CAPÍTULO 5

CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

§ 1. Derivada

1. Definición de la derivada. Derivación de las funciones definidas explícitamente. Sea $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *un incremento de la función* $y = f(x)$ en el punto x_0 correspondiente al *incremento del argumento* Δx. Se denomina *derivada* de primer orden (o *primera derivada*) de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 el límite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Los números

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

y

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

se llaman *derivadas a la izquierda* y *a la derecha*, respectivamente, de la función $y = f(x)$ en el punto x_0. Para que exista la derivada $f'(x_0)$ de la función $f(x)$ en el punto x_0, es necesario y suficiente que existan y coincidan en dicho punto sus derivadas a la izquierda y a la derecha, es decir, que sea

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Ejemplo 1. Hállense $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ para la función $f(x) = |x|$.

◀ Según la definición, tenemos

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

y

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Notemos que la función $f(x) = |x|$ no tiene derivada en el punto $x_0 = 0$, puesto que $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. ▶

Una derivada de la función $f(x)$, considerada sobre el conjunto de aquellos puntos en los que existe, es de por sí una función. El proceso de hallar la derivada se llama también *derivación* (*diferenciación*).

Tabla de derivadas de las funciones elementales principales.

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \neq 0$.
2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$; $(e^x)' = e^x$.
3. $(\log_a x)' = \log_a e \cdot \frac{1}{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
4. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.
8. $(\operatorname{arcsen} x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Reglas de derivación de las funciones

I. Sea C una constante y sean $f(x)$, $g(x)$ las funciones a derivar. En este caso:

1. $(C)' = 0$.
2. $(f+g)' = f' + g'$.
3. $(Cf)' = Cf'$.
4. $(fg)' = f'g + fg'$.
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$, $g \neq 0$.

II. Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0 y la función $z = g(y)$ tiene derivada en el punto $y_0 = f(x_0)$. Entonces, la función compuesta $z = g(f(x))$ tiene en el punto x_0 una derivada igual a

$$z'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) \tag{2}$$

(*regla de derivación de una función compuesta*).

Ejemplo 2. Hállese la derivada de la función $z = \log_3 (\operatorname{arcsen} x)$.

◀ Suponiendo $z = \log_3 y$ e $y = \operatorname{arcsen} x$, tenemos

$$z'(y) = \log_3 e \cdot \frac{1}{y} \quad \text{e} \quad y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De aquí, conforme a (2) obtenemos

$$z'(x) = \frac{\log_3 e}{\operatorname{arcsen} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \ ▶$$

Hállese $\Delta f(x_0, \Delta x)$, si:

1.1. $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$.

1.2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,25$.

1.3. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 100$, $\Delta x = -90$.

Hállese $\Delta f(x_0, \Delta x)$ como función de Δx, si:

1.4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

◀ Tenemos

$$\Delta f\left(\frac{\pi}{2},\Delta x\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=$$

$$=2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)=-2\operatorname{sen}^2\frac{\Delta x}{2}.\ ▶$$

1.5. $f(x)=x^2,\ x_0=-1$.
1.6. $f(x)=e^x,\ x_0=1$.
1.7. $f(x)\log_2(x),\ x_0=1$.

Haciendo uso sólo de la definición de derivada, hállese $f'(x)$:

1.8. $f(x)=\operatorname{ctg} x$.

◀ Tenemos:

$$(\operatorname{ctg} x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}(x+\Delta x)-\operatorname{ctg} x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(-\Delta x)}{\Delta x\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(x+\Delta x)}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(x+\Delta x)}=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.\ ▶$$

1.9. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ **1.10.** $f(x)=\sqrt{x}$.
1.11. $f(x)=2^x$. **1.12.** $f(x)=\log_2 x$.

1.13. Se sabe que $f(0)=0$ y existe un límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$. Demuéstrese que este límite es igual a $f'(0)$.

1.14*. Demuéstrese que si $f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, entonces

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

Hállense, para $f(x)$ dada, $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$.

1.15. $f(x)=|x-1|+|x+1|,\ x_0=\pm 1$.

1.16. $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 1,\\ -x^2+2x, & x>1,\end{cases}\quad x_0=1.$

◀ Tenemos

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x-1}{x-1}=1$$

y

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{-x^2+2x-1}{x-1}=$$

$$=-\lim_{x\to 1+0}(x-1)=0.\ ▶$$

1.17. $f(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant 0, \\ x^2\ln x, & x>0, \end{cases}$ $x_0=0.$

1.18. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$, $x_0=0.$

1.19. $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & x\neq 0, \end{cases}$ $x_0=0.$

1.20*. Muéstrese que la función

$$f(x)=\begin{cases} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

es continua para $x=0$, pero no tiene en este punto ni derivada por la izquierda ni por la derecha.

Hállense las derivadas de las siguientes funciones:

1.21. $y=3-2x+\frac{2}{3}x^4.$ **1.22.** $y=-\frac{5x^5}{a^2}.$

1.23. $y=x^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{x^5+a}.$ **1.24.** $\frac{a}{\sqrt[3]{x^3}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{b}.$

1.25. $y=\frac{a+bx}{c+dx}.$ **1.26.** $y=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x}.$

1.27. $y=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}.$ **1.28.** $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$

1.29. $y=2\operatorname{sen}x-3\operatorname{tg}x.$ **1.30.** $y=\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}.$

1.31. $y=\sqrt{\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}}.$

1.32. $y=\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$

1.33. $y=\cos^2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right).$ **1.34.** $y=\sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}.$

1.35. $y=\operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right).$

1.36. $y=\arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}.$ **1.37.** $y=\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}.$

1.38. $y=\frac{e^{-x^2}}{2x}.$ **1.39.** $y=2^{\frac{x}{\ln x}}.$

1.40. $y = 2^{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}$. **1.41.** $y = 3^{2^x}$.

1.42. $y = \ln x \cdot \lg x - \ln a \cdot \log_a x$.

1.43. $y = \log_2 \ln 2x$. **1.44.** $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

1.45. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$.

1.46. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$.

Hállense las derivadas de las *funciones hiperbólicas*:

1.47. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (*seno hiperbólico*),

1.48. $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (*coseno hiperbólico*),

1.49. $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (*tangente hiperbólica*),

1.50. $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (*cotangente hiperbólica*).

Se denomina *derivada logarítmica* de la función $y = f(x)$ la derivada del logaritmo de esta función, es decir,

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

El cálculo de la derivada se simplifica a menudo, con la aplicación previa de los logaritmos.

EJEMPLO 3. Hállese la derivada de la función $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$.

◀ Tenemos

$$\ln y = \frac{1}{2}(\ln x + \ln(x-1) - \ln(x-2)),$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right),$$

de donde

$$y' = (\ln y)' \cdot y = \frac{x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}. \ ▶$$

EJEMPLO 4. Hállese la derivada de una función *exponencial compuesta* $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

◀ Calculando los logaritmos, obtendremos

$$\ln y = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

De aquí hallamos las derivadas de los miembros primero y segundo

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}.$$

Por consiguiente,

$$y'=(\ln y)'\cdot y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1-x}\right).\ \blacktriangleright$$

Hállense las derivadas de las siguientes funciones, aplicando previamente los logaritmos:

1.51. $y=\frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$.

1.52. $y=\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$.

1.53. $y=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$.

1.54. $y=x^3\sqrt{\frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$.

1.55. $y=x^x$. **1.56.** $y=x^{2^x}$.

1.57. $y=\sqrt{x}^{\sqrt[3]{x}}$. **1.58.** $y=(\ln x)^{1/x}$.

1.59. $y=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arcsen} x}$. **1.60.** $y=x^{x^x}$.

1.61. $y=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$. **1.62*.** $y=x^{x^2}+x^{2^x}+2^{x^x}$.

Calcúlense las derivadas de las funciones dadas, introduciendo las variables intermedias:

1.63*. $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^2 x})$.

1.64. $y=(\arccos x)^2\ln(\arccos x)$.

1.65. $y=\frac{e^{-x^2}\operatorname{arcsen}(e^{-x^2})}{1-e^{-2x^2}}$.

1.66. $y=\frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arctg} a^{-x}$.

1.67*. Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\leqslant 0,\\ ax+b, & x>0.\end{cases}$$

Hállense los coeficientes a y b de modo tal que la función $f(x)$ sea continua y derivable en el punto $x_0 = 0$.

1.68. Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|}, & |x|\geqslant 1,\\ ax^2+b, & |x|<1.\end{cases}$$

Hállense los coeficientes a y b de modo tal que la función $f(x)$ sea continua y derivable en cualquier punto.

Hállense las derivadas de las siguientes funciones:

1.69. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$. **1.70.** $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

1.71. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

1.72. $y=\operatorname{sen}(\cos^2 x)\cos(\operatorname{sen}^2 x)$. **1.73.** $y=\dfrac{1}{\cos^n mx}$.

1.74. $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$, $a,\ b>0$.

1.75. $y=\ln(\ln^n mx)$. **1.76.** $y=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

1.77. $y=\log_2\operatorname{sen}\left(2\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1.78. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$. **1.79.** $y=\log_x e$.

1.80. $y=(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$. **1.81.** $y=\sqrt{x}^{\operatorname{sen}^2 x}$.

1.82. $y=\sqrt{\cos x}\cdot a^{\sqrt{\cos x}}$.

1.83. $y=\ln(\operatorname{sh} x)+\dfrac{1}{2\operatorname{sh} x}$. **1.84.** $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.

1.85. $y=e^{-x}\operatorname{sh} ax$. **1.86.** $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

1.87. $y=\ln|x|$.

◀ La función $y=\ln|x|$ está definida $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, y

$$\ln|x|=\begin{cases}\ln x & x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$$

De aquí

$$(\ln|x|)'=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}=\dfrac{1}{x},\ x\neq 0.$$ ▶

1.88. $y=\arcsen\frac{1}{|x|}$. **1.89.** $y=|\operatorname{sen} x|$.

1.90. $y=|\operatorname{arctg} x|$.

1.91. $y=[x]\,x$, donde $[x]$ es la parte entera del número x.

◀ La función $y=[x]\,x$ está definida $\forall x\in\mathbb{R}$. Si $k\in\mathbb{Z}$, entonces $y=kx$ para $x\in[k,k+1]$. Por ello

$$y'=k,\qquad x\in(k,k+1),$$

y en los puntos $x=k$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$f'_-(k)=k-1,\qquad f'_+(k)=k.\ ▶$$

1.92. $y=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0.\end{cases}$

1.93. $y=\begin{cases}x & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

1.94. $y=\begin{cases}x^2e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1.\\ 1/e, & |x|>1.\end{cases}$

1.95. $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$.

1.96. $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}$.

1.97. $y=a^{x^a}$. **1.98.** $y=(\log_x a)^x$.

1.99. $y=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$. **1.100.** $y\,(1/x)^{1/x}$.

1.101. $y=\frac{\ln 3\cdot\operatorname{sen} x+\cos x}{3^x}$.

1.102. $y=3^{\frac{\operatorname{sen} ax}{\cos bx}}+\frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}^3 ax}{\cos^3 bx}$.

1.103. Demuéstrese que la derivada de una función par es una función impar, y la derivada de la función impar, una función par.

1.104. Demuéstrese que la derivada de una función periódica es también función períodica.

1.105*. Hállese $f'(x_0)$, si $f(x)=(x-x_0)\,\varphi(x)$, donde la función $\varphi(x)$ es continua en el punto x_0.

Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ unas funciones derivables. Hállense las derivadas de las siguientes funciones compuestas:

1.106. $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$.

1.107. $y=\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

1.108. $y = \psi(x)^{\varphi(x)}$, $\psi(x) > 0$.

1.109. $y = \log_{\varphi}(x)\,\psi(x)$, $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$, $\varphi(x) \neq$ $\neq 1$.

◀ Pasemos a los logaritmos naturales:

$$y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)}.$$

De aquí hallamos

$$y' = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \ln \varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)} =$$

$$= \frac{1}{\ln \varphi(x)} \left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - y\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right). \ ▶$$

Sea $f(x)$ una función derivable arbitraria. Hállese y':

1.110. $y = f(\ln x)$. **1.111.** $y = \ln(f(x))$.

1.112. $y = f(e^x)e^{f(x)}$.

◀ Tenemos $y' = f'(e^x)\,e^x e^{f(x)} + f(e^x)\,e^{f(x)} f'(x) = e^{f(x)}(e^x f'(e^x) + f'(x) f(e^x))$. ▶

1.113. $y = f(f(x))$.

2. Derivación de las funciones definidas en forma implícita o paramétrica. Se dice que la función $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, viene dada *implícitamente* mediante la ecuación $F(x, y) = 0$, si para todo $x \in$ $\in (a, b)$ se verifica

$$F(x, f(x)) = 0. \tag{3}$$

Con el fin de calcular la derivada de la función $y = f(x)$ se debe derivar la identidad (3) respecto de x (considerando el primer miembro como una función compuesta de x) y luego resolver la ecuación obtenida respecto de $f'(x)$.

Ejemplo 5. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define implícitamente dos funciones en el intervalo $(-1, 1)$:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sqrt{1-x^2}, \\ y_2(x) &= -\sqrt{1-x^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Hállense sus derivadas sin emplear las expresiones explícitas (4).

◀ Sea $y(x)$ cualquiera de estas funciones. Entonces, derivando respecto de x la identidad

$$x^2 + y^2(x) = 1,$$

obtendremos

$$2x + 2y(x)\,y'(x) = 0.$$

De aquí

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)},$$

es decir,

$$y_1'(x)=-\frac{x}{y_1(x)}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$y_2'(x)=-\frac{x}{y_2(x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \ ▶$$

Ejemplo 6. Dedúzcase la regla de diferenciación de una función inversa.

◀ Si $x = f^{-1}(y)$, $y \in E$, es una función inversa de $y = f(x)$, $x \in D$, entonces para todo $y \in E$ se cumple la igualdad

$$f(f^{-1}(y)) - y = 0.$$

En otras palabras, la función inversa $x = f^{-1}(y)$ es una función definida implícitamente mediante la ecuación

$$f(x) - y = 0. \tag{5}$$

Para calcular la derivada de la función $x = f^{-1}(y)$ derivemos (5) respecto de y:

$$f'(x(y))\,x'(y) - 1 = 0,$$

de donde

$$x'(y)=\frac{1}{(r'(y))}. \ ▶$$

Al tratar las funciones definidas implícitamente, así como las compuestas, se usarán, además, para designar la derivada, las denotaciones del tipo y'_x allí, donde es necesario precisar respecto a qué variable se realiza la diferenciación.

1.114. Hállese el valor de y'_x en el punto $x = 1$, si

$$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, \qquad y(1) = 1.$$

1.115. Hállese y'_x en el punto $(0, 1)$, si $e^y + xy = e$.

Hállese y'_x para las siguientes funciones definidas implícitamente:

1.116. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **1.117.** $x^4+y^4=x^2y^2$.

1.118. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $a>0$. **1.119.** $2y\ln y = x$.

1.120. $e^x \operatorname{sen} y - e^y \cos x = 0$.

1.121. $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = 0$. **1.122.** $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

1.123. $x - y = \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} y$.

1.124. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

1.125. $xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. **1.126.** $x^y = y^x$.

1.127. $a^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$.

1.128. Demuéstrese que la función y, definida mediante la ecuación $xy - \ln y = 1$, satisface también la ecuación $y^2 + (xy - 1)y' = 0$.

Hállense las derivadas de las funciones inversas a las dadas:

1.129. $y = \operatorname{sh} x$.

◀ Tenemos, por definición, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Puesto que $(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces la función $\operatorname{sh} x$ es creciente monótona sobre todo el eje real y, por tanto, tiene su inversa designada por $\operatorname{arsh} x$. De acuerdo con la regla de diferenciación de la función inversa, obtenemos

$$x'_y = (\operatorname{arsh} y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Por consiguiente, pasando a las designaciones habituales, tenemos

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \quad ▶$$

1.130*. $y = \operatorname{ch} x$. **1.131.** $y = \operatorname{arcsen} 2^x$.

1.132. $y = 2x^2 - x$, $x \in (1/2, +\infty)$.

Sea $y = \alpha(x)$ una función inversa a la dada $y = f(x)$. Exprésese $\alpha'(x)$ en términos de x y $\alpha(x)$, si:

1.33. $y = x^x$.

◀ Teniendo presente que

$$(x^x)' = x^x (\ln x + 1),$$

obtenemos:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{x^x(\ln x + 1)} = \frac{1}{y(\ln \alpha(y) + 1)},$$

puesto que $x = \alpha(y)$. En las designaciones corrientes

$$\alpha'(x) = \frac{1}{x(\ln \alpha(x) + 1)}. \quad ▶$$

1.134. $y = x + e^x$. **1.135.** $y = {}^1/_2\, x + x^3$.

1.136. $y = x + \log_2 x$. **1.137.** $y = x \ln x$.

Sean dadas las funciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{6}$$

Si en este caso $x = \varphi(t)$ tiene en el intervalo (α, β) su inversa $t = \varphi^{-1}(x)$, queda, pues, definida una nueva función

$$y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)), \tag{7}$$

llamada función *definida paramétricamente* por las correlaciones (6). Derivando (7) respecto de x y empleando la regla de derivación de la función inversa (ejemplo 6), obtenemos

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8}$$

EJEMPLO 7. Hállese y'_x, si

$$x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad t \in (0, \pi/2).$$

◀ Como $\psi'_t = \cos t$, $\varphi'_t = -2\cos t \operatorname{sen} t$, entonces, según la fórmula (8), hallamos

$$y'_x = \frac{1}{2 \operatorname{sen} t}. \ ▶$$

Hállense y'_x para las funciones dadas paramétricamente:

1.138. $x = 2t$, $y = 3t^2 - 5t$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

1.139. $x = t^3 + 2$, $y = 0{,}5t^2$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

1.140. $x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$, $t \neq -1$.

1.141. $x = 2^{-t}$, $y = 2^{2t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

1.142. $x = a\cos\varphi$, $y = b \operatorname{sen}\varphi$, $\varphi \in (0, \pi)$.

1.143. $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

1.144. $x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $t \in (0, +\infty)$.

1.145. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$, $t \in (0, +\infty)$.

1.146. $x = 3\log_2 \operatorname{ctg} t$, $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$, $t \in (0, \pi/2)$.

1.147. $x = \operatorname{arcsen}(t^2 - 1)$, $y = \arccos 2t$, $t \in (0, \sqrt{2})$.

1.148. $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$, $t \in (1, +\infty)$.

1.149. $x = a \operatorname{sh} t$, $y = b \operatorname{ch} t$, $t \in (0, +\infty)$.

Hállese y'_x en los puntos indicados:

1.150. $x = t \ln t$, $y = \dfrac{\ln t}{t}$, $t = 1$.

1.151. $x = t(t\cos t - 2\operatorname{sen} t)$, $y = t(t \operatorname{sen} t + 2\cos t)$, $t = \pi/4$.

1.152. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $t = \pi/6$.

1.153. $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $y = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $t = 2$.

3. Derivadas de órdenes superiores. Se denomina *derivada de segundo orden* de la función $y = f(x)$ la derivada de su primera derivada, es decir,

$$y''(x) = (y'(x))'.$$

En general, se llama *derivada de n-ésimo orden* (o *n-ésima derivada*) la derivada de la derivada de orden $(n-1)$, es decir,

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))', \quad n = 2, 3, \ldots$$

Para la derivada de n-ésimo orden se usa también la designación $\frac{d^n y}{dx^n}$.

EJEMPLO 8. Hállese y'', si $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,

◀ Tenemos $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Por consiguiente,

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}. \text{ ▶}$$

Hállense las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:

1.154. $y = \cos^2 x$. **1.155.** $y = \operatorname{arctg} x^2$.

1.156. $y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}$. **1.157.** $y = e^{-x^2}$.

1.158. $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1.159*.** $y = x^{\sqrt{x}}$.

1.160. Hállense $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ si $y(x) = e^{2x} \operatorname{sen} 3x$.

1.161. Hállese $y'''(2)$, si $y = \ln(x-1)$.

1.162. Hállese $y^{IV}(1)$, si $y = x^3 \ln x$.

1.163. Hállense $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, si $y = 2^{\operatorname{sen} x} \cos(\operatorname{sen} x)$.

Sea $f(u)$ una función derivable dos veces. Hállense y' e y'', si:

1.164. $y = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$. **1.165.** $y = \ln f(e^x)$.

Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones derivables dos veces. Hállense y', y'', si:

1.166. $y = u^v$ $(u > 0)$.

◀ Tenemos $\ln y = v \ln u$. De aquí encontramos

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{v}{u} u',$$

es decir,

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right) = u^v\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right),$$

$$y'' = y'\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right) + y\left(v'' \ln u + \right.$$

$$+\frac{v'}{u}u'+\frac{v'u'u+vu''u-vu'^2}{u^2}\Big)=u^v\left(\left(v\frac{u'}{u}+v'\ln u\right)^2+\right.$$

$$\left.+v\frac{uu''-u'^2}{u^2}+\frac{2u'v'}{u}+v''\ln u\right). \blacktriangleright$$

1.167. $y=\sqrt{u^2+v^2}$. **1.168.** $y=\ln\frac{u}{v}$.

Hállese la fórmula para la n-ésima derivada de las funciones dadas:

1.169. $y=x^m$, $m\in\mathbb{N}$. **1.170.** $y=a^{kx}$, $k\in\mathbb{R}$.

1.171*. $y=\operatorname{sen} x$. **1.172.** $y=\ln x$.

1.173*. $y=\cos^2 x$. **1.174.** $y=\frac{1+x}{1-x}$.

Hállense las derivadas indicadas de las funciones dadas, empleando la descomposición en una combinación lineal de las funciones más sencillas:

1.175. $y=\frac{2x}{x^2-1}$, hállese $y^{(n)}$.

◀ Transformemos la expresión a la forma

$$y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

Puesto que

$$\left(\frac{1}{x\pm 1}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\,\frac{1}{(x\pm 1)^{n+1}},$$

se tiene

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right). \blacktriangleright$$

1.176. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$, hállese $y^{(50)}$.

1.177*. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, hállese $y^{(20)}$.

Supongamos que $u(x)$ y $v(x)$ tienen derivadas de hasta n-ésimo orden inclusive. Entonces, para la derivada de n-ésimo orden de su producto $u(x)\,v(x)$ queda válida la *fórmula de Leibniz*

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots$$

$$\ldots+uv^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

donde $u^{(0)}=u$; $v^{(0)}=v$ y $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ son unos coeficientes binomiales.

Hállense las derivadas de órdenes indicados de las funciones dadas, aplicando la fórmula de Leibniz:

1.178. $y=(x^2+x+1)\operatorname{sen} x$, hállese $y^{(15)}$.

1.179. $y=(x^2-x)e^x$, hállese $y^{(20)}$.

1.180.* $y=\operatorname{sen} x\cdot e^{-x}$, hállese $y^{(5)}$.

1.181. $y=x\log_2 x$, hállese $y^{(10)}$.

1.182. $y=x\operatorname{sh} x$, hállese $y^{(100)}$.

1.183*. Muéstrese que

$$(e^{ax}\cos bx)^{(n)}=r^n e^{ax}\cos(bx+n\varphi),$$

donde $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

1.184. Demuéstrese que $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

1.185. Calcúlese el valor de la n-ésima derivada de la función $y=\frac{3x+2}{x^2-2x+5}$ en el punto $x=0$.

◀ Tenemos, según la condición, que

$$y(x)(x^2-2x+5)=3x+2.$$

Derivemos esta identidad n veces aplicando la fórmula de Leibniz. En este caso (para $n\geqslant 2$) obtendremos

$$y^{(n)}(x)(x^2-2x+5)+ny^{(n-1)}(2x-2)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)}(x)\cdot 2=0,$$

de donde para $x=0$

$$5y^{(n)}(0)-2ny^{(n-1)}(0)+n(n-1)y^{(n-2)}(0)=0,$$

o bien

$$y^{(n)}(0)=\frac{2}{5}ny^{(n-1)}(0)-\frac{n(n-1)}{5}y^{(n-2)}(0).$$

Se ha obtenido una fórmula recurrente para determinar la n-ésima derivada en el punto $x=0$ ($n\geqslant 2$). Los valores de $y(0)$ e $y'(0)$ los hallamos directamente:

$$y(0)=\frac{2}{5},\quad y'(0)=\left.\frac{-3x^2-4x+19}{(x^2-2x+5)^2}\right|_{x=0}=\frac{19}{25}.$$

A continuación, suponiendo sucesivamente $n=2, 3, 4, \ldots$, obtendremos, con ayuda de la fórmula recurrente, los valores de las derivadas de órdenes superiores.

Por ejemplo,

$$y''(0)=\frac{2}{5}\cdot 2\cdot\frac{19}{25}-\frac{2\cdot 1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{56}{125},$$

$$y'''(0)=\frac{2}{5}\cdot 3\cdot\frac{56}{125}-\frac{3\cdot 2}{5}\cdot\frac{19}{25}=-\frac{234}{625}. \ \blacktriangleright$$

Aplicando el método descrito en el problema 1.185, hállese la derivada de cuarto orden en el punto $x = 0$ de la función dada:

1.186. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$. **1.187.** $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

1.188. Muéstrese que la función $y = \arcsen x$ satisface la ecuación diferencial $(1 - x^2)\, y'' = xy'$.

1.189. Muéstrese que la función $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + e^x$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

1.190. Muéstrese que la función $y = e^{-x} \cos x$ satisface la ecuación diferencial $y^{(\mathrm{IV})} + 4y = 0$.

1.191. Muéstrese que la función $y = x^n (\cos (\ln x) + \operatorname{sen} (\ln x))$ satisface la ecuación diferencial $x^2y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$.

En los problemas 1.192—1.196 hállense las derivadas de segundo orden de las funciones dadas implícitamente:

1.192. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, $a>0$.

◀ Diferenciando la ecuación que define la función $y(x)$, obtenemos:

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{y'x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

De aquí

$$x + yy' = xy' - y \tag{9}$$

y, por consiguiente,

$$y'=\frac{x+y}{x-y}. \tag{10}$$

Al diferenciar (9) y usar la expresión (10), hallada para y', obtenemos

$$y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \ \blacktriangleright$$

1.193. $y^2 = 2px$. **1.194.** $y = 1 + xe^y$.

1.195. $y = \operatorname{tg} (x + y)$. **1.196.** $e^{x-y} = xy$.

1.197. Dedúzcase la fórmula para la segunda derivada de la función inversa respecto a la función dada $y = f(x)$.

1.198. Demuéstrese que si $(a + bx)e^{y/x} = x$, entonces $x^3y'' = (xy' - y)^2$.

Hállense las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones dadas paramétricamente:

1.199. $x = \ln t, \quad y = t^3, \ t \in (0, +\infty)$.

◀ Tenemos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = 3t^3$$

y

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{9t^2}{1/t} = 9t^3.$$

Observemos que en el caso dado el parámetro t es fácil eliminarlo de las ecuaciones dadas, suponiendo $t = e^x$. Por consiguiente, la expresión para y''_{xx} como función de x tiene la forma $y''_{xx} = 9e^{3x}$. ▶

En el caso general, si $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, se calcula y''_{xx} según la fórmula

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) \\ \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix}}{(\varphi'(t))^3}.$$

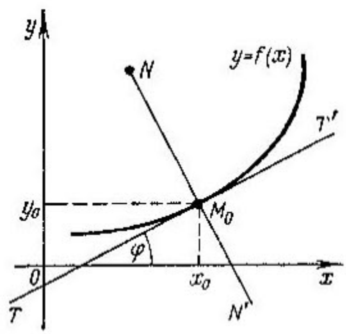

Fig. 46

1.200. $x = \sec t$, $y = \operatorname{tg} t$, $t \in (0, \pi/2)$.

1.201. $x = \operatorname{arcsen} t, y = \ln(1 - t^2), t \in (-1, 1)$.

1.202. $x = \operatorname{arctg} t, \ y = \ln(1 + t^2), \ t \in (-\infty, +\infty)$.

1.203. $x = a\cos^3 t, \ y = a \operatorname{sen}^3 t, \ t \in (0, \pi/2)$.

1.204. Muéstrese que la función $y(x)$, dada paramétricamente mediante las ecuaciones $x = \operatorname{sen} t$, $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, satisface la ecuación diferencial $(1 - x^2)y''_{xx} - xy'_x = 2y$, cualesquiera que sean las constantes a y b.

4. Aplicaciones geométricas y mecánicas de la derivada. El valor de la derivada $f'(x_0)$ de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 es igual al coeficiente angular (la pendiente) $k = \operatorname{tg}\varphi$ de la tangente TT' a la gráfica de esta función trazada por el punto $M_0(x_0, y_0)$, donde $y_0 = f(x_0)$ (fig. 46) (*significado geométrico de la derivada*).

La ecuación *de la tangente* TT' a la gráfica de la función $y = f(x)$ en su punto $M_0(x_0, y_0)$ tiene la forma

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

La recta NN' que pasa por el punto de tangencia M_0 perpendicularmente a la tangente se denomina *normal* a la gráfica de la función $y = f(x)$ en este punto. La ecuación de la normal es

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

Escríbanse las ecuaciones de la tangente y de la normal a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto dado, si:

1.205. $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$.

1.206. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $x_0 = -2$.

1.207. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

1.208. $y = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = 0$.

1.209. $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

1.210. $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$.

1.211. Escríbanse las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto $M_0(2, 2)$ a la curva $x = \frac{1+t}{t^3}$, $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$, $t \neq 0$.

1.212. Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la curva

$$x = t \cos t, \qquad y = t \operatorname{sen} t, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

en el origen de coordenadas y en el punto $t = \pi/4$.

1.213. Escríbanse las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ en el punto de ordenada $y_0 = 3$.

1.214. Escríbanse la ecuación de la tangente a la curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ en el punto $M_0(1, 1)$.

1.215. ¿Bajo qué ángulo la gráfica de la función $y = e^{x/2}$ corta la recta $x = 2$?

1.216. ¿En qué punto M_0 de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

1.217. Hállense los coeficientes b y c en la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que toca la recta $y = x$ en el punto $M_0(1, 1)$.

1.218. Muéstrese que las tangentes a la hipérbola $y = \frac{x-4}{x-2}$ en los puntos de su intersección con los ejes coordenados son paralelas entre sí.

1.219. Fórmese la ecuación de la normal a la gráfica de la función $y = -\sqrt{x} + 2$ en el punto de intersección con la bisectriz del primer ángulo coordenado.

1.220. Fórmese la ecuación de tal normal a la parábola $y = x^2 - 6x + 6$ que sea perpendicular a una recta que une el origen de coordenadas con el vértice de la parábola.

1.221. En los puntos de intersección de la recta $x - y + 1 = 0$ con la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ están trazadas las normales a la parábola citada. Hállese el área del triángulo formado por las normales y una cuerda que une los puntos de intersección mencionados.

1.222. Muéstrese que las normales a la desarrollante de la circunferencia $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t)$ son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Se llama ángulo ω *entre las curvas* $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ en su punto común $M_0(x_0, y_0)$ un ángulo formado por las tangentes a dichas curvas en el punto M_0.

1.223. Demuéstrese que

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}.$$

Hállense los ángulos bajo los cuales se cortan las curvas dadas:

1.224. $y = x^2$ e $y = x^3$.

1.225. $y = (x - 2)^2$ e $y = 4x - x^2 + 4$.

1.226. $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

1.227. $x^2 + y^2 = 8ax$ e $y^2 = \frac{x}{2a - x}$.

1.228. Demuéstrese que la suma de los segmentos que se obtienen al cortar la tangente a la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ en los ejes de coordenadas es igual a a para todos los puntos de la curva.

1.229. Muéstrese que un segmento de la tangente a la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, comprendido entre los ejes de coordenadas, es de longitud constante igual a a.

1.230. Hállese la distancia entre el origen de coordenadas y la normal a la línea $y = e^{2x} + x^2$, trazada en el punto de abscisa $x = 0$.

1.231. Demuéstrese que el segmento de una tangente a la tractriz

$$y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2},$$

comprendido entre el eje de coordenadas y el punto de tangencia, es de longitud constante.

Si una curva viene dada en las coordenadas polares por la ecuación $r = r(\varphi)$, el ángulo θ, formado por la tangente TT' y el radio vector $\overline{OM}$ del punto de tangencia M (fig. 47), se determina por la relación

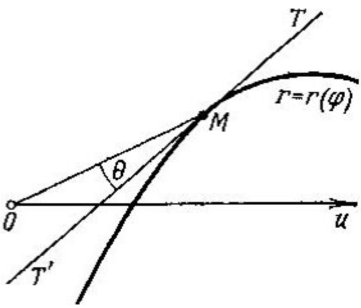

Fig. 47

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r(\varphi)}{r'_{\varphi}}. \qquad (12)$$

1.232.** Dedúzcase la fórmula (12).

1.233. Hállese el ángulo θ entre la tangente y el radio vector del punto de tangencia para la espiral logarítmica $r = ae^{k\varphi}$.

1.234. Hállese el ángulo θ formado por la tangente y el radio vector del punto de tangencia para la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Si $x = x(t)$ es una función que describe la ley del movimiento de un punto material, entonces la primera derivada $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ representa la velocidad y la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2} = \ddot{x}$ es la aceleración de este punto en un instante de tiempo t (*sentido mecánico de las derivadas primera y segunda*).

1.235. La ley del movimiento de un punto material por una recta tiene la forma $x = 1/4t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

a) ¿En qué instantes de tiempo el punto se encuentra en el origen de coordenadas?

b) ¿En qué instantes de tiempo la dirección de su movimiento coincide con la orientación positiva del eje Ox?

c) ¿En qué instantes de tiempo su aceleración es nula?

1.236. Hállese la velocidad de una oscilación armónica de amplitud a, frecuencia ω y fase inicial $\varphi = 0$.

1.237. Un cuerpo de masa 4 se desplaza rectilíneamente según la ley $x = t^2 + t + 1$. Hállese la energía cinética del cuerpo en el instante $t = 5$.

1.238. ¿En qué instante de tiempo $t \in [0, 2\pi]$ se debe parar el efecto de las fuerzas para que un punto que participa en la oscilación armónica $x = \cos 3t$ siga moviéndose uniformemente a la velocidad $v = {}^3/_2$.

1.239. Un punto se desplaza por una espiral logarítmica $r = e^{a\varphi}$. Hállese la velocidad de variación del radio polar, si se sabe que éste gira a la velocidad constante ω.

1.240. Un punto se mueve por una circunferencia $r = 2a \cos \varphi$. Hállese la velocidad de variación de la abscisa y ordenada del punto, si el radio polar gira a la velocidad angular ω.

1.241. ¿En qué punto de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 400$ la ordenada va decreciendo a la misma velocidad a la que crece la abscisa?

1.242. El radio de una bola varía a la velocidad v. ¿A qué velocidad varían el volumen y la superficie de la bola?

1.243. Una rueda gira de modo tal que el ángulo de rotación es proporcional al cuadrado del tiempo. La primera vuelta de la rueda se ha realizado durante un lapso de tiempo $T = 8$ segundos. Hállese la velocidad angular ω en el instante de tiempo $t = 32s$ después de comenzar el movimiento.

§ 2. Diferencial

1. Diferencial de primer orden. Una función $y = f(x)$ se llama *derivable* en el punto x_0, si su incremento $\Delta y(x_0, \Delta x)$ puede representarse en la forma

$$\Delta y(x_0, \Delta x) = A\,\Delta x + o(\Delta x). \tag{1}$$

La parte lineal principal $A\,\Delta x$ del incremento Δy lleva el nombre de *diferencial* de esta función en el punto x_0, correspondiente al incremento Δx, y se designa por el símbolo $dy(x_0, \Delta x)$.

Para que la función $y = f(x)$ sea derivable en el punto x_0, es necesario y suficiente que exista la derivada $f'(x_0)$; en este caso se verifica la igualdad $A = f'(x_0)$.

Esta afirmación permite llamar derivable toda función que tiene derivada. Precisamente en este sentido hemos usado esta expresión en el § 1.

La expresión para una diferencial tiene la forma

$$dy(x_0, dx) = f'(x_0)\,dx,$$

donde se ha adoptado la designación $dx = \Delta x$. De la fórmula (1) se deduce que, si $f'(x_0) \neq 0$, entonces para $\Delta x \to 0$ el incremento de la función y su diferencial dy en un punto fijo serán unos infenitésimos equivalentes, lo que permite anotar la igualdad aproximada:

$$\Delta y \approx dy \text{ para } |\Delta x| \ll 1. \tag{2}$$

Ejemplo 1. Hállese el valor aproximado del volumen V de una bola cuyo radio es $r = 1{,}02$ m.

◀ Puesto que $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, entonces, suponiendo $r_0 = 1$, $\Delta r = 0{,}02$ y haciendo uso de la fórmula (2), obtenemos:

$$V(1{,}02) = V(1) + \Delta V(1,\ 0{,}02) \approx V(1) + V'(1)\cdot 0{,}02 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi + 4\pi\cdot 0{,}02 \approx 4{,}43\ m^3. \ ▶$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA DIFERENCIAL. La diferencial $dy(x_0, \Delta x)$ es igual al incremento de la ordenada de la tangente TT' a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $M_0(x_0, y_0)$ correspondiente al incremento del argumento igual a Δx (fig. 48).

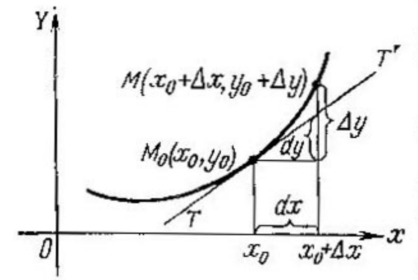

Fig. 48

2.1. Demuéstrese que para una función lineal $y = ax + b$ el incremento Δy y la diferencial dy coinciden.

2.2. Hállense el incremento Δy y la diferencial dy de la función $y = x^3$, correspondientes al valor del argumento $x_0 = 2$ y a dos incrementos distintos del argumento $(\Delta x)_1 = 0{,}1$ y $(\Delta x)_2 = 0{,}01$.

2.3. Hállense el incremento ΔS y la diferencial dS del área S de un cuadrado, correspondientes al incremento Δx del lado x. Con ayuda de la figura interprétese geométricamente ΔS, dS y la diferencia $\Delta S - dS$.

2.4. Un punto material M se mueve rectilíneamente siguiendo la ley $s = f(t)$, donde t es un momento de tiempo y s es el trayecto recorrido durante el lapso de tiempo de 0 hasta t. Dése una interpretación mecánica de la diferencial del trayecto ds, correspondiente al intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

2.5. Haciendo uso del resultado del problema anterior y de la fórmula (2), hállese aproximadamente el trayecto Δs recorrido por el punto M durante un intervalo de tiempo de $t_1 = 3$ hasta $t_2 = 4$, si la ley del movimiento del punto M está dada por la fórmula $s = 1 + \operatorname{arctg} t$. Compárese la respuesta con el valor exacto de Δs.

2.6. Para las funciones: a) $f(x) = x^n$ y b) $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ hállense los valores del argumento x, para los cuales las diferenciales de estas funciones no son equivalentes a sus incrementos cuando $\Delta x \to 0$.

2.7. Sea dado un segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ de variación del argumento x de la función $y = f(x)$; Δy y dy son el incremento y la diferencial correspondientes de la función y. ¿Serán posibles las igualdades: a) $dy = \frac{3}{2}\Delta y$, b) $dy = \Delta y$, c) $dy = \frac{1}{2}\Delta y$ sobre todo el segmento?

2.8. Las aristas de un cubo han sido aumentadas en 1 cm. La diferencial dV del volumen V del cubo resultó ser igual a 12 cm³. Hállese la longitud inicial de las aristas.

2.9. El radio de un círculo ha sido aumentado en 1 cm. La diferencial del área del círculo resultó ser igual a 6π cm². Hállese el valor original del radio.

Hállense las diferenciales de las funciones que vienen más abajo para los valores arbitrarios del argumento x y para su incremento arbitrario $\Delta x = dx$:

2.10. $x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} - 5$.

2.11. $\operatorname{sen} x - x \cos x + 4$.

2.12. $x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$. **2.13.** $x \ln x - x + 1$.

2.14. $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} - 3$. **2.15.** $y^5 + y - x^2 = 1$.

2.16. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. **2.17.** $e^y = x + y$.

En los problemas 2.18—2.22 realícense los cálculos aproximados que se prescriben, recurriendo al cambio del incremento Δy de la función conveniente $y = f(x)$ por la diferencial dy de esta función, siendo pequeño el valor absoluto del incremento Δx del argumento x.

2.18. Calcúlense aproximadamente: a) arcsen 0,05; b) b) arctg 1,04; c) ln 1,2.

2.19. Arguméntese la fórmula aproximada

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

y calcúlese, según esta fórmula, $\sqrt[3]{25}$.

2.20. Hállese el valor aproximado de la función $f(x) = e^{x^2 - x}$ para $x = 1{,}2$.

2.21*. Hállese la expresión aproximada para el incremento ΔV del volumen V de un cilindro circular recto de altura h, cuando el radio r de la base varía en una magnitud Δr.

