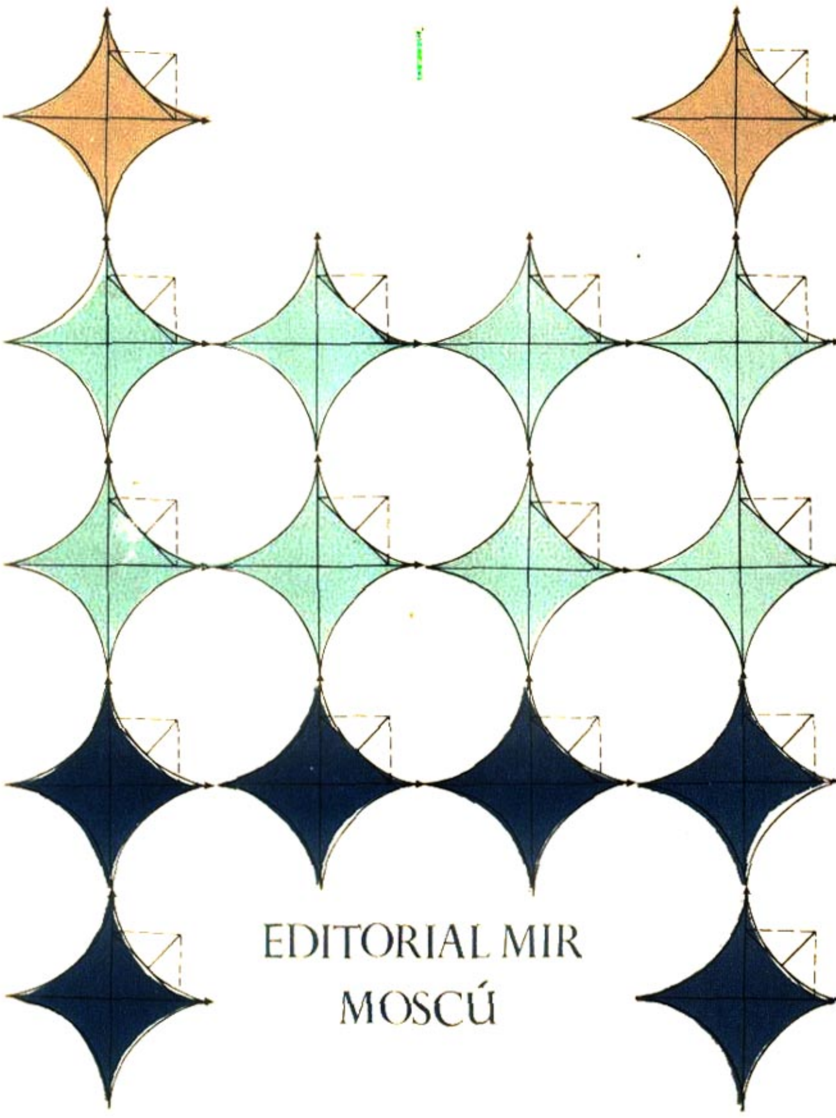
PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES



EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

В. БОЛГОВ, Б. ДЕМИДОВИЧ, В. ЕФИМЕНКО,
А. ЕФИМОВ, А. КАРАКУЛИН, С. КОГАН,
Г. ЛУНЦ, Е. ПОРШНЕВА, А. ПОСПЕЛОВ,
С. ФРОЛОВ, Р. ШОСТАК, А. ЯНПОЛЬСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Под редакцией
А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. BOLGOV, B. DEMIDÓVICH, V. EFIMENKO.
A. EFIMOV, A. KARAKULIN, S. KOGAN
G. LUNTS, E. PORSHNEVA, A. POSPELOV,
S. FROLOV, R. SHOSTAK
Y. A. YAMPOLSKI

PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

PARA LOS CENTROS
DE ENSEÑANZA
TÉCNICA SUPERIOR

ALGEBRA LINEAL Y BASES DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

REDACTORES
A. EFIMOV, B. DEMIDOVICH

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por el ingeniero
K. Medkov

Impreso en la URSS. 1983

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», I Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

На испанском языке

INDICE

PRÓLOGO

Es a B. P. Demidóvich a quien se debe la idea de crear un manual de «Problemas de las matemáticas superiores para los centros técnicos de enseñanza superior» que contenga problemas de todas las partes del curso matemático concernientes a las especialidades técnicas de ingeniería. No obstante, la muerte prematura del profesor Demidóvich le impidió realizar este trabajo. La versión de «Problemas» que se ofrece al lector fue preparada para la edición por un colectivo de autores que poseen una gran experiencia pedagógica en los centros de enseñanza técnica superior y es, precisamente, la encarnación de la idea de B. P. Demidóvich.

La estructura general del libro fue propuesta por A. V. Efimov, el redactor, y refleja el contenido del programa de matemáticas para las especialidades de ingeniería en los centros de enseñanza superior, calculado para 510 horas de estudio. Se ha tomado en consideración la experiencia del profesorado del Instituto de Técnica Electrónica de Moscú.

En el manual están incluidos los problemas y ejemplos de todas las partes del curso matemático para los centros técnicos de enseñanza superior, salvo la teoría de las probabilidades y algunas ramas especiales. Con el fin de reafirmar los conocimientos referentes al programa escolar se ha introducido, además, una serie de problemas que permiten repasar con una profundidad mayor las partes fundamentales del análisis y del álgebra vectorial que se estudian en los centros de enseñanza media.

Una de las peculiaridades principales del manual consiste en que la mayoría de los capítulos contiene problemas de cálculo, cuya resolución requiere el empleo de las máquinas calculadoras.

La primera parte del libro llamada «Algebra lineal y bases del análisis matemático» incluye aquellas partes de las matemáticas que, como regla, se estudian en el primer año. Entre ellos figuran el álgebra vectorial con elementos de geometría analítica, el álgebra lineal, como también el cálculo diferencial de las funciones de una variable y de varias variables y, además, el cálculo integral de las funciones de una sola variable.

El material citado se expone en los capítulos repartidos en párrafos y puntos. La enumeración de los problemas viene dada individualmente en cada capítulo por párrafos. Al final de cada capítulo se dan las respuestas a todos los problemas de cálculo, con la particularidad de que, los problemas marcados con un asterisco vienen acompañados, en las respuestas, de indicaciones para resolverlos; para los problemas marcados con dos asteriscos las respuestas contienen un modelo de su resolución.

Cada parte del libro está provista de una introducción breve que contiene, tanto los conocimientos teóricos indispensables (definiciones, fórmulas, teoremas), como un gran número de ejemplos resueltos detalladamente. El comienzo de la resolución de los ejemplos, como también de los problemas con dos asteriscos, se indica con el signo ◀ , y el fin, con el signo ▶. Las indicaciones para la resolución se distinguen mediante el signo ●.

El apéndice llamado «Descripción breve del lenguaje FORTRAN-IV» está escrito, a petición del redactor del libro, por el docente Tereschenko A. M.

El manuscrito del manual se discutió en las cátedras de matemáticas en los Institutos de Moscú de Ingeniería Física, de Acero y Aleaciones y de Energía. Como resultado surgió toda una serie de observaciones valiosas y consejos que contribuyeron a reforzar el carácter práctico del libro. El colectivo de autores agradece a los profesores Prilepko A. I., Trenoguin V. A. y Pojozhaev S. I., como también a todos los docentes de las cátedras, encabezadas por ellos, que tomaron parte en la discusión.

Una gratitud cordial se expresa a Lapenko L. B. y Fominá S. A., colaboradores de la cátedra de matemáticas superiores del Instituto de Técnica Electrónica de Moscú, por la ayuda que ellos prestaron en el proceso de preparación del manual para la edición.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS

§ 1. Números reales. Conjuntos. Lógica simbólica

1. Concepto de número real. Por el curso de la escuela secundaria sabemos que todo *número real* no negativo x se representa mediante una fracción decimal infinita

$$[x],\ x_1x_2, \ldots, \tag{1}$$

donde $[x]$ es el número entero mayor que no sobrepasa x y se denomina *parte entera* del número x, $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

En este caso, las fracciones en las cuales $x_n = 9$ para todo $n \geqslant n_0$ (n_0 es cierto número natural) se excluyen comúnmente de la consideración en virtud de las siguientes igualdades:

$$[x],\ 999 \ldots = [x] + 1,$$

$$[x],\ x_1x_2 \ldots x_{n_0-1}999 \ldots = [x],\ x_1x_2 \ldots$$
$$\ldots (x_{n_0-1} + 1)\ (n_0 > 1,\ x_{n_0-1} \neq 9).$$

Un número real x es *racional*, es decir, puede ser representado en forma de la razón $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ cuando, y sólo cuando, la fracción (1) es periódica. En el caso contrario el número x es *irracional*.

Se llama *valor absoluto* o *módulo* del número real x un número no negativo

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se supone que las reglas de comparación de los números reales, como también las operaciones aritméticas sobre los mismos se conocen por el curso de enseñanza secundaria.

1.1. Demuéstrese que el número

$$0{,}1010010001 \ldots 1\underbrace{0 \ldots 0}_{n}1 \ldots$$

es irracional. Escríbanse los primeros tres términos de cada una de las sucesiones de fracciones decimales finitas que aproximan el número citado por defecto y por exceso.

1.2. Represéntense en forma de fracciones propias racionales los números que siguen:

a) 1, (2); b) 3,00(3); c) 0,110(25).

1.3. Demuéstrese que el número lg 5 es irracional.

◀ Supongamos que lg 5 es un número racional, es decir,

$$\lg 5 = \frac{m}{n}; \quad m, n \ni \mathbb{Z}.$$

Entonces:

$$10^{\frac{m}{n}} = 5,$$
$$10^m = 5^n,$$
$$2^m, 5^m = 5^n.$$

Pero la última igualdad no es posible: el número 2 figura en la descomposición del primer miembro en factores primo y no interviene en la descomposición análoga para el segundo miembro, lo que contradice la unicidad de la descomposición de los números enteros en factores primo. Por esta razón, la suposición de partida no es cierta y, por tanto, el número lg 5 es irracional. ▶

Demuéstrese que los números que siguen son irracionales:

1.4. $\sqrt{3}$. **1.5.** $\sqrt[n]{p}$, p es un número primo, $n > 1$.

1.6. $2 + \sqrt{3}$. **1.7.** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

1.8. $\log_3 p$, p es un número primo.

1.9. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, si se sabe que π es irracional.

En los problemas 1.10—1.13 compárense los números.

1.10. $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ y $\sqrt{3} - 2$.

◀ Supongamos que se verifica la desigualdad

$$\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{3} - 2 \qquad (2$$

Entonces:

$$\sqrt{2} + 2 < \sqrt{5} + \sqrt{3},$$
$$6 + 4\sqrt{2} < 8 + 2\sqrt{15}$$
$$2\sqrt{2} < 1 + \sqrt{15},$$
$$8 < 16 + 2\sqrt{15}.$$

Puesto que la última igualdad se verifica, entonces, debido a la equivalencia de las transformaciones realizadas, es verídica también la desigualdad inicial (2). ▶

1.11. $\log_{1/2}\frac{1}{3}$ y $\log_{1/3}\frac{1}{2}$.

1.12. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}}$ y $\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$. **1.13.** $\log_{\log_2 2}\frac{1}{2}$ y 1.

Sin recurrir a las tablas, demuéstrense las siguientes desigualdades numéricas:

1.14. $\log_3 10+4\lg 3>4$. **1.15.** $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2$.

1.16. $\log_4 26>\log_6 17$.

1.17. Demuéstrese que el módulo de un número real posee las siguientes propiedades:

a) $|x|=\max\{x, -x\}$;

b) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$ y $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$;

c) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ y $|x-y|\geqslant||x|-|y||$ (*desigualdades triangulares*);

d) $\sqrt{x^2}=|x|$.

Resuélvanse las ecuaciones:

1.18. $|3x-4|=\frac{1}{2}$. **1.19.** $\sqrt{x^2}+x^3=0$.

1.20. $|-x^2+2x-3|=1$, **1.21.** $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|=1$.

1.22. $\sqrt{(x-2)^2}=-x+2$.

Resuélvanse las desigualdades:

1.23. $|x-2|\geqslant 1$. **1.24.** $|x^2-7x+12|>x^2-7x+12$.

1.25. $x^2+2\sqrt{(x+3)^2}-10\leqslant 0$.

1.26. $\frac{1}{|x-1|}<4-x$. **1.27.** $\sqrt{(x+1)^2}\leqslant -x-1$.

2. Conjuntos y operaciones sobre ellos. Por *conjunto* se entiende cualquier totalidad de objetos, llamados elementos del conjunto.

La notación $a\in A$ significa que el objeto a es un elemento del conjunto A (pertenece al conjunto A); en el caso contrario se escribe $a\notin A$. Un conjunto que no contiene ningún elemento, se denomina *vacío* y se designa por el símbolo ϕ. La notación $A\subset B$ (A está contenido en B) quiere decir que todo elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B; en este caso el conjunto A lleva el nombre de *subconjunto* del conjunto B. Los conjuntos A y B se llaman *iguales* ($A=B$), si $A\subset B$ y $B\subset A$.

Existen dos métodos principales para definir (escribir) los conjuntos.

a) El conjunto A se determina por enumeración directa de todos sus elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, es decir, se escribe en la forma

$$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

b) El conjunto A se determina como una totalidad de aquellos, y sólo de aquellos, elementos de cierto conjunto básico T, que poseen la propiedad común α. En este caso se emplea la designación

$$A = \{x \in T \mid \alpha(x)\},$$

donde la notación $\alpha(x)$ significa que el elemento x posee la propiedad α.

EJEMPLO 1. Descríbase por enumeración de elementos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x-3)(x^2-1) = 0 \quad \text{y} \quad x \geqslant 0\}.$$

◀ A es un conjunto de todas las raíces enteras no negativas de la ecuación $(x-3)(x^2-1) = 0$. Por consiguiente, $A = \{1, 3\}$. ▶

Se llama *unión* de los conjuntos A y B el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{ó} \quad x \in B\}.$$

Se llama *intersección* de los conjuntos A y B el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}.$$

Se llama *diferencia* de los conjuntos A y B el conjunto

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\}.$$

Si, en particular, A es un subconjunto de cierto conjunto universal T, entonces la diferencia $T \setminus A$ se designa por el símbolo $\overline{A}$ y se denomina *complemento del conjunto* A (hasta que se obtenga el conjunto T).

1.28. Establézcase cuál de las dos notaciones es cierta: a) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ó $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$; b) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ ó $\{1, 2\} \subset \{1, 2 \{1, 2\}\}$.

En los problemas 1.29—1.34 descríbanse los conjuntos dados por enumeración de todos sus elementos.

1.29. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$.

1.30. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} \leqslant 2$ y $x > 0$.

1.31. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x - 4 \leqslant 0\}$.

1.32. $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{4} \leqslant 2^x < 5\right\}$.

1.33. $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \log_{1/2} \frac{1}{x} < 2\right\}$.

1.34. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos^2 2x = 1$ y $0 < x \leqslant 2\pi\}$.

Expónganse en un plano de coordenadas los siguientes conjuntos:

1.35. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 2 = 0\}$.

1.36. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$.

1.37. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 1)(y + 2) = 0\}$.

1.38. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \sqrt{2x + 1}$ y $2x + 1 \geqslant 0\}$.

1.39. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > 2x + 1\}$.

1.40. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2^{x+1} = y^2 + 4$ y $2^{x-1} \leqslant y\}$.

1.41. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos 2x = \cos 2y\}$.

1.42. $\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x} > \frac{1}{y},\ x\neq 0,\ y\neq 0\right\}$.

1.43. Descríbanse por enumeración de todos los elementos los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $B \setminus A$, si

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 20 = 0\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 12 = 0\}.$$

La notación $m \mid n$, donde $m,\ n \in \mathbb{Z}$, significa que el número m es el divisor del número n. Descríbanse los siguientes conjuntos:

1.44. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8$ y $x \neq 1\}$. **1.45.** $\{x \in \mathbb{Z} \mid 8 \mid x\}$.

1.46. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 12\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8\}$.

1.47. $\{x \in \mathbb{N} \mid 12 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \mid x\}$.

1.48. Demuéstrese que:

a) la igualdad $A \cap B = B$ se verifica cuando, y sólo cuando, $B \subset A$;

b) la igualdad $A \cup B = B$ se verifica cuando, y sólo cuando, $A \subset B$.

1.49. Sean $A = (-1,\ 2]$ y $B = [1,\ 4)$. Hállense los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ y represéntense éstos en un eje numérico.

Considerando el segmento $T = [0,\ 1]$ como un conjunto universal, hállense y expónganse en un eje numérico los complementos de los siguientes conjuntos:

1.50. $\{0,\ 1\}$. **1.51.** $(1/4,\ 1/2)$. **1.52.** $(0,\ 1/2]$.

1.53. $\{1/4\} \cup [3/4,\ 1)$.

1.54. Demuéstrese que la operación de toma del complemento posee la propiedad de *reflexividad*:

$$\overline{(\overline{A})} = A,$$

y está ligada también con la relación de inclusión $\subset$ y las operaciones $\cup$ y $\cap$ mediante las siguientes *leyes de dualidad*:

$$\text{si } A \subset B, \text{ entonces } \overline{A} \supset \overline{B};$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{y} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

1.55. Demuéstrese que las operaciones $\cup$ y $\cap$ están entrelazadas por las *leyes distributivas*:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Haciendo uso de los resultados de los problemas 1.54 y 1.55, demuéstrense las siguientes igualdades:

1.56. $\overline{A \setminus B} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A}$.

◀ Puesto que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, entonces el primer miembro de la igualdad que se demuestra adquiere la forma

$$(\overline{A/B}) \cap (\overline{A \cap B}) = \overline{(A/B) \cup (A \cap B)} = \bar{A}. \ ▶$$

1.57. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$. **1.58.** $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \cup B$.

1.59. $A \cap (\overline{A \setminus B}) = A \cap B$.

Las operaciones $\cup$ y $\cap$ se generalizan de un modo natural para el caso de una familia arbitraria (finita o infinita) de conjuntos. Por ejemplo, sea dada una familia de conjuntos A_n, $n \in \mathbb{N}$. La *unión* de los conjuntos de esta familia se denota por el símbolo $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y se determina como un conjunto de todos aquellos elementos, cada uno de los cuales pertenece por lo menos a uno de los conjuntos A_n. La *intersección* $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ se determina como conjunto de todos aquellos elementos que pertenecen a cada uno de los conjuntos A_n.

Para las familias dadas de conjuntos A_n, $n \in \mathbb{N}$, hállense $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$:

1.60. $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leqslant x \leqslant n\}$.

1.61. $A_n = \{3n - 2, 3n - 1\}$.

1.62. $A_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$.

1.63. Sea A un conjunto de todos los puntos de un plano que forman los lados de cierto triángulo inscrito en una circunferencia dada. Descríbanse la unión y la intersección de todos los conjuntos de este tipo, si:

a) los triángulos son arbitrarios;

b) los triángulos son regulares;

c) los triángulos son rectangulares.

Un conjunto X se denomina *numerable*, si puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto mencionado y los del conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales.

EJEMPLO 2. Pruébese que el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los números enteros es numerable.

◀ Establezcamos una correspondencia biunívoca entre los elementos de este conjunto y los números naturales, ordenando, por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Z}$ del modo siguiente:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots,$$

y asignando, a continuación, a todo número entero su número de orden en dicha sucesión. ▶

Demuéstrese que son numerables los siguientes conjuntos:

1.64. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1.65. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{N}\}$.

1.66. $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}\}$

1.67. Demuéstrese que si el conjunto X es numerable y $A \subset X$ es su subconjunto infinito, entonces el conjunto A es también numerable.

Haciendo uso de este resultado, demuéstrese que el conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = k^2 - k + 1, \quad k \in \mathbb{N}\}$$

es numerable.

1.68. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos numerables. Demuéstrese que su unión $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es un conjunto numerable.

● Sea $X_n = x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,l}, \ldots\}$. En este caso los elementos del conjunto $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ pueden escribirse en forma de la tabla siguiente:

$$\begin{array}{l}
x_{1,1},\ x_{1,2},\ \ldots,\ x_{1,l},\ \ldots, \\
x_{2,1},\ x_{2,2},\ \ldots,\ x_{2,l},\ \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_{n,1},\ x_{n,2},\ \ldots,\ x_{n,l},\ \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

Con el fin de demostrar la numerabilidad del conjunto $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$, resulta suficiente ahora enumerar de uno u otro modo todos los elementos de esta tabla.

Utilizando el resultado del problema 1.68, demuéstrese que son numerables los siguientes conjuntos:

1.69. $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{m}{n}$ para ciertos $m, n \neq 0$ de $\mathbb{Z}\}$, es un conjunto de todos los números racionales.

1.70. Un conjunto de todos los puntos de un plano con las coordenadas racionales.

1.71. Un conjunto de todos los polinomios de coeficientes racionales.

3. Cotas superiores e inferiores. Sea X un conjunto arbitrario no vacío de números reales. El número $M = \max X$ se denomina *elemento mayor* (*maximal*) del conjunto X, si $M \in X$ y para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $x \leqslant M$. Análogamente se determina el concepto de *elemento menor* (*minimal*) $m = \min X$ del conjunto X.

El conjunto X se llama *acotado superiormente*, si existe un número real a de tal índole que $x \leqslant a$ para cualquier $x \in X$. Todo número que posee dicha propiedad lleva el nombre de *cota superior* del conjunto X. Para el conjunto dado X acotado superiormente, el conjunto de todas sus cotas superiores tiene un elemento menor, que se denomina *cota superior exacta* del conjunto X y se designa mediante el símbolo $\sup X$.

Análogamente se determinan los conceptos de conjunto *acotado inferiomente*, de *cota inferior* y de *cota inferior exacta* del conjunto X; esta última se designa mediante el símbolo $\inf X$.

El conjunto X se denomina *acotado*, si está acotado superior e inferiormente.

EJEMPLO 3. Hállense las cotas superior e inferior exactas del conjunto $[0, 1)$.

◀ Este conjunto no tiene elemento maximal, puesto que para todo $x \in [0, 1)$ se encontrará un $y \in [0, 1)$ tal que sea $y > x$. El conjunto de las cotas superiores para el semi-intervalo $[0, 1)$ es el conjunto $[1, \infty)$ cuyo elemento menor es igual a 1. Por ello

$$\sup [0, 1) = 1,$$

además $1 \notin [0, 1)$.

Por otra parte, el elemento menor para el conjunto en consideración $[0, 1)$ existe y es igual a 0. El conjunto de las cotas inferiores está representado por el semi-intervalo $(-\infty, 0]$ cuyo elemento mayor es igual a cero y constituye precisamente la cota inferior exacta del semi-intervalo $[0, 1)$. De este modo,

$$\min [0, 1) = \inf [0, 1) = 0,$$

con la particularidad de que $0 \in [0, 1)$. ▶

1.72. Demuéstrese que la definición de la cota superior exacta aducida anteriormente es equivalente a lo siguiente:

El número M es la cota superior exacta del conjunto X, si, y sólo si:

1) $x \leqslant M$ para cualquier $x \in X$;

2) para todo $\varepsilon > 0$ existe un elemento $x \in X$ tal que $x > M - \varepsilon$.

1.73. Sea $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

a) Indíquense los elementos menor y mayor de este conjunto, si existen.

b) ¿Cuáles son los conjuntos de las cotas superiores e inferiores para el conjunto X? Hállense $\sup X$ e $\inf X$.

Hállense, si existen, el $\max X$, $\min X$, $\sup X$ e $\inf X$ para los conjuntos siguientes:

1.74. $X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.75. $X = [-1, 1]$. **1.76.** $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x < 0\}$.

1.77. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. **1.78.** $X = \{x \in \mathrm{R} \mid x = \frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{N}$ y $m < n\}$.

1.79. Sea X un conjunto de todos los números racionales que satisfacen la condición $r^2 < 2$. Muéstrese que el conjunto X no tiene un elemento mayor. Hállese $\sup X$.

1.80. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado arbitrario. Demuéstrese que el conjunto $-X = \{x \mid -x \in X\}$ está también acotado y se verifican las igualdades

$$\sup(-X) = -\inf X, \quad \inf(-X) = -\sup X.$$

1.81. Sean X, $Y \subset \mathbb{R}$ conjuntos arbitrarios acotados superiormente. Demuéstrese que el conjunto
$X + Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y, \quad x \in X, \quad y \in Y\}$
está acotado superiormente y

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y.$$

1.82. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y sea $Y \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente. Demuésrese que el conjunto

$$X - Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x - y, \quad x \in X, \quad y \in Y\}$$

está acotado superiormente y

$$\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y.$$

4. Lógica simbólica. Al anotar los razonamientos matemáticos resulta razonable aplicar ciertos símbolos económicos usados en la lógica. He aquí algunos símbolos de los más sencillos utilizados con mayor frecuencia.

Sean α, β ciertas *declaraciones* o *afirmaciones*, es decir, oraciones narratorias, con respecto a cada una de las cuales podemos decir si es cierta o falsa.

La notación $\overline{\alpha}$ significa «no α», es decir, negación de la afirmación α.

La notación $\alpha \Rightarrow \beta$ significa: «de la afirmación α resulta la afirmación β» ($\Rightarrow$ es el símbolo de *implicación*).

La notación $\alpha \Leftrightarrow \beta$ significa: «la afirmación α es equivalente a la afirmación β», es decir, de α proviene β y de β se deduce α ($\Leftrightarrow$ es el símbolo de *equivalencia*).

La notación $\alpha \wedge \beta$ significa «α y β» ($\wedge$ es el símbolo de *conjunción*).

La notación $\alpha \vee \beta$ significa «α ó β» ($\vee$ es el símbolo de *disyunción*).

La notación

$$\forall x \in X \alpha(x)$$

significa: «para todo elemento $x \in X$ la afirmación $\alpha(x)$ es verídica» ($\forall$ es el *cuantificador universal*).

La notación

$$\exists x \in X \alpha(x)$$

significa: «existe tal elemento $x \in X$, para el cual la afirmación $\alpha(x)$ es verídica» ($\exists$ es el *cuantificador existencional*).

Si un elemento $x \in X$, para el cual la afirmación $\alpha(x)$ es verídica no sólo existe, sino que es único, se escribe:

$$\exists ! x \in X \alpha(x).$$

EJEMPLO 4. Haciendo uso de los símbolos lógicos, escríbase la afirmación: «el número M es la cota superior exacta del conjunto X».

◀ La afirmación $M = \sup x$ quiere decir que se han cumplido las condiciones:

a) $\forall x \in X\ (x \leqslant M)$ (es decir, M es la cota superior del conjunto X);

b) $\forall A \in \mathbb{R}\ (\forall x \in X\ (x \leqslant A) \Rightarrow A \geqslant M)$ (es decir, M es la menor de las cotas superiores del conjunto X).

La condición b) puede escribirse, además, en la siguiente forma equivalente (véase el problema 1.72):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X\ (x > M - \varepsilon). \ ▶$$

EJEMPLO 5. Haciendo uso de los símbolos lógicos, enúnciese el principio de la inducción matemática.

◀ Sea α cierta afirmación que tiene sentido para todo $n \in \mathbb{N}$. Introduzcamos un conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n)\},$$

es decir, el conjunto de todos aquellos números naturales, para los cuales la afirmación α es verídica. Entonces el principio de la inducción matemática puede enunciarse del modo siguiente:

$$((1 \in A) \wedge (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)) \Rightarrow A = \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Por cuanto la notación $\alpha(n)$ significa que la afirmación α es verídica para el número $n \in \mathbb{N}$, la afirmación (3) puede ser escrita también en otra forma:

$$(\alpha(1) \wedge \alpha(n) \Rightarrow \alpha(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \alpha(n). \ ▶$$

EJEMPLO 6. Escríbanse las negaciones de las declaraciones: $\forall x \in X \alpha(x)$ y $\exists x \in X \alpha(x)$.

◀ La negación de la declaración $\forall x \in X \alpha(x)$ tiene la forma $\exists x \in X \overline{\alpha(x)}$ (existe un elemento $x \in X$ tal que para él la afirmación $\alpha(x)$ es falsa). En otras palabras, para cualquier afirmación α resulta verídica la siguiente declaración:

$$\overline{\forall x \in X \alpha(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X \overline{\alpha(x)}.$$

Análogamente

$$\overline{\exists x \in X \alpha(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X \overline{\alpha(x)}. \ ▶$$

EJEMPLO 7. Haciendo uso de los símbolos lógicos escríbase la afirmación: «la función $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, es continua en el punto $a \in X$», como también la negación de esta afirmación.

◀ La afirmación inicial:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x \in X (| x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - f(a) | < \varepsilon).$$

La negación de esta afirmación:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta \exists x \in X (| x - a | < \delta \wedge | f(x) - f(a) | \geqslant \varepsilon)$$

(existe tal $\varepsilon > 0$ que para cualquier δ se encontrará un número $x \in X$ que satisface las condiciones $| x - a | < \delta$ y $| f(x) - f(a) | \geqslant \varepsilon$). ▶

Léanse las declaraciones que vienen abajo, aclárese el sentido de ellas y establézcase si son verídicas o falsas (los símbolos x, y, z, a, b, c se emplean para denotar los números reales, siempre que no se diga lo contrario).

1.83. a) $\forall x \exists y (x + y) = 3$; b) $\exists y \forall x (x + y) = 3)$; c) $\exists x, y (x + y) = 3)$; d) $\forall x, y (x + y) = 3)$.

1.84. $\exists x, y (x > y > 0 \wedge x + y = 0)$.

1.85. $\forall x, y (x < y) \Leftrightarrow \exists z (x < z < y)$.

1.86. $\forall x, y (x^2 \neq 2y^2)$.

1.87. $\forall x (x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0)$.

1.88. $\forall x (x > 2 \wedge \overline{x > 3} \Leftrightarrow 2 < x \leqslant 3)$.

1.89. $\exists x (\sqrt{x^2} < x)$.

1.90. a) $\forall a, b, c (\exists x (ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow b^2 - 4Ac \geqslant 0)$;

b) $\forall a, b, c (\forall x (ax^2 + bx + c > 0) \Leftrightarrow b^2 - 4Ac < 0 \wedge a > 0)$.

1.91. a) $\forall b \exists a \forall x (x^2 + ax + b > 0)$;

b) $\exists b \forall a \exists x (x^2 + ax + b = 0)$;

c) $\exists a \forall b \exists x (x^2 + ax + b = 0)$.

Establézcase el sentido exacto de las declaraciones expuestas más abajo y escríbanse, haciendo uso de los símbolos lógicos. Enúnciense y escríbanse las negaciones de estas declaraciones.

1.92. a) El número x_0 es la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

b) El número x_0 es la única solución de la ecuación $f(x) = 0$.

c) La ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución real única.

1.93. a) El conjunto $X \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente.

b) El número m es el elemento menor del conjunto X.

c) El conjunto X tiene un elemento minimal.

1.94. a) El número $m \in \mathbb{Z}$ es el divisor del número $n \in \mathbb{Z}$, ó, en la forma más breve: $m \mid n$.

b) Si el número $n \in \mathbb{Z}$ se divide por 2 y por 3, se dividirá por 6.

c) El número $p \in \mathbb{N}$ es primo.

§ 2. Funciones de una variable real

1. Concepto de función. Sea D un conjunto arbitrario de números reales. Si a todo número $x \in D$ se le ha puesto en correspondencia cierto número real bien determinado $f(x)$, se dice que en el conjunto D está definida una *función numérica* f. El conjunto D se denomina *campo de definición* y el conjunto

$$E = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), \quad x \in D\},$$

conjunto de valores de la función numérica f. La función se escribe simbólicamente en la forma $f: D \to E$, o bien $y = f(x)$.

El método analítico de definir una función es el más usado. Consiste en que por medio de una fórmula se establece de modo concreto el algoritmo de cálculo de los valores de la función $y = f(x)$ para cualquiera de los valores del *argumento* x. En este caso no se indica, comúnmente, el campo de definición de la función, entendiendo por éste el conjunto de valores del argumento x, para el cual la fórmula dada tiene sentido (campo *natural* de definición de la función).

Ejemplo 1. Hállense el campo de definición y el conjunto de valores de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

◀ El campo natural de definición de esta función es el conjunto $D = \{x \mid |x| < 1\} = (-1, 1)$, mientras que el conjunto de valores está representado por el conjunto $E = \{y \mid y \geqslant 1\} = [1, \infty)$. ▶

Supongamos que la función $f: D \to E$ es tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in D$ de la condición $x_1 \neq x_2$ se deduce que $f(x_1) \neq f(x_2)$. En este caso a todo número $y \in E$ se le puede asignar cierto número bien determinado $x \in D$ tal que $f(x) = y$; de este modo queda definida una nueva función $f^{-1}: E \to D$, llamada *inversa* de la función dada f.

Sean dadas las funciones $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$. Se denomina *composición* de estas funciones (o *función compuesta* obtenida por composición de las funciones f y g) la función $h = g \circ f: X \to Z$, definida por la igualdad

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

2.1. Hállese la dependencia funcional entre el radio R de un cilindro y su altura H, para el volumen dado $V = 1$.

2.2. Escríbase la expresión para el volumen V de un cono en función de su superficie lateral S, dada la generatriz $l = 2$.

2.3. Escríbase la expresión para el área S de un trapecio isósceles, de bases $a = 2$ y $b = 1$, como función del ángulo α entre la base a y un lado.

2.4. A partir del instante de reposo t_0 un cuerpo se mueve con una aceleración constante a. Hállense las dependencias de la velocidad y del camino recorrido en función del tiempo de movimiento. ¿Cómo están ligados entre sí el camino recorrido y la velocidad en un instante de tiempo dado t?

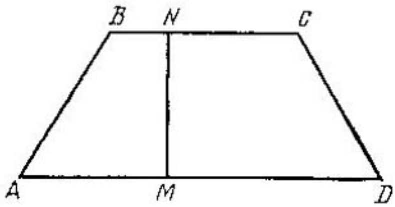


Fig. 1

2.5. En el trapecio isósceles $ABCD$ (fig. 1) de bases a y b y altura h está trazada una recta MN, perpendicular respecto de las bases, distante del vértice A a la magnitud $|AM| = x$. Exprésese el área S de la figura $ABNM$ como función de la variable x.

2.6. En una bola de radio R está inscrito un cilindro. Escríbase la dependencia funcional del volumen V del cilindro en función de la altura H de éste. Hállese el dominio de definición de esta función.

2.7. En una bola de radio R está inscrito un cono circular recto. Escríbase la dependencia funcional del área de la superficie lateral S del cono en función:

a) de su generatriz l;

b) del ángulo α en el vértice del cono en su sección axial;

c) del ángulo β formado por la generatriz y la base del cono.

Hállense los campos de definición de cada una de las funciones obtenidas.

2.8. Hállense $f(-1)$, $f(-0,001)$, $f(100)$, si $f(x) = \lg x^2$.

2.9. Hállense $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, si

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -\infty < x \leqslant 0 \\ 2^x, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

2.10. Hállense $f(1)$, $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a-1)$, $2f(2a)$, $f(x) = x^3 - 1$.

2.11. Hállense $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$ si $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

Hállense el campo natural de definición D y el conjunto de valores E de cada una de las siguientes funciones:

2.12. $y = \ln(x+3)$. **2.13.** $y = \sqrt{5-2x}$.

2.14. $y = \sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$. **2.15.** $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$.

2.16. $y = \ln(1 - 2\cos x)$. **2.17.** $y = \sqrt{1-|x|}$.

2.18. $y = \lg(5x - x^2 - 6)$. **2.19.** $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$.

2.20. $y = 2^{\arccos(1-x)}$. **2.21.** $y = e^{x^2-2}$.

Hállese el conjunto G, sobre el cual la función dada aplica el conjunto F:

2.22. $y = x^2$, $F = [-1, 2]$.

2.23. $y = |x|$, $F = \{x \mid 1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$.

2.24. $y = \frac{x}{2x-1}$, $F = (0, 1)$.

2.25. $y = \sqrt{x - x^2}$, $F = (0, 1)$.

2.26. $y = \log_3 x$, $F = (3, 27)$.

2.27. $y = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$, $F = [0, 1/2)$.

Hállense el *conjunto de ceros* $D_0 = \{x \mid f(x) = 0\}$, el *dominio de valores positivos* $D_+ = \{x / f(x) > 0\}$ y *el de valores negativos* $D_- = \{x \mid \{f(x) < 0\}$ para cada una de las funciones dadas:

2.28. $f(x) = 1 + x$. **2.29.** $f(x) = 2 + x - x^2$.

2.30. $f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$. **2.31.** $f(x) = 1 - e^{\frac{1}{x}-1}$.

Pruébese que la función $y = f(x)$ satisface la ecuación funcional correspondiente:

2.32. $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 0$, $f(x) = kx + b$.

2.33. $f(x) + f(x+1) = f(x(x+1))$, $f(x) = \log_a x$.

2.34. $f(x_1) f(x_2) = f(x_1 + x_1)$, $f(x) = a^x$.

2.35. $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$, $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$.

En los problemas 2.36 — 2.39 hállese la función $y = f(x)$ que satisface la condición dada.

2.36. $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.

◀ Sea $x + 1 = t$, es decir, $x = t - 1$. Entonces $x^2 - 3x + 2 = t^2 - 5t + 6$, por lo cual $f(t) = f(x+1) = x^2 - 3x + 2 = t^2 - 5t + 6$. ▶

2.37. $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2},\ x\neq 0.$

2.38. $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2},\ x>0.$

2.39. $f(x_1+x_2)=\operatorname{sen} x_1\cos x_2+\cos x_1 \operatorname{sen} x_2.$

La función $f(x)$ se llama *par* (*impar*), si su campo de definición es simétrico respecto al punto $x=0$ y $f(-x)=f(x)$, $(f(-x)=-f(x))$.

¿Cuáles de las funciones citadas en los problemas 2.40—2.45 son pares, cuáles impares y cuáles no son ni pares ni impares?

2.40. $f(x)=x^4+5x^2$. **2.41.** $f(x)=x^2+x$.

2.42. $f(x)=\frac{x}{2^x-1}$. **2.43.** $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$.

2.44. $f(x)=\operatorname{sen} x-\cos x$. **2.45.** $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

2.46. Demuéstrese que el producto de dos funciones pares o dos impares es una función par, y el producto de una función par por otra impar es una función impar.

Una función $f(x)$ se llama *periódica*, si existe un número positivo T (período de la función) tal que $\forall x\in D\ (f(x+T)=f(x))$.

Aclárese cuáles de las funciones dadas son periódicas y determínese su período mínimo T:

2.47. $f(x)=5\cos 7x$. **2.48.** $f(x)=\cos^2 2x$.

2.49. $f(x)=x\operatorname{sen} x$. **2.50.** $f(x)=\cos x+\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$,

2.51. $f(x)=\operatorname{sen} x^2$, **2.52.** $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

Establézcase cuáles de las funciones indicadas más abajo tienen sus inversas, hállense las funciones inversas correspondientes y sus campos de definición:

2.53. $y=ax+b$. **2.54.** $y=(x-1)^3$, **2.55.** $y=\cos 2x$.

2.56. $y=\ln 2x$. **2.57.** $y=2^{\frac{x}{2}}$. **2.58.** $y=\frac{1-x}{1+x}$.

2.59. $y=x^2+1$.

◀ Para la función $y=x^2+1$ el campo natural de definición será toda la recta numérica $D=(-\infty,+\infty)$ y el conjunto de valores, el rayo $E=[1,+\infty)$. Dado que para cualquier $a\in E$ la ecuación $x^2+1=a$ tiene dos soluciones diferentes, $x_1(a)=\sqrt{a-1}$ y $x_2(a)=-\sqrt{a-1}$, entonces la función dada no tiene inversa.

