.** Diverge. **1.49.** Diverge. **1.50.** Diverge. ● $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. **1.51.** Converge. **1.52.** Converge. **1.53.** Diverge. **1.54.** Converge. **1.55.** Diverge. **1.56.** Diverge. **1.57.** Converge. **1.58.** Converge. **1.59.** Converge. **1.60.** Diverge. **1.61.** Diverge. **1.62.** Converge absolutamente. **1.63.** Diverge. **1.64.** Converge absolutamente. **1.65.** Si $p > 1$, la serie converge para todo α; si $p < 1$, diverge. Si $p = 1$, la serie converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leqslant 1$. **1.66.** Si $p > 1$, la serie converge para cualesquiera α y β; si $p < 1$, diverge. Si $p = 1$, la serie converge para $\alpha > 1$ y cualesquiera β y diverge para $\alpha < 1$. Si es que $p = \alpha = 1$, la serie converge para $\beta > 1$ y diverge para $\beta \leqslant 1$. **1.68.** Converge condicionalmente. **1.69.** Converge absolutamente. **1.70.** Diverge. **1.71.** Converge absolutamente. **1.72.** Diverge. **1.73.** Converge condicionalmente. **1.74.** Converge absolutamente. **1.75.** Converge absolutamente. **1.76.** Converge condicionalmente. **1.77.** Converge absolutamente. **1.78.** Converge condicionalmente. ● Analícense las sumas parciales con los números $8n$, en las que hay que agrupar los términos con los números $8k+1$ y $8k+5$, $8k+2$ y $8k+6$, $8k+3$ y $8k+7$. Cerciórese de que existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} S_{8n}$. Luego, así como al demostrar el criterio de Leibniz, válganse de la correlación $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{4} = 0$. **1.79.** Converge condicionalmente. **1.80.** Diverge. ● Analícense las sumas parciales con números pares. **1.81.** Converge condicionalmente. **1.82.** Converge absolutamente. **1.83.** Diverge.

1.84. ● Válganse de la desigualdad $|a\cdot b| \leqslant \frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)$.

1.85. Converge. ◀ Estimemos c_n. Tenemos $c_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{2^{n-k+1}} +$

$$+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \frac{1}{k^2\cdot 2^{n-k+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} 2^k\right)\leqslant$$

$\leqslant \frac{A_1}{2^{\frac{n}{2}}}+\frac{A_2}{n^2}$. Los sumandos obtenidos son términos de las series convergentes $A_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}$ y $A_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. ▶ 1.86. Converge. ● Para estimar $c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k+1}}{k^2(n-k+1)}$ aplíquese el desarrollo de la fracción en simples $\frac{1}{k^2(n-k+1)}=\frac{1}{(n+1)k^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1-k}\right)$ y muéstrese que los números $b_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ decrecen monótonamente respecto a la magnitud absoluta. 1.87. Diverge. ● Aprovéchese el desarrollo de la fracción en simples, obtenido en el problema anterior, y estímense los términos $d_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ por abajo. 1.88. Diverge. ● $c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k(n-k+1)}>\frac{1}{n}$ para $n\geqslant 2$.

2.1. $(0, +\infty)$; converge absolutamente para $x\in(1, +\infty)$. 2.2. $\mathbb{R}$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.3. Diverge en todos los puntos. 2.4. $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.5. $(-\infty, -1)$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.6. $(-1, -1/2] \cup (1/2, 1)$; converge absolutamente para $x\in(-1, -1/2)\cup(1/2, 1)$. 2.7. $[0, +\infty)\cup\{k\pi \mid k=-1, -2, \ldots\}$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.8. $(-2, 2)$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.9. $(0, +\infty)$; la convergencia es absoluta en todos los puntos. 2.10. $[1/e, e)$; converge absolutamente para $x \in (1/e,\ e)$. **2.11.** $|z-2|>1$. **2.12.** $|z+1|>$ >1. **2.13.** $|z-3i|>\sqrt{2}$. **2.14.** El semiplano $\operatorname{Re} z>0$. **2.15.** $\{z\,|\,-$ $-\pi/4<\arg z<\pi/4$ y $3\pi/4<\arg z<5\pi/4\}$. **2.16.** $\operatorname{Re} z<0$. **2.17.** $\operatorname{Re} z>1$. ● Compárese la expresión $|(-1)^n n^{-z}|$ con el término n^{-p} de la serie de Dirichlet. **2.18.** $\operatorname{Im} z>0$. ● Aprovéchese el hecho de que la función lineal fraccional $w=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ aplica el semiplano superior en el interior del círculo unitario. **2.19.** $|z|>1$. ● Para $|a|>1$ la función $w=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ aplica el exterior del círculo unitario ($|z|>1$) en el interior ($|w|<1$). **2.20.** $|z/(1-$ $-z)|<1$, es decir, $\operatorname{Re} z<1/2$. ● Véase el problema 3.53. del cap. 11. **2.21.** Converge para $x\in(0,+\infty)$, converge uniformemente si $x\in[\alpha,+\infty)$ para cualquier $\alpha>0$. **2.22.** Converge para $x\in$ $\in(-\infty,-3)\cup[-1,+\infty)$, converge uniformemente si $x\in(-\infty,$ $-3-\delta]\cup[-1,+\infty)$ para todo $\delta>0$. **2.23.** Converge uniformemente en todo el eje. **2.24.** Converge en todo el eje, excepto en los puntos $x=-1,-2,\ldots$ Converge uniformemente en el conjunto obtenido del eje, después de la eliminación de los intervalos $(-\delta_k-$ $-k,\ -k+\delta_k')$, $k=1,2,\ldots$, donde δ_k y δ_k' son tan pequeños como se quiera. **2.25.** $\operatorname{Re} z\leqslant 0$; la convergencia uniforme en todos los puntos. **2.26.** $|z-1|\leqslant 1$; la convergencia es uniforme en todos los puntos. **2.27.** Converge para $\operatorname{Re} z>1$, converge uniformemente para $\operatorname{Re} z\geqslant\alpha>1$. **2.28.** Converge fuera del círculo $|z+2|>1$, converge uniformemente fuera de cualquier círculo $|z+2|\geqslant\alpha>1$.

2.29. ●Calcúlese $R_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{(1+x^2)^k}$ y muéstrese que $\lim\limits_{x\to 0} R_n(x)=1\neq R_n(0)=0$. **2.32.** La serie converge en la región que consta del interior del círculo unitario $|z|<1$, del punto $z=1$ y del exterior del círculo unitario $|z|>1$; la serie converge uniformemente en la unión del círculo cerrado $|z|\leqslant 1-\gamma$ y del exterior cerrado del círculo $|z|\geqslant 1+\delta$ para cualesquiera $\gamma,\delta>0$. La suma de la serie

$$S(z)=\begin{cases}1/2 \text{ para } |z|>1,\\ -1/2 \text{ para } |z|<1,\\ 0 \text{ para } z=1.\end{cases}$$

2.36. ●Empléese la afirmación del problema 2.35.

3.1. Si la serie potencial (1) converge en el punto $z=z_1\neq z_0$, entonces converge absolutamente en el círculo $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ y converge uniformemente en todo círculo cerrado $|z-z_0|\leqslant r<$ $<|z_1-z_0|$. Si la serie (1) diverge en el punto $z=z_2$, diverge también fuera del círculo $|z-z_0|>|z_2-z_0|$. **3.2.** ● Para demostrar las afirmaciones a) y b) aplíquense el teorema de Abel y el teorema de Weierstrass, y para demostrar la afirmación c), el teorema de Abel, con la afirmación del problema 2.35, tomando en consideración que

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n+1}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. **3.3.** ● Aprovéchese la afirmación b) del problema 3.2. **3.4.** Converge absoluta y uniformemente en la región $|z-1| \leqslant 2$. **3.5.** Converge absoluta y uniformemente en la región $|z+1| \leqslant 2$. **3.6.** Converge absolutamente si $|z+2| < 1$; converge uniformemente si $|z+2| \leqslant r < 1$. En los puntos $x = -3$ y $x = -1$ converge condicionalmente. En el segmento $-3 \leqslant x \leqslant -1$ converge uniformemente. **3.7.** Converge absolutamente en la región $|z-4| < 1/2$; converge uniformemente en la región $|z-4| \leqslant \leqslant r < 1/2$. En el punto $x = 9/2$ converge condicionalmente, en el punto 7/2 diverge. En cualquier segmento $7/2 < r \leqslant x \leqslant 9/2$ converge uniformemente. **3.8.** Converge absolutamente en la región $|z-2| \leqslant 1/\sqrt{2}$; converge uniformemente en la región $|z-2| \leqslant \leqslant r < 1/\sqrt{2}$. En los puntos $2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ diverge. **3.9.** Converge absolutamente en la región $|z-3| < \sqrt{3}$; converge uniformemente en la región $|z-3| \leqslant r < \sqrt{3}$. En los puntos $x = 3 \pm \sqrt{3}$ converge condicionalmente y en el segmento $3-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{3}$, uniformemente. **3.10.** Converge absolutamente en la región $|z| < 1$. Converge uniformemento en la regiòn $|z| \leqslant r < 1$; diverge en la circunferencia $|z| = 1$. **3.11.** Converge absolutamente en la región $|z| < 1$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant \sqrt{r} < 1$ diverge en la circunferencia $|z| = 1$. **3.12.** Converge absolutamonte en todo el plano y uniformemente en cualquier región limitada. **3.13.** Converge absolutamente en la región $|z-1| < 8$; convergo uniformemente en la región $|z-1| \leqslant r < 8$; en los puntos $x = -7$ y $x = 9$ diverge. **3.14.** Diverge en todos los puntos, excepto el punto $z_0 = i$. **3.15.** Converge absolutamente en la región $|z-3| < \sqrt{3}$; converge uniformemento en la región $|z-3| \leqslant r < \sqrt{3}$ En los puntos $x = = 3 \pm \sqrt{3}$ diverge. Converge uniformemente en cualquier segmento $3-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant r < 3+\sqrt{3}$. **3.16.** Converge absolutamente en todo el plano y uniformemente en cualquier región limitada. **3.17.** Converge absolutamente en la región $|z-1| < 1$; converge uniformemente en la región $|z-1| \leqslant r < 1$; en la circunferencia $|z-1| = 1$ diverge. **3.18.** Converge absolutamente en la región $|z-3| < 4$; converge uniformemente en la región $|z-3| \leqslant r < 4$; en el punto $x = 7$ converge condicionalmente, en el punto $x = -1$ diverge. En cualquier segmento $-1 < l \leqslant x \leqslant 7$ converge uniformemente. **3.19.** Converge absolutamente en todo en plano, converge uniformemente en toda región limitada. **3.20.** Converge absolutamente en la región $|z| < 2$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r < 2$. En el punto $x = -2$ diverge, en el pnto $x = 2$ converge condicionalmente. En todo segmento $-2 < l \leqslant x \leqslant 2$ converge uniformemente. **3.21.** Converge absoluta y uniformemente en la región $|z| \leqslant 2$. **3.22.** Converge absolutamente en la región $|z-1| < 9/4$; converge uniformemente en la región $|z-1| \leqslant r < 9/4$; en los puntos $x = = -5/4$ y $x = 13/4$ diverge. **3.23.** Converge absolutamente en la región $|z| < 1/e$; converge uniformemente en la región $|z| \leqslant r < 1/e$; en los puntos $x = \pm 1/e$ diverge. **3.24.** Converge absoluta y uniforme mente en la región $|z-3|\leqslant 1/\sqrt{2}$. **3.25.** Converge absoluta y uniformemente en la región $|z+3|\leqslant 1$. **3.26.** Converge absoluta y uniformemente en la región $|z-3|\leqslant\sqrt{2}$. **3.27.** Converge absolutamente en la región $|z+3|<1$; converge uniformemente en la región $|z+3|\leqslant r<1$; en los puntos $x=-2$ y $x=-4$ diverge. **3.28.** Converge absolutamente en la región $|z|<1$; converge uniformemente en la región $|z|\leqslant r<1$; diverge en la circunferencia $|z|=1$. **3.29.** Converge sólo en el punto $z=5$. **3.30.** Converge absoluta y uniformemente en la región $|z|\leqslant 1$. **3.31.** Converge absolutamente en la región $|z|<1/2$; converge uniformemente en la región $|z|\leqslant r<1/2$; diverge en la circunferencia $|z|=1/2$. **3.32.** Converge absoluta y uniformemente en la región $|z-2|\leqslant 1$.

3.37. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z\ln 2)^n$, $|z|<\infty$. **3.38.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}\frac{z^n}{n!}$, $|z|<\infty$. **3.39.** $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. **3.40.** $z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\ldots$ $|z|<\frac{\pi}{2}$. ● El radio de convergencia de esta serie se determina aplicando el corolario del teorema de Taylor. **3.41.** $1+\frac{z^2}{2!}+\frac{5}{4!}z^4+\ldots$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. **3.42.** $z-\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\ldots$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. **3.43.** $1+z-\frac{2}{3!}z^3-\frac{4}{4!}z^4+\ldots$, $|z|<\infty$. **3.44.** $1-z^2+\frac{z^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{n!}+\ldots$, $|z|<\infty$. **3.45.** $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. **3.46.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}$, $|z|<2$. **3.47.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n z^{n+1}}{3^{n+1}}$, $|z|<\frac{3}{4}$. **3.48.** $3-\frac{z}{27}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-4)}{n!\,3^{4n-1}}z^n$, $|z|<27$. **3.49.** $\frac{1}{3}\left(1-\frac{z^2}{18}+\frac{1\cdot3}{2\cdot18^2}z^4+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{n!\,18^n}z^{2n}+\ldots\right)$, $|z|<3$. **3.50.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7n+1}{2^{n+2}}z^n$, $|z|<2$. ● $\frac{3z+1}{(z-2)^2}=-(3z+1)\times\left(\frac{1}{z-2}\right)'$. **3.51.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n 2^{n+1})z^n$, $|z|<\frac{1}{2}$.

3.52. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}(n+2)}{n!}z^n$, $|z|<\infty$. **3.53.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$.

3.54. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $|z|<\infty$. **3.55.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\frac{2^{4n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}$, $|z|<\infty$. **3.56.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}z^n$, $|z|<\frac{1}{2}$; cuando $x=\frac{1}{2}$ converge condicionalmente. **3.57.** $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$ $\times(1+2^{-n})\frac{z^n}{n}$, $|z|<1$; para $x=1$ converge condicionalmente.

3.58. $z+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z|<1$; si $x=\pm1$ converge absolutamente. **3.59.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z|<1$; para $x=\pm1$ converge condicionalmente. **3.60.** $z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z|<1$, cuando $x=\pm1$ converge absolutamente. **3.61.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$, $|z|<\infty$. **3.62.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n+2}}{2(2n+1)!(2n+1)}$, $|z|<\infty$.

3.63. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n\cdot z^{2n-1}}{(2n+1)!}$, $|z|<\infty$. ● $\frac{z\cos z-\operatorname{sen} z}{z^2}=\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)'$.

3.64. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)z^{2n-2}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. ● $\frac{z\operatorname{sen} z-1+\cos z}{z^2}=$ $=\left(\frac{1-\cos z}{z}\right)'$. **3.65.** $-78+59(z+4)-14(z+4)^2+(z+4)^3$.

3.66. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n$, $|z-2|<1$. **3.67.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$,

$|z-3i|<|1-3i|=\sqrt{10}$. **3.68.** $-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-3)^{2k}}{4^{k+1}}$, $|z-3|<2$.

3.69. $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1}-3^{-n-1})(z+4)^n$, $|z+4|<2$. **3.70.** $1+\frac{1}{3}(z-1)+$

$+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\ \dots\ (3n-4)}{3^n n!}(z-1)^n$, $|z-1|<1$.

3.71. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}}$, $|z-2|<2$. ● $\frac{1}{z^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right)'$.

3.72. $e^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{n!}$, $|z|<\infty$. **3.73.** $e\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}((z-1)^{2n}+$

$+(z-1)^{2n+1})$ $|z|<\infty$. **3.74.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{\operatorname{sen}4}{(2n)!}(z+2)^{4n}+\right.$

$\left.+\frac{\cos 4}{(2n+1)!}(z+2)^{4n+2}\right)$, $|z|<\infty$. **3.75.** $3\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times$

$\times\frac{5^n(z-1)^n}{n\cdot 8^n}$, $|z-1|<\frac{8}{5}$. ● $\ln(5z+3)=\ln 8+\ln\left(1+\frac{5}{8}(z-1)\right)$.

3.76. $\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z+3)^{2n}}{n\cdot 4^n}$, $|z+3|<2$. **3.77.** $|z|<1$;

$\frac{2}{(1+z)^3}$. **3.78.** $|z+1|<1$; $\frac{z+1}{z^2}$. **3.79.** $|z-3|<1$; $-\frac{\ln(4-z)}{z-3}$

para $z\neq 3$, 0 para $z=3$. **3.80.** $|z|<|a|$; $\frac{1}{a^2+z^2}$. **3.81.** $|z|<1$;

$\frac{1}{(1+z^2)^2}$. **3.83.** ● Representando $f(z)$ en la forma de serie, según las potencias $(z-a)$, es decir, en forma de $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, de la continuidad de $f(z)$ en el punto $z=a$, convénzase de que $c_0=0$. Esto significa que $f(z)=(z-a)\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-a)^{n-1}=(z-a)f_1(z)$ donde $f_1(z)$ es una función analítica en el círculo $|z-a|<R$ y $f_1(z_k)=0$. $k=1, 2, \dots$ De aquí conclúyanse que $c_1=0$, etc. **3.84.** No. **3.85.** a) $f(z)=z/(z+2)$; b) $f(z)=z^2$. **3.86.** $g(z)=f(z)=1/(2-z)$ en la

parte común de los círculos $|z| < 2y\ |z-i| < \sqrt{5}$. **3.87.** $g(z) = f(z) = \ln(1+z)$ en la parte común de los círculos $|z| < 1$ y $|z-1-2i| < 2\sqrt{2}$.

4.1. 10 000 para $x = 1$ ó 10 para $x = -0{,}5$. **4.2.** Dos términos, el error absoluto límite $\varepsilon < \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 = 0{,}0000386 < 0{,}0001$. **4.3.** 0,0002. **4.4.** $|x| < 0{,}9067$. **4.5.** 0,002. **4.6.** 1,6487. **4.7.** 0,3679. **4.8.** 0,5878. **4.9.** 0,2094. **4.10.** 0,5403. **4.11.** 0,8269. ● Teniendo en cuenta que $1000 = 318 \times 3{,}1415926 + 1{,}5707963 - 0{,}5971963$, reducimos el argumento a la magnitud $0{,}5971963 \in [0, \pi/4]$ y hallamos que $\operatorname{sen} 1000 = \operatorname{sen}(1{,}15707963 - 0{,}5971963) = \cos 0{,}5971963$. **4.12.** 8,0411.

● $\sqrt[3]{520} = (512+8)^{1/3} = 8\left(1+\frac{1}{64}\right)^{1/3}$. **4.13.** 3,8730. ● $\sqrt{15} = \sqrt{16-1} = 4\left(1-\frac{1}{16}\right)^{1/2}$. **4.14.** 5,1437. ● $\sqrt[4]{700} = (625+75)^{1/4} = 5\left(1+\frac{3}{25}\right)^{1/4}$. **4.15.** 0,6931. Utilícese el desarrollo $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ para $x = \frac{1}{3}$. **4.16.** 0,5236. **4.17.** 0,9385.

4.18. 1,1752. **4.19.** 1,1276.

4.20.
```
      FUNCTION S(Y,EPS)
      PI = 3.141593
      PI2 = 1.570796
      X = Y
      FACT = 1.
      SX = 1.
      IF(X.LT.0) SX = -1.
      X = ABS(X)
      IF(X.LE.PI) GO TO 1
      X1 = X/PI
      N = X1
      N1 = N/2
      M = N - N1*2
      IF (M.NE.0) FACT = -1.
      X11 = N
      X = X - X11*PI
    1 IF (X.GT.PI2) X = PI - X
      S = 0
```

```
      SM = X
      T = -1.
    2 T = T + 1.
      A = 2*T
      A = (A + 2.)*(A + 3.)
      S = S + SM
      S = S*(-1.)*(X*X)/A
      IF(ABS(SM).GT.EPS) GO TO 2
      S = (S + SM)*SX*FACT
      RETURN
      END
```

● Ya que sen x = sign $(x)\cdot$sen $|x|$, se puede considerar que $x \geqslant 0$. Sea $x = \pi n + x_1$, donde $n = \left[\frac{x}{\pi}\right]$ y $x_1 \in [0, \pi)$, entonces sen $x =$ = sen $(\pi n + x_1)$ = cos πn sen x_1 = $(-1)^n$ sen x_1. En este caso, si $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, suponemos que sen $x = (-1)^n$ sen $(\pi - x_1) = (-1)^n \times$ $\times$ sen x_2, donde $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4.21.
```
      FUNCTION C(X,EPS)
      PI2 = 6.283185
      Y = X
      IF(ABS(X).LE.PI2) GO TO 1
      N = Y/PI2
      A = N
      FACT = 1.
      IF(X.LT.0) FACT = -1.
      Y = Y - FACT*PI2*A
    1 Y = Y + 1.570796
      C = S(Y,EPS)
      RETURN
      END
```

4.22.
```
      FUNCTION E(Y,EPS)
      REAL* 8 E1/2.7182818284590/,E2/0,3678794411714/,E3,E4
      X = Y
      IX = X
      X1 = IX
```

```
      X = X - X1
      E4 = 1.
      E = 1.
      B = ABS(X)
      JX = IABS(IX)
      IF(JX.LT.1) GO TO 3
      E3 = E1
      IF(IX.LT.0) E3 = E2
      DO 1 I = 1, JX
    1 E4 = E4*E3.
    3 EM = 1.
      T = 0.
    2 T = T + 1.
      EM = EM*X/T
      E = E + EM
      EPSI = ABS(EM)*B/T
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 2
      EM = EM4
      E = E*EM
      RETURN
      END
```

La estimación del resto es

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{n!\,n}.$$

El número $e^x = e^{[x]} \cdot e^{x_1}$, $|x_1| < 1$, donde $e^{[x]} = \underbrace{e \cdot e \ldots e}_{[x]\ \text{veces}}$ para $[x] \geqslant 0$, $e^{[x]} = \dfrac{1}{\underbrace{e \cdot e \ldots e}_{[x]\ \text{veces}}}$ para $[x] < 0$.