2.22*. Según la ley de Clapeyron, el volumen V, ocupado por un gas, la presión del gas p y la temperatura absoluta T están ligados mediante la fórmula $pV = RT$, donde R es la constante de los gases. Hállese la expresión aproximada para el incremento ΔV del volumen V, cuando la presión p varía en la magnitud Δp, considerando invariable la temperatura T.

2. Diferenciales de órdenes superiores. Examinemos la diferencial $dy(x, \Delta_1 x) = f'(x) \Delta_1 x$ como función de x para $\Delta x = \Delta_1 x$ fijo. Suponiendo que la función $y = f(x)$ es dos veces derivable en el punto x, hallemos la diferencial de $dy(x, \Delta_1 x)$ para $\Delta x = \Delta_2 x$:

$$d(dy(x, \Delta_1 x))|_{x, \Delta x = \Delta_2 x} = f''(x) \Delta_1 x \Delta_2 x.$$

El valor de la expresión obtenida para $\Delta_1 x = \Delta_2 x = dx$ recibe el nombre de *segunda diferencial* o diferencial de 2do orden de la función $y = f(x)$ y se denota mediante el símbolo $d^2 y(x, dx)$.

De este modo,

$$d^2 y = f''(x)\, dx^2.$$

Análogamente

$$d^3 y = d(d^2 y) = f'''(x)\, dx^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)\, dx^n.$$

Hállense las diferenciales de 2do orden de las funciones del argumento x que vienen más abajo:

2.23. $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$. **2.24.** $y = 3^{-x}$.

2.25. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. **2.26.** $y = ax^2 + bx + c$.

2.27. $xy + y^2 = 1$. **2.28.** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

2.29. $x^3 + y^3 = y$. **2.30.** $x = y - a \operatorname{sen} y$.

§ 3. Teoremas de las funciones derivables. Fórmula de Taylor.

1. Teoremas del valor medio.

TEOREMA DE ROLLE. *Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, derivable para $x \in (a, b)$ y $f(a) = f(b)$, entonces existe por lo menos un punto $\zeta \in (a, b)$ tal que $f'(\zeta) = 0$.*

Los puntos en los que $f'(x) = 0$ se denominan *puntos estacionarios* de la función $f(x)$.

TEOREMA DE LAGRANGE. *Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y derivable para $x \in (a, b)$, entonces existe por lo menos un punto $\xi \in (a, b)$ tal que se verifica*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) \quad \textit{(fórmula de Lagrange)}.$$

TEOREMA DE CAUCHY. *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el segmento $[a, b]$, derivables cuando $x \in (a, b)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces existe por lo menos un punto $\xi \in (a, b)$ tal que se verifica*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ (fórmula de Cauchy).}$$

3.1. La función $f(x)=\frac{5-x^2}{x^4}$ tiene en los extremos del segmento $[-1, 1]$ valores iguales (¡compruébese!). Su derivada $f'(x)$ es igual a cero sólo en dos puntos $x=\pm\sqrt{10}$ (¡compruébese!), situados fuera de los límites de dicho segmento. ¿Cuál es la razón por la que se viola la conclusión del teorema de Rolle?

3.2. Muéstrese que la función $f(x)=x^2-1$ en el segmento $[-1, 1]$ satisface las condiciones del teorema de Rolle. Hállense todos los puntos estacionarios de esta función.

3.3. Sea $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$. Demuéstrese que todas las tres raíces de la ecuación $f'(x)=0$ son reales.

3.4*. Demuéstrese que la ecuación $16x^4-64x+31=0$ no puede tener dos raíces reales distintas en el intervalo $(0, 1)$.

3.5*. Demuéstrese que la ecuación $e^{x-1}+x-2$ que cuenta con una raíz $x=1$ (¡compruébese!) no tiene otras raíces reales.

3.6*. Demuéstrese que si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces la función $F(x)=(f(x)-f(a))(b-a)-(f(b)-f(a))\times\times(x-a)$ tiene por lo menos un punto estacionario en el intervalo (a, b).

3.7. Habiendo escrito la fórmula de Lagrange para la función $f(x)=\sqrt{3x^3}+3x$ en el segmento $[0, 1]$, hállese en el intervalo $(0, 1)$ el valor correspondiente de ξ.

3.8. Demuéstrese que si la derivada $f'(x)$ es idénticamente igual a cero en el intervalo (a, b), la función $f(x)$ es constante en dicho intervalo.

3.9. Demuéstrese que si $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) en el intervalo (a, b), la función $f(x)$ es monótona creciente (monótona decreciente) en dicho intervalo.

La función $f(x)$ satisface la *condición de Lipschitz* en el intervalo (a, b), si existe tal K que

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant K\cdot|x_2-x_1|$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in (a, b)$.

3.10. Demuéstrese que si $\sup\limits_{a<x<b} f'(x) = M$, la función $f(x)$ satisface en el intervalo (a, b) la condición de Lipschitz con una constante K igual a M.

3.11*. Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos veces derivables en el intervalo (a, b). Demuéstrese que si $f''(x) = \varphi''(x)$ en (a, b), entonces $f(x)$ y $\varphi(x)$ se diferencian en un sumando lineal.

3.12. Demuéstrese que si una función $f(x)$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange en $[a, b]$, entonces $|f(b) - f(a)| \geqslant m\cdot(b-a)$, donde $m = \inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f'(x)$.

3.13. Al escribir la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ y $g(x) = x^2 + 4$ en el segmento $[0, 2]$, hállense los valores de ξ.

2. Regla de L'Hospital—Bernoulli. *Cálculo del límite de indeterminaciones del tipo* $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. Supongamos que para $x \to a$ las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son ambas infenitésimos o bien infinitamente grandes. En este caso su razón no está determinada en el punto $x = a$ y se dice que representa una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, ó, correspondientemente, $\frac{\infty}{\infty}$. Sin embargo, dicha razón puede tener un límite en el punto $x = a$, finito o infinito. El proceso de búsqueda de este límite se denomina cálculo del límite de la indeterminación. La regla de L'Hospital—Bernoulli, que se basa en el teorema siguiente que lleva sus nombres, constituye uno de los métodos para calcular el límite de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

TEOREMA. *Supongamos que en cierto entorno U del punto $x = a$ las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son derivables en todo punto, a excepción, quizás, del mismo punto $x = a$, y sea $\varphi'(x) \neq 0$ en U. Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son simultáneamente bien infinitésimos o bien infinitamente grandes para $x \to a$, y existe, además, un límite de la razón $\frac{f(x)}{\varphi'(x)}$ de sus derivadas para $x \to a$, entonces existe también un límite de la razón $\frac{f'(x)}{\varphi(x)}$ entre las mismas funciones, con la particularidad de que*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{1}$$

La regla puede aplicarse también en el caso cuando $a = \infty$.

EJEMPLO 1. Hállese $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x}$ (es decir, calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$).

◀ Haciendo uso de la fórmula (1), obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\dfrac{1}{1+25x^2}}=\frac{2}{5},$$

puesto que $e^{2x}\to 1$ y $\dfrac{1}{1+25x^2}\to 1$ para $x\to 0$. ▶

En algunos casos el cálculo del límite de las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ puede exigir que se aplique reiteradamente la regla de L'Hospital—Bernoulli.

EJEMPLO 2. Hállese $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$ $\left(\text{es decir, calcúlese el límite de la indeterminación del tipo } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

◀ Aplicando dos veces la fórmula (1), obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2\ln x}{x}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{3x^2}=0. \text{ ▶}$$

En cada etapa de la aplicación de la regla de L'Hospital—Bernoulli se deben emplear las transformaciones idénticas que simplifican la razón y combinar también dicha regla con otros procedimientos cualesquiera del cálculo de límites.

EJEMPLO 3. Hállese $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ $\left(\text{es decir, calcúlese el límite de la indeterminación del tipo } \frac{0}{0}\right)$.

Hagamos uso de la fórmula (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}.$$

Suprimamos en el denominador de la fracción el factor $\cos^2 x$, puesto que tiene el límite 1 cuando $x\to 0$. Desarrollemos la diferencia de los cubos en el numerador y liberemos éste del factor $(1+\cos x+\cos^2 x)$ que tiene el límite 3 cuando $x\to 0$. Realizadas dichas simplificaciones, obtendremos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Apliquemos de nuevo (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}.$$

Haciendo uso del primer límite notable, obtenemos la respuesta definitiva 1/2, sin recurrir ya otra vez a la regla de L'Hospital—Bernoulli. ▶

Calcúlense los límites de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$:

3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arcsen} 3x}$. **3.15.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. **3.17.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$. **3.19.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{tg} x}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. **3.21.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\operatorname{sen}^2 5x}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{ctg} x-1}{\operatorname{sen} 4x}$ **3.23.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^m}$, $m>0$. **3.25.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\operatorname{sen} x}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$. **3.27.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^{x}-e^{3})}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Cálculo de los límites de las indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$. Con el fin de calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,\varphi(x)$, donde $f(x)$ es un infinitésimo y $\varphi(x)$ es infinitamente grande para $x\to a$ (cálculo del límite de la indeterminación del tipo $0\cdot\infty$) se debe transformar el producto a la forma $\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ (una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$) o bien a la forma $\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ (una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$) y emplear a continuación la regla de L'Hospital—Bernoulli.

Ejemplo 4. Hállese $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sen}(x-1)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ (calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $0\cdot\infty$).

◀ Tenemos: $\lim_{x\to 1} \operatorname{sen}(x-1)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2}}} = -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi}. \ ▶$$

Con el fin de calcular el $\lim_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$, donde $f(x)$ y $\varphi(x)$ son infinitamente grandes cuando $x\to a$ (cálculo del límite de una indeterminación del tipo $\infty-\infty$), se debe transformar la diferencia a la forma $f(x)\left(1-\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$; calcular después el límite de la indeterminación $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Si $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} \neq 1$, entonces $\lim_{x\to a}(f(x)-\varphi(x)) = \infty$. Si, en cambio, $\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1$, obtenemos una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$, analizada más arriba.

EJEMPLO 5. Hállese $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)$ (calcúlese el límite de la indeterminación del tipo $\infty-\infty$).

◀ Tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right).$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x} =$$

$$= 3\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x) = +\infty. \ ▶$$

Calcúlese el límite de indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$, o bien $\infty-\infty$:

3.29. $\lim_{x\to 0}(e^x-e^{-x}-2)\operatorname{ctg} x$. **3.30.** $\lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$.

3.31. $\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)$. **3.32.** $\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{a}{x}$.

3.33. $\lim_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$. **3.34.** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$.

3.35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.36. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

3.37. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

3.38. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

Cálculo del límite de indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0, 1^∞. En todos los tres casos se tiene en cuenta el cálculo del límite de la expresión $(f(x))^{\varphi(x)}$, donde $f(x)$ es un infinitésimo en el primer caso, infinitamente grande en el segundo y una función que tiene un límite igual a la unidad, en el tercero. En cuanto a $\varphi(x)$, será un infinitésimo en los primeros dos casos e infinitamente grande en el tercer caso.

Procedamos del modo siguiente. Aplicando primeramente los logaritmos $y=(f(x))^{\varphi(x)}$, obtenemos la igualdad

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x) \qquad (2)$$

y hallamos el límite de $\ln y$, después de lo cual se encuentra también el límite de y. En todos los tres casos $\ln y$ es, en virtud de (2), una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$ (compruébese) y el método para calcular su límite se ha expuesto más arriba.

Ejemplo 6. Hállese el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ (calcúlese el límite de una indeterminación del tipo 1^∞).

◀ Introduzcamos la designación $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$. Entonces $\ln y=2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ será una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$. Transformando la expresión $\ln y$ a la forma $\ln y=2\,\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{1/x}$, hallamos, rigiéndonos por la regla de L'Hospital—Bernoulli

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=2\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=2.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=e^2. \ ▶$$

Calcúlese el límite de indeterminaciones del tipo 0°, ∞°, 1^∞:

3.39. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ **3.40.** $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{arcsen} x)^{\operatorname{tg} x}$.

3.41. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)^{\cos x}$ **3.42.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

3.43. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$. **3.44.** $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+2^x)^{1/x}$.

3.45. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$. **3.46.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

3.47. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$. **3.48.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

3.49. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$. **3.50.** $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{1/x}$.

3. Fórmula de Taylor. Si la función $y=f(x)$ tiene derivadas hasta el orden $(n+1)$ inclusive en cierto entorno $U_\delta(a)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$ del punto a, entonces para todo $x\in U_\delta(a)$ queda válida la *fórmula de Taylor* (de orden n)

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n+1}+R_{n+1}(x),$$

donde

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

(término residual en la *forma de Lagrange*). De este modo, la fórmula de Taylor de orden n permite representar la función $y=f(x)$ como una suma del polinomio de n-ésimo grado y del término residual.

En particular, cuando $a=0$, tenemos

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

(*fórmula de Maclaurin*).

3.51. Desarróllese el polinomio $2x^3-3x^2+5x+1$ en potencias del binomio $x+1$.

3.52. Para el polinomio $x^4 + 4x^2 - x + 3$ escríbase la fórmula de Taylor de segundo orden en el punto $a = 1$. Escríbase el término residual en la forma de Lagrange y hállese el valor de θ correspondiente a los siguientes valores del argumento: a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 2$.

3.53. Sea $P(x)$ un polinomio de cuarto grado, $P(2) = -1$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 2$, $P'''(2) = -12$, $P^{IV}(2) = -24$. Calcúlense $P(-1)$, $P'(0)$ y $P''(1)$.

Escríbase la fórmula de Maclaurin de n-ésimo orden para las funciones dadas:

3.54. $y = e^x$. **3.55.** $y = \operatorname{sen} x$. **3.56.** $y = \cos x$.

3.57. $y = \ln(1 + x)$. **3.58*.** $y = \operatorname{arctg} x$.

3.59. $y = (1 + x)^\alpha$.

3.60. Escríbase la fórmula de Taylor de tercer orden para la función $y = \dfrac{x}{x-1}$ en el punto $a = 2$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

3.61. Escríbase la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $y = \operatorname{tg} x$ en el punto $a = 0$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de segundo grado.

3.62. Escríbase la fórmula de Taylor de tercer orden para la función $y = \arcsen x$ en el punto $a = 0$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

3.63. Escríbase la fórmula de Taylor de tercer orden para la función $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en el punto $a = 1$. Constrúyanse las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

La fórmula de Taylor se usa ampliamente para calcular los valores de las funciones con un grado de precisión dado. Supongamos, por ejemplo, que se pide calcular el valor de la función $f(x)$ en el punto x_0 con un error absoluto no superior a ε, si se conocen el valor de esta función y de sus derivadas en el punto a. De la fórmula de Taylor se deduce que

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x_0 - a) + \ldots + \frac{f^{n_0}(a)}{n_0!}(x_0 - a)^{n_0},$$

donde n_0 es el mínimo de los números n, para los cuales

$$|R_{n+1}(x_0)| < \varepsilon.$$

EJEMPLO 7. Calcúlese el número e con un error absoluto no superior a 0,001.

◀ Aplicando la fórmula de Maclaurin a la función $f(x) = e^x$, tenemos

$$e = f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

El valor mínimo de n que satisface la condición $\frac{e^\theta}{(n+1)!} < 0{,}0001$, donde $0 < \theta < 1$, es igual a $n_0 = 6$. Por consiguiente,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} = 2{,}718. \ ▶$$

3.64. Calcúlense con un error absoluto no superior a 0,001 los valores aproximados de los siguientes números:

a) sen 1; b) $\sqrt{e}$; c) ln 1,05; d) $\sqrt[5]{33}$.

3.65. Aclárese el origen de las fórmulas aproximadas:

a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, $\quad |x| < 1$;

b) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ $|x| < 1$

y evalúese su error.

El término residual en la fórmula de Taylor puede escribirse en la *forma de Peano*

$$R_{n+1}(x) = o(|x - a|^n),$$

cuyo empleo resulta útil al calcular los límites.

EJEMPLO 8. Hállese $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{5x^2 + 7x^3}$.

◀ Como $1 - \cos^3 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)$, y $5x^2 + 7x^3 \sim 5x^2$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{5x^2 + 7x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{3(1 - \cos x)}{5x^2}.$$

Al sustituir $\cos x$ por su desarrollo según la fórmula de Maclaurin $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{5x^2 + 7x^3} = \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2}{x^2},$$

puesto que $\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\sim\frac{x^2}{2}$ cuando $x\to 0$. En definitiva

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\frac{3}{10}\,.\ \blacktriangleright$$

Ejemplo 9. Hállese $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\operatorname{sen}(2x-2)}{x-1+\operatorname{sen}(3x-3)}$.

◀ De acuerdo con la fórmula de Taylor tenemos

$$\operatorname{sen}(2x-2)=\operatorname{sen}2(x-1)=\frac{2(x-1)}{1!}+o(|x-1|),$$

$$\operatorname{sen}(3x-3)=\frac{3(x-1)}{1!}+o(|x-1|).$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\operatorname{sen}(2x-2)}{x-1+\operatorname{sen}(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)-o(|x-1|)}{4(x-1)+o(|x-1|)}\,.$$

Despreciando los infinitésimos de órdenes superiores, es decir, pasando en el numerador y el denominador a los infinitésimos equivalentes para $x\to 1$, obtenemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\operatorname{sen}(2x-2)}{x-1+\operatorname{sen}(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{4(x-1)}=-\frac{1}{4}\,.\ \blacktriangleright$$

3.66. Muéstrese que el desarrollo según la fórmula de Maclaurin para las funciones sen x, tg x, arcsen x, arctg x, e^x-1 y $\ln(1+x)$ puede escribirse en la forma $x+o(|x|)$ y que para $x\to 0$ todas estas funciones son equivalentes al infinitésimo $\alpha(x)=x$ (y, por lo tanto, son equivalentes entre sí).

3.67. Haciendo uso del desarrollo según la fórmula de Maclaurin, calcúlense los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3+x^4}$.

§ 4. Investigación de las funciones y construcción de las gráficas

1. Crecimiento y decrecimiento de las funciones. Extremo. Una función $y=f(x)$ se denomina *creciente* (*decreciente*) en el intervalo (a, b), si de la desigualdad $x_1<x_2$, donde $x_1, x_2\in(a, b)$, se desprende la desigualdad $f(x_1)<f(x_2)$ (($f(x_1)>f(x_2)$, respectivamente).

Si la función $f(x)$ es derivable en el intervalo (a, b) y $f'(x) > 0$ para cualquier $x \in (a, b)$, entonces la función $f(x)$ crece en (a, b); si, en cambio, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, la función $f(x)$ es decreciente en este intervalo.

En los casos más sencillos el dominio de definición de la función $y = f(x)$ puede dividirse en un número finito de *intervalos de monotonía*. Cada uno de los intervalos de monotonía está acotado por los *puntos críticos* en los cuales $f'(x) = 0$ ó bien $f'(x)$ no existe.

Si existe tal entorno $U_\delta(x_0)$ del punto x_0 que para cualquier punto $x \neq x_0$ de dicho entorno se verifica la desigualdad $f(x) > f(x_0)$ (o bien $f(x) < f(x_0)$), entonces x_0 lleva el nombre de *punto de mínimo* (*máximo*) de la función $y = f(x)$, mientras que el número $f(x_0)$ se llama *mínimo* (*máximo*) de esta función. Los puntos de mínimo y de máximo de una función se denominan sus *puntos de extremo*.

Condición necesaria de extremo. Si x_0 es un punto de extremo de la función $f(x)$, entonces $f'(x_0) = 0$, o bien $f'(x_0)$ no existe, es decir, x_0 es un punto crítico de esta función.

Lo recíproco, hablando en general, no es cierto.

Condiciones suficientes de extremo de una función continua.

1) Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en cierto entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del punto crítico x_0, a excepción, quizás, de este mismo punto. Si en este caso la derivada $f'(x)$ tiene, en los intervalos $(x_0 - \delta, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta)$, signos opuestos, entonces x_0 es un punto de extremo, con la particularidad de que, si $f'(x) > 0$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) < 0$ para $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, x_0 será el punto de máximo, y si $f'(x) < 0$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) > 0$ para $x \in (x_0 + \delta, x_0)$, entonces x_0 será el punto de mínimo. Si, en cambio, $f'(x)$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, mantiene su signo, el punto x_0 no es un punto de extremo.

2) Supongamos que la función $f(x)$ es dos veces derivable en el punto crítico x_0 y en cierto entorno de éste. Si $f''(x_0) < 0$, x_0 será un punto de máximo de la función $f(x)$; si $f''(x_0) > 0$, x_0 será un punto de mínimo. En el caso de que $f''(x) = 0$, se necesitan investigaciones complementarias.

EJEMPLO 1. Hállense los intervalos de monotonía y los puntos de extremo de la función $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Encontramos la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3} & \text{para} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\[2ex] \dfrac{2-x}{x^3} & \text{para} \quad x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Igualándola a cero, obtenemos $x = 2$. De este modo, los puntos críticos son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ (tomando en consideración los puntos, donde la derivada no existe). Dichos puntos dividen el dominio de definición de $f(x)$ en cuatro intervalos de monotonía: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$. Por cuanto $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$ y $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, entonces $f(x)$ es monótona creciente para $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$, monótona decreciente para $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, en el punto $x_3 = 2$ la función alcanza su máximo ($f(2) = 1/4$), y en el punto $x_2 = 1$, su mínimo ($f(1) = 0$). Resulta cómodo reducir los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

Tabla 4.1

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$
$f'(x)$	+	no existe	—	no existe	+	0	—

Hemos de notar que en el ejemplo examinado la primera condición suficiente permite determinar el carácter de cada uno de los puntos críticos de la función dada. Al mismo tiempo la segunda condición suficiente no es aplicable en el punto x_2, puesto que en dicho punto no existe la primera derivada. ▶

4.1*. Demuéstrese la siguiente generalización de la segunda condición suficiente de extremo. Sea x_0 un punto crítico de la función $f(x)$ y supongamos que la primera de las derivadas no nulas de dicha función en el punto x_0 es de orden k. Si k es un número par, x_0 será el punto de extremo y, además, de máximo, siempre que $f^{(k)}(x_0) < 0$, y de mínimo, siempre que $f^{(k)}(x_0) > 0$. En cambio, si k es un número impar, no hay extremo en el punto x_0.

4.2. Analícese el extremo de la función $f(x) = (x - x_0)^k \varphi(x)$ en el punto x_0, donde $k \in N$ y $\varphi(x)$ es continua en el punto x_0, siendo $\varphi(x_0) \neq 0$.

4.3.* Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demuéstrese que la función $f(x)$ tiene en el punto $x_0 = 0$ un mínimo, y la función $g(x)$ no tiene extremo en el punto x_0, aunque

$$f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Hállense los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, como también los puntos de extremo, para las funciones indicadas más abajo:

4.4. $y = x\sqrt{1-x^2}$. **4.5.** $y = \frac{2x^2-1}{x^4}$.

4.6. $y = \frac{x}{\ln x}$. **4.7.** $y = x - 2\operatorname{sen} x$.

4.8. $y = x - 2 \ln x$.
4.9. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$. **4.10.** $y = e^x \cos x$.
4.11. $y = x^x$. **4.12.** $y = \operatorname{ch}^3 x + 1$.

El *valor máximo* (*mínimo*) de una función continua $f(x)$ en un segmento dado $[a, b]$ se alcanza bien en los puntos críticos o bien en los extremos de dicho segmento.

Hállense los valores máximo M y mínimo m de las siguientes funciones en los segmentos indicados (en todo el dominio de definición, si no se indica el segmento):

4.13. $y = -3x^4 + 6x^2$; $[-2, 2]$. **4.14.** $y = x + 2\sqrt{x}$; $[0, 4]$. **4.15.** $y = \frac{x-1}{x+1}$; $[0, 4]$.

4.16. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; $[0, 1]$.

4.17. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$; $[0, 1]$.

4.18. $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$; $[0, 1]$.

4.19. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. **4.20.** $y = xe^{-x^2/2}$.

Demuéstrense las siguientes desigualdades:

4.21*. $e^x > 1 + x$, $x \neq 0$. **4.22.** $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x \neq 0$.

4.23. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 1 + \frac{x^2}{2}$, $x \neq 0$.

4.24. $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x > 2x$, $x \in (0, \pi/2)$.

4.25. Dos cuerpos se mueven a velocidades constantes de v_1 m/s y v_2 m/s. El movimiento se realiza a lo largo de dos rectas que forman el ángulo $\pi/2$, en dirección hacia el vértice de este ángulo, con la particularidad de que al principio del movimiento el primer cuerpo se encontraba a la distancia a m del vértice y el segundo cuerpo, a la distancia b m. ¿Dentro de cuántos segundos después de comenzar el movimiento la distancia entre los cuerpos será mínima?

4.26. Con el fin de transportar la producción de la fábrica N a la ciudad A (fig. 49) se construye una carretera NP que une la fábrica con el ferrocarril AB que pasa por la ciudad A. Los gastos de transporte por carretera son dos veces mayores que los gastos por ferrocarril. ¿A qué punto P se debe tender la carretera, para que los gastos generales de transporte de la producción de la fábrica N a la ciudad A por carretera y por ferrocarril sean mínimos?

4.27. Una ventana tiene forma de un rectángulo coronado con un semicírculo (fig. 50). Se conoce el perímetro P de esta figura. ¿Para qué dimensiones x e y la ventana dejará pasar la cantidad máxima de luz?

4.28. De tres tablas de igual espesor se hace un canalón para suministrar agua. ¿Con qué ángulo α de inclinación de

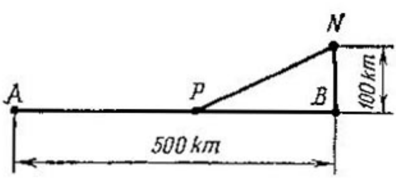

Fig. 49

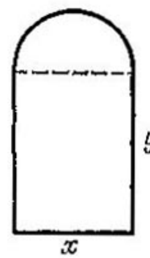

Fig. 50

las paredes laterales respecto al fondo del canalón, será máxima el área de la sección transversal de éste?

4.29. En un triángulo de base a y altura h está inscrito un rectángulo cuya base se sitúa en la del triángulo y dos vértices, en los lados laterales del mismo. Hállese el área máxima del rectángulo inscrito.

4.30. El perímetro de la sección axial de un cilindro es igual a $6a$. Hállese el volúmen máximo de tal cilindro.

4.31. Un cilindro está inscrito dentro de un cono cuya altura es h y el radio de la base r. Hállese el volumen máximo del cilindro inscrito.

4.32. Hállese el volumen mínimo de un cono circunscrito alrededor de una bola de radio r.

4.33. Hállese el volumen máximo de un cono, si se conoce la longitud dada l de su generatriz.

4.34. Determínese el área máxima de un rectángulo inscrito en un círculo de radio r.

4.35. Hállese en la parábola $y = x^2$ un punto N cuya distancia hasta la recta $y = 2x - 4$ sea mínima.

4.36. En un semicírculo de radio R está inscrito un rectángulo de área máxima. Determínense su base x y la altura y.

4.37. Divídase un segmento de longitud a en dos partes de modo tal que la suma de las áreas de los cudrados construidos sobre estas partes sea mínima.

4.38. Un embudo cónico, el radio de la base del cual es R y la altura H, está lleno de agua. En el embudo se sumerge una bola. ¿Cuál debe ser el radio de la bola r, para que el volumen de agua desplazado del embudo por la parte sumergida de la bola sea máximo.

4.39. Determínese la altura mínima $h = |OB|$ de la puerta de una torre vertical $ABCD$, para que pueda llevarse a la torre por esta puerta una varilla rígida MN de longitud l cuyo extremo N se desliza a lo largo de la recta horizontal AB. El ancho de la torre $|AB| = d < l$ (fig. 51).

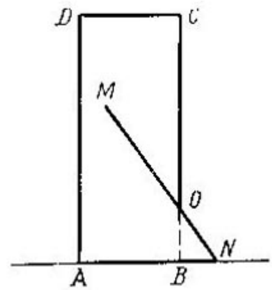

Fig. 51

2. Dirección de convexidad. Puntos de inflexión. La gráfica de una función derivable $y = f(x)$ se dice *convexa hacia las y negativas* (o *cóncava hacia las y positivas*) en el intervalo (a, b), si el arco de la curva en este intervalo se dispone por arriba de la tangente, trazada a la gráfica de la función $y = f(x)$ en cualquier punto $x \in (a, b)$.

En cambio, si en el intervalo (a, b) toda tangente se dispone por arriba del arco de la curva, entonces la gráfica de la función derivable en dicho intervalo se llama *convexa hacia las y positivas* (o bien *cóncava hacia las y negativas*) (en la fig. 52 la gráfica de la función $y = f(x)$ es convexa hacia las y negativas en el intervalo (a, x_0) y convexa hacia las y positivas, en el intervalo (x_0, b)).

Si la función es dos veces derivable en (a, b) y $f''(x) > 0$, ($f''(x) < 0$), su gráfica es convexa hacia las y negativas (positivas) en este intervalo.

En los casos más sencillos el dominio de definición de la función $f(x)$ puede ser dividido en un número finito de intervalos en los que la dirección de convexidad se mantiene constante. Cada uno de estos intervalos está limitado por puntos en los cuales $f''(x) = 0$, o bien $f''(x)$ no existe. El punto $(x_0, f(x_0))$, en el cual la dirección de convexidad de la gráfica de la función cambia por opuesta, lleva el nombre de *punto de inflexión* (véase fig. 52).

Condición suficiente para la existencia del punto de inflexión. Supongamos que la función $f(x)$ es dos veces derivable en cierto entorno $U_\delta(x_0)$ del punto x_0, en el cual $f''(x_0) = 0$, ó $f''(x_0)$ no existe. Si en este caso la derivada $f''(x)$ tiene en los intervalos $(x_0 - \delta, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta)$ signos opuestos, el punto x_0 será punto de inflexión.

EJEMPLO 2. Hállense los intervalos de convexidad y los puntos de inflexión de la función $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Hallamos la segunda derivada:

$$f''(x)\begin{cases} \dfrac{2(3-x)}{x^4}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ \dfrac{2(x-3)}{x^4}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Por consiguiente, los puntos críticos de la primera derivada son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Además, en los puntos x_1 y x_2 la segunda derivada no existe (en particular, $f''_-(1) = 4$, y $f''_+(1) = -4$), mientras que en el punto x_3 ella es igual a cero.

Obtenemos, pues, cuatro intervalos de convexidad: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$. Analizando el signo de la segunda derivada

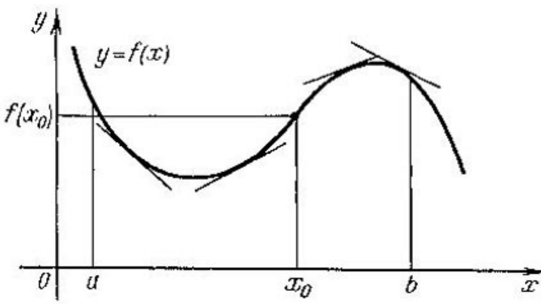

Fig. 52

en cada uno de los intervalos citados deducimos que la gráfica de la función es convexa hacia las y negativas en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(3, +\infty)$ y convexa hacia las y positivas en el intervalo $(1, 3)$. Por consiguiente, los puntos x_2 y x_3 son puntos de inflexión de la gráfica de la función y x_1 no lo es. Los resultados obtenidos pueden reducirse cómodamente en la siguiente tabla:

Tabla 4.2

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f(x)$	$\cup$	$+\infty$	$\cup$	0	$\cap$	$\frac{2}{9}$	$\cup$
$f''(x)$	$+$	no existe	$+$	no existe	$-$	0	$+$

▶

Hállense los intervalos de convexidad de la gráfica de la función $y = f(x)$, los puntos de inflexión y los coeficientes angulares k de las tangentes en los puntos de inflexión:

4.40. $y = x^7 + 7x + 1$. **4.41.** $y = x^4 + 6x^2$.

4.42. $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$. **4.43.** $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

4.44. $y = \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

4.45. $y = xe^{2x} + 1$.

4.46. $y = x \ln |x|$. **4.47.** $y = x^3 \ln x + 1$.

4.48. ¿Para qué valores a y b el punto $(1, 3)$ es un punto de inflexión de la curva $y = ax^3 + bx^2$?

4.49. ¿Para qué parámetro h la *curva de probabilidades*

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}, \quad h > 0,$$

tiene puntos de inflexión con las abscisas $x = \pm 6$?

4.50. Muéstrese que la curva $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ tiene tres puntos de inflexión que se sitúan en una recta.

4.51.* Muéstrese que los puntos de inflexión de la curva $y = x \operatorname{sen} x$ se sitúan en la curva $y^2 (4 + x^2) = 4x^2$.

3. Asíntotas. Supongamos que para la función $y = f(x)$ existe una recta tal que la distancia entre el punto M $(x, f(x))$ de la gráfica de la función y la recta citada tiende a cero, cuando el punto M se aleja indefinidamente del origen de coordenadas. Entonces la recta lleva el nombre de *asíntota* de la gráfica de la función.

Si, en este caso, la coordenada x del punto M tiende hacia un número finito a, la semirecta $x = a$ ($y > 0$ o bien $y < 0$) será asíntota vertical. Para que exista la asíntota vertical en el punto $x = a$, es necesario y suficiente que por lo menos uno de los límites $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ sea igual al infinito.

Las funciones continuas no tienen asíntotas verticales.

En el caso de que la coordenada x del punto M tienda hacia $+\infty$ ó hacia $-\infty$, obtenemos una asíntota oblicua $y = kx + b$, para la existencia de la cual resulta necesaria y suficiente la existencia de dos límites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad y \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b.$$

Los límites mencionados pueden ser distintos para $x \to +\infty$ (en el caso de una asíntota oblicua derecha) y para $x \to -\infty$ (en el caso de una asíntota oblicua izquierda).

EJEMPLO 3. Hállese la asíntota de la gráfica de la función $y = \frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Por cuanto la función es continua en todo el eje, a excepción del punto $x = 0$, la asíntota vertical puede existir sólo en este mismo punto.

Tenemos:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{|x-1|}{x^2} = \lim_{x\to 0-0} \frac{|x-1|}{x^2} = +\infty,$$

y, por consiguiente, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Hallemos las asíntotas oblicuas. Por cuanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{|x-1|}{x^2}}{x} = 0 = k \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{|x-1|}{x^2} - 0\cdot x\right) = 0 = b,$$

la recta $y = 0\cdot x + 0 = 0$ será la asíntota oblicua derecha (horizontal, en el caso dado).

De un modo absolutamente análogo hallamos que la misma recta $y = 0$ es también la asíntota oblicua izquierda. ▶

Hállense las asíntotas de las gráficas de las funciones:

4.52. $y = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$. **4.53.** $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

4.54. $y = \sqrt{|x^2-3|}/x$. **4.55.** $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$.

4.56 $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$. **4.57.** $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

4.58 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$. **4.59.** $y = x \arcsen x$.

4.60. Demuéstrese que la gráfica de una función racional entera $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $n \geqslant 2$, no tiene ninguna asíntota.

4. Construcción de las gráficas de las funciones. Para construir la gráfica de una función $y = f(x)$ con una segunda derivada continua (en todo punto del dominio de definición de la función, a excepción, quizás, de un número finito de puntos) realizamos, primeramente, el análisis elemental que pone de manifiesto ciertas peculiaridades de la función (si se tienen): simetría, periodicidad, constancia del signo, ceros, puntos de intersección con el eje Oy, puntos de discontinuidad, etc. Luego, utilizando las derivadas primera y segunda, hallamos los puntos de extremo y los de inflexión, los intervalos de monotonía y de convexidad, como también las asíntotas.

Ejemplo 4. Constrúyase la gráfica de la función $y = \frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ La función está definida y es continua en todo punto, a excepción del punto $x = 0$, es siempre no negativa y se anula sólo en el punto $x = 1$. El análisis de esta función se ha realizado en los ejemplos del 1 al 3. El resultado de este análisis se reduce cómodamente en una tabla que representa la reunión de las tablas 4.1 y 4.2. La gráfica de la función se da en la fig. 53.

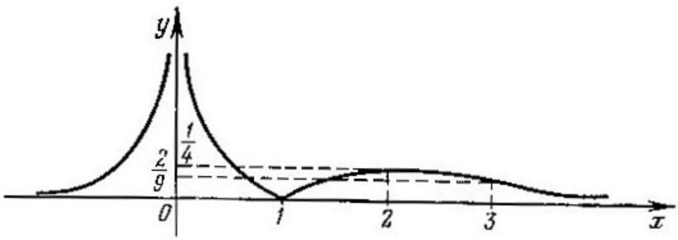

Fig. 53

Constrúyanse las gráficas de las siguientes funciones:

4.61. $y=\frac{(x^2-5)^3}{125}$. **4.62.** $y=\frac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$.

4.63. $y=\frac{1}{6}x^3(x^2-5)$. **4.64.** $y=\frac{x^3}{2(x-1)^2}$

4.65. $y=\frac{x^4}{x^3-1}$. **4.66.** $y=\frac{x^3-3x}{x^2-1}$.

4.67. $y=\frac{x^4}{x^3+1}$. **4.68.** $y=\frac{x}{x^3+2}$.

4.69. $y=\frac{x^3}{x^4-1}$. **4.70.** $y=\frac{x^2}{x^3-1}$.

4.71. $y=\frac{x}{x^2-4}$. **4.72.** $y=\frac{x^3}{x^2-3}$.

4.73. $y=\frac{x}{2-x^3}$. **4.74.** $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. **4.75.** $y=\frac{x^3}{x^3+1}$.

4.76. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$. **4.77.** $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$.

4.78. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

4.79. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$. **4.80.** $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

4.81. $y=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}$.

4.82. $y=\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{x^3-1}$.

4.83. $y=\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$. **4.84.** $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

4.85. $y=\frac{x^3}{3\sqrt[3]{x^3+2}}$. **4.86.** $y=\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$

4.87. $y=\frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}$. **4.88.** $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

4.89. $y=\frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$. **4.90.** $y=\frac{x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$.

4.91. $y=\frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$. **4.92.** $y=\frac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

4.93. $y=\sqrt[3]{|x^2-1|}$. **4.94.** $y=\sqrt{|x^2-2|^3}$.

4.95. $y=\operatorname{sen} x+\cos x$. **4.96.** $y=\frac{1}{\operatorname{sen} x+\cos x}$.

4.97. $y=x \operatorname{arctg} x$. **4.98.** $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arcctg} x$.

4.99. $y=e^{2x-x^2}$. **4.100.** $y=xe^{-x^2/2}$.

4.101. $y=\frac{1}{x}e^{-1/x}$. **4.102.** $y=\frac{1}{x^2}e^{-1/x^2}$.

4.103. $y=xe^{1/x}$. **4.104.** $y=\frac{1}{x}e^{-1/x^2}$.

4.105. $y=(x-2)e^{-1/x}$. **4.106.** $y=(2x-1)e^{2/x}$.
4.107. $y=(x^2+1)^{-x^2/2}$. **4.108.** $y=x^2e^{2/x}$.
4.109. $y=x^3e^{x^2-x/2}$.

4.110. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **4.111.** $y=\frac{\ln x}{x}$.

4.112. $y=\frac{1}{x\ln x}$. **4.113.** $y=x^2\ln x$.

4.114. $y=\frac{\ln x}{x^2}$. **4.115.** $y=x^2\ln^2 x$.

4.116. $y=x^2/\ln|x|$. **4.117.** $y=x\ln^2|x|$.

4.118. $y=\ln|x^2-1|$. **4.119.** $y=\frac{1}{x^2}\ln^2|x|$.

4.120. $y=x^x$, $x>0$. **4.121*.** $y=x^{1/x}$, $x>0$.

4.122. $y=(1+x)^{1/x}$, $x>-1$. **4.123*.** $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Constrúyanse las curvas definidas en la forma paramétrica:

4.124. $x=te^t$, $y=te^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$.

◀ Realicemos ciertos cálculos auxiliares:

$$x'_t = (1+t)\,e^t, \quad y'_t = (1-t)\,e^{-t}, \quad y'_x = \frac{1-t}{1+t}\,e^{-2t},$$

$$x''_{tt} = (2+t)\,e^t, \quad y''_{tt} = (t-2)\,e^{-t}, \quad y''_{xx} = 2\,\frac{t^2-2}{(1+t)^3}\,e^{-3t}.$$

Dado que, para $t=-1$ y $x''_{tt}(-1) = \frac{1}{e} > 0$, $x'_t = 0$, entonces $x_{\text{mín}} = -\frac{1}{e}$. Dado que, para $t=1$ e $y''_{tt}(1) = -\frac{1}{e} < 0$, $y'_t = 0$, entonces $y_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$. De aquí se deduce que la curva está dispuesta en el campo $\left\{(x, y) \,|\, x \in \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right),\ y \in \left(-+\infty,\ \frac{1}{e}\right]\right\}$.