No obstante, cada una de las funciones

$$y_1 = x^2 + 1, \quad D_1 = [0, +\infty),$$

o

$$y_2 = x^2 + 1, \quad D_2 = (-\infty, 0],$$

tiene su inversa igual a

$$x_1(y) = \sqrt{y-1}$$

$$x_2(y) = -\sqrt{y-1}, \text{ respectivamente. } \blacktriangleright$$

Hállense la función inversa y su campo de definición, si la función inicial viene definida en el intervalo indicado:

2.60. $y = x^2 - 1$: a) $x \in (-\infty, -1/2]$;
b) $x \in [1/2, +\infty)$.

2.61. $y = \operatorname{sen} x$: a) $x \in [-\pi/2, \pi/2]$;
b) $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$,

2.62 $y = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0], \\ 2x, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

2.63. $y = \cos^2 x$: a) $x \in [0, \pi/2]$; b) $x \in [\pi/2, \pi]$;
c) $x \in [\pi, 3\pi/2]$.

Hállense las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ de las siguientes funciones:

2.64. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

◀ Tenemos:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

y

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|. \blacktriangleright$$

2.65. $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2$.

2.66. $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$.

2.67. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\pi, \pi]$, $g(x) = \operatorname{arcsen} x$.

2.68. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ x, & x \in (0, +\infty), \end{cases}$ $g(x) =$

$$= \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^2, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

2.69. Hállese $f \circ f \circ f$, si:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Funciones elementales y sus gráficas. Se llaman *funciones elementales fundamentales* las siguientes:

1. Función *potencial*: $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Función *exponencial*: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

3. Función *logarítmica*: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4. Funciones *trigonométricas*: $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

5. Funciones *trigonométricas inversas*: $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Se denomina *elemental* toda función que puede ser obtenida de un número finito de funciones elementales fundamentales con ayuda de las operaciones aritméticas y una operación de composición.

Se llama *gráfica* de la función $y = f(x)$ al conjunto

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D, \quad y = f(x)\},$$

donde $\mathbb{R}^2$ es un conjunto de puntos de un plano.

En un plano con un sistema fijo de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy la gráfica de una función se representa mediante un conjunto de puntos $M(x, y)$, cuyas coordenadas satisfacen la relación $y = f(x)$ (representación gráfica de la función).

Al construir las gráficas a menudo se emplean los siguientes razonamientos geométricos sencillos. Si Γ es la gráfica de una función $y = f(x)$, entonces:

1) la gráfica de la función $y_1 = -f(x)$ es una imagen especular de Γ respecto al eje Ox;

2) la gráfica de la función $y_2 = f(-x)$ es una imagen especular de Γ respecto al eje Oy;

3) la gráfica de la función $y_3 = f(x - a)$ es un desplazamiento de Γ a lo largo del eje Ox en una magnitud a;

4) la gráfica de la función $y_4 = b + f(x)$ es un desplazamiento de Γ a lo largo del eje Oy en una magnitud b;

5) la gráfica de la función $y_5 = f(ax)$, $a > 0$, $a \neq 1$, es una contracción en a veces (para $a > 1$) o un estiramiento en $1/a$ veces (para $a < 1$) de Γ a lo largo del eje Ox;

6) la gráfica de la función $y_6 = bf(x)$, $b > 0$, $b \neq 1$, es un estiramiento en b veces (para $b > 1$) o una contracción en $1/b$ veces (para $b < 1$) de Γ a lo largo del eje Oy.

Al construir la gráfica de una función resulta racional, a veces, dividir el campo de definición de la misma en unos cuantos intervalos que no se intersecan y construir, luego, la gráfica en cada uno de éstos.

EJEMPLO 2. Constrúyase la gráfica de la función $y = |x| + |x^2 - 1|$.

◀ Suprimiendo los módulos, podemos escribir:

$$y = \begin{cases} x^2 - x - 1, & x \in (-\infty, -1], \\ -x^2 - x + 1, & x \in (-1, 0], \\ -x^2 + x + 1, & x \in (0, 1], \\ x^2 + x - 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

La gráfica de la función dada es una unión de las gráficas (parábolas) que representan dicha función en cada uno de los cuatro intervalos (fig. 2). ▶

Escríbanse en forma de una composición de funciones elementales fundamentales las siguientes funciones elementales:

2.70. $f(x) = |x|$.

2.71. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos\sqrt{x})$.

2.72. $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x^2}$.

2.73. $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^{\sqrt[3]{x}})$.

2.74. $f(x) = \operatorname{sen}(2^{x^2})$.

2.75. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \log_3 x}}$.

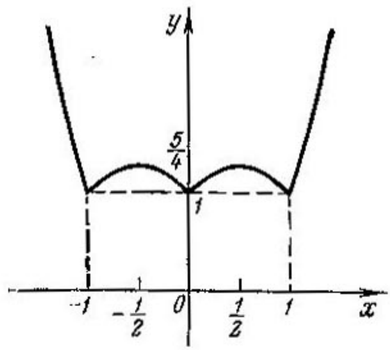


Fig. 2

Hállese la gráfica para cada una de las siguientes funciones:

2.76. $y = \sqrt{\ln \operatorname{sen} x}$.

◀ El campo natural de definición de la función dada es un conjunto

$$D = \{x \mid \operatorname{sen} x = 1\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Por esta razón

$$\Gamma = \left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ 0\right) \middle| \ k \in \mathbb{Z}\right\}. \ ▶$$

2.77. $y = x + \sqrt{1 - |\operatorname{cosec} x|}$. **2.78.** $y = \sqrt{-|x^2 - 1|} + 2$.

2.79. $y = \sqrt{\cos x - 1} + \dfrac{x}{2}$.

2.80. $y = 1 + \sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{-\operatorname{sen} x}$.

Constrúyanse las gráficas de las siguientes funciones elementales:

2.81. $y = kx + b$, si:
a) $k = 2$, $b = 0$; b) $k = 0$, $b = -2$; c) $k = -1$, $b = -\frac{1}{3}$.

2.82. $y = y_0 + a(x - x_0)^2$, si:
a) $a = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$;
b) $a = 2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$;
c) $a = -\frac{1}{2}$, $x_0 = -2$, $y_0 = \frac{3}{2}$.

2.83. $y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$, si:
a) $k = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$;
b) $k = -2$, $x_0 = -1$, $y_0 = -\frac{1}{2}$.

2.84. $y = a \operatorname{sen}(kx + \alpha)$, si:
a) $a = 1$, $k = 2$, $\alpha = \pi/3$;
b) $a = -2$, $k = 1/2$, $\alpha = -\pi/3$.

2.85. $y = a \operatorname{tg}(kx + \alpha)$, si:
a) $a = 3$, $k = 1/3$, $\alpha = \pi/4$;
b) $a = -1/2$, $k = 2$, $\alpha = 3\pi/2$.

2.86. $y = p \arcsen(x + q)$, si:
a) $p = 4$, $q = -1$; b) $p = -2/3$, $q = 1/2$.

2.87. $y = p \operatorname{arctg}(x + q)$, si:
a) $p = -3$, $q = 5/2$; b) $p = 2/5$, $q = -6$.

2.88. $y = a^{kx+b}$, si:
a) $a = 2$, $k = -1$, $b = 1$;
b) $a = 1/2$, $k = 2$, $b = -2$.

2.89. $y = \log_a(kx + b)$, si:
a) $a = 10$, $k = 10$, $b = -1$;
b) $a = 1/10$, $k = 1/2$, $b = 2$.

2.90. $y = |2 - x| + |2 + x|$. **2.91.** $y = x^2 + x - |x|$.

2.92. $y = x^2 - 6|x| + 9$. **2.93.** $y = |6x^2 + x| - 1$.

2.94. $y = (x^2 + 2x)\frac{|x-1|}{x-1}$.

2.95. $y = x - 1 - \sqrt{(x-1)^2}$. **2.96.** $y = \left|\frac{2x-3}{x+2}\right|$.

2.97. $y = \frac{|x| - 1}{|x + 2|}$. **2.98.** $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

2.99. $y = [x]$, donde $[x]$ es la parte entera de x.

2.100. $y = \{x\}$, donde $\{x\} = x - [x]$ es la parte fraccionaria de x.

2.101. $y = 2^{|x|} - 1$. 2.102. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+1|} + 2$.

2.103. $y = \log_{1/2} |x - 3|$. 2.104. $y = |\log_2 (x + 1)|$.

2.105. $y = \arcsin\left(\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2.106. $y = \arccos (\cos 3x)$.

2.107. $y = \cos x + |\operatorname{sen} x|$. 2.108. $y = |\operatorname{arctg} (x - 1)|$.

2.109. $y = x \operatorname{sgn} (\cos x)$. 2.110. $y = \left|\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

2.111. $y = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$. 2.112. $y = \operatorname{sen}\left(\arcsin \frac{x+2}{5}\right)$.

Represéntense en el plano Oxy los conjuntos de puntos cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones dadas:

2.113. $xy = 0$. 2.114. $|y| = |x^2 - 2|x| - 3|$.

2.115. $|x| + |y| = 1$. 2.116. $|x + y| + |x - y| = 1$.

2.117. $||x| - |y|| = 1$.

2.118. $|2y - 1| + |2y + 1| + \frac{4}{\sqrt{3}} |x| = 4$.

§ 3. Límite de una sucesión de números reales

1. Concepto de sucesión. Se llama *sucesión* de números reales a la función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto de todos los números reales. El número $f(n)$ lleva el nombre de n-ésimo término de la sucesión y se denota por el símbolo x_n; $x_n = f(n)$ se denomina *fórmula del término general* de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Escríbanse los primeros cinco términos de la sucesión:

3.1. $x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$. 3.2. $x_n = n(1 - (-1)^n)$.

3.3. $x_n = \frac{3n+5}{2n-3}$. 3.4. $x_n = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$.

Escríbase la fórmula del término general de la sucesión:

3.5. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ 3.6. $0, 2, 0, 2, \ldots$

3.7. $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$

3.8. $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$

3.9. $-3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \ldots$

3.10. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \ldots$

En los problemas 3.11—3.17 se pide hallar el término mayor (menor) de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, acotada superiormente (inferiormente).

3.11. $x_n = 6n - n^2 - 5$. 3.12. $x_n = e^{10n-n^2-24}$.

3.13. $x_n = \frac{\sqrt{n}}{9+n}$. 3.14. $x_n = 3n^2 - 10n - 14$.

3.15. $x_n = 2n + \frac{512}{n^2}$. 3.16. $x_n = -\frac{n^2}{2^n}$.

2. Límite de una sucesión. Se llama *límite* de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ el número a, es decir, el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, siempre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que para $n > N(\varepsilon)$ se verifica la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$. La propia sucesión se denomina en este caso *convergente*.

CRITERIO DE CAUCHY. *Para que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenga un límite, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número $N(\varepsilon)$ tal que, siendo $n > N(\varepsilon)$ se cumpla la desigualdad $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, cualquiera que sea $p \in \mathbb{N}$.*

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama *infinita decreciente*, si el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama *infinita creciente* (convergente hacia el infinito), lo que se anota formalmente en la forma $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, siempre que para cualquier número $E > 0$ existe un número $N(E)$ tal que, siendo $n > N(E)$ se verifica la desigualdad $|x_n| > E$. Si en este caso, a partir de cierto número, todos los términos de la sucesión son positivos (negativos), se emplea la notación

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right).$$

El número a se denomina *punto límite* de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si para todo $\varepsilon > 0$ se encuentra un número infinito de términos de dicha sucesión que satisfacen la condición $|x_n - a| < \varepsilon$.

PRINCIPIO DE BOLZANO—WEIERSTRASS. *Toda sucesión acotada tiene al menos un punto límite.*

Mayor (menor) de los puntos límites de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lleva el nombre de límite *superior* (*inferior*) de dicha sucesión y se designa por el símbolo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\right)$.

3.17. Empleando los símbolos lógicos, escríbanse las siguientes declaraciones, como también las negaciones de ellas:

a) la sucesión está acotada;
b) la sucesión crece de modo monótono;
c) el número a es el límite de una sucesión;
d) la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita creciente;
e) el número a es un punto límite de una sucesión.

3.18. Hállese $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y determínese tal número $N(\varepsilon)$ que $|x_n - a| < \varepsilon$ sea para todo $n > N(\varepsilon)$, si:

a) $x_n = \underbrace{0{,}33\ \dots\ 3}_{n}, \quad \varepsilon = 0{,}001;$

b) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}, \quad \varepsilon = 0{,}005;$

c) $x_n = \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} \dfrac{\pi n}{2}, \quad \varepsilon = 0{,}001;$

d) $x_n = \dfrac{5n^2+1}{7n^2-3}, \quad \varepsilon = 0{,}005.$

Calcúlense los límites

3.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{7-9n}$. **3.20.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$.

3.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{5n+7} - \dfrac{1+2n^3}{2+5n^3} \right)$.

3.22. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$. **3.23.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

3.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dots + \dfrac{n-1}{n^2} \right)$.

3.25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$. **3.26.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{sen}(n^2)}{n-1}$

3.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)} \right)$.

3.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25} + \dots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{5^n} \right)$.

3.29. Demuéstrese que si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita decreciente y $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n \neq 0)$, entonces la sucesión $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita creciente.

Establézcase cuáles de las sucesiones dadas son infinitas crecientes:

3.30. $x_n = 2^{\sqrt{n}}$. **3.31.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

3.32. $x_n = n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{2}$. **3.33.** $x_n = \lg(\lg n)$, $n \geqslant 2$.

Hállense todos los puntos límites de una sucesión;

3.34. $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$. **3.35.** $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$.

3.36. $x_n = \operatorname{arcsen} \frac{(-1)^n}{2}$.

3.37. Demuéstrese:

a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

b) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

Para cada una de las sucesiones que siguen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hállense $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ y $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$:

3.38. $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. **3.39.** $x_n = \frac{n+1}{n} \cos^2 \frac{\pi n}{4}$.

3.40. $x_n = (-1)^n (2n+1)$.

3.41. $x_n = \frac{n+2}{n-1} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{3}$, $n \geqslant 2$.

3.42. $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2} - \frac{1}{n}$.

3.43. Demuéstrese que la igualdad $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ es una condición necesaria y suficiente para que exista el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

§ 4. Límite de una función. Continuidad

1. Límite de una función. Sea $y = f(x)$ una función definida en el conjunto D. El número a se denomina *límite de la función* $y = f(x)$ *en el punto* x_0 y se anota $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, cualquiera que sea $x \in D$, de la condición $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ se desprende la desigualdad $|f(x) - a| < \varepsilon$.

CRITERIO DE CAUCHY. *Para que la función $y = f(x)$ tenga un límite en el punto x_0, es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ exista $\delta(\varepsilon) > 0$*

tal que se verifique $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, *siempre que* $|x' - x_0| < \delta(\varepsilon)$ *y* $|x'' - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Suele decirse que el número a es el *límite de la función* $x = f(x)$ *para* x *que tiende al infinito*, y se escribe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe el número $A(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x) - a| < \varepsilon$, siempre que $|x| > A(\varepsilon)$.

En lo sucesivo se utilizan los siguientes *límites notables*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e. \tag{2}$$

donde $e = 2{,}71828\ldots$ es la base de los logaritmos naturales.

A la par con el concepto de límite de una función introducido anteriormente, se emplea también el siguiente concepto de límite *unilateral*. El número a se denomina *límite de la función* $y = f(x)$ *en el punto* x_0 *por la derecha (por la izquierda)* y se anota $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a\right)$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que de la condición $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ $(-\delta(\varepsilon) < x - x_0 < 0)$ proviene $|f(x) - a| < \varepsilon$. Análogamente se introduce el concepto de límite unilateral en el infinito $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \text{ y } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$.

Empleando sólo el concepto de límite de una función, demuéstrese en los problemas 4.1—4.3 que el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, y llénese la siguiente tabla:

ε	0,1	0,01	0,001
$\delta(\varepsilon)$			

4.1. $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $a = 4$.
4.2. $f(x) = 1/x$, $x_0 = 1$, $a = 1$.
4.3. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$, $a = 0$.

Haciendo uso de los símbolos lógicos, escríbanse las siguientes afirmaciones:

4.4. $\lim\limits_{n\to 0} f(x) = \infty$. **4.5.** $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$.
4.6. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, **4.7.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4.8. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 0$. **4.9.** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$.

4.10. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. **4.11.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$.

Calcúlense los límites de las siguientes expresiones racionales:

4.12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1}$. **4.13.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+3}{x^2-3}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$.

4.15. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$; $m,\ n\in\mathbb{N}$.

4.17. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. **4.18.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

4.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^5+(x+2)^5+\ldots+(x+n)^5}{x^5+n^5}$, $n\in\mathbb{N}$.

4.23. Demuéstrese que si $P_n(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$, $Q_m(x)=b_0x^m+\ldots+b_m$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0 & \text{para}\quad n<m,\\ a_0/b_0 & \text{para}\quad n=m,\\ \infty & \text{para}\quad n>m.\end{cases}$$

Al calcular los límites que contienen expresiones irracionales se emplean frecuentemente los siguientes procedimientos: a) introducción de la nueva variable para obtener una expresión racional; b) traslación de la irracionalidad del denominador al numerador y viceversa.

Ejemplo 1. Calcúlese el $\lim\limits_{x\to81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$.

◀ Sea $t=\sqrt[4]{x}$. En este caso

$$\lim_{x\to81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}=\lim_{t\to3}\frac{3-t}{9-t^2}=\lim_{t\to3}\frac{1}{3+t}=\frac{1}{6}.\ ▶$$

EJEMPLO 2. Calcúlese el $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7}$.

◀ $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})=$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7})}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{14}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=0. \text{ ▶}$$

Calcúlense los límites:

4.24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$. 4.25. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$; $m,\ n\in\mathbb{N}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

4.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$.

4.32. $\lim\limits_{x\to a} (\sqrt{x-a}-\sqrt{x})$.

4.33. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

4.34. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(4x^2-7x+4}-2x)$.

4.35. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{3/2}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})$.

Haciendo uso del límite notable (1), calcúlense:

4.36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$. 4.37. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{\operatorname{tg} 3x}$.

4.38. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} \pi x$. **4.39.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3 \arcsin x}{4x}$.

4.40. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$. **4.41.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$, $\alpha \neq \beta$.

4.42. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{ctg} x\right)$.

4.43. $\lim\limits_{x\to \alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2\alpha} \operatorname{sen} \frac{x-\alpha}{2}$.

4.44. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2\cos x}{\pi - 4x}$.

4.45. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$.

Demuéstrese las siguientes relaciones:

4.46.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$.

4.47*. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

4.48*. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$.

Al calcular los límites del tipo $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}$, donde el $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$, se utiliza el límite notable (2).

EJEMPLO 3. Calcúlese el $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

◀ Tenemos

$$\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x} = \left(1 + \frac{-2}{2+x}\right)^{3x} = \left(1 + \frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}\left(\frac{-2}{2+x} \cdot 3x\right)}.$$

Puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}} = \lim_{t = \frac{-2}{2+x} \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{2+x} \cdot 3x = -6,$$

entonces
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=e^{-6}$$
(se ha utilizado aquí la continuidad de la composición de funciones continuas). ▶

Al hacer uso del límite notable (2), así como también de los resultados de los problemas 4.45—4.47, calcúlense los límites:

4.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$. **4.50.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

4.51. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. **4.52.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{3}{x}}$.

4.53. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(2+x)-\ln x)$.

4.54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. **4.55.** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

4.56. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^x-a}{x-1}$. **4.57.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\log_a x-1}{x-a}$.

4.58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$.

4.59. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ cuando, y sólo cuando, para cualquier sucesión de argumentos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente hacia x_0, la sucesión correspondiente $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de los valores de la función converge hacia a.

Usando los resultados del problema 4.59, demuéstrese que no existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ para las siguientes funciones:

4.60. $f(x)=\cos x,\ x_0=\infty$.

4.61. $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x},\ x_0=0$.

4.62. $f(x)=x-[x],\ x_0=\infty$.

Hállense los límites unilaterales:

4.63. $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x-3}{|x-3|}$. **4.64.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{2+x}{4-x^2}$.

4.65. $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}(2+x)^{\frac{1}{x}}$. **4.66.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} 7^{\frac{1}{2-x}}$.

4.67. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg} x$. **4.68.** $\lim\limits_{x\pm\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]$,

4.69. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}\pm 0} \dfrac{|\operatorname{tg}(4x-\pi)|}{2x-\frac{\pi}{2}}$. **4.70.** $\lim\limits_{x\to 2\pi\pm 0} \dfrac{x^2}{\cos x - 1}$.

4.71. Demuéstrese que el límite de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 existe cuando, y sólo cuando, en dicho punto existen los límites izquierdo y derecho y, además, coinciden.

2. Infinitésimos e infinitos. Una función $\alpha(x)$ se llama *infinitésima* para $x \to x_0$, si el $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Los infinitésimos $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se denominan *comparables*, si existe por lo menos uno de los límites

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ unos infinitésimos comparables para $x \to x_0$, y supongamos, para concretar, que existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$. Entonces:

a) si $C \neq 0$, $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llamarán infinitésimos del mismo orden. En particular, cuando $C = 1$, los infinitésimos $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se denominan *equivalentes* y se escribe $a \sim b$.

b) Si $C = 0$, entonces el infinitésimo $\alpha(x)$ se dice que es infinitésimo de *orden superior* con relación a $\beta(x)$, y se escribe $\alpha = o(\beta)$. Si, en este caso, existe un número real $r > 0$ tal que el $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r} \neq 0$, $\alpha(x)$ se llamará infinitésimo de *orden* r con relación a $\beta(x)$.

Una función $\alpha(x)$ se denomina *infinito* para $x \to x_0$, si el $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \infty$. Por analogía a como se hizo anteriormente para los infinitésimos, se introduce también el concepto de infinitos comparables y la clasificación de ellos.

4.72. Demuéstrese que si el $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, se encontrarán tal número $\delta > 0$ y las constantes C_1 y C_2 que se verifique

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow C_1\beta(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant C_2\beta(x).$$

4.73. Demuéstrese que $\alpha \sim \beta$ cuando, y sólo cuando, $\alpha - \beta = 0(\alpha)$ o bien $\alpha - \beta = 0(\beta)$.

Determínese el orden de infinitud de $\alpha(x)$ con relación a $\beta(x) = x$, para $x \to 0$:

4.74. $\alpha(x) = \dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$. **4.75.** $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$.

4.76. $\alpha(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$. **4.77.** $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$.

4.78. $\alpha(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)$.

4.79. $\alpha(x) = 3\operatorname{sen}^3 x - x^4$.

4.80. $\alpha(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x-1}}$.

4.81. $\alpha(x) = \sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}$.

4.82. $\alpha(x) = 3^{\sqrt{x}}-1$. **4.83.** $\alpha(x) = 2^x - \cos x$.

4.84. Demuéstrese que $\alpha(x) - \beta(x)$ tiene segundo orden de infinitud con relación a x para $x \to 0$, si:

a) $\alpha(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\quad \beta(x) = 1 - x$;

b) $\alpha(x) = \sqrt{a^2+x}$, $\quad \beta(x) = a + \dfrac{1}{2a}x \; (a \neq 0)$;

c) $\alpha(x) = (1+x)^n$, $\quad \beta(x) = 1 + nx \quad (n \in \mathbb{N})$.

Calcúlense aproximadamente las siguientes expresiones:

4.85. $1/1{,}03$. **4.86.** $\sqrt{25{,}3}$. **4.87.** $(1{,}03)^5$.

4.88. $(0{,}97)^4$.

4.89. Demuéstrese que si

$\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ y $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ para $x \to x_0$,

entonces

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Utilizando los resultados del problema 4.89, calcúlense los límites:

4.90. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

◀ Por cuanto $\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\ln(1-x) \sim (-x)$ para $x \to 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x} = -1. \;\blacktriangleright$$

4.91. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\lg x}$. **4.92.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}$.

4.93. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{\operatorname{arcsen}(1-2x)}$.

4.94. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{\operatorname{arcsen} 3x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}$.

4.95. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2 \operatorname{sen}^2 x + x \operatorname{tg} 7x}$.

4.96. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\sqrt{2}-(\cos x+\operatorname{sen} x)^3}{1-\operatorname{sen} 2x}$.

Determínese el orden de crecimiento del infinito $A(x)$ con relación a $B(x) = x$ para $x \to \infty$:

4.97. $A(x) = x^3 + 150x + 10$.

4.98. $A(x) = \sqrt{x^2+3x+5} + |x|$.

4.99. $A(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

4.100. $A(x) = \sqrt[3]{x^2-x} + \sqrt{x}$.

4.101. $A(x) = \dfrac{5x^6}{3x^4+x^3+2}$. **4.102.** $A(x) = \dfrac{x^{5/2}}{x^{7/3}+1}$.

3. Continuidad de la función en un punto. Clasificación de los puntos de discontinuidad. Una función $y = f(x)$ con un campo de definición D se llama *continua* en el punto x_0, si se cumplen las siguientes tres condiciones:

a) la función $y = f(x)$ está definida en el punto x_0, es decir, $x_0 \in D$;

b) existe el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

c) el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Cumplida la condición a), las condiciones b) y c) son equivalentes a lo siguiente:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0, \quad \Delta x) = 0,$$

donde

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

es el *incremento de la función* $y = f(x)$ en el punto x_0 que corresponde al *incremento del argumento* $\Delta x = x - x_0$.

Si en el punto x_0 se viola aunque sea una de las condiciones a), b) y c), el punto x_0 recibe el nombre de punto de discontinuidad de la función $y = f(x)$. En tal situación se observan tres casos:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, pero la función no está definida en el punto x_0, o bien queda violada la condición $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. En este caso x_0 se llama *punto de discontinuidad evitable* de la función.

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ no existe. Si en este caso existen ambos límites unilaterales $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ (evidentemente, distintos uno del otro), entonces x_0 recibe el nombre de *punto de discontinuidad de primera especie.*

c) En los demás casos x_0 lleva el nombre de *punto de discontinuidad de segunda especie.*

4.103. Utilizando los símbolos lógicos, escríbanse en el lenguaje «ε-δ» las siguientes afirmaciones:

a) la función $y = f(x)$ que tiene D como campo de definición es continua en el punto $x_0 \in D$;

b) la función $y = f(x)$ no es continua en el punto $x_0 \in D$.

Demuéstrese que las funciones que siguen son continuas en cada punto de su campo natural de definición:

4.104. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Recurriendo a la fórmula del binomio de Newton, obtenemos

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n = C_n^1 x_0^{n-1}\Delta x + C_n^2 x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

De aquí $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0$. ▶

4.105. $f(x) = a^x$, $a > 0$.

4.106. $f(x) = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$.

4.107. $f(x) = \operatorname{sen} x$. **4.108.** $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

Sea dada la función $f(x)$. ¿Para qué elección de los parámetros que figuran en su definición, será continua $f(x)$?

4.109. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1. \end{cases}$

4.110. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leqslant 1, \\ ax^2-2, & x > 1. \end{cases}$

4.111. $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leqslant \pi/2, \\ \operatorname{sen} x + b, & x > \pi/2. \end{cases}$

Hállense los puntos de discontinuidad de la función, investíguese su carácter, defínase la función adicionalmente, en el caso de discontinuidad evitable, «según la continuidad»:

4.112. $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$. **4.113.** $f(x) = \dfrac{|3x-5|}{3x-5}$.

4.114. $f(x) = \dfrac{(1+x)^n-1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

4.115. $f(x)=\frac{1}{x}\operatorname{sen} x$. **4.116.** $f(x)=1-x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

4.117. $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$. **4.118.** $f(x)=(x+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

4.119. $f(x)=\frac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

4.120. $f(x)=\frac{3^{\frac{1}{x-2}}-1}{3^{\frac{1}{x-2}}+1}$. **4.121.** $f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

4.122. $f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$. **4.123.** $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$.

4.124. $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\leqslant x<1, \\ x-1, & 1<x\leqslant 4, \\ 1 & x=1. \end{cases}$

4.125. $f(x)=\frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}$.

4.126. $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 4-2x, & 1<x<2{,}5, \\ 2x-7, & 2{,}5\leqslant x\leqslant 4. \end{cases}$

4.127. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{4}, \\ 1, & x=\frac{\pi}{4}, \\ x^2-\frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4}<x\leqslant\pi. \end{cases}$

4.128. Demuéstrese que todos los puntos de discontinuidad de una función monótona acotada son puntos de discontinuidad de primera especie.

4. Continuidad en un conjunto. Continuidad uniforme. Una función $y=f(x)$ se denomina *continua en el conjunto D*, si es continua en todo punto $x\in D$. Se llama *uniformemente continua en el conjunto D*, si para todo $\varepsilon>0$ existe un número $\delta(\varepsilon)>0$ tal que para cualesquiera x', $x''\in D$ de la desigualdad $|x'-x''|<\delta(\varepsilon)$ se deduce que $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

TEOREMA DE CANTOR. *Si la función $y=f(x)$ es continua en cierto segmento $[a, b]$, será en éste uniformemente continua.*

4.129. Demuéstrese que si $y = f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces ella:

a) está acotada en $[a, b]$;

b) alcanza en $[a, b]$ sus cotas superior e inferior (*teorema de Weierstrasse*);

c) toma en cualquier intervalo $(a', b') \subset [a, b]$ todos los valores intermedios entre $f(a')$ y $f(b')$ (*teorema de Cauchy*).

4.130. Demuéstrese que si una función $y = f(x)$ es continua en $[a, \infty)$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, dicha función está acotada en $[a, \infty)$.

4.131. Muéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

toma en cualquier segmento $[0, a]$ todos los valores intermedios entre $f(0)$ y $f(a)$, no obstante no es continua en $[0, a]$.

4.132. Demuéstrese que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

4.133. Enúnciese en el lenguaje «ε-δ» la afirmación: la función $y = f(x)$ es continua en el conjunto D, pero no es uniformemente continua en dicho conjunto. Examínense a título de ejemplo las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D = (0, 1]$;

b) $f(x) = \lg x$, $D = (0, 10]$;

c) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$, $D = (0, 1]$.

4.134. Demuéstrese que si una función $y = f(x)$ es continua en $[a, +\infty)$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, dicha función es uniformemente continua en $[a, +\infty)$.

4.135. Pruébese que una función no acotada $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ es uniformemente continua en todo el eje $-\infty < x < +\infty$.

Investíguese la continuidad uniforme en los conjuntos dados de las siguientes funciones:

4.136. $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$, $D = [-1, 1]$.

4.137. $f(x) = \ln x,\ D = (0,\ 1]$.

4.138. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x},\quad D = (0, \pi]$.

4.139. $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x},\quad D = (0,\ 1]$.

4.140. $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ D = \mathbb{R}$.

4.141. $f(x) = \sqrt{x},\ D = [1,\ +\infty)$.

4.142. $f(x) = x \operatorname{sen} x,\ D = [0,\ +\infty)$.

§ 5. Números complejos

1. Operaciones algebraicas con los números complejos. Se denominan *números complejos* toda clase de pares ordenados $z = (x,\ y)$ de los números reales, para los cuales las operaciones de adición y multiplicación vienen definidas del modo siguiente:

$$(x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2), \tag{1}$$

$$(x_1,\ y_1)(x_2,\ y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1). \tag{2}$$

El conjunto de todos los números complejos se designa por el símbolo $\mathbb{C}$.

Los números reales x e y llevan el nombre de *partes real e imaginaria* del número complejo $z = (x,\ y)$ y se denotan mediante los símbolos $\operatorname{Re} z$ o $\operatorname{Im} z$, respectivamente.

Dos números complejos $z_1 = (x_1,\ y_1)$ y $z_2 = (x_2,\ y_2)$ se dicen *iguales* cuando, y sólo cuando, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

De las definiciones (1) y (2) se deduce que todo número complejo $(x,\ y)$ puede escribirse del modo siguiente:

$$(x,\ y) = (x,\ 0) + (0,\ 1)(y,\ 0). \tag{3}$$

Si, ahora, identificamos los números complejos del tipo $(x,\ 0)$ con los números reales x [1], y designamos el número $(0,\ 1)$ por el símbolo i, entonces la igualdad (3) tendrá la expresión

$$z = x + iy$$

y se denominará *forma algebraica* del número complejo $z = (x,\ y)$.

5.1. Demuéstrese que las operaciones de adición y multiplicación de los números complejos poseen las siguientes propiedades:

a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (*conmutatividad de la adición*);

b) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (*asociatividad de la multiplicación*).

---

[1]) Es decir, establecemos una correspondencia biunívoca $(x,\ 0) \leftrightarrow x$, entre los conjuntos $\{(x,\ 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y $\mathbb{R}$. De (1) y (2) se deduce que dicha correspondencia «conserva las operaciones»:

$$(x_1,\ 0) + (x_2,\ 0) = (x_1 + x_2,\ 0) \leftrightarrow x_1 + x_2,$$

$$(x_1,\ 0)\cdot(x_2,\ 0) = (x_1x_2,\ 0) \leftrightarrow x_1x_2.$$

c) $z_1z_2 = z_2z_1$ (*conmutatividad de la multiplicación*);
d) $(z_1z_2)\,z_3 = z_1\,(z_2z_3)$ (*asociatividad de la multiplicación*);
e) $z_1\,(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (*ley de la distributividad*).

5.2. Demuéstrese que:

a) $\forall z_1,\ z_2 \neq 0\ \exists\, z\ (z_2z = z_1)$.

(el número z se llama *cociente* de la división de z_1 por z_2 y se designa mediante el símbolo $\dfrac{z_1}{z_2}$);

b) si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

En los problemas 5.3—5.12 ejecútense las operaciones mencionadas, representando los resultados en forma algebraica.

5.3. $(1 - 2i)\,(2 + i)^2 + 5i$.

◀ El problema consiste en que el número complejo dado sea representado en la forma

$$(1 - 2i)\,(2 + i)^2 + 5i = x + iy.$$

Con este fin podemos aprovechar directamente las fórmulas (1) y (2), no obstante el mismo resultado lo obtendremos con mayor facilidad de la manera siguiente. Como muestran las propiedades de las operaciones enunciadas en el problema 5.1, al adicionar y multiplicar los números complejos, representados en la forma algebraica, podemos tratarlos igual que los binomios del tipo $a + ib$, teniendo en cuenta adicionalmente que $i^2 = (0,\ 1)\,(0,\ 1) = (-1,\ 0) = -1$. Por esto

$$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i,$$

$$(1 - 2i)\,(2 + i)^2 = (1 - 2i)\,(3 + 4i) = 3 - 2i - 8i^2 = 11 - 2i,$$

de donde obtenemos en definitiva

$$(1 - 2i)\,(2 + i)^2 + 5i = 11 - 2i + 5i = 11 + 3i. ▶$$

5.4. $(2 + 3i)\,(3 - i)$. **5.5.** $(1 + 2i)^2$.
5.6. $(1 - i)^3 - (1 + i)^3$. **5.7.** $(2i - i^2)^2 + (1 - 3i)^3$.
5.8. $\dfrac{2-i}{1+i}$.

◀ El resultado puede ser obtenido empleando directamente la fórmula del problema 5.2. Hemos de notar, sin embargo, que $(1 + i)\,(1 - i) = 2$ es un número real. Por eso, al multiplicar el numerador y denominador de la fracción dada por $1 - i$, encontramos

$$\frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)\,(1-i)}{(1+i)\,(1-i)} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,i. ▶$$

5.9. $\dfrac{1}{1+4i} + \dfrac{1}{4-i}$. **5.10.** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

5.11. $\dfrac{(1+i)\,(3+i)}{3-i} - \dfrac{(1-i)\,(3-i)}{3+i}$.

5.12. $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Hállense las soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

5.13. $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i$.

5.14. $12((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i)) = 17+6i$.

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

5.15. $(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i,$
$(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7.$

5.16. $(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,$
$(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.$

Si en un plano se ha introducido un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy, entonces a todo número complejo $z=x+iy$ se le puede asignar cierto punto $M(x, y)$ de abscisa x y ordenada y.

En este caso suele decirse que el punto $M(x, y)$ *representa* el número complejo $z=x+iy$. El plano, en el que se representan los números complejos, se denomina *plano complejo*, el eje Ox, *eje real* y el Oy, *eje imaginario*.

El número $r=\sqrt{x^2+y^2}$ se llama *módulo* del número complejo $z=x+iy$ y se denota por el símbolo $|z|$. El módulo del número z es igual a la distancia entre el punto M que representa este número y el origen de coordenadas.

Toda solución φ del sistema de ecuaciones

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \operatorname{sen}\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{4}$$

recibe el nombre de *argumento* del número complejo $z=x+iy\neq 0$. Todos los argumentos del número z difieren en números enteros múltiples de 2π y se designan por el símbolo único $\operatorname{Arg} z$. Cada valor del argumento coincide con la magnitud φ de cierto ángulo al cual se debe girar el eje $\widetilde{Ox}$ hasta que coincida con el radio vector $\overline{OM}$ del punto M (en este caso $\varphi>0$, si el giro se realiza en sentido antihorario, y $\varphi<0$, en el caso contrario). Se denomina *valor principal* del argumento al valor de $\operatorname{Arg} z$ que satisface la condición $0\leqslant \operatorname{Arg} z < 2\pi$, y se denota mediante el símbolo $\arg z$.

En algunos casos se llama valor principal del argumento el valor de $\operatorname{Arg} z$ que satisface la condición $-\pi<\operatorname{Arg} z\leqslant\pi$.

De las correlaciones (4) se deduce que para todo número complejo z se verifica la igualdad

$$z=|z|(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi),$$

llamada *forma trigonométrica* del número z.

EJEMPLO 1. Represéntese en la forma trigonométrica el número complejo $z=-2+2i\sqrt{3}$.

◀ Tenemos

$$r=|z|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4,$$

$$\cos\varphi=-1/2, \quad \operatorname{sen}\varphi=\sqrt{3}/2,$$

por lo cual el valor principal del argumento $\arg z = 2\pi/3$ y, por ende, $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$. ▶

Represéntense en forma trigonométrica y exprésense mediante los puntos en un plano complejo los siguientes números complejos:

5.17. $-i$. **5.18.** $1 - i\sqrt{3}$. **5.19.** $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.20. $\frac{1-i}{1+i}$. **5.21*.** $-\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$.

5.22. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$. **5.23.** $1 + \cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$.

El número complejo $x - iy$ se llama *conjugado* del número complejo $z = x + iy$ y se designa por el símbolo $\bar{z}$.

Demuéstrese las igualdades siguientes:

5.24. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ y $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

5.25. $\overline{(\bar{z})} = z$. **5.26.** $|\bar{z}| = |z|$.

5.27. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

5.28. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ y $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

5.29. $z\bar{z} = |z|^2$.

5.30. Calcúlense:

a) $z_1\bar{z}_2$ y $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2$, si $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$,

b) $z_1\bar{z}_2$ y $\frac{\bar{z}_1^2}{z_2}$, si $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 2i$.

5.31. Sea $p(z)$ un polinomio arbitrario de coeficientes reales. Demuéstrese que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se verifica la igualdad $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

5.32. $|z| - z = 1 + 3i$. **5.33.** $|z| + z = 2 + i$.

5.34. Demuéstrese las igualdades y aclárese su significado geométrico:

a) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ y $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

b) $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$ y $\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

(las igualdades b) se entienden en el sentido de que los números que figuran en los primeros miembros coinciden con ciertos valores de los argumentos $z_1 z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$).