4.23.

```
      FUNCTION BINOM (X,ALFA,EPS)
      IF(X.GT.1) GO TO 2
      BINOM = 1.
      B = 1
      T = 0.
```

```
1 A = ALFA - T
  T = T + 1
  B = B*A*X/T
  BINOM = BINOM + B
  IF(B.GT.1) GO TO 1
  EPS1 = ABS(B)/(1=ABS(A)  ABS(X)/T)
  IF(EPS1.GT EPS) GO TO 1
  RETURN
2 WRITE (3,3)
3 FORMAT ('X.GT.1 ')
  RETURN
  END
```

● La estimacion del resto es $|R_n(x)| \leqslant \left| \binom{\alpha}{n} x^n \right| \times$

$$\times \frac{1}{1-\frac{|\alpha-n+1|}{n}|x|}.$$

4.24.

```
  FUNCTION ALN(X,EPS)
  T = 0.
  ALN = 0.
  A = -1.
1 T = T + 1
  A = (-1.)*X*A
  ALN = ALN + A/T
  IF(ABS(A/T).GT.EPS) GO TO 1
  RETURN
  END
```

4.25.

```
  FUNCTION ALN1(X,EPS)
  IF(X.GE.1) GO TO 2
  T = 0.
  ALN1 = X
  A = X
1 T = T + 1.
  X2 = X**2
  A = A*X2
```

```
      T2 = T*2
      B = A/(T2 + 1.)
      ALN1 = ALN1 + B
      EPS1 = ABS(B)/(1.-X**2)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
    2 WRITE (3.3)
    3 FORMAT (9h X.GE.1)
      RETURN
      END
```

● La estimación del resto es

$$| R_n(x) | \leqslant \frac{| x |^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)} .$$

4.26.

```
      FUNCTION ARCTG(X,EPS)
      IF(X.GT.1) GO TO 2
      T = 0.
      ARCTG = X
      A = X
    1 T = T + 1.
      X2 = (-1.)*X**2
      A = A*X2
      T2 = T*2.
      ARCTG = ARCTG + A/(T2 + 1.)
      EPS1 = ABS(A**X2/(T2 + 3.))
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
    2 WRITE (3,3)
      FORMAT ('X.GT.1 ')
      RETURN
      END
```

4.27.

```
      FUNCTION B0(Y,EPS)
      X = Y/2
      B0 = 1.
```

```
      A = 1.
      T = 0.
    1 T = T + 1.
      A = A*(-1.)*(X*X)/T**2
      B0 = B0 + A
      IF(ABS(A).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.28. Uno de los dos subprogramas:

```
      FUNCTION  SH(X,EPS)
      SH = (E(X,EPS) - E((-1.)*X,EPS))/2.
      RETURN
      END
      FUNCTION SH(X,EPS)
      T = 0.
      SH = 0
      A = X
    1 T = T + 1.
      T2 = T*2.
      FA = (X**2)/T2*(T2 + 1.)
      A = A*FA
      SH = SH + A
      IF(FA.GT.1) GO TO 1
      EPS1 = A*FA/(1 - FA)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 2
      RETURN
      END
```

4.29.

```
      FUNCTION CH(X,EPS)
      CH = (E(X,EPS) + E((-1.)*X,EPS))/2.
      RETURN
      END
```

4.30. Tarea para el ordenador referente al problema 4.10:

a) subprograma

```
      FUNCTION S(X,EPS)
```

b) subprograma

```
      FUNCTION C(X,EPS)
      c) programa principal
      R = C(1.,0.0001)
      R1 = COS(1.)
      WRITE (3,1) R,R1
    1 FORMAT ('COS1 ', 2F8.4)
      STOP
      END
```

Tarea para el ordenador referente al problema 4.15:

a) programa principal

```
      R1 = ALN1(0.333333, 0.0001)
      R2 = ALOG(2.)
      WRITE (3,1) R1,R2
    1 FORMAT ('LN(2) = ', 2F8.4)
      STOP
      END
```

b) subprograma

```
      FUNCTION ALN1(X,EPS)
```

Tarea para el ordenador referente al programa 4.14:

a) subprograma

```
      FUNCTION BINOM(X,EPS)
```

b) programa principal

```
      R = BINOM(0.12,0.25,0.0001)
      R = 0,2*R
      R1 = SQRT(700.)
      R1 = SQRT(R1)
      WRITE (3.1)R,R1
      FORMAT ('700**(1/4) = ', 2F8.4)
      STOP
      END
```

4.31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n^2}$. **4.32.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(4n+3)}$.

4.33. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{x^{4n+1}}{(2n)!\,(4n+1)}$. **4.34.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!!\,x^{3n+1}}{2^n\cdot n!\,(3n+1)}$.

4.35.
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{2^{2k+1}(k+1)!\,k!}.\qquad 4.36.\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

4.37. 0,2800. 4.38. 0,1991. 4.39. 0,4802. 4.40. 0,6225. 4.41. 0,7714. 4.42. 0,9461.

4.43.

```
      FUNCTION SI(X,EPS)
      SI = X
      X2 = X*X
      SM = X
      T = 0.
    1 T = T + 1.
      T2 = T*2
      SM = SM*(—1.)*X2/(T2 + 2.)*(T2 + 3.)
      A = SM/(T2 + 3.)
      SI = SI + A
      IF(ABS(A).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.44.

```
      FUNCTION ERF(X,EPS)
      ERF = X
      X2 = X*X
      AM = X
      T = 1.
    1 T = T + 1.
      T2 = T*2.
      AM = AM*(—1.)*X2/T
      A = AM/(T2 — 1.)
      ERF = ERF + A
      IF(ABS(A).GT.EPS) GO TO 1
      ERF = 1.128379*ERF
      RETURN
      END
```

4.45.

```
      FUNCTION BINT(X,S,ALFA,EPS)
```

```
      XS = X**S
      BINT = X
      B = X
      T = 0
    1 T = T + 1
      TS = T*S + 1.
      C = XS*(ALFA + 1.—T) T
      B = B*C
      A = C/TS
      BINT = BINT + B/TS
      IF(ABS(A).GT.1) GO TO 1
      A = B/(1. — A)
      EPS1 = ABS(A)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.46.

```
      FUNCTION ATG(X,EPS)
      X2 = (—1.)*X*X
      A = X
      ATG = X
      T = 0.
    1 T = T + 1.
      T2 = (T*2. + 1.)**2
      A = A*X2
      B = A/T2
      ATG = ATG + B.
      IF(ABS(B).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.47.

```
      FUNCTION ALIN(X,EPS)
      A = —1.
      ALIN = 0.
      T = 0.
    1 T = T + 1.
```

```
      T2 = T*T
      A = A*X*(-1.)
      B = A/T2
      ALIN = ALIN + B
      IF(ABS(B).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.48. Tarea para el ordenador referente al problema 4.39:

a) programa principal

```
      R = 0.886227*ERF(0.5,0.0001)
      WRITE (3,1) R
    1 FORMAT ('', F8.4)
      STOP
      END
```

b) subprograma función

```
      FUNCTION ERF(X,EPS)
```

Tarea para el ordenador referente al problema 4.40:

a) programa principal

```
      R = BINT(0.6,2.,0.333333,0.0001)
      WRITE (3,1) R
    1 FORMAT (' INTEGRAL = ', F8.4)
      STOP
      END
```

b) subprograma función

```
      FUNCTION BINT(X,S,ALFA,EPS)
```

4.50. ● $\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}-\right.$ $\left.-\frac{1}{(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)}\right)$. **4.51.** ● Véase el problema 4.50. **4.52.** ● El desarrollo en la serie potencial de la función $\ln(1+x)$ para $x=1$. **4.53.** ● El desarrollo en serie potencial de la función $\operatorname{arctg} x$ para $x=1$. **4.54.** $\ln 2$. **4.55.** $I_0(2)$. **4.56.** $e-1$. **4.57.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **4.58.** $\operatorname{sen} 1$. **4.59.** $\cos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.60.** e^2. **4.61.** 1,0767. ● $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}=\zeta(2)-$

$-\zeta(4)+\zeta(6)-\zeta(8)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8(n^2+1)}$. 4.62. 4,3226. ● $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}=\pi^2\zeta(2)-\frac{\pi^4}{3}\zeta(4)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}-\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^4}{n^4}\right)$.

4.63. 0,5071. ● $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}=\zeta(3)-2\zeta(6)+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6(n^3+2)}$.

4.64. 0,0939. ● $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(5n+3)}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)\xi(2)-\frac{3}{25}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)+\frac{9}{125}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)-\frac{27}{125}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4(5n+3)}$.

4.65. 0,1249. ● $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+2}=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)+\frac{4}{27}\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)-\frac{8}{81}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)+\frac{16}{81}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times\frac{1}{n^4(3n+2)}$. 4.66. El programa para el problema 4.64 (empléese la igualdad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(an+b)}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)-\frac{b}{a^2}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)+\frac{b^2}{a^3}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)-\frac{b^3}{a^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4(an+b)}$ para $a=5$, $b=3$):