De la expresión para la derivada y'_x determinamos los puntos críticos $t_1 = 1$ ($y'_x(1) = 0$ y $t_2 = -1$ ($y'_x(-1)$ no existen). Los puntos críticos de la primera derivada los hallamos a partir de la expresión para la segunda derivada y''_{xx}: $t_3 = \sqrt{2}$ ($y''_{xx}(\sqrt{2}) = 0$), $t_4 = -\sqrt{2}$ ($y''_{xx}(-\sqrt{2}) = 0$) y $t_5 = -1$ ($y''_{xx}(-1)$ no existe). Por consiguiente, $A\,(-\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}},\ -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$ y $B\,(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}/e^{\sqrt{2}})$ son los puntos de inflexión.

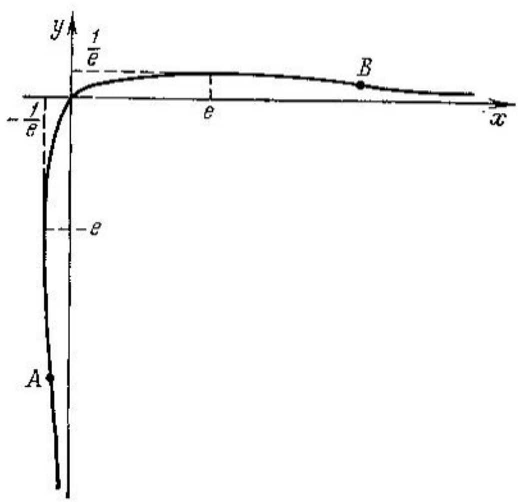

Fig. 54

Por fin, hallamos las asíntotas. Si $t \to -\infty$, entonces $x \to 0$ e $y \to -\infty$, es decir, $x = 0$ es la asíntota vertical. Indiquemos que

Tabla 4.3

t	x	y	y'_x	y''_{xx}	Comportamiento de la curva
$(-\infty, -\sqrt{2})$	<0	<0	>0	<0	Es convexa hacia las y positivas, monótona decreciente; $x=0$ es la asíntota vertical
$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{e\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2e}^{\sqrt{2}}$	—	>0	Punto de inflexión
$(-\sqrt{2}, -1)$	<0	<0	>0	>0	Es convexa hacia las y negativas, monótona decreciente
-1	$-\frac{1}{e}$	$-e$	no existe	no existe	Punto de retroceso
$(-1, 1)$	—	—	>0	<0	Es convexa hacia las y positivas, monótona creciente, el punto $(0, 0)$ se sitúa en la curva
1	e	$\frac{1}{e}$	0	—	Máximo
$(1, \sqrt{2})$	>0	>0	<0	<0	Es convexa hacia las y positivas, monótona decreciente
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$	—	0	Punto de reflexión
$(\sqrt{2}, +\infty)$	>0	>0	<0	>0	Ex convexa hacia las y negativas, monótona decreciente; $y=0$ es la asíntota horizontal

cuando los puntos de la curva se aproximan hacia dicha asíntota, sus coordenadas respecto de x quedan negativas. Si $t \to +\infty$, entonces $x \to +\infty$, mientras que $y \to 0$, es decir, $y = 0$ es la asíntota horizontal. Al aproximarse hacia esta asíntota, los puntos de la curva tienen coordenada positiva respecto de y.

Los resultados del análisis se reúnen en una tabla (tabla 4.3) y las deducciones necesarias se apuntan en su columna derecha.

Ha de notarse que la contradicción aparente entre el carácter positivo de la primera derivada y el decrecimiento monótono de la función para $t < -1$ se debe a que al variar el parámetro t de $-\infty$ hasta -1, los valores de x varían de 0 hasta $-1/e$ (es decir, decrecen). La curva se expone en la fig. 54. ▶

4.125. $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.
4.126. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$.
4.127. $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\,t$, $t \in [0, 2\pi)$.
4.128. $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6\,\mathrm{arctg}\,t$, $t \in \mathbb{R}$.

Constrúyanse las siguientes curvas dadas en el sistema de coordenadas polares:

4.129. $r = a\,\mathrm{sen}\,3\varphi$. **4.130.** $r = a\,(1 + \cos\varphi)$.

4.131. $r = \sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$, **4.132.** $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.

§ 5. Funciones vectoriales y complejas de una variable real

1. Definición de la función vectorial de una variable real. Si a cada valor de la variable real $t \in D \subset \mathbb{R}$ se le ha puesto en correspondencia un vector $\boldsymbol{a}(t) \in \mathscr{V}_3$, se dice que sobre el conjunto D está dada una *función vectorial* de la variable real $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$.

La definición de una función vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ es equivalente a la definición de tres funciones escalares $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ que representan las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = a_x(t)\,\boldsymbol{i} + a_y(t)\,\boldsymbol{j} + a_z(t)\,\boldsymbol{k},$$

o bien, en la forma más breve, $\boldsymbol{a} = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$. Si $\boldsymbol{a}$ es el radio vector del punto $M(x, y, z)$, entonces la función vectorial correspondiente se designará:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}.$$

Se denomina *hodógrafo* de la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ una línea circunscrita en el espacio por el extremo del vector $\boldsymbol{r}$. Cualquier línea en el espacio puede considerarse como hodógrafo de cierto vector. Las ecuaciones paramétricas de un hodógrafo son:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

EJEMPLO 1. Hállese el hodógrafo de la función vectorial

$$r(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,i+\frac{2t}{1+t^2}\,j+k, t\in\mathbb{R}.$$

◀ Tenemos las ecuaciones paramétricas del hodógrafo

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2},\quad z=1.$$

Eliminando el parámetro t, obtendremos

$$x^2+y^2=\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=1.$$

Por consiguiente, el hodógrafo de la función vectorial $r(t)$ es la circunferencia

$$x^2+y^2=1,\quad z=1,$$

de la que está excluido el punto $(-1, 0, 1)$. Al variar t de $-\infty$ hasta $+\infty$, el punto $M(x, y, z)$ en el hodógrafo se desplaza desde el punto $(-1, 0, 1)$ en sentido antihorario (si se observa de un punto dispuesto por arriba del plano $z=1$), siendo en este caso $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x=-1$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y=0$. ▶

Hállense los hodógrafos de las funciones vectoriales:

5.1. $r=(2t-1)i+(-3t+2)j+4tk$, $t\in\mathbb{R}$.

5.2. $r=\sqrt{1-t^2}\,i+\sqrt{1+t^2}\,j$, $t\in[0, 1]$.

5.3. $r=4\operatorname{ch} t\cdot i-j+3\operatorname{sh} t\cdot k$, $t\in\mathbb{R}$.

5.4. $r=3ti+(2t-t^2)j$, $t\in\mathbb{R}$.

5.5. $r=\cos t\cdot i+\operatorname{sen} t\cdot j+tk$, $t\in\mathbb{R}$.

5.6. $r=2\cos^3 t\cdot i+2\operatorname{sen}^3 t\cdot j$, $t\in[0, 2\pi]$.

5.7. $r=ti+t^2j+t^3k$, $t\in\mathbb{R}$.

5.8. $r=\cos^2 t\cdot i+\operatorname{sen} t\cos t\cdot j+\operatorname{sen} t\cdot k$, $t\in[0, 2\pi]$.

5.9. $r=5\cos t\cdot i+4\operatorname{sen} t\cdot j+2k$, $t\in[0, 2\pi]$.

5.10. $r=(\operatorname{sh} t-1)\,i+\operatorname{ch}^2 t\cdot j+3k$, $t\in\mathbb{R}$.

2. Derivación de la función vectorial. Se denomina *derivada de la función vectorial* $a=a(t)$ respecto del argumento t la nueva función vectorial

$$\frac{da}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a(t+\Delta t)-a(t)}{\Delta t}$$

Si $a(t)=(a_x(t), a_y(t), a_z(t))$, entonces

$$\frac{da}{dt}=\left(\frac{da_x(t)}{dt}, \frac{da_y(t)}{dt}, \frac{da_z(t)}{dt}\right).$$

Si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces la derivada $\frac{d\boldsymbol{r}}{dr}$ será un vector dirigido a lo largo de la tangente al hodógrafo de la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ hacia el lado de crecimiento del argumento t.

Si t es el tiempo, $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$ será un vector de la velocidad del extremo del vector $\boldsymbol{r}$.

REGLAS DE DERIVACIÓN DE LA FUNCIÓN VECTORIAL. ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t)$).

1) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}) = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \pm \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$.

2) $\frac{d}{dt}(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, donde α es un escalar constante.

3) $\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} = 0$, donde $\boldsymbol{c}$ es un vector constante.

4) $\frac{d}{dt}(\varphi\boldsymbol{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{a} + \varphi\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, donde $\varphi = \varphi(t)$ es una función escalar de t.

5) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}\right) + \left(\boldsymbol{a}\, \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right)$

6) $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \boldsymbol{b}\right] + \left[\boldsymbol{a}, \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right]$.

7) $\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(\varphi(t)) = \frac{d\boldsymbol{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, donde $\varphi = \varphi(t)$ es una función escalar de t.

8) $\left(\boldsymbol{a}, \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right) = 0$, si $|\boldsymbol{a}| = \text{const}$.

5.11. Dada la ecuación de movimiento $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$, determínense la trayectoria y la velocidad del movimiento.

5.12. Sea dada la ecuación de movimiento $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} + (4t - t^2)\boldsymbol{j}$. Determínense la trayectoria y la velocidad del movimiento. Constrúyanse los vectores de la velocidad para los instantes $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$.

5.13. Sea dada la ecuación de movimiento $\boldsymbol{r} = 2(t - \operatorname{sen} t)\,\boldsymbol{i} + 2(1 - \cos t)\,\boldsymbol{j}$. Determínense la trayectoria y la velocidad del movimiento. Constrúyanse los vectores de la velocidad para los instantes $t = \pi/2$, $t = \pi$.

5.14. Hállese el vector tangente unidad del hodógrafo de la función vectorial $\boldsymbol{r} = e^{2t}\,\boldsymbol{i} - (t + 8)^{4/3}\,\boldsymbol{j}$ para $t = 0$.

5.15. Hállese el vector tangente unidad del hodógrafo de la función vectorial $\boldsymbol{r} = (t^3 + t)\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}$ para $t = -1$.

5.16. Hállense las derivadas de las funciones vectoriales:

a) $\boldsymbol{r} = \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{i} + \cos^2 t \cdot \boldsymbol{j} + \operatorname{sen} t \cos t \cdot \boldsymbol{k}$;

b) $\boldsymbol{r} = t \cos t \cdot \boldsymbol{i} + t \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$;

c) $\boldsymbol{r} = (t + \cos t)\, \boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{k}$.

5.17. Hállense las derivadas de las funciones vectoriales:

a) $\boldsymbol{r} = e^t \boldsymbol{i} + \cos t \cdot \boldsymbol{j} + (t^2 + 1)\boldsymbol{k}$ en el punto $(1, 1, 1)$;

b) $\boldsymbol{r} = t^3\boldsymbol{i} + (t+1)^2\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\,\boldsymbol{k}$ para $t = -2$.

5.18. Hállese $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, si

$\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$.

5.19. Hállese $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$.

5.20. Hállese $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, si $\boldsymbol{a} = u\boldsymbol{i} + u^2\boldsymbol{j} + u^3\boldsymbol{k}$, donde $u = \operatorname{sen} t$.

3. Tangente a una curva espacial y a un plano normal. La ecuación de la tangente a una curva espacial $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, al cual corresponde el valor del parámetro t_0, tiene la forma

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}}$$

donde x, y, z son las coordenadas corrientes del punto de tangencia. La ecuación del plano normal en el mismo punto es:

$$(x - x_0)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} + (y - y_0)\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} + (z - z_0)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} = 0.$$

EJEMPLO 2. Demuéstrese que una tangente a la línea helicoidal $\boldsymbol{r} = (a\cos t,\ a \operatorname{sen} t,\ bt)$ forma con el eje Oz un ángulo constante.

◀ Hallemos el vector que sea tangente al hodógrafo del vector $\boldsymbol{r}$:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-a \operatorname{sen} t,\ a\cos t,\ b).$$

De aquí

$$\cos\gamma = \frac{z'(t)}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

es decir, $\gamma = \text{const.}$ ▶

EJEMPLO 3. Escríbanse las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva $x = t^2 - 1$, $y = t + 1$, $z = t^3$ en el punto $M_0(0, 2, 1)$.

◀ Al punto dado le corresponde el valor del parámetro $t = 1$. Tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 3t^2.$$

Sustituyendo el valor de $t=1$, obtenemos

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=1, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}=1, \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1}=3.$$

La ecuación de la tangente:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}$$

La ecuación del plano normal:

$$2(x-0)+1\cdot(y-2)+3(z-1)=0,$$

o bien

$$2x+y+3z-5=0. \blacktriangleright$$

Para cada una de las curvas que siguen escríbanse la ecuación de la tangente y la del plano normal en el punto dado:

5.21. $x=4\operatorname{sen}^2 t$, $y=4\operatorname{sen} t\cos t$, $z=2\cos^2 t$ para $t=\pi/4$.

5.22. $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=\frac{1}{3}t^3$, $z=\frac{1}{4}t^4$ para $t=2$.

5.23. $x=a\operatorname{ch} t$, $y=a\operatorname{sh} t$, $z=at$ para $t=0$.

5.24. $x^2+y^2=10$, $y^2+z^2=25$ en el punto $M_0(1, 3, 4)$.

5.25. $2x^2+3y^2+z^2=9$, $3x^2+y^2-z^2=0$ en el punto $M_0(1, -1, 2)$.

4. Segunda derivada de la función vectorial. Si

$$r=r(t)=(x(t), y(t), z(t)),$$

se tiene

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)=\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Si t es el tiempo, entonces $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=w$ es el vector de la aceleración del extremo del vector r.

Supongamos que una curva en el plano Oxy representa el hodógrafo de la función vectorial $r=r(s)=(x(s), y(s))$, donde s es la longitud del arco de la curva.

Se llama *curvatura* de la curva en el punto M_0 el número

$$K=\left|\lim_{M\to M_0}\frac{\varphi}{\Delta s}\right|,$$

donde φ es el ángulo de giro de la tangente correspondiente al arco $\overset{\frown}{M_0M}$ (fig. 55) de la curva dada, y Δs es la longitud de dicho arco. La magnitud $R=1/K$ se denomina *radio de curvatura*.

La curvatura K se define por la relación

$$K=\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|.$$

Las fórmulas para calcular la curvatura son: 1) si una curva viene definida mediante la ecuación en la forma explícita $y=f(x)$, entonces

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|;$$

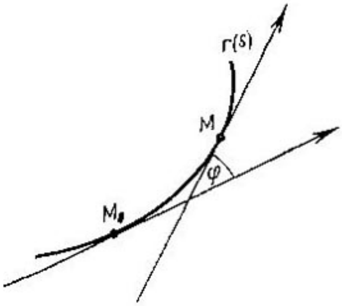

Fig. 55

2) si una curva está dada mediante la ecuación en la forma implícita*) $F(x, y)=0$, entonces

$$K=\left|\frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x+F'^2_y)^{3/2}}\right|;$$

3) si una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y=y(t)$, entonces

$$K=\left|\frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}\right|;$$

4) si una curva está dada en las coordenadas polares por la ecuación $r=r(\varphi)$, entonces

$$K=\left|\frac{r^2+2r'^2-rr'}{(r^2+r'^2)^{3/2}}\right|.$$

Se denomina *círculo osculador* de una curva en su punto M una posición límite de la circunferencia trazada por el punto M y otros dos puntos de la curva P y Q, cuando $P\to M$ y $Q\to M$.

El radio del círculo osculador es igual al radio de curvatura y el centro del círculo osculador (*centro de curvatura*), correspondiente al punto M, se encuentra en la normal a la recta trazada en el punto M en dirección de la convexidad de la curva.

Las coordenadas X e Y del centro de curvatura son

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\qquad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Se llama *evoluta* de una curva una línea circunscrita por el centro de curvatura cuando dicho punto se mueve por la curva. Las fórmulas para las coordenadas del centro de curvatura determinan las ecuaciones paramétricas de la evoluta.

*) Aquí se usan las derivadas parciales de una función de dos variables; véase la definición en el p. 3, § 1, Cap. 7.

EJEMPLO 4. Hállese la ecuación de la evoluta de una parábola $y^2 = 2(x+1)$.

◀ Tenemos $2yy' = 2$, es decir, $y' = \frac{1}{y}$. Luego de realizar la derivación reiterada, obtenemos $y'^2 + yy' = 0$, de donde $y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{y^3}$. Hallamos las coordenadas del centro de curvatura:

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = \frac{y^2}{2} - 1 - \frac{\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}{-1/y^3} = \frac{3}{2}y^2,$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{y^2}}{-1/y^3} = -y^3;$$

de modo que quedan determinadas las ecuaciones paramétricas de la evoluta:

$$X = \frac{3}{2}y^2, \quad Y = -y^3.$$

Eliminando el parámetro y, hallamos la ecuación de la evoluta en la forma

$$Y^2 = \frac{8}{27}X^3. ▶$$

5.26. Hállense las segundas derivadas de las funciones vectoriales:

a) $\boldsymbol{r} = \cos t \cdot \boldsymbol{i} + e^t \boldsymbol{j} + (t^2+1)\boldsymbol{k}$.

b) $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t\cos t \cdot \boldsymbol{j} + t \operatorname{sen} t \cdot \boldsymbol{k}$

para t arbitrario y $t = 0$.

5.27. Sea dada la ecuación de movimiento: $\boldsymbol{r} = 2(t - \operatorname{sen} t)\boldsymbol{i} + 2(1 - \cos t)\boldsymbol{j}$. Determínese la aceleración del movimiento. Constrúyanse los vectores de la aceleración para los instantes $t = \pi/2$, $t = \pi$.

5.28*. Sea dada la ecuación de movimiento: $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} + (4t - t^2)\boldsymbol{j}$. Determínense la aceleración w de movimiento y los componentes de ésta, tangencial w_τ y normal w_n, en cualquier instante t y para $t = 0$.

5.29. Sea dada la ecuación de movimiento: $\boldsymbol{r} = {}^1/_2\, t^2\boldsymbol{i} + {}^1/_3\,(2t+1)^{3/2}\boldsymbol{j}$. Determínense la aceleración de movimiento y sus componentes tangencial y normal en cualquier instante t y para $t = 0$.

Calcúlese la curvatura de la curva dada:

5.30. $y = x^2$ en el origen de coordenadas y en el punto $M(1, 1)$.

5.31. $x^2 + 9y^2 = 9$ en los vértices de una elipse A (3, 0) y B (0, 1).

5.32. $x^2 - xy + y^2 = 1$ en el punto M (1, 1).

5.33. $x = t^2$, $y = t - {}^1/_3\, t^3$ para $t = 1$.

5.34. $x = {}^1/_2\, t^2$, $y = {}^1/_3\, t^3$ en el punto M (${}^1/_2$, ${}^1/_3$).

5.35. $r = a\,(1 - \cos\varphi)$ en cualquier punto y para $\varphi = \pi$.

5.36. $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi$ para $\varphi = \pi/4$.

Hállense los radios de curvatura (en cualquier punto) de las curvas dadas:

5.37. $y = \sqrt[3]{x}$. 5.38. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5.39. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. 5.40. $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$.

5.41. $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

5.42. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. 5.43. $y = a\,\varphi$.

5.44*. Se llama *vértice* de una curva un punto suyo tal que la curvatura en él alcanza su máximo o mínimo. Hállese el vértice de la curva $y = e^{-x}$.

5.45. Hállese el vértice de la curva $y = \ln x$.

Calcúlense las coordenadas de los centros de curvatura y escríbanse las ecuaciones de los círculos osculadores de las curvas dadas en los puntos indicados:

5.46. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ en el punto M (0, a).

5.47. $y = e^{-x^2}$ en el punto M (0, 1).

5.48. $y = xe^x$ en el punto M (—1, —$1/e$).

5.49. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto M ($\pi/2$, 1).

5.50. $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ en el punto M (πa, $2a$).

Hállense las evolutas de las curvas:

5.51. $y = x^3$. 5.42. $x^2 - y^2 = a^2$.

5.53. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

5.54. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

5.55. $x = 2t$, $y = t^2 - 2$.

5. Características diferenciales de las curvas espaciales. En todo punto regular M (x, y, z) de una curva espacial $r = r\,(t)$ se pueden construir tres vectores recíprocamente perpendiculares:

$$T = \frac{dr}{dt} \text{ (vector director de la \textit{tangente})},$$

$$B = \left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}\right] \text{ (vector director de la \textit{binormal})},$$

$N = [B, T]$ (vector de la *normal principal*)
o bien *vectores unidad* básicos que les corresponden:

$$\tau = \frac{T}{|T|}, \quad \beta = \frac{B}{|B|}, \quad \nu = \frac{N}{|N|},$$

que pueden calcularse también según las fórmulas:

$$\tau = \frac{dr}{ds}, \quad \nu = \frac{d\tau}{ds} \Big/ \left| \frac{d\tau}{ds} \right|, \quad \beta = [\tau, \nu]$$

Un triedro que tiene su vértice en el punto M_0 y cuyas aristas están representadas por la tangente, la binormal y la normal principal, lleva el nombre de *triedro intrínseco* de una curva espacial. Las caras de dicho triedro son los planos: *osculador* (pasa por los vectores T y N), *normal* (pasa por los vectores N y B), *rectificante* (pasa por los vectores B y T).

Las ecuaciones de la normal principal son de la forma

$$\frac{x - x_0}{N_x} = \frac{y - y_0}{N_y} = \frac{z - z_0}{N_z},$$

donde x, y, z son coordenadas corrientes del punto de la normal principal; N_x, N_y, N_z son las coordenadas del vector N.

La ecuación de la binormal es:

$$\frac{x - x_0}{B_x} = \frac{y - y_0}{B_y} = \frac{z - z_0}{B_z}.$$

La ecuación del plano osculador es:

$$B_x (x - x_0) + B_y (y - y_0) + B_z (z - z_0) = 0.$$

La ecuación del plano rectificante es:

$$N_x (x - x_0) + N_y (y - y_0) + N_z (z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 5. Hállense los vectores unidad básicos τ, ν y β de la curva $x = 1 - \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = t$ en el punto M, al cual corresponde el valor del parámetro $t = 0$. Escríbanse las ecuaciones de la tangente, de la normal principal y de la binormal en el punto citado.

◀ Tenemos

$$r = (1 - \operatorname{sen} t)\, i + \cos t \cdot j + tk,$$

$$\frac{dr}{dt} = -\cos t \cdot i - \operatorname{sen} t \cdot j + k,$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \operatorname{sen} t \cdot i - \cos t \cdot j.$$

Para $t=0$ obtendremos

$$T=\frac{dr}{dt}=-i+k, \qquad \frac{d^2r}{dt^2}=-j,$$

$$B=\left[\frac{dr}{dt},\ \frac{d^2r}{dt^2}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=i+k,$$

$$N=[B,\ T]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2j.$$

Por consiguiente,

$$\tau+\frac{-i+k}{\sqrt{2}}, \qquad \nu=-j, \qquad \beta=\frac{i+k}{\sqrt{2}}.$$

Por cuanto, para $t=0$, tenemos $x=1$, $y=1$, $z=0$, entonces:

$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$ es la ecuación de la tangente;

$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{0}$ es la ecuación de la normal principal;

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$ es la ecuación de la binormal. ►

Si una curva espacial viene dada como una intersección de dos superficies

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z)=0, \\ G(x,\ y,\ z)=0, \end{cases}$$

entonces resulta más cómodo operar con los vectores $dr=(dx,\ dy,\ dz)$ y $d^2r=(d^2x,\ d^2y,\ d^2z)$ en lugar de los vectores $\frac{dr}{dt}$, y $\frac{d^2r}{dt^2}$, además una de las variables x, y, z puede considerarse independiente y su segunda diferencial, igual a cero.

Ejemplo 6. Escríbanse las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante de la curva

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x^2-y^2+z^2=4 \end{cases}$$

en su punto $M(1,\ 1,\ 2)$.

◄ Derivando las ecuaciones dadas y considerando x como una variable independiente, obtendremos:

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0,$$

$$x\,dx-y\,dy+z\,dz=0$$

y

$$dx^2 + dy^2 + yd^2y + dz^2 + zd^2z = 0,$$
$$dx^2 - dy^2 - yd^2y + dz^2 + zd^2z = 0.$$

Para $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ tenemos:

$$dy = 0, \qquad dz = -\frac{1}{2}\,dx,$$

$$d^2y = 0, \qquad d^2z = -\frac{3}{8}\,dx^2.$$

Por consiguiente,

$$d\boldsymbol{r} = \left(dx,\ 0,\ -\frac{1}{2}\,dx\right), \qquad d^2\boldsymbol{r} = \left(0,\ 0,\ -\frac{3}{8}\,dx^2\right).$$

Sustituyamos estos vectores por los vectores que les son colineale (2, 0, −1) y (0, 0, −1), de donde

$$\boldsymbol{T} = (2,\ 0,\ -1)$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{N} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(-\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}).$$

De aquí hallamos:

$y - 1 = 0$, la ecuación del plano osculador;

$2x - z = 0$, la ecuación del plano normal;

$x + 2z - 5 = 0$, la ecuación del plano rectificante. ▶

Hállense los vectores unidad básicos $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ y fórmense las ecuaciones de la tangente, de la normal principal y de la binormal de las curvas dadas:

5.56. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t$ para $t = 0$.

5.57. $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \operatorname{sen} \frac{t}{2}$ para $t = \pi$.

5.58. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$ para $t = 1$.

5.59. $y = x$, $z = 2x^2$ en el punto $x = 1$.

5.60. Escríbanse las ecuaciones de los planos que forman un triedro intrínseco de la curva $x = t^2 + 1$, $y = \cos t$, $z = e^t$ en el punto (1, 1, 1).

5.61. Escríbanse las ecuaciones de los planos que forman un triedro intrínseco de la curva $x = t/\sqrt{2}$, $y = t/\sqrt{2}$, $z = \ln \operatorname{sen} t$ para $t = \pi/2$.

5.62. Hállense los vectores $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ y escríbanse las ecuaciones de todas las aristas y de todos los planos que forman un triedro intrínseco de la curva $x = (t+1)^2$, $y = t^3$, $z = \sqrt{t^2+1}$ en el punto (1, 0, 1).

5.63.ª Hállense los vectores, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ y escríbanse las ecuaciones de todas las aristas y de todos los planos que forman un triedro intrínseco de la curva

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ x+2y-z=2 \end{cases} \quad \text{en el punto } (1,\ 2,\ 3).$$

La *curvatura* de una curva espacial se determina igual que la de una curva plana. Si la curva viene dada mediante la ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, entonces

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \right|$$

En el caso de la definición paramétrica general de una curva tenemos

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left| \left[\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \right] \right|}{\left| \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right|^3}$$

Se llama *torsión* (*curvatura de torsión*) de una curva espacial en el punto M el número

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \lim_{N \to M} \frac{\theta}{\Delta s},$$

donde θ es el ángulo de giro de la binormal, correspondiente al arco $\overset{\frown}{MN}$. La magnitud ρ se denomina *radio de torsión* o *radio de la curvatura de torsión*.

Si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, se tiene

$$\sigma = \mp \left| \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} \right| = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds} \cdot \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \cdot \dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}}{\left| \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \right|^2},$$

donde el signo menos se elige en el caso, cuando los vectores $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ y $\boldsymbol{\nu}$ tienen orientación igual y el signo más, en el caso contrario.

Si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, donde t es un parámetro arbitrario, entonces

$$\sigma = \frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot \dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}}{\left| \left[\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \right] \right|^2}.$$

EJEMPLO 7. Hállense la curvatura y la torsión de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, $z = e^t$ en cualquier punto

◀ Tenemos

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r} = (e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t),\\
&\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (e^t(\cos t - \operatorname{sen} t),\ e^t(\operatorname{sen} t + \cos t),\ e^t),\\
&\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = (-2e^t \operatorname{sen} t,\ 2e^t \cos t,\ e^t),\\
&\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3} = (2e^t(\operatorname{sen} t + \cos t),\ 2e^t(\cos t - \operatorname{sen} t),\ e^t).
\end{aligned}$$

De aquí

$$\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) & e^t\\ -2e^t \operatorname{sen} t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2t}(\operatorname{sen} t - \cos t,\ -(\operatorname{sen} t + \cos t),\ 2),$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\cdot\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3} = \begin{vmatrix} e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) & e^t\\ -2e^t \operatorname{sen} t & 2e^t \cos t & e^t\\ -2e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) & 2e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) & e^t \end{vmatrix} = 2e^{3t}.$$

Por consiguiente,

$$K = \frac{e^{2t}\sqrt{(\operatorname{sen} t - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 4}}{e^{3t}\sqrt{((\operatorname{sen} t - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 1)^3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t},$$

$$\sigma = \frac{2e^{3t}}{e^{4t}((\operatorname{sen} t - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 + 4)} = \frac{e^{-t}}{3}. \ ▶$$

Calcúlense la curvatura y la torsión de las curvas:

5.64. $x = e^t$ $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ en cualquier punto y para $t = 0$.

5.65. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en cualquier punto y para $t = 0$.

5.66. $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z\ 3t + t^3$, en cualquier punto y para $t = 1$.

5.67. $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$, en cualquier punto y para $t = 1$.

5.68. $y = \dfrac{x^2}{2}$, $z = \dfrac{x^3}{3}$ para $x = 1$.

5.69. $2x = y^2$, $z = x^2$ en cualquier punto y para $y = 1$.

5.70*. Sea dada la ecuación de movimiento $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}t^3\boldsymbol{k}$.

Hállense la aceleración w del movimiento, los componentes tangencial w_τ y normal w_ν de la aceleración en cualquier instante t y $t = 1$.

6. **Funciones complejas de una variable real.** Si a cada valor de la variable real $t \in D \subset \mathbb{R}$ se le ha puesto en correspondencia determinado número complejo $z = x + iy$, entonces $z(t)$ se llamará *función compleja de la variable real* t con el campo de definición D:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t).$$

La definición de la función compleja $z = z(t)$ es equivalente a la definición de dos funciones reales $x = x(t)$, $y = y(t)$, o bien a la definición de una función vectorial $r(t) = (x(t), y(t))$.

Se denomina *derivada* de la función compleja $z(t)$ una función compleja $z'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta z(t, \Delta t)}{\Delta t} = x'(t) + iy'(t)$. Para las funciones complejas de una variable real son válidas las reglas corrientes de derivación (véase el p. 1, § 1).

EJEMPLO 8. Hállense una curva, que se define por la función $z = t^2 + it$, $t \in (-\infty, +\infty)$, y la derivada de dicha función.

◀ Si $z = x + iy$, se tiene $x = t^2$, $y = t$. La curva buscada será una parábola $y^2 = x$. Hallamos la derivada de la función dada $z' = 2t + i$. ▶

Constrúyanse las curvas, definidas por las ecuaciones $z = z(t)$, y hállese $z'(t)$:

5.71.* $z = 1 - i + te^{i\frac{\pi}{4}}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.
5.72. $z = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
5.73. $z = 3e^{it} + e^{-it}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.
5.74. $z = (2 + i)e^t + (2 - i)e^{-t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.
5.75. $z = t^2 + it^4$, $t \in (-\infty, +\infty)$.
5.76. $z = t + i - ie^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
5.77. $z = ae^{it}(1 - it)$, $a \in \mathbb{R}$, $t \in (-\infty +\infty)$.
5.78. $z = e^{(\alpha + i\beta)t}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.
5.79.* Se sabe que $z = z(t)$ define la ley del movimiento de un punto en un plano. Hállense los componentes de la velocidad y de la aceleración en dirección de la tangente a la curva $z = z(t)$ y en dirección perpendicular a la primera.
5.80. * Un punto z recorre una circunferencia $|z| = R$ a la velocidad angular constante igual a la unidad. Hállese el vector de la velocidad del punto w que se mueve junto con z según la ley $w = f(z)$.

§ 6. Métodos numéricos de la función de una sola variable

1. Resolución numérica de las ecuaciones. Una raíz $\xi \in (a, b)$ de la ecuación $f(x) = 0$ *está aislado* en el segmento $[a, b]$, si en dicho segmento no hay otras raíces de la ecuación mencionada. El segmento $[a, b]$ recibe el nombre de *segmento de aislación de la raíz.*

MÉTODO DE CUERDAS. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ de aislación de la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ se cumplen las condiciones:

a) las funciones $f(x)$, $f'(x)$, y $f''(x)$ son continuas;

b) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

c) las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ no cambian de signo.

Definamos los números x_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mediante las igualdades

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} - \dfrac{(x_{n-1} - a) f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}, & x_0 = b, \quad \text{si} \quad f(a) \cdot f(x_1) < 0, \\ x_{n-1} - \dfrac{(b - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}, & x_0 = a, \quad \text{si} \quad f(a) \cdot f(x_1) \geqslant 0. \end{cases}$$

Entonces, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia la raíz ξ cuando $n \to \infty$, y para todos los números naturales n se cumplen las desigualdades

$$| x_n - \xi | \leqslant \frac{| f(x_n) |}{m},$$

$$| x_n - \xi | \leqslant \frac{M - m}{m} | x_n - x_{n-1} |,$$

donde $m = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} | f'(x) |$ y $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} | f'(x) |$.

EJEMPLO 1. Hállense las raíces de la ecuación

$$x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$$

empleando el método de cuerdas con una exactitud de hasta 0,0001.

◀ Habiendo construido las gráficas de las funciones $y = \operatorname{arctg} x$ e $y = 1/x$, concluimos, según la disposición de los puntos de intersección, que la citada ecuación tiene dos raíces ξ_1 y ξ_2, iguales en valor absoluto y distintos por su signo. Hallemos la raíz positiva ξ_1, eligiendo el segmento $[1, \sqrt{3}]$ como segmento de aislación de dicha raíz. Para la función $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - 1$ tenemos

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2}, \qquad f''(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}$$

y

$$f(1) \cdot f(\sqrt{3}) = \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 \right) = -0{,}2146019 \cdot 0{,}8137992 < 0,$$

por lo cual las condiciones a), b) y c) quedan cumplidas. Por cuanto $f''(x) > 0$ cuando $x \in [1, \sqrt{3}]$, entonces $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, donde

$$m = f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = 1,2853981,$$

$$M = f'(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1,4802102,$$

y $\dfrac{M-m}{m} = 0,1515577$. Con el fin de determinar el signo del producto $f(1) \cdot f(x_1)$, hallemos x_1. Dado que

$$x_1 = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1) f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1,1527608,$$

los números x_n se deben calcular según la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(\sqrt{3} - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(\sqrt{3}) - f(x_{n-1})}.$$

Reunamos los cálculos en una tabla:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n	$\frac{M-m}{m}(x_n - x_{n-1})$
1	1	−0,2146019	−0,1527608	1,1527608	0,023152
2	1,1527608	−0,0129601	−0,0090807	1,1618415	0,0013762
3	1,1618415	−0,0006758	−0,000473	1,1623145	0,0000716

La última columna determina el error absoluto límite*). De este modo, $\xi_1 = 1,1623 \pm 0,0001$ y $\xi_2 = -1,1623 \pm 0,0001$. ▶

MÉTODO DE LAS TANGENTES. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ de aislación de la raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ se cumplen las condiciones a), b) y c), mencionadas más arriba, y los números x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) se determinan por la ecuación

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

siendo

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{si } f(a) \cdot f(c) < 0, \\ b, & \text{si } f(a) \cdot f(c) > 0, \\ c, & \text{si } \quad f(c) = 0, \end{cases}$$

*) Aquí y en todos los problemas de cálculo que se dan ulteriormente, los cálculos intermedios se realizan con un número de signos decimales asegurado por la computadora electrónica que se emplea.

donde

$$c = a - \frac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

En este caso la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia la raíz ξ cuando $n \to \infty$, y para todos los números naturales n se verifican las desigualdades

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} \quad \text{y} \quad |x_n - \xi| \leqslant \frac{M_1}{2m}(x_n - x_{n-1})^2,$$

donde

$$m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|, \quad M_1 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|.$$

EJEMPLO 2. Hállese la raíz positiva de la ecuación $x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$, empleando el método de las tangentes con una exactitud de hasta 0,0001.

◀ Al igual que en el ejemplo antecedente, el segmento $[1, \sqrt{3}]$ será el de aislación. Por cuanto para la función $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - 1$ tenemos $c = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1) f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1{,}1527608 > 0$, entonces los números x_n se calculan conforme a la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad x_0 = \sqrt{3}.$$

Las funciones $f'(x)$, $f''(x)$ y el valor de $m = 1{,}2853981$ se han hallado en el ejemplo 1. Luego, $M_1 = f''(1) = 0{,}25$, puesto que $f'''(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^3} < 0$ en el segmento de aislación. Por fin, $\frac{M_1}{2m} = 0{,}0972461$.

Los resultados de los cálculos se reúnen en la tabla:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n	$\frac{M_1}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$
1	1,7320508	0,8137992	1,4802102	0,5497862	1,1822646	0,0534645
2	1,1822646	0,0270628	1,3617976	0,0198728	1,1623918	0,0000384

Por consiguiente, la raíz de la ecuación $\xi = 1{,}16239 \pm 0{,}00004$. ▶

Convénzase de que las ecuaciones no tienen raíces reales

6.1. $2^x - x - \frac{1}{2} = 0$. **6.2.** $x^2 - \operatorname{arctg} x + 1 = 0$.

6.3. $(x^2 + 2x + 2)^2 = 0$. **6.4.** $\sqrt{2x - 1} + \lg \frac{1}{x} = 0$.

6.5. $x^4 - x^2 + 1 = 0$.

6.6.** La raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ está aislada en el segmento $[a, b]$, la función $f(x)$ es continua y $f(a) \cdot f(b) < < 0$. Fórmese en FORTRAN el subprograma de reducción del segmento de aislación en 2^n veces, aprovechando la partición sucesiva del segmento por la mitad. Elíjanse en calidad de parámetros las magnitudes F, A, B, N, donde F es el identificador de la función-subprograma para el cálculo de valores de la función $f(x)$, A y B son los extremos del segmento de aislación inicial antes de los cálculos y los extremos del segmento de aislación obtenido después de los mismos, N es el exponente de potencia en la expresión para 2^n que caracteriza la disminución del segmento de aislación.

6.7. Resuélvase la ecuación $x^3 + x^2 - 3 = 0$ por el método combinado, empleando el método de cuerdas y el de las tangentes, compárense los resultados.

◀ Habiendo construido las gráficas de las funciones $y = x^3$ e $y = 3 - x^2$, llegamos a la conclusión de que la ecuación citada tiene en el segmento $[1, 2]$ una raíz real ξ. Disminuyamos en cuatro veces el segmento de aislación, empleando el método de división por la mitad. Para $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ tenemos $f(1) = -1 < 0$, y $f(2) = 9 > 0$. Hallemos $f(1,5) = \dfrac{21}{8} > 0$, por lo cual el segmento de aislación más estrecho será $[1, 1,5]$. Hallado $f(1,25) = 0,515625 > 0$ obtenemos el segmento $[1, 1,25]$. Por cuanto

$$c = 1 - \frac{(1,25-1)\, f(1)}{f(1,25) - f(1)} = 1,1649484 > 0,$$

entonces, aplicando el método de cuerdas, se debe utilizar la fórmula

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} - \frac{(1,25 - \bar{x}_{n-1})\, f(\bar{x}_{n-1})}{f(1,25) - f(\bar{x}_{n-1})} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

y, aplicando el método de tangentes, la fórmula

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} - \frac{f(\tilde{x}_{n-1})}{f'(\tilde{x}_{n-1})} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \quad \tilde{x}_0 = 1,25.$$

Los resultados de los cálculos se reúnen en dos tablas:

a) para el método de cuerdas:

n	$\bar{x}_{n-1}$	$f(\bar{x}_{n-1})$	$-(\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1})$	$\bar{x}_n$
1	1	−1	−0,1649484	1,1649484
2	1,1649484	−0,0619384	−0,0091209	1,1740693
3	1,1740693	−0,0031786	−0,0004651	1,1745344

b) para el método de tangentes:

n	$\tilde{x}_{n-1}$	$f(\tilde{x}_{n-1})$	$f'(\tilde{x}_{n-1})$	$-(\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1})$	$\tilde{x}_n$
1	1,25	0,515625	7,1875	0,0717391	1,1782609
2	1,1782609	0,0240767	6,5214179	0,0036919	1,1745690

Calculando por el método de cuerdas, hemos obtenido una sucesión creciente $(\bar{x}_n)$ de las aproximaciones de la raíz ξ:

$$1 < 1{,}1649484 < 1{,}1740693 < 1{,}1745344 < \ldots < \xi,$$

y calculando por el método de las tangentes, una sucesión decreciente $(\tilde{x}_n)$:

$$\xi < \ldots < 1{,}1745690 < 1{,}1782609 < 1{,}25.$$

Los signos decimales coincidentes de los términos de ambas sucesiones son exactos para la raíz ξ. Partiendo del error absoluto límite ε, el valor de n, para el cual se alcanza la exactitud requerida, se halla de la desigualdad

$$|\bar{x}_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon$$

siendo $\xi = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + \tilde{x}_n) \pm \varepsilon$. De este modo,

$$\xi = 1{,}17455 \pm 0{,}00003.$$ ▶

Empleando uno de los métodos mencionados, calcúlense con una exactitud de hasta 0,0001 las raíces reales de las ecuaciones: a) por el método de cuerdas, b) por el método de tangentes, c) por el método combinado:

6.8. $x^3 + 2x - 8 = 0$, **6.9.** $x^3 + x + 1 = 0$.
6.10. $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$, **6.11.** $x^3 + 2x - 30 = 0$.
6.12. $x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$. **6.13.** $x^3 - 2x - 5 = 0$.
6.14. $x^3 - 5x + 1 = 0$. **6.15.** $2x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$.
6.16. $(x + 1)^3 - x = 0$. **6.17.** $x^4 - 2x - 2 = 0$.
6.18. $x^4 - 4x + 1 = 0$. **6.19.** $x^5 + x + 1 = 0$.
6.20. $x = \sqrt[3]{5 - x}$. **6.21.** $x = 2 + \sqrt[4]{x}$.
6.22. $x^3 + 60x - 80 = 0$. **6.23.** $x^5 - x - 2 = 0$.
6.24. $x = 10 \lg x$. **6.25.** $x = 2 - \lg x$.
6.26. $x^2 = -\ln x$. **6.27.** $x^2 = \ln (x + 1)$.
6.28. $4x = 2^x$. **6.29.** $x^2 = e^x + 2$.
6.30. $x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$. **6.31.** $x - \cos x = 0$.
6.32. $x^2 = \cos x$. **6.33.** $x = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$.