Aclárese el significado geométrico de las siguientes transformaciones del plano complejo:

5.35. $z \to z - 2$. **5.36.** $z \to z + (3 - i)$.

5.37. $z \to iz$. **5.38.** $z \to \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) z$.

5.39. $z \to -z$. **5.40.** $z \to 2z$.

5.41. $z \to \frac{z}{1-i}$. **5.42.** $z \to \bar{z}$.

5.43. Demuéstrese que:

a) la magnitud $|z_1 - z_2|$ es igual a la distancia en el plano complejo entre los puntos M_1 y M_2, que representan los números complejos z_1 y z_2;

b) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ y $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$ (*desigualdad triangular*). ¿Cuál es el significado geométrico de estas desigualdades?

5.44. Demuéstrense las identidades:

a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (¿cuál es el significado geométrico de esta igualdad?);

b) * $|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1 z_2}\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1 z_2}\right|$.

Dése, en los problemas 5.45—5.55, la descripción geométrica de los conjuntos de todos los puntos de un plano complejo que satisfacen las siguientes condiciones:

5.45. $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. **5.46.** $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1$. **5.47.** $|\operatorname{Im} z| \leqslant 2$.

5.48. $|z| < 1$. **5.49.** $|z + i| = 2$.

5.50. $1 < |z + 2| \leqslant 2$. **5.51.** $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$.

5.52. $|z - i| = |z + 2|$. **5.53.** $0 < \arg z \leqslant \pi/4$.

5.54. $|\pi - \arg z| < \pi/4$. **5.55.** $z = \bar{z}$.

5.56. Sea $z \neq -1$. Demuéstrese que $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Sea φ un número real arbitrario. Mediante el símbolo $e^{i\varphi}$ se denota un número complejo $\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$. Con ayuda de esta designación todo número complejo $z = |z|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ puede escribirse en la *forma exponencial*

$$z = |z| e^{i\varphi}.$$

Represéntense en la forma exponencial los siguientes números complejos:

5.57. $\frac{7+24i}{5}$. **5.58.** $5-12i$. **5.59.** $-3-4i$.

5.60. $-2+i$. **5.61.** $\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha$.

5.62. $\operatorname{sen}\alpha + i(1-\cos\alpha)$.

5.63. Demuéstrese que el símbolo $e^{i\varphi}$ posee las siguientes propiedades:

a) $\forall n\in\mathbb{Z}\,(e^{i2\pi n}=1)$; b) $\overline{e^{i\varphi}}=e^{-i\varphi}$;

b) $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ y $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

5.64. Represéntense los números dados z_1 y z_2 en la forma exponencial y realícense con ellos las operaciones indicadas:

a) z_1z_2, $\frac{z_1^2}{z_2}$, si $z_1=2\sqrt{3}-2i$, $z_2=3-3\sqrt{3}i$;

b) $z_1^2\bar{z}_2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, si $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_2=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$.

5.65. Demuéstrense las *fórmulas de Euler*

$$\cos=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \operatorname{sen}\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

5.66. Demuéstrese la *fórmula de Moivre:* si $z=re^{i\varphi}$, entonces

$$z^n=r^ne^{in\varphi},$$

o bien, en la forma geométrica,

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\operatorname{sen} n\varphi).$$

Haciendo uso de la fórmula de Moivre, calcúlense las siguientes expresiones:

5.67. $(1+i)^{10}$. **5.68.** $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. **5.69.** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

5.70. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.

5.71. Demuéstrense las igualdades:

a) $(1+i)^n=2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$;

b) $(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right)$.

5.72. Haciendo uso de las fórmulas de Euler, exprésense en términos de los senos y cosenos de los arcos múltiples las funciones:

a) $\cos^3\varphi$; b) $\operatorname{sen}^3\varphi$.

Haciendo uso de la fórmula de Moivre, exprésense en términos de $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$ las siguientes funciones:

5.73. $\cos 3\varphi$. **5.74.** $\operatorname{sen} 3\varphi$.

5.75. $\cos 4\varphi$. **5.76.** $\operatorname{sen} 4\varphi$.

Sea $a = re^{i\varphi}$ un número complejo fijo. Entonces, la ecuación $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, tiene exactamente n diferentes soluciones $z_0, z_1, \ldots$ $\ldots, z_{n-1}$, con la particularidad de que dichas soluciones se determinan por la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(aquí $\sqrt[n]{r}$ es un número positivo real). Los números z_k, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, se denominan *raíces de n-ésimo grado* del número complejo a y se designan por el símbolo $\sqrt[n]{a}$.

Ejemplo 2. Hállense todas las raíces de tercer grado del número $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.

◀ Puesto que $a = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$, entonces

$$(\sqrt[3]{a})_k = \sqrt[3]{4}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right),$$

donde $k = 0, 1, 2$.

Para $k=0$: $(\sqrt[3]{a})_0 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\right)$.

Para $k=1$: $(\sqrt[3]{a})_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{8\pi}{9}\right)$.

Para $k=2$: $(\sqrt[3]{a})_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{14\pi}{9}\right)$. ▶

5.77. Hállense y exprésense en un plano complejo todas las raíces de segundo, tercero y cuarto grados de la unidad.

Hállense todos los valores de las raíces:

5.78. $\sqrt{i}$. **5.79.** $\sqrt[4]{-1}$. **5.80.** $\sqrt[9]{-9}$.

5.81. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$. **5.82.** $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.

5.83. $\sqrt[5]{-1-i}$.

5.84. $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$. **5.85.** $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$.

5.86. Demuéstrese que las raíces cuadradas de un número complejo pueden hallarse según la fórmula

$$\sqrt{z}=\sqrt{x+iy}=\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}}+i\operatorname{sen} y\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

El empleo de la forma exponencial de números complejos en muchos casos simplifica considerablemente los cálculos.

EJEMPLO 3. Calcúlese la suma

$S(\varphi)=\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}2\varphi+\ldots+\operatorname{sen}n\varphi,\quad \varphi\neq 2\pi m,\quad m\in\mathbb{Z}.$

◀ Puesto que $\operatorname{sen}\varphi=\operatorname{Im}e^{i\varphi}$, entonces, recurriendo a la fórmula para la suma de una progresión geométrica, obtenemos:

$$S(\varphi)=\operatorname{Im}e^{i\varphi}+\operatorname{Im}e^{i2\varphi}+\ldots+\operatorname{Im}e^{in\varphi}=$$

$$=\operatorname{Im}(e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}+\ldots+e^{in\varphi})=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi}(1-e^{in\varphi})}{1-e^{i\varphi}}=$$

$$=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi+i\frac{n}{2}\varphi}\left(e^{-i\frac{n}{2}\varphi}-e^{i\frac{n}{2}\varphi}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}-e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\varphi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}\operatorname{Im}e^{i\frac{n+1}{2}\varphi}=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\varphi}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}.\ ▶$$

Calcúlense las sumas:

5.87. $\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\ldots+\cos n\varphi$.

5.88. $\cos\varphi+\cos3\varphi+\cos5\varphi+\ldots+\cos(2n-1)\varphi$.

5.89. $\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}3\varphi+\operatorname{sen}5\varphi+\ldots+\operatorname{sen}(2n-1)\varphi$.

2. Polinomios y ecuaciones algebraicas. Se denomina *polinomio* (o *función racional entera*) de n-ésimo grado una función del tipo

$$p_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+z_0, \tag{5}$$

donde $z\in\mathbb{C}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son los coeficientes (generalmente complejos), con la particularidad de que $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$. La ecuación

$$a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0,\quad a_n\neq 0, \tag{6}$$

se llama *ecuación algebraica* de n-ésimo grado. El número z_0, para el cual $p_n(z_0)=0$, lleva el nombre de raíz del polinomio (5) o de la ecuación (6).

TEOREMA DE GAUSS (teorema fundamental del álgebra). *Todo polinomio de grado no nulo tiene por lo menos una raíz* (generalmente compleja).

El número z_0 es una raíz del polinomio $p_n(z)$, si, y sólo si, $p_n(z)$ se divide sin resto por el polinomio $z - z_0$, es decir, si

$$p_n(z) = (z - z_0)\, q_{n-1}(z),$$

donde $q_{n-1}(z)$ es un polinomio de $(n-1)$-ésimo grado. Si $p_n(z)$ se divide sin resto por $(z - z_0)^k$, $k \geqslant 1$, pero no se divide por $(z - z_0)^{k+1}$, entonces z_0 se llama *raíz de multiplicidad* k del polinomio $p_n(z)$; en este caso

$$p_n(z) = (z - z_0)^k\, q_{n-k}(z),$$

donde $q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

El teorema de Gauss puede ser precisado de la manera siguiente: *un polinomio de n-ésimo grado tiene exactamente n raíces, si cada raíz se cuenta tantas veces cual es su multiplicidad.*

Si los coeficientes del polinomio (5) son números reales y $z_0 = x_0 + iy_0$ es su raíz compleja, entonces el número conjugado $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ será también una raíz de dicho polinomio, con la particularidad de que las raíces z_0 y $\bar{z}_0$ son de multiplicidad igual (véase el problema 5.31).

Supongamos que el polinomio $p_n(z)$ tiene las raíces $z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(m \leqslant n)$ cuyas multiplicidades son $k_1, k_2, \ldots, k_m$, respectivamente $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$ Podemos, en esto caso, descomponerlo en factores lineales, es decir, resulta válida la identidad

$$p_n(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2}, \ldots, (z - z_m)^{k_m}.$$

Si los coeficientes del polinomio son números reales, entonces, al reunir los paréntesis correspondientes a las raíces complejas conjugadas, podemos descomponer este polinomio en un producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

EJEMPLO 4. Hállense las raíces del polinomio $z^6 + 2z^3 + 1$ y desarróllese el mismo en factores.

◀ Puesto que $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$, entonces las raíces de este polinomio son las de tercer grado de -1:

$$z_1 = -1;$$
$$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$z_3 = \cos\frac{\pi}{3} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cada raíz, además, tiene una multiplicidad de $k = 2$. La descomposición de este polinomio en factores lineales tiene por expresión

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \left(z - \left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2.$$

Al reunir los dos últimos paréntesis en un factor, obtendremos una descomposición en factores con coeficientes reales

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2 (z^2 - z + 1)^2. \ \blacktriangleright$$

Resuélvanse las ecuaciones cuadráticas:

5.90. $z^2 + 2z + 5 = 0$. **5.91.** $4z^2 - 2z + 1 = 0$.

5.92. $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$.

5.93. $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

Resuélvanse las ecuaciones binomias:

5.94. $z^3 - 1 = 0$. **5.95.** $z^3 + 1 = 0$.

5.96. $(z + 1)^4 - 16 = 0$. **5.97.** $(z + 1)^4 + 16 = 0$.

Resuélvanse las ecuaciones bicuadradas

5.98. $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$. **5.99.** $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$.

5.100. $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$.

5.101. $z^4 - (1 + i)z^2 + 2(1 + i) = 0$.

Resuélvanse las ecuaciones trinomias:

5.102. $z^6 + 4z^3 + 3 = 0$. **5.103.** $z^8 + 15z^4 - 16 = 0$.

5.104.* Muéstrese que todas las raíces de la ecuación

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{(1+ia)}{(1-ia)} \quad (a \in \mathbb{R})$$

son reales y distintas.

Descompóngase en factores lineales y cuadráticos de coeficientes reales los polinomios siguientes:

5.105. $z^4 - 1$. **5.106.** $z^4 + 1$. **5.107.** $z^4 + z^2 + 1$.

5.108. $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10$; se conoce la raíz $z_1 = -1 + i$.

5.109. $z^5 + z^4 + z^3 - z^2 - z - 1$; se conoce la raíz doble $z_1 = z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5.110. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100$; se conoce la raíz $z_1 = 1 + 2i$.

3. Límite de la sucesión de números complejos. El número a se denomina *límite* de la sucesión de números complejos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que, siendo $n > N(\varepsilon)$, se cumple la desigualdad $|z_n - a| < \varepsilon$.

La sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se llama *convergente al infinito* y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, si para cualquier $E > 0$ existe un número $N(E)$ tal que, siendo $n > N(E)$, se verifica la desigualdad $|z_n| > E$.

5.111. Sea $x_n = \operatorname{Re} z_n$ e $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$ cuando, y sólo cuando, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re} a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \operatorname{Im} a$.

5.112. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$, y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b \neq \infty$. Demuéstrese que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = a + b$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = ab$.

5.113. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$, y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b \neq 0$. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{a}{b}$.

Calcúlense los límites:

5.114. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - i + \dfrac{1}{n}(1+i)\right)$. **5.115.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-in}{1+in}$.

5.116. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n}{3n+2} \cdot \dfrac{in^2}{n^2+n-4i}$.

5.117. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2i)(3+7in)}{(2-i)n^2+1}$.

5.118. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{i^n}{n}\right)$. **5.119.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} e^{in\frac{\pi}{4}}$.

5.120. $\lim\limits_{n\to\infty} (2i)^n$. **5.121.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2^n + i\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right)$.

5.122. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5i} - \dfrac{1}{25} + \ldots + \dfrac{1}{(5i)^n}\right)$.

1.123. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{ik}{3^k}$. **5.124.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n} + i\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)$.

5.125. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(2-3i)^k}$.

5.126. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{3+2i}{n}\right)^n$.

Demuéstrese que las sucesiones que siguen son acotadas, pero divergen:

5.127. $z_n = i^n$. **5.128.** $z_n = (-1)^n + i\,\dfrac{2-n}{2+n}$.

5.129. $z_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) e^{i\frac{n\pi}{2}}$.

5.130. $z_n = \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n)$.

Pruébese que las sucesiones siguientes no están acotadas, pero no convergen al infinito:

5.131. $z_n = n(1 + i^n)$. **5.132.** $z_n = (e^{i\frac{\pi n}{2}} - i)\ln n$.

5.133. Sea $r_n = |z_n|$ y $\varphi_n = \arg z_n$. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ $(0 < |a| < \infty)$ cuando, y sólo cuando, el $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = |a|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \arg \varphi$ (siendo eligido adecuadamente el campo de valores principales de argumentos).

El resultado del problema 5.133 se usa a menudo al calcular los límites de las sucesiones complejas.

EJEMPLO 5. Sea φ un número real $(\varphi \neq 0)$. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi = e^{i\varphi}.$$

◀ Analicemos dos sucesiones reales:

$$r_n = \left|\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n/2},$$

$$\varphi_n = \arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = n\arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right) = n\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{n}.$$

Calculemos sus límites:

$$\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{\varphi^2}}\right)^{\frac{\varphi^2}{2n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi^2}{2n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{n} = \varphi\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}} = \varphi.$$

De aquí obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = 1\cdot(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) = e^{i\varphi}.$$ ▶

5.134. Sea $z = x + iy$. Demuéstrese (véase el ejemplo 5) que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) = e^{x+iy} = e^z.$$

Demuéstrese la convergencia de las sucesiones a seguir y hállense sus límites:

5.135. $z_n = z^n$, $|z| < 1$. **5.136.** $z_n = nz^n$, $|z| < 1$.
5.137. $z_n = 1 + z + \ldots + z^n$, $|z| < 1$.

5.138. $z_n = \dfrac{z^n}{1 + z^{2n}}$, $\quad |z| > 1$.

5.139. Calcúlese

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + z_1 + \ldots + z_1^n}{1 + z_2 + \ldots + z_2^n},$$

si $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$.

5.140. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \neq \infty$. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} = a.$$

RESPUESTAS

1.1. La aproximación por defecto 0,1; 0,10; 0,101. La aproximación por exceso: 0,2; 0,11; 0,102. **1.2.** a) $\frac{11}{9}$; b) $\frac{901}{300}$; c) $\frac{2183}{19800}$. **1.11.** $\log_{1/2}\frac{1}{3}\,\log_{1/3}\frac{1}{2}$. **1.12.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$. **1.13.** $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2} > 1$. **1.18.** $\left\{\frac{7}{6}, \frac{3}{2}\right\}$. **1.19.** $\{-1, 0\}$. **1.20.** ϕ. **1.21.** $\{0, 2\}$. **1.22.** $(-\infty, 2]$. **1.23.** $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$. **1.24.** $(3, 4)$. **1.25.** $[1-\sqrt{17}, -1+\sqrt{5}]$. **1.26.** $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. **1.27.** $(-\infty, -1]$. **1.28.** a) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$; b) ambas notaciones son justas. **1.29.** $A = \{0, 1, 2\}$. **1.30.** $A = \{1\}$. **1.31.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$. **1.32.** $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **1.33.** $A = \{1, 2, 3\}$. **1.34.** $A = \{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$. **1.35.** Véase la fig. 3. **1.36.** Véase la fig. 4 (la frontera de la región rayada no pertenece al conjunto). **1.37.** Véase la fig. 5. **1.38.** Véase la fig. 6 (la línea de trazos no pertenece al conjunto). **1.39.** Véase la fig. 7 (la frontera de la región rayada no pertenece al conjunto). **1.40.** El punto (2, 2). **1.41.** Véase la fig. 8. **1.42.** Véase la fig. 9 (la frontera de la región rayada no pertenece al conjunto). **1.43.** $A \cup B = \{-5, 3, 4\}$; $A \cap B = \{4\}$; $A \setminus B = \{-5\}$; $B \setminus A = \{3\}$. **1.44.** $\{2, 4, 8\}$. **1.45.** $\{8k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **1.46.** $\{1, 2, 4\}$. **1.47.** $\{24k \mid k \in \mathbb{N}\}$. **1.49.** $A \cup B = (-1, 4)$; $A \cap B = [1, 2]$; $A \setminus B = (-1, 1)$; $B \setminus A = (1, 4)$. **1.50.** $(0, 1)$. **1.51.** $[0, {}^1/_4] \cup [{}^1/_2, 1]$. **1.52.** $\{0\} \cup ({}^1/_2, 1)$. **1.53.** $[0, 1/4) \cup (1/4, 3/4) \cup \{1\}$. **1.60.** $\mathbb{Z}$; $\{-1, 0, 1\}$. **1.61.** $\{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 3k, k \in \mathbb{N}\}$; $\varnothing$. **1.62.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n, n \in \mathbb{N}, \{t\}$. **1.63.** a) Todos los puntos del círculo dado; $\varnothing$; b) todos los puntos del anillo encerrado entre la circunferencia dada y una circunferencia concéntrica de radio dos veces menor; $\oslash$; c) todos los puntos del círculo; el centro del círculo. **1.73.** a) $\min X$ no existe; $\max X = 1$; b) $[1, +\infty)$; $(-\infty, 0]$; $\sup X = 1$; $\inf X = 0$. **1.74.** $^1/_2$; no existe; $^1/_2$; 0. **1.75.**

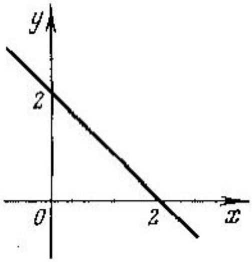


Fig. 3

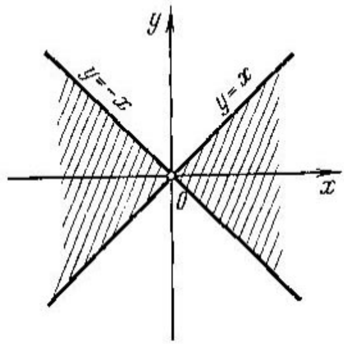


Fig. 4

1; —1; 1; —1. **1.76.** No existe; —5, 0; —5. **1.77.** No existe; no existe; 0; no existe. **1.78.** No existe; no existe; 1; 0. **1.79.** $\sup X = \sqrt{2}$. **1.83.** a) Verídica; b) falsa; c) verídica; d) falsa. **1.84.** Falsa. **1.85.** Verídica. **1.86.** Falsa. **1.87.** Verídica. **1.88.** Verídica. **1.89.** Falsa. **1.90.** a) Verídica; b) falsa. **1.91.** a) Verídica; b) verídica; c) falsa. **1.92.** a) $f(x_0) = 0$; $f(x_0) \neq 0$. b) $f(x_0) = 0 \wedge \forall x\, (x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0) \neq 0)$; $f(x_0) \neq 0 \vee (f(x_0) = 0 \wedge \exists x\, (x \neq x_0 \wedge f(x) = 0))$; c) $\exists x_0\, (f(x_0) = 0) \wedge (\forall x\, (x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq 0))$; $\forall x\, (f(x) \neq 0) \vee \exists (x_1, x_2\, (x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) = 0))$. **1.93.** a) $\exists M \forall x \in X\, (x \leqslant M)$; $\forall M \exists x \in X\, (x > M)$. b) $(m \in X) \wedge (\forall x \in X\, (m \leqslant x))$; $(m \in X) \vee (\exists x \in X\, (x < m))$. c) $(\exists m \in X) \wedge (\forall x \in X\, (m \leqslant x))$; $\forall x' \in X \exists x \in X\, (x < x')$. **1.94.** a) $\exists k \in \mathbb{Z}\, (n = km)$; $\forall k \in \mathbb{Z}\, (n \neq km)$. b) $(2 \mid n \wedge 3 \mid n) \Rightarrow 6 \mid n$; $(2 \mid n \wedge 3 \mid n) \wedge 6 \nmid n$. (OBSERVACIÓN: Puesto que la declaración inicial es verídica, la negación de ella es falsa). c) $\forall n \in \mathbb{N}\, (n \mid p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p))$; $\exists n \in \mathbb{N}\, (n \mid p \wedge (n \neq 1 \wedge n \neq p))$.

2.1. $R = \sqrt{\dfrac{1}{\pi H}}$. **2.2.** $V = \dfrac{S^2 \sqrt{16\pi^2 - S^2}}{24\pi^2}$.

2.3. $S = \dfrac{3}{4} \operatorname{tg} \alpha$. **2.4.** $v = a(t - t_0)$; $s = \dfrac{a}{2}(t - t_0)^2$; $s = \dfrac{v^2}{2a}$, donde $t \geqslant t_0$.

$$
\text{2.5.} \quad S_{ABNM} = \begin{cases} \dfrac{x^2 h}{a - b}, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a-b}{2}, \\[2mm] hx + \dfrac{(a-b)\,h}{4}, & \dfrac{a-b}{2} < x < \dfrac{a+b}{2}, \\[2mm] \dfrac{a+b}{2} h - \dfrac{(a-x)^2 h}{a-b}, & \dfrac{a+b}{2} < x \leqslant a. \end{cases}
$$

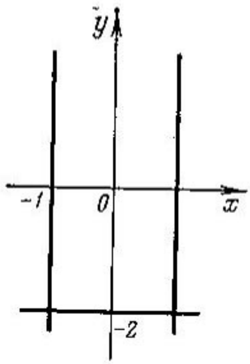


Fig. 5

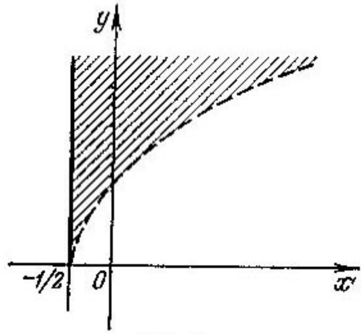


Fig. 6

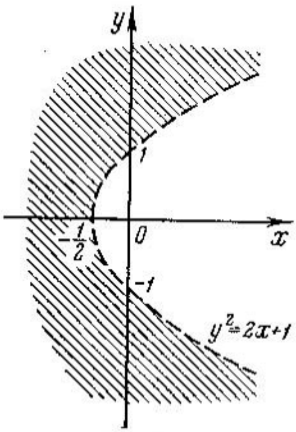


Fig. 7

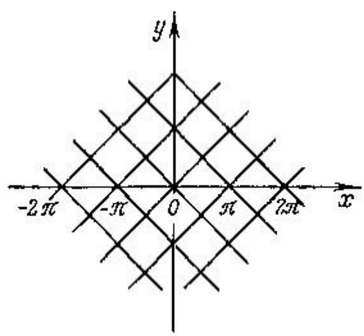


Fig. 8

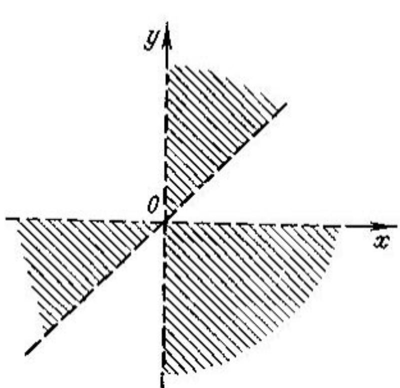


Fig. 9

2.6. $V=\frac{1}{4}\pi h(4R^2-h^2)$, $D=[0,2R]$. 2.7. a) $S=\frac{\pi l^2}{2R}\sqrt{4R^2-l^2}$, $D=[0, 2R]$; b) $S=4\pi R^2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $D=[0, \pi]$; c) $S=$ $=4\pi R^2\cos\beta\operatorname{sen}^2\beta$, $D=[0, \pi/2]$. 2.8. 0, $-6{,}4$. 2.9. -1, 0, 1, 2, 4. 2.10. 0, a^3-1, a^3+3a^2+3a, a^3-3a^2+3a-2, $16a^3-2$. 2.11. 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $-\frac{x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. 2.12. $D=(-3, \infty)$, $E=(-\infty, +\infty)$. 2.13. $D=(-\infty, 5/2)$, $E=$ $=[0, +\infty)$. 2.14. $D=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}[4\pi^2k^2, \pi^2(2k+1)^2]$, $E=[0, \pi]$. 2.15. $D=\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$, $E=[0, \pi]$. 2.16. $D=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{2\pi}{3}\left(3k+\frac{1}{2}\right), \frac{2\pi}{3}\left(3k+\frac{5}{2}\right)\right)$, $E=[-\infty, \ln 3]$. 2.17. $D=[-1, 1]$, $E=[0, 1]$. 2.18. $E=(2, 3)$, $E=\left(-\infty, \lg\frac{1}{4}\right]$. 2.19. $D=[-1, 1]$, $E=[0, \pi/4]$. 2.20. $D=[0, 2]$, $E=[1, 2^{\pi}]$. 2.21. $D=(-\infty, +\infty)$, $E=[1/e^2, +\infty)$. 2.22. $G=[0, 4]$. 2.23. $G=[1, 2]$. 2.24. $G=$ $=(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$. 2.25. $G=(0, 1/2]$. 2.26. $G=(1, 3]$. 2.27. $G=$ $=[0, \sqrt{2}/2)$. 2.28. $D_0=\{-1\}$, $D_+=(-1, +\infty)$, $D_-=(-\infty, -1)$. 2.29. $D_0=\{-1, 2\}$, $D_+=(-1, 2)$, $D_-=(-\infty, -1)\cup(2, +\infty)$. 2.30. $D_0=\{x\in\mathbb{R} \mid x=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$, $D_+=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}\right)$, $D_-=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\times$ $\times\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2(n+1)}\right)$. 2.31. $D_0=\{1\}$, $D_+=(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$, $D_-=(0, 1)$. 2.37. $f(x)=x^2-2$. 2.38. $f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. 2.39. $f(x)=\operatorname{sen} x$. 2.40. Par. 2.41. Ni par ni impar 2.42. Ni par ni impar. 2.43. Impar. 2.44. Ni par ni impar. 2.45. Impar. 2.47. $T=$ $=2\pi/7$. 2.48. $T=\pi/2$. 2.49. No periódica. 2.50. No periódica. 2.51. No periódica. 2.52. $T=6\pi$. 2.53. Si $a=0$, la función inversa no existe; si $a\neq 0$, entonces $y=\frac{x-b}{a}$ es la función inversa y $D=$ $=(-\infty, +\infty)$. 2.54. La inversa

$$y=\begin{cases} -\sqrt[3]{-x}+1, & \text{si } x\leqslant 0,\\ \sqrt[3]{x}+1, & \text{si } x>0.\end{cases} \quad D=(-\infty, +\infty),$$

2.55. La función inversa no existe. 2.56. La función inversa $y=\frac{1}{2}e^x$, $D=(-\infty, +\infty)$. 2.57. La inversa $y=2\log_2 x$, $D=$ $=(0, +\infty)$. 2.58. La función inversa $y=\frac{1-x}{1+x}$, $x\neq -1$.

2.60. a) $y=-\sqrt{x+1}$, $D=\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$; b) $y=\sqrt{x+1}$, $D=\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$. **26.1.** a) $y=\arcsen x$, $D=[-1, 1]$; b) $y=\pi+\arcsen x$, $D=[-1, 1]$. **2.62.** $y=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ x/2, & x>0. \end{cases}$ **2.63.** a) $y=\frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$; b) $y=\pi-\frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$; c) $y=\pi+\frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$. **2.65.** $f\circ g=1-x^2$, $g\circ f=(1-x)^2$. **2.66.** $f\circ g=x$, $x>0$; $g\circ f=x$. **2.67.** $f\circ g=x$, $g\circ f=$

$$=\begin{cases} x+\pi, & x\in[-\pi, -\pi/2), \\ x & x\in[-\pi/2, \pi/2], \\ x-\pi, & x\in(\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

2.68. $f\circ g=0$, $g\circ f=g$. **2.69.** a) x; b) $x/\sqrt{1+3x^2}$. **2.70.** $f(u)=\sqrt{u}$, $u=x^2$. **2.71.** $f(u)=\operatorname{sen} u$, $u=\cos v$, $v=\sqrt{x}$. **2.72.** $f(u)=2^u$, $u=\operatorname{sen} v$, $v=x^2$. **2.73.** $f(u)=\arcsen u$, $u=e^v$, $v=\sqrt[3]{x}$. **2.74.** $f(u)=\operatorname{sen} u$, $u=2^v$, $v=x^2$. **2.75.** $f(u)=u^{-1/3}$, $u=v^2$, $v=\operatorname{tg} t$, $t=\log_3 x$. **2.77.** $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$ **2.78.** $\{(-1, 2), (1, 2)\}$. **2.79.** $\{(2k\pi, k\pi) \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **2.80.** $\{(k\pi, 1) \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **2.81.** a) Una recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $(1, 2)$; b) una recta paralela al eje Ox que pasa por el punto $(0, -2)$; c) una recta que pasa por el punto $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto ángulos coordenados. **2.82.** a) La parábola $y=x^2$ desplazada en 1 hacia abajo a lo largo del eje Oy; b) la parábola $y=x^2$, estirada en 2 veces a lo largo del eje Oy, desplazada en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox; c) la parábola $y=x^2$ reflejada respecto al eje Ox, contraída en 2 veces a lo largo del eje Oy, desplazada en 2 a la izquierda a lo largo del eje Ox y en 3/2 hacia arriba a lo largo del eje Oy. **2.83.** a) La hipérbola $y=\frac{1}{x}$, desplazada en 1 hacia abajo a lo largo del eje Oy y en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox: b) la hipérbola $y=\frac{1}{x}$, reflejada respecto al eje Ox, estirada en dos veces a lo largo del eje Oy, desplazada en $\frac{1}{2}$ hacia abajo a lo largo del eje Oy y en 1 a la izquierda a lo largo del eje Ox. **2.84.** a) La sinusoide $y=\operatorname{sen} x$, contraída en dos veces a lo largo del eje Ox y desplazada en $\pi/6$ a la izquierda a lo largo del eje Ox; b) la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$, reflejada respecto del eje Ox, en dos veces estirada a lo largo del eje Oy, en dos veces estirada a lo largo del eje Ox y desplazada en $2\pi/3$ a la derecha a lo largo del eje Ox. **2.85.** a) la tangenzoide $y=\operatorname{tg} x$, en tres veces estirada a lo largo del eje Oy, en tres veces estirada a lo largo del eje Ox y desplazada en $3\pi/4$

a la izquierda a lo largo del eje Ox; b) la tangenzoide $y = \operatorname{tg} x$, reflejada respecto al eje Ox, contraída en dos veces a lo largo del eje Oy, contraída en dos veces a lo largo del eje Ox y desplazada en $3\pi/4$ a la izquierda a lo largo del ojo Ox. **2.86.** a) La gráfica de la función trigonométrica inversa $y = \arcsen x$, en 4 veces estirada a lo largo del eje Oy y desplazada en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox; b) la gráfica de la función $y = \arcsen x$, reflejada respecto del eje Ox, en 3/2 veces contraída a lo largo del eje Oy y desplazada en 1/2 a lo largo del eje Ox a la izquierda. **2.87.** a) La gráfica de la función trigonométrica inversa $y = \operatorname{arctg} x$, reflejada respecto al eje Ox, en tres veces estirada respecto al eje Oy y desplazada en 5/2 a lo largo del eje Ox a la izquierda; b) la gráfica de la función $y = \operatorname{arctg} x$, en 5/2 veces contraída a lo largo del eje Oy y desplazada en 6 a la derecha a lo largo del eje Ox. **2.88.** La gráfica de la función exponencial $y = 2^x$, reflejada respecto del eje Oy y desplazada en 1 a lo largo del eje Ox a la derecha; b) gráfica de la función $y = 2^x$, reflejada respecto del eje Oy, dos veces contraída a lo largo del eje Ox y desplazada en 1 a la derecha a lo largo del eje Ox. **2.89.** a) La gráfica de la función logarítmica $y = \ln x$, desplazada en 1 hacia arriba a lo largo del eje Oy y en 1/10 a la derecha a lo largo del eje Ox; b) la gráfica de la función $y = \ln x$, reflejada respecto del eje Ox, desplazada en $\lg 2$ hacia arriba a lo largo del eje Oy y en 4, a la izquierda a lo largo del eje Ox.

2.90 [1].

$$y = \begin{cases} -2x, & x \in (-\infty, -2], \\ 4, & x \in (-2, 2], \\ 2x, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

2.91.

$$y = \begin{cases} (x+1)^3 - 1, & x \in (-\infty, 0], \\ x^2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

2.92. $$y = \begin{cases} (x+3)^2, & x \in (-\infty, 0], \\ (x-3)^2, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

2.93. $$y = \begin{cases} 6\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{25}{24}, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right] \cup [0, +\infty), \\ -6\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{23}{24}, & x \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right). \end{cases}$$

2.94. $$y = \begin{cases} -(x+1)^2 + 1, & x \in (-\infty, 1], \\ (x+1)^2 - 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

2.95. $$y = \begin{cases} 2(x-1), & x \in (-\infty, 1], \\ 0, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

2.96. $$y = \begin{cases} 2 - \dfrac{7}{x+2}, & x \in (-\infty, -2) \cup [3/2, +\infty), \\ -2 + \dfrac{7}{x+2}, & x \in (-2, 3/2). \end{cases}$$

---

[1]) Aquí y en lo que sigue, en las respuestas para todos los problemas análogos de este párrafo, de hecho se aduce el tipo de función inicial del cual se obtiene con facilidad la gráfica de la misma.

2.97. $y=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x+2}, & x\in(-\infty,\ -2), \\ -1+\dfrac{1}{x+2}, & x\in(-2,\ 0], \\ 1-\dfrac{3}{x+2}, & x\in(0,\ +\infty). \end{cases}$

2.98. Si $x\in(-\infty,\ 0)$, la recta $y=-1$; si $x\in(0,\ +\infty)$, la recta $y=1$; si $x=0$, la recta $y=0$. 2.99. Si $x\in[n,\ n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, la recta $y=n$. 2.100. Si $x\in[n,\ n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, la recta $y=x-n$.

2.101. $y=\begin{cases} 2^{-x}-1, & x\in(-\infty,\ 0], \\ 2^{x}-1, & x\in(0,\ +\infty). \end{cases}$

2.102. $y=\begin{cases} 3^{x+1}+2, & x\in(-\infty,\ -1], \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+2, & x\in(-1,\ +\infty). \end{cases}$

2.103. $y=\begin{cases} \log_{1/2}(3-x), & x\in(-\infty,\ 3), \\ \log_{1/2}(x-3), & x\in(3,\ +\infty). \end{cases}$

2.104. $y=\begin{cases} -\log_2(x+1), & x\in(-1,\ 0], \\ \log_2(x+1), & x\in(0,\ +\infty). \end{cases}$

2.105.

$$y=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4}-2k\pi & x\in\left[2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},\ \ 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right], \qquad k\in\mathbb{Z}. \\ x+\dfrac{\pi}{4}-(2k+1)\pi, & \\ x\in\left((2k+1)\pi-\dfrac{3\pi}{4},\ \ (2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{4}\right). & \end{cases}$$

2.106.

$$y=\begin{cases} 3x-2k\pi, & x\in\left[2k\dfrac{\pi}{3},\ (2k+1)\dfrac{\pi}{3}\right]. \\ 3x-(2k+1)\pi, & x\in\left((2k+1)\dfrac{\pi}{3},\ 2(k+1)\dfrac{\pi}{3}\right), \end{cases} \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

2.107.

$$y=\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in[2k\pi,\ (2k+1)\pi], \\ \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in((2k+1)\pi,\ 2(k+1)\pi), \end{cases} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

2.108. $y=\begin{cases} -\operatorname{arctg}(x-1), & x\in(-\infty,\ 1], \\ \operatorname{arctg}(x-1), & x\in(1,\ +\infty), \end{cases}$

2.109. $$y=\begin{cases} x, & x\in\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \\ -x, & x\in\left((2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{2},\ (2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

2.110.

$$y=\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in\left[k\pi-\dfrac{\pi}{4},\ k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right],\\ -\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4},\ (k+1)\pi-\dfrac{\pi}{4}\right),\end{cases}\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

2.111. $y=\dfrac{1}{2}(1-\cos x)$. **2.112.** El segmento de la recta $y=\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5}$, $x\in[-7,\ 3]$. **2.113.** Los ejes de coordenadas.

2.114. La curva, simétrica respecto a ambos ejes de coordenadas; en el primer cuadrante una parte de la parábola $y=-(x-1)^2+4$ para $x\in[0,\ 3]$ y una parte de la parábola $y=(x-1)^2-4$ para $x\in(0,\ +\infty)$. **2.115.** El cuadrado de vértices $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ -1)$. **2.116.** El cuadrado cuyos lados son $x=\pm 1/2$, $y=\pm\dfrac{1}{2}$.
2.117. La curva, simétrica respecto de ambos ejes de coordenadas y la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero; en la región $G=\{(x,\ y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x\geqslant y\}$, el rayo $y=x-1$. **2.118.** La curva simétrica respecto de ambos ejes de coordenadas; en el primer cuadrante es un segmento de la recta $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cuando $y\leqslant\dfrac{1}{2}$, y un segmento de la recta $y=1-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ cuando $y>\dfrac{1}{2}$.

3.1. $0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \ldots$ **3.2.** $2,\ 0,\ 6,\ 0,\ 10,\ \ldots$ **3.3.** $-8,\ 11,\ \dfrac{14}{3},\ \dfrac{17}{5},\ \dfrac{20}{7},\ \ldots$ **3.4.** $\dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{7\pi}{3},\ \dfrac{8\pi}{3},\ \dfrac{13\pi}{3},\ \dfrac{14\pi}{3},\ \ldots$
3.5. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$. **3.6.** $x_n=1+(-1)^n$. **3.7.** $x_n=\dfrac{2n}{2n-1}$. **3.8.** $x_n=n\cos\dfrac{\pi(n-1)}{2}$. **3.9.** $x_n=(-1)^n\dfrac{2n+1}{2n-1}$. **3.10.** $x_n=\operatorname{sen}\dfrac{(n-1)\pi}{4}$.