```
A = 5.
B = 3.
EPS = 0.0002
S = 0.822467/A - B*0.901543/A**2 + B**2*0.947033/A**3
D = 1.
C = 0.
T = 0.
```

```
1 T = T + 1
  D = D*(-1 )
  SM = 1./(T**4)*(A*F + B)
  C = C + D*SM
  IF(SM.GT.EPS) GO TO 1
  S = S + (B**3)*C/(A**3)
  WRITE (3,2) S
2 FORMAT ( SUMA DE LA SERIE = ', F8.4)
  STOP
  END
```

4.67. $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 6\ \ldots\ (4n+1)(4n+2)}{(4n)!}x^{4n}+\right.$ $\left.+\frac{2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\ \ldots\ (4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!}x^{4n+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. **4.68.** $y(x)=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(1\cdot 4\cdot 7\ \ldots\ (3n+1))^2}{(3n+2)!}(3n+4)x^{3n+2}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.69.** $y(x)=1+$ $+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\ \ldots$ **4.70.** $y(x)=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+$ $+\frac{x^6}{45}+\ \ldots$ **4.71.** $y(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{5x^6}{6!}+\ \ldots$ **4.72.** $y(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2^m\cdot m!}x^{2m}=1-e^{-x^2/2}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.73.** $y(x)=$ $=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{2^{m-1}(m-1)!}{(2m+1)!}x^{2m+1}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.74.** $y(x)=x+\frac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\times$ $\times\frac{(-1)^m}{(2m+1)!!}x^{2m+1}$, $x\in\mathbb{R}$. **4.75.** $y(x)=C_1\frac{\operatorname{sen} x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$. ● La solución general debe contener dos constantes arbitrarias, por eso de las igualdades $r(r+1)a_0=0$ y $(r+1)(r+2)a_1=0$ escogemos $r=-1$, entonces $a_0\neq 0$ y $a_1\neq 0$. **4.74.** $y(x)=C_1\cos\sqrt{x}+$ $+C_2\operatorname{sen}\sqrt{x}$. **4.79.** $I_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen} x$, $I_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$. ● Utilícese la igualdad $\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. **4.80.** $y(x)=$ $=C_1I_\nu(\alpha x)+C_2I_{-\nu}(\alpha x)$ si ν es un número no entero e $y(x)=$ $C_1I_n(\alpha x)+C_2N_n(\alpha x)$ si $\nu=n$ es un número entero. **4.81.** $y(x)=$

$= C_1 I_0(2x) + C_2 N_0(2x)$. **4.82.** $\sqrt{y(x)} = C_1 I_{1/3}(2x) + C_2 I_{-1/3}(2x)$. **4.83.** $y(x) = C_1 I_2(x\sqrt{3}) + C_2 N_2(x\sqrt{3})$. **4.84.** $y(x) = C_1 I_{1/5}(3x) + C_2 I_{-1/5}(3x)$.

5.1. $|z-2|>1$; $\frac{z-2}{z-3}$. **5.2.** $|z+i|>2$; $\frac{2i}{(z-i)^2}$. **5.3.** $0<|z|<\infty$; $z^3e^{1/z}$. **5.4.** $1<|z-i|<\infty$; $\frac{1}{z^2}$. **5.5.** $\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$, $0<|z-1|<1$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$, $1<|z-1|<\infty$. **5.6.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$, $|z|>1$. ● Sustitúyase $z=1/\eta$ y desarróllese según las potencias η. **5.7.** $-\frac{i}{4(z-i)^2} - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty} \times \frac{ki^k(z-i)^{k-1}}{2^k}$, $0<|z-i|<2$; $-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(-i)^k\frac{2^k}{(z-i)^{k+1}}$, $2<|z-i|<\infty$. ● $\frac{z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'$. Para el segundo desarrollo válganse de la sustitución $z-i=\frac{1}{\eta}$. **5.8.** $\frac{1}{z^4}\sum_{k=0}^{\infty} \times (-1)^k\frac{k+1}{z^{2k}}$, $1<|z|<\infty$. ● $\frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'$.

5.9. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, $0<|z|<\infty$. **5.10.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, $0<|z|<\infty$. **5.11.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!\,(z-2)^{2n+1}}$, $0<|z-2|<\infty$.

5.12. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-3}}$, $0<|z|<\infty$. **5.13.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-2}}$, $0<|z|<\infty$. **5.14.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{\cos 1}{(z-2)^{4n}} + \frac{4\operatorname{sen} 1}{(2n+1)} \times\right.$

$\times \frac{1}{(z-2)^{1n+2}}\Big)$, $0 < |z-2| < \infty$. **5.15.** $\operatorname{sen}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{5}{6}\frac{1}{z^3} + \ldots$, $1 < |z| < \infty$.

5.16. ● Examínese la integral $\int\limits_{|\eta - z_0| = \rho} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}$ y válganse de la acotación $f(z)$, que desprende de la existencia del límite $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. **5.17.** ● Empléese la siguiente afirmación: si $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $m \geqslant 1$, $\varphi(z_0) \neq 0$ y $\varphi(z)$ es una función analítica en el entorno del punto z_0, entonces en cierto entorno del punto z_0 es válido el desarrollo $\frac{1}{\varphi(z)} = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots$, donde $b_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$. **5.18.** ● Demuéstrese por reducción al absurdo, es decir, supóngase que $f(z)$ está acotada en el entorno del punto z_0 y dedúzcase de esta suposición que z_0 es un punto singular evitable. **5.19.** ● Analícese la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$; demuéstrese que z_0 es un punto esencialmente singular para $\varphi(z)$ y aprovéchese la afirmación del problema 5.18. **5.20.** $\sum\limits_{n=1}^{0} c_n z^n$ converge en todo el plano y la serie $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ converge fuera del círculo $|z| \geqslant R$. **5.21.** Los puntos $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ y $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4} + \pi i}$ son polos de tercer orden. **5.22.** Los puntos $z_1 = 0$ y $z_2 = -1$ son polos de primer orden y el punto $z_3 = 1$ es un polo de tercer orden. **5.23.** Los puntos $z_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, son polos de primer orden. **5.24.** Los puntos $z_k = \pi(2k + 1)/2$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, son polos de segundo orden. **5.25.** El punto $z_0 = 3i$ es un punto esencialmente singular. **5.26.** El punto $z_0 = -2i$ es esencialmente singular. **5.27.** Los puntos $z_k = 1 + \frac{2}{\pi(2k+1)}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, son polos de primer orden y el punto $z = 1$ es un punto límite para los polos. **5.28.** En el punto $z = 1$ tenemos una singularidad evitable y en los puntos $z_k = 1 + \frac{\pi(2k+1)}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, polos de primer orden. **5.29.** En el punto $z_0 = 0$ tenemos una singularidad evitable. **5.30.** En el punto $z_0 = 0$ tenemos un polo de cuarto orden. **5.31.** En los puntos $z_k = \ln 3 + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, tenemos polos de primer orden. **5.32.** Un punto regular. **5.33.** Un polo de tercer orden. **5.34.** Un punto regular (cero de tercer orden). **5.35.** Un polo de segundo orden. **5.36.** Un punto esencialmente singular. **5.37.** Un punto esencialmente singular. **5.38.** Un polo de segundo orden. **5.39.** Un punto regular. 5.40. Un punto regular. 5.41. Un punto esencialmente singular.

6.1. $\operatorname{res}\left[\frac{z^2+1}{z-2};\ 2\right]=5$. 6.2. $\operatorname{res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2};\ i\right]=-\frac{1}{4}i$, $\operatorname{res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2};\ -i\right]=\frac{1}{4}i$. 6.3. $\operatorname{res}\left[\frac{z^{2n}}{(z-1)^n};\ 1\right]=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)}{(n-1)!}$. 6.4. $\operatorname{res}\left[\frac{\operatorname{sen}2z}{(z+1)^3};\ -1\right]=-\frac{4\cos 2}{3}$. 6.5. $\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ 0\right]=\frac{1}{9}$, $\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ 3i\right]=\frac{ie^{3i}}{54}$, $\operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ -3i\right]=-\frac{ie^{-3i}}{54}$. 6.6. $\operatorname{res}\left[\operatorname{tg} z;\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]=-1$, $k\in\mathbb{Z}$. 6.7. $\operatorname{res}[\operatorname{ctg}^2 z;\ k\pi]=0$, $k\in\mathbb{Z}$. 6.8. $\operatorname{res}\left[\frac{\cos^3 z}{z^3};\ 0\right]=-\frac{3}{2}$. 6.9. $\operatorname{res}\left[\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)};\ 0\right]=0$, $\operatorname{res}\left[\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)};\ 1\right]=1$. 6.10. $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ 0\right]=1$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ 1\right]=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ -1\right]=-\frac{1}{2}$. 6.11. $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ 0\right]=0$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1+i\sqrt{3}}{6}$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5},\ 1\right]=-\frac{1}{3}$, $\operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1-i\sqrt{3}}{6}$. 6.12. $\left[\frac{\cos 4z}{(z-2)^6};\ 2\right]=-\frac{128}{15}\operatorname{sen}8$. 6.13. 1. 6.14. 0. 6.15. 1. 6.16. -1. 6.17. 0. 6.18. $-\frac{1}{3}\operatorname{sh}3$. ● Empléese el segundo teorema sobre los residuos. 6.19. 0. 6.20. π^2. 6.21. -1. 6.22. $\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$. 6.23. $\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$. 6.24. $2\pi i$. 6.25. $4\pi i$. 6.26. $-4\pi i$. 6.27. $\frac{2\pi i}{9}$. 6.28. $\frac{2\pi i}{3}\operatorname{sh}3$. ● Válganse del segundo teorema sobre los residuos y del resultado del problema 6.18. 6.29. $(-1)^n\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!}\frac{2\pi i}{(b-a)^{2n-1}}$. 6.30. 0. ● Empléense el segundo teorema sobre los residuos y la relación $\operatorname{res}[f(z);\ \infty]=0$. 6.31. $2\pi i$. 6.32. 0. 6.33. 0. 6.34. 0. 6.35. $-4\pi i$. 6.36. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 6.37. $\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$. 6.38. $\pi\sqrt{2}$. 6.39. $\frac{\pi}{2^{2n-2}}\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!}$. 6.40. $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$. 6.41. $\frac{\pi}{4a}$. 6.42.

$\frac{\pi e^{-4}}{2}(\operatorname{sen} 2+2\cos 2)$. **6.43.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\right)$. **6.44.** $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$. **6.45.** $\frac{\pi}{6}e^{-3}$. **6.46.** $\pi\frac{2e-1}{12e^2}$. **6.47.** Dos raíces. ● $p(it)$, al variar t desde $+\infty$ hasta $-\infty$, no recibe incremento. **6.48.** Dos raíces. **6.49.** Tres raíces. **6.50.** ● Utilícese el hecho de que $\arg fg=\arg f+\arg g$ y $\arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)$ no adquiere incremento cuando el punto z recorre el contorno L, ya que $\left|\frac{\varphi(\eta)}{f(\eta)}\right|_{\eta\in L}<1$. **6.51.** ● Analícense las funciones $f(z)=a_0z^n$ y $\varphi(z)=a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ en la circunferencia $|z|=R$ de un radio bastante grande R. **6.52.** a) en el círculo $|z|<1$ hay un cero; b) en el anillo $1\leqslant|z|<2$ hay cuatro ceros. ● Póngase $f(z)=8z$ en el caso a) y $f(z)$ en el caso b). **6.53.** a) en el círculo $|z|<1$ hay un cero; b) en el anillo $1\leqslant|z|<2$ no hay ceros; c) en el anillo $2\leqslant|z|<3$ hay dos ceros.

7.2. Para la función par: $\beta_k=0$, $\alpha_k=\frac{4}{l}\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{2\pi kx}{l}\,dx$, para la impar: $\alpha_k=0$, $\beta_k=\frac{4}{l}\int\limits_0^{l/2} f(x)\operatorname{sen}\frac{2\pi kx}{l}\,dx$ $(k=0, 1, \ldots)$.

7.3. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{m}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2m-1)x}{2m-1}$, $S(\pi)=\frac{1}{2}$ (fig. 103). **7.4.** $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} kx}{k}$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ (fig. 104). **7.5.** $f(x)\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\times$ $\times\frac{\cos\pi(2m-1)x}{(2m-1)^2}$, $S(1)=1$ (fig. 105). **7.6.** $f(x)=\frac{1}{\ln 2}+2\ln 2\times$ $\times\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2\cos k\pi-1}{\ln^2 2+k^2\pi^2}\cos\frac{\pi kx}{\ln 2}$. **7.7.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^3\frac{k\pi}{4}}{k}\operatorname{sen} kx$. **7.8.** $f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\pi kx$. **7.9.** $f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\times$ $\times\operatorname{sen}\frac{\pi(2m+1)x}{2}$. **7.10.** $f(x)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x-\frac{16}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{m}{(4m^2-1)^2}\operatorname{sen} 2mx$.

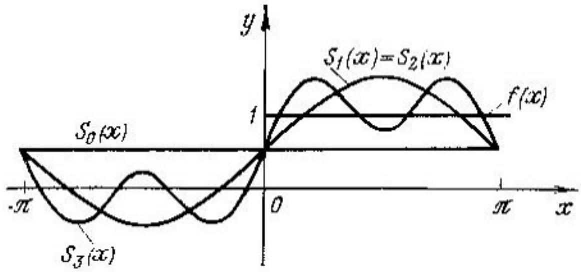

Fig. 103

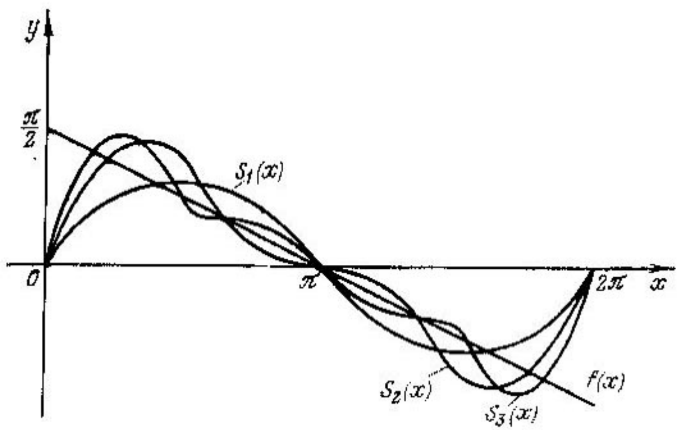

Fig. 104

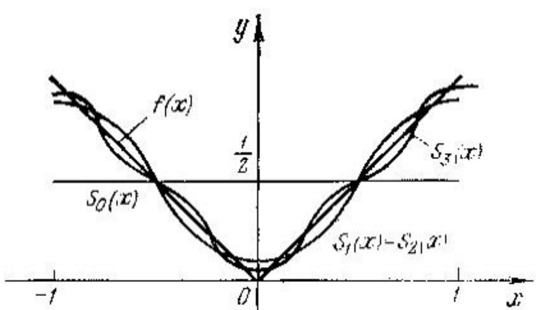

Fig 105.

7.11. a) $\frac{\pi^2}{8}$; b) $\frac{\pi^2}{32\sqrt{2}}$. ● Examínese la serie en el punto $x_0 = 1/4$. **7.12.** $\pi^2/12$. **7.13.** $\pi^2/6$. **7.14.** ● Multiplicando y dividiendo $\mathcal{D}_n(x)$ entre $2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}$, obtenemos $\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{2(n+1)\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}} \times$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2k+1}{2}\,x}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}} = \frac{1}{4(n+1)\,\mathrm{sen}^2\,\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n} (\cos kx -$$

$$-\cos(k+1)x) = \frac{1-\cos(n+1)\,x}{4(n+1)\,\mathrm{sen}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1}{n+1}\,\frac{\mathrm{sen}^2\,\frac{n+1}{2}}{2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{x}{2}}.$$

7.15. $f(x, y) = \pi^2 - 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,mx}{m} - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,ny}{n} + 4 \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,mx\,\mathrm{sen}\,ny}{mn}$.

7.16. $f(x, y) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\,\mathrm{sen}\,mx + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,\mathrm{sen}\,ny +$

$+ \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{mn}\,\mathrm{sen}\,mx\,\mathrm{sen}\,ny$. **7.17.** $f(x, y) = \frac{4}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \times$

$\times\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n y}{2} + \frac{16}{\pi^3} \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1}}{m^2 n} \cos \pi m x\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n y}{2}$. **7.18.** $f(x,$

$y) = \frac{2\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\,\mathrm{sen}\,\pi m x + \frac{2}{\pi} \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1}}{mn^2}\,\mathrm{sen}\,\pi m x \times$

$\times \cos ny$. **7.19.** $\mathfrak{F}[\mathrm{sign}\,(t-a) - \mathrm{sign}\,(t-b)] = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\pi\nu\,(b-a)}{\pi\nu} \times$

$\times\, e^{-\pi i \nu (a+b)}$. **7.20.** $\mathfrak{F}[f] = h\,\frac{\mathrm{sen}^2\,\pi\nu a}{\pi^2 \nu^2 a}$. **7.21.** $\mathfrak{F}[f] =$

$$= \begin{cases} \frac{4\pi\nu}{a^2 - 4\pi^2\nu^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi^2\nu}{2a} & \text{para } \nu \neq \frac{a}{2\pi}, \\ \frac{\pi}{a} & \text{para } \nu = \frac{a}{2\pi}. \end{cases}$$

7.22. $\mathfrak{F}[f] = \frac{2\,\mathrm{sen}^2\,\pi\nu}{\pi i \nu}$.

7.23. $\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\,e^{-\omega a}$; $\frac{1}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\omega a} \cos \omega t\,d\omega$.

● La integral $\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$ se calcula integrando según el pará metro ω (véase el problema 4.28. del cap. 8). **7.24.** $\mathfrak{F}_s\left[\frac{t}{a^2+t^2}\right]=$ $=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\omega a}$, $\frac{t}{a^2+t^2}=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\omega a}\operatorname{sen}\omega t\,d\omega$. ● Utilícese la relación $\mathfrak{F}_s\left[\frac{t}{a^2+t^2}\right]=-\frac{d}{d\omega}\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$, donde la integral $\mathfrak{F}_c\times$ $\times\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$ está calculada en el problema 7.23. **7.25.** $\mathfrak{F}_s[te^{-t^2}]=$ $=\frac{\omega}{2\sqrt{2}}\,e^{-\omega^2/4}$, $te^{-t^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\omega}{2\sqrt{2}}\,e^{-\omega^2/4}\operatorname{sen}\omega t\,d\omega$. **7.26.** $\mathfrak{F}_c[e^{-\alpha|t|}\cos\beta t]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{(\alpha^2+(\beta+\omega)^2)(\alpha^2+(\beta-\omega)^2)}$, $e^{-\alpha|t|}\cos\beta t=$ $=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{(\alpha^2+(\beta+\omega)^2)(\alpha^2+(\beta-\omega)^2)}\cos\omega t\,d\omega$. **7.28.** $S(\nu_k)=$ $=-\frac{2i}{\pi\nu_k}\operatorname{sen}^2\pi\nu_k T$, $\nu_k=\frac{k}{4T}$, $\rho(\nu_k)=\frac{2}{\pi|\nu_k|}\operatorname{sen}^2\pi\nu_k T$, $\Phi(\omega_k)=$ $=\begin{cases}0 & \text{para } k=4n,\\ \frac{\pi}{2} & \text{para } k\neq 4n,\end{cases}$ $n\in\mathbb{N}$ (fig. 106). **7.29.** $S(\nu_k)=$ $=\frac{\operatorname{sen}2\pi\nu_k-i(1-\cos 2\pi\nu_k)}{\pi\nu_k}$, $\nu_k=\frac{k}{3}$, $\rho(\nu_k)=\frac{2|\operatorname{sen}\pi\nu_k|}{\pi|\nu_k|}$, $\Phi(\nu_k)$ $=\begin{cases}\pi\nu_k & \text{para } k=1,\,2,\\ 0 & \text{para } k=3,\end{cases}$ $\Phi(\nu_{k+2})=\Phi(\nu_k)$ (fig. 107). **7.30.** $S(\nu)=$ $=\frac{\operatorname{sen}2\pi a\nu}{\pi\nu}$, $\rho(\nu)=\frac{|\operatorname{sen}2\pi a\nu|}{\pi|\nu|}$, $\Phi(\nu)=\begin{cases}0, & \text{si } S(\nu)\geqslant 0,\\ -\pi, & \text{si } S(\nu)<0\end{cases}$ (fig. 108). **7.31.** $S(\nu)=\frac{2\cos\pi\nu}{\pi(1-4\nu^2)}$, $\rho(\nu)=\frac{2}{\pi}\left|\frac{\cos\pi\nu}{1-4\nu^2}\right|$, $\Phi(\nu)=$ $=\begin{cases}0, & \text{si } S(\nu)\geqslant 0,\\ -\pi, & \text{si } S(\nu)<0\end{cases}$ (fig. 109). ● Para calcular la integral $\int\limits_{-1/2}^{1/2}\cos\pi t\,e^{-2\pi i\nu t}\,dt$ la función $\cos\pi t$ debe representarse según la fórmula de Euler. **7.32.** $S(\nu)=\frac{\operatorname{sen}^2\pi\nu}{\pi\nu^2}$, $\rho(\nu)=\frac{\operatorname{sen}^2\pi\nu}{\pi\nu^2}$, $\Phi(\nu)=$ $=0$ (fig. 110). **7.33.** $S(\nu)=\frac{\operatorname{sen}4\pi\nu+i(\cos 4\pi\nu-1)}{\pi\nu}$, $\rho(\nu)=$

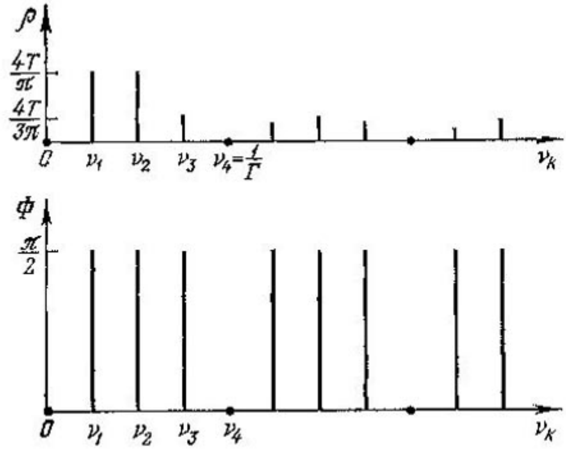

Fig. 106

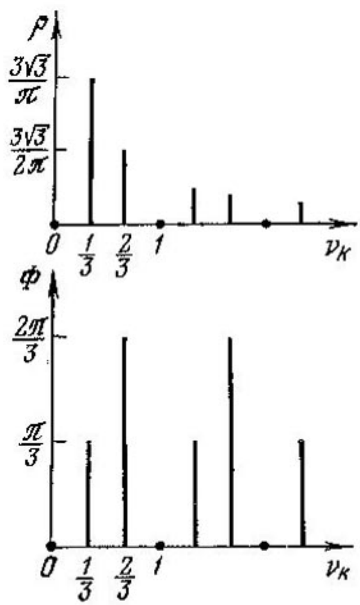

Fig. 107

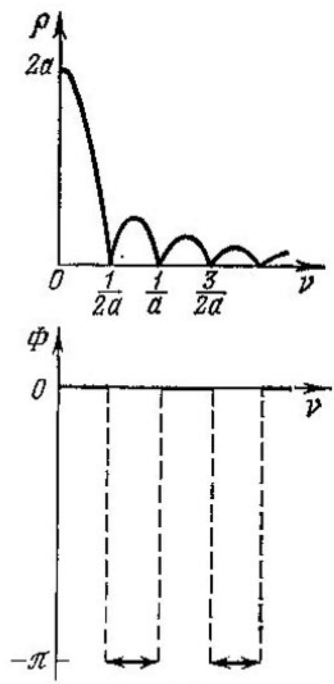

Fig. 108

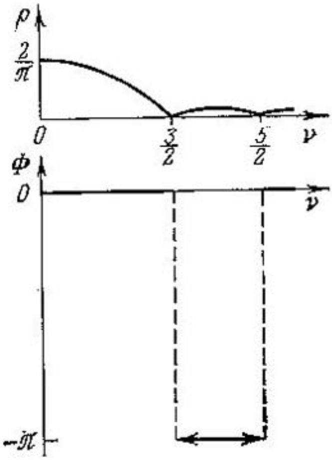

Fig. 109

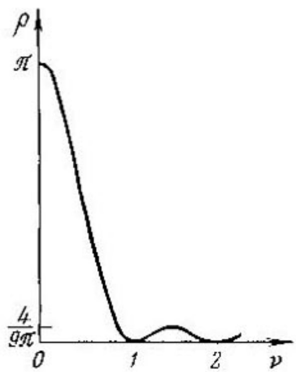

Fig. 110

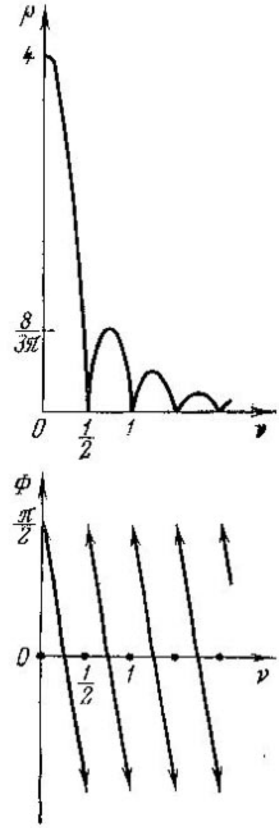

Fig. 111

$$= \frac{2}{\pi|\nu|}\,|\operatorname{sen} 2\pi\nu|,\ \Phi(\nu) = -\arg S(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{si } \nu=0 \text{ y } \omega=1/2, \\ -2\pi\nu, & \text{si } 0<\nu<1/2, \end{cases}$$

$\Phi\left(\nu+\frac{1}{2}\right)=\Phi(\nu)$ (fig. 111).

7.34. $$W_1=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&-1 \end{pmatrix},$$

$$W_2=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&q^2&0&0\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&-q^2&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&q^2\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&-q^2 \end{pmatrix},$$

$$W_3=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&q&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&q^2&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&q^3\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&-q&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&-q^2&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&-q^3 \end{pmatrix}.$$

7.35. $$Z^{(1)}=\begin{pmatrix} x_0+x_4\\ x_0-x_4\\ x_1+x_5\\ x_1-x_5\\ x_2+x_6\\ x_2-x_6\\ x_3+x_7\\ x_3-x_7 \end{pmatrix},\quad Z^{(2)}=\begin{pmatrix} (x_0+x_4)+(x_2+x_6)\\ (x_0-x_4)+q^2(x_2-x_6)\\ (x_0+x_4)-(x_2+x_6)\\ (x_0-x_4)-q^2(x_2-x_6)\\ (x_1+x_5)+(x_3+x_7)\\ (x_1-x_5)+q^2(x_3-x_7)\\ (x_1+x_5)-(x_3+x_7)\\ (x_1-x_5)-q^2(x_3-x_7) \end{pmatrix},$$

$$Z^{(3)} = \begin{pmatrix} (x_0 + x_4 + x_2 + x_6) + (x_1 + x_5 + x_3 + x_7) \\ (x_0 - x_4 + q^2x_2 - q^2x_6) + (qx_1 - qx_5 + q^3x_3 - q^3x_7) \\ (x_0 + x_4 - x_2 - x_6) + (q^2x_1 + q^2x_5 - q^2x_3 - q^2x_7) \\ (x_0 - x_4 - q^2x_2 + q^2x_6) + (q^3x_1 - q^3x_5 - qx_3 + qx_7) \\ (x_0 + x_4 + x_2 + x_6) - (x_1 + x_5 + x_3 + x_7) \\ (x_0 - x_4 + x_2 - x_6) - (qx_1 - qx_5 + q^3x_3 - q^3x_7) \\ (x_0 + x_4 - x_2 - x_6) - (q^2x_1 + q^2x_5 - q^2x_3 - q^2x_7) \\ (x_0 - x_4 - q^2x_2 + q^2x_6) - (q^3x_1 - q^3x_5 - qx_3 + qx_7) \end{pmatrix}.$$

7.36.
```
      SUBROUTINE FASTFT(N,N1,KIND,A,B,AA,BB)
      DIMENSION A(NI),B(NI),AA(NI),BB(NI)
      INTEGER V
      M = 1
    1 K = 0
    2 V = 0
    3 J = (2**M)*K + V + 1
      I = (2**(M - 1))*K + V + 1
      C = 3.141593*FLOAT(V)/(2**(M - 1))
      IF(KIND) 7,7,8
    7 SI = SIN(C)
      GO TO 9
    8 SI = -SEN(C)
    9 CO = COS(C)
      NI = 2**(N - 1) + I
      JM = J + 2**(M - 1)
      AO = A(NI)
      BO = B(NI)
      AA(J) = A(I) + AO*CO + BO*SI
      BB(J) = B(I) - AO*SI + BO*CO
      AA(JM) = A(I) - AO*CO - BO*SI
      BB(JM) = B(I) + AO*SI - BO*CO
      V = V + 1
      IF(V - 2**(M - 1)) 3,4,4
    4 K = K + 1
      IF(K - 2**(N - M)) 2,5,5,
    5 M = M + 1
```

```
      DO 13 I = 1,N1
      A(I) = AA(I)
   13 B(I) = BB(I)
      IF(M - N) 1,1,6
    6 IF(KIND) 10,10,12
   10 DO 11 I = 1,N1
      AA(I) = AA(I)/N1
   11 BB(I) = BB(I)/N1
   12 RETURN
      END
```

7.37.
```
      SUBROUTINE F730(A,B)
      DIMENSION A(128),B(128)
      DO 1 I = 1,128
      A(I) = 25
    1 B(I) = 0.
      RETURN
      END
```

7.38.
```
      SUBROUTINE F731(A,B)
      DIMENSION A(128),B(128)
      DO 1 I = 1,32
      A(I) = 0.
      A(I + 96) = 0.
    1 B(I) = 0
      DO 2 I = 33,96
      A(I) = 20.
    2 B(I) = 0
      RETURN
      END
```

7.39.
```
      SUBROUTINE F732(A,B)
      DIMENSION A(128), B(128)
      DO 1 I = 1,128
      T = I
      A(I) = T*(128. - T)/32.
    1 B(I) = 0.
      RETURN
      END
```

7.40.
```
      SUBROUTINE F733(A,B)
      DIMENSION A(128),B(128)
      DO 1 I = 1,64
      T = I
      A(I) = T
      A(I + 64) = 64. - T
      B(I) = 0.
    1 B(I + 64) = 0.
      RETURN
      END
```

7.41.
```
      SUBROUTINE F734(A,B)
      DIMENSION
      DO I I = 1,128
      A(I) = I
    1 B(I) = 0.
      RETURN
      END
```

7.42.
```
      DIMENSION A(128),B(128),AT(128),BT(128),A1(128),B1(128),
     *A2(128),B2(128)
      CALL F734(A,B)
      WRITE (3,10)
   10 FORMAT (30H0 SUCESION INICIAL)
      WRITE (3,1) A,B
    1 FORMAT ('', 16F7.2)
      DO 2 I = 1,128
      A1(I) = A(I)
    2 B1(I) = B(I)
      CALL FASTFT (7,128,0,A1,B1,AT,BT)
      WRITE (3,11)
      FORMAT (6H0 TDF)
   11 WRITE (3,1) AT,BT
      M = 24
      DO 6 I = 1,M
      AT(64 - I) = 0.
```