6.34. $\ln x = \operatorname{arctg} x$. **6.35.** $x^2 + \ln x - 4 = 0$.

6.36. $x^2 \operatorname{arctg} x - 1 = 0$.

6.37. Fórmese en FORTRAN un programa para la resolución del siguiente problema: hállense, empleando el método de cuerdas, las raíces de la ecuación $e^{x-2} - x = 0$ con una exactitud de hasta 0,0001.

◀ Se debe representar el programa como un conjunto de tres unidades de programa: programa principal, función-subprograma para determinar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ por el método de cuerdas en el segmento de aislación de la raíz $[a, b]$, función-subprograma para calcular los valores de la función $f(x)$.

Función-subprograma para calcular los valores de la función:

```
FUNCTION F (X)
F = EXP (X - 2) - X
RETURN
END
```

Función-subprograma para determinar la raíz por el método de cuerdas. Los parámetros: F, A, B, S, EPS, F es el nombre de la función-subprograma para calcular los valores de la función $f(x)$, A y B son los extremos del segmento de aislación de la raíz, S es el valor mínimo de $|f'(x)|$ en el segmento de aislación, EPS es el error absoluto límite.

```
  FUNCTION CHORD (F, A, B, S, EPS)
  FA = F (A)
  FB = F (B)
  X = A - (B - A) * FA/(FB - FA)
  FX = F (X)
  IF (FA * FX.GT.0) GO TO 2
1 X = X - (X - A) * FX/(FX - FA)
  FX = F (X)
  IF (FX/S.GT.EPS) GO TO 1
  CHORD = X
  RETURN
2 X = X - (B - X) * FX/(FB - FX)
  FX = F (X)
  IF (FX/S.GT.EPS) GO TO 2
  CHORD = X
  RETURN
  END
```

Los operadores FA = F (A), FB = F (B) y FX = F (X) se emplean en el subprograma citado para evitar cálculos superfluos de los valores de la función $f(x)$; al realizarse el programa, la notación F (X) conlleva el acceso a la función-subprograma y el cálculo del valor correspondiente de esta función.

Programa principal. Analizando el comportamiento de la función $f(x) = e^{x-2} - x$ y de su derivada $f'(x) = e^{x-2} - 1$, concluimos que la ecuación $e^{x-2} - x = 0$ tiene dos raíces en los segmentos [0, 0,3] y [3, 3,2]. Por cuanto $f''(x) = e^{x-2} > 0$, entonces $f'(x)$ crece y se cumplen las desigualdades $0,864665 = e^{-2} - 1 \leqslant f'(x) \leqslant e^{-1,7} - 1 = -0,817316$ para $x \in [0,\ 0,3]$, $1,718281 = e - 1 \leqslant f'(x) \leqslant e^{1,2} - 1 = 2,320116$ para $x \in [3,\ 3,2]$. Por esta razón, $|f'(x)| > 0,8173$ en el primer caso y $|f'(x)| > 1,7182$, en el segundo. Estos números determinan, junto con los extremos de los segmentos de aislación y el error absoluto límite dado, los valores de los parámetros, esto es, como suele decirse, son parámetros verdaderos para el subprograma CHORD. El programa principal tiene la forma siguiente:

```
  EXTERNAL F
  ROOT 1 = CHORD (F, 0, 0, 0.3, 0.8173, 0.0001)
  ROOT 2 = CHORD (F, 3, 3.2, 1.7182, 0.0001)
  WRITE (3,1) ROOT 1, ROOT 2
1 FORMAT ('RAÍCES DE LA ECUACIÓN', F6.4', y', F6.4)
  STOP
  END
```

Fórmense en FORTRAN las funciones-subprogramas para hallar, mediante el método indicado, las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en el segmento de aislación $[a, b]$. Los parámetros: F, A, B, S, EPS; F es el nombre de la función-subprograma para calcular el valor de la función $f(x)$, A y B son extremos del segmento de aislación, S es un parámetro definido más abajo, EPS, el error absoluto límite. El parámetro FD es el nombre de la función-subprograma para el cálculo de $f'(x)$.

6.38. Método de las cuerdas. Parámetros: F, A, B, S, EPS, $S = \frac{M - m}{m}$, donde $M = \max |f'(x)|$ y $m = \min |f'(x)|$ para $x \in [a, b]$.

6.39. Método de las tangentes. Parámetros: F, FD, A, B, S, EPS, $S = \frac{M_1}{2m}$, donde $M_1 = \max |f''(x)|$ y $m = \min |f'(x)|$ para $x \in [a, b]$.

6.40. Método combinado. Parámetros: F, FD, A, B, EPS.

6.41. Fórmese en FORTRAN, para la ecuación $f(x) = 0$ en uno de los problemas 6.8—6.36, la función-subprograma para calcular los valores de la función $f(x)$.

Fórmense en FORTRAN los programas de resolución de uno de los probemas 6.8—6.36, aplicando el método indicado.

6.42. Método de cuerdas. Utilícense las soluciones de los problemas 6.38 y 6.41.

6.43. Método de tangentes. Hágase uso de las soluciones de los problemas 6.39 y 6.41.

6.44. Método combinado. Utilícense las soluciones de los problemas 6.40 y 6.41.

2. Interpolación de las funciones. Supongamos que la función $y = f(x)$ toma en los nudos de interpolación $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, los valores $f(x_k) = y_k$; entonces las *diferencias partidas* se determinan mediante las igualdades:

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_k - y_{k+1}}{x_k - x_{k+1}},$$

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{\Delta y(x_k, x_{k+1}) - \Delta y(x_{k+1}, x_{k+2})}{x_k - x_{k+2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l-1}, x_{k+l}) =$$

$$= \frac{\Delta y(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l-1}) - \Delta x(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})}{x_k - x_{k+l}},$$

y el *polinomio de interpolación* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ tiene por expresión

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) \Delta y(x_0, x_1, \ldots, x_k); \quad (1)$$

además, en el caso de existencia de la derivada continua $f^{(n+1)}(x)$ en $[a, b]$ se verifica la desigualdad

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|, \quad (2)$$

donde

$$M_{n+1} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

EJEMPLO 3. Hállese $\sqrt{2}$ con una exactitud de hasta 0,0001, construyendo para la función $f(x) = \sqrt{x}$ un polinomio de interpolación en el segmento $[1{,}69,\ 2{,}25]$.

◀ Elijamos $n = 2$ y los nudos de interpolación $x_0 = 1{,}69$, $x_1 = 1{,}96$, $x_2 = 2{,}25$. Estimemos la exactitud según la fórmula (2). Puesto que $f^{(IV)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-7/2} < 0$, la función $f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2}$ va decreciendo en el segmento $I = [1{,}69,\ 2{,}25]$; por esta razón

$$M_2 = \max_{x \in I} f'''(x) = f'''(1{,}69) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(1{,}69)^2 \cdot 1{,}3} = 0{,}1009984.$$

En este caso para la diferencia $r_2(x) = f(x) - p_2(x)$ obtendremos la desigualdad

$$|r_2(x)| < \frac{M_3}{3!} |(x-1,69)(x-1,96)(x-2,25)|,$$

de donde proviene el cumplimiento de la desigualdad

$$|r_2(x)| < \frac{0,1009984}{6} 0,31 \cdot 0,04 \cdot 0,25 = 0,0000521$$

y la obtención de la exactitud deseada.

Hallemos los coeficientes del polinomio de interpolación, calculando las diferencias partidas y reuniendo los resultados de los cálculos en la tabla:

k	x_k	y_k	$\Delta y(x_k, x_{k+1})$	$\Delta y(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$
0	1,69	1,3	$\dfrac{1,3-1,4}{1,69-1,96}=0,3703703$	$\dfrac{0,3703703-0,3448275}{1,69-2,25}=$
1	1,96	1,4		$=-0,0456121$
2	2,25	1,5	$\dfrac{1,4-1,5}{1,96-2,25}=0,3448275$	

El polinomio tiene la forma

$$p_2(x) = 1,3 + 0,3703703(x-1,69) - 0,0456121(x-1,69) \times \times (x-1,96),$$

$$p_2(2) = 1,3 + 0,3703703 \cdot 0,31 - 0,0456121 \cdot 0,31 \cdot 0,04 = = 1,3 + 0,1148147 - 0,0005655 = 1,4142492.$$

De aquí

$$\sqrt{2} = 1,4142 \pm 0,0001. \blacktriangleright$$

Las *diferencias finitas* $\Delta^k y_i$ ($k = 1, 2, \ldots; i = 0, 1, 2, \ldots$) se determinan por las igualdades

$$\begin{aligned} \Delta^1 y_i &= \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \\ \Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^k y_i &= \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i. \end{aligned}$$

Para los *nudos equidistantes* $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) donde el paso de interpolación $h > 0$, el polinomio de interpolación (1) adquiere la forma

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!} \Delta^k y_0, \tag{3}$$

donde $t = \frac{x - x_0}{h}$ y $\Delta^k y_0$ son diferencias finitas de k-ésimo orden, mientras que la desigualdad (2) toma la forma

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \left| \prod_{k=0}^{n} (t-k) \right|. \tag{4}$$

EJEMPLO 4. La función $y = f(x)$ está dada por la tabla

x	1,0	1,1	1,2	1,3
y	2,7854	2,8330	2,8761	2,9151

Determínese la expresión analítica, por medio de la cual la función citada puede representarse en el segmento [1, 1,3] y calcúlese $f(1,15)$.

◀ Una expresión analítica que permite calcular los valores de la función $f(x)$, que no se dan en la tabla, la buscaremos en forma de un polinomio cuyos valores coinciden con los valores dados de la función, es decir, en forma del polinomio $p_3(x)$ que satisface las correlaciones $p_3(x_k) = f(x_k)$ para $k = 0, 1, 2, 3$. Un único polinomio que posee estas propiedades es el polinomio de interpolación $p_3(x)$, definido por la igualdad (3). Hallemos las diferencias finitas, reuniendo los resultados de los cálculos en la siguiente tabla:

k	x_k	y_k	Δy_k	Δy_k^2	Δy_k^3
0	1	2,7854			
1	1,1	2,8330	0,0476	—0,0045	
2	1,2	2,8761	0,0431	—0,0041	0,0004
3	1,3	2,9151	0,0390		

Aplicando la fórmula (3) para $h = 0,1$, $n = 3$ y $x_0 = 1$, obtendremos

$$p_3(x) = 2,7854 + 0,476(x-1) - 0,225(x-1)(x-1,1) + \\ + 0,0666(x-1)(x-1,1),(x-1,2).$$

Entonces

$$p_3(1,15) = 2,7854 + 0,476 \cdot 0,15 - 0,225 \cdot 0,15 \cdot 0,05 + \\ + 0,0666 \cdot 0,15 \cdot 0,05(-0,05) = 2,7854 + 0,0714 - \\ - 0,0017 + 0,0000 = 2,8551.$$

Para calcular $f(1,15)$ observemos que $f(1,15) = p_3(1,15)$ y como error absoluto límite de la igualdad $f(x) = p_n(x)$ se considerará, siempre que la derivada $f^{(n+1)}(x)$ sea desconocida, el módulo del último de los sumandos que figuran en la suma (3). Por eso $f(1{,}15) = 2{,}8551$. ▶

6.45*. Demuéstrese la igualdad

$$\Delta^k y_i = \sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu (-1)^\nu y_{k+i-\nu},$$

donde $C_k^\nu = \frac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!}$, $0! = 1$.

6.46*. Demuéstrese la igualdad

$$\Delta y(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{y_\nu}{w'_k(x_\nu)}$$

donde $w_k = \prod_{i=1}^{k} (x - y_i)$.

6.47. Para la función $f(x) = \cos \frac{\pi}{12} x$ constrúyase un polinomio de interpolación, eligiendo los nudos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Hállese $\cos \frac{\pi}{10}$ y estímese la exactitud.

6.48. Para la función $f(x) = \ln x$ constrúyase un polinomio de interpolación eligiendo los nudos $x_0 = 9$, $x_1 = 10$, $x_2 = 12$, $x_3 = 15$ y empleando los valores de $\ln 2 = 0{,}693147$, $\ln 3 = 1{,}098613$ y $\ln 5 = 1{,}609438$. Hállese $\ln 11$ y estímese la exactitud.

La función $y = f(x)$ viene dada por medio de una tabla. Hállense los valores de esta función para los valores indicados x_1 y x_2 del argumento x que no figuran en la tabla.

6.49.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y	1,0 2	1,061	1,087	1,119	1,160	1,212	1,274	1,350

$x_1 = 1{,}26$, $x_2 = 1{,}58$.

6.50.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
y	1,958	2,107	2,268	2,443	2,632	2,841	3,071	3,324

$x_1 = 1{,}89$, $x_2 = 2{,}43$.

6.51.

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
y	0,742	0,789	0,835	0,880	0,924	0,967	1,008	1,046

$x_1=0{,}83$, $x_2=0{,}97$.

6.52.

x	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
y	1,2322	1,2097	1,1789	1,1380	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1=1{,}74$, $x_2=1{,}97$.

6.53.

x	2,70	2,75	2,80	2,85	2,90	2,95	3,00	3,05
y	1,5827	1,4865	1,3721	1,2383	1,0838	0,9071	0,7069	0,4817

$x_1=2{,}72$, $x_2=2{,}93$.

6.54.

x	10	15	20	25	30	35	40	45
y	0,985	0,966	0,940	0,906	0,866	0,819	0,766	0,707

$x_1=23$, $x_2=41$.

6.55.

x	1,1	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6
y	1,029	1,389	1,649	1,800	1,852	1,822	1,739	1,632

$x_1=1{,}3$ $x_2=4{,}0$.

6.56.

x	0,13	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48
y	0,1296	0,1790	0,2280	0,2764	0,3242	0,3712	0,4173	0,4626

$x_1=0{,}20$, $x_2=0{,}41$.

6.57.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
y	0,1198	0,0897	0,0660	0,0477	0,0339	0,0236	0,0162	0,0109

$x_1=1{,}25$, $x_2=1{,}76$.

6.58.

x	50	55	60	65	70	75	80	85
y	0,285	0,319	0,223	0,042	−0,148	−0,273	−0,283	−0,178

$x_1 = 58, \quad x_2 = 79.$

6.59. Calcúlese el valor del *seno integral* $\mathrm{Si}\,(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ para $x = 0{,}26$ y $x = 0{,}45$, haciendo uso de la tabla de sus valores:

x	0,17	0,22	0,27	0,32	0,37	0,42	0,47	0,52
$\mathrm{Si}\,(x)$	0,16973	0,21941	0,26891	0,31819	0,36720	0,41591	0,46427	0,51225

6.60. Calcúlense los valores de la *integral de probabilidades* $\Phi\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ para $x = 0{,}27$ y $x = 0{,}58$, haciendo uso de la tabla de sus valores:

x	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75
$\Phi\,(x)$	0,05637	0,16800	0,27633	0,37938	0,47548	0,56332	0,64203	0,71116

6.61. Empleando la interpolación, resuélvase la ecuación

$$x \cdot \ln x - 1 = 0.$$

◀ En un segmento de aislación de la raíz $I = [1{,}6,\ 1{,}9]$ para la función $y = x \ln x - 1$ tenemos:

x	1,6	1,7	1,8	1,9
y	−0,2479952	−0,0979324	0,0580148	0,2195226

La función $y = x \ln x - 1$ crece en el segmento I, puesto que $y' = \ln x + 1 > 0$ para $x \in I$. Por consiguiente, existe una función inversa $x = \varphi\,(y)$, para la cual, considerando ahora y como argumento y x, como valor de la función, construimos el polinomio de interpolación $x_3\,(y)$. Este procedimiento lleva el nombre de *interpolación in-*

versa. Reuniendo en la tabla los resultados de los cálculos obtenemos:

k	y	x	$\Delta x(y_k, y_{k+1})$	$\Delta x(y_k, y_{k+1}, y_{k+2})$	$\Delta x(y_k, y_{k+2}, y_{k+3})$
0	−0,2479952	1,6			
1	−0,0979324	1,7	0,6663876	−0,0821705	
2	0,0580148	1,8	0,6412420	−0,0695452	0,0270049
3	0,2195226	1,9	0,6191651		

De aquí el polinomio buscado tiene la forma

$$x_3(y) = 1{,}6 + 0{,}6663876\,(y + 0{,}2479952) - \\ - 0{,}0821705\,(y + 0{,}2479952)(y + 0{,}0979324) + \\ + 0{,}0270049\,(y + 0{,}2479952)(y + 0{,}0979324)(y - 0{,}0580148).$$

Para hallar la raíz, se debe poner $y = 0$. Obtenemos

$$x_3(0) = 1{,}6 + 0{,}1652609 - 0{,}0019956 - 0{,}000038 = 1{,}7632273.$$

Por consiguiente, la raíz es igual a $1{,}76323 \pm 0{,}00004$, donde el error absoluto límite se supone igual a la magnitud absoluta del último sumando en la expresión para $x_3(0)$. ▶

6.62. Haciendo uso de la tabla para los valores de la función $y = f(x)$, hállese el valor x_0, para el cual $f(x_0) = 0{,}569$:

x	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85
y	−1,125	−0,926	−0,704	−0,458	−0,187	0,109	0,432	0,782

6.63. Haciendo uso de la tabla para los valores de la función $y = f(x)$, hállese el valor x_0, para el cual $f(x_0) = 4{,}498$:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	2,431	2,928	3,497	4,144	4,875	5,696

6.64. Haciendo uso de la tabla resuélvase, por el método de la interpolación inversa, la ecuación $\operatorname{sh} x = 4{,}9370$:

x	2	2,2	2,4	2,6
y	3,6269	4,4571	5,4662	6,6947

6.65. Haciendo uso de la tabla, resuélvase por el método de la interpolación inversa la ecuación $\operatorname{tg} x = 1{,}767$:

x	60°	61°	62°
y	1,732	1,804	1,881

Fórmense en FORTRAN los subprogramas siguientes:

6.66. El subprograma de cálculo de las diferencias partidas $\Delta y(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\Delta y(x_1) = y(x_1)$. Los parámetros: X, Y, N, donde N es el número de elementos de las tablas X e Y que contienen los valores del argumento y los de la función, respectivamente. El resultado de los cálculos se contiene en la tabla Y.

6.67. * El subprograma de cálculo de las diferencias finitas $\Delta_{y_i}^{k}$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Y y N son los parámetros (Y es una tabla que contiene N elementos) de los valores de la función a la entrada y las diferencias finitas, a la salida del subprograma.

6.68*. La función-subprograma de cálculo de los valores del polinomio de interpolación para una función dada por medio de una tabla. Los parámetros: X, Y, N, KEY, ARG, donde X es la tabla de valores del argumento, Y es la tabla de valores de la función, si KEY $= 0$, y la tabla de diferencias partidas, si KEY $\neq 0$, N es la dimensión de las tablas X e Y, ARG es el valor del argumento del polinomio.

6.69. El subprograma de cálculo de los valores del polinomio de interpolación de una función dada por medio de una tabla. Los parámetros: X, Y, N, KEY, ARG, P, EPS, donde X es la tabla de valores del argumento, Y es la tabla de valores de la función, si KEY $= 0$, y la tabla de diferencias partidas, si KEY $\neq 0$, N es la dimensión de las tablas X e Y, ARG es el valor del argumento del polinomio, P es el valor del polinomio, EPS es el módulo del último sumando que figura en el polinomio de interpolación.

6.70. La función-subprograma de cálculo de los valores del polinomio de interpolación de una función dada por medio de una tabla, siendo equidistantes los nudos de interpolación. Los parámetros: X, H, Y, N, KEY, ARG, donde X es el nudo de interpolación inicial, H es el paso, Y es la tabla de valores de la función, si KEY $= 0$, y la tabla de las diferencias finitas de coeficientes correspondientes, si KEY $\neq 0$, N es la magnitud de la tabla, ARG es el valor del argumento del polinomio.

6.71. Haciendo uso de la función-subprograma obtenida en el problema 6.70, resuélvase con ayuda de una computadora electrónica uno de los problemas del 6.49 al 6.60.

6.72. Utilizando la función-subprograma obtenida en el problema 6.68, resuélvase con ayuda de una computadora electrónica uno de los problemas del 6.61 al 6.65.

6.73. Haciendo uso del subprograma obtenido en el problema 6.69, resuélvase con ayuda de una computadora electrónica uno de los problemas del 6.62 al 6.63.

3. Diferenciación numérica. Las fórmulas para la diferenciación numérica se obtienen como resultado de la derivación de las fórmulas de interpolación:

$$f'(x) \approx p_n'(x) = \Delta y(x_0, x_1) + ((x - x_0) + (x - x_1)) \times$$
$$\times \Delta y(x_0, x_1, x_2) + ((x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) +$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2))\, \Delta y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots,$$

con la particularidad de que el error de la igualdad aproximada $f'(x) = p_n'(x)$ es igual a la derivada del error $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

En el caso de los nudos equidistantes $x_k = x_{k-1} + h$ ($k = 1, \ldots, n$), $x_k \in [a, b]$ y $f(x_k) = y_k$ son válidas las relaciones

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right). \qquad (5)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2-18t+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right), \qquad (6)$$

donde $t = \frac{1}{h}(x - x_0)$. Las fórmulas (5) y (6) tienen cada una n y $n - 1$ sumandos, respectivamente.

EJEMPLO 5. Un punto material M se mueve rectilíneamente. La ley de movimiento $s = f(\tau)$ está representada por medio de una tabla (τ es el tiempo en segundos, s es el camino en metros):

τ	0	1	2	3	4	5	6
s	0	2	10	30	68	130	222

Hállese la velocidad v y la aceleración w del punto M en el instante de tiempo $\tau = 3{,}5$.

◀ Formemos la tabla de diferencias finitas de la función $s = f(\tau)$

τ	s	Δs	$\Delta^2 s$	$\Delta^3 s$	$\Delta^4 s$
0	0				
		2	6		
1	2			6	
		8	12		0
2	10			6	
		20	18		0
3	30			6	
		38			0
4	68		24	6	
		62			
5	130		30		
		92			
6	222				

Considerando $\tau = 3$ como el instante de tiempo inicial, más próximo a $\tau = 3{,}5$, tendremos $t = \dfrac{3{,}5-3}{1} = 0{,}5$. Aplicando las fórmulas (5) y (6), obtenemos:

$$v = f'(3{,}5) = \frac{1}{1}\left(38 + \frac{2\cdot 0{,}5-1}{2}\,24 + \frac{3\cdot(0{,}5)^2-6\cdot 0{,}5+2}{6}\cdot 6\right) = 37{,}75 \text{ m/s}.$$

$$w = f''(3{,}5) = \frac{1}{1^2}\left(24 + (0{,}5-1)\cdot 6 + \frac{6\cdot(0{,}5)^2-18\cdot 0{,}5+11}{12}\cdot 0\right) = 21 \text{ m/s}^2. \text{ ▶}$$

La función $f(x)$ viene dada por la tabla. Calcúlense los valores de la derivada $f'(x)$ en los puntos indicados x_1 y x_2:

6.74.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f(x)$	1,44013	1,54722	1,67302	1,81973	1,98070	2,18547	2,40978	2,66557

$x_1 = 2{,}03$, $x_2 = 2{,}22$.

6.75.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$f(x)$	1,0083	1,1134	1.2208	1,3310	1,4449	1,5634	1,6876	1,8186

$x_1 = 1{,}14$, $x_2 = 1{,}42$.

6.76.

x	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$f(x)$	3,92847	4,41016	4,93838	5,51744	6,15213	6,84782	7,61045	8,44671

$x_1 = 3,02$, $x_2 = 3,31$.

6.77.

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
$f(x)$	0,2803	0,3186	0,3592	0,4021	0,4472	0,4945	0,5438	0, 5952

$x_1 = 0,82$, $x_2 = 1,03$

6.78.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x)$	0,8802	0,9103	0,9340	0,9523	0,9661	0,9764	0,9838	0,9891

$x_1 = 1,34$, $x_2 = 1,65$.

Calcúlense los valores de $f'(x)$ y $f''(x)$ en el punto que se indica:

6.79.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	5	21	55	113	201

$x = 2$.

6.80.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	19	85	261	631

$x = 2,5$.

Fórmense en FORTRAN las siguientes funciones-subprogramas:

6.81*. La función-subprograma de cálculo de los valores de la primera derivada del polinomio $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t-k)$. Los parámetros son: N, T.

6.82*. La función-subprograma de cálculo de los valores de la segunda derivada del polinomio $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t-k)$. Los parámetros son: N, T.

6.83. La función-subprograma de cálculo de los valores de la primera derivada del polinomio de interpolación

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!} \Delta^k y_0, \quad t = \frac{x-x_0}{h}.$$

Los parámetros: X, H, Y, N, KEY, ARG, donde X es el nudo de interpolación inicial, Y es la tabla de valores de la función para KEY = 0 y la tabla que contiene las magnitudes y_0, $\frac{1}{k!}\Delta^k y_0$ $(k = 1, \ldots, n)$ para KEY $\neq 0$, ARG es el valor del argumento, para el cual se calcula la derivada, N es $n+1$.

6.84. La función-subprograma de cálculo de los valores de la segunda derivada del polinomio de interpolación $p_n(x)$. Los parámetros son los mismos que en el problema 6.83.

6.85. Haciendo uso de la función-subprograma formada en el problema 6.83, escríbase en FORTRAN el programa de resolución de uno de los problemas del 6.74 al 6.78.

6.86. Haciendo uso de las funciones-subprogramas formadas durante la resolución de los problemas 6.83 y 6.84, escríbanse en FORTRAN el programa de resolución de uno de los problemas 6.79, 6.80.

RESPUESTAS

1.1. 0,331. **1.2.** 0,5. **1.3.** -1. **1.5.** $(\Delta x)^2 - 2\Delta x$. **1.6.** $e(e^{\Delta x} - 1)$. **1.7.** $\log_2(1+\Delta x)$. **1.9.** $-\frac{2}{x^3}$. **1.10.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **1.11.** $2^x \ln 2$. **1.12.** $\frac{1}{x} \times \times \log_2 e$. **1.14.** ● Utilícese la identidad: $xf(x_0) - x_0 f(x) = (xf(x_0) - x_0 f(x_0)) - (x_0 f(x) - x_0 f(x_0))$. **1.15.** $f'_-(-1) = -2$, $f'_+(-1) = f'_-(1) = 0$, $f'_+(1) = 2$. **1.17.** $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$.

1.18. $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. **1.19.** $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$.

1.20. ● La función $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no tiene límite para $x\to 0$.

1.21. $-2+\frac{8}{3}x^3$. **1.22.** $-\frac{25x^4}{a^2}$ **1.23.** $\frac{\sqrt{x}\,(19x^5+9a)}{6\sqrt[3]{(x^5+a)^2}}$.

1.24. $-\frac{3}{5}a\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}+\frac{2}{3b\sqrt[3]{x}}$. **1.25.** $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$. **1.26.** $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$.

1.27. $\frac{2}{\sqrt{x}\,(2-\sqrt{x})^2}$. **1.28.** $-\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$. **1.29.** $\frac{2\cos^3 x-3}{\cos^2 x}$.

1.30. $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$. **1.31.** $-\frac{1}{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$.

1.32. $\frac{x^2-1}{3x^2\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{\left(1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^2}}$.

1.33. $-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\cdot\operatorname{sen}\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right)$. **1.34.** $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\operatorname{sen}\sqrt{x}}}$.

1.35. $\frac{1}{2(1+x^2)}$. **1.36.** $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}\operatorname{sgn}(\operatorname{sen}x)$. **1.37.** $\frac{e^{x/2}}{2\sqrt{x}}\times$ $\times(1+x)$. **1.38.** $-e^{-x^2}\frac{1+2x^2}{2x^2}$. **1.39.** $2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\ln 2$.

1.40. $2^{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}\cdot\ln 2\cdot\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{sen}x)$. **1.41.** $3^{2^x}\cdot 2^x\ln 3\cdot\ln 2$.

1.42. $\frac{1}{x}\lg\left(\frac{x^2}{10}\right)$. **1.43.** $\frac{1}{x^{\ln 2\cdot\ln 2x}}$.

1.44. $\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}\,(2ax+b)}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}\,(ax^2+bx+c)}$.

1.45. $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$. **1.46.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

1.47. $\operatorname{ch}x$. **1.48.** $\operatorname{sh}x$. **1.49.** $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. **1.50.** $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

1.51. $\frac{(x-3)(19x-17)}{(x+1)^4}$. **1.52.** $\frac{10-2x-2x^2}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x+2)^2(x-1)}}$.

1.53. $-\frac{2x^2+9x+1}{2\sqrt{x+2}\sqrt[3]{(x-1)^5(2x+1)^4}}$.

1.54. $\frac{11x^5-7x^4-58x^3+48x^2}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(x+2)^3}\sqrt[4]{(x-2)^5}}$. **1.55.** $x^x(\ln x-1)$.

1.56. $x^{2^x}\cdot 2^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\cdot\ln 2\right)$. **1.57.** $(\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}\,\frac{3+\ln x}{6\sqrt[3]{x^2}}$.

1.58. $(\ln x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x \cdot \ln \ln x}{x^2 \ln x}$. 1.59. $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arcsen} x}\left(\frac{\ln \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}}+\right.$ $\left.+\operatorname{arcsen} x \cdot \operatorname{ctg} x\right)$. 1.60. $x^{x^x} \cdot x^{x-1}(1+x \ln x(\ln x-1))$. 1.61. $\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \times$ $\times\left(\ln \ln x+\frac{1}{\ln x}-\frac{2 \ln x}{x}\right)$. 1.62. $x^{x^2+1}\left(1+\ln x^2\right)+x^{2x} \cdot 2^x \times$ $\times\left(\frac{1}{x}+\ln 2 \cdot \ln x\right)+2^{x^x} \ln 2 \cdot x^x(\ln x+1)$, $x>0$. ● Hállese la derivada de cada uno de los sumandos. 1.63. $-\operatorname{sen} 2x \times$ $\times \frac{1+2\sqrt{1+\cos^2 x}}{2\sqrt{1+\cos^2 x}\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)}$. ● A título de derivada intermedia se toma $u=\cos^2 x$, y, a continuación, se hace uso de la regla de derivación de una función compuesta. 1.64. $-\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \times$ $\times(2 \ln \arccos x+1)$. 1.65. $-2xe^{-x^2} \frac{\operatorname{arcsen} e^{-x^2}+e^{-x^2}\left(1-e^{-2x^2}\right)^{1/2}}{\left(1-e^{-2x^2}\right)^{3/2}}$.

1.66. $-\frac{a^{-x} \ln a}{\left(1+a^{-2x}\right)^2}\left(4a^{-x} \operatorname{arctg} a^{-x}+a^{-2x}-1\right)$. 1.67. $a=2$, $b=0$. ● Las condiciones de continuidad $\lim\limits_{x \to -0} f(x)=\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ y las de derivabilidad $f'_-(0)=f'_+(0)$ constituyen en total un sistema de dos ecuaciones respecto de a y b. 1.68. $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$.

1.69. $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^6\right)^2\left(1-x^3\right)^2}}$. 1.70. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

1.71. $\frac{1}{m+n}\left(n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{m+n}}-m\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{n}{m+n}}\right)$. 1.72. $-\operatorname{sen} \times$ $\times 2x \cos(\cos 2x)$. 1.73. $\frac{m \operatorname{sen} mx}{\cos^{n+1} mx}=\frac{m \operatorname{tg} mx}{\cos^n mx}$. 1.74. $\left(\frac{a}{b}\right)^x \times$ $\times\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b\left(\frac{b-a}{x}+\ln \frac{a}{b}\right)$, $x>0$. 1.75. $\frac{n}{x \ln mx}$. 1.76. $\frac{1}{3x^2-2}$, $|x|<\sqrt{\frac{2}{3}}$. 1.77. $2\pi \log_2 e \operatorname{ctg}\left(2\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$.

1.78. $\frac{2 \operatorname{tg} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}{1+\operatorname{tg}^4 x}$. 1.79. $-\frac{1}{x \ln^2 x}$. 1.80. $(\operatorname{sen} x)^{\cos x} \times$ $\times(\operatorname{ctg} x \cos x-\operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x)$. 1.81. $\frac{1}{2}(\sqrt{x})^{\operatorname{sen}^2 x}\left(\operatorname{sen} 2x \ln x+\right.$ $\left.+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\right)$. 1.82. $-\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}} a^{\sqrt{\cos x}}\left(1+\sqrt{\cos x} \ln a\right)$.

1.83. $\operatorname{th}^3 x\left(1+\frac{1}{2\operatorname{sh} x}\right)$. 1.84. $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. 1.85. $e^{-x}(a \operatorname{ch} ax-\operatorname{sh} ax)$.

1.86. $\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$. 1.88. $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 1.89. $\cos(x-\pi k)$, si $x\in(\pi k, \pi(k+1))$, si en cambio, $x=\pi k$, entonces $y'_-(\pi k)=-1$, $y'_+(\pi k)=1$, $k\in\mathbb{Z}$. 1.90. $\frac{1}{1+x^2}$, $x>0$; $-\frac{1}{1+x^2}$, $x<0$; $y'_-\times(0)=-1$, $y'_+(0)=+1$. 1.92. -1, $x\leqslant 0$; $-e^{-x}$, $x>0$. 1.93. 1, $x\leqslant 0$; $\frac{1}{1+x}$, $x>0$. 1.94. 0, $|x|\geqslant 1$; $2xe^{-x^2}(1-x^2)$, $|x|<1$. 1.95 $\frac{2x^4+4x^3-36x^2+54}{3(1-x)^2(9-x^2)}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$.

1.96. $y\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$. 1.97. $a^{x^a}\cdot x^{a-1}\cdot a\ln a$. 1.98. $(\log_x a)^x\left(-\frac{1}{\ln x}-\right.$ $\left.-\ln\log_a x\right)$. 1.99. $\cos x\cos(\operatorname{sen} x)\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$. 1.100. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\frac{\ln x-1}{x^2}$. 1.101. $-\frac{\operatorname{sen} x}{3^x}(1+\ln^2 3)$.

1.102. $\frac{a\cos ax\cos bx+b\operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx}{\cos^2 bx}\left(3^{\frac{\operatorname{sen} ax}{\cos bx}}\ln 3+\frac{\operatorname{sen}^2 ax}{\cos^2 bx}\right)$

1.105. $\varphi(x_0)$. ● Hágase uso de la definición de la derivada. 1.106. $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$. 1.107. $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$.

1.108. $\psi(x)^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln\psi(x)+\frac{\varphi(x)\psi'(x)}{\psi(x)}\right)$. 1.110. $\frac{f'(\ln x)}{x}$.

1.111. $\frac{f'(x)}{f(x)}$. 1.113. $f'(f(x))f'(x)$. 1.114. $\frac{4}{3}$. 1.115. $-\frac{1}{e}$.

1.116. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. 1.117. $\frac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}$. 1.118. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$

1.119. $\frac{1}{2(1+\ln y)}$. 1.120. $\frac{e^x\operatorname{sen} y+e^y\operatorname{sen} x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$. 1.121. $-\frac{y}{x}$.

1.122. $\frac{2^x(2y-1)}{2^y(1-2^x)}=-2^{y-x}$. 1.123. $\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$.

1.124. $\frac{x+y}{x-y}$. 1.125. $\frac{y}{x}\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. 1.126. $\frac{y}{x}\cdot\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$.

1.127. $\frac{y}{x}$. 1.130. $\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. ● La función $y=\operatorname{ch} x$, $x\in(-\infty, +\infty)$, no tiene inversa, por lo cual se deben analizar dos intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, en cada uno de los cuales la función

dada es monótona y, por consiguiente, tiene inversa. **1.131.** $\log_2 e \times$ $\times \operatorname{ctg} x$. **1.132.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+8x}}$. **1.134.** $\dfrac{1}{1+e^{\alpha(x)}}$. **1.135.** $\dfrac{2}{1+6\alpha^2(x)}$.
1.136. $\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\log_2 e}$. **1.137.** $\dfrac{1}{1+\ln\alpha(x)}$. **1.138.** $3t-\dfrac{5}{2}$.
1.139. $\dfrac{1}{3t}$. **1.140.** $-\dfrac{2t}{t+1}$. **1.141.** -2^{3t+1}. **1.142.** $-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$.
1.143. $2\cos^2 t\cdot(\cos 2t-2\operatorname{sen} 2t)$. **1.144.** 1. **1.145.** $\dfrac{t}{2}$. **1.146.** $\dfrac{2}{3}\ln\times$ $\times 2\operatorname{ctg} 2t$. **1.147.** $-\dfrac{\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{1-4t^2}}$. **1.148.** $\sqrt[6]{\dfrac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$.
1.149. $\dfrac{b}{a}\operatorname{th} t$. **1.150.** 1. **1.151.** -1. **1.152.** $2+\sqrt{3}$. **1.153.** $-\dfrac{4}{3}$.
1.154. $-2\cos 2x$. **1.155.** $\dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$. **1.156.** $-\dfrac{2}{3\ln 2}\,\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.
1.157. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **1.158.** $\dfrac{3x}{(1-x^2)^2}+\dfrac{(1+2x^2)\arcsen x}{(1-x^2)^{5/2}}$.
1.159. $x^{\sqrt{x}-1}(2+\ln x)\left(\dfrac{1}{4}\ln x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(2+\ln x)}\right)$.
● Hágase uso de la derivada logarítmica. **1.160.** $y'(0)=3$, $y''(0)=12$, $y'''(0)=9$. **1.161.** 2. **1.162.** 6. **1.163.** $y(0)=1$, $y'(0)=$ $=\ln 2$, $y''(0)=\ln^2 2-1$. **1.164.** $y'=-\dfrac{2}{x^3}f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $y''=\dfrac{6}{x^4}f'\times$ $\times\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{4}{x^6}f''\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. **1.165.** $y'=\dfrac{e^x f'(e^x)}{f(e^x)}$, $y''=e^{2x}\left(\dfrac{f'(e^x)}{e^x f(e^x)}+\right.$ $\left.+\dfrac{f''(e^x)}{f(e^x)}-\dfrac{f'^2(e^x)}{f^2(e^x)}\right)$. **1.167.** $y'=\dfrac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}}$;
$y''=\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$. **1.168.** $y'=\dfrac{u'}{u}-\dfrac{v'}{v}$,
$y''=\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}-\dfrac{vv''-v'^2}{v^2}$. **1.169.** $\dfrac{m!}{(m-n)!}\cdot x^{m-n}$, si $n\leqslant m$; 0, si $n>m$. **1.170.** $(k\ln a)^n a^{kx}$. **1.171.** $\operatorname{sen}\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. ● $y'=$ $=\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y''=\left(\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=$ $=\operatorname{sen}(x+\pi)$, etc. **1.172.** $(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}$. **1.173.** $2^{n-1}\cos\times$ $\times\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$. ● Hágase uso de la fórmula $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.
1.174. $\dfrac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$. **1.176.** $\dfrac{(x-1)^{50}-(x-2)^{50}}{(x^2-3x+2)^{51}}$.

1.177. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 37\,(79-x)}{2^{20}\,(1-x)^{20}\sqrt{1-x}}$. ● Hágase uso de la igualdad $1+x=$ $=2-(1-x)$. **1.178.** $\cos x\,(209-x-x^2)-15\,\mathrm{sen}\,x\,(2x+1)$.