3.11. El término mayor $x_3=4$. **3.12.** El término mayor $x_5=e$. **3.13.** El término mayor $x_9=1/6$. **3.14.** El término menor $x_2=-22$. **3.15.** El término menor $x_8=24$. **3.16.** El término menor $x_3=-9/8$. **3.17.** a) $\exists A>0\forall n\in\mathbb{N}\ (|x_n|\leqslant A)$; $\forall A>0\exists n\in\mathbb{N}\ (|x_n|>A)$. b) $\forall n\in\mathbb{N}\ (x_n<x_{n+1})$; $\exists n\in\mathbb{N}\ (x_n\geqslant x_{n+1})$. c) $\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\ (n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon)$; $\exists\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\exists n\in\mathbb{N}\times(n>N\wedge|x_n-a|\geqslant\varepsilon)$. d) $\forall E>0\exists N\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}\ (n>N\Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n| > E)$; $\exists E > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}\ (n > N \wedge |x_n| \leqslant E)$. e) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}\ (|x_n - a| < \varepsilon)$; $\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N}\ (|x_n - a| \geqslant \varepsilon)$. **3.18.** a) $a = 1/3$; $N = 3$; b) $a = 1$, $N = 10$; c) $a = 0$, $N = 999$; d) $a = 5/7$, $N = 3$. **3.19.** $-5/9$. **3.20.** $-1/2$. **3.21.** 0. **3.22.** 0. **3.23.** -1. **3.24.** $1/2$. **3.25.** $1/3$. **3.26.** 0. **3.27.** 1. **3.28.** $1/6$. **3.30.** Lo es. **3.31.** No lo es. **3.32.** No lo es. **3.33.** Lo es.

3.34. $1/3$, 3. **3.35.** 0, $\sqrt{2}/2$, 1, $-\sqrt{2}/2$, -1. **3.36.** $\pi/6$, $-\pi/6$. **3.38.** $\inf\{x_n\} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\sup\{x_n\} = 2$. **3.39.** $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\} = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\sup\{x_n\} = 5/4$. **3.40.** La sucesión no es acotada superiormente ni inferiormente: $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$. **3.41.** $\inf\{x_n\} = -\sqrt{3}$, $\sup\{x_n\} = 2\sqrt{3}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.42.** $\inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}$, $\sup\{x_n\} = \frac{3}{2}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$. **4.4.** $\forall E > 0 \exists \delta < 0\ (0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E)$. **4.5.** $\forall E > 0 \exists \delta > 0\ (-\delta < x - 1 < 0 \Rightarrow f(x) < -E)$. **4.6.** $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0\ (x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$. **4.7.** $\forall E > 0 \exists A > 0\ (x > A \Rightarrow f(x) > E)$. **4.8.** $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\ (0 < x < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$. **4.9.** $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0\ (|x| > A \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon)$. **4.10.** $\forall E > 0 \exists A > 0\ (x < -A \Rightarrow f(x) < -E)$. **4.11.** $\forall E > 0 \exists A > 0\ (x < -A \Rightarrow |f(x)| > E)$. **4.12.** -2. **4.13.** 2. **4.14.** ∞. **4.15.** 0. **4.16.** m/n. **4.17.** $3x^2$. **4.18.** 6. **4.19.** $(a-1)/3a^2$. **4.20.** $1/4$. **4.21.** ∞. **4.22.** $n+1$. **4.24.** $3/5$. **4.25.** $1/6$. **4.26.** $\sqrt{2}/2$. **4.27.** $\sqrt{2/3}$. **4.28.** $1/n$. **4.29.** m/n. **4.30.** $3/2$. **4.31.** $3\sqrt[6]{2}/2$. **4.32.** 0. **4.33.** $1/2$. **4.34.** $-7/4$. **4.35.** 2. **4.36.** 3. **4.37.** $7/3$. **4.38.** $1/\pi$. **4.39.** $3/4$. **4.40.** 2. **4.41.** $(\alpha^2 - \beta^2)/2$. **4.42.** 0. **4.43.** $-\alpha/\pi$. **4.44.** $-\sqrt{2}/4$. **4.45.** 1. **4.46.** ◀ Al observar que $\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{1/x}$ y aprovechando la continuidad de la función $f(x) = \log_a x$ (véase el problema 4.105) podemos escribir: $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}) = \log_a e$. ▶ **4.47.** ● Hágase el cambio de la variable $a^x - 1 = y$. **4.48.** ● Hágase el cambio de la variable $(1+x)^a - 1 = y$. Entonces, $a \ln(1+x) = \ln(1+y)$. Por consiguiente, $\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\ln(1+x)} \cdot a \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$. **4.49.** e^{10}. **4.50.** e^{10}. **4.51.** $e^{-1/2}$. **4.52.** e^3. **4.53.** 2. **4.54.** 1. **4.55.** $\ln a$. **4.56** $a \ln a$. **4.57.** $1/a \log_a e$. **4.58.** $a - b$. **4.63.** $+1$, -1. **4.64.** $-\infty$, $+\infty$ **4.65.** $+\infty$, 0. **4.66.** 0, $+\infty$. **4.67.** $\pi/2$, $-\pi/2$. **4.68.** $0, -1$. **4.69.** $2, -2$.

4.70. $-\infty$, $-\infty$. 4.74. 3/2. 4.75. 2/3. 4.76. 1. 4.77. 3. 4.78. 1. 4.79. 3. 4.80. 1/3. 4.81. 1/2. 4.82. 1/2. 4.83. 1/2. 4.85. 0,97. 4.86. 5,03. 4.87. 1,15. 4.88. 0,88. 4.91. $-\ln 10$. 4.92. 3. 4.93. -2. 4.94. 2/3. 4.95. 8/9 4.96. $3\sqrt{2}/2$. 4.97. 3. 4.98. 1. 4.99. 1/2. 4.100. 2/3. 4.101. 2. 4.102 1/6. 4.109. $A=3$. 4.110. $a=2$. 4.111. $b=\pi a/2$. 4.112. $x_1=0$, $x_2=1$ son puntos de discontinuidad de segunda especie. 4.113. $x=5/3$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.114. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0)=n$. 4.115. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0)=1$. 4.116. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0)=1$; 4.117. $x_1=2$, $x_2=-2$ son los puntos de discontinuidad de segunda especie. 4.118. $x=0$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.119. $x=-2$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.120. $x=2$ es un punto de discontinusdad de primera especie. 4.121. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable, $f(0)=2$; $x=\pm 1$ son los puntos de discontinuidad de segunda especie. 4.122. $x_1=0$ es un punto de discontinuidad evitable, $f(0)=-1$; $x_2=1$ es un punto de discontinuidad evitable, $f(1)=0$; $x_3=-1$ es un punto de discontinuidad de segunda especie. 4.123. $x=0$ es un punto de discontinuidad evitable; $f(0)=1/2$. 4.124. $x=1$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.125. $x=1$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.126. $x=2{,}5$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.127. $x=\pi/4$ es un punto de discontinuidad de primera especie. 4.133. $(\forall\varepsilon>0\forall x_0\in D\exists\delta>0\ (|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon))\wedge(\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\exists x',\quad x''\in D\ (|x'-x''|<\delta\wedge|f(x')-f(x'')|>\varepsilon))$. 4.136. Uniformemente continua. 4.137. No es uniformemente continua. 4.138. Uniformemente continua. 4.139. No es uniformemente continua. 4.140. Uniformemente continua. 4.141. No es uniformemente continua. 4.142. No es uniformemente continua.

5.4 $9+7i$. 5.5. $-3+4i$. 5.6 $-4i$. 5.7. $-29+22i$. 5.9. $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i$. 5.10. i. 5.11. $\frac{14}{5}i$. 5.12. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. 5.13. $x=2$, $y=3$. 5.14. $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$. 5.15. $z_1=1$, $z_2=i$. 5.16. $z_1=2+i$, $z_2=2-i$. 5.17. $\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$. 5.18. $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$. 5.19. $\cos\times\times\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$. 5.20. $\cos\frac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$. 5.21. $\cos\frac{6\pi}{7}+i\operatorname{sen}\frac{6\pi}{7}$. ● Determínese el ángulo φ que satisface las condiciones: $\varphi\in[0,2\pi)$, $\cos\varphi=-\cos\frac{\pi}{7}$, $\operatorname{sen}\varphi=\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$. 5.22. $\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$. 5.23. $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}\right)$. 5.30. a) $-4i$, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $10-2i$, $-\frac{7}{4}-\frac{1}{4}i$. 5.32. $\frac{3}{2}-2i$. 5.33. $\frac{3}{4}+i$. 5.35. El desplamiento sobre el vector $a(-2,0)$. 5.36. El desplazamiento sobre el vector $a(3,-1)$. 5.37. El giro en un ángulo $\pi/2$

en sentido antihorario. 5.38. El giro del ángulo $\pi/4$ en sentido horario. 5.39. Simetría respecto del origen de coordenadas. 5.40. Homotecia con centro en el origen de coordenadas y coeficiente $k = 2$. 5.41. El giro en un ángulo $\pi/4$, en el sentido antihorario con la homotecia posterior de centro en el origen de coordenadas y coeficiente $1/\sqrt{2}$. 5.42. La reflexión respecto del eje real. 5.44. a) La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados. b) ● Hágase uso de la identidad a). 5.45. Semiplano $x \geqslant 0$. 5.46. Franja $0 \leqslant y < 1$. 5.47. Franja $|y| \leqslant 2$. 5.48. El interior de un círculo de radio 1 y centro en el origen de coordenadas. 5.49. Circunferencia $x^2 + (y+1)^2 = 4$. 5.50. Anillo encerrado entre las circunferencias γ_1: $(x+2)^2 + y^2 = 1$ y γ_2: $(x+2)^2 + y^2 = 4$ (γ_1 no pertenece al anillo). 5.51. $D = \{(x, y) \mid y^2 > 1 - 2x\}$. 5.52. Una recta $2x + y + \frac{3}{2} = 0$. 5.53. Un sector limitado por los rayos $l_1 = \{(x, y) \mid y = 0,\ x \geqslant 0\}$ y $l_2 = \{(x, y) \mid y = x,\ x \geqslant 0\}$ (el rayo l_1 no pertenece al sector). 5.54. Un sector limitado por los rayos $l_1 = \{(x, y) \mid y = x,\ x < 0\}$ y $l_2 = \{(x, y) \mid y = -x,\ x \leqslant 0\}$.

5.55. Eje Ox. 5.57. $5e^{i\operatorname{arctg}\frac{24}{7}}$. 5.58. $13e^{i\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)}$.

5.59. $5e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi\right)}$. 5.60. $\sqrt{5}e^{i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}$.

5.61. $e^{i\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$. 5.62. $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ cuando $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} > 0$, $-2\operatorname{sen}\times$ $\times\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$ cuando $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} < 0$. 5.64. a) $24e^{-\frac{\pi i}{2}}$, $\frac{8}{3}$ b) $16e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. 5.67. $32i$. 5.68. 2. 5.69. $512(1 - i\sqrt{3})$

5.70. $-\frac{1}{4}$. 5.72. a) $\frac{1}{4}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)$; b) $\frac{1}{4}(3\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}3\varphi)$.

5.73. $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$. 5.74. $3\operatorname{sen}\varphi - 4\operatorname{sen}^3\varphi$. 5.75. $\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^4\varphi$. 5.76. $4\operatorname{sen}\varphi\cos^3\varphi - 4\cos\varphi\operatorname{sen}^3\varphi$. 5.77. Las raíces de segundo grado de la unidad: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ las raíces de tercer grado de la unidad: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; las raíces de cuarto grado de la unidad: $z_1 = 1$ $z_2 = i$, $z_3 = -1$ $z_4 = -i$. 5.78. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. 5.79. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$. 5.80. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9}k\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{9}k\right)$, $k = 0, 1, \ldots, 8$. 5.81. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$. 5.82. $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$. 5.83. $\sqrt[10]{2}\left(\cos\times\right.$

$\times\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)\Big)$, $\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$ **5.84.** $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$ **5.85.** $2\sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{5}\right)\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$ **5.87.** $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}$. **5.88.** $\dfrac{\operatorname{sen}2n\varphi}{2\operatorname{sen}\varphi}$.

5.89. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 n\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$. **5.90.** $-1\pm 2i$. **5.91.** $\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$. **5.92.** $-2+i$, $-3+i$. **5.93.** $1+i$, $2-3i$. **5.94.** 1, $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.95.** -1, $\frac{1}{2}\pm$ $\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.96.** 1, -3, $-1\pm 2i$. **5.97.** $(-1+\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$, $(-1,-\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$. **5.98.** $z_{1,2}=z_{3,4}=\pm 3i$. **5.99.** $\pm i$, $\pm\sqrt{3}i$. **5.100.** $\pm 2i$; $\pm\sqrt{5}i$. **5.101.** $\pm(1+i)$, $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$.

5.102. $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, -1, $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, $-\sqrt[3]{3}$. **5.103.** ± 1, $\pm i$, $\pm\sqrt{2}(1\pm i)$. **5.104.** $x=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\pi k}{n}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, donde $\alpha=\operatorname{arctg}a$. ● Hágase $a=\operatorname{tg}\alpha$, $x=\operatorname{tg}y$ y úsese la forma trigonométrica del número complejo. **5.105.** $(z-1)(z+1)(z^2+1)$. **5.106.** $(z^2-z\sqrt{2}+1)(z^2+z\sqrt{2}+1)$. **5.107.** $(z^2-z+1)(z^2+z+1)$. **5.108.** $(z^2+2z+2)(z^2+2z+5)$. **5.109.** $(z-1)(z^2+z+1)^2$. **5.110.** $(z^2-2z+5)(z^2+8z+20)$. **5.114.** $2-i$. **5.115.** -1. **5.116.** $\frac{5}{3}i$. **5.117.** $-\frac{7}{5}+\frac{14}{5}i$. **5.118.** 1. **5.119.** 0. **5.120.** ∞. **5.121.** ∞

5.122. $\dfrac{-1-5i}{26}$. **5.123.** $\frac{3}{10}(3+i)$. **5.124.** $1+ie$. **5.125.** $\dfrac{11+3i}{10}$.

5.126. $e^3(\cos 2+i\operatorname{sen}2)$. **5.135.** 0. **5.136.** 0. **5.137.** $\dfrac{1}{1-z}$. **5.138.** 0.

5.139. $\dfrac{1-z_2}{1-z_1}$.

CAPITULO 2

ALGEBRA VECTORIAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

§ 1. Algebra vectorial

1. Operaciones lineales con los vectores. Se denomina *vector* $\boldsymbol{a}$ (*vector geométrico*) al conjunto de todos los segmentos dirigidos que tienen longitud y dirección iguales. De cualquier segmento $\overline{AB}$, perteneciente a dicho conjunto, suele decirse que representa un vector $\boldsymbol{a}$ (obtenido por aplicación del vector $\boldsymbol{a}$ al punto A). La longitud del segmento $\overline{AB}$ lleva el nombre de *longitud* (*módulo*) del vector $\boldsymbol{a}$ y se denota por el símbolo $|\boldsymbol{a}| = |AB|$. El vector de longitud nula se denomina *vector nulo* y se denota por el símbolo 0.

Los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se denominan *iguales* ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$), si coinciden los conjuntos de segmentos dirigidos que representan dichos vectores.

En toda una serie de problemas resulta, a menudo, conveniente no distinguir el vector y cualquier segmento dirigido que lo representa. Precisamente en este sentido, por ejemplo, se debe entender la expresión «construir» un vector.

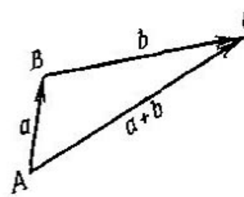


Fig. 10

Supongamos que el segmento dirigido $\overline{AB}$ representa el vector $\boldsymbol{a}$. Al aplicar al punto B el vector dado $\boldsymbol{b}$, obtendremos un segmento dirigido $\overline{BC}$. Un vector, representado por el segmento dirigido $\overline{AC}$ se llama suma de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y se designa $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (fig. 10).

Se llama *producto del vector* $\boldsymbol{a}$ *por un número real* λ al vector, denotado $\lambda\boldsymbol{a}$, tal que:

1) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;

2) los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\lambda\boldsymbol{a}$ están orientados según la misma dirección cuando $\lambda > 0$, y tienen dirección opuesta cuando $\lambda < 0$.

1.1. Demuéstrese que la operación de adición de los vectores posee las siguientes propiedades:

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$;

b) $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1$ (*conmutatividad*);

c) $\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_3$ (*asociatividad*);

d) $\forall a \, \exists! \, b \, (a + b = 0)$
(b se llama vector *opuesto* al vector a y se denota por el símbolo $-a$);

e) $\forall a_1, a_2 \exists! \, a_3 \, (a_1 + a_3 = a_2)$
(a_3 se llama *diferencia* entre los vectores a_2 y a_1 y se denota por el símbolo $a_2 - a_1$).

1.2. Demuéstrense las igualdades:

a) $-a = (-1)\,a$; b) $a_2 - a_1 = a_2 + (-a_1)$;

c) $a = |\,a\,|\,a_0$, donde a_0 es un *versor* del vector a, es decir, un vector de longitud unidad y de la misma dirección que tiene el vector a $(a \neq 0)$.

1.3. En un paralelepípedo $ABCDA'B'C'D'$ los vectores m, n, p están representados por las aristas $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA'}$, respectivamente. Constrúyanse los vectores:

a) $m + n + p$; b) $1/2m + 1/2n - p$; c) $-m - n + 1/2p$.

1.4. Sean dados los vectores a_1 y a_2. Constrúyanse los vectores $3a_1$, $1/2a_2$, $a_1 + 2a_2$, $1/2a_1 - a_2$.

1.5. Demuéstrese que:

a) la operación de multiplicación del vector por un número posee las siguientes propiedades:

$$0a = \lambda 0 = 0, \quad (\lambda_1\lambda_2)\,a = \lambda_1\,(\lambda_2 a);$$

b) las operaciones de adición de los vectores y multiplicación de éstos por un número, están entrelazadas mediante las siguientes dos propiedades de *distributividad*:

$$\lambda\,(a_1 + a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2 \text{ y } (\lambda_1 + \lambda_2)\,a = \lambda_1 a + \lambda_2 a.$$

1.6. Demuéstrense las igualdades:

a) $a + {}^1/_2\,(b - a) = {}^1/_2\,(a + b)$; b) $a - {}^1/_2\,(a + b) = {}^1/_2\,(a - b)$. ¿Cuál es su significado geométrico?

1.7. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son las medianas del triángulo ABC. Demuéstrese la igualdad $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = 0$.

1.8. En el paralelogramo $ABCD$ se designan: $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$. Exprésense en términos de a y b los vectores $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ y $\overline{MD}$, donde M es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo.

1.9. $ABCDEF$ es un hexágono regular, siendo $\overline{AB} = p$, $\overline{BC} = q$. Exprésense en términos de p y q los vectores $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$.

1.10. M es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC, O es un punto arbitrario del espacio. Demuéstrese la igualdad $\overline{OM} = {}^1/_3\,(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

1.11. En un espacio están dados los triángulos ABC y $A'B'C'$; M y M' son los puntos de intersección de sus medianas. Exprésense el vector $\overline{MM'}$ mediante los vectores $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$.

1.12. E y F son los puntos medios de los lados $[AD]$ y $[BC]$ del cuadrilátero $ABCD$. Demuéstrese que $\overline{EF} = {}^1/_2\,(\overline{AB} + \overline{DC})$. Dedúzcase de aquí el teorema de la línea media de un trapecio.

1.13. En el trapecio $ABCD$ la razón entre la longitud de la base $[AD]$ y la de la base $[BC]$ equivale a λ. Suponiendo $\overline{AC} = \boldsymbol{a}$ y $\overline{BD} = \boldsymbol{b}$, exprésense los vectores $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ por medio de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Un sistema de vectores $a_1, \ldots, a_n$ se llama *linealmente dependiente*, si existen tales números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que por lo menos uno de ellos es distinto de cero y $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = 0$. En el caso contrario el sistema es linealmente independiente.

1.14. Demuéstrense los siguientes criterios geométricos de la dependencia lineal:

a) el sistema $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ es linealmente dependiente cuando, y sólo cuando, los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ son *colineales*, es decir, sus direcciones coinciden o bien son opuestas;

b) el sistema $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ es linealmente dependiente cuando, y sólo cuando, los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$ son *coplanares*, esto es, son paralelos a cierto plano;

c) todo sistema de $n \geqslant 4$ vectores es linealmente dependiente.

1.15. En el lado $[AD]$ del paralelogramo $ABCD$ está marcado un vector $\overline{AK}$ de longitud $|\overline{AK}| = {}^1/_5\,|\overline{AD}|$, y en la diagonal $[AC]$, un vector $\overline{AL}$ de longitud $|\overline{AL}| = {}^1/_6\,|\overline{AC}|$. Demuéstrese que los vectores $\overline{KL}$ y $\overline{LB}$ son colineales y hállese tal λ que se verifique $\overline{KL} = \lambda\cdot\overline{LB}$.

1.16. Demuéstrese que para cualesquiera vectores dados $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ los vectores $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ son coplanares.

1.17. Sean dados tres vectores no coplanares $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Demuéstrese que los vectores $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$ son coplanares.

1.18. Sean dados tres vectores no coplanares $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Calcúlese los valores de λ, para los cuales los vectores $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$ son coplanares.

1.19. Sean dados tres vectores no coplanares $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Calcúlense los valores de λ y μ, para los cuales los vectores $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$ son colineales.

2. Base y coordenadas de un vector. Una terna ordenada de vectores no coplanares $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ lleva el nombre de *base* en el conjunto de todos los vectores geométricos. Todo vector geométrico $\boldsymbol{a}$ puede ser representado unívocamente en la forma

$$\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{e}_1+X_2\boldsymbol{e}_2+X_3\boldsymbol{e}_3; \tag{1}$$

los números X_1, X_2, X_3 se denominan *coordenadas* del vector $\boldsymbol{a}$ en la base $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. La notación (1) se denomina, además, descomposición del vector $\boldsymbol{a}$ según la base $\mathfrak{B}$.

Análogamente, un par ordenado de vectores no colineales $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ se llama base $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ en un conjunto de vectores geométricos coplanares respecto a cierto plano.

Por fin, todo vector no nulo $\boldsymbol{e}$ forma una base $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e})$ en un conjunto de todos los vectores geométricos colineales con relación a cierta dirección.

Si el vector $\boldsymbol{a}$ es una *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ con coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, es decir,

$$\boldsymbol{a}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\boldsymbol{a}_k,$$

entonces cada coordenada $X_i(\boldsymbol{a})$ del vector $\boldsymbol{a}$ es igual a la suma de productos de los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ por las coordenadas homónimas de los vectores $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$:

$$X_i(\boldsymbol{a})=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_i(\boldsymbol{a}_k), \quad i=1, 2, 3.$$

La base $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ se llama rectangular, si los vectores $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ son perpendiculares dos a dos y tienen longitud unidad. En este caso se han adoptado las siguientes designaciones

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Se denomina *proyección* del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el vector $\boldsymbol{e}$ el número $\operatorname{pr}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$, donde $\varphi=\widehat{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e})}$ es el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{e}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$.

Las coordenadas X, Y, Z del vector $\boldsymbol{a}$ en la base rectangular coinciden con las proyecciones del vector $\boldsymbol{a}$ sobre los versores básicos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, respectivamente, mientras que la longitud del vector $\boldsymbol{a}$ es igual a

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{3}$$

Los números

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{a, i}) = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\beta = \cos(\widehat{a, j}) = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos(\widehat{a, k}) = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

reciben el nombre de *cosenos directores* del vector $\boldsymbol{a}$.

1.20. Sea dado el tetraedro $OABC$. En la base de las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ hállense las coordenadas:

a) del vector $\overline{DE}$, donde D y E son los puntos medios de las aristas $\overline{OA}$ y $\overline{BC}$;

b) del vector $\overline{OF}$, donde F es el punto de intersección de las medianas de la base ABC.

1.21. En el tetraedro $OABC$ la mediana $[AL]$ de la arista ABC se divide por el punto M en la razón $|\overline{AM}|:|\overline{ML}| = 3:7$. Hállense las coordenadas del vector $\overline{OM}$ en la base de las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$.

1.22. Fuera del plano del paralelogramo $ABCD$ se ha elegido un punto O. En la base de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ hállense las coordenadas:

a) del vector $\overline{OM}$, donde M es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo;

b) del vector $\overline{OK}$, donde K es el punto medio del lado $[AD]$.

1.23. En el trapecio $ABCD$ se conoce la razón entre las longitudes de las bases: $|\overline{AB}|/|\overline{CD}| = \lambda$. Hállense las coordenadas del vector $\overline{CB}$ en la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.

En lo sucesivo los vectores vienen representados, siempre que no se diga lo contrario, por sus coordenadas en cierta base rectangular. La notación $\boldsymbol{a}(X, Y, Z)$ quiere decir que las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ son iguales a X, Y, Z, es decir, $\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$.

1.24. Sean dados los vectores $\boldsymbol{a}_1(-1, 2, 0)$, $\boldsymbol{a}_2(3, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_3(2, 0, 1)$ y $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + 1/3\boldsymbol{a}_3$. Calcúlense:

a) $|a_1|$ y las coordenadas del versor $a_{1,0}$ del vector a_1;

b) $\cos(\widehat{a_1, j})$;

c) la coordenada X del vector a;

d) $\text{pr}_j\, a$.

1.25. Sean dados los vectores $e(-1, 1, {}^1/_2)$ y $a(2, -2, -1)$. Convénzase de que son colineales y hállese la descomposición del vector a según la base $\mathfrak{B} = (e)$.

1.26. En un plano están dados los vectores $e_1(-1, 2)$, $e_2(2, 1)$ y $a(0, -2)$. Convénzase de que $\mathfrak{B} = (e_1, e_2)$ es una base en el conjunto de todos los vectores en el plano. Constrúyanse los vectores dados y hállese la descomposición del vector a según la base $\mathfrak{B}$.

1.27. Sea dada una terna de vectores no coplanares $e_1(1, 0, 0)$, $e_2(1, 1, 0)$ y $e_3(1, 1, 1)$. Calcúlense las coordenadas del vector $a = -2i - k$ en la base $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ y escríbase la descomposición correspondiente según la base.

1.28. Sean dados los vectores $a = 2i + 3j$, $b = -3j - 2k$, $c = i + j - k$. Hállense:

a) las coordenadas del versor a_0;

b) las coordenadas del vector $a - {}^1/_2 b + c$;

c) la descomposición del vector $a + b - 2c$ según la base $\mathfrak{B} = (i, j, k)$;

d) $\text{pr}_j(a - b)$.

1.29. Hállese el vector x, colineal al vector $a = i - 2j - 2k$, que forma con el versor j un ángulo agudo y cuya longitud es $|x| = 15$.

1.30. Hállese el vector x que forma con todos los tres versores básicos ángulos agudos iguales, si $|x| = 2\sqrt{3}$.

1.31. Hállese el vector x que forma con el versor j un ángulo de 60° y con el versor k, un ángulo de 120°, si $|x| = 5\sqrt{2}$.

1.32. ¿Para qué valores de α y β los vectores $a = -2i + 3j + \alpha k$ y $b = \beta i - 6j + 2k$ son colineales?

1.33.* Hállese el vector x, dirigido a lo largo de la bisectriz del ángulo entre los vectores $a = 7i - 4j - 4k$ y $b = -2i - j + 2k$, si $|x| = 5\sqrt{6}$.

1.34. Sean dados los vectores: $a(1, 5, 3)$, $b(6, -4, -2)$, $c(0, -5, 7)$ y $d(-20, 27, -35)$. Se requiere elegir los números α, β y γ de tal modo que los vectores αa, βb, γc y d formen una línea quebrada cerrada, si el «origen» de cada vector sucesivo se hace coincidir con el «extremo» del anterior.

3. Coordenadas rectangulares cartesianas de un punto. Problemas elementales de la geometría analítica. Dicen que en un espacio tridimensional está introducido un *sistema de coordenadas rectangulares cartesianas* $(O, \mathfrak{B})$, si se han dado:

1) cierto punto O, llamado *origen de coordenadas*;

2) cierta base rectangular $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ en el conjunto de todos los vectores geométricos.

Los ejes Ox, Oy y Oz, trazados por el punto O en dirección de los versores básicos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, y $\boldsymbol{k}$, se llaman *ejes coordenados* del sistema de coordenadas $(O, \mathfrak{B}) = Oxyz$.

Si M es un punto arbitrario del espacio, entonces el segmento dirigido $\overline{OM}$ se denomina *radio vector* del punto M. Se llaman *coordenadas del punto* M en el sistema $(O, \mathfrak{B})$ las coordenadas de su radio vector OM como vector geométrico en la base $\mathfrak{B}$, es decir,

$$x(M) = X(\overline{OM}), \quad y(M) = Y(\overline{OM}), \quad z(M) = Z(\overline{OM}).$$

Si $M_1(x_1, y_1, z_1)$ y $M_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos arbitrarios en el espacio, entonces las coordenadas del vector $\overline{M_1M_2}$ son iguales a

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1. \tag{4}$$

De aquí, en virtud de (3), la distancia entre los puntos se expresa según la fórmula

$$\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Al resolver los problemas de la geometría analítica es conveniente emplear al máximo los métodos del álgebra vectorial.

Ejemplo 1. Sean dados los vértices $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 1)$ y el punto $E(-1, 2, 1)$ en el que se cortan las medianas del triángulo ABC. Hállense las coordenadas del vértice C.

◀ Por cuanto las coordenadas del vértice A están prefijadas, para calcular las coordenadas del vértice C basta hallar las coordenadas del vector $\overline{AC}$. Sea $\overline{BF}$ una mediana trazada desde el vértice B. En este caso

$$\overline{AC} = 2\overline{AF} = 2(\overline{BA} + \overline{BF}) = 2(\overline{AB} + \frac{3}{2}\overline{BE}) \tag{5}$$

(se ha utilizado aquí el hecho de que el punto E divide la mediana BF en razón de $2:1$). Luego, partiendo de las condiciones de problema, calculamos, con ayuda de la fórmula (4), las coordenadas de los vectores $\overline{AB}(1, 2, 2)$ y $\overline{BE}(-3, 0, 0)$, de donde, en virtud de la (5), obtenemos $\overline{AC}(-7, 4, 4)$ y, finalmente, aplicando nuevamente la fórmula 4), encontramos las coordenadas del punto C:

$$x(C) = x(A) + X(\overline{AC}) = -6;$$

$$y(C) = y(A) + Y(\overline{AC}) = 4;$$

$$z(C) = z(A) + Z(\overline{AC}) = 3. \ ▶$$

Supongamos que en la recta l están dados los punto M_1, M_2 y M, con la particularidad de que $M_1 \neq M_2$. Veamos los vectores $\overline{M_1M}$ y $\overline{MM_2}$. Puesto que son colineales, se encontrará tal número real λ que

$\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$. El número λ se llama *razón*, en la cual el punto M divide el segmento dirigido $\overline{M_1M_2}$; además este número es positivo, si el punto M se dispone dentro del segmento $\overline{M_1M_2}$, negativo (y $\lambda \neq \neq -1$), si M se dispone fuera del segmento $\overline{M_1M_2}$, y es igual a cero, si $M = M_1$.

EJEMPLO 2. Sabiendo las coordenadas de los puntos $M_1(x_1, y_1, z_1)$ y $M_2(x_1, y_2, z_2)$ y la razón λ, en la que el punto M divide el segmento dirigido $\overline{M_1M_2}$, hállense las coordenadas del punto M.

◀ Sea O el origen de coordenadas. Designemos: $\overline{OM_1} = r_1$, $\overline{OM_2} = r_2$, $\overline{OM} = r$. Como

$$\overline{M_1M} = r - r_1, \quad \overline{MM_2} = r_2 - r,$$

entonces

$$r - r_1 = \lambda (r_2 - r),$$

de donde (puesto que $\lambda \neq -1$)

$$r = \frac{r_1 + \lambda r_2}{1+\lambda}.$$

La fórmula obtenida nos da precisamente la solución del problema en la forma vectorial. Pasando en esta fórmula a las coordenadas, obtendremos

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \blacktriangleright \qquad (6)$$

1.35. El punto $M(1, -5, 5)$ viene dado mediante sus coordenadas en un sistema de coordenadas rectangulares cartesianas $\langle O, \mathfrak{B} = (i, j, k) \rangle$. Hállense las coordenadas de este punto en el sistema $\langle O', \mathfrak{B}' = (i', j', k') \rangle$, si

a) $\overline{OO'} = -2i + j - k$ y $i' = i$, $j' = j$; $k' = k$;

b) $O' = O$ e $i' = -j$, $j' = k$, $k' = i$;

c) $\overline{OO'} = j$ e $i' = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$, $j' = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $k' = k$

(hay que convencerse previamente de que $\mathfrak{B}'$ es una base rectangular).

1.36. Sean dados tres vértices $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$ y $C(1, 2, -3)$ del paralelogramo $ABCD$. Hállese su cuarto vértice D, opuesto a B.

1.37. Sean dados dos vértices adyacentes del paralelogramo $A(-2, 6)$, $B(2, 8)$ y el punto de intersección de sus diagonales $M(2, 2)$. Hállense dos vértices restantes.

1.38. Hállese en el eje de abscisas el punto M cuya distancia hasta el punto $A(3, -3)$ es igual a 5.

1.39. Hállese en el eje de ordenadas el punto M equidistante respecto de los puntos $A(1, -4, 7)$ y $B(5, 6, -5)$.

1.40. Sean dados los vértices del triángulo A (3, —1, 5), B (4, 2, —5) y C (—4, 0, 3). Hállese la longitud de la mediana trazada desde el vértice A.

1.41. Un segmento, cuyos extremos se encuentran en los puntos A (3, —2) y B (6, 4), está dividido en tres partes iguales. Hállense las coordenadas de los puntos de división.

1.42. Determínense las coordenadas de los extremos de un segmento que está dividido en tres partes iguales mediante los puntos C (2, 0, 2) y D (5, —2, 0).

1.43.* Sean dados los puntos A (1, 2, 3), B (2, —2, 1), C (3, 0, 3) y D (16, 10, 18). E es un punto de intersección del plano OAB (O es el origen de coordenadas) con una recta trazada por el punto D paralelamente a la recta (OC). Hállense las coordenadas del punto E.

1.44.* Sean dados los puntos A (2, 5, 2) y B (14, 5, 4); C es el punto de intersección del plano coordenado Oxy con una recta trazada por el punto B paralelamente a la recta (OA). Hállense las coordenadas del punto C.

1.45. Sean dados los vértices del triángulo A (1, —1, —3), B (2, 1, —2) y C (—5, 2, —6). Calcúlese la longitud de la bisectriz de su ángulo interior en el vértice A.

◀ Hallemos la descomposición del vector $\overline{AE}$ según la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Sea $e_1 = \overline{AB}/|\overline{AB}|$ y $e_2 = \overline{AC}/|\overline{AC}|$ los versores de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Entonces, el vector $\overline{AE}$ tiene igual orientación con el vector $e = e_1 + e_2$ (compárese con el problema 1.33), es decir, existe un número $\lambda > 0$ tal que

$$\overline{AE} = \lambda e = \lambda \left(\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|} \right). \tag{7}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \overline{AE} &= \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AC} + \mu \overline{CB} = AC + \mu (\overline{AB} - \overline{AC}) = \\ &= \mu \overline{AB} + (1-\mu) \overline{AC}, \quad \mu > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Las fórmulas (7) y (8) representan en sí dos descomposiciones del vector $\overline{AE}$ según la base formada por los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Siendo única la descomposición de un vector según la base, se tiene

$$\frac{\lambda}{|\overline{AB}|} = \mu \quad \text{y} \quad \frac{\lambda}{|\overline{AC}|} = 1 - \mu. \tag{9}$$

Al resolver el sistema (9), hallamos

$$\lambda = \frac{1}{1/|\overline{AC}| + 1/|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}{|\overline{AB}| + |\overline{AC}|},$$

así que la fórmula (7) adquiere la forma

$$\overline{AE} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}| + |\overline{AB}|}\,\overline{AB} + \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AB}| + |\overline{AC}|}\,\overline{AC}. \qquad (10)$$

De las condiciones del problema hallamos:

$\overline{AB}\,(1, 2, 1)$ *y* $|\overline{AB}| = \sqrt{6}$, $\overline{AC}\,(-6, 3, -3)$ *y* $|\overline{AC}| = 3\sqrt{6}$, y en virtud de (10), obtenemos

$$\overline{AE} = \frac{3}{4}\,\overline{AB} + \frac{1}{4}\,\overline{AC},$$

de donde

$$\overline{AE}\left(-\frac{3}{4},\ \frac{9}{4},\ 0\right) \quad y \quad |\overline{AE}| = \frac{3}{4}\sqrt{10}. \ ►$$

1.46. Un triángulo viene dado por las coordenadas de sus vértices $A\,(3, -2, 1)$, $B\,(3, 1, 5)$, $C\,(4, 0, 3)$. Calcúlese la distancia entre el origen de coordenadas y el punto de intersección de las medianas de este triángulo.

1.47. Sean dados los vértices de un triángulo $A\,(1, 0, 2)$, $B\,(1, 2, 2)$ y $C\,(5, 4, 6)$. El punto L divide el segmento $\overline{AC}$ en la razón $\lambda = {}^1/_3$, $[CE]$ es la mediana trazada desde el vértice C. Hállense las coordenadas del punto M, donde se cortan las rectas (BL) y (CE).

4. Producto escalar de vectores. Se denomina *producto escalar* de los vectores no nulos $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ el número

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = |\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2| \cos(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2).$$

A la par con la designación $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, para el producto escalar se usa también la designación $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$.

Propiedades geométricas del producto escalar:

1) $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 0$ (*condición de perpendicularidad de los vectores*);

2) si $\varphi = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, entonces $0 \leqslant \varphi < \pi/2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 > 0$ y $\pi/2 < \varphi \leqslant \pi \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 < 0$.

Propiedades algebraicas del producto escalar:

1) $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1$;

2) $(\lambda\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_2 + \lambda\,(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1)$;

3) $\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2$.

Si los vectores $\boldsymbol{a}_1\,(X_1, Y_1, Z_1)$ y $\boldsymbol{a}_2\,(X_2, Y_2, Z_2)$ están representados por sus coordenadas en una base rectangular, el producto escalar será

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

De esta fórmula se deduce, en particular, otra fórmula que se destina para determinar el coseno del ángulo formado por los vectores

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

1.48. Demuéstrense las propiedades algebraicas del producto escalar.

1.49. $|a_1| = 3$, $|a_2| = 4$, $(\widehat{a_1, a_2}) = 2\pi/3$. Calcúlense: a) $a_1^2 = a_1a_1$; b) $(3a_1 - 2a_2)(a_1 + 2a_2)$; c) $(a_1 + a_2)^2$

1.50. $|a_1| = 3$, $|a_2| = 5$. Determínese para qué valor de α los vectores $a_1 + \alpha a_2$ y $a_1 - \alpha a_2$ serán perpendiculares.

1.51. Hállese el ángulo, formado por los vectores unidad e_1 y e_2, si se sabe que los vectores $a = e_1 + 2e_2$ y $b = 5e_1 - 4e_2$ son perpendiculares.

1.52. Hállese el ángulo α del vértice de un triángulo isósceles, sabiendo que las medianas trazadas desde los extremos de la base de dicho triángulo son recíprocamente perpendiculares.

1.53. Al vértice de un cubo están aplicadas tres fuerzas cuya magnitud es 1, 2, 3, dirigidas a lo largo de las diagonales de las caras del cubo que se intersecan en dicho vértice. Hállese la magnitud de la resultante de las tres fuerzas mencionadas.

1.54. Sean dados un rectángulo $ABCD$ y un punto arbitrario M dispuesto fuera de dicho rectángulo. Demuéstrese la igualdad $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$. Dedúzcase de aquí que $|\overline{MA}|^2 + |\overline{MC}|^2 = |\overline{MB}|^2 + |\overline{MD}|^2$.