```
  BT(64 - I) = 0.
  AT(64 + I) = 0.
6 BT(64 + I) = 0.
  DO 4 I = 1,128
  A1(I) = AT(I)
4 B1(I) = BT(I)
  CALL FASTFT (7,128,1,A1,B1,A2,B2)
  WRITE (3,12) M
12 FORMAT ( 'M = ',I6)
  DO 7 I = 1,128
  A1(I) = A(I) - A2(I)
7 B1(I) = B(I) - B2(I)
  WRITE (3,1) A1,B1
  M = M + 8
  IF(M - 40) 5,5,8
8 STOP
  END
```

CAPÍTULO 13

CALCULO OPERACIONAL

§ 1. Transformación de Laplace

1. Definición y propiedades de la transformación de Laplace. Se llama *transformación de Laplace* de la función $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (que, en general, puede tomar los valores complejos) la función $F(p)$ de la variable compleja p, determinada por la igualdad siguiente:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Si la función $f(t)$ satisface las siguientes condiciones:

1) $f(t) = 0$ para $t < 0$,

2) existen tales constantes σ y M que

$$|f(t)| < Me^{\sigma t} \quad \text{para} \quad t > 0 \tag{2}$$

(la magnitud $\sigma_0 = \inf \sigma$ se llama *índice de crecimiento* de la función $f(t)$),

3) en cualquier segmento finito $[0, T]$ la función $f(t)$ tiene no más puntos que el número finito de puntos de discontinuidad de primer género, además consideramos que $f(0) = f(+0)$,

entonces la función $f(t)$ se llama *original* y *la integral de Laplace* que figura en el segundo miembro de la igualdad (1) converge absoluta y uniformemente en todo el semiplano $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$.

Señalemos que la desigualdad (2) se cumple para cualquier $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, y para $\sigma = \sigma_0$ puede no verificarse como, por ejemplo, en el caso en que $f(t)$ es un polinomio ($\sigma_0 = 0$).

La función $F(p)$ se llama *representación para* $f(t)$. La representación $F(p)$ es una función analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

La correspondencia entre el original $f(t)$ y su representación $F(p)$ se denota simbólicamente $F(p) \risingdotseq f(t)$ o $F(p) = L[f(t)]$. Utilizaremos el primer símbolo.

Hállense las representaciones de las funciones siguientes:

1.1. *De la función unitaria de Heaviside*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{para } t < 0. \end{cases}$$

1.2. $e^{\alpha t}\eta(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

En adelante, por función $f(t)$ dada con ayuda de la fórmula analítica se comprenderá el producto de esta función por la función unitaria de Heaviside, es decir, consideraremos $f(t) = 0$ para $t < 0$.

Supongamos que las funciones que se estudian más abajo $f(t)$, $f_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, son originales, además $f_\nu(t) \risingdotseq F_\nu(p)$ para $\operatorname{Re} p > \sigma_\nu$. Tienen lugar las siguientes propiedades:

1. PROPIEDAD DE LINEALIDAD. Para cualesquiera constantes C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p), \ \operatorname{Re} \ p > \text{más}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}.$$

2. TEOREMA DE SEMEJANZA. Para cualquier constante $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \ \operatorname{Re} \ p > \alpha\sigma_0.$$

3. TEOREMA DE RETARDO. Al retardo de inclusión del original en τ le corresponde la multiplicación de la representación por $e^{-p\tau}$, es decir,

$$f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0$$

(para $t < \tau$ en virtud de la condición 1) impuesta sobre el original, $f(t - \tau) \equiv 0$).

4. TEOREMA DE DESPLAZAMIENTO. A la multiplicación del original por $e^{\alpha t}$ le corresponde el retardo de la representación en α, es decir,

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p - \alpha), \quad \operatorname{Re}(p - \alpha) > \sigma_0.$$

5. DIFERENCIACIÓN DEL ORIGINAL. Si $f(t)$ y sus derivadas $f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, son originales, entonces para todo $k = 1, 2, \ldots, n$

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k F(p) - (p^{k-1} f(0) + p^{k-2} f'(0) + \ldots + f^{(k-1)}(0)).$$

En particular,

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

6. INTEGRACIÓN DEL ORIGINAL:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

7. DIFERENCIACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN. A la multiplicación del original por el factor t le corresponde la multiplicación de la representación por -1 y su diferenciación según el argumento p:

$$t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

8. INTEGRACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN. Si $\dfrac{f(t)}{t}$ es original, entonces

$$\frac{1}{t} f(t) \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\, dq.$$

9. DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN SEGÚN EL PARÁMETRO. Si $f(t, \alpha) \risingdotseq F(p, \alpha)$ y las funciones $\dfrac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ y $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha$, consideradas como funciones de la variable t, son originales, entonces

$$\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \risingdotseq \frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{y} \quad \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha \risingdotseq \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p, \alpha)\, d\alpha.$$

10. TEOREMA DE BOREL (multiplicación de representaciones). A la convolución de los originales

$$f_1 * f_2 = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau$$

le corresponde el producto de las representaciones, es decir,

$$f_1 * f_2 \risingdotseq F_1(p) F_2(p).$$

11. INTEGRAL DE DUHAMEL. Si $f(t) \risingdotseq F(p)$ y $g(t) \risingdotseq G(p)$, entonces

$$pF(p)\, G(p) \risingdotseq f(0)\, g(t) + (f' * g)(t) = g(0)\, f(t) + (g' * f)(t).$$

12. TEOREMAS DE CONEXIÓN de los valores «iniciales» y «finales» del original y de la representación. Si $f(t) \risingdotseq F(p)$, entonces

a) $f(0) = \lim\limits_{p \to \infty} pF(p)$

y (si existe el límite finito $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = f(+\infty)$)

b) $f(+\infty) = \lim\limits_{p \to 0} pF(p)$.

EJEMPLO 1. Hállese la representación de la función sen βt y cos βt.

◀ Aplicando la fórmula de Euler, la propiedad de linealidad y tomando en consideración la solución del problema 1.2, hallamos

$$\operatorname{sen} \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\beta} - \frac{1}{p + i\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$$
$$(\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \beta|).$$

Análogamente

$$\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \risingdotseq \frac{p}{p^2 + \beta^2} \quad (\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \beta|). ▶$$

Para calcular las representaciones, además de las propiedades indicadas, se debe emplear *la tabla de representaciones*.

EJEMPLO 2. Hállese la representación de la función $\operatorname{sen}^3 t$.

◀ Según la fórmula de Euler tenemos

$$\operatorname{sen}^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3(e^{it} - e^{-it})}{2i} - \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i}\right) =$$
$$= \frac{3}{4} \operatorname{sen} t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3t.$$

No	$f(t)$	$F(p)$	No	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$	7	$\operatorname{ch}\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$
2	$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	8	$\operatorname{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	9	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
4	$\dfrac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$	10	$e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
5	$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	11	$\dfrac{t^n}{n!}\cos\beta t$	$\dfrac{\operatorname{Re}((p+\beta i)^{n+1})}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$
6	$\operatorname{sen}\beta t$	$\dfrac{}{p^2+\beta^2}$	12	$\dfrac{t^n}{n!}\operatorname{sen}\beta t$	$\dfrac{\operatorname{Im}((p+\beta i)^{n+1})}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$

Aplicando la propiedad de linealidad y la fórmula 6 de la tabla, hallamos:

$$\operatorname{sen}^3 t \risingdotseq \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{p^2+9}=\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}\,. \ ▶$$

EJEMPLO 3 Hállese la representación de las funciones $te^{\alpha t}\times\cos\beta t$ y $te^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$.

◀ Empleando las fórmulas 11 y 12 de la tabla para $n=1$ y el teorema de desplazamiento hallamos

$$te^{\alpha t}\cos\beta t \risingdotseq \frac{\operatorname{Re}(((p-\alpha)+\beta i)^2)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}=\frac{(p-\alpha)^2-\beta^2}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}\,.$$

$$te^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \risingdotseq \frac{\operatorname{Im}(((p-\alpha)+\beta i)^2)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}=\frac{2\beta(p-\alpha)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}\,. \ ▶$$

EJEMPLO 4. Hállese la representación de la función $\operatorname{Si} t=\displaystyle\int_0^t\frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}\,d\tau$ (esta función se llama *seno integral*).

◀ Valiéndose del teorema de integración de la representación hallamos

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \risingdotseq \int_p^\infty\frac{dq}{q^2+1}=\operatorname{arctg} q\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p.$$

e aquí, según el teorema de integración del original obtenemos

$$\text{Si } t=\int_0^t \frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}\,d\tau \doteq \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p\right). \ ▶$$

EJEMPLO 5. Hállese el original para la función $F(p)=\dfrac{p}{p^4+4}$.

◀ Primer procedimiento. Descomponemos el denominador en factores:

$$p^4+4=(p^4+4p^2+4)-4p^2=(p^2+2p+2)(p^2-2p+2)= \\ =((p+1)^2+1)((p-1)^2+1).$$

Utilizamos el teorema de Borel y la fórmula 10 de la tabla:

$$\frac{1}{(p+1)^2+1}\cdot\frac{1}{(p-1)^2+1}\doteq\int_0^t e^{\tau}\operatorname{sen}\tau\, e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t e^{2\tau}(\cos(2\tau-t)-\cos t)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{e^{2\tau}}{2^2+2^2}(2\cos(2\tau-t)+2\operatorname{sen}(2\tau-t))-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}e^{2\tau}\cos t\right)\Bigg|_{\tau=0}^{t}=$$

$$=\frac{e^t}{8}(\operatorname{sen}t-\cos t)+\frac{e^{-t}}{8}(\operatorname{sen}t+\cos t)=\frac{1}{4}(\operatorname{sen}t\operatorname{ch}t-\cos t\operatorname{sh}t)$$

(en la integración fue empleada dos veces la regla de integración por partes). Apliquemos ahora el teorema de diferenciación del original. En nuestro caso $f(0)=0$, por eso

$$F(p)=\frac{p}{p^4+4}\doteq f'(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}t\operatorname{sh}t.$$

Segundo procedimiento. Descompongamos el denominador en factores lineales (lo que siempre es posible, si no se tiende a anotar la descomposición en la forma real):

$$p^4+4=((p+1)^2+1)((p-1)^2+1)= \\ =(p+1+i)(p+1-i)(p-1+i)(p-1-i).$$

Desarrollemos ahora la función dada en fracciones elementales:

$$F(p)=\frac{1}{8}\left(-\frac{i}{p+1+i}+\frac{i}{p+1-i}+\frac{i}{p-1+i}-\frac{i}{p-1-i}\right)$$

y, empleando la fórmula 3 de la tabla, obtenemos

$$f(t)=\frac{i}{8}\left(-e^{-(1+i)t}+e^{-(1-i)t}+e^{(1-i)t}-e^{(1+i)t}\right)=$$

$$=\frac{i}{8}\left(e^{it}\left(e^{-t}-e^{t}\right)+e^{-it}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\right)=-\frac{i}{8}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\left(e^{it}-e^{-it}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2}\operatorname{sh} t \operatorname{sen} t. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Hállese la representación del original $f(t)$, si

$$f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{para } 0\leqslant t<\pi,\\ 0 & \text{para } \quad t\geqslant \pi. \end{cases}$$

◀ Empleando la función de Heaviside y tomando en consideración que $\eta(t-\pi)=1$ para $t\geqslant\pi$, podemos anotar la función $f(t)$ en la forma

$$f(t)=\operatorname{sen} t+\eta(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi).$$

Utilizando la fórmula 6 de la tabla y aplicando el teorema de retardo obtendremos

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{e^{-\pi p}}{p^2+1}=\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 7. Hállese el original para la función $F(p)=\frac{p}{p^2+4}-$ $-\frac{e^{-p}}{p^2}-\frac{e^{-2p}}{p^2-1}$.

◀ De la tabla de representaciones hallamos $\frac{p}{p^2+4}\risingdotseq\cos 2t$, $\frac{1}{p^2}\risingdotseq t$, $\frac{1}{p^2-1}\risingdotseq\operatorname{sh} t$, y con ayuda del teorema de retardo obtenemos

$$F(p)\risingdotseq f(t)=\cos 2t-\eta(t-1)(t-1)+\eta(t-2)\operatorname{sh}(t-2),$$

es decir,

$$f(t)=\begin{cases} \cos 2t & \text{para } 0\leqslant t<1,\\ \cos 2t-t+1 & \text{para } 1\leqslant t<2,\\ \cos 2t-t+1+\operatorname{sh}(t-2) & \text{para } 2\leqslant t+\infty. \end{cases} \blacktriangleright$$

Hállense las representaciones de las funciones

1.3. $\operatorname{sh}^3 t$. **1.4.** $\operatorname{ch} t \operatorname{sen} t$.

Hállense las representaciones de las funciones $f(t)$ y $f'(t)$ (hállese la representación de $f'(t)$ aplicando el teorema de diferenciación del original y verifíquese el resultado valiéndose de la tabla de representaciones):

1.5. $f(t)=\operatorname{sen} t-t\cos t$. **1.6.** $f(t)=i\operatorname{sen} t+\cos t$.

1.7. $f(t)=e^{-t}\operatorname{sen}^2 t$.

1.8. $f(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t \operatorname{sen} t+\operatorname{sh} t\cos t)$.

Empleando el teorema de integración de la representación y luego el teorema de integración del original, hállense las representaciones de las funciones:

1.9. $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau-1}{\tau}\,d\tau$. **1.10.** $\int\limits_0^t \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau$. **1.11.** $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\,d\tau$.

Empleando el teorema de integración según el parámetro y luego el teorema de integración del original, hállense las representaciones de las funciones:

1.12. $\int\limits_0^t \frac{\cos\beta\tau-\cos\alpha\tau}{\tau}\,d\tau$. **1.13.** $\int\limits_0^t \frac{e^{\beta\tau}-e^{\alpha\tau}}{\tau}\,d\tau$.

Con ayuda del teorema de Borel y luego los teoremas de diferenciación e integración del original, hállense los originales para las funciones $F(p)$, $pF(p)$ y $\frac{F(p)}{p}$. Verifíquese el resultado empleando el desarrollo en fracciones elementales y la tabla de representaciones.

1.14. $F(p)=\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$. **1.15.** $F(p)=\frac{p}{(p^2+\beta^2)^2}$,

1.16. $F(p)=\frac{p}{(p^2-\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$.

1.17. $F(p)=\frac{1}{(p-\alpha)((p+\alpha)^2+\beta^2)}$.

1.18. $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$.

Empleando el teorema de retardo, hállense las representaciones de las funciones siguientes:

1.19. $f(t)=\begin{cases} 1 & \text{para } 0\leqslant t<\tau, \\ 0 & \text{para } t\geqslant\tau \end{cases}$

(impulso unitario que actúa en el intervalo de tiempo de $t=0$ a $t=\tau$).

1.20. $f(t)=\begin{cases} 0 & \text{para } t<T, \\ 1 & \text{para } T\leqslant t<T+\tau, \\ 0 & \text{para } t\geqslant T+\tau \end{cases}$

(impulso unitario retardado).

1.21. $f(t)=\begin{cases} \frac{h}{\tau}t & \text{para } 0\leqslant t<\tau, \\ h & \text{para } \tau\leqslant t<2\tau, \\ -\frac{h}{\tau}(t-3\tau) & \text{para } 2\tau\leqslant t<3\tau, \\ 0 & \text{para } t\geqslant 3\tau. \end{cases}$

1.22. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{para } 0\leqslant t<\pi/2, \\ \cos t & \text{para } \pi/2\leqslant t<\pi, \\ 0 & \text{para } t\geqslant\pi. \end{cases}$

1.23. $f(t)=\begin{cases} h & \text{para } 0\leqslant t<1, \\ h^{-(t-1)} & \text{para } t\geqslant 1. \end{cases}$

1.24. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{para } 0\leqslant t<\pi, \\ \operatorname{sh}(t-\pi) & \text{para } t\geqslant\pi. \end{cases}$

1.25.** Demuéstrese que si $F_0(p)\risingdotseq f_0(t)$, donde

$$f_0(t)=\begin{cases} 0 & \text{para } t<0, \\ f(t) & \text{para } 0\leqslant t<l, \\ 0 & \text{para } t\geqslant l \end{cases}$$

y la función $f(t)$ para $t>l$ es periódica con el período l (es decir, $f(t+l)=f(t)$), entonces

$$f(t)\risingdotseq\frac{F_0(p)}{1-e^{-lp}}.$$

Utilizando el resultado del problema 1.25. y las designaciones adoptadas en este problema, conociendo la función $f_0(t)$ y el período l, hállense las representaciones de las siguientes funciones periódicas $f(t)$:

1.26. $f_0(t)=\begin{cases} 1 & \text{para } 0\leqslant t<\tau \\ 0 & \text{para } \tau\leqslant t<T; \end{cases}\quad l=T$

(sucesión periódica de impulsos unitarios).

1.27*. $f_0(t)=\operatorname{sen}\beta t$ para $0<t<\frac{\pi}{\beta}$; $l=\frac{\pi}{\beta}$ (es decir, $f(t)=|\operatorname{sen}\beta t|$).

1.28. $f_0(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{para } 0\leqslant t<\pi \\ 0 & \text{para } \pi\leqslant t<T; \end{cases}\quad l=T.$

1.29. $f_0(t)=\begin{cases} h & \text{para } 0\leqslant t<c, \\ -h & \text{para } c\leqslant t<2c; \end{cases}\quad l=2c$

1.30. $f_0(t)=\dfrac{h}{c}\,t$ para $0\leqslant t<c$; $l=c$.

1.31. $f_0(t)=\begin{cases} \dfrac{h}{c}t & \text{para } 0\leqslant t<c, \\ -\dfrac{h}{c}t & \text{para } c\leqslant t<2c; \end{cases}\quad l=2c.$

1.32. $f_0(t)=\cos\beta t$ para $0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2\beta}$, $\quad l=\dfrac{\pi}{2\beta}$.

Empleando la tabla de representaciones y el teorema de retardo hállense los originales de $f(t)$ para las representaciones:

1.33. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$.

1.34. $F(p)=\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{e^{-p}}{p}+\dfrac{3e^{-4p}}{p^2+9}$.

1.35. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{2pe^{-p}}{p^2-4}+\dfrac{e^{-3p}}{p^2-16}$.

2. Ampliación de la clase de originales. Se puede ampliar la clase de originales incluyendo las funciones, que pueden ser no acotadas en el entorno del conjunto finito de puntos, pero tales funciones, que la integral de Laplace de ellas converge, sin embargo, absolutamente en cierto semiplano $\operatorname{Re} p>\sigma_0$. Entre tales originales generalizados figuran la función potencial $f(t)=t^{\mu}$ para $\mu>-1$, la función $\ln t$ y otros. En particular, a esta clase pertenece toda función $f(t)$ que en ciertos puntos $t=t_k$ ($k=1, 2, \ldots, n$) es infinitamente grande de orden menor que uno, es decir, tal que $\lim\limits_{t\to t_k}(t-t_k)^{r_k}f(t)=0$ para cierto $r_k<1$ y si fuera de algunos entornos de puntos t_k satisface las condiciones, para las cuales se puede considerar la función como original.

EJEMPLO 8. Hállese la representación $F(p)$ de la función $f(t)=t^{\mu}$, $\mu>-1$.

◀ Tenemos $F(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}t^{\mu}\,dt$ o, después de la sustitución $pt=\tau$,

$$F(p)=\frac{1}{p^{\mu+1}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\tau}\tau^{\mu}\,d\tau=\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}.$$

Así pues

$$\frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \doteqdot \frac{1}{p^{\mu+1}} . \blacktriangleright$$

OBSERVACIÓN. Si μ es un número positivo entero, entonces $\Gamma(\mu+1)=\mu!$ y llegamos a la fórmula 2 de la tabla de representaciones.

EJEMPLO 9. Hállese la representación de la función $f(t)=t^{\mu}\ln t$, $\mu>-1$.

◀ De la correspondencia $t^{\mu} \doteqdot \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}$ con ayuda de la diferenciación por el parámetro μ obtenemos

$$t^{\mu}\ln t \doteqdot \frac{\Gamma'(\mu+1)}{p^{\mu+1}}-\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}\ln p=$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}\left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}-\ln p\right).$$

En particular, poniendo $\mu=0$ y tomando en consideración que $\Gamma(1)=1$, $\Gamma'(1)=-\gamma$ ($\gamma=0{,}577215\ldots$ es la *constante de Euler*) obtenemos

$$\ln t \doteqdot -\frac{\gamma+\ln p}{p} . \blacktriangleright$$

Hállense las representaciones de las funciones:

1.36. $f(t)=\dfrac{t^{\mu}e^{\alpha t}}{\Gamma(\mu+1)}$, $\mu>-1$.

1.37. $f(t)=\dfrac{t^{\mu}e^{\alpha t}\ln t}{\Gamma(\mu+1)}$, $\mu>-1$.

1.38. $f(t)=e^{\alpha t}\ln t$.

1.39. $f(t)=\dfrac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\cos\beta t$, $\mu>-c$.

1.40. $f(t)=\dfrac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\operatorname{sen}\beta t$, $\mu>-1$.

1.41. $f(t)=\cos\beta t\cdot\ln t$. **1.42.** $f(t)=\operatorname{sen}\beta t\cdot\ln t$.

1.43. $f(t)=\begin{cases} 0 & \text{para } 0\leqslant t<a, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t-a}} & \text{para } t>a. \end{cases}$

§ 2. Fórmula de inversión. Teoremas del desarrollo

Si la función de la variable real $f(t)$ es original, es decir, $|f(t)| < Me^{(\sigma_0+\varepsilon)t}$ y $f(t)$ es suave a trozos en cada segmento finito del eje real, entonces la relación entre ella y su representación es biunívoca: de la igualdad

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$$

se deduce la fórmula de inversión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} F(p)\, dp \quad (\textit{fórmula de Mellin}).$$

En esta fórmula el camino de integración es cualquier recta $\operatorname{Re} p = \sigma$, paralela al eje imaginario y situada más a la derecha que la recta $\operatorname{Re} p = \sigma_0$.