1.179. $e^x\,(x^2+30x+360)$. **1.180.** $4\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{-x}$.

1.181. $\frac{8!\,\log_2 e}{x^9}$. **1.182.** $x\,\mathrm{sh}\,x+100\,\mathrm{ch}\,x$. **1.183.** ● Realícese la demostración por el método de la inducción matemática **1.186.** $-\frac{24c^3\,(ad-bc)}{d^5}$. **1.187.** -48. **1.193.** $-\frac{p^2}{y^3}$.

1.194. $e^{2y}\frac{2-xe^y}{(1-xe^y)^3}$. **1.195.** $-\frac{2\,(1+y^2)}{y^5}$.

1.196. $\frac{y\,((1+y)^2+(x-1)^2)}{x^2\,(1+y)^3}$. **1.197.** $-\frac{f''_{xx}}{(f'_x)^3}$. **1.200.** $-\mathrm{ctg}^3\,t$ o bien $\frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}$, $x\in(1,+\infty)$. **1.201.** $-\frac{2}{1-t^2}$ o bien $-2\sec^2 x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. **1.202.** $2\,(1+t^2)$ o bien $2\sec^2 x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

1.203. $\frac{1}{3a\cos^4 t\,\mathrm{sen}\,t}$ o bien $\frac{a^{2/3}}{3x^{1/3}\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}}$, $x\in(0,\ a)$.

1.205. $7x+y-3=0$, $x-7t+71=0$. **1.206.** $y-5=0$, $x+2=0$. **1.207.** $x-4y+4=0$, $4x+y-18=0$. **1.208.** $y-2x=0$, $2y+x=0$. **1.209.** $x-y-1=0$, $x+y-1=0$. **1.210.** $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$. **1.211.** $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. **1.212.** $y=0$, $(\pi+4)\,x+(\pi-4)\,y-\pi^2\sqrt{2}/4=0$. **1.213.** $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$. **1.214.** $x+y-2=0$. **1.215.** $\mathrm{arctg}\,\frac{2}{e}$. **1.216.** $M_0\,(1/8,\ -1/16)$. **1.217.** $y=x^2-x+1$. **1.219.** $2x-y-1=0$. **1.220.** $4x-4y-21=0$. **1.221.** 3,75. **1.224.** En el punto $M_1\,(0,0)$ el ángulo es igual a 0 (las tangentes se tocan) y en el punto $M_2\,(1,\ 1)$ el ángulo $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{7}$. **1.225.** $\mathrm{arctg}\frac{8}{15}$. **1.226.** $\mathrm{arctg}\,2\sqrt{2}$. **1.227.** $\pi/4$ y $\pi/2$.

1.230. $2/\sqrt{5}$. **1.232.** ◄ Si la curva viene dada por la ecuación $r=r(\varphi)$, entonces las coordenadas cartesianas de los puntos M de dicha curva se dan en función del ángulo φ por las expresiones

$$x=r(\varphi)\cos\varphi,\quad y=r(\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

De aquí $\overline{OM}=r(\varphi)\cos\varphi\cdot i+r(\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot j$, es decir, el vector $\rho\,(1,\ \mathrm{tg}\,\varphi)$ es colineal con el $\overline{OM}$. El vector $\tau\,(1,\ y'_x)$ es un vector director de la tangente TT', y como

$$y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{r'\,\mathrm{sen}\,\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\,\mathrm{sen}\,\varphi}=\frac{r+r'\,\mathrm{tg}\,\varphi}{r'-r\,\mathrm{tg}\,\varphi}$$

el vector $e\,(r' - r\,\mathrm{tg}\,\varphi,\ r + r'\,\mathrm{tg}\,\varphi)$ será colineal con τ. Por consiguiente,

$$\cos\theta = \frac{(\rho,\ e)}{|\rho|\cdot|e|} = \frac{r'}{\sqrt{r^2+(r')^2}},$$

de donde $\mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \dfrac{r}{r'}$. ▶ **1.233.** $\theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{k}$.

1.234. $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2\varphi$. **1.235.** a) $t_1 = 0,\ t_2 = 8$; b) $t \in (0,\ 4) \cup (8,\ +\infty)$;

c) $t_1 = \dfrac{4}{3}\,(3+\sqrt{3})$, $t_2 = \dfrac{4}{3}\,(3-\sqrt{3})$. **1.236.** $-a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$

1.237. 242. **1.238.** $\dfrac{7}{18}\,\pi$. **1.239.** $a\omega e^{a\varphi}$. **1.240.** $v_x = -2a\omega\,\mathrm{sen}\,2\varphi$,

$v_y = -2a\omega\cos 2\varphi$. **1.241.** En los puntos (3, 16/3) y (−3, −16/3). **1.242.** $4\pi r^2 v$ y $8\pi r v$. **1.243.** 2π radianes/seg.

2.2. $(\Delta y)_1 = 1{,}261$, $(dy)_1 = 1{,}2$, $(\Delta y)_2 = 0{,}120601$, $(dy)_2 = 0{,}12$. **2.3.** $\Delta s = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$, $ds = 2x\,\Delta x$. **2.4.** $ds = f'(t_1)\,\Delta t$ es el camino recorrido por el punto M durante el intervalo de tiempo Δt, con un movimiento uniforme a la velocidad $f'(t_1)$. **2.5.** $ds = 0{,}1$, $\Delta s = 0{,}08$. **2.6.** a) 0; b) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$. **2.7.** Las igualdades a) y c) no son posibles; la igualdad b) es posible, si la función es lineal (véase el problema 2.1). **2.8.** 2 cm. **2.9.** 3 cm. **2.10.** $2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

2.11. $x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$. **2.12.** $\mathrm{arctg}\,x\,dx$. **2.13.** $\ln x\,dx$. **2.14.** $\mathrm{arcsen}\,x\,dx$.

2.15. $\dfrac{2x\,dx}{1+5y^2}$. **2.16.** $\dfrac{x+y}{x-y}\,dx$. **2.17.** $\dfrac{dx}{e^y-1}$. **2.18.** a) 0,05; b) 0,805; c) 0,2. **2.19.** 2,93. **2.20.** 1,2. **2.21.** $\Delta V \approx 2\pi r h\,\Delta r$. ● Como h es constante, la función v será la función de un solo argumento r: $v = \pi h r^2$. **2.22.** $\Delta V \approx -\dfrac{RT}{p^2}\,\Delta p$. ● Siendo T constante, el volumen V será la función de un solo argumento p: $V = RT\,\dfrac{1}{p}$.

2.23. $-ab^2\,(\mathrm{sen}\,(bx+c)\,dx^2 = -b^2 y\,dx^2$. **2.24.** $3^{-x^2}\ln 9\,(2x^2\ln 3 - 1)\,dx^2$. **2.25.** $\dfrac{(2-x^2)\,\mathrm{sen}\,x - 2x\cos x}{x^3}\,dx^2$. **2.26.** $2a\,dx^2$.

2.27. $\dfrac{2\,dx^2}{(x+2y)^3}$. **2.28.** $-\dfrac{R^2\,dx^2}{(y-b)^3}$. **2.29.** $6\,\dfrac{x\,(1+3y^2)\,dx^2}{(1-3y^2)^3}$.

2.30. $\dfrac{(x-y)\,dx^2}{(1-a\cos y)^3}$.

3.1. $f(x)$ es discontinua para $x = 0 \in [-1,\ 1]$. **3.2.** 0. **3.4.** ● Realícese la demostración por reducción al absurdo, habiendo previamente establecido que la derivada del primer miembro de la ecuación tiene una única raíz real $x = 1$. **3.5.** ● Realícese la demostración por reducción al absurdo, habiendo previamente establecido que la derivada del primer miembro de la ecuación no tiene raíces reales. 3.6. ● $F(b) = F(a)$. 3.7. $\xi = 1/\sqrt{3}$. 3.11. ● Hágase uso del resultado del problema 3.8. 3.13. $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = 5/3$. 3.14. 2/3. 3.15. $\frac{2}{3\sqrt[3]{5}}$. 3.16. a^2/b^2. 3.17. 2. 3.18. 2/3. 3.19. $-1/2$. 3.20. 2. 3.21. 9/50. 3.22. 1/2. 3.23. 1/2. 3.24. 0. 3.25. 1/2. 3.26. $-\infty$. 3.27. $\cos 3$. 3.28. -2. 3.29. 0. 3.30. $+\infty$. 3.31. $1/\pi$. 3.32. a. 3.33. 0. 3.34. -1. 3.35. 0. 3.36. 1/12. 3.37. -1. 3.38. 2/3. 3.39. 1. 3.40. 1. 3.41. 1. 3.42. e. 3.43. 1. 3.44. 2. 3.45. $1/e$. 3.46. 1. 3.47. $1/e$. 3.48. 1. 3.49. e^{-6}. 3.50. e^2. 3.51. $-9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3$. 3.52. $7 + 11(x-1) + 10(x-1)^2 + 4(1+\theta(x-1))(x-1)^3$; a) $\theta = 1/4$; b) θ es un número real cualquiera; c) $\theta = 1/4$. 3.53. $P(-1) = 143$, $P'(0) = -60$, $P''(1) = 26$.

3.54. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. 3.55. $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!} + \frac{\operatorname{sen}\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n es impar; $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\operatorname{sen}\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n es par. 3.56. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cos\frac{\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n es impar! $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!} + \frac{\cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n es par. 3.57. $x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $x > -1$. 3.58. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$, n es impar; $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_{n+1}(x)$, n es par. ● El término residual se escribirá en la forma general. 3.59. $1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} \times x^{n+1}$, $x > -1$. 3.60. $2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{(1+\theta(x-2))^5}$. 3.61. $x + \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1+2\operatorname{sen}^3\theta x}{\cos^4\theta x}$. 3.62. $x + \frac{x^3}{6} +$

$+\frac{x^4}{4!}\frac{90x+60^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{7/2}}$. 3.63. $1-\frac{(x-1)}{2}+\frac{3}{8}(x-1)^2-\frac{5}{16}(x-1)^3+\frac{35}{128}\frac{(x-1)^4}{(1+\theta(x-1))^{9/2}}$. 3.64. a) 0,842; b) 1,648; c) 0,049, d) 2,012.
3.65. El error: a) $\frac{1}{16}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{5/2}}$; b) $\frac{5}{81}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{8/3}}$. 3.67. a) 1; b) 1/2; c) 1/2.

4.1. ● Hágase uso del desarrollo de la función según la fórmula de Taylor en el entorno del punto x_0 hasta un miembro de orden k inclusive. **4.2.** $f(x_0)=0$ es el mínimo, si $\varphi(x_0)>0$ y n es par; $f(x_0)=0$ es el máximo, si $\varphi(x_0)<0$ y n es par; no hay extremo, si n es impar. **4.3.** ● Hágase uso de la primera condición suficiente de extremo. **4.4.** En $(-1,\ -1/\sqrt{2})\cup(1/\sqrt{2},\ 1)$ va decreciendo, en $(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ va creciendo; $y_{\text{mín}}=y(-1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2}$, $y_{\text{máx}}=y(1/\sqrt{2})=1/2$. **4.5.** En $(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)$ va creciendo, en $(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$ va decreciendo; $y_{\text{máx}}=y(-1)=y(1)=1$. **4.6.** En $(0,\ 1)\cup(1,\ e)$ va decreciendo, en $(e,\ +\infty)$ va creciendo; $y_{\text{mín}}=y(e)=e$.

4.7. En $\left(\frac{\pi}{3}(6k-1),\ \frac{\pi}{3}(6k+1)\right)$ decrece en $\left(\frac{\pi}{3}(6k+1),\ \frac{\pi}{3}(6k+5)\right)$ crece; $y_{\text{mín}}=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi+\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\approx 2k\pi-0{,}685$, $y_{\text{máx}}=y\left(2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=2(k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\approx(2k+1)\pi+0{,}685$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.8.** En $(0,\ 2)$ decrece, en $(2,\ +\infty)$ crece; $y_{\text{mín}}=y(2)=2(1-\ln 2)\approx 0{,}61$. **4.9.** Va creciendo en todo el dominio de definición. **4.10.** En $\left(\frac{\pi}{4}(8k-3),\ \frac{\pi}{4}\times(8k+1)\right)$ crece, en $\left(\frac{\pi}{4}(8k+1),\ \frac{\pi}{4}(8k+5)\right)$ decrece, $y_{\text{máx}}=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{2k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 1{,}55e^{2k\pi}$, $y_{\text{mín}}=y\left(2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)=-e^{2k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx-1{,}55e^{2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.11.** En $(0,\ 1/e)$ decrece, en $(1/e,\ +\infty)$ crece; $y_{\text{mín}}=y(1/e)=(1/e)^{\frac{1}{e}}\approx 0{,}69$.
4.12. En $(-\infty,\ 0)$ decrece, en $(0,\ +\infty)$ crece; $y_{\text{mín}}=y(0)=2$.
4.13. $M=3$, $m=-24$. **4.14.** $M=8$, $m=0$. **4.15.** $M=0{,}6$, $m=-1$.
4.16. $M=1$, $m=0{,}6$. **4.17.** $M=2$, $m=\sqrt[3]{2}\approx 1{,}26$. **4.18.** $M=\pi/4$, $m=0$. **4.19.** $M=1$, $m=-1$. **4.20.** $M=1/\sqrt{e}\approx 0{,}61$, $m=-1/\sqrt{e}\approx-0{,}61$. **4.21.** ● Analícese la función $y=e^x-$

$-(1+x)$ y muéstrese que ella tiene un único mínimo: $y_{min}=$ $=y(0)=0$. **4.25.** $\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$. **4.26.** $|AP|=\left(500-\frac{100}{\sqrt{3}}\right)$ km $\approx$ $\approx 442{,}3$ km. **4.27.** $x=\frac{2p}{4+\pi}$; $y=\frac{1}{2}\left(p-x-\frac{\pi x}{2}\right)$. **4.28.** $\alpha=$ $=\frac{2\pi}{3}$. **4.29.** $\frac{ah}{4}$. **4.30.** πa^3. **4.31.** $\frac{4}{27}\pi r^2 h$. **4.32.** $\frac{8}{3}\pi r^3$.

4.33. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}e^3$. **4.34.** $2r^2$. **4.35.** $N(1, 1)$. **4.36.** $x=R\sqrt{2}$, $y=R/\sqrt{2}$,

4.37. Divídase el segmento en dos partes iguales.

4.38. $r=\frac{RH\sqrt{R^2+H^2}}{(\sqrt{R^2+H^2}-R)(\sqrt{R^2+H^2}+2R)}$. **4.39.** $h=(e^{2/3}-$ $-d^{2/3})^{3/2}$. **4.40.** En $(-\infty, 0)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(0, +\infty)$, la convexidad es hacia las y negativas, $M(0, 1)$ es el punto de inflexión, $k=7$. **4.41.** La gráfica es convexa hacia las y negativas en todos los puntos. **4.42.** En $(-\infty, 2)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(2, +\infty)$, la convexidad es hacia las y negativas, $M(2, 0)$ es el punto de inflexión, $k=0$. **4.43.** En $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, en $(-1, 1)$ la convexidad es hacia las y positivas, $M_1(-1, \sqrt[3]{2})$ y $M_2(1, \sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión, $k_1=k_2=\infty$. **4.44.** La gráfica es convexa hacia las y positivas en todos los puntos. **4.45.** En $(-\infty, -1)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(-1, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, $M(-1, 1-e^{-2})$ es el punto de inflexión, $k=-e^{-2}\approx -0{,}14$. **4.46.** En $(-\infty, 0)$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(0, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, $M(0, 0)$ es el punto de inflexión, $k=\infty$.

4.47. En $(0, e^{-5/6})$ la convexidad es hacia las y positivas, en $(e^{-5/6}, +\infty)$ la convexidad es hacia las y negativas, $M\left(e^{-5/6}, 1-\right.$ $\left.-\frac{5}{6}e^{-5/6}\right)$ es el punto de inflexión, $k=-\frac{3}{2}e^{-5/3}\approx = -0{,}28$.

4.48. $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$. **4.49.** $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **4.51.** ● Si x_0 es la abscisa del punto de inflexión, entonces $x_0 \operatorname{tg} x_0=2$. En este caso $y_0^2=y^2(x_0)=x_0^2\operatorname{sen}^2 x_0=\frac{4x_0^2}{4+x_0^2}$. **4.52.** $x=2$, $y=1$. **4.53.** $y=x-$ $-\frac{1}{3}$. **4.54.** $x=0$, $y=1$ (la derecha), $y=-1$ (la izquierda). **4.55.** $y=3x+\frac{\pi}{2}$ (la derecha), $y=3x-\frac{\pi}{2}$ (la izquierda). **4.56.** $x=$ $=0$, $y=2x$, $x=-1$ (la derecha). **4.57.** $y=0$. **4.58.** $x=-\frac{1}{e}$,

$y=x+\frac{1}{e}$. 4.59. $y=\frac{\pi}{2}x-1$. 4.61. $y_{\text{mín}}=y(0)=-1$; $\left(\pm 1, -\frac{64}{125}\right)$ y $(\pm\sqrt{5}, 0)$ son los puntos de inflexión. 4.62. $y_{\text{máx}}=y(\pm 1)=1$, $y_{\text{mín}}=(y\pm\sqrt{3})=y(0)=0$; $\left(\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{5}}, \frac{6-\sqrt{21}}{20}\left(\frac{6-\sqrt{21}}{5}-3\right)^2\right)$ y $\left(\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{5}}, \frac{6+\sqrt{21}}{20}\left(\frac{6+\sqrt{21}}{5}-3\right)^2\right)$ son los puntos de inflexión. 4.63. $y_{\text{máx}}=y(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$, $y_{\text{mín}}=y(\sqrt{3})=-\sqrt{3}$; $(0, 0)$ y $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}, \mp\frac{7\sqrt{6}}{16}\right)$ son los puntos de inflexión. 4.64. $y_{\text{mín}}=y(3)=\frac{27}{8}$; $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x=1$ e $y=\frac{x+2}{2}$ son asíntotas. 4.65. $y_{\text{máx}}=y(0)=0$, $y_{\text{mín}}=y(\sqrt[3]{4})=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$; $\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ es el punto de inflexión, $x=1$ e $y=x$ son asíntotas. 4.66. $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x=\pm 1$ $y=x$ son las asíntotas. 4.67. $y_{\text{máx}}=y(\sqrt[3]{4})=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$, $y_{\text{mín}}=y(0)=0$; $\left(\sqrt[3]{2}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ es el punto de inflexión; $x=-1$ e $y=x$ son las asíntotas. 4.68. $y_{\text{máx}}=y(1)=\frac{1}{3}$, $\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{6}\sqrt[3]{4}\right)$ es el punto de inflexión; $x=-\sqrt[3]{2}$ e $y=0$ son las asíntotas. 4.69. $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x=\pm 1$ e $y=0$ son asíntotas. 4.70. $y_{\text{máx}}=y(0)=0$, $y_{\text{mín}}=y(-\sqrt[3]{2})=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$; $\left(-\sqrt[3]{\frac{7+\sqrt{45}}{2}}, -\frac{\sqrt[3]{2(7+\sqrt{45})^2}}{9+\sqrt{45}}\right)$ y $\left(-\sqrt[3]{\frac{7-\sqrt{45}}{2}}, -\frac{\sqrt[3]{2(7-\sqrt{45})^2}}{9-\sqrt{45}}\right)$ son los puntos de inflexión; $x=1$ e $y=0$ son asíntotas. 4.71. $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x=-2$, $x=2$, $y=0$ son las asíntotas. 4.72. $y_{\text{máx}}=y(-3)=-4{,}5$, $y_{\text{mín}}=y(3)=4{,}5$; $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $y=x$ son las asíntotas. 4.73. $y_{\text{mín}}=y(-1)=-1/3$; $(-\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{4}/6)$ es el punto de inflexión; $x=\sqrt[3]{2}$ e $y=0$ son asíntotas. 4.74. $y_{\text{mín}}=y(0)=-1$, $(\pm\sqrt{3}/3, -1/2)$ son puntos de inflexión; $y=1$ es la asíntota. 4.75. $(0, 0)$ y $(\sqrt[3]{4}/2, 1/3)$ son los puntos de inflexión; $x=-1$ e $y=1$ son las asíntotas. 4.76. $y_{\text{máx}}=y(0)=2$, $(\pm 1, \sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.77. $y_{\text{mín}}=y(1)=-1$; $(0, 0)$ y $(2, 0)$ son los puntos de inflexión. 4.78. $y_{\text{máx}}=y(0)=2$, $y_{\text{mín}}=$ $=y(\pm 1)=\sqrt[3]{4}$. 4.79. $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x=-1$, $x=1$, $y=0$ son asíntotas. 4.80. $(0, 1)$ y $(1, 0)$ son puntos de inflexión; $y=-x$ es la asíntota. 4.81. $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ son puntos de inflexión. 4.82. $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión; $y=2x$ es la asíntota. 4.83. $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ son los puntos de inflexión; $y=x$ es la asíntota. 4.84. $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $y=-1$ es la asíntota izquierda, $y=1$ es la asíntota derecha. 4.85. $y_{\text{mín}}=y(-\sqrt[3]{3})=1$; $(0, 0)$ es el punto de inflexión; $x=-\sqrt[3]{2}$ es la asíntota. 4.86. $y_{\text{máx}}=y(0)=0$, $y_{\text{mín}}=$ $=y(2)=\sqrt[3]{16}$; $(-\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{2})$ es el punto de inflexión; $x=\sqrt[3]{4}$ e $y=x$ son las asíntotas. 4.87. $y_{\text{máx}}=y(-\sqrt[3]{6})=-3/\sqrt[3]{2}$; $(0, 0)$ y $(\sqrt[3]{3}, 3/\sqrt[3]{25})$ son los puntos de inflexión; $x=-\sqrt[3]{2}$ e $y=x$ son las asíntotas. 4.88. $y_{\text{mín}}=y(0)=0$, $(\pm\sqrt{2}, 2/\sqrt{3})$ son los puntos de inflexión; $y=x$ es la asíntota derecha, $y=-x$ es la asíntota izquierda. 4.89. $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ y $(-1, -1)$ son los puntos de inflexión; $x=0$ e $y=1$ son las asíntotas. 4.90. $y_{\text{máx}}=y(1)=1/\sqrt[3]{4}$, $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{0{,}16})$ es el punto de inflexión; $x=-1$, $y=0$ son las asíntotas. 4.91. $y_{\text{máx}}=y(-\sqrt{3})=0$, $y_{\text{mín}}=y(\sqrt{3})=0$; $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ son los puntos de inflexión; $x=0$ es una asíntota, $y=1$ es la asíntota derecha, $y=-1$ es la asíntota izquierda. 4.92. $y_{\text{mín}}=$ $=y(0)=0$, $y_{\text{mín}}=y(\pm\sqrt{2})=2$, $x=\pm 1$ son las asíntotas, $y=x$ es la asíntota derecha, $y=-x$ es la asíntota izquierda. 4.93. $y_{\text{máx}}=$ $=y(0)=1$, $y_{\text{mín}}=y(\pm 1)=0$. 4.94. $y_{\text{máx}}=y(0)=2\sqrt{2}$, $y_{\text{mín}}=$ $=y(\pm\sqrt{2})=0$; $(\pm 1, 1)$ son los puntos de inflexión. 4.95. $y_{\text{mín}}=$ $=y\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)=-\sqrt{2}$, $y_{\text{máx}}=y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\sqrt{2}$; $\left(\frac{3\pi}{4}+\right.$ $\left.+k\pi, 0\right)$ son los puntos de inflexión $k\in\mathbb{Z}$. 4.96. $y_{\text{mín}}=y\left(\frac{\pi}{4}+\right.$ $\left.+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{\text{máx}}=y\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$ son las asíntotas, $k\in\mathbb{Z}$. 4.97. $y_{\text{mín}}=y(0)=0$, $y=-\frac{\pi x}{2}-1$ es la asíntota izquierda, $y=\frac{\pi x}{2}-1$ es la asíntota derecha. 4.98. $y_{\text{mín}}=$ $=y(1)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$, $y_{\text{máx}}=y(-1)=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=\frac{x}{2}+\pi$ es la asíntota izquierda, $y=\frac{x}{2}$ es la asíntota derecha. 4.99. $y_{\text{máx}}=y(1)=e$, $\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2},\ e^{1/2}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota 4.100. $y_{\text{máx}}=y(1)=$ $=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $y_{\text{mín}}=y(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$: $(0,\ 0)$, $\left(\pm\sqrt{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.101. $y_{\text{máx}}=y(1)=$ $=\frac{1}{e}$, $\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ (2\pm\sqrt{2})\,e^{-(2\mp\sqrt{2})}\right)$ son los puntos de inflexión; $x=0$ es la asíntota izquierda, $y=0$ es la asíntota. 4.102. $y_{\text{máx}}=$ $=y(\pm 1)=\frac{1}{e}$, $y_{\text{mín}}=y(0)=0$; $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ 3e^{-3}\right)$ y $\left(\pm\sqrt{2},\ \frac{1}{2}e^{-1/2}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.103. $y_{\text{mín}}=$ $=y(1)=e$; $y=x+1$ es la asíntota, $x=0$ es la asíntota derecha. **4.104.** $y_{\text{máx}}=y(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2e}}$, $y_{\text{mín}}=y(-\sqrt{2})=-\frac{1}{\sqrt{2e}}$, $\left(\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}},\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}\,e^{-\frac{1}{4}(5+\sqrt{17})}\right)$ y $\left(\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}},\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}\,e^{-\frac{1}{4}(5-\sqrt{17})}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.105. $y_{\text{máx}}=y(-2)=-4\sqrt{e}$, $y_{\text{mín}}=y(1)=-1/e$; $(0{,}4\ -1{,}6e^{-5/2})$ es el punto de inflexión; $x=0$ es la asíntota izquierda, $y=x-3$ es la asíntota. 4.106. $(1,\ e^2)$ es el punto de inflexión, $x=0$ es la asíntota derecha, $y=2x+3$ es la asíntota. 4.107. $y_{\text{máx}}=y(\pm 1)=2/\sqrt{e}$, $y_{\text{mín}}=y(0)=1$; $\left(\pm\sqrt{2-\sqrt{3}},\ (3-\sqrt{3})\,e^{-\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)$ y $\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{3}},(3+\sqrt{3})e^{-\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.108. $y_{\text{mín}}=y(1)=e^2$, $x=0$ es la asíntota derecha. 4.109. $y_{\text{máx}}=y(\sqrt{3})=3\sqrt{3}\,e^{-3/2}$, $y_{\text{mín}}=$ $=y(-\sqrt{3})=-3\sqrt{3}\,e^{-3/2}$; $(0,\ 0)$, $(\pm 1,\ \pm e^{-1/2})$, $(\pm\sqrt{6},\ \pm\sqrt{6}\,e^{-3})$ son los puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota. 4.110. $(0,\ 0)$ es el punto de inflexión 4.111. $y_{\text{máx}}=y(e)=\frac{1}{e}$, $\left(e\sqrt{e},\ \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ es el punto de inflexión; $x=0$ e $y=0$ son las asíntotas derechas. 4.112. $y_{\text{máx}}=y\left(\frac{1}{e}\right)=-e$; $x=1$ es la asíntota, $x=0$ e $y=0$ son las asíntotas derechas. 4.113. $y_{\text{mín}}=y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$; $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}},\ -\frac{3}{2e^3}\right)$ es el punto de inflexión 4.114. $y_{\text{máx}}=y(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$; $\left(\sqrt[6]{e^5},\ \frac{5}{6\sqrt[3]{e^5}}\right)$ es el punto de inflexión, $x=0$ e $y=0$ son las asíntotas derechas. 4.115. $y_{\text{máx}}=y(1/e)=1/e^2$, $y_{\text{mín}}=y(1)=0$;

$\left(e^{-1,5-\sqrt{1,25}}, \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} e^{-3-\sqrt{5}}\right)$ y $\left(e^{-1,5+\sqrt{1,25}}, \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} \times\right.$ $\left.\times e^{-3+\sqrt{5}}\right)$ son los puntos de inflexión. **4.116.** $y_{\text{máx}} = y(0) = 0$, $y_{\text{mín}} = y(\pm\sqrt{e}) = 2e$; $x = \pm 1$ son las asíntotas. **4.117.** $y_{\text{máx}} = y(1/e^2) = 4/e^2$, $y_{\text{máx}} = y(-1) = 0$, $y_{\text{mín}} = y(-1/e^2) = -4/e^2$; $(0, 0)$, $(\pm 1/\sqrt{e}, \pm 1/\sqrt{e})$ son los puntos de inflexión. **4.118.** $y_{\text{máx}} = y(0) = 0$; $x = \pm 1$ son las asíntotas. **4.119.** $y_{\text{máx}} = y(\pm e) = 1/e^2$, $y_{\text{mín}} = y(\pm 1) = 0$; $\left(\pm e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}}, \left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right)^2 e^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\right)$, $\left(\pm e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}}, \left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right)^2 e^{-\frac{5+\sqrt{13}}{2}}\right)$ son los puntos de inflexión; $x = 0$ e $y = 0$ son las asíntotas. **4.120.** $y_{\text{mín}} = y(1/e) = (1/e)^{1/e} \approx 0,69$, es convexa hacia las y negativas, $y \to 1$ para $x \to +0$, es decir, $M(+0, 1)$ es el punto final. **4.121.** $y_{\text{máx}} = y(e) = e^{1/e} \approx 1,44$; $(0,58, 0,12)$ y $(4,35, 1,4)$ son los puntos de inflexión; $M(+0, 0)$ es el punto final; $y = 1$ es la asíntota. ● Se puede no hallar los puntos de inflexión, es suficiente probar que éstos se encuentran de la ecuación $\ln^2 \dfrac{x}{e} + 2x \ln \dfrac{x}{e} - x = 0$. **4.122.** $x = 0$ es el punto de discontinuidad evitable ($y_-(0) = y_+(0) = e$), la función es decreciente, convexa hacia las y negativas, $x = -1$ es la asíntota vertical, $y = 1$ es la asíntota. **4.123.** $x = 0$ es el punto de discontinuidad evitable, $y = 0$ es la asíntota. Los puntos de extremo satisfacen la ecuación $\operatorname{tg} x = x$. Los puntos de inflexión satisfacen la ecuación $\operatorname{tg} x = \dfrac{2x}{2-x^2}$. ● Se puede no hallar los puntos de extremo y de inflexión. **4.125.** $x_{\text{mín}} = -1$ para $t = 1$ ($y(1) = 3$), $y_{\text{mín}} = -1$ para $t = -1$ ($x(-1) = 3$); una parábola cuyo vértice se encuentra en el origen de coordenadas y cuyo eje es la recta $y = x$ ($x > 0$, $y > 0$). **4.126.** $x_{\text{mín}} = y_{\text{mín}} = 1$ para $t = 0$ (punto de retroceso); $y = 2x$ es la asíntota cuando $t \to +\infty$. **4.127.** Astroide (véase § 3, cap. 2, fig. 27). **4.128.** $\left(-1, -3\pi, -1 + \dfrac{3\pi}{2}\right)$ es el máximo, $\left(1 - 3\pi, 1 - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ es el mínimo, $(-3\pi, 0)$ es el punto de inflexión, $y = x$ e $y = x + 6\pi$ son las asíntotas. **4.129.** Una rosácea de tres pétalos; $D = [0, \pi/3] \cup [2\pi/3, \pi] \cup [4\pi/3, 5\pi/3]$; los extremos tienen lugar para $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$, $\varphi = 3\pi/2$. **4.130.** Cardioide, el polo es un punto de retroceso, $r_{\text{máx}} = r(0) = 2a$, $r_{\text{mín}} = r(\pi) = 0$. **4.131.** $D = (0, +\infty)$; la línea da vueltas espiralmente en torno al polo, aproximándose hacia éste asintóticamente; $(\sqrt{2\pi}, 1/2)$ es el punto de inflexión; el eje polar ($\varphi = 0$) es una asíntota horizontal. **4.132.** Lemniscata de Bernoulli (véase § 3, cap. 2 fig. 21).

5.1. La recta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z}{4}$. **5.2.** En el plano Oxy un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ entre los puntos $(1, 1)$ y $(0, \sqrt{2})$ recorrido en sentido antihorario. 5.3. La rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{z}{9}=1$, $y=-1$, recorrida de abajo arriba si se mira por la parte del origen de coordenadas. 5.4. En el plano Oxy una parábola $y=\frac{1}{9}(6x-x^2)$ recorrida de izquierda a derecha. 5.5. La línea helicoidal $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$, $z=t$. 5.6. Astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}$, $z=0$. 5.7. La línea de corte de los cilindros $y=x^2$, $z=x^3$, recorrida de abajo arriba. 5.8. La *curva de Viviani* es una línea, donde se cortan la esfera y el cilindro circular: $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=x$. 5.9. Una elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, $z=2$. 5.10. Una parábola $y=x^2+x$, $z=3$, recorrida dos veces. 5.11. Una recta $4x+3y=0$, $z=0$; $v=3i-4j$. 5.12. Una parábola (en el plano Oxy) $y=\frac{1}{9}(12x-x^2)$; $v=3i+(4-2t)j$, $v|_{t=0}=3i+4j$, $v|_{t=1}=3i+2j$, $v|_{t=2}=3i$, $v|_{t=3}=3i-2j$. 5.13. Una cicloide (en el plano Oxy) $x=2(t-\operatorname{sen} t)$, $y=2(1-\cos t)$; $v=2(1-\cos t)\,i+2\operatorname{sen} t\cdot j$; cuando $t=\frac{\pi}{2}$, $v=2(i+j)$; cuando $t=\pi$, $v=4i$. 5.14. $0{,}6i-0{,}8j$. 5.15. $\frac{1}{\sqrt{5}}(2i-j)$. 5.16. a) $\cos t\cdot i-\operatorname{sen} 2t\cdot j+\cos 2t\cdot k$; b) $(\cos t-t\operatorname{sen} t)\,i+(\operatorname{sen} t+t\cos t)\,j+k$; c) $(1-\operatorname{sen} t)\,i+j+\cos t\cdot k$. 5.17. a) i; b) $12i-2j-\frac{2}{\sqrt{5}}k$. 5.18. $1+3t^2+5t^4$. 5.19. $(3t^2-2t)\,i+(3t^2-2t)\,j-2tk$. 5.20. $\cos t\,(i+2uj+3u^2k)$. 5.21. $x+2z=4$, $y=2$ (una tangente); $2x-z=3$ (un plano normal). 5.22. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-\frac{8}{3}}{2}=\frac{z-4}{3}$ (una tangente); $3x+6y+12z-70=0$ (un plano normal) 5.23. $y=z$, $x=a$ (una tangente); $y+z=0$ (un plano normal). 5.24. $\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$ (una tangente); $12x-4y+3z=12$ (un plano normal). 5.25. $\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$ (una tangente); $8x+10y+7z=12$ (un plano normal). 5.26. a) $\frac{d^2r}{dt^2}=-\cos t\cdot i+e^t j+2k$, $\left.\frac{d^2r}{dt^2}\right|_{t=0}=-i+j+2k$; b) $\frac{d^2r}{dt^2}=-(2\operatorname{sen} t+t\cos t)\,j+(2\cos t-t\operatorname{sen} t)\,k$; $\left.\frac{d^2r}{dt^2}\right|_{t=0}=2k$. 5.27. $w=2\operatorname{sen} t\cdot i+2\cos t\cdot j$; $w|_{t=\pi/2}=2i$; $w|_{t=\pi}=-2j$. 5.28. $w=-2j$, $w_\tau=\frac{4(t-2)}{\sqrt{4t^2-16t+25}}$, $w_n=\frac{6}{\sqrt{4t^2-16t+15}}$; para $t=0$ $w_\tau=-1{,}6$, $w_n=1{,}2$ ● $w_\tau=\frac{dv}{dt}$, $w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}$. 5.29. $w=i+\frac{1}{\sqrt{2t+1}}j$, $w_\tau=1$, $w_n=$

$=\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$; para $t=0$ $w=i+j$, $w_n=1$. 5.30. $K\,|_{x=0}=2$, $K\,|_{x=1}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$. 5.31. $K_A=3$, $K_B=1/9$. 5.32. $3/\sqrt{2}$. 5.33. $1/2$. 5.34. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 5.35. $K=\frac{3}{4a\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}$, $K\,|_{\varphi=\pi}=\frac{3}{4a}$. 5.36. $\frac{3}{a}$. 5.37. $\frac{(9x^{4/3}+1)^{3/2}}{6x^{1/3}}$. 5.38. $\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}$, 5.39. $\sqrt[3]{|axy|}$. 5.40. $\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}=\frac{(a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$. 5.41. $4a\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|$, 5.42. $\frac{a^2}{3r}$. 5.43. $\frac{(a^2+r^2)^{3/2}}{2a^2+r^2}$. 5.44. $\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ● Fórmese la expresión para la curvatura K y hállese su punto de extremo. 5.45. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{\ln 2}{2}\right)$. 5.46. $\left(0,\frac{a}{2}\right)$; $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$. 5.47. $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$; $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. 5.48. $\left(-1,\ e-\frac{1}{e}\right)$; $(x+1)^2+\left(y-e+\frac{1}{e}\right)^2=e^2$. 5.49. $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$; $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+y^2=1$. 5.50. $(\pi a,\ -2a)$; $(x-\pi a)^2+(y+2a)^2=16a^2$. 5.51. $X=\frac{x-9x^5}{2}$, $Y=\frac{15x^4+1}{6x}$. 5.52. $X^{2/3}-Y^{2/3}=(2a)^{2/3}$. 5.53. $(X+Y)^{2/3}+$ $+(X-Y)^{2/3}=2a^{2/3}$. 5.54. $Y=a\operatorname{ch}\frac{X}{a}$. 5.55. $X^2=\frac{4}{27}Y^3$. 5.56. $\tau=\frac{1}{\sqrt{3}}(i-j+k)$, $\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$; $\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}(-i+j+2k)$; $x-1=$ $=-(y-1)=z$ (una tangente); $x=y$, $z=0$ (normal principal); $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ (binormal). 5.57. $\tau=i$, $\nu=-\frac{1}{\sqrt{2}}(j+k)$, $\beta=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(j-k)$; $y=2$, $z=4$ (una tangente); $y-z+2=0$ $x=\pi$ (normal principal); $y+z=6$, $x=\pi$ (binormal). 5.58. $\tau=\frac{1}{3}(2i+j+2k)$, $\nu=\frac{1}{3}(-i-2j+2k)$, $\beta=\frac{1}{3}(2i-2j-k)$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ (una tangente); $\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{2}$ (normal principal); $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ (binormal). 5.59. $\tau=\frac{1}{\sqrt{18}}(i+j+4k)$, $\nu=-\frac{1}{3}(2i+2j-k)$, $\beta=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$; $x-1=y-1=\frac{z-2}{4}$ (tangente); $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$ (normal principal); $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}$ (binormal). **5.60.** $x+2y=3$ (plano osculador); $z=1$ (plano normal); $2x-y=1$ (plano rectificante). **5.61.** $y=x$ (plano osculador); $x+y=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (plano normal); $z=0$ (plano rectificante). **5.62.** $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{j}$, $y=0$, $z=1$. (tangente); $x=1$, $y=0$ (normal principal); $x=1$, $z=1$ (binormal); $y=0$ (plano osculador); $x=1$ (plano normal); $z=1$ (plano rectificante). **5.63.** $\boldsymbol{\tau}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$, $\boldsymbol{\nu}=-\frac{1}{\sqrt{30}}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{\sqrt{6}}\times$ $\times(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{0}$ (una tangente); $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=$ $=\frac{z-3}{5}$ (normal principal); $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$ (binormal); $x+2y-$ $-z-2=0$ (plano osculador); $2x-y=0$ (plano normal); $x+2y+$ $+5z-20=0$ (plano rectificante). **5.64.** $K=\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$, $\sigma=-\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$; para $t=0$ $K=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\sigma=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **5.65.** $K=2\sqrt{\frac{9t^4+9t^2+1}{(9t^4+4t^2+1)^3}}$, $\sigma=\frac{3}{9t^4+9t^2+1}$; para $t=0$, $K=2$, $\sigma=3$. **5.66.** $K=\sigma=\frac{1}{3(t^2+1)^2}$; para $t=1$ $K=\sigma=\frac{1}{12}$. **5.67.** $K=\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$, $\sigma=-\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$; para $t=1$ $K=\frac{2}{9}$, $\sigma=-\frac{2}{9}$. **5.68.** $K=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sigma=\frac{1}{3}$. **5.69.** $K=$ $=\sqrt{\frac{9y^4+4y^6+1}{(y^6+y^2+1)^3}}$, $\sigma=-\frac{6y}{9y^4+4y^6+1}$; para $y=1$ $K=\frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$; $\sigma=-\frac{3}{7}$. **5.70.** $\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k}$, $w_\tau=4t$, $w_\nu=2$; $w_\tau|_{t=1}=4$. ● $w_\tau=$ $=\frac{dV}{dt}$, $w_\nu=\frac{v^2}{R}$. **5.71.** La recta $x-y=2$; $z'(t)=e^{i\frac{\pi}{4}}$.