1.55. $ABCD$ es un trapecio isósceles, $\overline{AB} = a$ es la base, $\overline{AD} = b$, el lado lateral, y el ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ es igual a $\pi/3$. Exprésense en términos de a y b los vectores $\overline{DC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$.

1.56. Sabiendo que $|a| = 3$, $|b| = 1$, $|c| = 4$ y $a + b + c = 0$, calcúlese la suma $ab + bc + ca$.

1.57. Sean dados los vectores $a_1(4, -2, -4)$ y $a_2(6, -3, 2)$. Calcúlense:

a) a_1a_2; b) $(2a_1 - 3a_2)(a_1 + 2a_2)$; c) $(a_1 - a_2)^2$;
d) $|2a_1 - a_2|$; e) $\mathrm{pr}_{a_1} a_2$; f) $\mathrm{pr}_{a_2} a_1$;
g) los cosenos directores del vector a_1;
h) $\mathrm{pr}_{a_1+a_2}(a_1 - 2a_2)$; i) el $\cos(\widehat{a_1, a_2})$.

1.58. Sean dados los puntos $A(2, 2)$ y $B(5, -2)$. Hállese en el eje de abscisas tal punto M que $\widehat{AMB} = \pi/2$.

1.59. Hállense las longitudes de los lados y las magnitudes de los ángulos de un triángulo cuyos vértices son $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ y $C(3, -2, 1)$.

1.60. Demuéstrese que un cuadrilátero con los vértices $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$ y $D(4, 7, -2)$ es un cuadrado.

1.61. Hállese el coseno del ángulo φ entre las diagonales (AC) y (BD) de un paralelogramo, si están dados tres vértices de él: $A(2, 1, 3)$, $B(5, 2, -1)$ y $C(-3, 3, -3)$.

1.62. Calcúlese el trabajo de la fuerza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ al trasladarse un punto material de la posición $A(-1, 2, 0)$ a la $B(2, 1, 3)$.

1.63. Sean dados los vectores $\boldsymbol{a}(1, 1)$ y $\boldsymbol{b}(1, -1)$. Determínese el coseno del ángulo entre los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ que satisfacen el sistema de ecuaciones $2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$.

1.64. Los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ tienen longitudes iguales y forman dos a dos ángulos iguales. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{c}$, si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

◀ Si $\boldsymbol{c} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$, entonces, de las condiciones del problema se deduce que el vector $\boldsymbol{c}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\boldsymbol{ca} = X + Y = \boldsymbol{ab} = 1;$$
$$\boldsymbol{cb} = Y + Z = \boldsymbol{ab} = 1;$$
$$|\boldsymbol{c}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = |\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 = 2.$$

Resolviendo este sistema, hallamos que $X_1 = -1/3$, $Y_1 = 4/3$, $Z_1 = -1/3$ o bien $X_2 = 1$, $Y_2 = 0$, $Z_2 = 1$. ▶

1.65. Los rayos $[OA)$, $[OB)$, y $[OC)$ forman dos a dos ángulos iguales cuya magnitud es $\pi/3$. Hállese el ángulo entre las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$.

1.66. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$, que es colineal con el vector $\boldsymbol{a}(2, 1, -1)$ y satisface la condición $\boldsymbol{ax} = 3$.

1.67. El vector $\boldsymbol{x}$ es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}_1(2, 3, -1)$ y $\boldsymbol{a}_2(1, -2, 3)$ y satisface la condición $\boldsymbol{x}(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = -6$. Hállense las coordenadas de $\boldsymbol{x}$.

Si se da cierto vector $\boldsymbol{e}$, entonces se llama *componente ortogonal* del vector arbitrario *$\boldsymbol{a}$ a lo largo del vector $\boldsymbol{e}$* al vector $\boldsymbol{a}_e$, colineal con $\boldsymbol{e}$, con la particularidad de que la diferencia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_e$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{e}$.

Por analogía, se llama *componente ortogonal* del vector *$\boldsymbol{a}$ en el plano P* el vector $\boldsymbol{a}_P$, coplanar con el plano P, con la particularidad de que la diferencia $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_P$ es perpendicular a dicho plano.

1.68. Hállense, para el vector $\boldsymbol{a}(-1, 2, 1)$, el componente ortogonal a lo largo del versor básico $\boldsymbol{j}$ y el componente ortogonal en el plano de los vectores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{k}$.

1.69. Se dan los vectores $\boldsymbol{e}(1, 1, 1)$ y $\boldsymbol{a}(-1, 2, 1)$. Hállense:

a) el componente ortogonal del vector $\boldsymbol{a}$ a lo largo del vector $\boldsymbol{e}$;

b) el componente ortogonal del vector $\boldsymbol{a}$ en el plano P que es perpendicular al vector $\boldsymbol{e}$.

1.70. Se dan los vértices de un triángulo $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -1, 2)$ y $C(-5, 6, -4)$; $[BD]$ es la altura del triángulo trazada por el vértice B. Hállense las coordenadas del punto D.

1.71*. Se dan los vectores $\boldsymbol{e}_1(1, -2, 0)$, $\boldsymbol{e}_2(1, 1, 1)$ y $\boldsymbol{a}(-2, 0, 1)$. Hállese el componente ortogonal $\boldsymbol{a}_{e_1, e_2}$ del vector $\boldsymbol{a}$ en el plano de los vectores $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$.

Si la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ es rectangular, entonces las coordenadas de un vector arbitrario $\boldsymbol{a} = X_1\boldsymbol{e}_1 + X_2\boldsymbol{e}_2 + X_3\boldsymbol{e}_3$ en esta base pueden calcularse según la fórmula

$$X_i = \boldsymbol{e}\boldsymbol{a}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

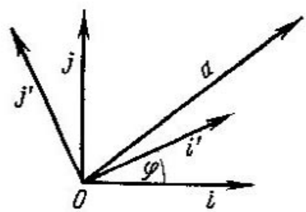


Fig. 11

En particular, la fórmula (11) permite establecer fácilmente la relación que existe entre las coordenadas de un mismo vector en distintas bases rectangulares.

EJEMPLO 3. Supongamos que la base $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$ se ha obtenido de la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ girando la última alrededor del punto O en un ángulo φ ($\varphi > 0$, si el giro se realiza en el sentido antihorario, $\varphi < 0$, en el caso contrario) (fig. 11). Establézcase la relación que existe entre las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ en las bases $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$.

◀ Sea $\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$. En este caso

$$\begin{aligned} X' &= \boldsymbol{a}\boldsymbol{i}' = X\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' + Y\boldsymbol{j}\boldsymbol{i}', \\ Y' &= \boldsymbol{a}\boldsymbol{j}' = X\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}' + Y\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}'. \end{aligned} \quad (12)$$

Por otra parte, tenemos:

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' = \cos\varphi, \quad \boldsymbol{j}\boldsymbol{i}' = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \operatorname{sen}\varphi, \quad \boldsymbol{j}\boldsymbol{j}' = \cos\varphi,$$

Por eso las fórmulas de transformación de las coordenadas (12) toman la forma

$$\begin{aligned} X' &= X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi, \\ Y' &= X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi. \end{aligned}$$ ▶

1.72. Dedúzcanse las fórmulas de transformación de las coordenadas de los puntos de un plano al pasar del sistema de coordenadas $\langle O, \mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})\rangle$ al sistema $\langle O'\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')\rangle$, si $\overline{OO'} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j}$, y la base $\mathfrak{B}'$ se ha obtenido de la base $\mathfrak{B}$ girándola en un ángulo φ en torno al punto O.

1.73. Escríbanse las fórmulas de transformación de las coordenadas de los vectores al pasar de la base $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ a la base $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$, si

$$\boldsymbol{i}' = \cos\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j}' = -\operatorname{sen}\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \cos\varphi\cdot\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}.$$

1.74. En la base rectangular $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ el vector $\boldsymbol{a}$ se descompone en $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Convénzase de que la terna de vectores

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{k}$$

forma también una base rectangular $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$; hállense en dicha base las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$.

1.75. Sea dada una terna no coplanar de vectores $\boldsymbol{e}_1(1, -2, 0)$, $\boldsymbol{e}_2(0, 1, 1)$ y $\boldsymbol{e}_3(1, 2, 2)$ que forma una base oblicuángula (¡compruébese!). Los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ en dicha base se descomponen en $\boldsymbol{a}_1 = X_1^{(1)}\boldsymbol{e}_1 + X_2^{(1)}\boldsymbol{e}_2 + X_3^{(1)}\boldsymbol{e}_3$ y $\boldsymbol{a}_2 = X_1^{(2)}\boldsymbol{e}_1 + X_2^{(2)}\boldsymbol{e}_2 + X_3^{(2)}\boldsymbol{e}_3$. Exprésese el producto escalar $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ en términos de las coordenadas de los vectores en esta base.

5. Producto vectorial de vectores. Una terna ordenada de vectores no coplanares $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ se llama *derecha*, si para un observador ubicado dentro del ángulo sólido formado por dichos vectores, el giro más corto de $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$ y de $\boldsymbol{e}_2$ a $\boldsymbol{e}_3$ parece realizarse en el sentido antihorario. En el caso contrario la terna $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ se denomina *izquierda*.

Se llama *producto vectorial* del vector $\boldsymbol{a}_1$ por el vector $\boldsymbol{a}_2$ el vector, denotado por el símbolo $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ (o bien $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$), que se define mediante las siguientes tres condiciones:

1) la longitud del vector $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ es igual al área de un paralelogramo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$, es decir, $|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]| = |\boldsymbol{a}_1|\cdot|\boldsymbol{a}_2| \operatorname{sen}(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$;

2) el vector $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ es perpendicular al plano de vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$;

3) una terna ordenada $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ es derecha.

De la definición del producto vectorial proviene que

$$\boldsymbol{a}_1 \parallel \boldsymbol{a}_2 \Leftrightarrow [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = 0.$$

Las propiedades algebraicas del producto vectorial:

1) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = -[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1]$;

2) $[\lambda a_1, a_2] = \lambda [a_1, a_2]$;
3) $[a_1 + a_2, b] = [a_1, b] + [a_2, b]$.

Si $a_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ y $a_2 (X_2, Y_2, Z_2)$ son los vectores dados por sus coordenadas en la base rectangular derecha, entonces la descomposición del producto vectorial en la misma base se expresa

$$[a_1, a_2] = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\, i + (Z_1X_2 - X_1Z_2)\, j + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\, k,$$

o bien, en la notación simbólica (aplicando el concepto de determinante de tercer orden; véase § 1, cap. 3)

$$[a_1, a_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

1.76. $|a_1| = 1$, $|a_2| = 2$ y $(\widehat{a_1, a_2}) = 2\pi/3$. Calcúlense:
a) $|[a_1, a_2]|$; b) $|[2a_1 + a_2, a_1 + 2a_2]|$;
c) $|[a_1 + 3a_2, 3a_1 - a_2]|$.

1.77. ¿Qué condición deben satisfacer los vectores a_1 y a_2 para que los vectores $a_1 + a_2$ y $a_1 - a_2$ sean colineales?

1.78. Simplifíquense las expresiones:
a) $[i, j + k] - [j, i + k] + [k, i + j + k]$,
b) $[a + b + c, c] + [a + b + c, b] + [b - c, a]$,
c) $[2a + b, c - a] + [b + c, a + b]$,
d) $2i [j, k] + 3j [i, k] + 4k [i, j]$.

1.79. Demuéstrese que $[a - b, a + b] = 2 [a, b]$ y aclárese el sentido geométrico de esta identidad.

1.80. $|a| = |b| = 5$, $(\widehat{a, b}) = \pi/4$. Calcúlese el área de un triángulo construido sobre los vectores $a - 2b$ y $3a + 2b$.

1.81. Los vectores a, b y c están asociados mediante la condición $a + b + c = 0$. Demuéstrese que $[a, b] = [b, c] = [c, a]$. ¿Cuál es el sentido geométrico de este resultado?

1.82. Demuéstrese que para cualesquiera vectores a, p, q y r los vectores $[a, p]$, $[a, q]$ y $[a, r]$ son coplanares.

1.83. $|a| = 2$, $|b| = 5$, $(\widehat{a, b}) = \pi/6$. Exprésese a través de los vectores a y b el vector unidad c_0, perpendicular a los vectores a y b, y tal que:
a) la terna (a, b, c_0) sea derecha;
b) la terna (b, c_0, a) sea izquierda.

1.84. Sean dados los vectores $a_1 (3, -1, 2)$ y $a_2 (1, 2, -1)$. Hállense las coordenadas de los vectores:
a) $[a_1, a_2]$; b) $[2a_1 + a_2, a_2]$; c) $[2a_1 - a_2, 2a_1 + a_2]$.

1.85. Calcúlese el área de un triángulo cuyos vértices son $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ y $C(4, 3, 2)$.

1.86. En un triángulo con los vértices $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ y $C(1, 3, -1)$ hállese la altura $h = |\overline{BD}|$.

1.87. Tres vectores no nulos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ están ligados entre sí mediante las relaciones $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Hállense las longitudes de estos vectores y los ángulos entre ellos.

1.88. La fuerza $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ está aplicada al punto $A(4, -2, 3)$. Determínese el momento de esta fuerza respecto al punto $O(3, 2, -1)$.

1.89. Sean dadas tres fuerzas: $\boldsymbol{F}_1(2, -1, -3)$, $\boldsymbol{F}_2(3, 2, -1)$ y $\boldsymbol{F}_3(-4, 1, 3)$ aplicadas al punto $A(-1, 4, 2)$. Determínense la magnitud y los cosenos directores del momento de la resultante de dichas fuerzas respecto del punto $O(2, 3, -1)$.

1.90. Calcúlese el área de un paralelogramo cuyas diagonales son vectores $2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ y $4\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2$, donde $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ son los vectores unidad y $\widehat{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)} = \pi/4$.

1.91. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$, si se sabe que éste es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}_1(4, -2, -3)$ y $\boldsymbol{a}_2(0, 1, 3)$, forma con el versor $\boldsymbol{j}$ un ángulo obtuso y que $|\boldsymbol{x}| = 26$.

1.92. Hállense las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$, si éste es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{a}_1(2, -3, 1)$ y $\boldsymbol{a}_2(1, -2, 3)$ y satisface, además, la condición $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) = 10$.

1.93. ¿En qué condiciones la ecuación $\boldsymbol{a}_2 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}]$ tiene solución respecto de $\boldsymbol{x}$? ¿Cuántas soluciones existen?

1.94. Hállese el componente del vector $\boldsymbol{a}(-1, 2, 0)$ que sea perpendicular al plano de los vectores $\boldsymbol{e}_1(1, 0, 1)$ y $\boldsymbol{e}_2(1, 1, 1)$.

1.95. ¿Cómo variará la expresión (13), si prefijamos las coordenadas de los vectores en la base rectangular izquierda? ¿Será válida esta fórmula para el caso de una base oblicuángula?

1.96*. El vector $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$ se llama *producto vectorial doble* de los vectores dados. Demuéstrese que se verifica la igualdad

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

6. **Producto mixto de vectores.** Se denomina *producto mixto* de una terna ordenada de vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ al número $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\,\boldsymbol{a}_3$.

Las propiedades geométricas del producto mixto son:

1) si V es el volumen de un paralelepípedo construido sobre los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$, entonces

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\, \boldsymbol{a}_3 = \begin{cases} V, & \text{si la terna } (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \text{ es derecha,} \\ -V, & \text{si la terna } (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \text{ es izquierda;} \end{cases}$$

2) para que tres vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ sean coplanares, es necesario y suficiente el cumplimiento de la condición $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\, \boldsymbol{a}_3 = 0$.

La propiedad algebraica fundamental del producto mixto consiste en que la permutación cíclica de los vectores no cambia su magnitud, es decir,

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\, \boldsymbol{a}_3 = [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\, \boldsymbol{a}_1 = [\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1]\, \boldsymbol{a}_2.$$

Esta propiedad permite introducir la designación $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\, \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$ (el resultado no depende de cómo se colocan los corchetes en el segundo miembro). Un producto mixto puede ser escrito en términos de coordenadas de los vectores en la base rectangular derecha en la forma

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

1.97. Los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ forman una terna derecha, son recíprocamente perpendiculares y $|\boldsymbol{a}_1| = 4$, $|\boldsymbol{a}_2| = 2$, $|\boldsymbol{a}_3| = 3$. Calcúlese $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$.

1.98. Se dan los vectores $\boldsymbol{a}_1(1, -1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2(-2, 2, 1)$ y $\boldsymbol{a}_3(3, -2, 5)$. Calcúlese $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$. ¿Cuál es la orientación de las ternas:

a) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$; b) $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3)$; c) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2)$?

1.99. Establézcase si los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{a}_3$ forman una base en el conjunto de todos los vectores, si:

a) $\boldsymbol{a}_1(2, 3, -1)$, $\boldsymbol{a}_2(1, -1, 3)$, $\boldsymbol{a}_3(1, 9, -11)$;

b) $\boldsymbol{a}_1(3, -2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2(2, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_3(3, -1, -2)$.

1.100. Demuéstrese que $|\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3| \leqslant |\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|\,|\boldsymbol{a}_3|$; ¿en qué caso tiene lugar el signo de igualdad?

1.101. Demuéstrese que para cualesquiera $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ los vectores $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ son coplanares. ¿Cuál es el sentido geométrico de este hecho?

1.102. Demuéstrese la identidad

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c})(4\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 5\boldsymbol{c}) = 0.$$

1.103. Demuéstrese que si $\alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + \gamma[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = 0$, y por lo menos uno de los números α, β y γ es distinto de cero, entonces los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son coplanares.

1.104. Calcúlese el volumen del tetraedro $OABC$, si $\overline{OA} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$; $\overline{OB} = -3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\overline{OC} = 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$.

1.105. Calcúlese el volumen de un tetraedro con los vértices situados en los puntos $A\ (2, -3, 5)$, $B\ (0, 2, 1)$, $C\ (-2, -2, 3)$ y $D\ (3, 2, 4)$.

1.106. En un tetraedro con los vértices situados en los puntos $A\ (1, 1, 1)$, $B\ (2, 0, 2)$, $C\ (2, 2, 2)$ y $D\ (3, 4, -3)$ calcúlese la altura $h = |\overline{DE}|$.

1.107. Demuéstrese que los cuatro puntos $A\ (1, 2, -1)$, $B\ (0, 1, 5)$, $C\ (-1, 2, 1)$ y $D\ (2, 1, 3)$ en sitúan en un plano.

1.108. Pruébese que el volumen de un paralelepípedo construido sobre las diagonales de las aristas del paralelepípedo dado es igual al volumen duplicado del mismo.

1.109. Demuéstrense las identidades:

a) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b}\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{abc}$;

b) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\, (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})\, (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = 3\boldsymbol{abc}$;

c) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\, (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\, (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{abc}$;

d) $\forall\, \alpha, \beta\ (\boldsymbol{ab}\, (\boldsymbol{c} + \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{abc})$.

§ 2. Objetos geométricos lineales

1. Recta en un plano. Una línea recta en un plano dentro del sistema rectangular de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy puede ser definida por la ecuación de cualquiera de los siguientes tipos:

1) $Ax + By + C = 0$ que es la *ecuación general* de la recta;

2) $A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0$ que es la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0\ (x_0, y_0)$ y es perpendicular al vector normal $\boldsymbol{n}\ (A, B)$;

3) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ que es la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_0\ (x_0, y_0)$ y es paralela respecto del *vector director* $\boldsymbol{q}\ (l, m)$ (*ecuación canónica* de la recta);

4) $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$ $t \in (-\infty, \infty)$, que son las ecuaciones paramétricas de la recta las que en la forma vectorial se expresan así:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{q}t,$$

donde $\boldsymbol{r}_0\ (x_0, y_0)$ es el radio vector del punto $M_0\ (x_0, y_0)$, $\boldsymbol{q}\ (l, m)$ es el vector director de la recta;

5) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ que es la ecuación de la recta *en segmentos*, donde a y b son las magnitudes de los segmentos dirigidos que se obtienen al cortar la recta los ejes coordenados Ox y Oy, respectivamente;

6) $x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$, que es la *ecuación normal* de la recta, donde $\cos \alpha$ y $\cos \beta$ son cosenos directores del vector normal $\boldsymbol{n}$,

dirigido desde el origen de coordenadas hacia la recta, y $p > 0$ es la distancia entre el origen de coordenadas y la recta.

La ecuación general de la recta 1) se reduce a la forma normal 6) multiplicándola por el factor normalizador

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Si la recta L está dada por la ecuación del tipo 6) y $M(x, y)$ es un punto del plano, entonces la expresión

$$\delta(M, L) = x\cos\alpha + y\cos\beta - p$$

lleva el nombre de *desviación del punto M de la recta L*. El signo $\delta(M, L)$ indica la disposición mutua del punto M, la recta L y el origen de coordenadas, a saber: si el punto M y el origen de coordenadas están situados por diferentes lados de la recta L, entonces $\delta(M, L) > 0$, y si M y el origen de coordenadas se hallan a un mismo lado de la recta L, entonces $\delta(M, L) < 0$. La distancia $\rho(M, L)$ entre el punto M y la recta L se determina por la igualdad $\rho(M, L) = |\delta(M, L)|$.

EJEMPLO 1. Escríbase la ecuación de la recta L' que es paralela a las dos rectas dadas L_1: $x + 2y - 1 = 0$, L_2: $x + 2y + 2 = 0$ y que pasa entre ellos por el medio.

◀ Método 1. Por cuanto el vector $\boldsymbol{n}(1, 2)$, normal respecto de las rectas dadas L_1 y L_2, es también normal respecto de L', será suficiente encontrar un punto M', situado en el medio de la distancia entre L_1 y L_2. De las ecuaciones para L_1 y L_2 hallamos cualesquiera dos puntos $M_1 \in L_1$ y $M_2 \in L_2$, por ejemplo, $M_1(1, 0)$ y $M_2(-2, 0)$. En este caso el punto $M'(-1/2, 0)$ que divide el segmento M_1M_2 por la mitad, se fija en medio de la distancia entre L_1 y L_2. Por eso la ecuación de la recta L' tiene por expresión

$$L'\colon\ x + 2y + \frac{1}{2} = 0.$$

Método 2. Un punto arbitrario M pertenece a L' cuando, y sólo cuando, $\rho(M, L_1) = \rho(M, L_2)$, es decir,

$$|\delta(M, L_1)| = |\delta(M, L_2)|. \tag{1}$$

Para despejarnos de los módulos en esta relación, establezcamos la posición del origen de coordenadas con respecto a las rectas dadas L_1 y L_2. Las ecuaciones normales de estas rectas son:

$$L_1\colon \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad y \quad L_2\colon -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.$$

Puesto que las normales $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$, trazadas del punto O en dirección de L_1 y L_2, son contrariamente orientadas, entonces el punto O se encuentra en la franja entre L_1 y L_2.

Por ello, la relación (1) toma la forma $\delta(M, L_1) = \delta(M, L_2)$, o bien

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}},$$

decir, L': $x + 2y + \frac{1}{2} = 0$. ▶

En los problemas 2.1—2.3 se pide:

1) escribir la ecuación de la recta, reducirla a la forma general y construir la recta.

2) reducir la ecuación general a la forma normal y determinar la distancia del origen de coordenadas hasta la recta.

2.1. La recta L viene dada por el punto $M_0(x_0, y_0) \in L$ y el vector normal $\boldsymbol{n}(A, B)$:

a) $M_0(-1, 2)$, $\boldsymbol{n}(2, 2)$; b) $M_0(2, 1)$, $\boldsymbol{n}(2, 0)$:

c) $M_0(1, 1)$, $\boldsymbol{n}(2, -1)$.

2.2. La recta L está dada por el punto $M_0(x_0, y_0) \in L$ y el vector director $\boldsymbol{q}(l, m)$:

a) $M_0(-1, 2)$, $\boldsymbol{q}(3, -1)$; b) $M_0(1, 1)$, $\boldsymbol{q}(0, -1)$;

c) $M_0(-1, 1)$, $\boldsymbol{q}(2, 0)$.

2.3. La recta L está dada por medio de sus dos puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$:

a) $M_1(1, 2)$, $M_2(-1, 0)$; b) $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -2)$;

c) $M_1(2, 2)$, $M_2(0, 2)$.

2.4. Se dan la recta L y el punto M. Se requiere:

1) calcular la distancia $\rho(M, L)$ del punto M hasta la recta L;

2) escribir la ecuación de la recta L' que pasa por el punto M y es perpendicular a la recta dada L;

3) escribir la ecuación de la recta L'' que pasa por el punto M y es paralela a la recta dada L.

Los datos de partida son:

a) L: $-2x + y - 1 = 0$, $M(-1, 2)$;

b) L: $2y + 1 = 0$, $M(1, 0)$;

c) L: $x + y + 1 = 0$, $M(0, 1)$.

Sean dadas dos rectas L_1 y L_2. Son posibles dos casos de su disposición mutua:

1) L_1 y L_2 son rectas paralelas que, en particular, coinciden;

2) L_1 y L_2 se cortan.

En los problemas 2.5—2.9 investíguese la disposición mutua de las rectas dadas L_1 y L_2. En el caso 1) hállese la distancia $\rho(L_1, L_2)$ entre las rectas, en el segundo caso hállese el coseno del ángulo $(\widehat{L_1, L_2})$ y el punto M_0 de intersección de las rectas.

2.5. L_1: $-2x + y - 1 = 0$, L_2: $2y + 1 = 0$,

2.6. $L_1 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1}$ $L_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{0}$,

2.7. L_1: $x + y - 1 = 0$, L_2: $2x - 2y + 1 = 0$,

2.8. $L_1 : x + y - 1 = 0$, $L_2 : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2}$,

2.9. L_1: $x + 2y + 1 = 0$, L_2: $2x - 4y - 2 = 0$.

2.10. El triángulo ABC está dado por las coordenadas de sus vértices. Se necesita:

1) escribir la ecuación del lado (AB);

2) escribir la ecuación de la altura (CD) y calcular su altura $h = |CD|$;

3) hallar el ángulo φ entre la altura (CD) y la mediana (BM);

4) escribir la ecuación de las bisectrices L_1 y L_2 de los ángulos interior y exterior en el vértice A.

Los datos de partida son:

a) $A(1, 2)$, $B(2, -2)$, $C(6, 1)$;

b) $A(2, -2)$, $B(6, 1)$, $C(-2, 0)$.

2.11. Pruébese que el punto $M(-1, 2)$ pertenece a la recta L: $x = 2t$, $y = -1 - 6t$. Hállese el valor del parámetro t que corresponde a este punto.

2.12. Calcúlese la distancia desde el punto $M(1, 1)$ hasta la recta L: $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$.

Si la recta viene dada por la ecuación general $Ax + By + C = 0$, y, además, $B \neq 0$ (es decir, la recta no es paralela al eje Oy), entonces dicha recta puede ser descrita mediante una *ecuación con coeficiente angular* del tipo $y = kx + b$.

EJEMPLO 2. Escríbase la ecuación de la recta L' que pasa por el punto $M(2, 1)$ bajo el ángulo $\pi/4$ respecto de la recta L: $2x + 3y + 4 = 0$.

◀ Se denomina ángulo entre las rectas L y L' el menor de dos ángulos adyacentes formados por las mismas. Por ello (véase el problema 2.13)

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \left| \frac{k + \frac{2}{2}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)k} \right| = 1,$$

donde k es el coeficiente angular de la recta L'. De esta ecuación hallamos $k_1 = 1/5$ y $k_2 = -5$. Por consiguiente, el problema tiene dos soluciones. Haciendo uso de las coordenadas del punto M, podemos escribir para cada caso una ecuación con coeficiente angular:

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}, \qquad y = -5x + 11,$$

o bien, en el caso general,

$$x - 5y + 3 = 0, \qquad 5x + y - 11 = 0. \blacktriangleright$$

2.13. Demuéstrese que si las rectas L_1 y L_2 están dadas por las ecuaciones con coeficiente angular, entonces

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

2.14. Del punto M (5, 4) sale un rayo de luz bajo el ángulo $\varphi = \operatorname{arc\,tg} 2$ respecto al eje Ox y se refleja de éste. Escríbanse las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.

2.15. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto M (8, 6) y forma con los ejes coordenados un triángulo de área 12.

2.16. Escríbase la ecuación de una recta que es paralela a las dos rectas dadas L_1 y L_2 y pasa por el medio entre ellas, si:

a) $L_1: 3x - 2y - 1 = 0, \quad L_2: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{3}$;

b) $L_1: 3x - 15y - 1 = 0, \quad L_2: \dfrac{x + \frac{1}{2}}{5} = \dfrac{y + \frac{1}{2}}{1}$.

2.17. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto M (2, 1) y forma con la recta L: $x = 1 + t$, $y = -2 - {}^2/_3 t$ un ángulo igual a $\pi/4$.

2.18. Escríbanse las ecuaciones de los lados del triángulo ABC, si se conoce su vértice A (1, 3) y están dadas sus dos medianas $x - 2y + 1 = 0$, e $y - 1 = 0$.

2.19*. Demuéstrese que la recta $2x + y + 3 = 0$ corta el segmento $[M_1M_2]$, donde M_1 (—5, 1) y M_2 (3, 7).

2.20. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto M_0 (—2, 3) siendo equidistante de los puntos M_1 (5, —1) y M_2 (3, 7).

2.21. Establézcase si el punto M_0 (1, —2) y el origen de coordenadas se disponen en un ángulo, en ángulos adyacentes o en ángulos opuestos por el vértice y formados por las rectas L_1 y L_2 que se cortan, si:

a) $L_1: 2x - y - 5 = 0$, $L_2: 3x + y + 10 = 0$,

b) $L_1: x - 2y - 1 = 0$, $L_2: 3x - y - 2 = 0$.

2.22. Establézcase cuál de los ángulos, agudo u obtuso, formados por las rectas $3x - 5y - 4 = 0$ y $x + 2y + 3 = 0$, contiene el punto M (2, —5).

2.23. Escríbanse las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se sabe uno de sus vértices B (2, 6), y también las ecuaciones de la altura $x - 7y + 15 = 0$ y la bisectriz $7x + y + 5 = 0$, trazadas desde un mismo vértice.

2.24. Escríbanse las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se sabe uno de sus vértices B (2, —7), y también las ecuaciones de la altura $3x + y + 11 = 0$ y la mediana $x + 2y + 7 = 0$, trazadas desde los diferentes vértices.

2.25. Escríbanse las ecuaciones de los lados de un triángulo, si se sabe uno de sus vértices A (3, —1), y también las ecuaciones de la bisectriz $x - 4y + 10 = 0$ y la mediana $6x + 10y - 59 = 0$, trazadas desde los diferentes vértices.

2. El plano y la recta en el espacio. El plano P en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas $Oxyz$ puede ser dado por cualquiera de las ecuaciones del siguiente tipo:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$, *ecuación general* del plano;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y que es perpendicular al *vector normal* $\boldsymbol{n}(A, B, C)$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, ecuación *segmentaria* del plano, donde a, b, c son las magnitudes de los segmentos dirigidos que se obtienen al cortar el plano los ejes coordendos Ox, Oy, Oz, respectivamente;

4) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, la *ecuación normal* de un plano, donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son cosenos directores del vector normal $\boldsymbol{n}$, que está dirigido desde el origen de coordenadas hacia el plano, y $p > 0$ es la distancia entre el origen de coordenadas y el plano.

La ecuación general 1) se reduce a la normal del tipo 4) multiplicándola por el factor normalizador

$$\mu = -\frac{\operatorname{sgn} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Si el plano P viene dado por la ecuación normal del tipo 4) y $M(x, y, z)$ es cierto punto del espacio, entonces la expresión

$$\delta(M, P) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p,$$

lleva el nombre de desviación del punto M del plano P. El signo $\delta(M, P)$ indica la disposición mutua del punto M, el plano P y el origen de coordenadas, a saber: si el punto M y el origen de coordenadas se disponen por distintos lados respecto al punto P, entonces $\delta(M, P) > 0$, y si el punto M y el origen de coordenadas están a un mismo lado respecto al plano P, entonces $\delta(M, P) < 0$.

La distancia $\rho(M, P)$ entre el punto M y el plano P se determina por la igualdad $\rho(M, P) = |\delta(M, P)|$.

La recta L en el espacio puede ser dada:

1) *por las ecuaciones generales*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

donde los coeficientes A_1, B_1, C_1 no son proporcionales a los coeficientes A_2, B_2, C_2, lo que es equivalente a la definición de la recta como línea de intersección de los planos.

2) *por las ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

o en la forma vectorial

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{q}t,$$

donde $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ es el radio vector de cierto punto perteneciente a la recta, mientras que $\boldsymbol{q}(l, m, n)$ es el vector director de la recta;

3) *por las ecuaciones canónicas*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

lo que es equivalente a la descripción de la recta como línea de intersección de tres planos que proyectan esta recta sobre los planos coordenados.

Ejemplo 3. Escríbase la ecuación de un plano P que pasa por los puntos $M_1(1, 1, 1)$ y $M_2(0, 2, 1)$ paralelamente al vector $\boldsymbol{a}(2, 0, 1)$.

◀ El problema tiene una solución única, puesto que los vectores $\overline{M_1M_2}(-1, 1, 0)$ y $\boldsymbol{a}(2, 0, 1)$ no son colineales. A título de vector normal al plano puede ser elegido el vector

$$\boldsymbol{n} = [\overline{M_1, M_2}, \boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

La ecuación del plano tiene la forma $(x - 1) + (y - 1) - 2(z - 1) = 0$, o bien $x + y - 2z = 0$. La última ecuación está privada del término independiente, por lo cual el plano pasa por el origen de coordenadas.

Otro procedimiento. El punto $M(x, y, z)$ pertenece al plano buscado P cuando, y sólo cuando, los vectores $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ y $\boldsymbol{a}$ son coplanares. Por consiguiente,

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $x + y - 2z = 0$. ▶

EJEMPLO 4. La recta L viene dada por las ecuaciones generales

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2=0. \end{cases}$$

Escríbanse las ecuaciones canónicas de esta recta y también la ecuación de su proyección sobre el eje coordenado Oxz.

◀ El punto M (0, 2, 2) satisface las ecuaciones generales de la recta (compruébelo) y, por tanto, se sitúa en dicha recta. A título de vector director de la recta podemos tomar el vector $q=[n_1, n_2]$, donde n_1 (1, 1, —1) y n_2 (2, —1, 0) son vectores normales de los planos cuya línea de intersección es precisamente la recta dada. De este modo,

$$q=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-i-2j-3k,$$

y las ecuaciones canónicas de la recta son:

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{-3}.$$

La proporción obtenida es equivalente al sistema de tres ecuaciones

$$\begin{cases} -2x+y-2=0, \\ -3x+z-2=0, \\ -3y+2z+2=0, \end{cases}$$

que describen tres planos que proyectan la recta sobre los planos coordenados Oxy, Oxz y Oyz, respectivamente (ecuación de la recta en proyecciones). En particular, la ecuación $-3x+z-2=0$ es la ecuación de proyección de la recta dada sobre el plano Oxz. ▶

EJEMPLO 5. Sean dadas las rectas que se cruzan

$$L_1:\ \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{1} \quad \text{y} \quad L_2:\ \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

Hállese la distancia $\rho(L_1, L_2)$ entre las rectas y escríbase la ecuación de la perpendicular L común para ambas rectas.

◀ Hallemos la ecuación del plano P que pasa por la recta L_1 paralelamente a la recta L_2 (fig. 12). El punto M_1 (0, 1, —2) se sitúa en la recta L_1 y, por ende, pertenece al plano buscado P. A título de vector normal al plano citado tomemos el vector

$$n=[q_1, q_2]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2i-j-4k.$$

La ecuación del plano P es:

$$-2x-(y-1)-4(z+2)=0,$$

o bien, en la forma general, $2x+y+4z+7=0$.

La distancia $\rho(L_1, L_2)$ es igual a la distancia de cualquier punto de la recta L_2, por ejemplo del punto $M_2(-1, -1, 2)$ hasta el plano P. La ecuación normal del plano P tiene por expresión

$$-\frac{2}{\sqrt{21}}x - \frac{1}{\sqrt{21}}y - \frac{4}{\sqrt{21}}z - \frac{7}{\sqrt{21}} = 0,$$

de donde

$$\rho(L_1, L_2) = |\delta(M_2, P)| = \left| \frac{2}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21}} - \frac{8}{\sqrt{21}} - \frac{7}{\sqrt{21}} \right| = \frac{12}{\sqrt{21}}.$$

Con el objeto de formar la ecuación de la perpendicular común L, hallemos las ecuaciones de los planos P_1 y P_2 que pasan por las rectas

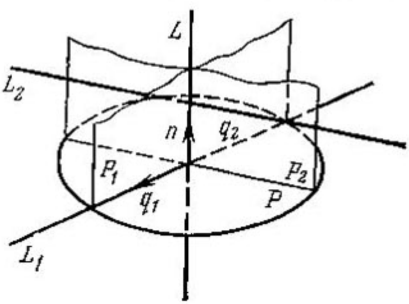


Fig. 12

dadas L_1 y L_2, respectivamente, y que son perpendiculares al plano P. Tenemos: $M_1(0, 1, -2) \in P_1$ y $\boldsymbol{n}_1 = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{n}] = \boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \perp P_1$, de donde P_1: $x - 10y + 2z + 14 = 0$. Análogamente, $M_2(-1, -1, 2) \in P_2$ y $\boldsymbol{n}_2 = [\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{n}] = -9\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \perp P_2$, de donde P_2: $3x - 2y - z + 3 = 0$.

Puesto que $L = P_1 \cap P_2$, resulta que

$$\begin{cases} x - 10y + 2z + 11 = 0, \\ 3x - 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

son las ecuaciones generales de la recta L. ▶

2.26. Se dan el plano P y el punto M. Escríbase la ecuación del plano P' que pasa por el punto M paralelamente al plano P, y calcúlese la distancia $\rho(P, P')$, si:

a) P: $-2x + y - z + 1 = 0$, $M(1, 1, 1)$;

b) P: $x - y - 1 = 0$, $M(1, 1, 2)$.

2.27. Esríbase la ecuación del plano P' que pasa por los puntos dados M_1 y M_2 y que es perpendicular al plano dado P, si:

a) P: $-x + y - 1 = 0$, $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$;

b) P: $2x - y + z + 1 = 0$, $(M(0, 1, 1)$, $M(2, 0, 1)$.

2.28. Escríbase la ecuación de un plano que pasa por el punto M paralelamente a los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$, si:

a) $M(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_1(0, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1, 0, 1)$;

b) $M(0, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_1(2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2(1, 1, 0)$.

2.29. Escríbase la ecuación de un plano que pasa por los puntos M_1 y M_2 paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$, si:

a) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}(3, 0, 1)$;

b) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 3, -1)$, $\boldsymbol{a}(0, -1, 2)$.

2.30. Escríbase la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados M_1, M_2, y M_3, si:

a) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $M_3(3, 0, 1)$;

b) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, -1, 2)$, $M_3(2, 3, -1)$.

Sean dados dos planos P_1 y P_2. Son posibles dos casos de su disposición mutua:

1) $P_1 \parallel P_2$, en particular, los planos coinciden;

2) P_1 y P_2 se cortan a lo largo de cierta recta.

En los problemas 2.31-2.34 investíguense la disposición mútua de los planos dados. En el caso 1) hállese la distancia $\rho(P_1, P_2)$ entre los planos, en el caso 2) hállese el coseno del ángulo entre los planos.