OBSERVACION. En todo punto t_0 que sea un punto de descontinuidad de la función $f(t)$, el segundo miembro de la fórmula de Mellin es igual a $\frac{1}{2}(f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0))$.

Si la función $F(p)$, analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, satisface las condiciones:

a) $|F(p)| \to 0$ para $|p| \to \infty$ uniformemente respecto a $\arg p \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

b) para todos los $\sigma > \sigma_0$

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} |F(x + iy)|\, dy \leqslant M,$$

entonces $F(p)$ es la representación del original que se determina por la fórmula de Mellin.

La aplicación directa de la fórmula de inversión resulta a menudo dificultosa y por lo general se emplean los teoremas del desarrollo que son corolarios de ella:

PRIMER TEOREMA DEL DESARROLLO. *Si la función* $F(p)$ *es analítica en cierto entorno de un punto infinitamente alejado y su desarrollo en serie de potencias de* $\frac{1}{p}$ *tiene la forma*

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}},$$

entonces la función

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad t \geqslant 0 \quad (f(t)=0 \text{ para } t<0)$$

es un original que tiene la representación $F(p)$.

SEGUNDO TEOREMA DEL DESARROLLO. *Si la representación* $F(p)$ *es una función uniforme y tiene sólo un número finito de puntos singulares* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *situados en la parte finita del plano, entonces*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\,[e^{pt}F(p);\ p_k].$$

Si, en particular, $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, donde $P_m(p)$ y $Q_n(p)$ son polinomios de potencias m y n, respectivamente $(n>m)$, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son raíces del polinomio $Q_n(p)$ con multiplicidades iguales a $l_1, l_2, \ldots, l_r$ $(l_1+l_2+\ldots+l_r=n)$, respectivamente, entonces

$$f(t)=\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(l_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}}\left((p-p_k)^{l_k} F(p)\,e^{pt}\right). \tag{1}$$

Si todos los coeficientes de los polinomios $P_m(p)$ y $Q_n(p)$ son números reales, entonces en el segundo miembro de (1) es útil reunir los sumandos pertenecientes a las raíces complejas conjugadas recíprocamente; la suma de cada par de tales términos es igual a la parte real duplicada de uno de ellos.

En el caso particular, cuando todas las raíces $p_1, p_2, \ldots, p_n$ del polinomio $Q_n(p)$ son simples, empleando la fórmula para calcular el residuo respecto al polo de primer orden (véase la pág. 000), obtendremos

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} \frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}\, e^{p_k t}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1. **Hállese el original de la función** $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$,

◀ Primer procedimiento. El desarrollo de la función $F(p)$ en el entorno del punto $p=\infty$ tiene la forma

$$F(p)=\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\,p^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\,p^{n+1}}.$$

Por eso, en correspondencia con el primer teorema del desarrollo, el original para $F(p)$ es la función $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{(n!)^2}=I_0(2\sqrt{t})$

(I_0 es la función de Besel de primer género con índice nulo).

Segundo procedimiento. Empleemos el segundo teorema del desarrollo. Con este fin hay que hallar el residuo de la función $\frac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}}$ respecto a su único punto singular $p=0$ (éste es un punto esencialmente singular), es decir, el coeficiente de $1/p$ del desarrollo de esta función en serie de Laurent en el entorno del punto $p=0$. Tenemos

$$\frac{1}{p}\,e^{pt}e^{-\frac{1}{p}}=\left(1+pt+\frac{p^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{p^nt^n}{n!}+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2!p^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!p^{n+1}}+\ldots\right).$$

Separando en el producto de las series los términos que contienen $1/p$, hallamos:

$$f(t)=\operatorname{res}\left[\frac{1}{p}\,e^{pt}e^{-\frac{1}{p}};\,0\right]=1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{(n!)^2}+\ldots=I_0(2\sqrt{t}).\ \blacktriangleright$$

En este ejemplo, la solución que utiliza el primer teorema del desarrollo resultó ser más simple, que la solución con ayuda del segundo teorema del desarrollo.

EJEMPLO 2. Hállese el original para la función $F(p)=\frac{1}{(p^2+\beta^2)^3}$.

◀ Empleemos el segundo teorema del desarrollo. La función $F(p)$ tiene dos polos de tercer orden $p=\pm\beta i$ y su original se determina por la igualdad

$$f(t)=\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ \beta i\right]+\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ -\beta i\right]=$$
$$=2\operatorname{Re}\left(\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\ \beta i\right]\right).$$

Tenemos:

$$\operatorname{res}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^2};\ \beta i\right]=\frac{1}{2!}\lim_{p\to\beta i}\frac{d^2}{dp^2}\left((p-\beta i)^3\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to\beta i}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{(p+\beta i)^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to\beta i}\left(\frac{t^2e^{pt}}{(t+\beta i)^3}-\frac{6te^{\beta t}}{(p+\beta i)^4}+\frac{12e^{pt}}{(t+\beta i)^5}\right)=$$
$$=-\frac{t^2e^{\beta it}}{16\beta^3 i}-\frac{3te^{\beta it}}{16\beta^4}+\frac{3e^{\beta it}}{16\beta^5 i}$$

(al diferenciar hicimos uso de la fórmula de Leibniz para la derivada del producto). Separando la parte real de esta expresión y duplicándola, obtendremos

$$f(t)=-\frac{t^2\operatorname{sen}\beta t}{8\beta^3}-\frac{3t\cos\beta t}{8\beta^4}+\frac{3\operatorname{sen}\beta t}{8\beta^5}. ►$$

EJEMPLO 3. Hállese el original para la función $F(p)=\frac{1}{p^4-1}$.

◄ Aquí el denominador de la fracción tiene sólo raíces simples $p_{1,2}=\pm 1$, $p_{3,4}=\pm i$. Por eso, en correspondencia con la fórmula (2) obtenemos

$$f(t)=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4p_k^3}e^{p_k t}=\frac{1}{4}\left(e^t-e^{-t}+\frac{e^{it}}{i^3}+\frac{e^{-it}}{(-i)^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\operatorname{sen}t). ►$$

Pudimos resolver este ejemplo partiendo del desarrollo

$$\frac{1}{p^4-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Empleando el primer teorema del desarrollo hállense los originales para las funciones dadas:

2.1. $F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$. **2.2.** $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{p}}$.

2.3. $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{p}}$. **2.4.** $F(p)=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$.

2.5. $F(p)=\frac{1}{2p}\ln\frac{p+1}{p-1}$.

2.6. $F(p)=\frac{1}{p}e^{\frac{1}{p^2}}$. **2.7*.** $F(p)=\frac{1}{p-1}e^{-\frac{1}{p-1}}$.

2.8. ¿Para qué funciones dadas en los problemas 2.1—2.7 se puede aplicar, en la determinación del original, el segundo teorema del desarrollo y para qué funciones no se puede?

Empleando el segundo teorema del desarrollo o desarrollando en fracciones elementales, hállense los originales para las funciones dadas:

2.9. $F(p)=\frac{p}{p^2+4p+5}$.

2.10. $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

2.11. $F(p)=\frac{Q'(p)}{Q(p)}$ donde $Q(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots$ $\ldots(p-p_n)$ y todos los números p_k son distintos dos a dos.

2.12. $F(p)=\frac{1}{(p^4-1)^2}$. **2.13.** $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2(p^2-4)}$.

2.14. $F(p)=\frac{p^2}{(p^4-1)^2}$. **2.15.** $F(p)=\frac{p^3}{p^6-1}$.

2.16. $F(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)^3}$. **2.17.** $F(p)=\frac{1}{p^2-4p+3}$.

2.18. $F(p)=\frac{p^2+1}{p^2(p^2-1)^2}$. **2.19.** $F(p)=\frac{p}{p^4-5p^2+4}$.

2.20. $F(p)=\frac{p^3}{(p^4-1)(p^4+4)}$.

§ 3. Aplicación del cálculo operacional para resolver las ecuaciones diferenciales

1. Resolución de las ecuaciones diferenciales lineales y de los sistemas de ecuaciones con coeficientes constantes. Para hallar la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t) \tag{1}$$

(donde $f(t)$ es el original) que satisface las condiciones iniciales

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x'_0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

es conveniente aplicar a ambos miembros de esta ecuación la transformación de Laplace, es decir, pasar de la ecuación (1) con las condiciones (2) a la igualdad operacional

$$(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)\,X(p)+Q(p)=F(p),$$

donde $X(p)$ es la representación de la solución buscada, $F(p)$ es la representación de la función $f(t)$ y $Q(p)$ es cierto polinomio cuyos coeficientes dependen de los datos iniciales $x_0, x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$ y que es idénticamente igual a cero, si $x_0=x'_0=\ldots=x_0^{(n-1)}=0$. Resolviendo la ecuación operacional respecto a $X(p)$:

$$X(p)=\frac{F(p)-Q(p)}{L(p)}$$

($L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$ es un polinomio característico de la ecuación dada) y hallando el original para $X(p)$, obtendremos la solución buscada $x(t)$. Si consideramos $x_0, x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$ constantes arbitrarias, la solución encontrada será la solución general de la ecuación (1). De modo análogo se resuelven los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La diferencia consiste en que en vez de una ecuación operacional obtendremos un sistema de tales ecuaciones, que serán lineales respecto a las representaciones de las funciones buscadas.

EJEMPLO 1. Hállese la solución general de la ecuación $x''+2x'+x=te^{-t}$, así como su solución particular que satisface las condiciones iniciales $x_0=1$, $x'_0=2$.

◀ Sea $x(t)\risingdotseq X(p)$, entonces

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x_0,\quad x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px_0-x'_0.$$

Por la tabla de representaciones hallamos $te^{-t} \risingdotseq \frac{1}{(p+1)^2}$ y la ecuación operacional tiene la forma

$$(p^2+2p+1)\,X(p)-(p+2)\,x_0-x_0'=\frac{1}{(p+1)^2}.$$

De aquí hallamos

$$X(p)=\frac{p+2}{(p+1)^2}\,x_0+\frac{1}{(p+1)^2}\,x_0'+\frac{1}{(p+1)^4}.$$

Para determinar el original en el caso dado lo más fácil es representar $X(p)$ en la forma siguiente:

$$X(p)=\frac{(p+1)+1}{(p+1)^2}\,x_0+\frac{1}{(p+1)^2}\,x_0'+\frac{1}{(p+1)^4}=$$
$$=\frac{1}{(p+1)^4}+\frac{x_0+x_0'}{(p+1)^2}+\frac{x_0}{p+1}.$$

Utilizando la tabla de representaciones, hallamos la solución general

$$x(t)=\frac{1}{3!}\,t^3e^{-t}+(x_0+x_0')\,te^{-t}+x_0e^{-t}.$$

Designando $x_0=C_1$, $x_0+x_0'=C_2$ podemos escribirla así:

$$x(t)=\frac{1}{3}\,t^3e^{-t}+(C_1+C_2t)\,e^{-t}.$$

La solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas es:

$$x(t)=\frac{1}{3}\,t^3e^{-t}+(1+3t)\,e^{-t}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Intégrese la ecuación $x''+x=f(t)$ para las condiciones iniciales nulas, si

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\,t & \text{para } 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\,(\pi-t) & \text{para } \dfrac{\pi}{2}\leqslant t<\pi,\\[2mm] 0 & \text{para } t\geqslant\pi.\end{cases}$$

◀ Anotemos $f(t)$ con ayuda de la función unitaria de Heaviside:

$$f(t)=\left(1-\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{2}{\pi}\,t-\left(\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\eta(t-\pi)\right)\times$$
$$\times\frac{2}{\pi}\,(t-\pi)=\frac{2}{\pi}\left(t-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\eta(t-\pi)\,(t-\pi)\right).$$

Valiéndose del teorema de retardo, de aquí hallamos

$$f(t)\risingdotseq F(p)=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p^2}.$$

Ya que las condiciones iniciales son nulas, entonces, suponiendo $x(t) \risingdotseq X(p)$, llegamos a la ecuación operacional

$$(p^2+1)\,X(p)=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p^2},$$

a partir de la cual, después de las transformaciones elementales, hallamos

$$X(p)=\frac{2}{\pi}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}\right)\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Puesto que $\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq t-\operatorname{sen} t$, entonces, aplicando de nuevo el teorema de retardo, hallamos

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\left((t-\operatorname{sen} t)-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\,\eta(t-\pi)\,((t-\pi)-\operatorname{sen}(t-\pi)\right),$$

es decir,

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(t-\operatorname{sen} t) & \text{para } 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}(-\operatorname{sen} t-2\cos t-t+\pi) & \text{para } \dfrac{\pi}{2}\leqslant t<\pi,\\[2mm] -\dfrac{4}{\pi}\cos t & \text{para } t\geqslant\pi. \ \blacktriangleright\end{cases}$$

EJEMPLO 3. Hállese la solución del sistema

$$x'+y=e^t,$$
$$x+y'=e^{-t}$$

para las condiciones iniciales $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

◀ Sean $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$, entonces $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x_0$, $y'(t)\risingdotseq pY(p)-y_0$ y obtenemos el sistema operacional

$$pX(p)-x_0+Y(p)=\frac{1}{p-1},$$
$$pY(p)-y_0+X(p)=\frac{1}{p+1}.$$

Resolviendo el sistema, hallamos

$$X(p)=\frac{p}{p^2-1}\,x_0-\frac{1}{p^2-1}\,y_0+\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2},$$
$$Y(p)=\frac{p}{p^2-1}\,y_0+\frac{1-x_0}{p^2-1}-\frac{2p}{(p^2-1)^2}$$

y, por consiguiente,

$$\begin{cases}x(t)=x_0\operatorname{ch} t-y_0\operatorname{sh} t+t\operatorname{ch} t,\\ y(t)=y_0\operatorname{ch} t+(1-x_0)\operatorname{sh} t-t\operatorname{sh} t.\ \blacktriangleright\end{cases}$$

Hállense las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales:

3.1. $x'' + 9x = \cos 3t$. **3.2.** $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$.
3.3. $x'' + 2x' = te^{2t}$. **3.4.** $x'' + x' - 2x = e^{t}$.
3.5. $x'' + x' = e^{-t} \operatorname{sen} t$.

Hállense las soluciones de las ecuaciones diferenciales para las condiciones iniciales dadas:

3.6. $x''' + x = 0$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$.
3.7. $x'' + 2x' + x = e^{-t}$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
3.8. $x'' + 3x' = e^{-3t}$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
3.9. $x'' - 2x' + 2x = \operatorname{sen} t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
3.10. $x'' + 4x = \operatorname{sen} 2t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.
3.11. $x'' - 9x = \operatorname{sh} t$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 3$.
3.12. $x''' - x'' = e^{t}$; $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.
3.13. $x^{\mathrm{IV}} - x = \operatorname{sh} t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = 1$.

3.14. $x''' + 3x'' + 3x' + x = te^{-t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Hállense para las condiciones iniciales nulas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

3.15. $x' + x = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{para } \quad t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.16. $x'' + x = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{para } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{para } \quad t \geqslant \pi. \end{cases}$$

3.17. $x'' - x' = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ 0 & \text{para } \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

3.18. $x'' + x = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ -1 & \text{para } 1 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{para } \quad t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.19*. Resuélvase la ecuación integral $\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau + x(t) = f(t)$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ 2-t & \text{para } 1 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{para } \quad t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.20*. Con ayuda de la integral de Duhamele demuéstrese la siguiente afirmación: si $x_1(t)$ es la solución de la ecuación $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 1$ para las condiciones iniciales nulas $(x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0)$, entonces la solución de la ecuación $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t)$ para las mismas condiciones iniciales es la función

$$x(t) = \int\limits_0^t x'(\tau) f(t-\tau)\,d\tau = x_1(t) f(0) + \int\limits_0^t f'(\tau) x_1(t-\tau)\,d\tau$$

($f(t)$ es un original arbitrario).

OBSERVACION. El resultado del problema 3.20 permite determinar la solución de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes para las condiciones iniciales nulas, sin hallar la representación del segundo miembro de esta ecuación.

Empleando el resultado del problema 3.20, hállense las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

3.21. $x' - x = \dfrac{1}{e^t + 3}$. **3.22.** $x'' + x = \dfrac{1}{1+e^t}$.

3.23. $x'' - x' = \dfrac{1}{1+e^t}$. **3.24.** $x'' + x = \dfrac{1}{2+\cos t}$.

3.25. $x'' + x = e^{-t^2}$.

Hállense las soluciones generales de los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.26. $\begin{aligned} x'' + y' &= t, \\ y'' - x' &= 0. \end{aligned}$ **3.27.** $\begin{aligned} x'' + y' &= \operatorname{sh} t - \operatorname{sen} t, \\ y'' + x' &= \operatorname{ch} t - \cos t. \end{aligned}$

Hállense las soluciones de los sistemas de las ecuaciones diferenciales para las condiciones iniciales dadas.

3.28. $x' + y = 0,$

$+ y' = 0;$ $\qquad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

3.29. $2x'' + x - y' = -3 \operatorname{sen} t,$
$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1,$$
$x + y' = -\operatorname{sen} t;\quad y(0) = 0.$

3.30. $x'' - y' = 0,$
$x - y'' = 2 \operatorname{sen} t;$
$$x(0) = -1,\ x'(0) - y(0) = y'(0) = 1.$$

3.31. $x'' - y' = 0,$
$$x(0) = y'(0) = 0,\qquad x'(0) =$$
$x' - y'' = 2\cos t;\ = y(0) = 2.$

3.32. $x'' - y' = e^t,$
$$x(0) = 1,\ y(0) = -1,$$
$x' + y'' - y = 0;\quad x'(0) = y'(0) = 0.$

3.33. $x'' + y' = 2 \operatorname{sen} t,$
$y'' + z' = 2\cos t,$
$z'' - x = 0;$
$$x(0) = z(0) = y'(0) = 0,\ x'(0) = y(0) = -1,\ z'(0) = 1.$$

Intégrense para las condiciones iniciales nulas los sistemas de ecuaciones diferenciales:

3.34. $x'' - y' = f_1(t),$
$y' + x = f_2(t),$

donde $f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{para } t \geqslant \pi, \end{cases}$

$$f_2(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leqslant t < \pi/2, \\ \pi - t & \text{para } \pi/2 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{para } t \geqslant \pi. \end{cases}$$

3.35. $x'' - y = 0,$
$y'' - x = f(t),$

donde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leqslant t < \pi, \\ -1 & \text{para } \pi \leqslant t < 2\pi, \\ 0 & \text{para } t \geqslant 2\pi. \end{cases}$

2. Cálculo de los circuitos eléctricos. Aplicando los métodos del cálculo operacional es cómodo resolver los problemas referentes al cálculo de los circuitos eléctricos.

EJEMPLO 4. Al circuito eléctrico en el cual están conectadas en serie la autoinducción L y la resistencia R, está aplicada una fuerza electromotriz periódica de período T: $u(t) = at$ $(0 \leqslant t < T)$ (fig. 112). Determínese la condición inicial $i(0) = i_0$ de tal modo, que en el circuito surja la corriente periódica.

◀ Según la segunda ley de Kirchhoff hallamos:

$$Li'(t) + Ri(t) = u(t) \quad \text{ó} \quad i'(t) + ki(t) = \frac{1}{L} u(t), \quad k = \frac{R}{L}.$$

Con ayuda de la función unitaria de Heaviside escribamos $u_0(t)$ (el valor de $u(t)$ en el período inicial $[0, T)$):
$u_0(t) = (1 - \eta(t - T))\, at = at - a\eta(t - T)(t - T) - aT\eta(t-T)$
De aquí por el teorema de retardo tenemos $u_0(t) \risingdotseq U_0(p) =$
$= \dfrac{a(1-e^{-pT})}{p^2} - \dfrac{aT}{p} e^{-pT}$. Aplicando la fórmula de la representación de la función periódica (véase el problema 1.25), hallamos

$$u(t) \risingdotseq U(p) = \frac{U_0(p)}{1-e^{-pT}} = \frac{a}{p^2} - \frac{aT}{p} \frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}.$$

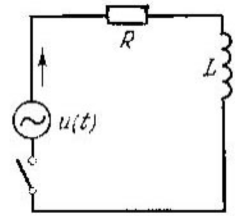

Fig. 112

Pasamos a la ecuación operacional poniendo $i(t) \risingdotseq I(p)$, $i'(t) \risingdotseq pI(p) - i_0$:

$$(p+k)\, I(p) = i_0 + \frac{a}{Lp^2} - \frac{aT}{Lp} \frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}},$$

de donde

$$I(p) = \frac{i_0}{p+k} + \frac{a}{Lp^2(a+k)} - \frac{aT}{Lp(p+k)} \frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}.$$

Anotemos $I(p)$ en la forma siguiente:

$$I(p) = \frac{F(p)}{1-e^{-pT}}, \text{ donde } F(p) = \frac{i_0(1-e^{-pT})}{p+k} + \frac{a(1-e^{-pT})}{Lp^2(p+k)} - \frac{aTe^{-pT}}{Lp(p+k)}.$$

Para que la corriente en el circuito sea periódica, con un período T, es necesario que el original de la función $F(p) \risingdotseq f(t)$ tenga la forma

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t) & \text{para } 0 \leqslant t < T, \\ 0 & \text{para } \quad t \geqslant T. \end{cases}$$

Pero para $0 \leqslant i < T$

$$f_0(t) \risingdotseq \frac{i_0}{p+k} + \frac{a}{Lp^2(p+k)}.$$

Ya que

$$\frac{1}{p^2(p+k)} = \frac{1}{kp^2} + \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{p+k} - \frac{1}{p}\right) \risingdotseq \frac{t}{k} + \frac{1}{k^2}(e^{-kt} - 1),$$