● Utilícese la fórmula de Euler $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi$. **5.72.** La semicircunferencia superior $y=\sqrt{4-x^2}$; $z'(t)=2ie^{it}$. **5.73.** Una elipse $x=4\cos t$, $y=2\operatorname{sen}t$; $z'(t)=i(3e^{it}-e^{-it})$. **5.74.** La rama derecha de una hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$; $z'(t)=(2+i)e^t-(2-$ $-i)e^{-t}$. **5.75.** La rama «derecha» (recorrida dos veces) de la parábola $y=x^2$; $z'(t)=2t+4it^3$. **5.76.** Un arco de la cicloide $x=t-$ $-\operatorname{sen}t$, $y=1-\cos t$; $z'(t)=1-e^{-it}$. **5.77.** La evolvente de una circunferencia $x=a(\cos t+t\operatorname{sen}t)$, $y=a(\operatorname{sen}t-t\cos t)$;

$z'(t) = ate^{it}$. 5.78. La espiral logarítmica $r = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$, $\alpha\beta \neq 0$; si $\alpha = 0$, entonces la función $r = 1$; si $\beta = 0$, el rayo $\varphi = 0$; $z'(t) = (\alpha + i\beta) \times \times e^{(\alpha+i\beta)t}$. 5.79. $r', r\varphi'$; $r'' - r\varphi'^2$, $2r'\varphi' + r\varphi''$. ● Represéntese la ley de movimiento en la forma exponencial $z = re^{i\varphi}$ y hállense las derivadas z' y z''. Las magnitudes buscadas son coeficientes de $e^{i\varphi}$ e $ie^{i\varphi}$. 5.80. La velocidad $v = izf'(z)$. ● Hágase uso de la forma exponencial del número complejo: $z = Re^{i\varphi}$ y hállese la derivada $\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$.

6.6. ◀ Según la condición $f(a) \cdot f(b) < 0$. Definamos los números x_n $(n = 0, 1, \ldots)$ mediante la igualdad

$$x_n = (a_n + b_n)/2,$$

donde $a_0 = a$, $b_0 = b$, $p_n = f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, y

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}, & \text{si} \quad p_n < 0, \\ x_{n-1}, & \text{si} \quad p_n \geqslant 0, \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{si} \quad p_n \leqslant 0, \\ b_{n-1}, & \text{si} \quad p_n > 0. \end{cases}$$

Obtendremos $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $n = 1, 2, \ldots$, con la particularidad de que $[a_n, b_n]$ es un segmento de aislación de la raíz, cuya longitud es 2^n veces menor que la del segmento inicial. En particular, $a_n = b_n = x_{n-1}$, si $f(x_{n-1}) = 0$.

El programa tiene la forma siguiente:

```
  SUBROUTINE FORK (F, A, B, N)
  K = 0
  AN = A
  BN = B
1 X = (AN + BN)/2
  S + F (X)
  IF (S.EQ.O.) CO TO 4
  IF (F (AN) * S.GT.0) GO TO 2
  BN = X
  GO TO 3
2 AN = X
3 K = K + 1
  IF (K.LT.N) GO TO 1
  A = AN
  B = BN
  RETURN
4 A = X
  B = X
  RETURN
  END
```

El programa dado puede emplearse también para hallar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el segmento $[a, b]$, tomando como valor de la raíz la magnitud $(a_n + b_n)/2$; en este caso el error absoluto límite es igual a $(b_n - a_n)/2^{n+1}$. ▶

6.8. 1,6702. 6.9. −0,6823. 6.10. −2,2340, 0,3276. 6.11. 2,8931. 6.12. −1,4305, 1,2963. 6.13. 2,0946. 6.14. −2,3300, 0,2016, 2,1284. 6.15. 0,3684. 6.16. −2,3247. 6.17. −0,7976, 1,4945. 6.18. 0,2510, 1,4934. 6.19. −0,7549. 6.20. 1,5160. 6.21. 3,3532. 6.22. 1,2970. 6.23. 1,2672. 6.24. 1,3713. 6.25. 1,7556. 6.26. 0,6529. 6.27. 0, 0,7469. 6.28. 4,0,3099. 6.29. −1,4916. 6.30. 0,5110. 6.31. 0,7391. 6.32. ±0,8241. 6.33. ±0,7339, 0. 6.34. 3,6926. 6.35. 1,8411. 6.36. 1,0967.

6.38.
```
      FUNCTION CHORD (F, A, B, S, EPS)
      FA = F (A)
      FB = F (B)
```

```
      X = A — (B — A) * FA/(FB — FA)
      X1 = X
      FX = F (X)
      IF (FA * FX.GT.0.) GO TO 2
    1 X = X — (X — A) * FX/(FX — FA)
      FX = F (X)
      DX = S * ABS (X — X1)
      X1 = X
      IF (DX.GT.EPS) GO TO 1
      CHORD = X
      RETURN
      2X = X — (B — X) * FX/(FB — FX)
      FX = F (X)
      DX = S * ABS (X — X1)
      X1 = X
      IF (DX.GT.EPS) GO TO 2
      CHORD = X
      RETURN
      END
```

6.39.
```
      FUNCTION TANGEN (F, FD, A, B, S, EPS)
      FA = F (A)
      C = A — (B — A) * FA/(F (B) — FA.
      P = FA * F (C)
      IF (P) 2, 1, 3
    1 TANGEN = C
      RETURN
    2 X = A
      GO TO 4
    3 X = B
    4 X1 = X
      X = X — F (X)/FD (X)
      IF (S * (X1 — X)** 2.GT.EPS) GO TO 4
      TANGEN = X
      RETURN
      END
```

6.40.
```
      FUNCTION COMBI (F, FD, A, B, EPS)
      FA = F (A)
      FB = F (B)
      X = A — (B — A) * FA/(FB — FA)
      FX = F (X)
      IF (FA * FX.GT.0) GO TO 2
      XT = A
```

```
1 X = X - (X - A) * FX/(FX - FA)
  FX = F (X)
  XT = XT - F (XT)/FD (XT)
  IF (ABS (X - XT).GT.EPS) GO TO 1
  COMBI = (X + XT)/2.
  RETURN
2 XT = B
3 X = X - (B - X) * FX/(FB - FX)
  FX = F (X)
  XT = XT - F (XT)/FD (XT)
  IF (ABS (X - XT).GT.EPS) GO TO 3
  COMBI = (X + XT)/2.
  RETURN
  END
```

6.41. Respuesta al problema 6.8:

```
FUNCTION F (X)
F = X** 3 + 2. * X - 8.
RETURN
END
```

Las respuestas a otros problemas difieren en segundos operadores.

6.42. El problema para una computadora electrónica consta de tres unidades de programa: función subprograma FUNCTION F (X), función subprograma FUNCTION CHORD (F, A, B, S, EPS) y programa principal que para el problema 6.17 tiene la forma siguiente:

```
  EXTERNAL F
  ROOT1 = CHORD (F, -1, -0.5, 1.4, 0.0001)
  ROOT2 = CHORD (F, 1.2, 1.8, 3.4, 0.0001)
  WRITE (3,1) ROOT1, ROOT2
1 FORMAT ('LAS RAICES DE LAS ECUACIONES', F8.4, 'Y', F8.4)
  STOP
  END
```

6.43. El problema para una computadora electrónica contiene 4 unidades de programa. La respuesta al problema 6.35 tiene la forma siguiente:

1) Función subprograma para el cálculo de los valores de la función:

```
FUNCTION F (X)
F = X** 2 + ALOG (X) - 4.
RETURN
END
```

2) función subprograma para el cálculo de los valores de la derivada:

```
FUNCTION FD (X)
FD = 2. * X + 1./X
RETURN
END
```

3) Función subprograma para el cálculo de la raíz, empleando el método de las tangentes:

```
  FUNCTION TANGEN (F, D, A, B, S, EPS)
```

4) programa principal:

```
  EXTERNAL F, FD
  ROOT = TANGEN (F, FD). 1., 2., 0.3, 1E — 4)
  WRITE (3,1) ROOT
1 FORMAT ('RAÍZ =', F6.4)
  STOP
  END
```

6.44. Véase la respuesta al problema 6.43. El programa principal para el problema 6.35 tiene la forma siguiente:

```
  EXTERNAL F, FD
  ROOT = COMBI (F, FD, 1., 2., 1E — 4)
  WRITE (3,1) ROOT
1 FORMAT (12H RAÍZ =, F6.4)
  STOP
  END
```

6.45. y **6.46.** ● Hágase uso del método de inducción matemática. **6.47.** $f\left(\frac{12}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{10} = 0{,}9511 \pm 0{,}0001$. **6.48.** $\ln 11 = 2{,}3979 \pm \pm 0{,}0003$. ● Con el fin de hallar los valores de la función en los nudos de interpolación, hágase uso de las ecuaciones $\ln 9 = 2 \ln 3$, $\ln 10 = \ln 5 + \ln 2$, $\ln 12 = 2 \ln 2 + \ln 3$, $\ln 15 = \ln 5 + \ln 3$. **6.49.** $f(1{,}26) = 1{,}105$, $f(1{,}58) = 1{,}261$. **6.50.** $f(1{,}89) = 2{,}092$, $f(2{,}43) = 3{,}144$. **6.51.** $f(0{,}83) = 0{,}817$, $f(0{,}97) = 0{,}942$. **6.52.** $f(1{,}74) = 1{,}2148$, $f(1{,}97) = 1{,}0007$. **6.53.** $f(2{,}72) = 1{,}5463$, $f(2{,}93) = 0{,}9805$. **6.54.** $f(23) = 0{,}921$, $f(41) = 0{,}755$. **6.55.** $f(1{,}3) = 1{,}184$ $f(4{,}0) = 1{,}758$. **6.56.** $f(0{,}20) = 0{,}1987$, $f(0{,}41) = 0{,}3990$. **6.57.** $f(1{,}25) = 0{,}0771$, $f(1{,}76) = 0{,}0128$. **6.58.** $f(58) = 0{,}275$, $f(79) = -0{,}291$. **6.59.** $\mathrm{Si}\,(0{,}26) = 0{,}25903$, $\mathrm{Si}\,(0{,}45) = 0{,}44497$. **6.60.** $\Phi(0{,}27) = 0{,}29742$ $\Phi(0{,}58) = 0{,}58792$. **6.62.** 1,82. **6.63.** 1,45. **6.64.** 2,3. **6.65.** 60° 30′.

6.66.

```
  SUBROUTINE DEL (X, Y, N)
  DIMENSION X (N), Y (N)
  N1 = N — 1
  DO 2 I = 1, N1
  A = Y (I)
  DO 1 K = I, N1
  C = X (K) — X (K + I)
  B = (Y (K) — Y (K + 1))/C
  Y (K) = A
```

6.67.

```
  SUBROUTINE DELTA (Y, N)
  DIMENSION Y (N)
  N1 = N — 1
  DO 2 I = 1, N1
  A = Y (I)
  DO 1 K = I, N1
  B = Y (K + 1) — Y (K)
  Y (K) = A
1 A = B
```

```
1 A = B                              2 Y (N) + A
2 Y (N) = A                            RETURN
  RETURN                               END
  END
```

El programa del problema 6.67 se aclara por el siguiente esquema (N = 6):

$$\begin{array}{llllll}
y_1 & & & & & \\
y_2 & \Delta y_1 & & & & \\
y_3 & \Delta y_2 & \Delta^2 y_1 & \Delta^3 y_1 & & \\
y_4 & \Delta y_3 & \Delta^2 y_2 & \Delta^3 y_2 & \Delta^4 y_1 & \Delta^5 y_1 \\
y_5 & \Delta y_4 & \Delta^2 y_3 & \Delta^3 y_3 & \Delta^4 y_2 & \\
y_6 & \Delta y_5 & \Delta^2 y_4 & & &
\end{array}$$

Al haberse realizado los operadores del ciclo exterior, para I = 3 la tabla Y contendrá las magnitudes y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^3 y_2$, $\Delta^3 y_3$, y finalizado todo el programa, las magnitudes y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^4 y_1$, $\Delta^5 y_1$.

6.68.

```
  FUNCTION POLINT (X, Y, N, KEY, ARG)
  DIMENSION X (N), Y (N)
  N1 = N - 1
  IF (KEY) 4, 1, 4
1 DO 3 I = 1, N1
  A = Y (I)
  DO 2 K = I, N1
  B = (Y (K) - Y (K + 1))/(X (K) - X (K + 1))
  Y (K) = A
2 A = B
3 Y (N) = A
4 POLINT = Y (N)
  DO 5 K = 1, N1
5 POLINT = POLINT * (ARG - X (N - K)) + Y (N -
  - K)
  RETURN
  END
```

6.69.

```
  SUBROUTINE POLIN (X, Y, N, KEY, ARG, P, E, EPS)
  DIMENSION X (N), Y (N)
  N1 = N - 1
  IF (KEY) 4, 1, 4
1 DO 3 I = 1, N1
  A = Y (I)
  DO 2 K = I, N1
```

```
      B = (Y (K) — Y (K + 1))/(X (K) — X (K + 1))
      Y (K) = A
    2 A = B
    3 Y (N) = A
    4 P = Y (1)
      EPS = 1
      DO 5 I = 1, N1
      EPS = EPS * (ARG — X (I))
    5 P = P + EPS * Y (I + 1)
      EPS = EPS * Y (N)
      EPS = ABS (EPS)
      RETURN
      END
```

El polinomio de interpolación se calcula según el esquema:

$$p_{n-1}(x) = (\ldots((Y(N)(x - X(N-1) + Y(N-1))(x - \\ - X(N-2)) + Y(N-2))\ldots)(x - X(1)) + Y(1),$$

donde todas las expresiones entre paréntesis se calculan sucesivamente, partiendo de los paréntesis interiores.

6.70.

```
      FUNCTION POLIN (X, H, Y, N, KEY, ARG)
      DIMENSION Y (N)
      M = N — 1
      IF (KEY) 5, 1,5
    1 DO 3 I = 1, M
      A = Y (I)
      DO 2 K = I, M
      B = Y (K + 1) — Y (K)
      Y (K) = A
    2 A = B
    3 Y (N) = A
      F = 1.
      DO 4 I = 3, N
      FI = I — 1
      F = F * FI
    4 Y (I) = Y (I)/F
    5 T = (ARG — X)/H
      POLIN = Y (N)
      DO 6 K = 1, M
    6 POLIN = POLIN * (T — M + K) + Y (N — K)
      RETURN
      END
```

6.71. El problema para una computadora electrónica debe contener dos unidades de programa:

a) función subprograma

```
FUNCTION POLIN (X, H, Y, N, KEY, ARG)
```

b) programa principal que para el problema 6.50 tiene la forma:

```
  DIMENSION  Y (8)
  DATA Y/1.958, 2.107, 2.268, 2.443, 2.632, 2.841, 3.071, 3.324/
  P1 = POLIN (1.8, 0.1, Y, 8, 0,1.89)
  P2 = POLIN (1.8, 0.1, Y, 8, 1, 2.43)
  WRITE (3,1) P1, P2
1 FORMAT ('F (1.89) =', F5.3', F (2.43) =' , F5.3)
  STOP
  END
```

6.72. a) La función subprograma:

```
FUNCTION POLINT (X, Y, N, KEY, ARG)
```

b) programa principal (al 6.63):

```
  DIMENSION X (6), Y (6)
  DATA X/1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6/, Y/2.431, 2.928, 3.497, 4.144,
  4.875, * 5.696/
  XO = POLINT (Y, X, 6, 0, 4.498)
  WRITE (3,1) XO
1 FORMAT (30X, 'F(',F3.2,') = 4.498')
  STOP
  END
```

En el acceso a la función subprograma POLINT el primer parámetro es, para las designaciones cualesquiera, una tabla de los nudos de interpolación, y el segundo, la tabla de los valores correspondientes de la función.

6.73. a) El subprograma:

```
SUBROUTINE POLYN (X, Y, N, KEY, ARG, P, EPS)
```

b) el programa principal (al 6.62):

```
  DIMENSION X (8), Y (8)
  DATA X/1.5, 1.55, 1.6, 1.65, 1.7, 1.75, 1.8, 1.85/, Y/—1.125,
  —0.926, *—0.704, —0.458, —0.187, 0.109, 0.432, 0.732/
  CALL POLYN (Y, X, 8, 0, 0.569, POLY, EPSI)
  WRITE (3,1) POLY, EPSI
1 FORMAT ('F (X) = 0.569, DONDE X =' , F4.2, *' CON EXA-
  CTITUD DE HASTA', F5.4)
  STOP
  END
```

6.74. $f'(2{,}03) = 1{,}42249$, $f'(2{,}22) = 1{,}87640$. **6.75.** $f'(1{,}14) = 1{,}0704$, $f'(1{,}42) = 1{,}1698$. **6.76.** $f'(3{,}02) = 5{,}63133$, $f'(3{,}31) = 7{,}34833$. **6.77.** $f'(0{,}82) = 0{,}8077$, $f'(1{,}03) = 0{,}9914$. **6.78.** $f'(1{,}34) = 0{,}1873$, $f'(1{,}65) = 0{,}0741$. **6.79.** $f'(2) = 9$, $f''(2) = 12$. **6.80.** $f'(2{,}5) = 63{,}5$, $f''(2{,}5) = 75$.

6.81.

```
  FUNCTION DW1 (T, N)
  TN = N
  S = 0.
  DW1 = 1.
  D = 0.
1 IF ((T - S).EQ.0.) GO TO 3
  DW1 = DW1 * (T - S)
  D = D + 1./(T - S)
  S = S + 1
  IF (S.LE.TN) GO TO 1
  DW1 = DW1 * D
  RETURN
2 DW1 = DW1 * (T - S)
3 S = S + 1.
  IF (S.LE.TN) GO TO 2
  RETURN
  END
```

● Para $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t-k)$, $n = 0, 1, \ldots,$

$$w'_n(t) = \begin{cases} w_n(t) \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{t-k}, & t \neq \nu, \\ \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq\nu}}^{n} (t-k), & t = \nu, \end{cases} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

6.82.

```
  FUNCTION DW2 (T, N)
  TN = N
  TK = 0.
  S1 = 0.
  S2 = 0.
  DW2 = 1.
  IF (T.EQ.0) GO TO 4
1 S1 = S1 + .1/(T - TK)
  DW2 = DW2 * (T - TK)
  TK = TK + 1.
  IF ((T - TK).EQ.O) GO TO 5
  S2 = S2 + (1./T - TK)) * S1.
2 IF (TK.LT.TN) GO TO 1
  DW2 = DW2 * (T - TN)
3 DW2 = DW2 * S2
  RETURN
4 TK = TK + 1.
  GO TO 1
5 IF (T.EQ.TN) GO TO 3
  TK = TK + 1.
  S2 = (1./(T - TK)) * S1
  GO TO 2
  END
```

● Para $w_n(t) = \prod_{k=0}^{n} (t-k)$

$$w''_n(t) = \left(w_n(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k} \right)' = w'_n(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k} + w_n(t) \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k} \right)' =$$

$$= w_n(t)\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}\right)^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(t-k)^2}\right)=$$

$$=2w_n(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{t-j}=$$

$$=2w_n(t)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t-j}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{t-k}\quad \text{para}\quad t\neq\nu,$$

$$w''_n(t)=2\prod_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{n}(t-k)\sum_{j=\nu+1}^{n}\frac{1}{t-j}\sum_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{j-1}\frac{1}{t-k}$$

$$\text{para}\quad t=\nu,\ \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

6.83.

```
      FUNCTION POLID1 (X, H, Y, N, KEY, ARG)
      DIMENSION Y (N)
      M = N - 1
      IF (KEY) 5, 1, 5
    1 DO 3 I = 1, M
      A = Y (I)
      DO 2 K = I, M
      B = Y (K + 1) - Y (K)
      Y (K) = A
    2 A = B
    3 Y (N) = B
      F = 1.
      DO 4 I = 3, N
      FI = I - 1
      F = F * FI
    4 Y (I) = Y (I)/F
    5 T = (ARG - X)/H
      POLID1 = Y (2)
      DO 6 I = 2, M
    6 POLID1 = POLID1 + DW1 (T, I - 1) * Y (I + 1)
      RETURN
      END
```

6.84. La función-subprograma

```
FUNCTION POLID2 (X, H, Y, N, KEY, ARG)
```

se diferencia del subprograma del problema 6.83 en los siguientes tres operadores (quinto, cuarto y tercero a contar del fin):

```
  POLID2 = Y (3)
  DO 6 I = 3, M
6 POLID2 = POLID2 + DW2 (T, I — 1) * Y (I + 1)
```

6.85. El problema para una computadora electrónica debe contener tres unidades de programa:

a) función-programa FUNCTION DW1 (T, N)

b) función-subprograma

FUNCTION POLID1 (X, H, Y, N, KEY, ARG)

c) programa principal que para el problema 6.75 tiene la forma siguiente:

```
  DIMENSION Y (8)
  DATA Y/1.0083, 1.1134, 1.2208, 1.331, 1.4449, 1.5634. 1.6876,
  1.8186/
  DX1 = POLID1 (1., 0.1, Y, 8,0, 1.14)
  DX2 = POLID1 (1., 0.1, Y, 8, 1, 1.42)
  WRITE (3,1) DX1,DX2
1 FORMAT ('VALORES DE LA DERIVADA', F7.4, *'PARAX =
  = 1.14 Y', F7.4, 'PARA X = 1.42')
  STOP
  END
```

6.86. El problema para una computadora electrónica debe contener cinco unidades de programa

funciones subprogramas:

a) FUNCTION DW1 (T, N)

b) FUNCTION DW2 (T, N)

c) FUNCTION POLID1 (X, H, Y, N, KEY, ARG)

d) FUNCTION POLID2 (X, H, Y, N, KEY, ARG)

e) programa principal que para el problema 6.79 tiene la forma siguiente:

```
  DIMENSION Y (6)
  DATA Y/1., 5., 21., 55., 113., 201./
  D1 = POLID1 (., 1., Y, 6, 0,2.)
  D2 = POLID2 (1., 1., Y, 6, 1, 2.)
  WRITE (3, 1) D1, D2
1 FORMAT ('PARA X = 2 1 raDERIVADA = ', F4.1, *'2 — DA =
  = ', F4.1)
  STOP
  END
```

CAPÍTULO 6

CÁLCULO INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

§ 1. Métodos principales de cálculo de la integral indefenida

1. Función primitiva e integral indefenida. Una función $F(x)$ se denomina función *primitiva* $f(x)$, definida en cierto conjunto X, si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Si $\Phi(x)$ y $F(x)$ son dos primitivas de una misma función $f(x)$, entonces

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

donde $C = \text{const}$. Viceversa, si $F(x)$ es una función primitiva $f(x)$, entonces $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ es la totalidad de todas las primitivas suyas llamada *integral indefenida* de la función $f(x)$ y denotada por el símbolo $\int f(x)\,dx$. De este modo, por definición

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}, \tag{1}$$

donde $F(x)$ es una de las funciones primitivas de $f(x)$, y la constante C toma valores reales.

De acuerdo con la tradición, la igualdad (1) se anota sin una designación explícita del conjunto en el segundo miembro, es decir, en la forma

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

denominándose C constante arbitraria.

Propiedades de la integral indefenida

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$.

3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a \neq 0$.

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$.

Tabla de las integrales indefenidas principales

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+2} + C, \quad (n \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$

3. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \; (a > 0, \; a \neq 1; \quad \int e^x \, dx = e^x + C.$

4. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$

10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \; (a \neq 0).$

11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad |x| > |a|.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$

15. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C.$

16. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Hállense las funciones primitivas de las siguientes funciones:

1.1. $2x^7$. **1.2.** $4\sqrt[3]{x}$. **1.3.** $\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}$.

1.4. $\frac{x^3+5x^2-1}{x}$. **1.5.** $\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}$.

1.6. $1-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$. **1.7.** $\frac{1}{\sqrt{a+bx}}$. **1.8.** e^{2-3x}.

1.9. $\frac{1}{\sqrt[3]{5x}}$. **1.10.** $\frac{1}{\cos^2 4x}$. **1.11.** $\frac{x^3+1}{x-1}$.

1.12. $1-8\operatorname{sen}^2 2x\cos^2 2x$.

1.13. $\left(\cos^2\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)^2$.

1.14. $\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)+\operatorname{sen}(\alpha+x)\operatorname{sen}(\alpha-x)$.

El proceso de búsqueda de una integral indefenida con ayuda de la tabla de integrales principales y transformaciones idénticas lleva el nombre de integración inmediata.

EJEMPLO 1. Calcúlese $\int\frac{dx}{x^2-x^4}$.

◀ $$\int\frac{dx}{x^2-x^4}=\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}=\int\frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}\,dx=$$
$$=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1-x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$ ▶

Haciendo uso de la tabla de las integrales principales, hállense las siguientes integrales:

1.15. $\sqrt{mx}\,dx$. **1.16.** $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$. **1.17.** $\int\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}dx$.

1.18. $\int\frac{x^3+2}{x}\,dx$. **1.19.** $\int 2^x e^x\,dx$.

1.20. $\int(2x+3\cos x)\,dx$. **1.21.** $\int\frac{2-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$.

1.22*. a) $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$; b) $\operatorname{th}^2 x\,dx$. **1.23.** $\int\frac{dx}{x^2+4}$.

1.24. $\frac{dx}{5-x^2}$. **1.25.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

1.26. $\int\frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$. **1.27.** $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$.

1.28. $\int (x+a)(x+b)\,dx$. **1.29.** $\int (a^{1/3}+x^{1/3})^3\,dx$.

1.30. $\int \frac{\cos^2 x+3\cos x-2}{\cos^2 x}\,dx$.

1.31. a) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; b) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

1.32. $\int \frac{dx}{x^2-7}$. **1.33.** $\int \frac{x^2-9}{x^2-8}\,dx$.

2. Integración por cambio de variable. Existen dos variantes de este método.

a) *Método en el que una función se toma bajo el signo de la diferencial.* Sea que se requiere calcular la integral $\int f(x)\,dx$. Supongamos que existen las funciones derivables $u=\varphi(x)$ y $g(u)$ tales que la expresión subintegral $f(x)\,dx$ pueda ser escrita en la forma

$$f(x)\,dx=g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=g(u)\,du$$

(la transformación mencionada se denomina introducción de $u=$ $=\varphi(x)$ bajo el signo de la diferencial). Observemos que se verifica la relación

$$\int f(x)\,dx=\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du\,\Big|_{u=\varphi(x)}.$$

Por ello, el cálculo de la integral $\int f(x)\,dx$ se reduce al cálculo de otra integral $\int g(u)\,du$ (la cual puede resultar más simple que la inicial) y a la sustitución ulterior de $u=\varphi(x)$.

EJEMPLO 2. Calcúlese la integral $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx=\int \operatorname{sen}^3 x\,d(\operatorname{sen} x)=\int u^3\,du=$$
$$=\frac{u^4}{4}\Big|_{u=\operatorname{sen} x}+C=\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4}+C.$$ ▶

EJEMPLO 3. Calcúlese la integral $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx=\int \frac{d(x^2+x-3)}{x^2+x-3}=\int \frac{du}{u}=$$
$$=\ln|u|\,\Big|_{u=x^2+x-3}+C=\ln|x^2+x-3|+C.$$ ▶

La operación de introducción de la función $\varphi(x)$ bajo el signo de diferencial es equivalente a la sustitución de la variable x por una variable nueva $u = \varphi(x)$.

EJEMPLO 4. Calcúlese la integral $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$.

◀ Realicemos el cambio de la variable según la fórmula

$$u = 3x + 1.$$

Entonces, $du = 3\,dx$, es decir, $dx = \frac{1}{3}\,du$ y

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{2/3}} = u^{1/3}\Big|_{u=3x+1} + C = \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

La transformación ejecutada es equivalente a la puesta de la función $u = 3x + 1$ bajo el signo de diferencial. ▶

Calcúlense las integrales con ayuda de un cambio adecuado:

1.34. $\int \sqrt{3+x}\,dx$. **1.35.** $\int (3-4\,\mathrm{sen}\,x)^{1/3}\cos x\,dx$.

1.36. $\int \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,x\,dx$. **1.37.** $\int \frac{\sec^2 x}{\mathrm{tg}^4 x}\,dx$.

1.38. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$. **1.39.** $\int \frac{dx}{a+bx}$.

1.40. $\int \frac{\sec^2 x}{a-b\,\mathrm{tg}\,x}\,dx$. **1.41.** $\int \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}{2-3\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{\sqrt{2}}}\,dx$.

1.42. $\int \mathrm{ctg}\,x\,dx$. **1.43.** $\int 3^{4x}\,dx$.

1.44. $\int \cos(ax+b)\,dx$. **1.45.** $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,\frac{dx}{x}$.

1.46. $\int \mathrm{sen}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **1.47.** $\int \frac{dx}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

1.48. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 3x}$. **1.49.** $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx$.

1.50. $\int x\cdot 5^{-x^2}\,dx$. **1.51.** $\int \frac{dx}{1-4x^2}$.

1.52. $\int \frac{e^{-ax}}{1+e^{-2ax}}\,dx$. **1.53.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5-3x^2}}$.

1.54. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$. 1.55. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$,

1.56. $\int \frac{x^3\, dx}{x^8+1}$. 1.57. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

1.58. $\int \frac{dx}{a^2+b^2x}$. 1.59. $\int \frac{\operatorname{sen} ax}{\cos^3 ax}\, dx$.

1.60. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x\, dx$. 1.61. $\int \frac{e^x}{(7-e^x)^2}\, dx$.

1.62. $\int \operatorname{tg} x\, dx$. 1.63. $\int \operatorname{cth} 4x\, dx$.

1.64. $\int \frac{a^{1/x}}{x^2}\, dx$. 1.65. $\frac{x\, dx}{\operatorname{ch}^2 (x^2+1)}$.

1.66. $\int \frac{dx}{(a-b)\, x^2-(a+b)}$ $(0<b<a)$.

1.67. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$. 1.68. $\int \frac{x\, dx}{4x^2+7}$.

1.69. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^6+1}}$. 1.70. $\int \frac{a^x}{\sqrt{a^{2x}-1}}\, dx$.

Hállense las integrales indefenidas aplicando diferentes procedimientos:

1.71*. $\int \frac{x-1}{(x+2)^2}\, dx$. 1.72. $\int \frac{x^2}{3+x^2}\, dx$.

1.73. $\int \frac{x^2-2x+3}{x^2+4}\, dx$. 1.74. $\int \frac{x\, dx}{a^2x^4-b^2}$.

1.75. $\int \frac{x^3}{9-4x^8}\, dx$. 1.76. $\int \frac{x^4+1}{x^5+5x-8}\, dx$.

1.77. $\int x^3 \sqrt[4]{5x^4-3}\, dx$.

1.78. $\int \left(3-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.79. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$. 1.80. $\int \frac{a^2+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a^2+b^2x^2}\, dx$.

1.81. $\frac{dx}{\sqrt[5]{a^x}}$. 1.82. $\int e^x \sqrt[3]{4+e^x}\, dx$.

1.83. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}\, dx$. 1.84*. $\int \frac{dx}{2^x+1}$.

1.85. $\int \frac{e^{\arcsin x}+x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

1.86. $\int \frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,$ 1.87. $\int \sqrt{3-\operatorname{ch} x}\,\operatorname{sh} x\,dx.$

1.88. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}.$ 1.89. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}.$

1.90*. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$ 1.91*. $\int \cos^2 x\,dx.$

1.92. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}}.$ 1.93. $\int (\operatorname{sen} ax+\cos ax)^2\,dx.$

1.94. $\int \frac{x^2}{\cos(x^3)}\,dx.$ 1.95. $\int \frac{(1+\cos 2x)^3}{\cos 2x}\,dx.$

1.96. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{3-\cos^2 x}}\,dx.$ 1.97. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos^4 x+3}}\,dx.$

1.98*. $\frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}.$ 1.99. $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}\sqrt{3}\,x}.$

1.100. $\int \operatorname{th} ax\,dx.$

1.101. $\int \operatorname{tg}^2(ax+b)\,dx.$

1.102. $\int x^2\operatorname{ctg}^2(x^3-3)\,dx.$

1.103. $\int e^{\sec x}\operatorname{tg} x\sec x\,dx.$

b) *Método de sustitución.* Supongamos que se requiere calcular la integral $\int f(x)\,dx$, donde la función $f(x)$ está definida en cierto conjunto X. Introduzcamos una nueva variable u mediante la fórmula

$$x=\varphi(u)\colon\ U\to X,$$

donde la función $\varphi(u)$ es derivable en cierto conjunto U y realiza una aplicación biunívoca de U sobre X, es decir, tiene su inversa

$$u=\varphi^{-1}(x)\colon X\to U.$$

Al sustituir $x=\varphi(u)$ en la expresión subintegral inicial, obtenemos

$$f(x)\,dx=f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du=g(u)\,du.$$

Luego, resulta válida la igualdad

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du\,\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)} = \int g(u)\,du\,\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)},$$

es decir, el cálculo de la integral $\int f(x)\,dx$ se reduce al cálculo de otra integral $\int g(u)\,du$ (la cual puede resultar más simple que la de partida) y la sustitución ulterior $u = \varphi^{-1}(x)$.

EJEMPLO 5. Calcúlese la integral $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

◀ En el caso que se considera el campo de definición de la función subintegral es $X = [0, +\infty)$. Realicemos la sustitución

$$x = \varphi(u) = u^2, \quad u \in [0, +\infty).$$

Entonces, $dx = 2u\,du$, $u = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$, de donde

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{u^3+u}{u+1}\,du = 2\int (u^2-u+2)\,du - 4\int \frac{du}{u+1} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 2u\right) - 4\ln(u+1) + C\,\Big|_{u=\sqrt{x}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x + 2x^{1/2}\right) - 4\ln(\sqrt{x}+1) + C. \ \blacktriangleright$$

Empleando las sustituciones indicadas, hállense las integrales:

1.104. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$, $\quad x = (1-t^2)^{1/3}$.

1.105. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, $\quad x = \frac{2}{t}$.

1.106. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$, $\quad x = t^2$.

1.107. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$, $\quad x = \ln t$.

Aplicando las sustituciones adecuadas, hállense las integrales:

1.108. $\int x(5x-1)^{19}\,dx$. **1.109.** $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$.

1.110. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$. **1.111.** $\int \frac{x}{(3-x)^7}\,dx$.

1.112. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$. **1.113.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

3. **Integración por partes.** Si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones derivables, se verifica la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (2)$$

Esta fórmula se usa en aquellos casos cuando la expresión subintegral $f(x)\,dx$ puede ser representada en la forma $u\,dv$ de modo tal que la integral en el segundo miembro de (2) pueda resultar más sencilla que la integral inicial, siempre que se elijan adecuadamente las expresiones de u y dv. En este caso se debe tomar en consideración que u ha de reunir los factores que se simplifican en la derivación. Por ejemplo, si bajo el signo de integral figura el producto de un polinomio por una función trigonométrica o exponencial, u debe incorporar el polinomio, mientras que la expresión restante debe formar parte de dv. La fórmula (2) puede aplicarse más de una vez.

Ejemplo 6. Hállese $\int x^2 \cos x\,dx$.

◀ Suponemos $u = x^2$ y $dv = \cos x\,dx$. En este caso $du = 2x\,dx$ y $v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ (la constante C aquí se supone igual a cero, es decir, a título de v se toma una de las primitivas). De acuerdo con la fórmula (2) se tiene

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Apliquemos otra vez la fórmula de integración por partes a la integral que figura en el segundo miembro, con la particularidad de que u nuevamente incorpora el polinomio (es decir, $2x$). Tenemos: $u = 2x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. De aquí

$$du = 2\,dx \text{ y } v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x.$$

Aplicando la fórmula (2), obtenemos en definitiva:

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - \left(-2x\cos x - \int (-\cos x)\,2\,dx\right) =$$
$$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C. \ ▶$$

Si la función subintegral contiene en calidad de factor una función logarítmica o trigonométrica inversa, éstas últimas deben tomarse por u, puesto que se simplifican como resultado de la derivación.

Ejemplo 7. Hállese $\int \ln x\,dx$.

◀ Suponemos $u = \ln x$, $dv = dx$. Entonces, $du = \frac{dx}{x}$ y $v = \int dx = x$. Sustituyendo en la fórmula (2), hallamos

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C. \ ▶$$

A veces, aplicada dos veces la fórmula de integración por partes, aparece en el segundo miembro una expresión que contiene la integral de partida, es decir, obtenemos una ecuación con la integral buscada a título de incógnita.

EJEMPLO 8. Hállese $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$.

◀ Suponemos $u = e^{ax}$, $dv = \operatorname{sen} bx\, dx$. Entonces, $du = ae^{ax}\, dx$, $v = -\frac{1}{b} \cos bx$. Sustituyendo en (2), tenemos

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Ahora suponemos $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\, dx$. Entonces, $du = ae^{ax}\, dx$, $v = \frac{1}{b} \operatorname{sen} bx$ y

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \left(\frac{e^{ax}}{b} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx \right).$$

De resultas se ha obtenido una ecuación respecto de la integral desconocida $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$. Resolviendo esta ecuación, hallamos

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = e^{ax} \frac{a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{b^2} + C_1,$$

o bien

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^{ax} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C. \ ▶$$

Hállense las integrales aplicando la fórmula de integración por partes:

1.114. $\int \arccos x\, dx$. **1.115.** $\int x \cos x\, dx$.

1.116. $\int x \ln x\, dx$. **1.117.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

1.118. $\int (x^2 - x + 1) \ln x\, dx$. **1.119.** $\int x^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

1.120. $\int x^2 e^{-x}\, dx$. **1.121.** $\int x^3 e^x\, dx$.

1.122*. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$. **1.123.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$.

1.124. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$. **1.125.** $\int \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\, dx$.

1.126. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$. **1.127.** $\int e^{\arccos x}\, dx$.

1.128. $\int \ln (x + \sqrt{1 + x^2})\, dx$. **1.129.** $\int x^3 \ln x\, dx$.

1.130. $\int x3^x\,dx$. **1.131.** $\int (x^2-2x+3)\cos x\,dx$.

1.132. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. **1.133.** $\int \cos(\ln x)\,dx$.

Hállense las integrales, empleando métodos diferentes:

1.134*. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. **1.135.** $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$.

1.136. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}\,dx$. **1.137.** $\int x\operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

1.138. $\int \frac{\cos^2 x}{e^x}\,dx$. **1.139*.** $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$.

1.140.** Dedúzcase la fórmula recurrente para la integral $I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Hállense I_2 y I_3.

Hállense las integrales:

1.141.** $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$. **1.142**.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

1.143. $\int x\operatorname{arcsen} x\,dx$. **1.144.** $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$.

1.145. $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$. **1.146.** $\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

1.147*. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

§ 2. Integración de las clases principales de funciones elementales

1. Integrales elementales que contienen un trinomio de segundo grado. Las *integrales del tipo*

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

se reducen a las integrales tabulares 10—14 (véase el p. 1, § 1) *formando un cuadrado perfecto* en el trinomio de segundo grado.

Ejemplo 1. Hállese $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$.

◀ Tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+2)^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C. \ ▶$$

Las *integrales de la forma*

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx \quad \text{y} \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

se reducen a las del tipo

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

formando en el numerador la derivada $2ax+b$ del trinomio de segundo grado.

EJEMPLO 2. Hállese $\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}\,dx$.

◀ Por cuanto $(3x^2+2x+1)'=6x+2$, $x-1=\frac{1}{6}(6x^2+2)-\frac{4}{3}$, se tiene

$$\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}\,dx=\frac{1}{6}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1}\,dx-\frac{4}{3}\int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1)-\frac{4}{9}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{2}+C. \ ▶$$

Las *integrales del tipo*

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (r=1,\ 2)$$

se reducen a las integrales examinadas más arriba con ayuda de la sustitución $mx+n=\frac{1}{t}$.

EJEMPLO 3. Hállese $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

◀ Suponemos $x=\frac{1}{t}$. Entonces, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-2x-1}=$
$=\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}=\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}$ y

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}=-\int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}}=-\operatorname{arcsen}\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=-\operatorname{arcsen}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2}}+C=-\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{x\sqrt{2}}+C. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.1. $\int\frac{dx}{x^2+4x-5}$. 2.2. $\int\frac{dx}{2x^2-4x+5}$.

2.3. $\int\frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$ 2.4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

2.5. $\int\frac{dx}{x^2-6x}$. 2.6. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$.

2.7. $\int\frac{x\,dx}{x^2-5x+4}$. 2.8. $\int\frac{dx}{x^2-3x+3}$.

2.9. $\int\frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}\,dx$. 2.10. $\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}\,dx$.