2.31. P_1: $-x + 2y - z + 1 = 0$, P_2: $y + 3z - 1 = 0$.

2.32. P_1: $2x-y+z-1=0$, P_2: $-4x+2y-2z-1=0$.

2.33. P_1: $x - y + 1 = 0$, P_2: $y - z + 1 = 0$.

2.34. P_1: $2x - y - z + 1 = 0$, P_2: $-4x+2y+2z-2=0$

2.35. Calcúlese el volumen de una pirámide limitada por el plano P: $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ y los planos coordenados.

2.36. Escríbanse las ecuaciones de los planos que dividen por el medio los ángulos diedros formados por los planos P_1 y P_2, si:

a) P_1: $x - 3y + 2z - 5 = 0$, P_2: $3x-2y-z+3 = 0$,

b) P_1: $2x - y + 5z - 3 = 0$, P_2: $2x - 10y+4z-2=0$.

2.37. Escríbase la ecuación de un plano equidistante de los dos planos dados P_1 y P_2, si:

a) P_1: $4x - y - 2z - 3 = 0$, P_2: $4x - y - 2z-5=0$

b) P_1: $5x - 3y + z + 3 = 0$, P_2: $10x-6y+2z+7=0$.

2.38. Establézcase si los puntos $M_1(2, -1, 1)$ y $M_2(1, 2, -3)$ se sitúan en un ángulo, en los ángulos adyacentes o en los ángulos opuestos por el vértice, formados por los planos P_1 y P_2, si:

a) P_1: $3x - y + 2z - 3 = 0$, P_2: $x - 2y - z + 4=0$
b) P_1: $2x - y + 5z - 1 = 0$, P_2: $3x - 2y + 6z-1=0$

2.39. La recta L viene dada por las ecuaciones generales. Esríbanse para esta recta las ecuaciones canónicas y las ecuaciones en proyecciones (véase el ejemplo 4), si:

a) $L:\begin{cases} 2x-y+2z-3=0, \\ x+2y-z-1=0; \end{cases}$ b) $L:\begin{cases} x+2y-3z-5=0; \\ 2x-y+z+2=0; \end{cases}$

2.40. Escríbanse las ecuaciones canónicas de una recta que pasa por el punto $M_0\,(2,\ 0,\ -3)$ paralelamente:

a) al vector $q\,(2,\ -3,\ 5)$;

b) a la recta $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$;

c) al eje Ox; d) al eje Oz;

e) a la recta $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z-3=0; \end{cases}$

f) a la recta $x = -2 + t$, $y = 2t$, $z = 1 - {}^1/_2\, t$.

2.41. Escríbanse las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos dados M_1 y M_2, si:

a) $M_1\,(1,\ -2,\ 1)$, $M_2\,(3,\ 1,\ -1)$;
b) $M_1\,(3,\ -1,\ 0)$, $M_2\,(1,\ 0,\ -3)$.

2.42. Se dan una recta $L:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$ y un punto $M\,(0,\ 1,\ 2)\notin L$ (compruébese). Se pide:

a) escribir la ecuación de un plano que pasa por la recta L y el punto M;

b) escribir la ecuación de un plano que pasa por el punto M y es perpendicular a la recta L;

c) escribir la ecuación de una perpendicular trazada desde el punto M a la recta L;

d) calcúlese la distancia $\rho\,(M,\ L)$;

e) hállese la proyección del punto M sobre la recta L.

2.43. Se dan el plano P: $x + y - z = 0$ y una recta L: $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$, con la particularidad de que $L\notin P$ (compruébese). Se pide:

a) calcular el sen $(\widehat{P,\ L})$ y las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano;

b) escribir la ecuación de un plano que pasa por la recta L y es perpendicular al plano P;

c) escribir las ecuaciones de la proyección de la recta L sobre el plano P.

2.44. Sean dadas dos rectas:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Demuéstrese que las rectas L_1 y L_2 se disponen en un mismo plano cuando, y sólo cuando, se cumple la condición

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

2.45. Haciendo uso de los resultados del problema 2.44, convénzase de que las rectas L_1 y L_2 pertenecen a un mismo plano y escríbase la ecuación de este plano. Los datos de partida son:

a) $L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$, $L_2: \frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$;

b) $L_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $L_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

2.46. Demuéstrese que las rectas

$$L_1: \begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad y_2: \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$$

son paralelas y hállese la distancia $\rho(L_1, L_2)$.

2.47. Demuéstrese que la distancia entre las rectas que se cruzan L_1: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{q}_1 t$ y L_2: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{q}_2 t$ puede ser calculada según la fórmula

$$\rho(L_1, L_2)=\frac{|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2|}{|[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2]|}.$$

2.48. Sean dadas dos rectas $L_1: \frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$ y $L_2: \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$. Se necesita:

a) demostrar que las rectas no se disponen en un mismo plano, es decir, se cruzan;

b) escribir la ecuación de un plano que pasa por la recta L_2 paralelamente a L_1;

c) calcular la distancia entre las rectas;

d) escribir la ecuación de la perpendicular común a las rectas L_1 y L_2.

2.49. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto $M_0(3, -2, -4)$ paralelamente al plano $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ y que corta la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

§ 3. Curvas en el plano

1. Ecuación de la curva en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas. Se dice que la curva Γ en el sistema de coordenadas Oxy tiene la ecuación

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

si se cumple la siguiente condición: el punto $M(x, y)$ pertenece a la curva Γ cuando, y sólo cuando, sus coordenadas x e y satisfacen la relación (1). Si, en particular, $F(x, y) = f(x) - y$, la ecuación (1) puede escribirse en la forma

$$y = f(x), \tag{2}$$

y en este caso la curva Γ coincide con la gráfica de la función $f(x)$.

En el presente párrafo se estudia la relación existente entre las propiedades geométricas de la curva y su ecuación en algunos casos más simples.

Ejemplo 1. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la suma de los cuadrados de las distancias de cualquiera de sus puntos hasta los puntos $A(-a, 0)$, $B(0, a)$ y $C(a, 0)$ es igual a $3a^2$.

◀ Sea Γ una curva que satisface las condiciones del problema; $M(x, y) \in \Gamma$, si, y sólo si

$$\rho^2(M, A) + \rho^2(M, B) + \rho^2(M, C) = 3a^2,$$

o bien

$$(x+a)^2 + y^2 + x^2 + (y-a)^2 + (x-a)^2 + y^2 = 3a^2.$$

Realizadas las transformaciones sencillas, obtenemos

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}ay = 0,$$

o bien, formando el cuadrado perfecto,

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{a^2}{9}.$$

Ésta es precisamente la ecuación buscada de la curva que representa en sí una circunferencia de radio $a/3$ y con el centro en el punto M_0 $(0, a/3)$. ▶

En los problemas 3.1—3.14 se pide establecer cuáles curvas se definen por las ecuaciones dadas y construir estas curvas.

3.1. $x + |y| = 0$. **3.2.** $|x| + y - x = 0$. **3.3.** $x^2 - xy = 0$.

3.4. $xy + y^2 = 0$. **3.5.** $x^2 - y^2 = 0$. **3.6.** $xy = 0$.

3.7. $y^2 - 9 = 0$. **3.8.** $x^2 - x - 6 = 0$.

3.9. $x^2y - 7xy + 10y = 0$. **3.10.** $x^2 + y^2 = 4$.

3.11. $x^2 + (y + 3)^2 = 1$. **3.12.** $x^2 + 2y^2 = 0$.

3.13. $2x^2 + y^2 + 2 = 0$. **3.14.** $x^2 + |y^2 - 1| = 0$.

3.15. Escríbase la ecuación de una curva, cada punto de la cual se encuentra a una misma distancia de los puntos M_1 $(3, 2)$ y M_2 $(2, 3)$.

3.16. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la diferencia de los cuadrados de las distancias desde cualquiera de sus puntos hasta los puntos M_1 $(-a, 0)$ y M_2 $(a, 0)$ es igual a c.

3.17. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la distancia de cualquiera de sus puntos hasta el eje Ox es dos veces mayor que la distancia hasta el eje Oy.

3.18. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la suma de los cuadrados de las distancias de cualquiera de sus puntos hasta los puntos M_1 $(-3, 0)$ y M_2 $(3, 0)$ es igual a 50.

3.19. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la distancia de cualquiera de sus puntos hasta el punto M_1 $(-1, 1)$ es dos veces menor que la distancia hasta el punto M_2 $(-4, 4)$.

3.20. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual la suma de las distancias de cualquiera de sus puntos hasta los puntos F_1 $(-2, 0)$ y F_2 $(2, 0)$ es igual a $2\sqrt{5}$.

3.21. Escríbase la ecuación de una curva, para la cual el módulo de la diferencia de distancias entre cualquiera de sus puntos y los puntos F_1 $(-2, -2)$ y F_2 $(2, 2)$ es igual a 4.

3.22. Escríbase la ecuación de una curva, cada punto de la cual es equidistante del punto F $(2, 2)$ y del eje Ox.

3.23. Establézcase que cualquiera de las ecuaciones siguientes define una circunferencia; hállese el centro de la misma C y el radio R:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; c) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

3.24. Escríbase la ecuación de la circunferencia en cada uno de los siguientes casos (designaciones: C es el centro de la circunferencia, R, el radio y M, M_1, M_2, M_3 son los puntos en la circunferencia):

a) $C(2, -3)$, $R = 7$; b) $M(2, 6)$, $C(-1, 2)$;

c) $M_1(3, 2)$, $M_2(-1, 6)$ son los extremos del diámetro de la circunferencia;

d) $C(1, -1)$, la recta $5x - 12y + 9 = 0$ es la línea tangente a la circunferencia;

e) $M(1, 2)$, la circunferencia toca los ejes de coordenadas;

f) $M_1(3, 1)$, $M_2(-1, 3)$, $C \in L$; $3x - y - 2 = 0$;

g)* $M_1(-1, 3)$, $M_2(0, 2)$, $M_3(1, -1)$.

3.25. Escríbase la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, perpendicular a la recta $5x + 2y - 13 = 0$.

3.26. Calcúlese la distancia mínima del punto M_0 hasta la circunferencia Γ, si:

a) $M_0(6, -8)$, Γ: $x^2 + y^2 = 9$;

b) $M_0(-7, 2)$, Γ: $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

3.27. Determínese la disposición de una recta respecto de una circunferencia: la corta, es tangente a la circunferencia o pasa fuera de la última, siempre que la recta y la circunferencia vienen dadas por las ecuaciones:

a) $2x - y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$;

b) $x - 2y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;

c) $x - y + 10 = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

2. Curvas algebraicas de segundo orden. Se llama *curva algebraica de segundo orden* una curva Γ cuya ecuación en el sistema de coordenadas cartesianas se expresa

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (3)$$

donde no todos los coeficientes A, B y C son nulos simultáneamente (de lo contrario Γ sería una recta, es decir, una curva algebraica de primer orden).

En el caso general puede resultar que la ecuación (3) defina la así llamada curva *degenerada* (un conjunto vacío, un punto, una recta, un par de rectas).

En cambio, si la curva Γ es regular, se encontrará para ella tal sistema de coordenadas rectangulares cartesianas en el que la ecuación de la curva mencionada tenga una de las siguientes tres formas (*ecuación canónica*):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a \geqslant b > 0, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,\ b>0, \tag{5}$$

$$y^2=2px, \qquad p>0. \tag{6}$$

La curva Γ se llama en este caso *elipse*, *hipérbola* o *parábola*, respectivamente, mientras que el propio sistema de coordenadas en el que su ecuación tiene la forma (4), (5) ó (6), lleva el nombre de *sistema canónico de coordenadas* para la curva dada.

La reducción de la ecuación general de una curva de segundo orden a la forma canónica se analiza detalladamente en el p. 4 del § 3, cap. 4.

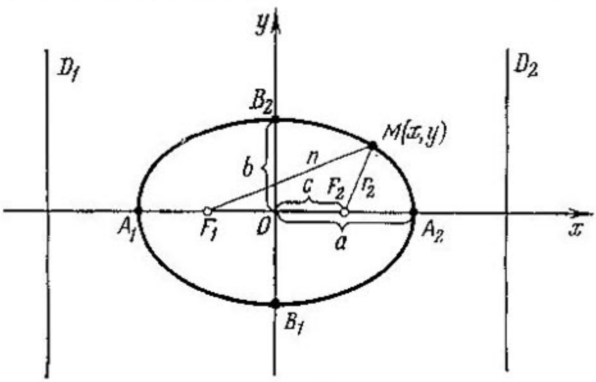


Fig. 13

El objetivo del presente punto consiste en el estudio de las propiedades geométricas fundamentales de las curvas regulares de segundo orden sobre la base de sus ecuaciones canónicas.

La *elipse* expresada por la ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a \geqslant b > 0$, tiene la forma expuesta en la fig. 13.

Los parámetros a y b se denominan *semiejes* de la elipse (mayor y menor, respectivamente), los puntos A_1 $(-a, 0)$, A_2 $(a, 0)$, B_1 $(0, -b)$ y B_2 $(0, b)$ son los *vértices* de la elipse, los ejes de simetría Ox y Oy son *ejes principales*, y el centro de simetría O, *centro* de la elipse.

Los puntos F_1 $(-c, 0)$, y F_2 $(c, 0)$, donde $c=\sqrt{a^2-b^2} \geqslant 0$, se denominan *focos* de la elipse, los vectores $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ son *radios vectores focales* y los números $r_1=|\overline{F_1M}|$ y $r_2=|\overline{F_2M}|$, *radios focales* del punto M perteneciente a la elipse. En un caso particular $a=b$ los focos F_1 y F_2 coinciden con el centro, mientras que la ecuación canónica tiene por expresión $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, o bien $x^2+y^2=a^2$, es decir, describe una circunferencia de radio a cuyo centro se dispone en el origen de coordenadas.

El número $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ $(0 \leqslant e < 1)$ se denomina *excentricidad* de la elipse y sirve de medida de su «achatamiento» (para $e = 0$ la elipse se convierte en una circunferencia).

Las rectas D_1: $x = -a/e$ y D_2: $x = a/e$, que son perpendiculares al eje principal y pasan a una distancia de a/e del centro, se llaman *directrices* de la elipse.

3.28. Constrúyase una elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$. Hállense:

a) los semiejes ; b) las coordenadas de los focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de las directrices.

3.29. Escríbase la ecuación canónica de una elipse, si:

a) $a = 3$, $b = 2$; b) $a = 5$, $c = 4$; c) $c = 3$, $e = 3/5$; d) $b = 5$, $e = 12/13$; e) $c = 2$ y la distancia entre las directrices es igual a 5; f) $e = 1/2$ y la distancia entre las directrices es igual a 32.

3.30. Escríbase la ecuación de una elipse con los semiejes a y b y el centro en el punto $C(x_0, y_0)$, si se sabe que los ejes principales de la elipse son paralelos a los ejes coordenados.

3.31. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen define una elipse, hállense el centro de la misma, los semiejes, la excentricidad y las ecuaciones de las directrices:

a) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;
b) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
c) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

3.32. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geqslant b$, entonces los radios focales de este punto son

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = a - ex$$

(véase fig. 13). De aquí, en particular, se deduce que para todo punto M de la elipse se verifica la igualdad

$$r_1(M) + r_2(M) = \text{const} = 2a.$$

b) Sean dados los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, $c \geqslant 0$. Entonces el conjunto de puntos M que satisfacen la condición $|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = \text{const} = 2a$, es una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$.

3.33. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, $r_1(M)$, $r_2(M)$ son radios focales de este punto, y $\rho(M, D_1)$ y $\rho(M, D_2)$ son las distancias entre dicho punto y las directrices, entonces se verifica la igualdad

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)} = \text{const} = e.$$

b) Sean dados un punto $F(c, 0)$ y una recta D: $x - d = 0$, $d > c > 0$. En este caso el conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = e < 1$, es una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a = de$ y $b^2 = a^2 - c^2$.

3.34. La elipse cuyos ejes principales coinciden con los ejes coordenados pasa por los puntos $M_1(2, \sqrt{3})$ y $M_2(0, 2)$. Escríbase la ecuación de la elipse y hállense los radios focales del punto M_1 y las distancias del punto citado hasta las directrices.

3.35. Hállese en la elipse $9x^2 + 24y^2 = 225$ un punto cuya distancia hasta el foco F_2 sea cuatro veces mayor que la distancia hasta el foco F_1.

3.36. Escríbase la ecuación de una curva por la cual se mueve el punto M, si la suma de distancias entre dicho punto y los puntos $F_1(-1, -1)$ y $F_2(1, 1)$ queda constante e igual a $2\sqrt{3}$.

3.37. Escríbase la ecuación de una curva por la cual se mueve el punto M, si la distancia entre dicho punto y el punto $F(3, 0)$, es dos veces menor que la distancia hasta la recta $x + y - 1 = 0$.

3.38. Determínese la disposición de una recta respecto de una elipse: la corta, es tangente o bien pasa fuera de la elipse, si la recta y la elipse vienen dadas por las ecuaciones:

a) $2x - y - 3 = 0$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,

b) $2x + y - 10 = 0$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

c) $3x + 2y - 20 = 0$, $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

3.39. Escríbase la ecuación de una tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $M_0(x_0, y_0)$.

◀ Supongamos primero que $y_0 \neq 0$, es decir, el punto M_0 no coincide con ninguno de los vértices $A_1(-a, 0)$ y $A_2(a, 0)$. En este caso la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ define implícitamente la función $y = y(x)$, $-a < x < a$, cuya gráfica pasa por el punto $M_0(x_0, y_0)$ y coincide con la mitad correspondiente (superior cuando $y_0 > 0$ ó inferior, cuando $y_0 < 0$) de la elipse. Al derivar respecto de x la identidad $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2(x)}{b^2}=1$, llegamos a que la derivada $y'(x_0)$ es igual a

$$y'(x_0) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

De aquí la ecuación de la tangente a la elipse en el punto $M_0(x_0, y_0)$ tiene por expresión

$$y-y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0),$$

o bien, teniendo presente la igualdad $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad (7)$$

Si, en cambio, $y_0 = 0$ (y, por consiguiente, $x_0 = \pm a$), entonces las ecuaciones de las tangentes a la elipse se expresan por $x = \pm a$, es decir, en este caso la fórmula (7) queda también en vigor. ▶

3.40. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la elipse $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5/2}=1$ que sean paralelas a la recta $3x + 2y + 7 = 0$.

3.41. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 20$ que sean perpendiculares a la recta $2x - 2y - 13 = 0$.

3.42. Demuéstrese que las tangentes a una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trazadas por los extremos de un mismo diámetro, son paralelas.

3.43. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a una elipse $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, trazadas desde el punto $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

3.44. En la elipse $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ hállese un punto M_0 que sea el más próximo a la recta $2x - 3y + 25 = 0$, y calcúlese la distancia entre el punto M_0 y dicha recta.

3.45. Demuéstrese que la tangente a una elipse en un punto arbitrario M de ésta forma ángulos iguales con los radios vectores focales $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ del punto mencionado.

3.46*. Del foco izquierdo de la elipse $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ se dirige un rayo de luz que forma con el eje Ox un ángulo obtuso α, con la particularidad de que $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Escríbase la ecuación de una recta, en la que está situado el rayo reflejado de la elipse.

La *hipérbola* expresada por la ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, a, $b>0$, tiene la forma expuesta en la fig. 14.

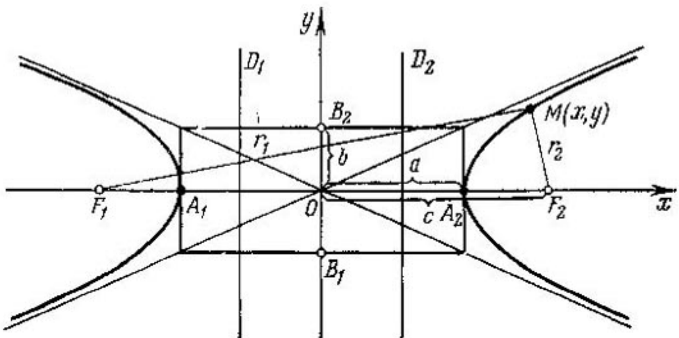


Fig. 14

Los parámetros a y b se llaman *semiejes* de la hipérbola, los puntos $A_1(-a, 0)$ y $A_2(a, 0)$ son los *vértices*, los ejes de simetría Ox y Oy llevan el nombre de *ejes real* e *imaginario* y el centro de simetría 0, de *centro* de la hipérbola.

Las rectas $y=\pm\frac{b}{a}x$ son las asíntotas de la hipérbola.

Los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, donde $c=\sqrt{a^2+b^2}>0$, se denominan *focos* de la hipérbola, los vectores $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ son *radios vectores focales* y los números $r_1=|\overline{F_1M}|$ y $r_2=|\overline{F_2M}|$, *radios focales* del punto M perteneciente a la hipérbola.

El número $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ $(1<e<\infty)$ recibe el nombre de *excentricidad* de la hipérbola y sirve de medida de su «achatamiento». En el caso particular, cuando $a=b$, la hipérbola se llama *equilátera*; su excentricidad es igual a $e=\sqrt{2}$, y el ángulo entre las asíntotas es $\pi/2$.

Se denominan *directrices* de la hipérbola las rectas D_1: $x = -a/e$ y D_2: $x = a/e$ que son perpendiculares al eje real y pasan a la distancia a/e del centro.

3.47. Constrúyase una hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$. Hállense: a) los semiejes; b) las coordenadas de los focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de las asíntotas; e) las ecuaciones de las directrices.

3.48. Constrúyase una hipérbola $16x^2 - 9y^2 = -144$, llamada *conjugada* de la hipérbola del problema 3.47. ¿Cuál es el sistema canónico de coordenadas para esta hipérbola? Hállense:

a) los semiejes; b) las coordenadas de los focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de las asíntotas; e) las ecuaciones de las directrices.

3.49. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si:

a) $a = 2$, $b = 3$; b) $b = 4$, $c = 5$; c) $c = 3$, $e = 3/2$; d) $a = 8$, $e = 5/4$; e) $c = 10$ y las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm 4/3x$; f) $e = 3/2$ y la distancia entre las directrices es igual a $8/3$.

3.50. Escríbase la ecuación de una hipérbola con los semiejes a y b y el centro en el punto $C(x_0, y_0)$, si se sabe que sus ejes real e imaginario son paralelos a los ejes Ox y Oy, respectivamente.

3.51. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen define una hipérbola, hállense su centro, los semiejes, la excentricidad, las ecuaciones de asíntotas y de directrices:

a) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

b) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

c) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

3.52. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, entonces los radios focales de este punto son

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = -a + ex,$$

si el punto M se dispone en la rama derecha de la hipérbola, y

$$r_1(M) = -a - ex, \quad r_2(M) = a - ex,$$

si este punto se dispone en la rama izquierda. De aquí se deduce, en particular, que para todo punto M de la hipérbola se verifica la igualdad

$$|r_1(M) - r_2(M)| = \text{const} = 2a.$$

b) Sean dados los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, $c > 0$. Entonces el conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $||\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}|| = \text{const} = 2a$, $a > 0$, es una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $b^2 = c^2 - a^2$.

3.53. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $r_1(M)$ y $r_2(M)$ son los radios focales de dicho punto y $\rho(M, D_1)$ y $\rho(M, D_2)$ representan las distancias entre el punto y las directrices, entonces se verifica la igualdad

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)} = \text{const} = e.$$

b) Sean dados el punto $F(c, 0)$ y una recta D: $x - d = 0$, $c > d > 0$. Un conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = e > 1$, es una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a = de$ y $b^2 = c^2 - a^2$.

3.54. Habiéndose convencido de que el punto $M(-5, 9/4)$ está situado en la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, hállense los radios focales de este punto y sus distancias hasta las directrices.

3.55. Hállense los puntos de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ se encuentran a la distancia 7 del foco F_1.

3.56. Escríbase la ecuación de una hipérbola, si se sabe que sus focos son los puntos $F_1(-3, -4)$ y $F_2(3, 4)$, mientras que la distancia entre las directrices es igual a 3,6.

3.57. Escríbase la ecuación de una hipérbola, si se saben su excentricidad $e = \sqrt{5}$, el foco $F(2, -3)$ y la ecuación de la directriz correspondiente es $3x - y + 3 = 0$.

3.58. Pruébese que la curva, dada por la ecuación $xy = 1$ ó $y = 1/x$, es la hiperbola equilátera. Escríbase su ecuación canónica, hállense la excentricidad, los focos y las ecuaciones de las directrices.

3.59*. Escríbase la ecuación de una tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en su punto $M_0(x_0, y_0)$.

3.60. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, paralelas a la recta $10x - 3y + 9 = 0$.

3.61. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, perpendiculares a la recta $4x + 3y - 7 = 0$.

3.62. Demuéstrese que las tangentes a una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trazadas por los extremos de un mismo diámetro, son paralelas.

3.63. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $A\,(-1, -7)$ a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$.

3.64. Hállese en la hipérbola $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ un punto M_0, que sea más próximo a la recta $3x + 2y + 1 = 0$, y calcúlese la distancia del punto M_0 hasta la recta mencionada.

3.65. Demuéstrese que la tangente a una hipérbola en su punto arbitrario M forma ángulos iguales con los radios vectores focales $\overline{F_1M}$ y $\overline{F_2M}$ de este punto.

3.66*. Del foco derecho de la hipérbola $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ se dirige un rayo de luz que forma con el eje Ox un ángulo α $(\pi < \alpha < 3/2\pi)$ con la particularidad de que $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Escríbase la ecuación de una recta en la que se sitúa un rayo reflejado de la hipérbola.

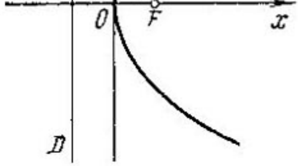


Fig. 15

Una *parábola* que se expresa por la ecuación canónica $y^2 = 2px$, $p > 0$, tiene una forma expuesta en la fig. 15.

El número p se denomina *parámetro* de la parábola, el punto O es su *vértice* y el eje Ox, el *eje* de la parábola.

El punto $F\,(p/2, 0)$ lleva el nombre de *foco* de la parábola, el vector $\overline{FM}$, de *radio vector focal* y el número $r = |\overline{FM}|$, de *radio focal* del punto M de la parábola.

Se llama *directriz* de la parábola la recta D: $x = -p/2$, que es perpendicular al eje y pasa a la distancia $p/2$ del vértice de la parábola.

3.67. Constrúyanse las siguientes parábolas y hállense los parámetros de ellas:

a) $y^2 = 6x$; b) $x^2 = 5y$; c) $y^2 = -4x$; d) $x^2 = -y$.

3.68. Escríbase la ecuación de una parábola cuyo vértice se encuentra en el origen de coordenadas, si se sabe que:

a) la parábola se dispone en el semiplano izquierdo, simétricamente respecto al eje Ox y $p = 1/2$;

b) la parábola es simétrica respecto al eje Oy y pasa por el punto $M(4, -8)$;

c) el foco de la parábola se ubica en el punto $F(0, -3)$.

3.69. Escríbase la ecuación de la parábola, si se sabe que su vértice se encuentra en el punto $A(x_0, y_0)$, el parámetro es igual a p, el eje es paralelo al eje Ox y con respecto a la recta $x = x_0$ la parábola está situada:

a) en el semiplano derecho;

b) en el semiplano izquierdo.

3.70. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen define una parábola, hállense las coordenadas de su vértice A y la magnitud del parámetro p:

a) $y^2 = 4x - 8$; b) $x^2 = 2 - y$;

c) $y = 4x^2 - 8x + 7$; d) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$;

e) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$; f) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

3.71. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la parábola $y^2 = 2px$, $r(M)$ es su radio focal y $\rho(M, D)$, la distancia entre M y la directriz (véase la fig. 15), entonces se verifica la igualdad

$$\frac{r(M)}{\rho(M, D)} = \text{const} - 1.$$

b) Sean dados el punto $F(p/2, 0)$ y la recta D: $x = -p/2$. Entonces el conjunto de puntos M, que satisfacen la condición $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = 1$, es la parábola $y^2 = 2px$.

3.72. Calcúlese el radio focal del punto M de la parábola $y^2 = 12x$, si $y(M) = 6$.

3.73. Escríbase la ecuación de una parábola, si se conocen:

a) el foco $F(4, 3)$ y la directriz D: $y + 1 = 0$;

b) el foco $F(2, -1)$ y la directriz D: $x - y - 1 = 0$.

3.74. Escríbase la ecuación de una tangente a la parábola $y^2 = 2px$ en su punto $M_0(x_0, y_0)$.

3.75. Escríbase la ecuación de una tangente a la parábola $y^2 = 8x$ que sea paralela a la recta $2x + 2y - 3 = 0$.

3.76. Escríbase la ecuación de una tangente a la parábola $x^2 = 16y$ que sea perpendicular a la recta $2x + 4y + 7 = 0$.

3.77. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y^2 = 36x$ trazadas desde el punto A (2, 9).

3.78. Hállese en la parábola $y^2 = 64x$ un punto M_0, que sea el más próximo a la recta $4x + 3y - 14 = 0$, y calcúlese la distancia entre el punto M_0 y dicha recta.

3.79. Demuéstrese que la tangente a una parábola en un punto arbitrario de ésta M forma ángulos iguales con el radio vector focal del punto M y con el rayo que parte del punto M y está orientado igual que el eje de la parábola.

3.80. Del foco de la parábola $y^2 = 12x$ se dirige un rayo de luz que forma con el eje Ox un ángulo agudo α, siendo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Escríbase la ecuación de una recta en la que se dispone el rayo reflejado de la parábola.

3. Ecuación de una curva en el sistema polar de coordenadas. Se dice que en un plano queda introducido el sistema polar de coordenadas $\langle O, u\rangle$, si vienen dados:

1) cierto punto O, llamado *polo*;

2) cierto rayo u que parte del punto O y se llama *eje polar*.

Se denominan coordenadas polares del punto $M \neq 0$ dos números: el *radio polar* $r(M) = |\overline{OM}| > 0$ y el *ángulo polar* $\varphi(M)$ al que se debe girar el eje u para que su dirección coincida con la del vector $\overline{OM}$ (en este caso, como siempre, $\varphi(M) > 0$, si el giro se realiza en el sentido antihorario, y $\varphi(M) < 0$, en el caso contrario). La notación $M(r, \varphi)$ significa que el punto M tiene las coordenadas polares r y φ.

El ángulo polar $\varphi(M)$ tiene una infinidad de valores posibles (que se diferencian uno del otro en una magnitud del tipo $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). El valor del ángulo polar que satisface la condición $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, se llama *principal*. En algunos casos se llama valor principal del ángulo polar los valores de φ que satisfacen la condición $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Supongamos que en un plano están introducidos el sistema directo de coordenadas rectangulares cartesianas Oxy (esto es, un sistema tal que el giro más corto del eje Ox hacia el Oy se realiza en el sentido antihorario) y un sistema polar de coordenadas $\langle O, u\rangle$, además el eje polar coincide con el semieje positivo de abscisas. En tal caso la relación entre las coordenadas cartesianas y polares de un punto arbitrario $M \neq O$ se expresa por las fórmulas

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\operatorname{sen}\varphi;$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{7}$$

La ecuación de una curva en coordenadas polares tiene la forma $F(r, \varphi) = 0$, o bien $r = f(\varphi)$. Puede obtenerse o bien directamente, partiendo de las propiedades geométricas de la curva, o bien pasando a las coordenadas polares en la ecuación de esta recta, dada en las coordenadas rectangulares cartesianas.

EJEMPLO 2. Constrúyase una curva dada por la ecuación $r = 6 \cos \varphi$.

◀ Indiquemos, ante todo, lo siguiente: si el punto $M (r, \varphi)$ pertenece a la curva dada, entonces para el punto mencionado el $\cos \varphi = \frac{1}{6} r \geqslant 0$, y, por consiguiente, toda la curva está situada en el sector $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Con el fin de construir la curva, pasemos en su ecuación a las coordenadas cartesianas. Al multiplicar ambos miembros de la ecuación $r = 6 \cos \varphi$ por r, obtenemos $r^2 = 6r \cos \varphi$, de donde, en vista de las fórmulas del cambio (7), $x^2 + y^2 = 6x$, ó $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. De este modo, la curva dada es una circunferencia de radio 3 y el centro en el punto M_0 cuyas coordenadas son $x_0 = 3$, $y_0 = 0$, o bien $r_0 = 3$, $\varphi_0 = 0$. ▶

EJEMPLO 3. Dedúzcase la ecuación de una recta en el sistema polar de coordenadas.

◀ Si la recta L pasa por el polo y su coeficiente angular respecto al eje polar es igual a k, entonces la ecuación de esta recta es $\operatorname{tg} \varphi = k$.

Supongamos ahora que la recta L no pasa por el polo. Escribamos la ecuación normal de esta recta en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$$

y pasemos en esta ecuación a las coordenadas polares. Obtenemos (teniendo presente que $\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha$):

$$r \cos \varphi \cos \alpha + r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha - p = 0.$$

$$r \cos (\varphi - \alpha) = p,$$

$$r = \frac{p}{\cos (\varphi - \alpha)}.$$

La ecuación (8) es precisamente la ecuación buscada de la recta en el sistema polar de coordenadas. Esta ecuación puede obtenerse también directamente del siguiente hecho evidente: $M \in L \Longleftrightarrow \operatorname{pr}_n r = r \cos (\varphi - \alpha) = \text{const} = p$ (fig. 16) ▶

EJEMPLO 4. Sea Γ una elipse, una rama de la hipérbola o parábola, sea F el foco de esta curva y D, la directriz correspondiente. Dedúzcase la ecuación de la curva Γ en el sistema polar de coordenadas cuyo polo coincide con el foco y el eje polar está orientado igual que el eje de la curva (fig. 17).

◀ La propiedad general de la elipse, hipérbola y parábola consiste en lo siguiente (véanse los problemas 3.33, 3.53 y 3.71):

$$M \in \Gamma \Longleftrightarrow \frac{\rho (M, F)}{\rho (M, D)} = \text{const} = e, \tag{9}$$

donde e es la excentricidad de la curva ($e < 1$ para la elipse, $e > 1$ para la hipérbola y $e = 1$ para la parábola).

Designemos mediante p/e la distancia entre el foco y la directriz (p es el parámetro de la curva llamado diámetro semifocal). Entonces,

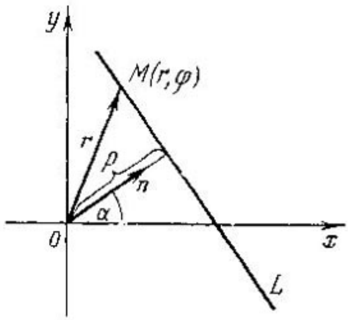


Fig. 16

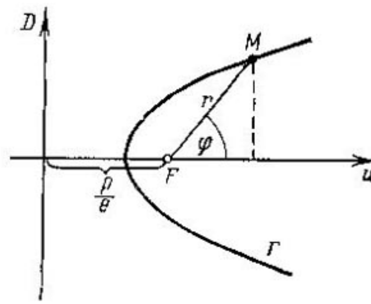


Fig. 17

de la figura 17 se deduce que $\rho(M, F) = r$ y $\rho(M, D) = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$. Sustituyendo estas expresiones en (9), obtenemos

$$\frac{r}{\frac{p}{e} + r\cos\varphi} = e,$$

de donde

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{10}$$

La ecuación (10) es precisamente la ecuación buscada en el sistema polar de coordenadas, común para la elipse, hipérbola y parábola. ▶

Escríbanse las ecuaciones de las curvas dadas en las coordenadas polares:

3.81. $y = x$. **3.82.** $y = 1$. **3.83.** $x + y - 1 = 0$.
3.84. $x^2 + y^2 = a^2$. **3.85.** $x^2 - y^2 = a^2$.
3.86. $x^2 + y^2 = ax$.

Escríbanse las ecuaciones de las curvas dadas en las coordenadas rectangulares cartesianas y constrúyanse dichas curvas:

3.87. $r = 5$. **3.88.** $\operatorname{tg}\varphi = -1$. **3.89.** $r\cos\varphi = 2$.

3.90. $r\operatorname{sen}\varphi = 1$. **3.91.** $r = \dfrac{1\sqrt{2}}{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}$.

3.92. $r=\dfrac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)}$. 3.93. $r=2a\cos\varphi$.

3.94. $r=2a\operatorname{sen}\varphi$. 3.95. $\operatorname{sen}\varphi=1/\sqrt{5}$.
3.96. $\operatorname{sen} r=1/2$. 3.97. $r^2\operatorname{sen}2\varphi=2a^2$.
3.98. $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

3.99. Escríbanse en las coordenadas polares las ecuaciones:

a) de una recta que es perpendicular al eje polar y corta en el mismo un segmento igual a 3;

b) de un rayo que parte del polo, formando con el eje polar un ángulo igual a $\pi/3$;

c) de una recta que pasa por el polo y forma con el eje polar un ángulo igual a $\pi/4$.

3.100. Escríbase en las coordenadas polares la ecuación de una circunferencia, si:

a) el radio $R=5$, la circunferencia pasa por el polo y su centro se dispone en el eje polar;

b) el radio $R=3$ y la circunferencia es tangente en el polo al eje polar.

3.101. Determínense las coordenadas polares del centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias:

a) $r=4\cos\varphi$; b) $r=3\operatorname{sen}\varphi$; c) $r=-5\operatorname{sen}\varphi$;

d) $r=6\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\varphi\right)$; e) $r=8\operatorname{sen}\left(\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

f) $r=8\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}-\varphi\right)$.

3.102. Dedúzcase en el sistema polar de coordenadas la ecuación de una circunferencia de radio R, con el centro en el punto $C(r_0, \varphi_0)$.

3.103. Escríbase la ecuación polar para la elipse $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, considerando que el eje polar está orientado igual que el eje de abscisas, mientras que el polo se encuentra:

a) en el foco izquierdo; b) en el foco derecho.

3.104. Escríbase la ecuación polar para la rama derecha de la hipérbola $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$, considerando que el eje polar está orientado igual que el de abscisas, mientras que el polo se halla:

a) en el foco izquierdo; b) en el foco derecho.

3.105. Escríbase la ecuación polar para la parábola $y^2 = 6x$, considerando que el eje polar está orientado igual que el eje de abscisas y el polo se encuentra en el foco de la parábola.

3.106. Escríbanse las ecuaciones canónicas de las siguientes curvas de segundo orden:

a) $r = \frac{9}{5-4\cos\varphi}$; b) $r = \frac{9}{4-5\cos\varphi}$; c) $r = \frac{3}{1-\cos\varphi}$.

3.107. Dedúzcase la ecuación polar de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a condición de que el eje polar tiene la misma dirección que el eje Ox y el polo se encuentra en el centro de la elipse.

3.108. Dedúzcase la ecuación polar de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a condición de que el eje polar está orientado igual que el eje Ox y el polo se encuentra en el centro de la hipérbola.

3.109. Dedúzcase la ecuación polar de la parábola $y^2 = 2px$ a condición de que el eje polar está orientado igual que el eje Ox y el polo se encuentra en el vértice de la parábola.

4. Ecuaciones paramétricas de una curva. Sean dadas las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, continuas en cierto intervalo I del eje numérico (I puede ser representado por el intervalo (a, b), el segmento $[a, b]$ y también por uno de los semiintervalos $(a, b]$ o bien $[a, b)$, además no se excluyen los casos en que $a = -\infty$ y/o $b = +\infty$). Las ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I, \tag{10}$$

se denominan *ecuaciones paramétricas* de la curva Γ en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas, siempre que se cumple la siguiente condición: para todo valor del parámetro $t \in I$ el punto $M(\varphi(t), \psi(t))$ pertenece a la curva Γ, y, viceversa, para todo punto $M(x, y)$ de la curva Γ existe tal valor del parámetro $t \in I$ que $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$. Eliminando el parámetro t de las ecuaciones (10), podemos representar la ecuación de la curva en la forma $F(x, y) = 0$.