entonces

$$f_0(t) = i_0 e^{-kt} + \frac{at}{Lk} + \frac{a}{Lk^2}(e^{-kt}-1).$$

Para $t \geqslant T$, valiéndose del teorema de retardo, hallamos:

$$f(t) = i_0(e^{-kt} - e^{-k(t-T)}) + \frac{a(t-(t-T))}{Lk} +$$

$$+ \frac{a}{Lk^2}((e^{-kt}-1)-(e^{-k(t-T)}-1)) - \frac{aT}{Lk}(1-e^{-k(t-T)}) =$$

$$= e^{-kt}\left(i_0(1-e^{kT}) + \frac{a}{Lk^2}(1-e^{kT}) + \frac{aT}{Lk}e^{kT}\right).$$

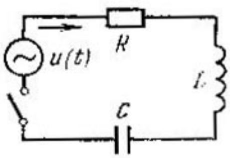

Fig. 113

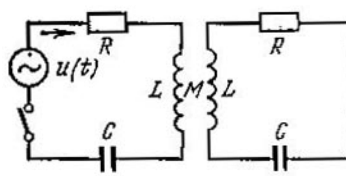

Fig. 114

Pero aquí $f(t) = 0$, por eso

$$i_0 = -\frac{a}{Lk^2}\,\frac{kTe^{kT}+1-e^{kT}}{1-e^{kT}} = -\frac{a}{kL^2} + \frac{1}{Lk}\,\frac{aT}{1-e^{-kT}}.$$

De esto modo, sustituyendo el valor de i_0 en $f_0(t)$, hallamos;

$$f_0(t) = \frac{a}{Lk^2}\left(\frac{kTe^{-kt}}{1-e^{-kT}} - e^{-kt} + kt + e^{-kt} - 1\right) =$$

$$= \frac{aT}{Lk}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{kT} + \frac{e^{-kt}}{1-e^{-kT}}\right).$$

Este es el valor buscado de la corriente periódica (del período T) en el intervalo $0 \leqslant t < T$. ▶

3.36. Al circuito eléctrico en el cual están conectadas en serie la autoinducción L, la resistencia R y la capacidad C con corriente inicial y carga iguales a cero, está aplicada la fuerza electromotriz $u(t)$ igual a E_1 para $0 \leqslant t \leqslant T$ y E_2 para $t > T$ (E_1, E_2, T son constantes). Hállese la corriente en el circuito (fig. 113).

3.37. Dos circuitos eléctricos iguales que constan de una autoinducción L, una resistencia R y una capacidad C, conectadas en serie, están acoplados por la inducción mutua M. Las corrientes y cargas iniciales son nulas. A uno de los circuitos en el momento de tiempo $t=0$ se aplica la f.e.m. constante E_0. Hállense las corrientes en ambos circuitos (fig. 114).

3. Integración de las ecuaciones lineales en derivadas parciales. Analicemos la aplicación de los métodos operacionales para integrar las ecuaciones lineales en derivadas parciales a base de un ejemplo.

EJEMPLO 5. Hállese la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}+z=$ $=\operatorname{sen} x \cos y$ que satisface las condiciones $z(0, y)=\operatorname{sen} y$, $z(x, 0)=$ $=0$ $(x \in [0, +\infty)$, $y \in [0, +\infty))$.

◀ Pasemos a la ecuación operacional respecto al argumento y, poniendo $z(x, y) \risingdotseq Z(x, p)$. De aquí

$$\frac{\partial z}{\partial y} \risingdotseq pZ(x, p)-z(x, 0)=pZ(x, p),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \risingdotseq \frac{\partial}{\partial x}(pZ(x, p))=pZ'_x(x, p)$$

(según el teorema sobre la diferenciación de las relaciones operacionales por el parámetro). Obtenemos la ecuación operacional:

$$pZ'_x(x, p)+Z(x, p)=\frac{p \operatorname{sen} x}{p^2+1}\left(\text{ya que } \cos y \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}\right).$$

Integrando la ecuación diferencial obtenida respecto al argumento x, hallamos

$$Z(x, p)=C_1(p)\, e^{-\frac{x}{p}}+\frac{p}{(p^2+1)^2} \operatorname{sen} x-\frac{p^2}{(p^2+1)^2} \cos x.$$

En virtud de la condición inicial $Z(x, 0)=0$ y del teorema de conexión del valor inicial del original con el valor final de la representación, debemos tener $\lim\limits_{p \to \infty} pZ(x, p)=Z(x, 0)=0$, de donde hallamos $\lim\limits_{p \to \infty} pC_1(p)=0$, además, si $C_1(p) \risingdotseq \varphi(y)$, entonces $\varphi(0)=0$ (en virtud del mismo teorema). Anotemos ahora $Z(x, p)$ en la forma siguiente:

$$Z(x, p)=pC_1(p)\frac{1}{p} e^{-\frac{x}{p}}+\frac{p}{(p^2+1)^2} \operatorname{sen} x-\frac{1}{2} \times$$
$$\times \frac{(p^2+1)(p^2-1)}{(p^2+1)^2} \cos x.$$

Pero, como

$$pC_1(p) \risingdotseq \varphi'(y), \quad \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{p}} \risingdotseq I_0(2\sqrt{xy})$$

(véase la solución del ejemplo 1 del § 2).

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} \doteq \frac{1}{2} y \operatorname{sen} y, \quad \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \doteq y \operatorname{sen} y,$$

entonces hallamos:

$$z(x, y) = \int_0^y \varphi'(t) I_0 \left(2\sqrt{x(y-t)}\right) dt + \frac{1}{2} y \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x -$$

$$-\frac{1}{2}(\operatorname{sen} y + y \cos y) \cos x = \int_0^y \varphi'(t) I_0 \left(2\sqrt{x(y-t)}\right) dt -$$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{sen} y \cos x - \frac{1}{2} y \cos (x+y)$$

(el primer sumando se obtuvo por el teorema de convolución de los originales). Ya que $I_0(0) = 1$, entonces, poniendo $x = 0$, hallamos:

$$z(0, y) = \int_0^y \varphi'(t)\, dt - \frac{1}{2} \operatorname{sen} y - \frac{1}{2} y \cos y =$$

$$= \varphi(y) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} y - \frac{1}{2} y \cos y = \operatorname{sen} y$$

(según las condiciones iniciales); por eso $\varphi(y) = \frac{3}{2} \operatorname{sen} y + \frac{1}{2} y \cos y$,

$\varphi'(t) = 2 \cos y - \frac{1}{2} y \operatorname{sen} y$, y hallamos definitivamente

$$z(x, y) = \int_0^y \left(2 \cos t - \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t\right) I_0 \left(2\sqrt{x(y-t)}\right) dt -$$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{sen} y \cos x - \frac{1}{2} y \cos (x+y). \blacktriangleright$$

Intégrense las siguientes ecuaciones lineales en derivadas parciales:

3.38. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = \cos x$; $z(0, y) = y$, $z'_x(0, y) = 0$.

3.39. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} - a^2 z = f(x)$; $z(0, y) = -y$, $z'_x(0, y) = 0$.

§ 4. Funciones impulsivas

1. Función impulsiva de primer orden $\delta(t)$. Definamos la *δ-función de Dirac* como límite para $h \to 0$ de la función

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 0 & \text{para } -\infty < t < 0 \text{ y } h < t < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

(fig. 115). El efecto sumario de la acción de esta función, llamado tam-

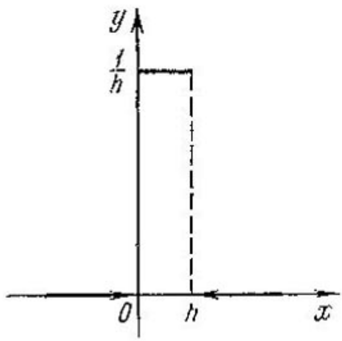

Fig.115

bién su *intensidad*, es igual a la unidad, es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t)\, dt = 1.$$

Ponemos

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \delta_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0, \\ +\infty & \text{para } t = 0, \end{cases}$$

además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

Se puede determinar la δ-función también con ayuda del límite para $h \to 0$ de la función

$$\delta_h^*(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}(t-h) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 0 & \text{para } h < t < +\infty, \\ \delta_h^*(-t) & \text{para } -\infty < t < 0 \end{cases} \tag{2}$$

(fig. 116) para la cual se verifica también

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h^*(t)\,dt = 1.$$

Las propiedades de la función impulsiva $\delta(t)$ son:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau).$

2. $\displaystyle\int_{a}^{T} \delta(t)\,dt = \eta(T) - \eta(a).$

Aquí $\eta(t)$ es la función unitaria de Heaviside, considerada como el

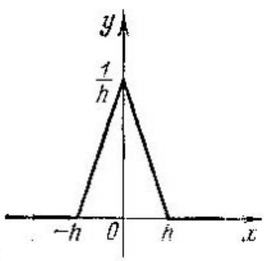

Fig. 116

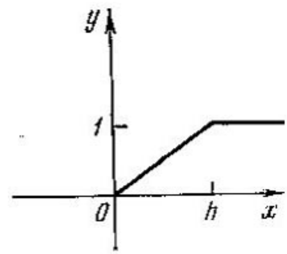

Fig. 117

límite para $h \to 0$ de la función $\eta_h(t)$, donde

$$\eta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}t & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 1 & \text{para } h < t < +\infty, \\ 0 & \text{para } -\infty < t < 0 \end{cases}$$

(fig. 117). En este sentido podemos considerar, que $\delta(t) = \eta'(t)$.

3. $\delta(-t) = \delta(t)$.

4. $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\,\delta(t)$.

5. Si $f(t) = 0$ para $t = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y $f'(a_k) \neq 0$ (todas las raíces de $f(t)$ son simples), entonces

$$\delta(f(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(t-a_k)}{|f'(a_k)|}.$$

2. Función impulsiva de segundo orden $\delta_1(t)$. La función $\delta_1(t)$ puede ser determinada como límite para $h \to 0$ de la derivada de la función $\delta_h^*(t-h)$ determinada en (2), es decir,

$$\delta_{1,h}^*(t) = (\delta_h^*(t-h))' = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2} & \text{para } 0 \leqslant t < h, \\ -\dfrac{1}{h^2} & \text{para } h \leqslant t < 2h, \\ 0 & \text{para} -\infty < t < 0 \text{ y } 2h \leqslant t < +\infty; \end{cases}$$

$\delta_1(t)$ satisface las condiciones:

1. $\delta_1(t) = 0$ para $t \neq 0$.
2. $\delta_1(-0) = +\infty$, $\delta_1(+0) = -\infty$.
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta_1(\tau)\,d\tau = \delta(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t)\,dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{t} \delta_1(\tau)\,d\tau = 1.$

3. Representaciones de las funciones impulsivas y sus aplicaciones. Por representación de la función $\delta(t)$ se comprenderá el límite de la representación bien de la función $\delta_h(t)$, o bien de la función $\delta_h^*(t-h)$ para $h \to 0$. En el primer caso la representación para $\delta_h'(t)$ se halla directamente, en el segundo caso la representación para $\delta_h^*(t-h)$ se halla a partir de la representación de su derivada $(\delta_h^*(t-h))_t' = \delta_{1,h}(t)$ De hecho tenemos

$$\delta_h(t) = \frac{\eta(t) - \eta(t-h)}{h}$$

y

$$\delta_{1,h}(t) = (\delta_h^*(t-h))_t' = \frac{\eta(t) - 2\eta(t-h) + \eta(t-2h)}{h^2}.$$

Por eso,

$$\delta_h(t) \risingdotseq \frac{1}{h}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-ph}\right) = \frac{1-e^{-ph}}{ph}$$

y

$$\delta_{1,h}(t) \risingdotseq \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{2e^{-ph}}{p} + \frac{e^{-2ph}}{p}\right) = \frac{(1-e^{-ph})^2}{ph^2}.$$

De estas expresiones hallamos que

$$\delta(t) \risingdotseq \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-ph}}{ph} = 1$$

y

$$\delta_1(t) \risingdotseq \lim_{h\to 0} \frac{(1-e^{-ph})^2}{ph^2} = p.$$

Citemos ejemplos de aplicación de las funciones impulsivas.

EJEMPLO 1 Intégrese la ecuación $x''(t)=\delta(t)$ para las condiciones iniciales nulas. Explíquese el resultado.

◀ Formamos la ecuación operacional $p^2X(p)=1$, de donde $X(p)=\frac{1}{p^2}$ y $x(t)=t$. Así pues, la función impulsiva de primer orden comunica al punto material de la masa unidad el movimiento rectilíneo uniforme con velocidad unitaria. ▶

EJEMPLO 2 Intégrese la ecuación $x''(t)=\delta_1(t)$ para las condiciones iniciales nulas.

◀ Formamos la ecuación operacional $p^2X(p)=p$, de donde $X(p)=\frac{1}{p}$ y $x(t)=1$ $(t>0)$. De este modo, la función impulsiva de segundo orden comunica al punto material de la masa unidad un desplazamiento instantáneo en una unidad de longitud sin movimiento posterior. ▶

Intégrense las siguientes ecuaciones diferenciales:

4.1. $x''+\omega^2x=v_0\delta(t)$ para las condiciones iniciales nulas.

4.2. $x''+\omega^2x=v_1\delta(t-\tau)+h\delta_1(t-\tau_1)$; $x(0)=x_0$, $x'(0)=x'_0$.

4.3. $x''+\omega^2x=A\operatorname{sen}\omega t+B\cos\omega t\cdot\delta(t-\tau)$ para las condiciones iniciales arbitrarias.

4.4.** $x''=v_0\delta(\operatorname{sen}\omega t)$ para las condiciones iniciales nulas.

§ 5. Aplicaciones del cálculo operacional a la resolución de las ecuaciones integrales e integrales diferenciales, al cálculo de las integrales impropias y a la sumación de las series

1. Resolución de las ecuaciones integrales e integrales diferenciales. Aplicando el teorema de convolución es fácil hallar las representaciones de las soluciones de las ecuaciones integrales de Volterra de primera y segunda especie (y en los casos más simples, con ayuda de la representación encontrada, también se puede hallar la propia solución), cuando de núcleo en la ecuación correspondiente sirve la función de tipo $K(t-\tau)$, donde $K(t)$ es el original. Este método es aplicable también a las ecuaciones integrales diferenciales con el mismo núcleo.

EJEMPLO 1. Hállese la solución de *la ecuación de Volterra* de primera especie

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau=t\cos t.$$

◀ Sea $x(t) \risingdotseq X(p)$; ya que

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}, \quad t\cos t \risingdotseq \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2},$$

$$\int_0^t \cos(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{pX(p)}{p^2+1}$$

(según el teorema de convolución), entonces llegamos a la ecuación operacional

$$\frac{pX(p)}{p^2+1} = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2},$$

de donde

$$X(p)\,\frac{p^2-1}{p(p^2+1)} = \frac{2p}{p^2+1} - \frac{1}{p}.$$

De este modo, $x(t) = 2\cos t - 1$. ▶

Ejemplo 2. Hállese la solución de la ecuación $x'' + x = \operatorname{sen} t + \int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$ para las condiciones iniciales $x(0) = 0$ $x'(0) = 1$.

◀ Suponiendo $x(t) \risingdotseq X(p)$, tenemos

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p)-1, \quad \operatorname{sen} t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$$

$$\int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{X(p)}{p^2+1}.$$

Obtenemos la ecuación operacional

$$(p^2+1)\,X(p) - 1 = \frac{1}{p^2+1} + \frac{X(p)}{p^2+1}$$

ó

$$((p^2+1)^2-1)\,X(p) = p^2+2.$$

De aquí hallamos $X(p) = \frac{1}{p^2}$ y $x(t) = t$. ▶

Resuélvanse las siguientes ecuaciones integrales e integrales diferenciales:

5.1. $\displaystyle\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t.$

5.2. $\displaystyle 3\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = x(t) - e^{-t}.$

5.3. $\int\limits_0^t e^{t-\tau} \operatorname{sen}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x'' - x' + e^t(1-\cos t)$;

$x(0) = x'(0) = 1$.

5.4. $\int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x'' - x' + \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t$; $x(0) = 1$,

$x'(0) = 0$.

Intégrense *las ecuaciones de Abel*:

5.5. $\int\limits_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \pi$.

5.6. $\int\limits_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = t^\beta$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $\beta > -1$.

2. Cálculo de las integrales impropias. Uno de los procedimientos para calcular las integrales impropias del tipo $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, dt$ está basado en la aplicación del teorema del cálculo operacional sobre la conexión del valor «final» del original y el valor «inicial» de la representación: si $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$ y existe el límite finito $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty)$, entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty) = \lim\limits_{p\to 0} p\Phi(p)$ (véase el § 1, la propiedad 12, b)).

A partir de este teorema y de la relación

$$\int\limits_0^t f(t)\, dt = \frac{1}{p} F(p) \qquad (f(t) \risingdotseq F(p)),$$

si la integral $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, se deduce la relación

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, dt = F(0). \tag{1}$$

EJEMPLO 3. Calcúlese la integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$.

◀ Ya que sen $t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$, entonces según el teorema de la integración de la representación tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} \frac{dq}{q^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p,$$

por eso, según la fórmula (1), hallamos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{t} = \frac{\pi}{2}. \ ▶$$

Sean las funciones $f(t, u)$ y $\psi(t) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\, du$ los originales y $f(t, u) \doteqdot F(p, u)$. Entonces, aplicando el teorema sobre la integración según el parámetro tendremos

$$\psi(t) \doteqdot \Psi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u)\, du.$$

Por eso, si se puede calcular la integral que determina $\Psi(p)$, entonces para determinar la integral $\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\, du$ es suficiente hallar el original para $\Psi(p)$, es decir,

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\, du \doteqdot \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u)\, du. \tag{2}$$

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2+u^2}$.

◀ Tenemos $\cos tu \doteqdot \frac{p}{p^2+u^2}$. Por eso (por la fórmula (2))

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2+u^2} \doteqdot \int_0^{+\infty} \frac{p\, du}{(p^2+u^2)(\alpha^2+u^2)} = \frac{p}{p^2-\alpha^2} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \left(\frac{du}{\alpha^2+u^2} - \frac{du}{p^2+u^2}\right) = \frac{p}{p^2-\alpha^2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}\right) = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{1}{p+\alpha}.$$

Pero $\frac{1}{p+\alpha} \risingdotseq e^{-\alpha t}$. De aquí

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2+u^2} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha t}. \blacktriangleright$$

Un procedimiento más de cálculo de las integrales impropias mediante el cálculo operacional nos da el

TEOREMA DE PARSEVAL. *Si $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$ y las funciones $F_1(p)$ $F_2(p)$ son analíticas para $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, entonces*

$$\int_0^{+\infty} f_1(u) F_2(u)\, du = \int_0^{+\infty} F_1(v) f_2(v)\, dv. \tag{3}$$

En este caso de la convergencia de una de estas integrales se desprende la convergencia de la otra[1].

EJEMPLO 5. Calcúlese $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \operatorname{sen} \beta u}{u}\, du$, $\alpha > 0$.

◀ Tenemos $e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$, $\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$. Poniendo $f_1(u) = e^{-\alpha u} \operatorname{sen} \beta u$, $F_2(u) = \frac{1}{u}$, tenemos

$$F_1(v) = \frac{\beta}{(v+\alpha)^2+\beta^2}, \quad f_2(v) = \eta(v).$$

Por eso según la fórmula (3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \operatorname{sen} \beta u\, du}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{\beta \eta(v)\, dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2} = \beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2}$$

($\eta(v) = 1$, ya que $v > 0$). Pero

$$\beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{v+\alpha}{\beta} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

De este modo

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \operatorname{sen} \beta u\, du}{u} = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \blacktriangleright$$

[1] Si para una de las funciones $F_1(p)$ o $F_2(p)$ la condición de la analiticidad se cumple sólo para $\operatorname{Re} p > 0$, entonces la convergencia de una de las integrales puede no tener lugar.

Calcúlense las integrales impropias empleando la fórmula (1):

5.7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\cos\gamma t}{t}\,dt$, $\alpha,\ \beta > 0$.

5.8*. $\int\limits_0^{+\infty} t^{\mu} e^{-\alpha t}\ln t\,dt$, $\alpha > 0$, $\mu > -1$.

Calcúlense las integrales impropias, empleando la fórmula (2):

5.9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{u\operatorname{sen} tu\,du}{u^2+\alpha^2}$. 5.10. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du$.

Calcúlense las integrales impropias empleando el teorema de Parseval (fórmula (3)):

5.11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{\sqrt{u}}\,du$, $\alpha,\ \beta > 0$.

5.12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha u - \operatorname{sen}\beta u}{u\sqrt{u}}\,du$, $\alpha,\ \beta > 0$.

5.13*. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx$, $\alpha,\ \beta > 0$.

3. Sumación de las series. Los métodos de cálculo operacional pueden ser aplicados sumando las series numéricas y funcionales.

EJEMPLO 6. Sea $f(t) \risingdotseq F(p)$ (la región de analiticidad $F(p)$ es $\operatorname{Re} p \geqslant k$). Demuéstrese que la suma S de la serie $\sum\limits_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$ puede ser hallada según la fórmula

$$S = (\pm 1)^k \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t)\,dt}{1 \pm e^{-t}}. \tag{4}$$

◀ Según la condición $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$. Tenemos:

$\frac{(\pm 1)^k e^{-kt}}{1 \pm e^{-t}} = \sum\limits_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}$. Por eso

$$(\pm 1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t)\,dt}{1 \pm e^{-t}} = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}\,dt =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,dt = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n). \blacktriangleright$$

Empleando la fórmula (4) hállense las sumas de las siguientes series numéricas:

5.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$.

5.15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$.

5.16*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$.

5.17*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{3}{n^2 - 3n + 1}$.

EJEMPLO 7. Sea $f(t) \doteq F(p)$ (la región de analiticidad de $F(p)$ es $\operatorname{Re} p > 0$). Sea, además, $\Phi(t, x)$ la función generadora de la sucesión infinita de las funciones $\varphi_n(x)$, es decir,

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n.$$

Demuéstrese que la suma $S(x)$ de la serie funcional $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F(n) \times \varphi_n(x)$ convergente en $[a, b]$, puede ser hallada según la fórmula

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t)\,dt. \tag{5}$$

$\blacktriangleleft$ Tenemos

$$\int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) e^{-nt}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) F(n) = S(x). \blacktriangleright$$