2.11. $\int\frac{x\,dx}{x^4+6x^2+13}$. 2.12. $\int\frac{3^x\,dx}{3^{2x}-4\cdot3^x+3}$.

2.13. $\int\frac{4x-3}{x^2-2x+6}\,dx$. 2.14. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

2.15. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$. 2.16. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$.

2.17. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}$. 2.18. $\int\frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}$.

2. Integración de fracciones racionales. Las fracciones del tipo $\frac{A}{x-\alpha}$, $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, donde $k=2, 3, \ldots$; A, B, α, p, q son constantes, siendo $p^2-4q<0$, llevan el nombre de fracciones *simples*.

Las integrales de las fracciones simples de los dos primeros tipos se calculan de un modo elemental, la integración de una fracción simple de tercer tipo se ha examinado en el ejemplo 2.

La integración de la fracción de cuarto tipo, después de hacer en el numerador una derivada del trinomio de segundo grado que figura en el denominador y formado un cuadrado perfecto en dicho trinomio, se reduce al cálculo de las integrales

$$\int(x^2+px+q)^{-k}\,d(x^2+px+q)=-\frac{1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}}$$

y

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}.$$

La última integral puede calcularse según la fórmula concurrente (véase el problema 1.140).

La integración de la fracción racional arbitraria $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0}$ con coeficientes reales se efectúa, en el caso general, del modo siguiente.

1) Si $m \geqslant n$, es decir, si la fracción inicial $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ es *impropia*, se dede separar previamente en esta fracción la *parte entera*, esto es, representarla en la forma

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}, \tag{1}$$

donde $M_{m-n}(x)$ y $R_r(x)$ son polinomios de grados $m-n \geqslant 0$ y r, respectivamente, además $r < n$, es decir, la fracción $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ es *propia*.

La separación de la parte entera en la fracción $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se realiza mediante la división del numerador por el denominador.

EJEMPLO 4. Sepárese la parte entera de la fracción

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)}.$$

◀ La fracción es impropia, dado que $m = 6 > n = 3$. Con el fin de separar la parte entera escribamos el numerador y el denominador en la forma canónica:

$$(x^2+1) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1,$$

$$x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x,$$

y, a continuación, realizando la división del primer polinomio por el segundo, obtenemos el cociente $x^3 + 2x^2 + 6x + 10$ y el resto $17x^2 - 10x + 1$. Por consiguiente,

$$\frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)} = x^3 + 2x^2 + 6x + 10 + \frac{17x^2 - 10x + 1}{x^3 - 2x^2 + x},$$

y la separación de la parte entera queda finalizada. ▶

2. Según muestra la fórmula (1), la operación de separación de la parte entera reduce la integración de una fracción racional arbitraria a la de un polinomio y de una fracción racional propia.

La integración de la fracción racional propia $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m < n$, se efectúa mediante el desarrollo de la fracción en una suma de fracciones simples de los cuatro tipos mencionados más arriba, seguido de una integración ulterior.

El desarrollo citado se lleva a cabo de la manera siguiente. Supongamos que el denominador $Q_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ tiene raíces reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ cuya multiplicidad es $s_1, \ldots, s_l$ y pares complejos conjugados de las raíces $\beta_1, \bar{\beta}_1, \ldots, \beta_h, \bar{\beta}_h$ cuya multiplicidad es $t_1, \ldots, t_h$, respectivamente, $(s_1 + \ldots + s_l + 2t_1 + \ldots \ldots + 2t_h = n)$, es decir, se verifica el desarrollo

$$Q_n(x) = a_n (x - \alpha_1)^{s_1} \ldots (x - \alpha_l)^{s_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1} \ldots \ldots (x^2 + p_h x + q_k)^{t_k},$$

donde

$$x^2 + p_\nu x + q_\nu = (x - \beta_\nu)(x - \bar{\beta}_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, k.$$

Entonces, el desarrollo de la fracción $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ en una suma de fracciones simples tendrá por expresión

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{s_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(l)}}{x-\alpha_l} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_{sl}^{(l)}}{(x-\alpha_l)^{sl}} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{B_{t_1}^{(1)}x + C_{t_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{B_1^{(h)}x + C_1^{(h)}}{x^2 + p_h x + q_h} + \ldots + \frac{B_{t_h}^{(h)}x + C_{t_h}^{(h)}}{(x^2 + p_h x + q_h)^{t_k}}. \qquad (2)$$

Los coeficientes A_i, B_i y C_i en este desarrollo se determinan igualando entre sí los coeficientes que tienen las mismas potencias de x del polinomio $P_m(x)$ y del que se obtiene en el numerador del segundo miembro (2) después de reducirlo a un denominador común (método de coeficientes indeterminados). Los coeficientes mencionados pueden determinarse también suponiendo x, en la igualdad (2) o alguna otra equivalente, igual a los números adecuadamente elegidos (en primer lugar, a los valores de las raíces reales del denominador $Q_n(x)$).

Ejemplo 5. Calcúlese $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}\,dx$.

◀ La fracción $\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}$ es propia y su desarrollo en una suma de fracciones simples tiene la forma

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Reduciendo el segundo miembro a un denominador común, obtenemos

$$x^2 + 4x + 4 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \qquad (3)$$

(igualdad idéntica de los numeradores), de donde, igualando entre sí los coeficientes que tienen las mismas potencias de x, tenemos

$$A + B = 1, \quad -2A - B + C = 4, \quad A = 4,$$

y a continuación hallamos

$$B = -3, \quad C = 9.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2} \right) dx =$$

$$= 4 \ln|x| - 3 \ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + C.$$

Se podrían determinar los coeficientes A, B, C suponiendo en la identidad (3) $x = 0$, $x = 1$, y, adicionalmente, $x = -1$. En este caso, para $x = 0$ hallamos $A = 4$; para $x = 1$ tenemos $C = 9$, y para $x = -1$ se tiene $4A + 2B - C = 1$, es decir, $B = -3$.

Al resolver el ejemplo en consideración sería mejor combinar ambos métodos mencionados, es decir, hallar $A = 4$ para $x = 0$, $C = 9$ para $x = 1$, y determinar B a partir de la condición de igualdad de los coeficientes que en (3) tienen x^2, es decir, de la igualdad $A + B = 1$. ▶

Ejemplo 6. Calcúlese $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

◀ La fracción $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ es propia y su desarrolo en una suma de fracciones simples tendrá la forma

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Tenemos

$$1 = A(x^2+1)^2 + Bx^2(x^2+1) + Cx(x^2+1) + Dx^2 + Ex.$$

Suponiendo $x = 0$, encontramos $A = 1$. Igualando entre sí los coeficientes que tienen las mismas potencias de x, obtenemos $0 = A + B$, $0 = C$, $0 = 2A + B + D$, $0 = C + E$, es decir, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$ y $E = 0$.

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

Ha de notarse que el desarrolo de la fracción $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ en fracciones simples puede obtenerse también sin que se emplee el método de los coeficientes indeterminados, a saber

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=$$
$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}. \ \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.19. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$. **2.20.** $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$.

2.21. $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}\,dx$. **2.22.** $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx$.

2.23. $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$. **2.24.** $\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^3}\,dx$.

2.25. $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$. **2.26.** $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

2.27*. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^3}$. **2.28*.** $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

2.29. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$. **2.30.** $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx$.

2.31. $\int \frac{dx}{x^3+8}$. **2.32.** $\int \frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2}\,dx$.

2.33. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx$. **2.34.** $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$.

Calcúlense las integrales sin recurrir al método de los coeficientes indeterminados:

2.35*. $\int \frac{dx}{x^4+a^2x^2}$. **2.36*.** $\int \frac{dx}{x^4-a^4}$.

2.37. $\int \frac{dx}{x^4-4x^2+3}$. **2.38*.** $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$.

2.39. $\int \frac{dx}{x^7+x^5}$. **2.40*.** $\int \frac{x^7}{(x^4+1)(x^4-2)}\,dx$.

2.41. $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^9}\,dx$. **2.42.** $\int \frac{x^5+x^2}{x^6+x^3-2}\,dx$.

3. Integración de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

a) Integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$.

Si al menos uno de los números m ó n es entero positivo impar, entonces, separando de la potencia impar un factor y expresando con ayuda de la fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ la potencia par restante en términos de una función complementaria, llegamos a una integral tabular.

EJEMPLO 7. Calcúlese $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \operatorname{sen} x\, dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, d\cos x =$$

$$= -\int \frac{d-\cos x}{\sqrt[4]{\cos x}} + \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\, d\cos x =$$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x} + C. \blacktriangleright$$

Si m y n son números pares no negativos, las potencias se reducen pasando a un argumento doble con ayuda de las fórmulas trigonométricas:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$$

EJEMPLO 8. Calcúlese $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos^2 x\, dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^2 2x\, d\operatorname{sen} 2x = \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C. \blacktriangleright$$

Si $m + n = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, es decir, $m + n$ es un número no negativo par y entero, entonces resulta más conveniente utilizar las sustituciones $\operatorname{tg} x = t$ ó $\operatorname{ctg} x = t$.

EJEMPLO 9. Calcúlese $\int \operatorname{sen}^{1/3} x \cos^{-13/3} x\, dx$.

◀ Puesto que $\frac{1}{3}-\frac{13}{3}=-4$, el cálculo de la integral se reduce a la integración de las potencias de una tangente:

$$\int \operatorname{sen}^{1/3} x \cos^{-13/3} x\,dx=\int \operatorname{tg}^{1/3} x \frac{dx}{\cos^4 x}=$$
$$=\int \operatorname{tg}^{1/3} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \operatorname{tg}^{1/3} x\,d\operatorname{tg} x+$$
$$+\int \operatorname{tg}^{7/3} x\,d\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}\operatorname{tg}^{4/3} x+\frac{3}{10}\operatorname{tg}^{10/3} x+C. \blacktriangleright$$

Para el cálculo de las integrales del tipo $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$, $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$, donde $m=2, 3,\ldots$, se usan las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1, \qquad \operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x-1.$$

EJEMPLO 10. Calcúlese $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx=\int \operatorname{ctg}^2 x\,(\operatorname{cosec}^2 x-1)\,dx=$$
$$=-\int \operatorname{ctg}^2 x\,d\operatorname{ctg} x-\int(\operatorname{cosec}^2 x-1)\,dx=$$
$$=-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+\operatorname{ctg} x+x+C. \blacktriangleright$$

En el caso general las integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$, donde m y n son números enteros, se calculan con ayuda de las fórmulas recurrentes, las que se deducen mediante la integración por partes.

EJEMPLO 11. Dedúzcase la fórmula recurrente para $\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}$ y calcúlese con su ayuda $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

◀ Tenemos:

$$I_{2k+1}=\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}=\int \frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos^{2k+1} x}\,dx=$$
$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{2k+1} x}\,dx+\int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x}=\int \operatorname{sen} x\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2k+1} x}\,dx+I_{2k-1}.$$

Suponemos $u=\operatorname{sen} x$, $dv=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{2k+1} x}\,dx$. Entonces, $du=\cos x\,dx$, $v=$ $=\frac{1}{2k\cos^{2k} x}$, y mediante la integración por partes, obtenemos

$$I_{2k+1}=\frac{\operatorname{sen} x}{2k\cos^{2k} x}-\frac{1}{2k}\int\frac{dx}{\cos^{2k-1} x}+I_{2k-1},$$

o bien

$$I_{2k+1}=\frac{\operatorname{sen} x}{2k\cos^{2k} x}+\left(1-\frac{1}{2k}\right)I_{2k-1}$$

(fórmula recurrente).

En particular, para $k=1$ tenemos

$$I_3=\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}=$$
$$=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|+C. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales:

2.43. $\int\operatorname{sen}^3 x\,dx$. **2.44.** $\int\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^8 x}\,dx$.

2.45. $\int\cos^7 x\,dx$. **2.46.** $\int\cos^4\frac{x}{2}\,dx$.

2.47. $\int\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx$. **2.48.** $\int\cos^2 x\operatorname{sen}^4 x\,dx$.

2.49. $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^6 x}$. **2.50.** $\int\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

2.51. $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x\cos^5 x}$. **2.52.** $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x\cos^2 x}$.

2.53. $\int\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$. **2.54.** $\frac{dx}{\cos^5 x}$.

2.55. $\int\operatorname{tg}^3 x\,dx$. **2.56.** $\int\left(\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}\right)dx$.

2.57. $\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x\operatorname{sen}^3 x}}$. **2.58.** $\int\cos^5 x\,dx$.

2.59. $\int\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$. **2.60.** $\int\operatorname{sen}^6 2x\,dx$.

2.61. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. **2.62.** $\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{3}\operatorname{sen}^3\frac{x}{3}}$.

2.63. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x}$. **2.64.** $\int \cos x \cos^2 2x\, dx$.

b) Para integrar los productos de los senos y cosenos de distintos argumentos se emplean las fórmulas trigonométricas:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)).$$

EJEMPLO 12. Hállese $\int \cos 9x \cos 5x\, dx$.

◀ Tenemos:

$$\int \cos 9x\cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 14x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{28}\operatorname{sen} 14x + C. \quad ▶$$

Calcúlense las integrales:

2.65. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx$. **2.66.** $\int \operatorname{sen} 10x \operatorname{sen} 15x\, dx$.

2.67. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\, dx$. **2.68.** $\int \operatorname{sen}\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\, dx$.

2.69. $\int \cos x\cos^2 3x\, dx$. **2.70.** $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\, dx$.

c) Las integrales del tipo

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx,$$

donde $R(u, v)$ es una función racional de dos variables, se reducen a las integrales de la función racional de un argumento nuevo t mediante la sustitución $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. En este caso se emplean las fórmulas

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\, dt}{1+t^2},$$

EJEMPLO 13. Calcúlese $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\operatorname{sen} x + 5}$.

◀ Suponemos $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Entonces

$$\int \frac{dx}{4\cos x+3\operatorname{sen} x+5} = 2\int \frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+5\right)(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+6t+9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3}+C =$$

$$= -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}\ C. \ ▶$$

Si $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ figuran bajo el signo de integral sólo en potencias pares, será más cómodo utilizar la sustitución $\operatorname{tg} x = t$.

EJEMPLO 14. Calcúlese $\int \frac{dx}{1-5\operatorname{sen}^2 x}$.

◀ Al dividir el numerador y el denominador por $\cos^2 x$ y hacer uso de la sustitución $\operatorname{tg} x = t$, obtendremos:

$$\int \frac{dx}{1-5\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{dx}{1-4t^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\frac{1+2\operatorname{tg} x}{1-2\operatorname{tg} x}+C. \ ▶$$

Calcúlense las integrales:

2.71. $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$. **2.72.** $\int \frac{dx}{3-2\operatorname{sen} x+\cos x}$.

2.73*. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$. **2.74.** $\int \frac{dx}{4\operatorname{sen}^2 x-7\cos^2 x}$.

2.75. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x-2\cos x+5}\,dx$.

2.76. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+4\cos^2 x}\,dx$. **2.77.** $\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen} x}$.

2.78*. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x+4)(\operatorname{sen} x-1)}$.

2.79. $\int \frac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x}\,dx$.

2.80. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+8\operatorname{sen} x\cos x+12\cos^2 x}$,

d) La integración de las funciones hiperbólicas se realiza igual que la de las funciones trigonométricas, con la particularidad de que se emplean las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1), \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x - 1),$$

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \operatorname{sch}^2 x, \qquad 1 - \operatorname{cth}^2 x = \operatorname{csch}^2 x.$$

Calcúlense las integrales:

2.81. $\int \operatorname{ch}^2 3x \, dx.$ **2.82.** $\int \operatorname{sh}^3 2x \, dx.$

2.83. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x \, dx.$ **2.84.** $\int \operatorname{ch}^4 x \, dx.$

2.85. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 x} dx.$ **2.86*.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4 \operatorname{sh}^2 x}.$

2.87*. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - 1}.$ **2.88.** $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1} \, dx.$

2.89. $\int \operatorname{cth}^3 x \, dx.$ **2.90.** $\int \operatorname{th}^4 x \, dx.$

4. Integración de ciertas funciones irracionales. a) Las integrales del tipo

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right) dx,$$

donde $R(x, y, z, \ldots)$ es una función racional de sus argumentos y m_1, n_1, m_2, n_2, son números enteros, se calculan con ayuda de la sustitución $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, donde s es el denominador común para las fracciones $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$

EJEMPLO 15. Calcúlese $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt[4]{x+3}}$.

◀ Hagamos una sustitución $x+3=t^4$. Entonces, $dx=4t^3\,dt$, y, por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+3}-1 \sqrt{x+3}} = 4 \int \frac{t_3\,dt}{(t-1)\,t^2} = 4 \int \frac{t\,dt}{t-1} =$$
$$= 4 \int \frac{(t-1)+1}{t-1}\,dt = 4\,(t + \ln|t-1|) + C =$$
$$= 4\,(\sqrt[4]{x+3} + \ln|\sqrt[4]{x+3}-1|) + C. \ ▶$$

Hállense las integrales:

2.91. $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$. **2.92.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

2.93. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$. **2.94.** $\int \frac{\sqrt[6]{x+a}-1}{(x+a)(1+\sqrt[3]{x+a})}\,dx$.

2.95. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3}$. **2.96** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$.

2.97. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+4})\sqrt{x}}$. **2.98.** $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

b) El cálculo de las integrales del tipo

$$\int R\,(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

donde R es una función racional de dos argumentos, se realiza con ayuda de sustituciones trigonométricas de la manera siguiente. Formando un cuadrado perfecto en el trinomio de segundo grado y realizando, a continuación, el cambio de variable $u = x+\frac{b}{2a}$, la integral de partida se reduce a la integral de uno de los tres tipos siguientes:

1) $\int R\,(u, \sqrt{l^2-u^2})\,du$,

2) $\int R\,(u, \sqrt{l^2+u^2})\,du$,

3) $\int R\,(u, \sqrt{u^2-l^2})\,du$.

Las últimas integrales se reducen a las integrales del tipo $\int R$ (sen t, cos t) dt, o bien $\int R$ (sh t, ch t) dt por medio de las sustituciones trigonométrica o hiperbólica

1) $u = l$ sen t ó $u = l$ th t,
2) $u = l$ tg t ó $u = l$ sh t,
3) $u = l$ sec t ó $u = l$ ch t, respectivamente.

Ejemplo 16. Calcúlese $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

◄ Formando un cuadrado perfecto en el trinomio de segundo grado, tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+3)^3}}, \qquad \text{donde} \quad u = x+2.$$

Realizando la sustitución $u=\sqrt{3}\operatorname{tg} t$, $du=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt$, $\sqrt{u^2+3}=$ $=\sqrt{3}\sec\ t$, obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+3)^3}}=\int \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t\sqrt{3^3\operatorname{sen}^3 t}}\ dt=\frac{1}{3}\int \cos t\,dt=$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{sen} t+C=\frac{1}{3}\ \frac{u}{\sqrt{u^2+3}}=\frac{1}{3}\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}+C. \quad ▶$$

EJEMPLO 17. Calcúlese $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

◀ Realizamos la sustitución $x=a\operatorname{ch} t$. Entonces, $dx=a\operatorname{sh} t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{sh} t$, y luego

$$\int \sqrt{x^2-a}\,dx=a^2\int \operatorname{sh}^2 t\,ut=\frac{a^2}{2}\int (\operatorname{ch} 2t-1)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{3}-t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t-t)+C=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C. \quad ▶$$

Calcúlense las integrales:

2.99. $\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$.

2.100. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$.

2.101. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$. **2.102.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

2.103. $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$. **2.104.** $\int \sqrt{(3-2x-x^2)^3}\,dx$.

2.105. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$. **2.106.** $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$.

2.107. $\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx$. **2.108.** $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

2.109. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}\,dx$. **2.110.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$.

2.111. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$. **2.112.** $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$.

§ 3. Problemas mixtos de integración

Calcúlense las integrales

3.1. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}\,dx.$ 3.2. $\int \frac{x^3}{x^2-x-1}\,dx.$

3.3. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}.$ 3.4. $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$

3.5. $\int \frac{dx}{x^5(x^4+1)^2}.$ 3.6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}}.$

3.7. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}}.$ 3.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x+4}}.$

3.9. $\int x\sqrt{x^2-4}\,dx.$ 3.10. $\int x\sqrt{x^2+4x-5}\,dx.$

3.11. $\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx.$ 3.12. $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{16-x^2}}.$

3.13. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+16}}.$ 3.14 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

3.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}.$ 3.16. $\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx.$

3.17. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx.$ 3.18. $\int \frac{x\,dx}{1+\cos x}.$

3.19. $\int \frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^4}\,dx.$ 3.20. $\int \frac{dx}{2+\cos x}.$

3.21. $\int \frac{dx}{3-4\operatorname{sen}^2 x}.$ 3.22. $\int \frac{2-\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx.$

3.23. $\int \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x}{\sqrt{5-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx.$ 3.24. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x+5}\,dx.$

3.25. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos^5 x}.$ 3.26. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

3.27. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x}.$ 3.28. $\int x\operatorname{sen} x\cos 2x\,dx.$

3.29. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}.$ 3.30. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x}.$

3.31. $\int \operatorname{th}^5 x\,dx.$ 3.32. $\int \frac{\operatorname{ch}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx.$

3.33. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$ 3.34. $\int \operatorname{sen}^2(\ln x)\,dx.$

3.35. $\int xe^{2x}\,dx$. **3.36.** $\int xe^{-x^2}\,dx$.

3.37. $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+4e^x-5}$. **3.38.** $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}\,dx$.

3.39. $\int e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx$. **3.40.** $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$.

3.41. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}\,\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **3.42.** $\int \frac{\operatorname{arcsen} e^x}{e^x}\,dx$.

3.43. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. **3.44.** $\int x(1+x^2)\operatorname{arctg} x\,dx$.

3.45. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx$. **3.46.** $\int x\ln(4+x^4)\,dx$.

3.47. $\int x\sqrt{x^2+1}\,\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$.

3.48. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3.49. $\int x^x(1+\ln x)\,dx$.

3.50. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\,dx$.

§ 4. Integral definida y métodos de su cálculo

1. Integral definida como límite de una suma integral. Si una función $f(x)$ está definida en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, y $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ es una partición arbitraria de este segmento en n partes (fig. 56), entonces la *suma integral* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ se denomina suma de la forma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

donde $x_{k-1} \leqslant \xi_k < x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. En el lenguaje geométrico S_n es una suma algebraica de áreas de los rectángulos de base Δx_k y de altura $f(\xi_k)$.

Si la función $f(x)$, definida en el segmento $[a, b]$, es tal que existe un límite finito de la sucesión de sumas integrales S_n, a condición de que la máxima de las diferencias Δx_k tiende a cero, con la particularidad de que dicho límite no depende del modo de que el segmento $[a, b]$ se divide en segmentos $[x_{k-1}, x_k]$ ni tampoco de la elección de los puntos ξ_k en los segmentos mencionados, entonces la función $f(x)$ se denomina *integrable* en el segmento $[a, b]$, mientras que el propio límite lleva el nombre de *integral definida* de la función $f(x)$

dentro de los límites de a hasta b y se designa mediante el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$. De este modo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{1}$$

Una función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, es integrable en él.

Geométricamente la integral definida (1) representa la suma algebraica de las áreas de las figuras limitadas por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = a$ y $x = b$, con la particula-

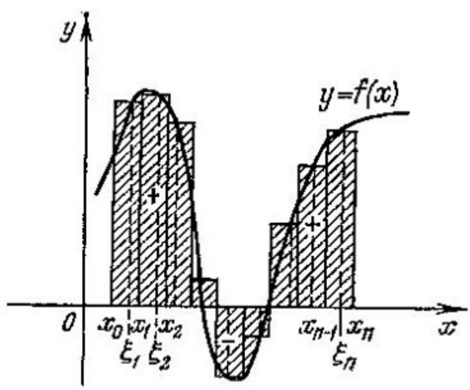

Fig. 56

ridad de que las áreas dispuestas por arriba del eje Ox figuran en dicha suma con el signo más, y las que se disponen por debajo del eje Ox, con el signo menos.

EJEMPLO 1. Calcúlese $\int_1^2 x^2\,dx$, considerando la integral definida como límite de las sumas integrales.

1er MÉTODO. Dividamos el segmento de integración $[1, 2]$ en n partes iguales de la longitud $\Delta x = \dfrac{1}{n}$. Los puntos de división:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{n}, \; x_2 = 1 + \frac{2}{n}, \; \ldots, \; x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n}, \; x_n = 2.$$

A título de puntos ξ_k elijamos, por ejemplo, los extremos izquierdos de cada uno de los segmentos parciales. Entonces

$$f(x_0)=1,\ f(x_1)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2,\ f(x_2)=$$
$$=\left(1+\frac{2}{n}\right)^2,\ \ldots\ f(x_n-1)=\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Por consiguiente,

$$S_n=\frac{1}{n}\left(1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{n^3}\left(n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(2n-1)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right).$$

Aplicando la fórmula para la suma de los cuadrados de números enteros

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

hallamos

$$S_n=\frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n-1)\,2n\,(4n-1)}{6}-\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\right)=\frac{14n^2-9n+1}{6n^2},$$

de donde

$$\int_1^2 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{14n^2-9n+1}{6n^2}=\frac{7}{3}.$$

2do MÉTODO. Dividamos el segmento [1, 2] en partes de modo tal que las abscisas de los puntos de división formen una progresión geométrica:

$$x_0=1,\quad x_1=q,\quad x_2=q^2,\ \ldots,\ x_{n-1}=q^{n-1},\qquad x_n=q^n=2,$$

donde $q=2^{1/n}$. El punto ξ_k se eligirá en el extremo izquierdo del k-ésimo segmento. Entonces

$$f(x_0)=1,\quad f(x_1)=q^2,\quad f(x_2)=q^4,\ \ldots,\ f(x_{n-1})=q^{2(n-1)},$$
$$\Delta x_1=q-1,\ \Delta x_2=q^2-q=q(q-1),$$
$$\Delta x_3=q^2(q-1),\ \ldots,\ \Delta x_n=q^{n-1}(q-1),$$
$$S_n=1\cdot(q-1)+q^3(q-1)+q^6(q-1)+\ldots$$
$$\ldots+q^{3(n-1)}(q-1)=(q-1)(1+q^3+q^6+\ldots$$

$$\ldots + q^{3(n-1)}) = (q-1)\frac{q^{3n}-1}{q^3-1} = \frac{q^{3n}-1}{q^2+q+1} =$$

$$= \frac{2^3-1}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1}.$$

Por consiguiente,

$$\int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{3}. \ ▶$$

Calcúlense las integrales definidas considerándolas como límites de las sumas integrales correspondientes:

4.1*. $\int_0^5 (1+x)\,dx.$ **4.2*.** $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$

4.3*. $\int_0^{10} e^x\,dx.$ **4.4*.** $\int_0^3 \frac{dx}{x^2}.$

2. Cálculo de las integrales elementales con ayuda de la fórmula de Newton-Leibniz. Si $F(x)$ es una de las primitivas de la función $f(x)$, continua en $[a, b]$, resulta válida la siguiente *fórmula de Newton-Leibniz*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

EJEMPLO 2. Calcúlese $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

◀ Tenemos

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} =$$

$$= \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 \approx 0{,}69. \ ▶$$

Haciendo uso de la fórmula de Newton — Leibniz, calcúlense las integrales:

4.5. $\int_{-1}^{2} x^3\,dx.$ **4.6.** $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

4.7. $$\int_1^2 (3x^2-2x+1)\,dx.$$ **4.8.** $$\int_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\,dx.$$

4.9. $$\int_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx.$$ **4.10.** $$\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx.$$

4.11. $$\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx.$$ **4.12.** $$\int_{-\pi/4}^{10} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

4.13. $$\int_1^2 e^x\,dx.$$ **4.14.** $$\int_0^3 2^x\,dx.$$

4.15. $$\int_2^5 \frac{dx}{x}.$$ **4.16.** $$\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}.$$

4.17. $$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}.$$ **4.18.** $$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2 \varphi\,d\varphi.$$

4.19. $$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\,dx.$$ **4.20.** $$\int_0^2 \operatorname{sh}^3 x\,dx.$$

4.21. $$\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$$ **4.22.** $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

4.23. $$\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx.$$ **4.24.** $$\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}\,dx.$$

4.25. $$\int_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx.$$ **4.26.** $$\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx.$$

4.27. $$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$$ **4.28.** $$\int_0^{\pi/2} \cos^3\alpha\,d\alpha.$$

4.29. $$\int_0^{1/3} \operatorname{ch}^2 3x\,dx.$$ **4.30.** $$\int_2^3 \frac{dy}{y^2-2y-8}.$$

4.31. $\int\limits_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. 4.32. $\int\limits_{0}^{2} \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$.

4.33. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

Hállense los límites de las sumas con ayuda de las integrales definidas:

4.34**. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

4.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\times$

$\times\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos 2\frac{\pi}{2n}+\ldots+\cos(n-1)\frac{\pi}{2n}\right)$.

4.36. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

Calcúlense las áreas de las figuras limitadas por líneas:

4.37. $y=\frac{1}{2}x^2,\ y=0,\ x=2,\ x=3$.

4.38. $y=\sqrt[3]{x},\ y=0,\ x=1,\ x=8$.

4.39. $y=6-x-2x^2,\ y=x+2$.

4.40. $y=\frac{x^2}{4},\ y=2\sqrt{x}$.

4.41. $y=\cos x,\ y=0,\ x=-\frac{\pi}{2},\ x=-\frac{\pi}{4}$.

4.42. $y=e^{-x},\ y=0,\ x=1,\ x=2$.

4.43. $y=\frac{2}{x},\ y=0,\ x=2,\ x=3$.

4.44. $y=\frac{3}{x},\ x+y=4$.

3. Propiedades de la integral definida.

1) Si $f(x)\geqslant 0$ en el segmento $[a,\ b]$, entonces $\int\limits_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$.

2) Si $f(x) \leqslant g(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

3) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

4) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, m y M son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

(*teorema de la estimación de una integral indefinida*).

EJEMPLO 3. Estímese la integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

◀ Tenemos: $1 \leqslant 1+x^4 \leqslant 2$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant 1,$$

es decir, $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b-a=1$. Por consiguiente, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant$ $\leqslant I \leqslant 1$. ▶

5) Si $f(x)$ es continua y $g(x)$ es integrable en $[a, b]$, $g(x) \geqslant 0$, mientras que m y M son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

(*teorema generalizado de la estimación de una integral definida*).

6) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, existe tal punto $c \in (a, b)$ que se verifica la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(*teorema del valor medio*).

El número

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

recibe el nombre de *valor medio* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

7) Si $f(x)$ es continua y $g(x)$ es integrable en $[a, b]$ y, además, $g(x)\geqslant 0$, existe un punto $c\in(a, b)$ tal que se verifica la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

(*teorema generalizado del valor medio*).

8) Si $f^2(x)$ y $g^2(x)$ son integrables en $[a, b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

(*desigualdad de Cauchy—Buniakovski*).

9) Integración de las funciones *pares* e *impares* dentro de los límites simétricos. Si una función $f(x)$ es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=$ $=2\int_0^a f(x)\,dx$. Si la función $f(x)$ es impar, se tiene $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

10) Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, la *integral de límite superior variable*

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

será una primitiva para la función $f(x)$, es decir,

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x),\qquad x\in[a, b].$$

11) Si las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son derivables en el punto $x\in$ $\in(a, b)$ y $f(t)$ es continua para $\varphi(a)\leqslant t\leqslant\psi(b)$, entonces

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right)'_x=f(\psi(x))\,\psi'(x)-f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

EJEMPLO 4. $I(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$. Hállese $I'(x)$.

◀ Haciendo uso de la propiedad 11) y tomando en consideración que $\varphi(x) = 0$, es decir, $\varphi'(x) = 0$, tenemos

$$I'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{-x^4}. \blacktriangleright$$

4.45. Determínense los signos de las integrales sin calcularlas:

a)* $\int\limits_{-2}^{1} \sqrt[3]{x}\,dx$; b) $\int\limits_{-1}^{1} x^3e^x\,dx$; c) $\int\limits_{1/3}^{1} x\ln x\,dx$.

4.46. Sin calcular las integrales, aclárese cuál de ellas es mayor:

a) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ó $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x}$; b) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2}$ ó $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$;

c) $\int\limits_{0}^{1} e^{-x}\cos^2 x\,dx$ ó $\int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$.

4.47. Hállese el valor medio de la función en el segmento dado:

a) x^3, $0 \leqslant x \leqslant 1$; b) $\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$;

c) $\sqrt[3]{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; d) $\cos^3 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

4.48. La intensidad de la corriente alterna varía de acuerdo con la ley $I = I_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$, donde T es el período. Hállese el valor medio de la intensidad de corriente por un semiciclo.

4.49. Estímese la integral $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}\,dx$.

4.50. Estímese la integral $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\operatorname{sen} x}}$.

4.51. Estímese la integral $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{(1+x)(1+x^3)}\,dx$,

haciendo uso:

a) del teorema generalizado de la estimación de una integral;

b) de la desigualdad de Cauchy — Buniakovski.

4.52. Estímese la integral $\int\limits_0^1 \sqrt{(4+x^3)\,x}\,dx$, haciendo uso:

a) del teorema generalizado de la estimación de una integral;

b) desigualdad de Cauchy — Buniakovski.

4.53. Hállense: a) $\frac{dI}{d\beta}$, b) $\frac{dI}{d\alpha}$, si

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{e^x}{x}\,dx \quad (0 < \alpha < \beta).$$

4.54. Hállense los puntos de extremo de la función

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x \frac{\cos t}{t}\,dt \quad \left(x > 0,\ 0 < a < \frac{\pi}{2}\right).$$

Hállense las derivadas de las siguientes funciones:

4.55. $\Phi(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$

4.56. $\Phi(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)\,dt.$

4.57. $\Phi(x) = \int\limits_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}.$

4.58. $\Phi(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}\ (x > 0).$

4.59. Demuéstrese que

$$\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{1+x^4}\,dx = 0.$$

4. **Cambio de variable en la integral definida.** Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, y la función $x = \varphi(t)$ es continuamente derivable en el segmento $[t_1, t_2]$, además $a = \varphi(t)$, $b = \varphi(t_2)$,

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ejemplo 5. Calcúlese $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

◀ Apliquemos la sustitución $x=\operatorname{sen} t$. Entonces $dx=\cos t\,dt$, $t=\arcsin x$, $t_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ y $t_2=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$. Por consiguiente,

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}{\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt=$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt=(-\operatorname{ctg} t-t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=-\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}.$$ ▶

4.60. ¿Se podrá calcular la integral $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ con ayuda de la sustitución $x=\operatorname{sen} t$?

Calcúlense las integrales con ayuda de las sustituciones indicadas:

4.61. $\displaystyle\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}, \quad 3x-2=t^2.$

4.62. $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \quad e^x+1=t^2.$

4.63. $\displaystyle\int_0^{\operatorname{sh} 1} \sqrt{x^2+1}\,dx, \quad x=\operatorname{sh} t.$

4.64. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+2\cos x}, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$

4.65. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\operatorname{sen}^2 x}, \quad \operatorname{tg} x=t.$

4.66. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\,dx, \quad x+1=2\operatorname{sen} t.$

Calcúlense las integrales con ayuda del cambio de variable:

4.67. $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **4.68.** $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$.

4.69. $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$. **4.70.** $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

4.71. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2}$. **4.72.** $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$.

4.73. $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$. **4.74.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

4.75. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\,dx$. **4.76.** $\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

4.77. Muéstrese que $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_{1}^{2} \frac{e^x}{x}\,dx$.

4.78. Muéstrese que $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{\arcsin x} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

4.79. Convénzase de que

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{3x^7-2x^5+x^3-x}{x^4+3x^2+1}\,dx = 0.$$

5. Integración por partes. Si las funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$, al igual que sus derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$, son continuas en el segmento $[a, b]$, entonces

$$\int\limits_{a}^{b} u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_{a}^{b} v\,du$$

(*fórmula de integración por partes*).

EJEMPLO 6. Calcúlese $\int\limits_{1}^{e} \ln x\,dx$.

◀ Suponemos $u=\ln x$, $dv=dx$, entonces $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$. Tenemos

$$\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = e-e+1=1. \blacktriangleright$$

Calcúlense las integrales empleando el método de integración por partes:

4.80. $\int_0^1 xe^x\,dx$. **4.81.** $\int_0^1 \frac{\arcsen x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

4.82. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. **4.83.** $\int_1^e \ln^2 x\,dx$.

4.84. $\int_0^{\pi/4} e^{3x}\operatorname{sen} 4x\,dx$. **4.85.** $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx$.

4.86. $\int_1^e x\ln x\,dx$. **4.87.** $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$.

4.88. $\int_0^{\pi/4} x^2\cos 2x\,dx$. **4.89.** $\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$.

4.90. Muéstrese que para la integral

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx,\quad n\in\mathbb{N},$$

es válida la fórmula recurrente $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. Calcúlense I_7 e I_8.

4.91. Muéstrese que para la integral

$$I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx,\quad n\in\mathbb{N},$$

es válida la fórmula recurrente $I_n=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$. Calcúlese I_4.

§ 5. Integrales impropias

1. Integrales con límites infinitos. Si la función $f(x)$ es continua para $a \leqslant x < +\infty$, entonces, por definición

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Si existe un límite finito en el segundo miembro de la fórmula (1), la integral impropia se denomina *convergente*; si dicho límite no existe, la integral se llama *divergente*.

Geométricamente la integral impropia (1) es, en el caso cuando $f(x) > 0$, el área de una figura limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, por la recta $x = a$ y por el eje Ox (asíntota).

Análogamente se definen la integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,dx + \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,dx. \tag{2}$$

Los *criterios de convergencia y de divergencia* se dan a conocer sólo para las integrales del tipo (1)

1) Si $F(x)$ es una primitiva para $f(x)$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$, entonces la integral (1) converge y es igual a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a);$$

en cambio, si $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ no existe, la integral (1) diverge.

2) Supongamos que para $a \leqslant x < +\infty$ se tiene $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, converge también $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, además $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, también diverge $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (*criterios de comparación*).

3) Si para $a \leqslant x < +\infty$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ y existe un límite finito $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, entonces las integrales $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ y

$\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergen o divergen simultáneamente (*criterio límite de comparación*).

4) Si converge $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, también converge $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (la última integral en este caso se denomina ***absolutamente convergente***).

5. Si para $x \to +\infty$, la función $f(x) > 0$ es un infinitésimo de orden α en comparación con $1/x$, la integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge cuando $\alpha > 1$ y diverge, cuando $\alpha \leqslant 1$.

EJEMPLO 1. Calcúlese $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx$.

◀ Tenemos:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\, e^{-3x}\Big|_0^b\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} (1-e^{-3b}) = \frac{1}{3}. \ ▶$$

EJEMPLO 2. Analícese la convergencia de la integral

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx.$$

◀ Tenemos

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La integral dada diverge, puesto que es divergente $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. ▶

Calcúlense las integrales impropias (o bien establézcase su divergencia):

5.1. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$. **5.2.** $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

5.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$. **5.4.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x\,dx$.

5.5. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4}$. 5.6. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)}\,dx$.

5.7. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$. 5.8. $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

5.9. $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cos x\,dx$.

Analícese la convergencia de las integrales:

5.10. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2+5x^4}$.

5.11. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx$.

5.12. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^6+1}}\,dx$.

5.13. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3+\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

5.14. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$.

5.15. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx$. 5.16. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$.

2. Integrales de las funciones no acotadas. Si la función $f(x)$ es continua para $a \leqslant x < b$, y $f(b) = \infty$, entonces por definición

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\gamma\to 0} \int\limits_{a}^{b-\gamma} f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Si existe un límite finito en el segundo miembro de la fórmula (3), la integral impropia se denomina *convergente*; si este límite no existe, se llama *divergente*.

La integral impropia (3) es geométricamente, en el caso en que $f(x) > 0$, el área de una figura limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, la recta $x = a$ y la asíntota vertical $x = b$.

La integral impropia se determina análogamente para el caso $f(a) = \infty$.

En el caso cuando $c \in (a, b)$ es un punto de discontinuidad y $f(c) = \infty$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\nu_1 \to 0} \int_a^{c-\nu_1} f(x)\,dx + \lim_{\nu_2 \to 0} \int_{c+\nu_2}^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Si la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$ es continua para $a \leqslant x \leqslant \leqslant b$, entonces a las integrales (3) — (4) puede aplicarse la fórmula de Newton—Leibniz

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Los criterios de convergencia y divergencia de las integrales impropias de funciones no acotadas son semejantes a los mencionados en el p. 2.

Por lo común sirve de patrón de comparación la integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0), \tag{5}$$

la cual converge cuando $\alpha < 1$, y diverge cuando $\alpha \geqslant 1$.

EJEMPLO 3. Analícese la convergencia de la integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

◀ Cuando $x \to 1$, $\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}$ (infinitos equivalentes), puesto que

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1/x} = 1.$$

La integral $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ diverge, como sucede con la integral del tipo (5) cuando $\alpha = 1$. Por lo tanto, diverge también $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$. ▶

Calcúlense las integrales impropias (o bien establézcase su divergencia):

5.17. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4}$. **5.18.** $\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{4/5}}$.