Análogamente se determinan las ecuaciones paramétricas de la curva en coordenadas polares.

Ejemplo 5. Muéstrese que las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos t, \quad y = a\operatorname{sen} t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

definen la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

◀ Si el punto $M(x, y)$ es tal que $x = a \cos t$ e $y = a \operatorname{sen} t$ para cierto valor de $t \in [0, 2\pi)$, entonces

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2,$$

es decir, el punto $M(x, y)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Lo recíproco es también cierto: si el punto $M(x, y)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, entonces poniendo $t = (\widehat{\overline{OM}, i})$, $t \in [0, 2\pi)$, obtendremos $x = a \cos t$ e $y = a \operatorname{sen} t$. ▶

EJEMPLO 6. La curva Γ viene dada por la ecuación polar $r = 2R \operatorname{sen} \varphi$. Fórmense las ecuaciones paramétricas de esta curva en las coordenadas polares y rectangulares cartesianas, tomando a título de parámetro el ángulo polar φ.

◀ No es difícil convencerse de que la curva dada es una circunferencia de radio R, con el centro en el punto $C(0, R)$. Las ecuaciones paramétricas de esta curva en coordenadas polares son:

$$r = 2R \operatorname{sen} t, \quad \varphi = t, \quad t \in [0, \pi).$$

Las ecuaciones paramétricas en las coordenadas rectangulares cartesianas se obtienen, si en las fórmulas del cambio $x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$ sustituimos r y φ por sus expresiones en forma de las funciones del parámetro t. Como resultado obtendremos:

$$x = r(t) \cos \varphi(t) = R \operatorname{sen} 2t,$$
$$y = r(t) \operatorname{sen} \varphi(t) = R(1 - \cos 2t), \quad t \in [0, \pi). \ ▶$$

3.110. El rayo $\Gamma = \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0, y \geqslant 0\}$ tiene por origen el punto $M_0(-1, 0)$ (¡compruébese!). Fórmense las ecuaciones paramétricas de este rayo, tomando a título de parámetro:

a) la abscisa x; b) la ordenada y;

c) la distancia $\rho(M, M_0)$ entre el punto $M \in \Gamma$ y el vértice M_0 del rayo;

d) el ángulo polar, si el polo coincide con el origen de coordenadas y el eje polar está orientado igual que el eje Ox.

3.111. Fórmense las ecuaciones paramétricas de un segmento cuyos extremos son los puntos $M_1(1, 1)$ y $M_2(2, 3)$, tomando a título de parámetro:

a) la distancia $\rho(M, M_1)$; b) la distancia $\rho(M, M_2)$.

3.112. Fórmense las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio R, con el centro en el punto $M_0(x_0, y_0)$, tomando a título de parámetro t el ángulo entre el eje Ox y el vector $\overline{M_0M}$, calculado en sentido antihorario.

3.313. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2Rx$, tomando a título de parámetro el ángulo polar, si el eje polar está orientado igual que el eje Ox, y el polo se encuentra:

a) en el origen de coordenadas; b) en el centro de la circunferencia.

En los problemas 3.114—3.122 se pide hallar, eliminando el parámetro t, las ecuaciones de las curvas dadas en la forma $F(x, y) = 0$ y construir dichas curvas.

3.114. $x = -1 + 2t,\ y = 2 - t,\ t \in (-\infty, +\infty)$.

3.115. $x = t^2 - 2t + 1,\ y = t - 1,\ t \in (-\infty, +\infty)$

3.116. $x = -1 + 2\cos t,\ y = 3 + 2\operatorname{sen} t,\ t \in [0, 2\pi)$.

3.117. $x = a\cos t,\ y = b\operatorname{sen} t,\ t \in [0, 2\pi)$.

3.118. $x = 1 + 2\sec t, y = -1 + \operatorname{tg} t, t \in (-\pi/2, \pi/2)$

3.119. $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),\ y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right),\ t \in (0, +\infty)$.

3.120. $x = 2R\cos^2 t,\ y = R\operatorname{sen} 2t,\ t \in [-\pi/2, \pi/2)$.

3.121. $x = R\operatorname{sen} 2t,\ y = 2R\operatorname{sen}^2 t,\ t \in [0, \pi)$.

3.122. $x = 2p\operatorname{ctg}^2 t,\ y = 2p\operatorname{ctg} t,\ t \in (0, \pi/2]$.

3.123. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tomando a título de parámetro t el ángulo formado por el eje Ox y el radio vector $\overline{OM}$ y calculado en el sentido antihorario.

3.124. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, tomando a título de parámetro t el ángulo entre el eje Ox y el radio vector $\overline{OM}$, calculado en el sentido antihorario.

3.125. Fórmense las ecuaciones paramétricas de la parábola $y^2 = 2px$, tomando a título de parámetro:

a) la ordenada y;

b) el ángulo entre el eje Ox y el vector $\overline{OM}$ calculado en el sentido antihorario.

c) el ángulo entre el eje Ox y el radio vector focal $\overline{FM}$ calculado en el sentido antihorario.

5. **Algunas curvas que se encuentran en las matemáticas y en sus aplicaciones.** En este punto que lleva un carácter informativo se aducen unas ecuaciones y se indican las propiedades geométricas fundamentales de una serie de curvas especiales (algebraicas y trascendentes) que se encuentran en los cálculos prácticos de ingeniería. La deducción de las ecuaciones de dichas curvas puede ofrecerse a título de problemas de dificultad algo elevada al estudiar el curso de geometría analítica. El estudio bastante detallado de la forma de las curvas puede realizarse con ayuda de los métodos aceptados en el cálculo diferencial.

1. *Espirales*: *espiral de Arquímedes* $r = a\varphi$ (fig. 18), *espiral hiperbólica* $r = \frac{a}{\varphi}$ (fig. 19), *espiral logarítmica* $r = a^{\varphi}$ (fig. 20); la flecha

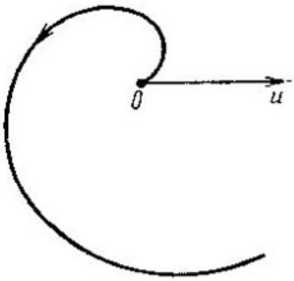


Fig. 18

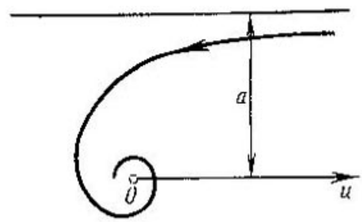
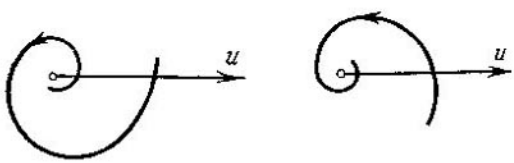


Fig. 19

indica la dirección de recorrido de la curva correspondiente al crecimiento de φ.

2. *Lemniscata de Bernoulli* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (fig. 21) o bien $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ (el polo se sitúa en el punto O). La propiedad



$a>1$ $\qquad$ $0<a<1$

Fig. 20

característica: $|F_1M| \cdot |F_2M| = \text{const} = a^2$, donde $F_1(-a, 0)$, $F_2(a, 0)$.

3. *Cisoide* $y^2(2R - x) = x^3$ (fig. 22), o bien $r = 2R \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} \varphi$ (el polo se sitúa en el punto O). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto O se tiene $|OM| = |BC|$.

4. *Concoide* $x^2y^2 + (x + a)^2(x^2 - b^2) = 0$ (fig. 23), o bien $r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$ (el polo está situado en el punto A). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto $A(-a, 0)$ se tiene $|BM| = |BN| = \text{const} = b$.

5. *Estrofoide* $x^2((x + a)^2 + y^2) = a^2y^2$ (fig. 24), o bien $r = \frac{a}{\cos\varphi} \pm a \operatorname{tg}\varphi$ (el polo se ha situado en el punto A). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto $A(-a, 0)$ se tiene $|BM| = |BN| = |OB|$.

6. *Caracol de Pascal* $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$ (fig. 25), o bien $r = 2a\cos\varphi \pm b$ (el polo se ha situado en el punto O). La propiedad característica es: para todo rayo que parte del punto O se tiene $|BM| = |BN| = \text{const} = b$.

7. *Rosácea de cuatro pétalos* $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ (fig. 26), o bien $r = a|\operatorname{sen} 2\varphi|$ (el polo se ha situado en el punto O). La propiedad característica es: todo punto M de esta curva es una base de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas sobre el segmento

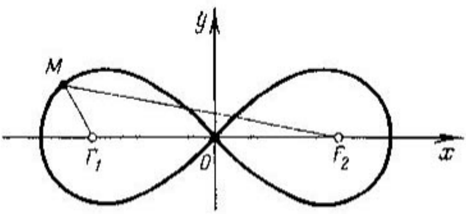


Fig. 21

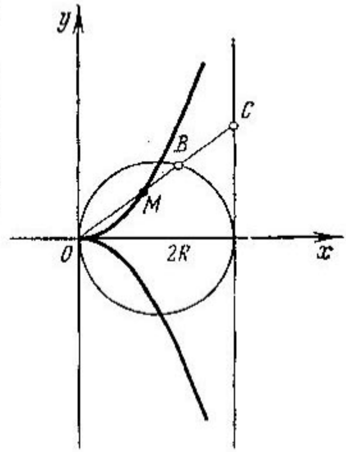


Fig. 22

$[AB]$ de longitud constante $2a$, el cual se desliza de tal manera que sus extremos siempre se encuentran en los ejes coordenados.

8. *Astroide* $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, $t \in [0, 2\pi)$, o bien $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (fig. 27). La propiedad característica es: todo punto M

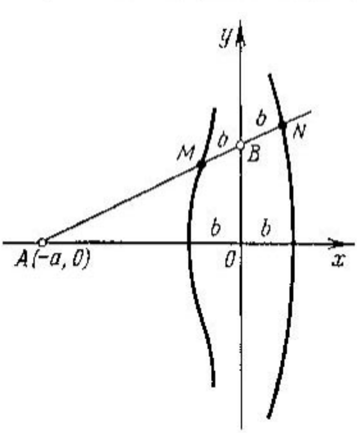


Fig. 23

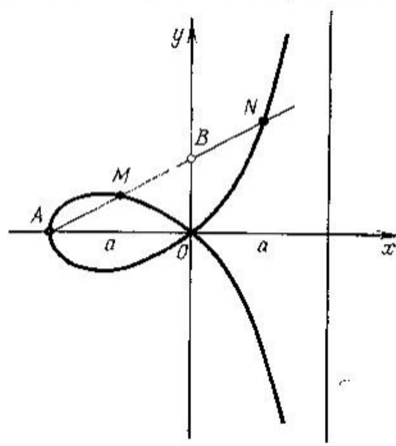


Fig. 24

de esta curva es la base de una perpendicular $[PM]$ al segmento $[AB]$ de longitud constante que se desplaza de tal manera que sus extremos siempre se encuentran en los ejes coordenados.

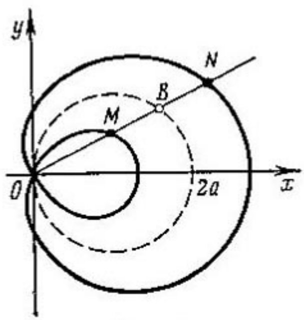


Fig. 25

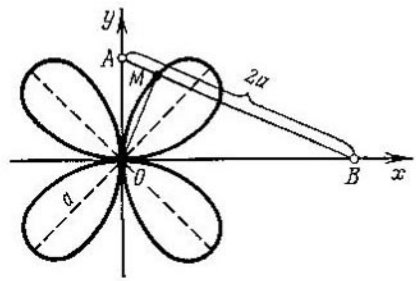


Fig. 26

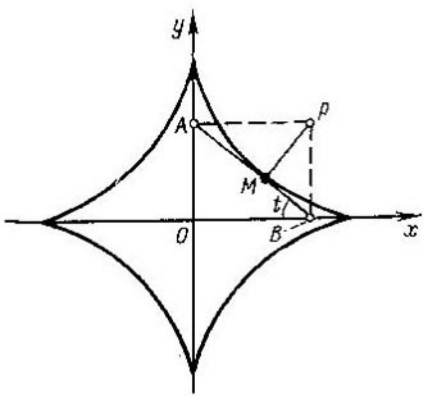


Fig. 27

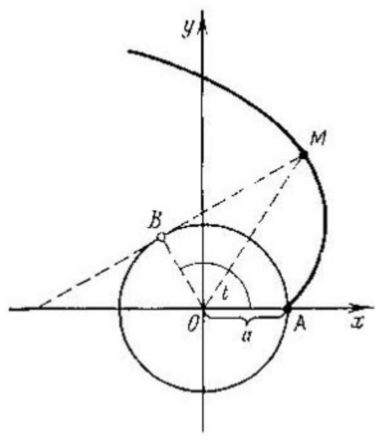


Fig. 28

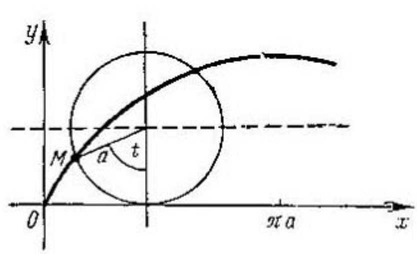


Fig. 29

9. *Envolvente de la circunferencia* $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$, $t \in [0, \infty)$ (fig. 28). La propiedad característica es: cada punto M de esta curva es el extremo de un hilo el cual, quedando siempre tenso, se desenrolla de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

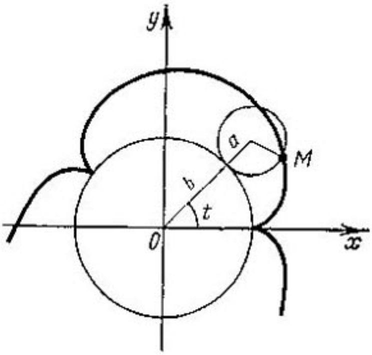


Fig. 30

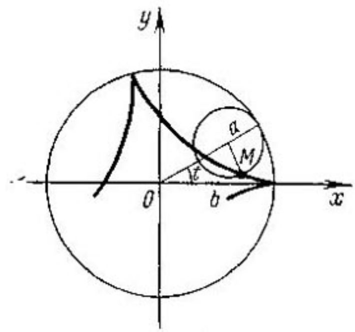


Fig. 31

(en el instante inicial el extremo del hilo se encuentra en el punto $A(a, 0)$).

10. *Cicloide* $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ (fig. 29). La propiedad característica es: la curva coincide con la

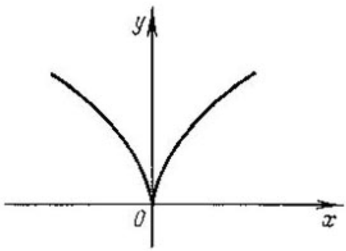


Fig. 32

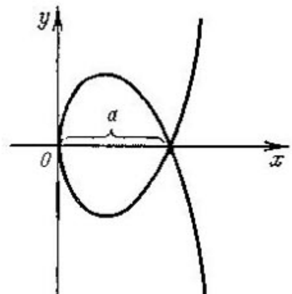


Fig. 33

trayectoria del punto M de una circunferencia de radio a, la cual rueda sin deslizamiento, por el eje Ox (en el instante inicial el punto M se encuentra en el origen de coordenadas).

11. *Epicicloide* $x = (a+b)\cos t - a\cos\frac{a+b}{a}t$, $y = (a+b)\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen}\frac{a+b}{a}t$, $t \in [0, \infty)$ (fig. 30). La propiedad característica es:

la curva coincide con la trayectoria del punto M de una circunferencia de radio a, la cual rueda sin deslizamiento por la circunferencia $x^2 + y^2 = b^2$, quedando siempre fuera de ésta (en el instante inicial el punto M se encuentra en la posición A $(b, 0)$). En el caso particular, cuando $a = b$, la curva correspondiente recibe el nombre de *cardioide*.

12. *Hipocicloide* $x = (b-a)\cos t + a\cos\dfrac{b-a}{a}t$, $y = (b-a)\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen}\dfrac{b-a}{a}t$, $t \in [0, \infty)$ (fig. 31). La propiedad característica es: la curva coincide con la traectoria del punto M de una circunferencia de radio a, la cual rueda sin deslizamiento por la circunferencia

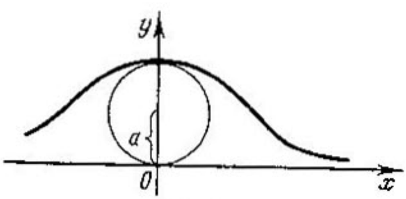


Fig. 34

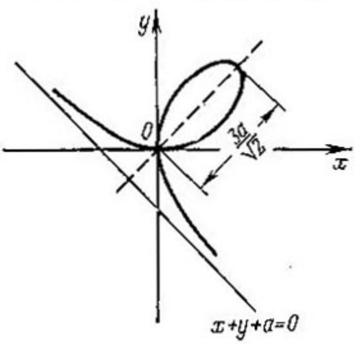


Fig. 35

$x^2 + y^2 = b^2$, quedando siempre en el interior de la misma (en el instante inicial el punto M se encuentra en la posición A $(b, 0)$). En el caso particular, cuando $a = b/4$, esta curva coincide con la astroide.

13. *Parábola semicúbica* $y^2 = ax^3$ (fig. 32).

14. *Parábola de bucle* $ay^2 = x(x-a)^2$ (fig. 33).

15. *Curva de Agnesi* $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ (fig. 34).

16. *Folio de Descartes* $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (fig. 35).

§ 4. Superficies y curvas en el espacio

1. Ecuaciones de la superficie y de la curva en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas. Se dice que la superficie S en el sistema de coordenadas $Oxyz$ tiene la ecuación

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

si se cumple la siguiente condición: el punto $M(x, y, z)$ pertenece a la superficie S cuando, y sólo cuando, sus coordenadas x, y y z satisfacen la relación (1). Si, en particular, $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, la ecuación (1) puede ser escrita en la forma

$$z = f(x, y), \tag{2}$$

y en este caso la superficie S coincide con la gráfica de la función de dos variables $f(x, y)$.

La curva Γ en el espacio se define, en el caso general, como una línea de intersección de ciertas superficies S_1 y S_2 (definidas de manera no unívoca), es decir, prefijando un sistema de dos ecuaciones

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Ejemplo 1. Dedúzcase la ecuación de una superficie, cada punto de la cual es dos veces más próximo al punto $A(2, 0, 0)$ que al punto $B(-4, 0, 0)$.

◀ Si S es la superficie definida por las condiciones del problema, entonces $M(x, y, z) \in S$ cuando, y sólo cuando, $\rho(M, B) = 2\rho(M, A)$ o bien

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}.$$

De aquí obtenemos

$$(x+4)^2 + y^2 + z^2 = 4((x-2)^2 + y^2 + z^2),$$

$$3x^2 - 24x + 3y^2 + 3z^2 = 0$$

o bien, formando un cuadrado perfecto en los sumandos que contienen x,

$$(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16. \tag{4}$$

La ecuación (4) es precisamente la ecuación buscada de la superficie. De esta ecuación se ve que la superficie dada S es una esfera de radio 4, con el centro en el punto $M_0(4, 0, 0)$. ▶

Ejemplo 2. Investíguese la forma de la curva Γ, dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=36, \\ y+z=0. \end{cases} \tag{5}$$

Determínese la forma de su proyección sobre el plano Oxy.

◀ La curva Γ viene dada como una línea de intersección de la esfera $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36$ con el plano $y + z = 0$, y, por consiguiente, es una circunferencia. Como el centro de la esfera $C(1, 0, 0)$ se encuentra en el plano de la sección $y + z = 0$, el centro de la circunferencia coincide con el punto C y su radio es igual al de la esfera, es decir, a $R = 4$.

Establezcamos la forma de la proyección de la circunferencia Γ sobre el plano Oxy. Eliminando z del sistema (5), obtenemos $(x-1)^2 + 2y^2 = 36$, o bien $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1$. De aquí que la proyección buscada es una elipse cuyos ejes principales están orientados igual que los ejes Ox y Oy, el centro se encuentra en el punto $C'(1, 0)$ y los semiejes son $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$. ▶

Establézcase qué imágenes geométricas se definen por las ecuaciones dadas:

4.1. $z + 5 = 0$. **4.2.** $x - 2y + z - 1 = 0$.

4.3. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. **4.4.** $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$.

4.5. $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$. **4.6.** $x^2 + 4z^2 = 0$.

4.7. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 7 = 0$. **4.8.** $x^2 - 4z^2 = 0$.

4.9. $xz = 0$. **4.10.** $xyz = 0$.

4.11. $x^2 - 4x = 0$. **4.12.** $xy - y^2 = 0$.

4.13. Dedúzcase la ecuación de una superficie, para la cual la diferencia entre los cuadrados de las distancias de cada punto de la superficie hasta los puntos F_1 (2, 3, —5) y F_2 (2, —7, —5) es igual a 13.

4.14. Dedúzcase la ecuación de una superficie, para la cual la suma de los cuadrados de las distancias de cada punto de la superficie hasta los puntos F_1 ($-a$, 0, 0) y F_2 (a, 0, 0) es igual al número constante $4a^2$.

4.15. Dedúzcase la ecuación de una superficie, para la cual la suma de las distancias entre cualquier punto de la superficie y los puntos F_1 (0, 0, —4) y F_2 (0, 0, 4) es igual a 10.

4.16. Dedúzcase la ecuación de la superficie, para la cual el módulo de la diferencia entre las distancias de cada punto de la superficie hasta los puntos F_1 (0, —5, 0) y F_2 (0, 5, 0) es igual a 6.

4.17. Establézcase que cada una de las ecuaciones que siguen definen una esfera, hállese su centro C y el radio R:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$.

4.18. Fórmese la ecuación de una esfera en cada uno de los siguientes casos (designaciones: C es el centro de la esfera, R es el radio, M, M_1, M_2, M_3 son los puntos en la esfera):

a) C (—1, 2, 0), $R = 2$; b) M (2, —1, —3), C (3, —2, 1);

c) M_1 (2, —3, 5) y M_2 (4, 1, —3) son los extremos del diámetro de la esfera;

d) C (3, —5, —2), el plano $2x - y - 3z + 11 = 0$ es tangente a la esfera;

e) M_1 (3, 1, —3), M_2 (—2, 4, 1), M_3 (—5, 0, 0), $C \in P$: $2x + y - z + 3 = 0$.

4.19. Fórmese la ecuación de una esfera cuyo centro se ubica en la recta

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

y que toca los planos $x + 2y - 2z - 2 = 0$ y $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

4.20. Fórmese la ecuación de una esfera inscrita en un tetraedro formado por los planos

$$3x - 2y + 6z - 8 = 0, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0.$$

4.21. Fórmense las ecuaciones paramétricas del diámetro de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + z - 11 = 0$, que sea perpendicular al plano $5x - y + 2z - 17 = 0$.

4.22. En la esfera $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ hállese un punto M_0 que sea el más próximo al plano $3x - 4z + 19 = 0$ y calcúlese la distancia de este punto hasta el plano.

4.23. Determínese la disposición de un plano respecto de una esfera (la corta, es tangente a ella o pasa fuera de ella), si el plano y la esfera se han dado por las ecuaciones:

a) $z = 3, \; x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$;

b) $y = 1, \; x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$;

c) $x = 5, \; x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$.

4.24. Establézcase qué curvas se definen por las siguientes ecuaciones

a) $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ z + 2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49, \\ y = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20, \\ z - 2 = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 25 = 0. \end{cases}$

4.25. Hállense el centro y el radio de una circunferencia:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10y, \\ x + 2y + 2z - 19 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0. \end{cases}$

● El centro de una circunferencia es la proyección del centro de la esfera sobre el plano.

4.26. Hállese la proyección sobre el plano $z = 0$ de la sección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4(x - 2y - 2z)$ por un plano que pasa por el centro de la esfera y que es perpendicular a la recta $x = 0, \; y + z = 0$.

4.27. Los puntos $A(3, -2, 5)$, y $B(-1, 6, -3)$ son los extremos del diámetro de una circunferencia que pasa por el punto C (1, —4, 1). Fórmense las ecuaciones de esta circunferencia.

4.28. Fórmense las ecuaciones de una circunferencia que pasa por los tres puntos M_1 (3, —1, —2), M_2 (1, 1, —2) y M_3 (—1, 3, 0).

2. Superficies algebraicas de segundo grado. Se llama *superficie algebraica de segundo grado* la superficie S cuya ecuación en el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas tiene la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \qquad (6)$$

donde no todos los coeficientes de los términos de segundo orden son iguales a cero simultáneamente (de lo contrario, S sería una superficie algebraica de primer orden, es decir, un plano).

Puede resultar que la ecuación (6) defina la así llamada superficie *degenerada* (un conjunto vacío, un punto, un plano, un par de planos,

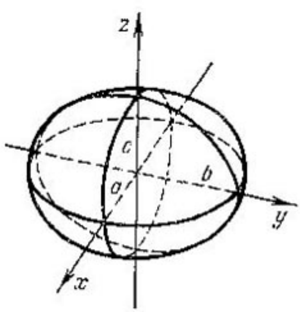


Fig. 36

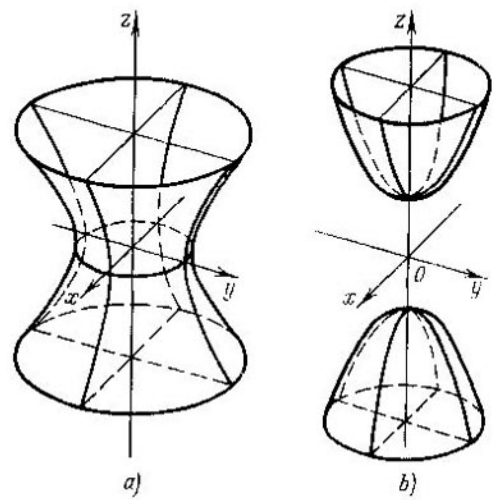


Fig. 37

una recta). Si, en cambio, la superficie es *regular*, entonces transformando el sistema de coordenadas rectangulares cartesianas, su ecuación (6) puede ser reducida a una de las siguientes formas que se llaman *canónicas* y que determinan el tipo de superficie.

1. *Elipsoide:* $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \qquad$ (fig. 36).

2. *Hiperboloide*

a) *de una hoja:* $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \qquad$ (fig. 37, *a*);

b) *de dos hojas:* $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad \text{(fig. 37, } b\text{)}.$$

3. *Cono de segundo grado:* $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad \text{(fig. 38)}.$$

4. *Paraboloide*

a) *elíptico:* $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \qquad \text{(fig. 39, } a\text{)};$$

b) *hiperbólico:* $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z \qquad \text{(fig. 39, } b\text{)}.$$

5. *Cilindro de segundo grado*

a) *elíptico:* $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{(fig. 40, } a\text{)};$$

b) *hiperbólico:* $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{(fig. 40, } b\text{)};$$

c) *parabólico:* $y^2=2px, \quad p>0$ (fig. 40, c).

Los métodos generales de reducción de la ecuación (6) a una forma canónica se apoyan en la teoría de las formas cuadráticas y se

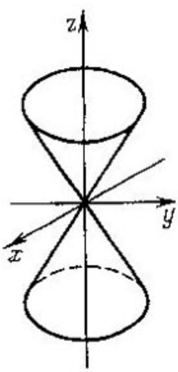


Fig. 38

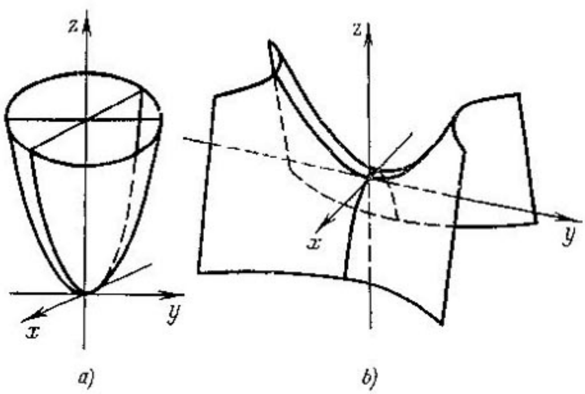


Fig. 39

examinan en el p. 4, § 3, cap. 4. El objetivo del punto presente consiste en el estudio de las propiedades geométricas fundamentales de las superficies regulares de segundo grado sobre la base de sus ecuaciones canónicas.

El *método* principal para investigar las formas de las superficies según su ecuación es el *de secciones.*

EJEMPLO 3. Investíguese mediante el método de secciones la forma y constrúyase una superficie dada por la ecuación

$$z=2\left(1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}\right). \tag{7}$$

◀ En la sección de la superficie por un plano horizontal $z = h$ tenemos una curva Γ_h cuya proyección sobre el plano Oxy se define por la ecuación

$$h = 2\left(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}\right),$$

o bien

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 2 - h. \tag{8}$$

La ecuación (8) no tiene, para $h > 2$, soluciones con relación a (x, y). Esto significa que la sección correspondiente está vacía, es decir, la

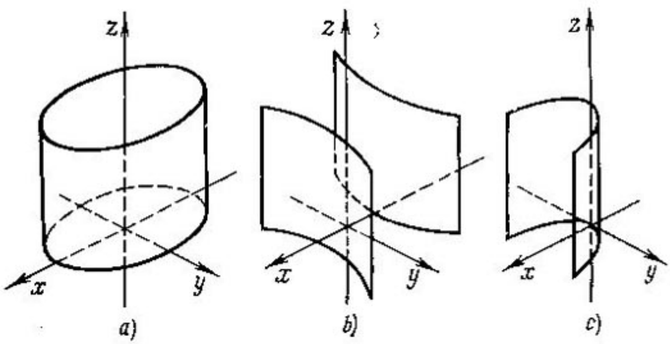


Fig. 40

superficie en consideración se dispone íntegramente por debajo del plano $z = 2$. Cuando $h \leqslant 2$, la ecuación (8) define una elipse cuyos semiejes son $a = 4\sqrt{2-h}$ y $b = 5\sqrt{2-h}$, que se degenera en el punto $x = y = 0$ para $h = 2$. Observemos que todas las elipses que se obtienen en las secciones de la superficie por los planos $x = h \leqslant 2$ son semejantes entre sí $\left(\frac{a}{b} = \text{const} = \frac{4}{5}\right)$, además si h va decreciendo, sus semiejes crecen de manera monótona e indefenida.

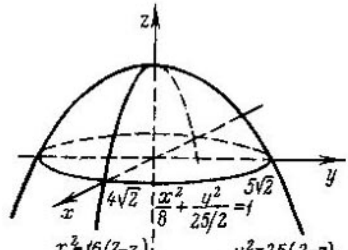


Fig. 41

La información obtenida es suficiente para que se pueda construir un croquis de la superficie. La precisión ulterior de su forma puede obtenerse al considerar las secciones mediante planos coordenados Oxz y Oyz. La sección del plano Oxz: $y = 0$ nos da una curva $x^2 = 16(2 - z)$, es decir, una parábola de parámetro $p = 8$, con el vértice en el punto $x = 0$, $z = 2$ y las ramas dirigidas al lado del decrecimiento de los valores z. Por fin, la sección del plano Oyz: $x = 0$ da la parábola $y^2 = 25(2-z)$ de parámetro $p = \dfrac{25}{2}$, con el vértice en el punto $y = 0$, $z = 2$ y las ramas de dirección análoga.

La investigación realizada permite, ahora, exponer detalladamente la superficie dada (fig. 41).

La superficie dada es un paraboloide elíptico. La transformación de las coordenadas

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = 2 - z$$

(que se reduce al desplazamiento del origen en el punto (0, 0, 2), que constituye el vértice del paraboloide, y a la inversión de la dirección del eje Oz) conduce su ecuación inicial (7) a la forma canónica

$$\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{25} = z'. \blacktriangleright \tag{9}$$

Establézcase el tipo de superficies dadas y constrúyanse éstas:

4.29. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{25} = 1$. **4.30.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{36} = 1$.

4.31. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. **4.32.** $x^2 - y^2 = z^2$.

4.33. $x^2 + y^2 = 2az$, $a \neq 0$. **4.34.** $x^2 - y^2 = 2az$, $a \neq 0$.

4.35. $2z = x^2 + \dfrac{y^2}{2}$. **4.36.** $x^2 = 2az$, $a \neq 0$.

4.37. $z = 2 + x^2 + y^2$. **4.38.** $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 6z$.

4.39. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$. **4.40.** $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$.

4.41*. Demuéstrese que la ecuación $z^2 = xy$ define un cono con vértice en el origen de coordenadas.

4.42*. Demuéstrese que la ecuación $z = xy$ define un paraboloide hiperbólico.

4.43. Denomínense y constrúyanse las superficies:

a) $x^2 = 2yz$; b) $z - a = xy$.

4.44. Fórmense las ecuaciones de las proyecciones sobre los planos coordenados de la sección de un paraboloide elíptico $y^2 + z^2 = x$ obtenida al cortarlo por el plano $x + 2y - z = 0$.

4.45. Establézcase cuáles de las curvas se definen por las ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 2z, \\ 3x - y + 6z - 14 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 2z, \\ x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$

4.46. Hállense los puntos de intersección de la superficie con una recta:

a) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ y $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ y $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$;

c) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ y $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

● Pásese a las ecuaciones paramétricas de la recta.

4.47. Demuéstrese que en cada uno de los casos que vienen más abajo la superficie y el plano dados tienen un punto común; hállense las coordenadas de este punto:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2y$, $2x-2y-z-10=0$;

b) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$, $5x+2z+5=0$;

c) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{9}=1$, $4x-3y+12z-54=0$.

4.48. Demuéstrese que el plano $2x-12y-z+16=0$ corta el paraboloide hiperbólico $x^2-4y^2=2z$ a lo largo de las generatrices rectilíneas (es decir, de las rectas situadas íntegramente en dicha superficie). Fórmense las ecuaciones de las generatrices mencionadas.

4.49. Demuéstrese que el plano $4x-5y-10z-20=0$ corta el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ a lo largo de las generatrices rectilíneas. Fórmense las ecuaciones de estas generatrices.

3. Clasificación de las superficies según el tipo de transformaciones de la simetría. Según sea el tipo de simetría, se pueden distinguir tres clases de superficies: cilíndricas, cónicas y superficies de revolución.

Se denomina *superficie cilíndrica* (*cilindro*) la superficie invariante respecto a las transformaciones del traslado paralelo T (tq), determinadas por cualquier vector colineal a cierto vector q (l, m, n). De esta definición proviene que si el punto M_0 (x_0, y_0, z_0) pertenece al cilindro S, entonces toda la recta $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, también pertenece a este cilindro.

Se ha adoptado la siguiente terminología: toda recta colineal respecto del vector q (l, m, n) se denomina *eje* del cilindro S; las rectas $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, M_0 (x_0, y_0, z_0) $\in S$, pertenecientes íntegramente al cilindro, se llaman *generatrices* del cilindro; toda curva Γ que se dispone en el cilindro y corta todas sus generatrices se llama *directriz* de este cilindro.

Sea $q(l, m, n)$ un vector cualquiera colineal respecto del eje del cilindro S, mientras que la directriz Γ está dada por las ecuaciones

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

El punto $M(x, y, z)$ pertenece al cilindro S cuando, y sólo cuando, existe tal número t que el punto de coordenadas $x + tl$, $y + tm$, $z + tn$ se sitúa en la generatriz Γ, es decir,

$$\begin{cases} F_1(x + tl, y + tm, z + tn) = 0, \\ F_2(x + tl, y + tm, z + tn) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Eliminando el parámetro t del sistema (10), obtendremos la relación del tipo $F(x, y, z) = 0$, la cual será precisamente la ecuación del cilindro dado.

EJEMPLO 4. Escríbase la ecuación de un cilindro cuyo eje coincide con el eje coordinado Oz y la directriz viene dada por las ecuaciones

$$F(x, y) = 0, \quad z - h = 0.$$

◀ Suponiendo $q = k(0, 0, 1)$, obtendremos el sistema (10) en la forma $F(x, y) = 0$, $z + t - h = 0$. Este resultado implica que el punto $M(x, y, z)$ pertenece al cilindro cuando, y sólo cuando, sus coordenadas x e y satisfacen la ecuación $F(x, y) = 0$ para un valor arbitrario de la coordenada z. Por consiguiente, la ecuación $F(x, y) = 0$, que describe la proyección de la directriz sobre el plano Oxy es precisamente la ecuación del cilindro dado. ▶

Constrúyanse las superficies cilíndricas dadas:

4.50. $y^2 + z^3 = 4$. **4.51.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4.52. $x^2 + y^2 = ax$. **4.53.** $x^2 = 6z$. **4.54.** $z = 4 - x^2$.

4.55. $x^2 - xy = 0$. **4.56.** $x^2 - z^2 = 0$.

4.57. $y^2 + 2z^2 = 0$. **4.58.** $xz = 4$. **4.59.** $y^2 + z^2 = -z$.

4.60. Fórmense las ecuaciones de tres superficies cilíndricas descritas alrededor de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$ con los ejes paralelos a) al eje Ox; b) al eje Oy; c) al eje Oz, respectivamente.

4.61. Hállese la ecuación de un cilindro que proyecta la circunferencia

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

sobre los planos: a) Oxy; b) Oxz; c) Oyz.

4.62. Hállese la ecuación de la proyección de la circunferencia

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=36, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25 \end{cases}$$

sobre los planos: a) Oxy; b) Oxz; c) Oyz.

4.63. Fórmese la ecuación de una superficie cada punto de la cual es equidistante de la recta $x=a$, $y=0$ y el plano Oyz. Constrúyase esta superficie.

4.64. Fórmese la ecuación de un cilindro, si:

a) el eje es colineal al vector $\boldsymbol{q}$ (1, 2, 3) y la directriz viene definida por las ecuaciones $y^2=4x$, $z=0$;

b) el eje es colineal al vector $\boldsymbol{q}$ (1, 1, 1) y la directriz viene definida por las ecuaciones $x^2+y^2=4x$, $z=0$.

4.65. Una esfera $x^2+y^2+z^2=4z$ está iluminada por unos rayos paralelos a la recta $x=0$, $y=z$. Hállese la forma de la sombra de la esfera sobre el plano Oxy.

4.66. Constrúyase un cuerpo limitado por las superficies $y^2=x$, $z=0$, $z=4$, $x=4$, y escríbase la ecuación de la diagonal de la cara situada en el plano $x=4$.

Se denomina *superficie cónica* (*cono*) la superficie invariante respecto a las transformaciones de la homotecia H (k, M_0) con un coeficiente arbitrario k y el centro en cierto punto M_0 (x_0, y_0, z_0) llamado *vértice* del cono. De esta definición proviene que si el punto M_1 (x_1, y_1, z_1) pertenece al cono, entonces toda recta $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_1}{z_1-z_0}$ que pasa por este punto y el vértice M_0 y que se llama *generatriz* del cono, se sitúa íntegramente en el cono. Toda recta Γ, que se dispone en el cono y que corta todas las generatrices de éste se llama *directriz* de este cono.

Sea dado un cono S cuyo vértice es M_0 (x_0, y_0, z_0) y la directriz se expresa por las ecuaciones

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0.$$

El punto M (x, y, z) pertenece al cono S cuando, y sólo cuando, existe un número t tal que un punto con las coordenadas $x+t(x-x_0)$, $y+t(y-y_0)$, $z+t(z-z_0)$ se sitúa en la generatriz Γ, es decir,

$$\begin{cases} F_1(x+t(x-x_0),\ y+t(y-y_0),\ z+t(z-z_0))=0, \\ F_2(x+t(x-x_0),\ y+t(y-y_0),\ z+t(z-z_0))=0. \end{cases} \qquad (11)$$

Eliminando el parámetro t del sistema (11), obtendremos la ecuación del cono en la forma $F(x, y, z)=0$.