Empleando la fórmula (5), con ayuda de la función generadora adecuada súmense las siguientes series:

5.18*. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5.19*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5.20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$, $x \in (0, \pi)$.

5.21*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n}$, $x \in (0, \pi)$

§ 6. Transformación discreta de Laplace y su aplicación

1. Transformación Z y transformación discreta de Laplace. Se llama *transformación Z* de la sucesión infinita numérica (real o compleja) $\{a_n\}$, la función de la variable compleja $F(z)$ que se determina del modo siguiente:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}. \tag{1}$$

Si la sucesión $\{a_n\}$ satisface la condición $|a_n| \leqslant Me^{\alpha n}$ ($M > 0$, α son constantes), la función $F(z)$ será analítica en la región $|z| > e^{\alpha}$, es decir, fuera del círculo con el centro en el punto nulo y de radio $R = e^{\alpha}$.

La fórmula (1) nos da el desarrollo de $F(z)$ en serie de Laurent en el entorno del punto infinitamente alejado (que es un punto regular de $F(z)$), por eso, para restablecer la sucesión $\{a_n\}$ a partir de su transformación Z, hay que desarrollar de cualquier modo $F(z)$, en serie de Laurent, en el entorno del punto infinitamente alejado; en particular, se puede emplear la fórmula para determinar los coeficientes de este desarrollo (véase la fórmula (2) del § 5 del cap. 12)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1}\, dz \tag{2}$$

(C es el contorno dentro del cual se encuentran todos los puntos singulares de la función $F(z)$ [1]).

---

[1] La fórmula (2) es de hecho la fórmula de inversión de la transformación Z.

EJEMPLO 1. Restablézcase (a_n) a partir de su transformación Z, $F(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$.

◀ Tenemos $\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)=$

$=\frac{1}{(a-b)z}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{z}}-\frac{1}{1-\frac{b}{z}}\right)=\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{z^{n+1}}$. Así pues,

$(a_n)=\left(\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\right)$ para, $n\geqslant 1$, $a_0=0$. ▶

Introduzcamos en vez de la sucesión (a_n) la función reticular $f(n)$, suponiendo que $a_n=f(n)$. Como antes, $f(n)$ satisface la condición $|f(n)|<Me^{\alpha n}$ y pongamos adicionalmente que $f(n)=0$ para $n<0$: a tales funciones reticulares las llamaremos *originales discretos*. *La transformación discreta de Laplace* de la función $f(n)$ la obtendremos, si en la transformación Z ponemos $z=e^q$:

$$F^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,e^{-nq}. \tag{3}$$

La conexión entre el original discreto $f(n)$ y su representación $F^*(q)$ se denota por el símbolo $f(n)\doteqdot F^*(q)$ (a veces se escribe $F^*(q)=$ $=D[f(n)]$. La representación $F^*(q)$ es la función de la variable compleja con período 2π, además en la franja principal, $\pi<\operatorname{Im} q\leqslant\pi$, es analítica para $\operatorname{Re} q>\alpha$. Así pues, todos sus puntos singulares están situados en esta franja a la izquierda de la recta $\operatorname{Re} q=\alpha$.

De la fórmula (3) se deduce la siguiente fórmula de inversión de la transformación discreta de Laplace:

$$f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\pi i}^{\gamma+\pi i} F^*(q)\,e^{nq}\,dq. \tag{4}$$

EJEMPLO 2. $f(n)=a^n$, hállese $F^*(q)$.

◀ Tenemos $F^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-nq}=\frac{1}{1-ae^{-q}}=\frac{e^q}{e^q-a}$ y por eso $a^n\doteqdot$ $\doteqdot\frac{e^q}{e^q-a}$. Poniendo $a=1$, obtendremos $1^n=\eta(n)\doteqdot\frac{e^q}{e^q-1}$. ▶

Las propiedades de la transformación discreta de Laplace (en todos los casos que siguen se supone $f_j(n)\doteqdot F_j^*(q)$) son:

1. Linealidad:

$$\sum_{j=1}^{r} C_j f_j(n) \doteq \sum_{j=1}^{r} C_j F_j^*(q).$$

2. Fórmula de desplazamiento:

$$e^{\alpha n} f(n) \doteq F^*(q-\alpha).$$

3. Fórmula de retardo y de adelanto:

a) $f(n-k) \doteq e^{-kq} F^*(q)$,

b) $f(n+k) \doteq e^{kq}\left(F^*(q) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r)\, e^{-rq}\right)$.

4. Diferenciación por el parámetro:

si $f(n, x) \doteq F^*(q, x)$, entonces $\frac{\partial f(n, x)}{\partial x} \doteq \frac{\partial F^*(q, x)}{\partial x}$.

5. Diferenciación e integración de la representación:

a) $n^k f(n) \doteq (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} F^*(q)$.

b) $\frac{f(n)}{n} \doteq \int_q^{\infty} (F^*(s) - f(0))\, dx \quad (n \geqslant 1)$.

6. Representación de las diferencias finitas del original:

$$\Delta^k f(n) \doteq (e^q - 1)^k F^*(q) - e^q \sum_{r=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-r-1} \Delta^r f(0).$$

7. Representación de las sumas finitas del original:

si $g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$, entonces $g(n) \doteq \frac{F^*(q)}{e^q - 1}$.

8. Multiplicación de las representaciones: si

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{r=0}^{n} f_1(r) f_2(n-r)$$

(ésta es la así llamada «convolución» de los originales), entonces

$$f_1(n) * f_2(n) \doteq F_1^*(q) F_2^*(q).$$

Damos, a continuación *la tabla de representaciones* de las funciones de reticulares principales:

N	$f(n)$	$F^*(q)$
1	$f(n)=\begin{cases} C, & n=0, \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$	C
2	$\eta(n)=\begin{cases} 1, & n\geqslant 0, \\ 0, & n<0 \end{cases}$	$\dfrac{e^q}{e^q-1}$
3	a^n	$\dfrac{e^q}{e^q-a}$
4	$e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^q}{e^q-e^{\alpha}}$
5	n	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^2}$
6	n^2	$\dfrac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}$
7	$\dfrac{n^{[2]}}{2!}=\dfrac{n(n-1)}{2}=C_n^2$	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^3}$
8	$\dfrac{n^{[k]}}{k!}=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=C_n^k$	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^{k+1}}$
9	$\operatorname{sen}\beta n$	$\dfrac{e^q\operatorname{sen}\beta}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}$
10	$\cos\beta n$	$\dfrac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}$
11	$\operatorname{sh}\beta n$	$\dfrac{e^q\operatorname{sh}\beta}{e^{2q}-2e^q\operatorname{ch}\beta+1}$
12	$\operatorname{ch}\beta n$	$\dfrac{e^q(e^q-\operatorname{ch}\beta)}{e^{2q}-2e^q\operatorname{ch}\beta+1}$
13	$\dfrac{n^{[k]}}{k!}e^{\alpha n}=C_n^k e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^{q+k\alpha}}{(e^q-e^{\alpha})^{k+1}}$
13′	$\dfrac{n^{[k]}}{k!}a^n=C_n^k a^n$	$\dfrac{a^k e^q}{(e^q-a)^{k+1}}$

EJEMPLO 3. Hállese la representación de la función $f(n)=$ $=e^{\alpha n}\operatorname{sen}\beta n$.

◀ Aplicando el teorema de desplazamiento (propiedad 2) y empleando la fórmula 9 de la tabla de representaciones hallamos

$$e^{\alpha n}\operatorname{sen}\beta n \doteq F(q-\alpha)=\frac{e^{q-\alpha}\operatorname{sen}\beta}{e^{2(q-\alpha)}-2e^{q-\alpha}\cos\beta+1}=$$

$$=\frac{e^{q+\alpha}\operatorname{sen}\beta}{e^{2q}-2e^{q+\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}}.$$ En particular,

$$a^n \operatorname{sen}\beta n = e^{n\ln a}\operatorname{sen}\beta n \doteqdot \frac{ae^q \operatorname{sen}\beta}{e^{2q}-2ae^q\cos\beta + a^2}. \blacktriangleright$$

Hállense las representaciones de las siguientes funciones reticulares:

6.1. $f(n) = e^{\alpha n}\cos\beta n$. **6.2.** $f(n) = a^n\cos\beta n$.

6.3. $f(n) = n^2 e^{\alpha n}$. **6.4.** $f(n) = n^2 a^n$.

6.5*. $f(n) = \dfrac{(n-1)^{[k]}}{k!} = C_{n-1}^k$.

6.6*. $f(n) = \dfrac{(n+m)^{[k]}}{k!} = C_{n+m}^k$.

6.7.** $f(n) = \dfrac{\operatorname{sen}\beta n}{n}$.

Ejemplo 4. Hállese la función reticular $f(n)$ a partir de su representación $F^*(q) = \dfrac{e^q}{(e^{2q}-9)^2}$.

◄ Primer procedimiento. Desarrollemos $\dfrac{F^*(q)}{e^q} = \dfrac{1}{(e^{2q}-9)^2}$ en fracciones elementales, poniendo $e^q = z$:

$$\frac{1}{(z^2-9)^2} = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{(z-3)^2} + \frac{1}{(z+3)^2}\right) - \frac{1}{108}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+3}\right).$$

De este modo,

$$\frac{e^{2q}}{(e^{2q}-9)^2} = \frac{1}{108}\left(\frac{3e^q}{(e^q-3)^2} + \frac{3e^q}{(e^q+3)^2} - \frac{e^q}{e^q-3} + \frac{e^q}{e^q+3}\right).$$

Pero según las fórmulas 3 y 13' de la tabla de representaciones tenemos:

$$\frac{e^q}{e^q-3} \doteqdot 3^n, \qquad \frac{e^q}{e^q+3} \doteqdot (-3)^n,$$

$$\frac{3e^q}{(e^q-3)^2} \doteqdot n3^n, \quad \frac{3e^q}{(e^q+3)^2} \doteqdot -n(-3)^n.$$

De aquí, después de las transformaciones elementales hallamos:

$$\frac{e^q}{(e^{2q}-9)^2} \doteqdot \frac{3^{n-3}(n-1)(1-(-1)^n)}{4}.$$

Segundo procedimiento. Pasamos a la transformación Z (poniendo $e^q = z$): $\dfrac{e^q}{(e^{2q}-9)^2} = \dfrac{z}{(z^2-9)^2}$. Empleando la fórmula de inversión (2) y aplicando el teorema sobre los residuos, obtenemos

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z}{(z^2-9)^2} z^{n-1}\,dz = \operatorname{res}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2};\ 3\right] +$$

$$+ \operatorname{res}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2};\ -3\right];$$

pero

$$\operatorname{res}\left[\frac{z^n}{z^2-9}\,;\,3\right]=\lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^n}{(z+3)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 3}\left(\frac{nz^{n-1}}{(z+3)^2}-\frac{2z^n}{(z+3)^3}\right)=\frac{(n-1)\cdot 3^{n-3}}{4}\,.$$

Análogamente

$$\operatorname{res}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2}\,;\,-3\right]=-(-1)^n\,\frac{(n-1)\,3^{n-3}}{4}\,.$$

Sumando estos residuos llegamos al resultado anterior. ▶

Hállense las funciones reticulares a partir de sus representaciones

6.8. $F^*(q)=\dfrac{e^q}{(e^q-1)(e^{2q}-4)}\,.$

6.9. $F^*(q)=\dfrac{e^q}{e^{4q}+1}\,.$

6.10. $F^*(q)=\dfrac{e^{2q}}{e^{2q}+2e^q+2}\,.$

Ejemplo 5. Hállese la suma $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos k\beta.$

◀ Empleamos la propiedad 7 de la transformación discreta de Laplace:

$$f(n)\div\frac{e^q(e^2-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}=F^*(q),$$

por eso

$$S_n\div\frac{F^*(q)}{e^q-1}=\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)}\,.$$

Descomponiendo en factores elementales la fracción

$$(e^q-\cos\beta)/(e^q-1)/(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)$$

y añadiendo el factor e^q hallamos

$$\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^q}{e^q-1}-\frac{e^q(e^q-2\cos\beta-1)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}\right)\,.$$

Pero $\dfrac{e^q}{e^q-1}\div\eta(n)$ (fórmula 2 de la tabla de las representaciones). Por consiguiente,

$$\frac{e^q(e^q-2\cos\beta-1)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}=\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}-$$

$$-\frac{e^q(1+\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}\div\cos\beta n-\frac{1+\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}\beta n.$$

Así pues,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\eta(n)-\cos\beta n+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\beta n\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}+\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\beta}{2\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n-1}{2}\beta}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}\quad(n\geqslant 1).\ ►$$

Hállense las sumas siguientes:

6.11. $\sum\limits_{k=r}^{n-1}\frac{k^{[r]}}{r!}=\sum\limits_{k=r}^{n-1}C_k^r$.

6.12. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}2^k\operatorname{sen}k\beta$.

6.13*. $\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2$.

EJEMPLO 6. Hállese la suma de la serie potencial

$$S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)t^n=1+\sqrt{2}\,t+t^2-$$

$$-t^4-\sqrt{2}\,t^5-t^6+\ldots$$

◄ La serie dada converge para $|t|<1$, ya que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$. Sustituyendo t por e^{-q} llegamos a la representación discreta de la función $f(n)=\cos\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}$:

$$F^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)e^{-nq}.$$

Pero

$$\cos\frac{n\pi}{4}\doteqdot\frac{e^q\left(e^q-\cos\frac{\pi}{4}\right)}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1};\quad \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\doteqdot\frac{e^q\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1}$$

(véanse las fórmulas 9 y 10 de la tabla de representaciones). Por eso

$$f(n)=\cos\frac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\doteqdot\frac{e^q\left(e^q-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+e^q\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^q-\sqrt{2}\,e^q+1}=$$

$$= \frac{e^{2q}}{e^{2q} - \sqrt{2}\, e^{q} + 1}.$$

De aquí, volviendose al argumento t, hallamos

$$S(t) = \frac{t^{-2}}{t^{-2} - \sqrt{2}\, t^{-1} + 1} = \frac{1}{1 - t\sqrt{2} + t^2}. \blacktriangleright$$

Hállense las sumas de las siguientes series potenciales:

6.14. $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} t^n$. **6.15.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{3} - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}\right) t^n$.

2. Resolución de las ecuaciones en diferencias. Sea dada la ecuación

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \ldots + a_k x(n) = \varphi(n) \tag{5}$$

($a_0, a_1, \ldots, a_k$ son constantes) con las condiciones iniciales dadas (o arbitarias): $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$, ..., $x(k-1) = x_{k-1}$. Se supone que el segundo miembro de la ecuación (5), que es la función reticular $\varphi(n)$, es original.

Poniendo $x(n) \risingdotseq X^*(q)$ y empleando la fórmula de adelanto (propiedad 3, b)) formamos la ecuación operacional (es lineal respecto a $X^*(q)$) y determinamos a partir de ésta $X^*(q)$. Luego, por uno de los procedimientos expuestos en el p. 1, mediante la representación hallamos la solución buscada $x(n)$.

Si la ecuación inicial fue dada no mediante los valores sucesivos de la función incógnita, sino mediante sus diferencias finitas, es decir, tiene la forma

$$b_0 \Delta^k x(n) + b_1 \Delta^{k-1} x(n) + \ldots + b_k x(n) = \varphi(n), \tag{6}$$

entonces a consecuencia de que las fórmulas para determinar las representaciones de las diferencias finitas de las funciones reticulares (p. 1, propiedad 6) son voluminosas, es conveniente transformar previamente esta ecuación a la forma (5) con ayuda de las fórmulas conocidas que enlacen las diferencias finitas de la función con sus valores consecutivos:

$$\Delta^r x(n) = x(n+r) - C_r^1 x(n+r-1) + \\ + C_r^2 x(n+r-2) + \ldots + (-1)^r x(n). \tag{7}$$

De modo análogo se resuelven los sistemas de ecuaciones en diferencias.

EJEMPLO 7. Resuélvase la ecuación $x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0$, $x_0=1$, $x_1=2$.

◀ Ponemos $x_n \doteqdot X^*(q)$. Por la fórmula de adelanto hallamos:

$$x_{n+1} \doteqdot e^q\,(X^*(q)-x_0)=e^q\,(X^*(q)-1)=e^qX^*(q)-e^q,$$
$$x_{n+2} \doteqdot e^{2q}\,(X^*(q)-x_0-x_1e^{-q})=e^{2q}\,(X^*(q)-1-2e^{-q})=$$
$$=e^{2q}X^*(q)-e^{2q}-2e^q.$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación inicial llegamos a la ecuación operacional

$$(e^{2q}-e^q+1)\,X^*(q)=e^{2q}+e^q.$$

De este modo,

$$X^*(q)=\frac{e^{2q}+e^q}{e^{2q}-e^q+1}.$$

Ya que $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces anotemos $X^*(q)$ en la forma siguiente

$$X^*(q)=\frac{e^q\left(e^q-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\,e^q}{e^{2q}-2e^q\cdot\frac{1}{2}+1}=\frac{e^q\left(e^q-\cos\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\,e^q\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{3}+1}.$$

De aquí, por las fórmulas 10 y 11 de la tabla de representaciones del p. 1, hallamos

$$x_n=\cos\frac{n\pi}{3}+\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}=2\operatorname{sen}\frac{2n+1}{6}\,\pi.\ ▶$$

OBSERVACIÓN. Es imposible anotar la respuesta en la forma $x_n=2\cos\frac{n-1}{3}\,\pi$, ya que en este caso obtendremos $x_0=0\neq 1$ (por la condición de que la función reticular respecto al argumento negativo es igual a cero).

EJEMPLO 8. Resuélvase la ecuación $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=3^n$ para las condiciones iniciales arbitrarias x_0, x_1.

◀ Poniendo $x_n \doteqdot X^*(q)$ y valiéndose de las representaciones dadas en la resolución del ejemplo 1

$$x_{n+1} \doteqdot e^qX^*(q)-x_0e^q,\quad x_{n+2} \doteqdot e^{2q}X^*(q)-x_0e^{2q}-x_1e^q$$

llegamos a la ecuación operacional

$$(e^{2q}-4e^q+4)\,X^*(q)-x_0e^{2q}-(x_1-4x_0)\,e^q=\frac{e^q}{e^q-3}$$

$\left(\text{puesto que por la fórmula 3 de la tabla del p. 1 } 3^n \doteqdot \frac{e^q}{e^q-3}\right)$.

De aquí hallamos

$$X^*(q)=\frac{x_0e^{2q}}{(e^q-2)^2}+(x_1-4x_0)\,\frac{e^q}{(e^q-2)^2}+\frac{e^q}{(e^q-3)\,(e^q-2)^2}.$$

Descomponiendo la fracción $\frac{1}{(e^q-3)\,(e^q-2)^2}$ en fracciones simples tenemos

$$X^*(q)=x_0\frac{e^{2q}}{(e^q-2)^2}+(x_1-4x_0-1)\frac{e^q}{(e^q-2)^2}-\frac{e^q}{e^q-2}+\frac{e^q}{e^q-3}.$$

Pero

$$\frac{e^q}{e^q-3}\risingdotseq 3^n,\qquad \frac{e^q}{e^q-2}\risingdotseq 2^n,$$

$$\frac{2e^q}{(e^q-2)^2}\risingdotseq n\cdot 2^n,\qquad \frac{2e^{2q}}{(e^q-2)^2}\risingdotseq (n+1)\,2^{n+1}$$

(la última relación se deduce de la anterior por la fórmula de adelanto). Pasando de $X^*(q)$ al original, hallamos:

$$x_n=x_0\frac{n+1}{2}\,2^{n+1}+\frac{x_1-4x_0-1}{2}\,n\cdot 2^n-2^n+3^n=$$

$$=\frac{x_1-2x_0-1}{2}\,n\cdot 2^n+(x_0-1)\,2^n+3^n=(C_1+C_2n)\,2^n+3^n. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 9. Resuélvase el sistema de las ecuaciones en diferencias

$$x_{n+2}-y_n=0,$$
$$y_{n+2}+x_n=0$$

para las condiciones iniciales $x_0=y_0=1$, $x_1=\sqrt{2}$, $y_1=0$.

◀ Ponemos $x_n\risingdotseq X^*(q)$, $y_n\risingdotseq Y^*(q)$ y por la fórmula de adelanto tenemos:

$$x_{n+2}\risingdotseq e^{2q}(X^*(q)-x_0-x_1e^{-q})=e^{2q}X^*(q)-e^{2q}-\sqrt{2}e^q,$$
$$y_{n+2}\risingdotseq e^{2q}(Y^*(q)-y_0-y_1e^{-q})=e^{2q}Y^*(q)-e^{2q}.$$

Obtenemos el sistema de las ecuaciones operacionales

$$e^{2q}X^*(q)-Y^*(q)=e^{2q}+\sqrt{2}e^q,$$
$$e^{2q}Y^*(q)+X^*(q)=e^{2q}.$$

Como $e^{4q}+1=(e^{2q}+\sqrt{2}e^q+1)(e^{2q}-\sqrt{2}e^q+1)$, entonces la solución de este sistema se escribirá en la forma siguiente

$$X^*(q)=\frac{e^{4q}+\sqrt{2}\,e^{3q}+e^{2q}}{e^{4q}+1}=\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1},$$

$$Y^*(q)=\frac{e^{4q}-e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q}{e^{4q}+1}=\frac{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1}.$$

Empleando la fórmula de adelanto tenemos:

$$\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1}=\sqrt{2}\,\frac{e^q\cdot e^q\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1}\risingdotseq\sqrt{2}\operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1}=\frac{e^q\left(e^q-\cos\frac{\pi}{4}\right)-e^q\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\cos\frac{n\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}=\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Por consiguiente,

$$x_n = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{4}, \quad y_n = \sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}. \blacktriangleright$$

Resuélvanse las siguientes ecuaciones lineales en diferencias:

6.16. $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 10x_n = 0$; $x_0 = 3$, $x_1 = -1$.

6.17. $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$; $x_0 = 1$, $x_1 = -1$.

6.18. $x_{n+2} - \sqrt{3}\,x_{n+1} + x_n = 0$; $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.19. $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$; las condiciones iniciales son arbitrarias.

6.20. $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 2^n$; $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

6.21. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2\cdot 4^n$; las condiciones iniciales son arbitrarias.

Resuélvanse los sistemas de las ecuaciones lineales en diferencias:

6.22. $x_{n+1} - x_n + y_n = 3^n$,
$y_{n+1} + 2x_n = -3^n$; $\quad x_0 = 3$, $y_0 = 0$.

6.23. $5x_{n+1} - 12x_n - y_n = 0$;
$5y_{n+1} - 6x_n - 13y_n = 0$;

las condiciones iniciales son arbitrarias.

RESPUESTAS

1.1. $\frac{1}{p}$. **1.2.** $\frac{1}{p-\alpha}$. **1.3.** $\frac{6}{(p^2-1)(p^2-9)}$. **1.4.** $\frac{p^2+2}{p^4+4}$. **1.5.** $\frac{2}{(p^2+1)^2}$, $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$. **1.6.** $\frac{p(p^2+3)}{(p^2+1)^2}$, $\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$. **1.7.** $\frac{2}{(p+1)(p^2+2p+5)}$, $\frac{2p}{(p+1)(p^2+2p+5)}$. **1.8.** $\frac{p^2}{p^4+4}$, $\frac{p^3}{p^4+4}$. **1.9.** $-\frac{1}{2p}\ln\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$. **1.10.** $\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$. **1.11.** $\frac{1}{2p}\times \ln\frac{p+1}{p-1}$. **1.12.** $\frac{1}{2p}\ln\frac{p^2+\alpha^2}{p^2+\beta^2}$. **1.13.** $\frac{1}{p}\ln\frac{p-\alpha}{p-\beta}$. **1.14.** $\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$, $\frac{\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$, $\frac{\beta e^{\alpha t}-\alpha e^{\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}+\frac{1}{\alpha\beta}$. **1.15.** $\frac{t}{2\beta}\,\text{sen}\,\beta t$, $\frac{1}{2}\left(t\cos\beta t+\frac{1}{\beta}\,\text{sen}\,\beta t\right)$, $\frac{1}{2\beta^3}(\text{sen}\,\beta t-\beta t\cos\beta t)$. **1.16.** $\frac{\text{ch}\,\alpha t-\cos\beta t}{\alpha^2+\beta^2}$,

$\frac{\alpha \operatorname{sh}\alpha t+\beta \operatorname{sen}\beta t}{\alpha^2+\beta^2}$, $\frac{\beta \operatorname{sh}\alpha t-\alpha \operatorname{sen}\beta t}{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}$. **1.17.** $\frac{e^{-\alpha t}(1-\cos\beta t)}{\beta^2}$,
$\frac{e^{-\alpha t}(\beta \operatorname{sen}\beta t-\alpha(1-\cos\beta t))}{\beta^2}$, $\frac{1}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha\beta^2}+$
$+\frac{e^{-\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta \operatorname{sen}\beta t)}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}$. **1.18.** $\frac{1}{5}(\operatorname{sen} t-2\cos t)+\frac{1}{5}e^{-t}\times$
$\times(\operatorname{sen} t+2\cos t)$, $\frac{1}{5}(\cos t+2\operatorname{sen} t)-\frac{1}{5}e^{-t}(3\operatorname{sen} t+\cos t)$, $\frac{1}{2}-$
$-\frac{1}{5}(\cos t+2\operatorname{sen} t)+\frac{1}{10}e^{-t}(\operatorname{sen} t-3\cos t)$. **1.19.** $\frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})$.
1.20. $\frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})e^{-pT}$. **1.21.** $\frac{h}{\tau p^2}(1-e^{-p\tau}-e^{-2p\tau}+e^{-3p\tau})$.
1.22. $\frac{1}{p^2+1}\left(1-e^{-\frac{p\pi}{2}}\right)\left(1-pe^{-\frac{p\pi}{2}}\right)$. **1.23.** $h\left(\frac{1}{p}-\frac{e^{-p}}{p(p-1)}\right)$.
1.24. $\frac{1}{p^2+1}+\frac{2p^2e^{-p\pi}}{p^4-1}$. **1.25.** ◀ La función $f_0(t)$ puede anotarse en la forma $f_0(t)=(1-\eta(t-l))f(t)=f(t)-\eta(t-l)f(t-l)$ (ya que $f(t)=f(t-l)$ para $t>l$ en virtud de la periodicidad). De aquí
$F_0(p)=F(p)-e^{-pl}F(p)$, o $F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pl}}$. ▶ **1.26.** $\frac{1-e^{-p\tau}}{p(1-e^{-pT})}$.
1.27. $\frac{\beta \operatorname{cth}\frac{p\pi}{2\beta}}{p^2+\beta^2}$. ● $f_0(t)=\left(1-\eta\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)\right)\operatorname{sen}\beta t=\operatorname{sen}\beta t-$
$-\eta\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)\operatorname{sen}\left(\beta\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)+\pi\right)=\operatorname{sen}\beta t+\eta\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)\operatorname{sen}\beta\times$
$\times\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)$. **1.28.** $\frac{1+e^{-p\pi}}{(p^2+1)(1-e^{-pT})}$. **1.29.** $\frac{h}{p}\operatorname{th}\frac{cp}{2}$. **1.30.**
$\frac{h}{cp^2}-\frac{he^{-pc}}{p(1-e^{-pc})}$. **1.31.** $\frac{h}{cp^2}\operatorname{th}\frac{cp}{2}-\frac{2h}{p(1-e^{cp})}$. **1.32.**
$\frac{p+\beta e^{-\frac{p\pi}{2\beta}}}{(p^2+\beta^2)\left(1-e^{-\frac{p\pi}{2\beta}}\right)}$. **1.33.** $f(t)=\frac{1}{2}\eta(t-2)(t-2)^2e^{-(t-2)}$, es
decir, $f(t)=\begin{cases}0 & \text{para } t<2,\\ \frac{1}{2}(t-2)^2e^{-(t-2)} & \text{para } t\geqslant 2.\end{cases}$ **1.34.** $f(t)=e^{2t}+\eta\times$
$\times(t-4)+\eta(t-4)\operatorname{sen}3(t-4)$, es decir, $f(t)=$

$$=\begin{cases} e^{2t} & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ e^{2t}+1 & \text{para } 1 \leqslant t < 4, \\ e^{2t}+1 \operatorname{sen} 3(t-4) & \text{para } \quad t \geqslant 4. \end{cases}$$

1.35. $f(t)=\cos 2t-2\eta(t-1)\operatorname{ch} 2(t-1)+\frac{1}{4}\eta(t-3)\operatorname{sh} 4(t-3)$, es decir, $f(t)=$

$$=\begin{cases} \cos 2t & \text{para } 0 \leqslant t < 1, \\ \cos 2t-2\operatorname{ch} 2(t-1) & \text{para } 1 \leqslant t < 3, \\ \cos 2t-2\operatorname{ch} 2(t-1)+\frac{1}{4}\operatorname{sh} 4(t-3) & \text{para } \quad t \geqslant 3. \end{cases}$$

1.36. $\frac{1}{(p-\alpha)^{\mu+1}}$. **1.37.** $\frac{1}{(p-\alpha)^{\mu+1}}\left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}-\ln(p-\alpha)\right)$.

1.38. $-\frac{\gamma+\ln(p-\alpha)}{p-\alpha}$ (γ es la constante de Euler). **1.39.** $\frac{1}{2}\times$ $\times\frac{(p+\beta i)^{\mu+1}+(p-\beta i)^{\mu+1}}{(p^2+\beta^2)^{\mu+1}}$. **1.40.** $\frac{1}{2i}\frac{(p+\beta i)^{\mu+1}-(p-\beta i)^{\mu+1}}{(p^2+\beta^2)^{\mu+1}}$.

1.41. $-\frac{\gamma p+\frac{p}{2}\ln(p^2+\beta^2)+\beta\operatorname{arctg}\frac{\beta}{p}}{p^2+\beta^2}$. **1.42.** $\frac{p\operatorname{arctg}\frac{\beta}{p}-\beta\gamma-\frac{\beta}{2}\ln(p^2+\beta^2)}{p^2+\beta^2}$. **1.43.** $\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-ap}$. **2.1.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{((2n)!)^2}$. **2.2.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!\,(2n+1)!}$. **2.3.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\frac{t^n}{n!\,(2n+1)}$. **2.4.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}=I_0(t)$. **2.5.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}=\int_0^t\frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}d\tau$. **2.6.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!\,(2n)!}$. **2.7.** $e^tI_0\times$ $\times(2\sqrt{t})$. ● Aplíquese el teorema de desplazamiento al original obtenido en el ejemplo 1 del § 2. **2.8.** No se puede sólo para las funciones de los problemas 2.4 y 2.5 (para los puntos singulares de estas funciones no tiene sentido la noción de residuo). **2.9.** $e^{-2t}(\cos t-2\operatorname{sen} t)$. **2.10.** $\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\operatorname{sen} 2t$.

2.11. $\sum_{k=1}^{n}e^{p_kt}$. **2.12.** $\frac{t}{8}(\operatorname{ch} t-\cos t)-\frac{3}{8}(\operatorname{sh} t-\operatorname{sen} t)$. **2.13.** $\frac{1}{10}t\cos t-\frac{7}{50}\operatorname{sen} t+\frac{1}{50}\operatorname{sh} 2t$. **2.14.** $\frac{1}{8}t(\operatorname{sh} t-\operatorname{sen} t)$.

2.15. $\frac{1}{3}\operatorname{ch} t+\frac{2}{3}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$. 2.16. $\frac{1}{8}t^2\cos t+\frac{3}{8}t\operatorname{sen} t$.
2.17. $\frac{1}{2}(e^{3t}-e^t)$. 2.18. $t-2\operatorname{sh} t+t\operatorname{ch} t$. 2.19. $\frac{1}{3}(\operatorname{ch} 2t-\operatorname{ch} t)$.
2.20. $\frac{1}{10}(\operatorname{ch} t+\cos t)-\frac{1}{5}\operatorname{ch} t\cos t$.

3.1. $x(t)=C_1\cos 3t+C_2\operatorname{sen} 3t+\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3t$. 3.2. $x(t)=\left(C_1+\right.$ $\left.+C_2t+\frac{t^2}{2}\right)e^{2t}$. 3.3. $x(t)=C_1+\left(C_2-\frac{t^2+t}{4}\right)e^{-2t}$. 3.4. $x(t)=$ $=\left(C_1+\frac{t}{3}\right)e^t+C_2e^{-2t}$. 3.5. $x(t)=C_1+C_2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t-\operatorname{sen} t)$.
3.6. $x(t)=e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{t\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+e^{-t}$. 3.7. $x(t)=$ $=\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$. 3.8. $x(t)=\frac{2}{9}(e^{-3t}-1)-\frac{t}{3}e^{-3t}$. 3.9. $x(t)=$ $=\frac{2}{5}(1-e^t)\cos t+\frac{1}{5}(1+6e^t)\operatorname{sen} t$. 3.10. $x(t)=\cos 2t-\frac{7}{8}\operatorname{sen} 2t-$ $-\frac{t}{4}\cos 2t$. 3.11. $x(t)=\frac{25}{24}\operatorname{sh} 3t-\operatorname{ch} 3t-\frac{1}{8}\operatorname{sh} t$. 3.12. $x(t)=3+$ $+t+(t-2)e^t$. 3.13. $x(t)=\frac{t}{4}\operatorname{ch} t-\frac{1}{4}\operatorname{sen} t$. 3.14. $x(t)=\frac{t^4}{24}e^{-t}$.
3.15. $x(t)=1-e^{-t}-\eta(t-2)(1-e^{-(t-2)})$. 3.16. $x(t)=\frac{t}{2}\operatorname{sen} t+$ $+\frac{1}{2}\eta(t-\pi)(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi)$. 3.17. $x(t)=\operatorname{ch} t-1-\frac{1}{e}\eta(t-1)\times$ $\times(\operatorname{ch}(t-1)-1)$. 3.18. $x(t)=2\left(\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}-2\eta(t-1)\operatorname{sen}^2\frac{t-1}{2}+\right.$ $\left.+\eta(t-2)\operatorname{sen}^2\frac{t-2}{2}\right)$. 3.19. $x(t)=1-e^{-t}-2\eta(t-1)(1-e^{-(t-1)})+$ $+\eta(t-2)(1-e^{-(t-2)})$. ● Para construir la ecuación operacional empléese el teorema de integración del original. 3.20. ◀ A la ecuación $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=1$ para las condiciones iniciales nulas corresponde la ecuación operacional $L(p)X_1(p)=\frac{1}{p}$, donde $X_1(p)\doteqdot x_1(t)$ y $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$ es un polinomio característico de la ecuación. De aquí $L(p)=\frac{1}{pX_1(p)}$.
A la ecuación $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$ para las condiciones iniciales nulas corresponde la ecuación operacional $L(p)X(p)=F(p)$, donde $X(p)\doteqdot x(t)$ y $F(p)\doteqdot f(t)$. De aquí $X(p)=$

$=\frac{F(p)}{L(p)}=pX_1(p)F(p)$. Con ayuda de la integral de Duhamele (véase el § 1, propiedad 11), obtenemos $x(t)=x_1(0)f(t)+\int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)\,d\tau$ (ya que $x_1(0)=0$) o $x(t)=f(0)x_1(t)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)\,d\tau$. ▶ 3.21. $x(t)=\frac{1}{3}(e^t-1)-\frac{1}{9}e^t+\frac{1}{9}e^t\ln\frac{e^t+3}{4}$. 3.22. $x(t)=\frac{1}{2}(e^t-1-te^t)+\operatorname{sh}t\ln\frac{1+e^t}{2}$. 3.23. $x(t)=e^t-1-(t+\ln 2)(e^t+1)+(e^t+1)\ln(e^t+1)$. 3.24. $x(t)=\operatorname{sen}t\left(t-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right)\right)+\cos t\ln\frac{2+\cos t}{3}$. 3.25. $x(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)^2}\operatorname{sen}\tau\,d\tau$ (esta integral no se expresa mediante las funciones elementales). 3.26. $x(t)=C_1+C_2\operatorname{sen}t+C_3\cos t$, $y(t)=C_4+C_3\operatorname{sen}t-C_2\cos t+\frac{t^2}{2}$. 3.27. $x=C_1+C_2\operatorname{sh}t+C_3\operatorname{ch}t$, $y=C_4-C_3\operatorname{sh}t-C_2\operatorname{ch}t+\operatorname{ch}t+\cos t$. 3.28. $x(t)=e^t$, $y(t)=-e^t$. 3.29. $x(t)=t\cos t$, $y(t)=-t\operatorname{sen}t$. 3.30. $x(t)=\operatorname{sen}t-\cos t$, $y(t)=\operatorname{sen}t+\cos t$. 3.31. $x(t)=\operatorname{sen}t+\operatorname{sh}t$, $y(t)=\cos t+\operatorname{ch}t$. 3.32. $x(t)=1+\frac{t^2}{2}$, $y(t)=t-e^t$. 3.33. $x(t)=-\operatorname{sen}t$, $y(t)=-\cos t$, $z(t)=\operatorname{sen}t$. 3.34. $x(t)=(1+t-\operatorname{sen}t-\cos t)-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\eta(t-\pi)(-1+(t-\pi)+\cos(t-\pi)-\operatorname{sen}(t-\pi))$,

$y(t)=(1-t+\operatorname{sen}t-\cos t)-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\eta(t-\pi)\times\times(1+(t-\pi)-\operatorname{sen}(t-\pi)-\cos(t-\pi))$. 3.35. $x(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}t+\cos t-2)-\eta(t-\pi)(\operatorname{ch}(t-\pi)+\cos(t-\pi)-2)+\frac{1}{2}\eta(t-2\pi)(\operatorname{ch}(t-2\pi)+\cos(t-2\pi)-2)$, $y(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}t-\cos t)-\eta(t-\pi)(\operatorname{ch}(t-\pi)-\cos(t-\pi))+\frac{1}{2}\eta(t-2\pi)(\operatorname{ch}(t-2\pi)-\cos(t-2\pi))$. 3.36. Si $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=n^2>0$, entonces $i(t)=\frac{E_1}{Ln}e^{-kt}\operatorname{sen}nt+\frac{E_2-E_1}{L}\eta(t-T)\times$

$\times e^{-k(t-T)}$ sen $n(t-T)$; si $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=0$, entonces $i(t)=\frac{E_1}{L}te^{-kt}+$ $+\frac{E_2-E_1}{L}\eta(t-T)(t-T)e^{-k(t-T)}$; si $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=-n^2<0$, entonces $i(t)=\frac{E_1}{Ln}e^{-kt}$ sh $nt+\frac{E_2-E_1}{Ln}\eta(t-T)e^{-k(t-T)}$ sh $n(t-T)$; $k=$ $=\frac{R}{2L}$. **3.37.** Si $M\neq L$, entonces $i_{1,2}(t)=\pm\frac{E_0}{2(L-M)\sqrt{n_1}}\times$ $\times e^{-k_1t}$ sen $\sqrt{n_1}\,t+\frac{E_0}{2(L+M)\sqrt{n_2}}e^{-k_2t}$ sen $\sqrt{n_2}\,t$, donde $\frac{R}{2(L-M)}=k_1$, $\frac{R}{2(L+M)}=k_2$, $\frac{1}{(L-M)C}-\frac{R^2}{4(L-M)^2}=n_1$, $\frac{1}{(L+M)C}-\frac{R^2}{4(L+M)^2}=n_2$ (cuando $n_1n_2>0$ el signo más delante del primer sumando para i_1, es signo menos para i_2, para $n_1n_2<0$ hay que sustituir $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{n}\,t}{\sqrt{n}}$ por $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{|n|}\,t}{\sqrt{|n|}}$, cuando $n_1n_2=0$ esta relación debe ser sustituida por su límite para $n\to 0$, es decir, por t); si $M=L$ (conexión "ideal"), entonces $i_{1,2}(t)=\pm\frac{E_0}{2R}e^{-k_1t}+$ $+\frac{E_0}{4L\sqrt{n}}e^{-k_2t}$ sen $\sqrt{n}\,t$, donde $\frac{1}{RC}=k_1$, $\frac{R}{4L}=k_2$, $\frac{1}{2LC}-$ $-\frac{R^2}{16L^2}=n$ (para $n>0$ la regla de signos es la misma que en el caso de $M\neq L$ para $n<0$ se debe sustituir $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{n}\,t}{\sqrt{n}}$ por $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{|n|}\,t}{\sqrt{|n|}}$, para $n=0$ esta relación se sustituye por t).

3.38. $z(x, y)=y\cos x+x$ sen x. **3.39.** $z(x, y)=\frac{1}{a}\int\limits_0^x \operatorname{sh} a(x-t)f(t)\,dt$.

4.1. $x(t)=\frac{v_0}{\omega}$ sen ωt. **4.2.** $x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}$ sen $\omega t+$ $+\frac{v_1}{\omega}\eta(t-\tau)$ sen $\omega(t-\tau)+h\eta(t-\tau_1)\cos\omega(t-\tau_1)$. **4.3.** $x(t)=$ $=\frac{A}{2\omega^2}$ sen $\omega t-\frac{A}{2\omega}t\cos\omega t+\frac{B\cos\omega t}{\omega}\eta(t-\tau)$ sen $\omega(t-\tau)$. **4.4.** $x(t)=$ $=\frac{v_0}{\omega}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)$. ◀ Hallemos la representación

$\delta(\operatorname{sen}\omega t)$. Ya que $\operatorname{sen}\omega t$ para $t \geqslant 0$ se reduce a cero en los puntos $t=\frac{k\pi}{\omega}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$, además todas las raíces son simples, entonces según la propiedad 5 de la función impulsiva tenemos: $\delta_1(\operatorname{sen}\omega t)=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)}{|\omega\cos k\pi|}=\frac{1}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}\delta\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right).$$ Por eso $v_0\delta(\operatorname{sen}\omega t)\doteqdot$

$$=\frac{v_0}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{pk\pi}{\omega}}.$$ De aquí, la ecuación operacional para la ecuación $x''=v_0\delta(\operatorname{sen}\omega t)$ cuando las condiciones iniciales son nulas será

$$p^2X(p)=\frac{v_0}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{pk\pi}{\omega}},\quad \text{o}\quad X(p)=\frac{v_0}{\omega}\cdot\frac{1}{p^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{pk\pi}{\omega}},$$ de donde

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sum_{k=0}^{\infty}\eta\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right).$$ ▶

5.1. $2\operatorname{sen}t$. **5.2.** $\operatorname{ch}2t-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t$. **5.3.** e^t. **5.4.** $\operatorname{ch}t$. **5.5.** $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

5.6. $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\beta)}\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. **5.7.** $\ln\frac{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}{\alpha}$. **5.8.** $\frac{1}{\alpha^{\mu+1}}\times$ $\times\left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}-\ln\alpha\right)$. ● Empléese la solución del problema 1.37.

5.9. $\frac{\pi}{2}e^{-\alpha t}$. **5.10.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$. **5.11.** $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\beta}}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$.

5.12. $\sqrt{2\pi}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})$. **5.13.** $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$ ● En la integral prefijada póngase previamente $x^2=u$. **5.14.** 2. ◀ Tenemos $\frac{p}{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)^2}\doteqdot t\operatorname{sh}\frac{t}{2}$; $k=1$. Por eso, según la fórmula (4) $S=$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}t\operatorname{sh}\frac{t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t}{2}}\,dt=-\left(te^{-\frac{t}{2}}+2e^{-\frac{t}{2}}\right)\Big|_0^{+\infty}=2,$$

▶ **5.15.** $\frac{3}{4}\pi$. ◀ $\operatorname{arctg}\frac{9}{n^2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n-1}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$. Pero $\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\doteqdot\frac{\operatorname{sen}t}{t}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{p+1}\doteqdot e^{-t}\frac{\operatorname{sen}t}{t}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{p-1}\doteqdot e^{t}\frac{\operatorname{sen}t}{t}$

(según el teorema de desplazamiento). Por consiguiente, $\operatorname{arctg}\frac{2}{p^2} \risingdotseq$ $\risingdotseq f(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t$; $k=1$. Por eso por la fórmula (4) $S=$ $=\int_0^t \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t\,dt=\int_0^t \frac{1+e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t\,dt$. Pero $\frac{1+e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t \risingdotseq$ $\risingdotseq \operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{1}{p+1}=F(p)$; $F(0)=\operatorname{arctg}(+\infty)+\operatorname{arctg} 1=\frac{3}{4}\pi$.

Por consiguiente, según la fórmula (1) $\int_0^{+\infty}\frac{1+e^{-t}}{t}\operatorname{sen} t\,dt=\frac{3}{4}\pi$.

▶ 5.16. $\frac{1}{2}$. ● $\frac{2p+1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}=\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+2p+2}$. 5.17. $\frac{\pi}{2}$.

● $\operatorname{arctg}\frac{3}{n^2+3n+1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+3}$; véase la solución del problema 5.15. 5.18. $\operatorname{arctg} x$. ● Póngase $\Phi(t, x)=\frac{x}{1+x^2t}$.

5.19. $\operatorname{arcsen} x$. ● Póngase $\Phi(t, x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2t}}$. 5.20. $\frac{\pi-x}{2}$.

◀ Empleamos la función generadora $\Phi(t, x)=\frac{t\operatorname{sen} x}{1-2t\cos x+t^2}=$ $=\sum_{n=1}^{\infty} t^n\operatorname{sen} nx$. Tenemos $\Phi(e^{-t}, x)=\frac{e^{-t}\operatorname{sen} x}{1-2e^{-t}\cos x-e^{-2t}}$; $\frac{1}{p}\risingdotseq$ $\risingdotseq \eta(t)=f(t)$, $\eta(t)=1$ para $t\geqslant 0$. Por la fórmula (5) hallamos

$$T(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\operatorname{sen} x\,dt}{1-2e^{-t}\cos x+e^{-2t}}=\operatorname{sen} x\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{(e^{-t}-\cos x)^2+\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=-\operatorname{arctg}\frac{e^{-t}-\cos x}{\operatorname{sen} x}\Big|_0^{+\infty}=-\operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} x)+\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

y, puesto que $-\operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)=\frac{\pi}{2}-x$, $\operatorname{arctg}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}=$ $=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}$, entonces $T(x)=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x}{2}=\frac{\pi-x}{2}$. ▶

5.21. $-\ln\left(2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)$. ● Empléese el desarrollo $\frac{1+t\cos x}{1+2t\cos x+t^2}=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\cos nx$, poniendo $\Phi(t, x)=1-\frac{1+t\cos x}{1+2t\cos x+t^2}$.

6.1. $\frac{e^q(e^q-e^{\alpha}\cos\beta)}{e^{2q}-2e^{q+\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}}$. 6.2. $\frac{e^q(e^q-a\cos\beta)}{e^{2q}-2ae^q\cos\beta+a^2}$.

6.3. $\dfrac{e^{q+\alpha}(e^q+e^\alpha)}{(e^q-e^\alpha)^3}$. 6.4. $\dfrac{ae^q(e^q+a)}{(e^q-a)^3}$. 6.5. $\dfrac{1}{(e^q-1)^{k+1}}$. ● Según la propiedad 3, a). 6.6. $\dfrac{(n+m)^{[k]}}{k!} \doteq \dfrac{e^{(m+1)q}}{(e^q-1)^{k+1}}$ para $m<k$;

$\dfrac{e^{(m+1)q}}{(e^q-1)^{k+1}}-\sum\limits_{r=k}^{m-1} C_r^k e^{(m-r)q}$ para $m\geqslant k$. ● Según la propiedad 3, b).

6.7. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{e^q-\cos\beta}$. ◀ Aplicamos la fórmula de integración de la representación (propiedad 5,b)): $\dfrac{\operatorname{sen}\beta n}{n}\doteq\displaystyle\int_q^\infty \frac{e^q\operatorname{sen}\beta\,dq}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}=$

$$=\int_q^\infty \frac{e^q\operatorname{sen}\beta\,dq}{q\,(e^q-\cos\beta)^2+\operatorname{sen}^2\beta}=\operatorname{arctg}\frac{e^q-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\Big|_q^\infty=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\beta}{e^q-\cos\beta}$$

$\left(\text{ya que}\operatorname{arctg}\dfrac{e^q-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\Big|_q^\infty=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{e^q-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}=\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{e^q-\cos\beta}\right)$. ▶

6.8. $f(n)=-\dfrac{1}{3}1^n+\dfrac{1}{4}2^n+\dfrac{1}{12}(-2)^n=\dfrac{2^{n-2}(3+(-1)^{n-2})-1^{n-2}}{3}$.

6.9. $f(n)=\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\cos\dfrac{n+1}{4}\pi$. 6.10. $f(n)=(\sqrt{2})^{n+1}\cos\dfrac{3n+1}{4}\pi$.

● Empléense las fórmulas para las representaciones de las funciones $a^n\operatorname{sen}\beta n$ y $a^n\cos\beta n$ (ejemplo 3 y problema 6.2). 6.11. $\dfrac{n^{[r+1]}}{(r+1)!}=C_n^{r+1}$.

6.12. $\dfrac{2}{5-4\cos\beta}(\operatorname{sen}\beta-2^{n-1}\operatorname{sen}n\beta+2^n\operatorname{sen}(n-1)\beta$ para $n\geqslant 1$.

6.13. $\dfrac{n(n^4-1)}{30}$. ● Empléese la fórmula de multiplicación de las representaciones. 6.14. $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{t}{t^2-t\sqrt{3}+1}$. 6.15. $\dfrac{1-\frac{1+\sqrt{3}}{2}t}{1-t+t^2}$.

6.16. $x_n=\dfrac{1}{7}(5^{n+1}+(-2)^{n+1})$. 6.17. $x_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\dfrac{2(n+1)\pi}{3}$.

6.18. $x_n=\operatorname{sen}\dfrac{(n+1)\pi}{6}$. 6.19. $x_n=(2x_0-x_1)1^n+(x_1-x_0)2^n=$ $=C_1+C_2\cdot 2^n$. 6.20. $x_n=2^n-(n+1)$. 6.21. $x_n=(x_1-2x_0-2)3^n+$ $+(1-x_1+3x_0)2^n+4^n=C_1\cdot 3^n+C_2\cdot 2^n+4^n$. 6.22. $x_n=(-1)^n+$ $+2^n+3^n$, $y_n=2(-1)^n-2^n-3^n$. 6.23. $x_n=\dfrac{3x_0-y_0}{5}\cdot 2^n+$ $+\dfrac{2x_0+y_0}{5}\cdot 3^n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 3^n$, $y_n=\dfrac{2y_0-6x_0}{5}\cdot 2^n+\dfrac{3y_0+6x_0}{5}\cdot 3^n=$ $=-C_1\cdot 2^{n+1}+C_2\cdot 3^{n+1}$.

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.