Ejemplo 5. Escríbase la ecuación de un cono cuyo vértice se encuentra en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0) y la directriz viene dada por las ecuaciones $F(x, y)=0$, $z-h=0$.

◀ El sistema (11) toma en estas condiciones la forma siguiente

$$\begin{cases} F(x+t(x-x_0), \quad y+t(y-y_0))=0, \\ z+t(z-z_0)-h=0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos $t=\frac{h-z}{z-z_0}=\frac{(h-z_0)-(z-z_0)}{z-z_0}=$ $=\frac{h-z_0}{z-z_0}-1$, lo que, al realizar la sustitución en la primera ecuación, nos da

$$F\left(x_0+(h-z_0)\frac{x-x_0}{z-z_0}, \quad y_0+(h-z_0)\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0. \tag{12}$$

La ecuación (12) es precisamente la ecuación del cono dado. En un caso particular, cuando $x_0=y_0=z_0=0$ (el vértice del cono se encuentra en el origen de coordenadas), la ecuación del cono adquiere la forma

$$F\left(h\frac{x}{z}, \; h\frac{y}{z}\right)=0. \tag{13}$$

Observemos que la ecuación (13) es *homogénea* respecto de x, y y z (es decir, no varía cuando x, y y z se sustituyen por tx, ty y tz para $t\neq 0$ arbitrario), mientras que la ecuación (12) es homogénea respecto de $x-x_0$, $y-y_0$ y $z-z_0$. ▶

4.67. Supongamos que la función de tres variables $F(x, y, z)$ es homogénea respecto de x, y y z, es decir,

$$\forall\, t\neq 0\; \exists s\in\mathbb{R}\; (F(tx, ty, tz)=t^sF(x, y, z)).$$

Muéstrese que la ecuación $F(x, y, z)=0$ define un cono con vértice en el origen de coordenadas, con la particularidad de que la curva

$$F\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}, 1\right)=0, \quad z-h=0$$

es su directriz, cualquiera que sea h.

4.68. Fórmese la ecuación de un cono cuyo vértice se ubica en el origen de coordenadas y la directriz viene dada por las ecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=h; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+(y-6)^2+z^2=25, \\ y=3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=a; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-2z+1=0, \\ y-z+1=0. \end{cases}$

Constrúyanse los conos correspondientes.

4.69. Fórmese la ecuación de un cono, si están dadas las coordenadas del vértice M_0 y las ecuaciones de la directriz:

a) $M_0(0, -a, 0)$, $x^2 = 2py$, $z = h$;

b) $M_0(0, 0, c)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$;

c) $M_0(0, -a, 0)$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y + z = a$;

d) $M_0(3, -1, -2)$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x - y + z = 0$.

Constrúyanse los conos correspondientes.

4.70. Constrúyase un cono, determínense su vértice y la directriz en el plano $z = h$, si el cono está dado por la ecuación

a) $x^2 + (y - h)^2 - z^2 = 0$; b) $x^2 = 2yz$.

4.71. Fórmese la ecuación de un cono circular, para el cual los ejes coordenados sirven de generatrices.

4.72. Fórmense las ecuaciones de las proyecciones de una línea de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ sobre los ejes coordenados:

a) Oxy; b) Oxz; c) Oyz.

4.73. Una fuente de luz que se encuentra en el punto $M_0(5, 0, 0)$ ilumina la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Hállese la forma de la sombra en el plano Oyz.

Se denomina *superficie de revolución* una superficie invariante respecto de los giros $R(\varphi, n)$ en cualquier ángulo φ en torno a cierto eje fijo u. Esta superficie puede obtenerse por revolución en torno al eje u de una curva que se consigue en la sección de la superficie por cualquier plano que pasa por el eje de simetría.

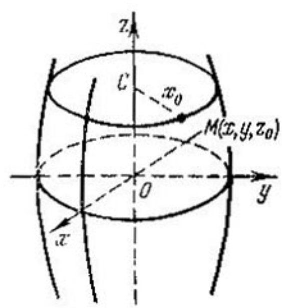


Fig. 42

EJEMPLO 6. Dedúzcase la ecuación de una superficie obtenida como resultado de la revolución de la curva $F(x, y) = 0$, $y = 0$ en torno al eje Oz (fig. 42).

◀ La sección de una superficie por un plano arbitrario $z = z_0$ es una circunferencia de radio x_0, con el centro en el punto $C(0, 0, z_0)$, siendo $F(x_0, z_0) = 0$. Por ello, para un punto arbitrario $M(x, y, z)$ de esta circunferencia tenemos: $z = z_0$ y $\rho(M, Oz) = \sqrt{x^2 + y^2} = x_0$. Sustituyendo estas ecuaciones en la relación $F(x_0, y_0) = 0$, obtenemos

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{14}$$

La ecuación (14) es precisamente la ecuación buscada de la superficie de revolución dada. ▶

4.74. Escríbase la ecuación de una superficie formada por la revolución de la curva $z = x^2$, $y = 0$:

a) en torno al eje Oz; b) en torno al eje Ox.

Constrúyanse dichas superficies.

4.75. Escríbase la ecuación de una superficie formada por la revolución de la recta $z = y$, $x = 0$:

a) en torno al eje Oy; b) en torno al eje Oz.

Constrúyanse ambas superficies.

4.76. Escríbase la ecuación de una superficie formada por la revolución en torno al eje Oz:

a) de la curva $z = e^{-x^2}$, $y = 0$;

b) de la curva $z = \frac{4}{x^2}$, $y = 0$.

Constrúyanse ambas superficies en el sistema inverso de coordenadas.

4.77. Muéstrese que la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$ es una superficie de revolución en torno al eje Ox. Escríbase la ecuación de la curva en el plano $z = 0$ que en su revolución forma la superficie mencionada.

4.78. Muéstrese que la superficie $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ es una superficie de revolución. Hállese su eje de simetría y las ecuaciones de una curva cualquiera por cuya revolución está formada dicha superficie.

RESPUESTAS

1.8. $\overline{MA} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\overline{MB} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $\overline{MC} = -\overline{MA}$, $\overline{MD} = -\overline{MB}$. **1.9.** $\overline{CD} = \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$, $\overline{DE} = -\boldsymbol{p}$, $\overline{EF} = -\boldsymbol{q}$, $\overline{EA} = \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$, $\overline{AD} = 2\boldsymbol{q}$, $\overline{AE} = 2\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$. **1.11.** $\overline{MM'} = \frac{1}{3}(\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'})$. **1.13.** $\overline{AB} = \frac{\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{1+\lambda}$, $\overline{BC} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{1+\lambda}$, $\overline{CD} = \frac{\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{1+\lambda}$, $\overline{DA} = -\frac{\lambda}{1+\lambda} \times (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. **1.15.** $\lambda = 5$. **1.18.** 0, 1, 2. **1.19.** $\lambda = \mu = 1$. **1.20.** a) $(-1/2, 1/2, 1/2)$; b) $(1/3, 1/3, 1/3)$. **1.21.** $(7/10, 3/20, 3/20)$. **1.22.** a) $(1/2, 0, 1/2)$; b) $(1, -1/2, 1/2)$. **1.23.** $\left(1-\frac{1}{\lambda}, -1\right)$. **1.24.** a) $|\boldsymbol{a}_1| = \sqrt{5}$, $\boldsymbol{a}_{1.0}(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0)$; b) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{j}}) = 2/\sqrt{5}$; c) $X(\boldsymbol{a}) = -19/3$; d) $\mathrm{pr}_j \boldsymbol{a} = Y(\boldsymbol{a}) = 0$. **1.25.** $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{e}$. **1.26.** $\boldsymbol{a} = -\frac{4}{5}\boldsymbol{e}_1 - \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_2$. **1.27.** $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$. **1.28.** a) $\boldsymbol{a}_0(2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}, 0)$; b) $\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b} +$

$+c=d(3,\ 11/2,\ 0)$; c) $a+b-2c=-2j$; d) $\mathrm{pr}_j(a-b)=6$. **1.29.** $x=-5i+10j+10k$. **1.30.** $x=2i+2j+2k$. **1.31.** $x=\pm 5i+\frac{5}{\sqrt{2}}j-\frac{5}{\sqrt{2}}k$. **1.32.** $\alpha=-1$, $\beta=4$. **1.33.** $x=\frac{5}{3}(i+7j+2k)$. ● $x=\lambda(a_0+b_0)$, donde a_0 y b_0 son los versores de los vectores dados a y b. **1.34.** $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$. **1.35.** a) $(3,\ -6,\ 6)$; b) $(5,\ 5,\ 1)$; c) $(-5/\sqrt{2},\ 7/\sqrt{2},\ 5)$. **1.36.** $D(9,\ -5,\ 6)$. **1.37.** $C(6,\ -2)$, $D(2,\ -4)$. **1.38.** $M_1(7,\ 0)$ y $M_2(-1,\ 0)$. **1.39.** $M(0,\ 1,\ 0)$. **1.40.** 7. **1.41.** $(4,\ 0)$ y $(5,\ 2)$. **1.42.** $(-1,\ 2,\ 4)$ y $(8,\ -4,\ -2)$. **1.43.** $(-19,\ 10,\ -17)$. ● Desarróllese el vector $\overline{OD}$ según una base formada de los vectores $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$. **1.44.** $(10,\ -5,\ 0)$. ● Desarróllese el vector $\overline{OB}$ según una base formada de los vectores i, j, $\overline{OA}$. **1.46.** $\sqrt{182}/3$. **1.47.** $(11/7,\ 10/7,\ 18/7)$. **1.49.** a) 9; b) -61; c) 13. **1.50.** $\alpha=\pm 3/5$. **1.51.** $(\widehat{e_1,\ e_2})=\pi/3$. **1.52.** $\alpha=\arccos\frac{4}{5}$. **1.53.** 5. **1.55.** $\overline{DC}=\frac{|a|-|b|}{|a|}a$, $\overline{CB}=\frac{|b|}{|a|}a-b$, $\overline{AC}=\frac{|a|-|b|}{|a|}a+b$, $\overline{DB}=a-b$. ● Hállese primero el vector $\overline{AK}$, donde K es tal punto de la base que $|\overline{AK}|=|\overline{AB}|$. **1.56.** -13. **1.57.** a) 22; b) -200; c) 41; d) $\sqrt{105}$; e) $11/3$, f) $22/7$; g) $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-1/3$, $\cos\gamma=-2/3$; h) $-84/\sqrt{129}$; i) $11/21$. **1.58.** $M_1(1,\ 0)$ y $M_2(6,\ 0)$. **1.59.** $|AB|=5$, $|BC|=5\sqrt{2}$, $|AC|=5$; $\hat{A}=\pi/2$, $\hat{B}=\hat{C}=\pi/4$. **1.61.** $\frac{15}{7\sqrt{85}}$. **1.62.** 4. **1.63.** $-4/5$. **1.65.** $\pi/6$. **1.66.** $(1,\ 1/2,\ -1/2)$. **1.67.** $(-3,\ 3,\ 3)$. **1.68.** $a_j=2j$, $a_{i,\ k}=-i+k$. **1.69.** a) $(2/3,\ 2/3,\ 2/3)$; b) $(-5/3,\ 4/3,\ 1/3)$. **1.70.** $(-2,\ 0,\ 2)$. **1.71.** $-i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k$. ● El vector $a_{e_1,\ e_2}$ tiene la forma $a_{e_1,\ e_2}=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2$, donde los coeficientes λ_1 y λ_2 pueden ser determinados de la condición de perpendicularidad del vector $a-a_{e_1,\ e_2}$ al plano de los vectores e_1 y e_2. **1.72.** $x'=(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $y'=(x-x_0)\,\mathrm{sen}\,\varphi+(y-y_0)\cos\varphi$. **1.73.** $X'=X\cos\varphi+Y\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $Y'=-X\,\mathrm{sen}\,\varphi+Y\cos\varphi$, $Z'=-Z$. **1.74.** $(-2,\ \sqrt{2},\ 0)$. **1.75.** $a_1a_2=\sum_{i,\ k=1}^{3} X_i^{(1)}\times X_k^{(2)}e_2e_k=5X_1^{(1)}X_1^{(2)}+2X_2^{(1)}X_2^{(2)}+9X_3^{(1)}X_3^{(2)}-2(X_1^{(1)}X_2^{(2)}+X_2^{(1)}\times X_1^{(2)}-3(X_1^{(1)}X_3^{(2)}+X_3^{(1)}X_1^{(2)})+4(X_2^{(1)}X_3^{(2)}+X_3^{(1)}X_2^{(2)})$. **1.76.** a) $\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{3}$; c) $10\sqrt{3}$. **1.77.** $[a_1,\ a_2]=0$, es decir, $a_1 \parallel a_2$. **1.78.** a) $2(k-i)$; b) $2[a,\ c]$; c) $[a,\ c]$; d) 3. **1.80.** $50\sqrt{2}$. **1.83.** a) $\frac{1}{3}[a,\ b]$; b) $-\frac{1}{3}[a,\ b]$. **1.84.** a) $(-3,\ 5,\ 7)$; b) $(-6,\ 10,\ 14)$; c) $(-12,\ 20,\ 28)$. **1.85.** $2\sqrt{6}$. **1.86.** 5. **1.87.** $|a|=|b|=|c|=1$; los vectores son perpendiculares dos a dos. **1.88.** $-4i+3j+4k$. **1.89.** $\sqrt{66}$; $\cos\alpha=$

$=1/\sqrt{66}$; $\cos\beta=-4/\sqrt{66}$, $\cos\gamma=-7/\sqrt{66}$. **1.90.** $\frac{3}{2}\sqrt{2}$. **1.91.** $(-6, -24, 8)$. **1.92.** $(7, 5, 1)$. **1.93.** $a_2 \perp a_1$, una infinidad de soluciones. **1.94.** $(-1/2, 0, 1/2)$. **1.95.** Aparecerá el signo menos ante el determinante; en el caso de una base oblicuángula la fórmula no es verídica. **1.96.** ● Calcúlense las coordenadas de ambos miembros y convénzase que son iguales. El cálculo de las coordenadas resulta conveniente efectuar en la siguiente base especial: el versor $\boldsymbol{i}$ tiene igual dirección con el vector $\boldsymbol{b}$, el versor $\boldsymbol{j}$ se dispone en el plano de los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. **1.97.** 24. **1.98.** -7. a) Izquierda; b) derecha; c) derecha. **1.99.** a) No; b) Sí. **1.104.** 17/2. **1.105.** 6. **1.106.** $3\sqrt{2}$.

2.1. a) $2(x+1)+2(y-2)=0$. La ecuación general: $x+y-1=0$. La ecuación normal: $\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$. b) $2(x-2)=0$. La ecuación general: $x-2=0$, es una recta paralela al eje Oy. La ecuación normal: $x-2=0$; $p=2$. c) $2(x-1)-(y-1)=0$. La ecuación general: $2x-y-1=0$. La ecuación normal: $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **2.2.** a) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$. La ecuación general: $x+3y-5=0$. La ecuación normal: $\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=0$; $p=\frac{5}{\sqrt{10}}$. b) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}$. La ecuación general: $-x+1=0$, es una recta paralela al eje Oy. La ecuación normal: $x-1=0$; $p=1$. c) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{0}$. La ecuación general: $y-1=0$, es una recta paralela al eje Ox. La ecuación normal: $y-1=0$; $p=1$. **2.3.** c) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}$. La ecuación general $x-y+1=0$. La ecuación normal: $-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$. b) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-3}$. La ecuación general: $x-1=0$, la recta es paralela al eje Oy. La ecuación normal: $x-1=0$; $p=1$. c) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{0}$. La ecuación general: $y-2=0$, es una recta paralela al eje Ox. La ecuación normal: $y-2=0$, $p=2$. **2.4.** a) $\rho(M, L)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, $L':\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}$, $L'':-2(x+1)+(y-2)=0$; b) $\rho(M, L)=1/2$, $L':\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}$, $L'':2y=0$; c) $\rho(M, L)=0$, $L':\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}$, $L'':x+y+1=0$. **2.5.** Se cortan en el punto $M_0(-3/4,$

$-1/2)$; $\cos(\widehat{L_1, L_2}) = 1/\sqrt{5}$. **2.6.** Se cortan en el punto $M_0(1, 0)$; $\cos(\widehat{L_1, L_2}) = 2/\sqrt{5}$. **2.7.** Son paralelas: $\rho(L_1, L_2) = \sqrt{2}/4$. **2.8.** Son paralelas: $\rho(L_1, L_2) = \sqrt{2}$. **2.9.** Coinciden. **2.10.** a) (AB): $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-4}$, (CD): $\dfrac{x-6}{-4} = \dfrac{y-1}{-1}$, $h = \dfrac{19}{\sqrt{17}}$, $\cos\varphi = \dfrac{19}{\sqrt{17\cdot 58}}$, L_1: $\dfrac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}} = \dfrac{y-2}{-4\sqrt{16}-\sqrt{17}}$, L_2: $(\sqrt{26}+5\sqrt{17})(x-1) + (-4\sqrt{26}-\sqrt{17})(y-2) = 0$; b) (AB); $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{3}$, (CD): $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-4}$, $h = 4$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, L_1: $\dfrac{x-2}{4-2\sqrt{5}} = \dfrac{y+2}{3+\sqrt{5}}$, L_2: $(4-2\sqrt{5})(x-2) + (3+\sqrt{5})(y+2) = 0$. **2.11.** $t = -1/2$. **2.12.** $4/\sqrt{5}$. **2.14.** $y = 2x-6$, $y = -2x+6$. **2.15.** $3x-2y-12 = 0$, $3x-8y+24 = 0$. **2.16.** a) $3x-2y-7 = 0$; b) $x-5y-7/6 = 0$. **2.17.** $x-5y+3 = 0$, ó bien $5x+y-11 = 0$. **2.18.** $x-2y-7 = 0$, $x-4y-1 = 0$, $x-y+2 = 0$. **2.19.** ● Las desviaciones $\delta(M_1, L)$ y $\delta(M_2, L)$ son de signos contrarios. **2.20.** $4x+y+5 = 0$ ó $y-3 = 0$. **2.21.** a) En un mismo ángulo; b) en los ángulos opuestos por el vértice. **2.22.** Obtuso. **2.23.** $4x-3y+10 = 0$, $7x+y-20 = 0$, $3x+4y-5 = 0$. **2.24.** $x-3y-23 = 0$, $7x+9y+19 = 0$, $4x+3y+13 = 0$. **2.25.** $2x+9y-65 = 0$, $6x-7y-25 = 0$, $18x+13y-41 = 0$. **2.26.** a) $2x-y+z-2 = 0$; $1/\sqrt{6}$; b) $x-y = 0$, el plano es paralelo al eje Oz y pasa por el origen de coordenadas; $1/\sqrt{2}$. **2.27.** a) $x+y-3 = 0$; b) $x+2y-2 = 0$. **2.28.** a) $x-2y-z = 0$; b) $-x+y+2z-5 = 0$. **2.29.** a) $-x+2y-3z-3 = 0$; b) $2x-2y-z+1 = 0$.

2.30. a) $x+y-3 = 0$; b) $2x-y-1 = 0$. **2.31.** Se intersecan, $\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \dfrac{1}{2\sqrt{15}}$. **2.32.** Son paralelos, $\rho(P_1, P_2) = \dfrac{3}{2\sqrt{6}}$. **2.33.** Se intersecan, $\cos(\widehat{P_1, P_2}) = 1/2$. **2.34.** Coinciden. **2.35.** 8. **2.36.** a) $4x-5y+z-2 = 0$ y $2x+y-3z+8 = 0$; b) $3x-6y+7z-4 = 0$ y $x+4y+3z+4 = 0$. **2.37.** a) $4x-y-2z-4 = 0$; b) $20x-12y+4z+13 = 0$. **2.38.** a) en los ángulos adyacentes; b) en un mismo ángulo. **2.39.** a) $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = -3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, las ecuaciones en proyecciones:

$$\begin{cases} 4x+3y-5=0, \\ 5x+3z-7=0, \\ 5y-4z+1=0; \end{cases}$$

b) $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = -\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$, las ecuaciones en proyecciones:

$$\begin{cases} 7x-y+1=0, \\ 5x-z-1=0, \\ 5y-7z-12=0. \end{cases}$$

2.40. a) $\dfrac{x-2}{2} =$

$= \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; b) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; c) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; d) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$; e) $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{8} = \frac{z+3}{10}$; f) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1/2}$. 2.41. a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; b) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$.
2.42. a) $x-2y+z=0$; b) $2x+y-1=0$; c) $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2x+y-1=0, \end{cases}$ o bien $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{5}$; d) $18/\sqrt{30}$; e) M' $(3/5, \; -1/5, \; -1)$. 2.43. a) $1/\sqrt{15}$, M $(1, -6, -4)$, b) $3x-y+2z-1=0$; c) $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 3x-y+2z-1=0. \end{cases}$
2.45. a) $2x-16y-13z+31=0$; b) $6x-20y-11z+1=0$. 2.46. 25.
2.48. b) $4x+3y+12z-93=0$; c) 13; d) $\begin{cases} 54x-44y-7z+181=0, \\ -45x-76y+34z+497=0. \end{cases}$
2.49. $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$.

3.1. Véase la fig. 43. 3.2. Véase la fig. 44. 3.3. Las rectas $x = 0$ y $x - y = 0$. 3.4. Las rectas $y = 0$ y $x + y = 0$. 3.5. Las rectas

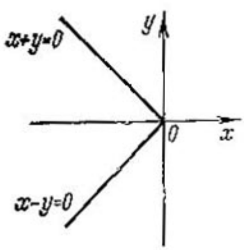


Fig. 43

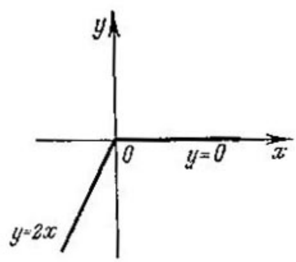


Fig. 44

$x - y = 0$ y $x + y = 0$. 3.6. Las rectas $x = 0$ e $y = 0$. 3.7. Las rectas $y = \pm 3$. 3.8. Las rectas $x = -2$ y $x = 3$. 3.9. Las rectas $y = 0$, $x = 2$ y $x = 5$. 3.10. Una circunferencia de radio $R = 2$, con el centro en el origen de coordenadas. 3.11. Una circunferencia de radio $R = 1$, con el centro en el punto C $(0, -3)$. 3.12. El origen de coordenadas. 3.13. Un conjunto vacío. 3.14. Los puntos $(0, \pm 1)$. 3.15. $x - y = 0$. 3.16. $4ax \pm c = 0$. 3.17. $y = \pm 2x$. 3.18. $x^2 + y^2 = 16$. 3.19. $x^2 + y^2 = 8$. 3.20. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. 3.21. $xy = 2$. 3.22. $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$. 3.23. a) C $(2, \; -3)$, $R = 4$; b) C $(4, \; 0)$, $R = 4$; c) C $(0, -2)$, $R = 2$. 3.24. a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$; b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$; c) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$; d) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; e) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, o bien $(x-5)^2 +$

$+ (y-5)^2 = 25$; f) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$, g) $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$. ● Escríbase la ecuación de la circunferencia buscada en la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, sustitúyanse en esta ecuación las coordenadas de cada punto y hállense a continuación D, E y F. **3.25.** $2x - 5y + 19 = 0$. **3.26.** a) 7; b) 2. **3.27.** a) Corta; b) es tangente; c) pasa fuera de la circunferencia. **3.28.** a) $a = 5$, $b = 3$;

b) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$; c) $e = \frac{4}{5}$; d) $D_1: x = -\frac{25}{4}$, $D_2: x = \frac{25}{4}$.

3.29. a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; d) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; e) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$; f) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. **3.30.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. **3.31.** a) $C(3, -1)$, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $e = 2/3$, $D_1: 2x + 3 = 0$, $D_2: 2x - 15 = 0$; b) $C(-1, 2)$, $a = 5$, $b = 4$, $e = 3/5$, $D_1: 3x + 28 = 0$, $D_2: 3x - 22 = 0$; c) $C(1, -2)$, $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $e = 1/2$, $D_1: y + 10 = 0$, $D_2: y - 6 = 0$. **3.34.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, $r_{1,2} = 4 \pm \sqrt{3}$, $\rho_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{3}}(4 \pm \sqrt{3})$. **3.35.** $\left(-\frac{15}{4}, \pm\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$.

3.36. $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3 = 0$. **3.37.** $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$. **3.38.** a) La recta corta la elipse; b) pasa fuera de la elipse; c) es tangente a la elipse. **3.40.** $3x + 2y - 10 = 0$ y $3x + 2y + 10 = 0$. **3.41.** $x + y - 5 = 0$ y $x + y + 5 = 0$. **3.43.** $x + y - 5 = 0$ y $x + 4y - 10 = 0$. **3.44.** $M_0(-3, 2)$, $\sqrt{13}$. **3.46.** $2x + 11y - 10 = 0$. ● Hágase uso del resultado del problema 3.45. **3.47.** a) $a = 3$, $b = 4$; b) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; c) $e = \frac{5}{3}$; d) $y = \pm\frac{4}{3}x$; e) $x = \pm\frac{9}{5}$.

3.48. a) $a = 4$, $b = 3$; b) $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$; c) $e = \frac{5}{4}$; d) $y = \pm\frac{4}{3}x$; e) $y = \pm\frac{16}{5}$. **3.49.** a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; d) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; e) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. **3.50.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. **3.51.** a) $C(2, -3)$, $a = 3$, $b = 4$, $e = 5/3$, las ecuaciones de las asíntotas: $4x - 3y - 17 = 0$ y $4x + 3y + 1 = 0$, las ecuaciones de las directrices: $5x - 1 = 0$ y $5x - 19 = 0$; b) $C(-5, 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $e = 5/4$, las ecuaciones de las asíntotas: $3x + 4y + 11 = 0$ y $3x - 4y + 19 = 0$, las ecuaciones de las directrices: $x = -11,4$ y $x = 1,4$; c) $C(2, -1)$, $a = 4$, $b = 3$, $e = 5/4$, las ecuaciones de las asíntotas: $4x + 3y - 5 = 0$ y $4x - 3y - 11 = 0$, las ecuaciones de las directrices: $y = -4,2$ e $y =$

$= 2{,}2$. 3.54. $r_1 = 9/4$, $r_2 = 41/4$, $\rho(M, D_1) = 9/5$, $\rho(M, D_2) = 41/5$. 3.55. $(-6, \pm 4\sqrt{3})$. 3.56. $7y^2 + 24xy - 144 = 0$. 3.57. $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$. 3.58. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$, $e = \sqrt{2}$, $F_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $D_{1,2}$: $x + y \pm \sqrt{2} = 0$. 3.59. $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. ● Véase el problema 3.39. 3.60. $10x - 3y - 32 = 0$, $10x - 3y + 32 = 0$. 3.61. $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. 3.63. $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$. 3.64. $M_0(-6, 3)$, $\rho = 11/\sqrt{13}$. 3.66. $2x + 11y + 6 = 0$. ● Hágase uso del resultado del problema 3.65. 3.67. a) $p = 3$; b) $p = 5/2$; c) $p = 2$; d) $p = 1/2$. 3.68. a) $y^2 = -x$; b) $x^2 = -2y$; c) $x^2 = -12y$. 3.69. a) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$; b) $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$. 3.70. $A(2, 0)$, $p = 2$; b) $A(0, 2)$, $p = 1/2$; c) $A(1, 3)$, $p = 1/8$; d) $A(6, -1)$, $p = 3$; e) $A(1, 2)$, $p = 2$; f) $A(-4, 3)$, $p = 1/4$. 3.72. 6. 3.73. a) $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$; b) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. 3.74. $y_0 y = p(x + x_0)$. 3.75. $x + y + 2 = 0$. 3.76. $2x - y - 16 = 0$. 3.77. $3x - y + 3 = 0$ y $3x - 2y + 12 = 0$. 3.78. $M_0(9, -24)$, $\rho(M_0, L) = 10$. 3.80. $y - 18 = 0$. 3.81. $\operatorname{tg}\varphi = 1$. 3.82. $r \operatorname{sen}\varphi = 1$. 3.83. $r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 3.84. $r = a$. 3.85. $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$. 3.86. $r = a\cos\varphi$. 3.87. Una circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. 3.88. Una recta $y = -x$. 3.89. Una recta $x = 2$. 3.90. Una recta $y = 1$. 3.91. Una recta $x - y - 1 = 0$. 3.92. Una recta $x + y - 2 = 0$. 3.93. Una circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. 3.94. Una circunferencia $x^2 + (y - a)^2 = a^2$. 3.95. Un par de rayos $x = \pm 2y$, $y \geqslant 0$. 3.96. Una familia de circunferencias concéntricas de radios $r_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ 3.97. Una hipérbola $xy = a^2$. 3.98. Lemniscata de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. 3.99. a) $r\cos\varphi = 3$; b) $\varphi = \pi/3$; c) $\operatorname{tg}\varphi = 1$. 3.100. a) $r = 10\cos\varphi$; b) $r = \pm 6 \operatorname{sen}\varphi$. 3.101. a) $C(2, 0)$, $R = 2$; b) $C(3/2, \pi/2)$, $R = 3/2$; c) $C(5/2, -\pi/2)$, $R = 5/2$; d) $C(3, \pi/3)$, $R = 3$; e) $C(4, 5\pi/6)$, $R = 4$; f) $C(4, -\pi/6)$, $R = 4$. 3.102. $r^2 - 2r_0 r \times \cos(\varphi - \varphi_0) = R^2 - r_0^2$. 3.103. a) $r = \frac{16}{5 - 3\cos\varphi}$; b) $r = \frac{16}{5 + 3\cos\varphi}$. 3.104. a) $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; b) $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$. 3.105. $r = \frac{3}{1 - \cos\varphi}$. 3.106. a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; c) $y^2 = 6x$. 3.107. $r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$. 3.108. $r^2 = \frac{b^2}{e^2\cos^2\varphi - 1}$. 3.109. $r = \frac{2p\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}$. 3.110. $x = t$, $y = t + 1$, $t \in [-1, +\infty)$; b) $x = t - 1$, $y = t$, $t \in [0, +\infty)$; c) $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $t \in [0, +\infty)$; d) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\cos t}{\cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)}$, $y =$

$=\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{2\cos\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)}$, $t\in\left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right)$. **3.111.** a) $x=1+\frac{1}{\sqrt{5}}t$, $y=1+\frac{2}{\sqrt{5}}t$, $t\in[0, \sqrt{5}]$; b) $x=2-\frac{1}{\sqrt{5}}t$, $y=3-\frac{2}{\sqrt{5}}t$, $t\in[0, \sqrt{5}]$. **3.112.** $x=x_0+R\cos t$, $y=y_0+R\operatorname{sen} t$, $t\in[0, 2\pi)$. **3.113.** a) $x=R(1+\cos 2t)$, $y=R\operatorname{sen} 2t$, $t\in[-\pi/2, \pi/2)$; b) $x=R(1+\cos t)$, $y=R\operatorname{sen} t$, $t\in[0, 2\pi)$. **3.114.** Una recta $x+2y-3=0$. **3.115.** Una parábola $y^2=x$. **3.116.** Una circunferencia $(x+1)^2+(y-3)^2=4$. **3.117.** Una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **3.118.** La rama derecha de la hipérbola $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$. **3.119.** La rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **3.120.** Una circunferencia $(x-R)^2+y^2=R^2$. **3.121.** Una circunferencia $x^2+(y-R)^2=R^2$. **3.122.** La rama superior de una parábola $y^2=2px$. **3.123.** $x=\dfrac{ab\cos t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}}$, $y=\dfrac{ab\operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t}}$, $t\in[0, 2\pi)$. **3.124.** $x=\dfrac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\operatorname{sen}^2 t}}$, $y=\dfrac{ab\operatorname{sen} t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\operatorname{sen}^2 t}}$, donde $t\in\left(-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$ para la rama derecha y $t\in\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$ para la rama izquierda. **3.125.** a) $x=\frac{t^2}{2p}$, $y=t$, $t\in(-\infty, +\infty)$; b) $x=2p\operatorname{ctg}^2 t$, $y=2p\operatorname{ctg} t$, donde $t\in(0, \pi/2)$ para la rama derecha y $t\in(3\pi/2, 2\pi)$, para la rama izquierda; c) $x=\frac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}$, $y=p\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $t\in(0, 2\pi)$.

4.1. Un plano $z=-5$ paralelo al plano Oxy. **4.2.** Un plano con el vector normal $\boldsymbol{n}$ (1, −2, 1). **4.3.** Una esfera de radio $R=2$, con el centro en el origen de coordenadas. **4.4.** Una esfera de radio $R=4$ con el centro en el punto C (2, 0, −1). **4.5.** El origen de coordenadas. **4.6.** El eje Oy. **4.7.** Un conjunto vacío. **4.8.** Un par de planos que se intersecan $x-2z=0$ y $x+2z=0$ paralelos al eje Oy. **4.9.** Un par de planos coordenados Oyz y Oxy. **4.10.** Una terna de planos coordenados. **4.11.** Un par de planos $x=0$ y $x=4$. **4.12.** Un par de planos $y=0$ e $y=x$. **4.13.** $20y+53=0$. **4.14.** $x^2+y^2+z^2=a^2$. **4.15.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$. **4.16.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1$. **4.17.** a) C (0, 0, 3), $R=3$; b) C (2, 1, −1), $R=5$. **4.18.** a) $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=4$; b) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$; c) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$; d) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$, e) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$. **4.19.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$. **4.20.** $\left(x-\frac{4}{9}\right)^2+\left(y+\frac{4}{9}\right)^2+\left(z-\frac{4}{9}\right)^2=\frac{64}{729}$. **4.21.** $x=$

$=-1+5t,\ y=3-t,\ z=-\frac{1}{2}+2t$. 4.22. $M_0(-2,\ -2,\ 7)$, $\rho=3$. 4.23. a) Corta; b) es tangente; c) pasa fuera de la esfera. 4.24. a) una recta que pasa por el punto (5, 0, −2) paralelamente al eje Oy; b) una circunferencia en el plano Oxz de radio $R = 7$ y con el centro en el origen de coordenadas; c) una circunferencia situada en el plano $z = 2$ de radio $R = 4$ y con el centro en el punto C (0, 0, 2); d) una circunferencia en el plano $z = 6$ de radio $R = \sqrt{13}$ y centro en el punto C (0, 0, 6). 4.25. a) C (1, 7, 2), $R = 4$; b) C (−1, 2, 3), $R = 8$.

4.26. Una elipse $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{18}=1$.

4.27. $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36,\\ 2x-z-1=0.\end{cases}$

4.28. $\begin{cases}(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=27;\\ x+y-2=0.\end{cases}$ 4.29. Un elipsoide. 4.30. Un hiperboloide de una hoja. 4.31. Un hiperboloide de revolución de dos hojas. 4.32. Un cono. 4.33. Un paraboloide de revolución. 4.34. Un paraboloide hiperbólico. 4.35. Un paraboloide elíptico. 4.36. Un cilindro parabólico. 4.37. Un paraboloide de revolución con el vértice (0, 0, 2). 4.38. Un paraboloide hiperbólico. 4.39. Un hiperboloide de revolución de una hoja. 4.40. Un hiperboloide de revolución de dos hojas. 4.41. ● Hágase uso de la homogeneidad de la ecuación. 4.42. ● Pásese al nuevo sistema de coordenadas girando los ejes Ox y Oy alrededor del eje Oz en un ángulo $\pi/4$. 4.43. a) Un cono de segundo grado con vértice en el origen de coordenadas (véase el problema 4.41); b) un paraboloide hiperbólico (véase el problema 4.42). 4.44. Sobre el plano Oxy: $x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$; sobre el plano Oxz: $x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0$; sobre el plano Oyz: $y^2 + z^2 + 2y - z = 0$. 4.45. a) Una elipse; b) una parábola. 4.46. a) M_1 (3, 4, −2) y M_2 (6, −2, 2); b) M (4, −3, 2), la recta es tangente a la superficie; c) la recta y la superficie no tienen puntos comunes. 4.47. a) M (9, 5, −2); b) M (3, 0, −10); c) M (6, −2, 2).

4.48. $\begin{cases}2x-12y-z+16=0,\\ x-2y+4=0,\end{cases}$ $\begin{cases}2x-12y-z+16=0,\\ x+2y-8=0.\end{cases}$

4.49. $\begin{cases}y+2z=0,\\ x-5=0,\end{cases}$ $\begin{cases}2x-5z=0,\\ y+4=0.\end{cases}$ 4.60. a) $y^2+z^2=a^2$; b) $x^2+z^2=2ax$; c) $x^2+y^2=2ax$. 4.61. $x^2+5y^2-8y-12=0$; b) $4x^2+5z^2+4z-60=0$; c) $2y-z-2=0$. 4.62. a) $8x^2+4y^2-36x+16y-3=0$, $z=0$; b) $2x-2z-7=0$, $y=0$; c) $4y^2+8z^2+16y+36z-31=0$, $x=0$. 4.63. $y^2=2ax-x^2$. 4.64. a) $(3y-2z)^2=12(3x-z)$; b) $(x-z)^2+(y-z)^2=4(x-z)$. 4.65. La ecuación del cilindro de proyección: $2x^2+(y-z+2)^2=8$;

el contorno de la sombra: una elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{8}=1$. 4.66. $x=4$, $z\pm y=2$. 4.68. a) $\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{z^2}{h^2}$; b) $9(x^2+z^2)=16y^2$; c) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; d) $x^2+y^2-z^2=0$. 4.69. a) $h^2x^2=2pz\,(h\,(y+$

$+a)-az)$; b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z-c)^2}{c^2}=0$; c) $x^2+z^2=z(y+a)$; d) $3x^2-$ $-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$. **4.70.** a) el vértice $(0, h, 0)$, la directriz es una circunferencia $x^2+(y-h)^2=$ $=h^2$, $z=h$; b) el vértice $(0, 0, 0)$, la directriz es una parábola $x^2=$ $=2hy$, $z=h$. **4.71.** $xy+xz+yz=0$, el eje del cono pasa en el primero y séptimo octantes; $xy+xz-yz=0$, el eje del cono pasa en el segundo y octavo octantes; $xy-xz-yz=0$, el eje del cono pasa en el tercero y quinto octantes; $xy-xz+yz=0$, el eje del cono pasa en los octantes 4 y 6. **4.72.** a) una circunferencia $x^2+y^2=$ $=(a/\sqrt{2})^2$; b) los segmentos $z=\pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2}\leqslant x\leqslant a/\sqrt{2}$; c) los segmentos $z=\pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2}\leqslant y\leqslant a/\sqrt{2}$. **4.73.** La ecuación del cilindro de proyección: $9x^2-16y^2-16z^2-90x+225=$ $=0$, el contorno de la sombra es una circunferencia $y^2+z^2=(15/4)^2$. **4.74.** a) $z=x^2+y^2$; b) $\sqrt{y^2+z^2}=x^2$. **4.75.** a) $x^2+z^2=y^2$; b) $z^2=x^2+y^2$. **4.76.** a) $z=e^{-(x^2+y^2)}$; b) $z=\frac{4}{x^2+y^2}$. **4.77.** $\frac{x^2}{a^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}=1$. **4.78.** La superficie se ha formado por revolución de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ en torno al eje Oz.