5.19. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$. **5.20.** $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

5.21. $\displaystyle\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$. **5.22.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

5.23. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **5.24.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$.

5.25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Analícese la convergencia de las integrales:

5.26. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. **5.27.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

5.28. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$. **5.29.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}\,dx$.

5.30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

5.31. Demuéstrese que para $\alpha > 0$ la integral de Euler $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ que define la *función gamma* $\Gamma(\alpha)$, converge y establézcanse las siguientes relaciones:

a) si $\alpha = n$ (un número entero), entonces $\Gamma(n+1) = n!$;

b) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ para cualquier $\alpha > 0$;

c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;

d) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

e) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}$, n es un número entero.

§ 6. Aplicaciones geométricas de la integral definida

1. Área de una figura plana. El área de la figura limitada por la gráfica de la función continua $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$), por dos rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje Ox, o bien el área del *trapecio curvilíneo* limitado por el arco de la gráfica de la función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (fig. 57), se calcula según la fórmula

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

El área de una figura limitada por las gráficas de las funciones continuas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, y por dos rectas

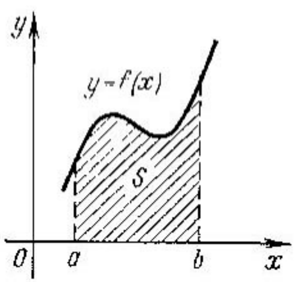

Fig. 57

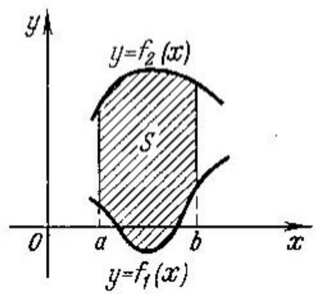

Fig. 58

$x = a$, $x = b$ (fig. 58) se determina según la fórmula

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \tag{2}$$

Los problemas más simples en los cuales se emplean las fórmulas (1) y (2) han sido aducidos en el § 4 (problemas 4.37 — 4.44).

EJEMPLO 1. Hállese el área de la figura situada en el semiplano derecho y limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ y la parábola $y^2 = 2x$.

◀ Hallemos los puntos de intersección de las curvas (fig. 59) resolviendo el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 8,$$
$$y^2 = 2x.$$

Obtendremos los puntos (2, 2) y (2, —2). Utilizando la simetría respecto del eje Ox, hallamos el área buscada S como una suma duplicada de las áreas de los trapecios curvilíneos limitados por los arcos de la parábola $y = \sqrt{2x}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, y de la circunferencia $y = \sqrt{8 - x^2}$,

$2 \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$, respectivamente:

$$S = 2\left(\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8-x^2}\,dx\right) = 2\left(\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2} + 4 \operatorname{arcsen} \frac{4}{\sqrt{8}}\right)\Big|_2^{\sqrt{8}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} + 2\pi - 2 - \pi\right) = 2\pi + \frac{4}{3}. \ ►$$

A veces resulta cómodo utilizar las fórmulas, análogas a (1) y (2), pero respecto de la variable y (considerando x como función de y), en particular,

$$S = \int_c^d (f_2(y) - f_1(y))\,dy. \qquad (3)$$

EJEMPLO 2. Hállese el área de la figura limitada por la parábola $(y-2)^2 = x - 1$, por la tangente a esta parábola en el punto de ordenada $y_0 = 3$ y por el eje Ox.

◄ La forma de la figura (fig. 60) no permite utilizar directamente las fórmulas (1) ó (2). Sin embargo, si dicha figura se considera respecto del eje Oy, podemos aplicar la fórmula (3). Así pues, sea y la

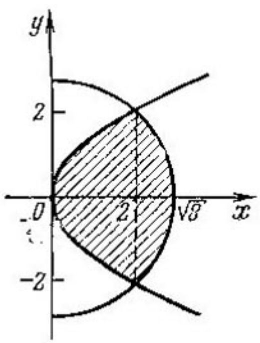

Fig. 59

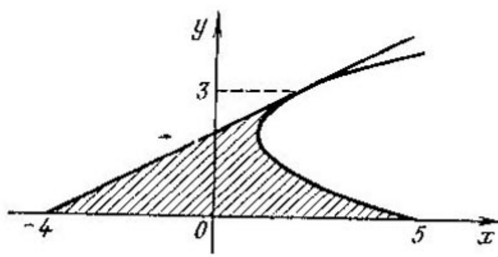

Fig. 60

variable independiente. La ecuación de la parábola se escribirá en la forma $x = y^2 - 4y + 5$.

Hallemos la ecuación de la tangente a la parábola. Esta se expresa: $x - x_0 = x_0'(y - y_0)$. Por cuanto $x_y' = 2(y-2)$, se tiene $x_0' = x'|_{y=3} = 2$. Hallando, luego, la abscisa del punto de tangencia

$x_0 = 2$, obtenemos la ecuación de la tangente

$$x - 2 = 2(y-3), \quad \text{o bien } x = 2y - 4.$$

Suponiendo en (3) $f_1(y) = 2y - 4$, $f_2(y) = y^2 - 4y + 5$, tenemos:

$$S = \int_0^3 ((y^2 - 4y + 5) - (2y - 4))\,dy = \int_0^3 (y^2 - 6y + 9)\,dy =$$

$$= \int_0^3 (y-3)^2\,dy = \frac{1}{3}(y-3)^3 \Big|_0^3 = 9. \blacktriangleright$$

Hemos de notar que el empleo de las fórmulas (1) y (2) en la resolución del ejemplo (2) exigiría el cálculo de la suma de tres integrales:

$$S = \int_{-4}^{1} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx + \int_1^2 \left(\left(\frac{1}{2}x + 2\right) - (2 + \sqrt{x-1})\right) dx +$$

$$+ \int_1^5 (2 - \sqrt{x-1})\,dx.$$

EJEMPLO 3. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y = 1/x^2$, el eje Ox y la recta $x = 1$, y situada más a la derecha de dicha recta.

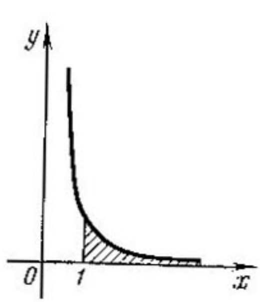

Fig. 61

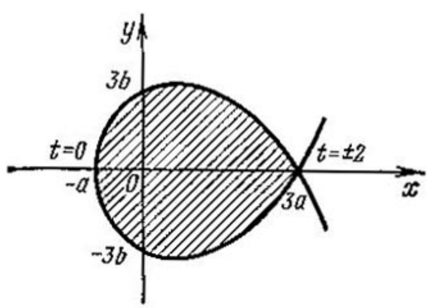

Fig. 62

◀ El área buscada (fig. 61) se expresa por medio de la integral impropia

$$S = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1. \blacktriangleright$$

Si la figura está limitada por una curva, que se expresa por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje Ox, el área de dicha figura se calcula según la fórmula

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, dx(t), \tag{4}$$

donde los límites de integración se hallan a partir de las ecuaciones $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ $y(t) \geqslant 0$ en el segmento $[t_1, t_2]$).

La fórmula (4) puede emplearse también para calcular el área de una figura limitada por una curva cerrada (la variación del parámetro t de t_1 hasta t_2, debe corresponder al recorrido del contorno en sentido horario).

Ejemplo 4. Hállese el área del bucle de la curva

$$x = a(t^2 - 1), \quad y = b(4t - t^3) \quad (a > 0,\ b > 0),$$

◀ Hallemos los puntos de intersección de la curva con los ejes coordenados. Tenemos: $x = 0$ cuando $t = \pm 1$; $y = 0$ cuando $t = 0$, $t = \pm 2$. Por lo tanto, obtenemos los puntos siguientes: $(0,\ 3b)$ para $t = 1$; $(0, -3b)$ para $t = -1$; $(-a,\ 0)$ para $t = 0$; $(3a, 0)$ para $t = \pm 2$. El punto $(3a, 0)$ es el punto de autointersección de la curva. Para $0 \leqslant t \leqslant 2$ se tiene $y > 0$; para $-2 \leqslant t \leqslant 0$ se tiene $y \leqslant 0$ (fig. 62).

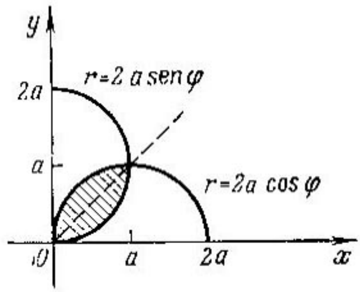

Fig. 63

El área de la figura se halla como el área duplicada de su mitad superior:

$$S = 2\int_{-a}^{3a} y\, dx = 2\int_{0}^{2} y(t)\, x'(t)\, dt = 2\int_{0}^{2} b(4t - t)^3\, a \cdot 2t\, dt =$$

$$= 4ab \int_{0}^{2} (4t^2 - t^4)\, dt = 4ab\left(\frac{4}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{256}{15}\, ab. \ ▶$$

El área de la figura limitada por la gráfica de una función continua $r = r(\varphi)$ y por dos rayos $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, donde φ y r son las coordenadas polares, o bien el área de un *sector curvilíneo* limitado por un arco de la gráfica de la función $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, se calcula según la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi. \tag{5}$$

Ejemplo 5. Hállese el área de la lúnula limitada por los arcos de las circunferencias $r = 2a\cos\varphi$, $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ (fig. 63).

◀ Las circunferencias se cortan cuando $\varphi = \pi/4$; la figura examinada (fig. 63) es simétrica respecto del rayo $\varphi = \pi/4$. Por lo tanto, su área puede calcularse del modo siguiente:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} 4a^2 \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{\pi/4}(1-\cos 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2. \blacktriangleright$$

6.1. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y = \ln x$ y las rectas $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

6.2. Hállese el área de la figura limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

6.3. Hállese el área de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$.

6.4. Hállese el área de la figura limitada por la parábola $y = x^2 + 2x$ y la recta $y = x + 2$.

6.5. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = \frac{27}{x^2+9}$ e $y = \frac{x^2}{6}$.

6.6. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = 2px$ e $y^2 = \frac{4}{p}(x-p)^3$ $(p > 0)$.

6.7. Hállese el área de la figura limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = a^2$ y la recta $y = a$.

6.8. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y = \frac{a^2x}{a^2+x^2}$ y el eje Oy.

6.9. Hállese el área de la figura limitada por el eje Oy, la parábola $(x-a)^2 = 2p(y-b)$ y la tangente a ésta en el punto de abscisa $x = c$ $(c > a > 0,\ p > 0)$.

6.10. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.

6.11. Hállese el área de la figura limitada por la parábola $y = 3 + 2x - x^2$ y el eje Ox.

6.12. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y = \arcsen x$ y las rectas $x = 0$, $y = \pi/2$.

6.13. Hállese el área de la lúnula superior limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + 2ay = a^2$ $(a > 0)$.

6.14. Hállese el área de la figura limitada por las líneas $(x-1)(y+2) = 2$ y $x + y = 2$.

6.15. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y = \ln x$, la tangente a dicha curva en el punto $x = e$ y el eje Ox.

6.16. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = \ln (x+2)$, $y = 2 \ln x$, $y = 0$.

6.17. Hállese el área de cada una de las dos partes en las que el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$ está dividido por la parábola $y^2 = 2ax - a^2$.

6.18. Hállese el área de la lúnula limitada por la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ y la parábola $y^2 = \frac{3}{2}\, ax$.

6.19. Hállese el área del segmento hiperbólico de altura h y base $2r$ (el semieje real de la hipérbola es igual a a).

6.20. Hállese el área de la figura limitada por la curva $a^2y^2 = \frac{x^5}{2a - x}$ y su asíntota $(a > 0)$.

6.21. Hállese el área de la figura limitada por las líneas $x^2 - y^2 = a^2$, $(x^2 - a^2)^3\, y^2 = a^8$ y el eje Ox $(x > 0)$.

6.22. Hállese el área de cada una de las dos partes en las que el círculo $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$ está dividido por la hipérbola $4x^2 - 3y^2 = a^2$.

6.23. Hállese el área del segmento elíptico de altura h y base $2r$ (el semieje mayor de la elipse es igual a a, la base del segmento es paralela al eje menor).

6.24. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$ y el eje Ox $(a > 0)$.

6.25. Hállese el área de la figura limitada por la curva $y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}$ y sus asíntotas.

6.26. Hállese el área de la figura limitada por la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

6.27. Hállese el área del bucle de la curva $x = \frac{1}{3}\, t\,(3 - t^2)$, $y = t^2$.

6.28. Hállese el área de la figura limitada por el arco de la cicloide $x = 2(t - \operatorname{sen} t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ y el eje Ox.

6.29. Hállese el área del bucle de la curva $x = a(t^2 + 1)$, $y = b(t^3 - 3t)$.

6.30. Hállese el área del bucle de la curva $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

6.31. Hállese el área de la figura limitada por la cardioide $r = a(1 + \text{sen}\,\varphi)$.

6.32. Hállese el área de un pétalo de la curva $r=a\,\text{sen}\,2\varphi$.

6.33. Hállese el área de la figura limitada por la curva $r = a\,\text{sen}\,5\varphi$.

6.34. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r = a\,\text{tg}\,\varphi\,\sec\varphi$, $r = 2a\cos\varphi$ y el eje polar.

6.35. Hállese el área de la figura situada en el primer cuadrante y limitada por las curvas $r = a\,\text{tg}\,\varphi$, $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$ y el eje polar.

6.36. Hállese el área de la figura limitada por dos espiras sucesivas de la espiral logarítmica $r = e^{\varphi}$, partiendo de $\varphi=0$.

6.37. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r^2 = 2\cos 2\varphi$, $r = 1$ $(r \geqslant 1)$.

6.38. Hállese el área de la figura limitada por las curvas $r = a\cos 3\varphi$.

6.39. Hállese el área de la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli $r^2 = a^2\,\text{sen}\,2\varphi$.

6.40. Hállese el área de al figura limitada por la circunferencia $r = \sqrt{3}\,\text{sen}\,\varphi$ y la cardioide $r = 1 - \cos\varphi$ (fuera de la cardioide).

2.2. Longitud del arco de una curva. Si una curva suave viene dada por la ecuación $y = f(x)$, entonces la longitud l de su arco es

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx,$$

donde a y b son abscisas de los extremos del arco.

Si la curva está definida mediante las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, entonces

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt.$$

De un modo análogo se expresa la longitud del arco de una curva espacial definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt.$$

En el caso en que se da la ecuación polar de una curva suave $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, se tiene

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

EJEMPLO 6. Hállese la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, desde el origen de coordenadas hasta el punto (4, 8).

◀ Tenemos:

$$y = x^{3/2}, \quad y' = \frac{3}{2} x^{1/2}.$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{3/2} \Bigg|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1). \ ▶$$

EJEMPLO 7. Hállese la longitud de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

◀ Tenemos

$$x'_t = -3a \cos^2 t \operatorname{sen} t, \quad y'_t = 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t,$$

$$\frac{1}{4} l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9a^2 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t\, dt = 3a \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2},$$

de donde $l = 6a$. ▶

EJEMPLO 8. Hállese la longitud de la cardioide $r = a(1 - \cos\varphi)$.

◀ Tenemos:

$$r' = a \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\frac{1}{2} l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 (1 - \cos\varphi)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi =$$

$$= a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\, d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a,$$

de donde $l = 8a$. ▶

6.41. Hállese la longitud del arco de la parábola $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

6.42. Hállese la longitud del arco de la curva $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ entre los puntos de su intersección con el eje Ox.

6.43. Hállese la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$, situado dentro de la parábola $y^2 = 2px$.

6.44. Hállese la longitud del arco de la curva $y = a \ln (a^2 - x^2)$ $(a > 1)$, situado por arriba del eje Ox.

6.45. Hállese la longitud de la curva cerrada $8a^2y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$.

6.46.* Hállese el perímetro de la lúnula formado por las circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$ y $x^2 + y^2 = 2by$ $(a > b > 0)$.

6.47. Hállese la longitud del arco de la catenaria $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 3$.

6.48. Hállese la longitud del arco de la curva $y = \frac{2}{\pi} \ln \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$ desde $x = \frac{1}{2}$ hasta $x = \frac{3}{2}$.

6.49. Hállese la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = \frac{5}{p}(x-p)^3$ que se obtiene al cortar la parábola por la recta $x = 2p$.

6.50. Hállese la longitud del arco de la curva $x = a(3 \cos t - \cos 3t)$, $y = a(3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t)$ comprendido entre $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$.

6.51. Hállese la longitud del arco de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$, desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

6.52. Hállese la longitud del bucle de la curva $x = t^2$, $y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$.

6.53. Hállese la longitud del arco de la curva $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ entre los puntos de su intersección con los ejes de coordenadas.

6.54. Hállese la longitud del bucle de la curva $x = a(t^2 + 1)$, $y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t)$.

6.55. Hállese en la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ un punto que divide la longitud de la primera onda de la cicloide citada en razón 1 : 3 (a partir del origen de coordenadas).

6.56. Hállese la longitud del arco de la espiral logarítmica $r = e^{a\varphi}$ que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 1$.

6.57. Hállese la longitud del arco de la cardioide $r = 2(1 - \cos\varphi)$ que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 1$.

6.58.*. Hállese la longitud total de la curva $r = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

6.59. Hállese la longitud del arco de la espiral de Arquímedes $r = 5\varphi$, que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 10\pi$.

6.60. Hállese la longitud total de la curva $r = a\,\mathrm{sen}^4\frac{\varphi}{4}$.

Hállense las longitudes de los arcos de las curvas espaciales:

6.61. $x = at^2$, $y = a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)$, $z = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$ desde $t = 0$ hasta $t = \sqrt{3}$.

6.62. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\,\mathrm{sen}\,t$, $z = e^t$ entre los planos $z = 0$ y $z = a$ $(a > 0)$.

6.63. $x^2 = 4y$, $9z^2 = 16xy$ entre los planos $x = 0$ y $x = 4$.

6.64. $x = a\sqrt{t}\cos t$, $y = a\sqrt{t}\,\mathrm{sen}\,t$, $z = at$, desde $t = 0$ hasta $t > 0$ arbitrario.

6.65. $x = t - \mathrm{sen}\,t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\cos\frac{t}{2}$ entre dos puntos de intersección de la curva con el plano Oxz.

3. Area de una superficie de revolución. El área de una superficie formada por la revolución, alrededor del eje Ox del arco de la curva definida por la función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, se calcula según la fórmula

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Si el arco viene dado por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, entonces

$$Q_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Si el arco está definido en coordenadas polares $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, entonces

$$Q_x = 2\pi\int_\alpha^\beta r\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

Si al arco de una curva gira alrededor de un eje arbitrario, el área de la superficie de revolución se expresa mediante la integral

$$Q=2\pi\int\limits_{A}^{B} R\,dl,$$

donde R es la distancia desde el punto en la curva hasta el eje de revolución, dl es la diferencial del arco, A y B, los límites de integración correspondientes a los extremos del arco. En este caso R y dl deben ser expresadas en términos de la variable de integración.

EJEMPLO 9. Hállese el área de la superficie formada por la revolución de la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ en torno al eje Ox.

◀ Tenemos:

$$y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2},$$

$$y'=\frac{3}{2}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)=$$

$$=-\frac{(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}},\quad \sqrt{1+\frac{a^{2/3}-x^{2/3}}{x^{2/3}}}=\frac{a^{1/3}}{|x|^{1/3}}.$$

Por consiguiente,

$$Q_x=2\cdot 2\pi\int\limits_{0}^{a}(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\cdot\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx=$$

$$=4\pi a^{1/3}\int\limits_{0}^{a}(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}x^{-1/3}\,dx=$$

$$=-4\pi a^{1/3}\cdot\frac{3}{2}\left.\frac{(a^{2/3}-x^{2/3})^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right|_{0}^{a}=\frac{12}{5}\pi a^2. \text{ ▶}$$

EJEMPLO 10. Hállese el área de una superficie formada por la revolución de una onda de la cicloide $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$ alrededor del eje Ox.

◀ Tenemos:

$$x_t'=a(1-\cos t),\qquad y_t'=a\operatorname{sen} t,$$

$$\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\operatorname{sen}^2 t}=$$

$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}=2a\operatorname{sen}\frac{t}{2}.$$

De aquí

$$Q_x=2\pi\int\limits_{0}^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot 2a\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\operatorname{sen}^3\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-16\pi a^2\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{64}{3}\pi a^2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 11. Hállese el área de una superficie formada por la revolución de la cardioide $r=2a(1+\cos\varphi)$ en torno al eje polar.

◀ Tenemos

$$r'=-2a\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\sqrt{r^2+(r')^2}=\sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2+4a^2\operatorname{sen}^2\varphi}=4a\cos\frac{\varphi}{2},$$

y, luego,

$$Q_x=2\pi\int\limits_0^{\pi}2a(1+\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi\cdot 4a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=64\pi a^2\int\limits_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{128}{5}\pi a^2. \blacktriangleright$$

6.66. Hállese el área de la superficie (llamada *catenoide*) engendrada por al revolución del arco de la catenaria $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x$, $0\leqslant x\leqslant 3$, en torno al eje Ox.

6.67. Hállese el área de la superficie del elipsoide formado por la revolución de la elipse $4x^2+y^2=4$ en torno al: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.68. Hállese el área de la superficie formada por la revolución alrededor del eje Ox del arco de la curva $y=\frac{1}{3}x^3$ comprendido entre $x=-1$ y $x=1$.

6.69. Hállese el área de la superficie formada por la revolución alrededor del eje Ox del arco de la curva $y=\frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$ entre los puntos de intersección de la curva citada con el eje Ox.

6.70. Hállese el área de una superficie engendrada por la revolución en torno al eje Oy del arco de la parábola semicúbica $9ay^2=4x^3$ que se obtiene al cortar la curva por la recta $x=a$.

6.71. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del bucle de la curva $9ay^2=x(3a-x)^2$ en torno al: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.72. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la curva $y = e^{-x/2}$, $0 \leqslant x < +\infty$, alrededor del eje Ox.

6.73. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la curva $x = a\,(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a\,(3\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,3t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, alrededor del: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.74. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del bucle de la curva $x = a\,(t^2 + 1)$, $y = \frac{at}{3}(3 - t^2)$ en torno al eje Ox.

6.75. Hállese el área de la superficie engendrada por la revolución de una onda de la cicloide $x = a\,(t - \mathrm{sen}\,t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ alrededor de su eje de simetría.

6.76. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la evolvente de la circunferencia $x = a\,(t\,\mathrm{sen}\,t + \cos t)$, $y = a\,(\mathrm{sen}\,t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, alrededor del eje Ox.

6.77. Hállese el área de la superficie formada por la revolución de la circunferencia $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\varphi$ en torno al eje polar.

6.78. Hállese el área de la superficie formada por la revolución de la cardioide $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ en torno a la tangente en su vértice $(2a, 0)$.

6.79. Demuéstrese que el área de la superficie formada por la revolución de la lemniscata $r^2 = a^2\,\mathrm{sen}\,2\varphi$ en torno al eje polar es igual al área de la superficie de una esfera de radio a.

6.80. Hállese el área de la superficie formada por la revolución del arco de la curva $r = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, en torno al eje polar.

4. **Volumen de un cuerpo.** Si el área $S\,(x)$ de la sección de un cuerpo por el plano perpendicular al eje Ox es una función continua en el segmento $[a, b]$, el volumen del cuerpo se calculará según la fórmula

$$V = \int_a^b S\,(x)\,dx. \tag{6}$$

Ejemplo 12. El plano de un triángulo isósceles se mueve perpendicularmente al diámetro fijo de un círculo de radio a. La base del triángulo es la cuerda de dicho círculo, mientras que el vértice está situado en una recta paralela al diámetro fijo a la distancia h del plano del círculo. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por el movimiento del plano del triángulo desde un extremo del diámetro hasta el otro.

◀ Al elegir el sistema de coordenadas de modo tal que el centro del círculo esté en el origen de coordenadas (fig. 64) y el diámetro fijo, en el eje Ox, obtendremos la ecuación de una circunferencia en la forma $x^2 + y^2 = a^2$.

La sección del cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox es un triángulo isósceles de base $2y = 2\sqrt{a^2 - x^2}$ y altura h. Tenemos:

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2}\, h = h\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (-a \leqslant x \leqslant a).$$

$$V = h\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2h\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= 2h\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a = 2h\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi a^2 h. \ ▶$$

La expresión para la función $S(x)$ se obtiene de una manera bastante simple en el caso de los cuerpos de revolución. Así, por ejemplo, si un trapecio curvilíneo, limitado por la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, gira alrededor del eje Ox o del eje Oy, los volúmenes de los cuerpos de revolución se calculan respectivamente conforme a las fórmulas:

$$V_x = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\, dx, \tag{7}$$

$$V_y = 2\pi\int\limits_a^b x\, |f(x)|\, dx, \qquad a \geqslant 0. \tag{8}$$

Si un sector curvilíneo, limitado por la curva $r = r(\varphi)$ y los rayos $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, gira alrededor del eje polar, el volumen del cuerpo de revolución es

$$V = \frac{2}{3}\pi\int\limits_\alpha^\beta r^3 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi.$$

El cálculo de los volúmenes de los cuerpos se realiza de un modo mucho más fácil con ayuda de las integrales múltiples. Por esta razón nos limitaremos aquí sólo a problemas simples.

Ejemplo 13. Una figura, limitada por las curvas $y = \sqrt{2px}$ e $y = \frac{2}{\sqrt{p}}(x - p)^{3/2}$, gira alrededor del eje Ox. Hállese el volumen del cuerpo de revolución (fig. 65).

◀ Hallemos los puntos de intersección de las curvas:

$$\sqrt{2px} = \frac{2}{\sqrt{p}}(x - p)^{3/2}, \quad \text{o bien} \quad 2p^2x = 4(x - p)^3;$$

es evidente que la ecuación queda satisfecha por el valor de $x = 2p$, y en este caso $y = 2p$, es decir tenemos un punto de intersección $(2p, 2p)$. El volumen buscado es una diferencia entre los volúmenes:

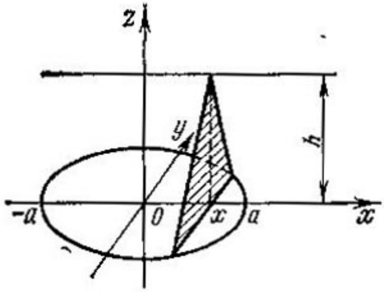

Fig. 64

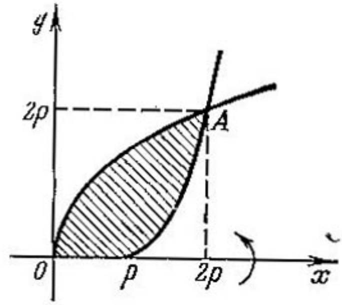

Fig. 65

el volumen V_1 obtenido mediante la revolución del trapecio curvilíneo limitado por la parábola $y = \sqrt{2px}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2p)$ y el volumen V_2, obtenido mediante la revolución del trapecio curvilíneo limitado por la parábola semicúbica $y = \frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}$ $(p \leqslant x \leqslant 2p)$.

Haciendo uso de la fórmula (7), obtenemos:

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi \int_0^{2p} y_1^2\,dx - \pi \int_p^{2p} y_2^2\,dx =$$

$$= \pi \cdot 2p \int_0^{2p} x\,dx - \pi \cdot \frac{4}{p} \int_p^{2p} (x-p)^3\,dx =$$

$$= 2\pi p \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{2p} - \frac{4\pi}{p} \cdot \frac{(x-p)^4}{4}\Big|_p^{2p} = 4\pi p^3 - \pi p^3 = 3\pi p^3. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 14. La figura, limitada por la curva $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} 2t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$ y el eje Ox, gira alrededor del eje Oy. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

◀ Es obvio que $0 \leqslant x \leqslant a$ y $0 \leqslant y \leqslant a$, así como que $y = 0$ cuando $t = 0$ y $t = \pi/2$, es decir, la figura en consideración es un trapecio curvilíneo. Luego, $x = a$ para $t = 0$, y $x = 0$ para $t = \pi/2$. Por consiguiente, el volumen que se busca se expresa mediante la fórmula (8). Tenemos:

$$V_y = 2\pi \int_0^a x(t)\,y(t) = 2\pi \int_{\pi/2}^0 a\cos t \cdot \operatorname{sen} 2t\,(-a\operatorname{sen} t)\,dt =$$

$$=\pi a^3\int\limits_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2t\,dt=\frac{\pi a^3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=\frac{\pi a^3}{2}\left(t-\frac{1}{4}\operatorname{sen}4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2a^3}{4}.\ \blacktriangleright$$

EJEMPLO 15. La cardioide $r=a(1-\cos\varphi)$ gira alrededor del eje polar. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

$$\blacktriangleleft\ V=\frac{2}{3}\pi\int\limits_0^{\pi}a^3(1-\cos\varphi)^3\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3\,\frac{(1-\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{8}{3}\pi a^3.\ \blacktriangleright$$

6.81. Sobre una cuerda de la astroide $x=a\cos^3 t$, $y=a\operatorname{sen}^3 t$, paralela al eje Ox, se ha construido un cuadrado cuyo lado es igual a la longitud de la cuerda, mientras que el plano del cuadrado es perpendicular al plano Oxy. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por el movimiento del plano del cuadrado, si la cuerda, que lo determina se desplaza a lo largo de la astroide.

6.82. Hállese el volumen de una cuña obtenida al cortar un cilindro circular recto de radio a por el plano que pasa por el diámetro de la base y que forma el ángulo α respecto al plano de la base.

6.83. Hállese el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox de la figura limitada por las líneas $2y=x^2$ y $2x+2y-3=0$.

6.84. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox de la figura limitada por las líneas $y=e^{-2x}-1$, $y=e^{-x}+1$, $x=0$.

6.85. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Oy de la figura limitada por las líneas $y=x$, $y=x+\operatorname{sen}^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

6.86. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Oy de la figura limitada por las líneas $y=\frac{x^2}{2}+2x+2$ e $y=2$.

6.87. Hállese el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución del segmento parabólico de base $2a$ y altura h alrededor de la altura.

6.88. Hállense los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución de la figura limitada por la curva $x=at^2$,

$y = a \ln t$ ($a > 0$) y los ejes coordenados en torno al: a) eje Ox; b) eje Oy.

6.89. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox de la figura limitada por la curva $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} 2t$ y el eje Ox ($0 \leqslant x \leqslant a$).

6.90. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ alrededor de la recta $x = a$.

6.91. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la curva $r = a \operatorname{sen}^2 \varphi$ en torno al eje polar.

6.92. Hállese el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ en torno al eje polar.

§ 7. Aplicaciones de la integral definida a la resolución de ciertos problemas de mecánica y física

1. Momentos y centros de masas de las curvas planas. Si el arco de una curva viene dado mediante la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, y tiene densidad *) $\rho = \rho(x)$, los momentos estáticos de dicho arco M_x y M_y respecto de los ejes coordenados Ox y Oy serán

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x)\, x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx;$$

los momentos de inercia I_x e I_y respecto de los mismos ejes Ox y Oy se calculan según las fórmulas

$$I_x = \int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x)\, x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

---

*) En los problemas, donde la densidad no se especifica, se supone siempre que la curva es homogénea y $\rho = 1$.

y las coordenadas del centro de masas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, según las fórmulas

$$\bar{x}=\frac{M_y}{l}=\frac{1}{l}\int_a^b \rho(x)\,x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{l}=\frac{1}{l}\int_a^b \rho(x)\,f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

donde l es la masa del arco, es decir,

$$l=\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Ejemplo 1. Hállense los momentos estáticos y los momentos de inercia respecto de los ejes Ox y Oy del arco de la catenaria $y=\operatorname{ch} x$ para $0\leqslant x\leqslant 1$.

◀ Tenemos: $y'=\operatorname{sh} x$, $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}=\operatorname{ch} x$. Por consiguiente,

$$M_x=\int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 (1+\operatorname{ch} 2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}(2+\operatorname{sh} 2),$$

$$M_y=\int_0^1 x\operatorname{ch} x\,dx=\int_0^1 x\,d(\operatorname{sh} x)=x\operatorname{sh} x\Big|_0^1-$$

$$-\int_0^1 \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{sh} 1-\operatorname{ch} x\Big|_0^1=\operatorname{sh} 1-\operatorname{ch} 1+1,$$

$$I_x=\int_0^1 \operatorname{ch}^3 x\,dx=\int_0^1 (1+\operatorname{sh}^2 x)\operatorname{ch} x\,dx=$$

$$=\left(\operatorname{sh} x+\frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}\right)\Big|_0^1=\operatorname{sh} 1+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1,$$

$$I_y=\int_0^1 x^2\operatorname{ch} x\,dx=\int_0^1 x^2\,d(\operatorname{sh} x)=x^2\operatorname{sh} x\Big|_0^1-2\int_0^1 x\operatorname{sh} x\,dx=$$

$$=\operatorname{sh} 1-2\int_0^1 x\,d(\operatorname{ch} x)=\operatorname{sh} 1-2\left(x\operatorname{ch} x\Big|_0^1-\int_0^1 \operatorname{ch} x\,dx\right)=$$

$$=\operatorname{sh} 1-2\operatorname{ch} 1+2\operatorname{sh} 1=3\operatorname{sh} 1-2\operatorname{ch} 1.$$ ▶

EJEMPLO 2. Hállense las coordenadas del centro de masas del arco de la circunferencia $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, situado en el primer cuadrante.

◀ Tenemos: $l = \frac{\pi a}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, $x'_t = -a \operatorname{sen} t$, $y'_t = a \cos t$,

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t} = a.$$

De aquí obtenemos:

$$M_x = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = a^2 \operatorname{sen} t \Big|_0^{\pi/2} = a^2,$$

$$M_y = a^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \, dt = -a^2 \cos t \Big|_0^{\pi/2} = a^2,$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l} = \frac{a^2}{\pi a/2} = \frac{2a}{\pi}, \qquad \bar{y} = \frac{a^2}{\pi a/2} = \frac{2a}{\pi}. \ ▶$$

En las aplicaciones resulta útil con frecuencia el siguiente

TEOREMA DE GULDIN. *El área de la superficie engendrada por la revolución del arco de una curva plana en torno a un eje, situado en el mismo plano que el arco, pero que no lo interseca, es igual al producto de la longitud de dicho arco por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de ésta.*

EJEMPLO 3. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

◀ Debido a la simetría, $\bar{x} = 0$. Al girar la semicircunferencia alrededor del eje Ox se engendra una esfera; el área de la superficie de esta esfera es igual a $4\pi a^2$, y la longitud de la semicircunferencia es πa. De acuerdo con el teorema de Guldin, se tiene

$$4\pi a^2 = \pi a \cdot 2\pi \bar{y}.$$

De aquí $\bar{y} = \frac{2a}{\pi}$, es decir, el centro de masas tienen las coordenadas $C\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$. ▶

7.1. Hállese el momento estático de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ respecto del eje Ox.

7.2. Hállense el momento estático y el momento de inercia respecto del eje Ox del arco de la curva $y = e^x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

7.3. Hállense el momento estático y el momento de inercia respecto al eje Ox de una onda de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

7.4. Hállense el momento estático y el momento de inercia de la semicircunferencia de radio a respecto de su diámetro.

7.5. Hállense los momentos estáticos respecto de los ejes Ox y Oy del arco de la circunferencia $r = 2a \cos \varphi$, situado por arriba del eje polar.

7.6. Hállese el centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} (0 \leqslant x \leqslant a)$.

7.7. Hállese el centro de gravedad del arco de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, situado por arriba del eje Ox.

7.8. Hállense las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del un arco de la cardioide $r = a (1 + \cos \varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

7.9. Haciendo uso del teorema de Guldin, hállese el centro de gravedad del arco de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, situado en el primer cuadrante.

2. Problemas físicos. En los ejemplos 4—7 que se exponen más abajo se dan algunas aplicaciones de la integral definida en la resolución de problemas de física.

EJEMPLO 4. La velocidad del movimiento rectilíneo de un cuerpo se expresa mediante la fórmula $v = 2t + 3t^2$ (m/s). Hállese el camino recorrido por el cuerpo durante 5 segundos desde el comienzo de su movimiento.

◀ Dado que el camino recorrido por el cuerpo a la velocidad $v(t)$ durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ se expresa mediante la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt,$$

tenemos:

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2)\, dt = (t^2 + t^3) \Big|_0^5 = 150 \text{ (m)}. \ ▶$$

EJEMPLO 5. ¿Qué trabajo hay que realizar para elevar un cuerpo de masa m d la superficie de la Tierra, cuyo radio es R, a una altura h? A qué es igual el trabajo, si el cuerpo se aleja al infinito?

El trabajo de una fuerza variable $f(x)$ que actúa a lo largo del eje Ox en el segmento $[a, b]$ se expresa mediante la integral

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

De acuerdo con la ley de la gravitación universal, la fuerza F que actúa sobre un cuerpo de masa m es igual a

$$F = k \frac{mM}{r^2},$$

donde M es la masa de la Tierra, r es la distancia de la masa m desde centro de la Tierra, k es la constante de la gravitación universal. Por cuanto en la superficie de la Tierra, es decir, cuando $r = R$, se tiene $F = mg$, podemos, por ende, escribir $mg = k\frac{mM}{R^2}$. De aquí hallamos $kM = gR^2$, razón por la cual

$$F = mg\,\frac{R^2}{r^2}\,.$$

Por consiguiente, el trabajo buscado es igual a

$$A = \int\limits_R^{R+h} F\,dr = \int\limits_R^{R+h} mgR^2\,\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{R+h} = mgR\,\frac{h}{R+h}\,.$$

De aquí tenemos para $h \to \infty$

$$\lim_{h\to\infty} A = mgR. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 6. Calcúlese la energía cinética de un cono circular homogéneo que gira con una velocidad angular ω en torno a su eje, si se conocen el radio de la base del cono R, su altura H y la densidad γ.

◀ La energía cinética de un cuerpo que gira alrededor de cierto eje con una velocidad angular ω es igual a $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto del eje de revolución. Tomemos como masa elemental dm la masa de un cilindro hueco de altura h que tiene un radio interior r y un espesor de la pared dr (fig. 66). Entonces, $dm = 2\pi rh\gamma\,dr$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$. Por cuanto los triángulos OCD y OAB son semejantes, tenemos

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}, \quad \text{es decir,} \quad h = H\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

Por consiguiente,

$$dm = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r\,dr,$$

y el momento de inercia elemental dI es

$$dI = dm\cdot r^2 = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\,dr.$$

De este modo, el momento de inercia de todo el cono es

$$I = \int\limits_0^R dI = \int\limits_0^R 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\,dr = 2\pi\gamma H\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\,\pi\gamma HR^4,$$

mientras que la energía cinética del cono es igual a

$$K=\frac{1}{20}\pi\gamma HR^4\omega^2. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 7. Hállese la fuerza de presión que ejerce el agua sobre una placa triangular vertical de base a y altura h, sumergida en el agua con el vértice hacia abajo, de forma que su base se encuentra en la superficie del agua.

◀ Hagamos uso de la ley de Pascal, en virtud de la cual la fuerza de presión P que ejerce un líquido, con un peso específico γ, sobre un

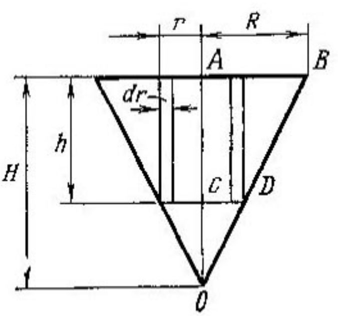

Fig. 66

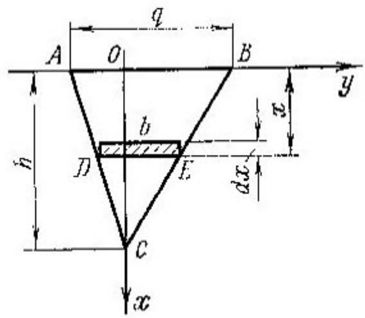

Fig. 67

área S sumergido a una profundidad H es igual a

$$P=\gamma HS.$$

Al introducir el sistema de coordenadas expuesto en la fig. 67, examinemos un área rectangular elemental que se encuentra a la profundidad x y cuyas base y altura son b y dx, respectivamente. De la semejanza de los triángulos CAB y CDE, tenemos

$$\frac{b}{a}=\frac{h-x}{h}, \quad \text{es decir,} \quad b=\frac{a}{h}(h-x),$$

por consiguiente

$$dS=b\,dx=\frac{a}{h}(h-x)\,dx \quad \text{y} \quad dP=x\,dS=\frac{ax}{h}(h-x)\,dx$$

(para el agua $\gamma=1$).

Así pues, la fuerza de presión que ejerce el agua sobre toda la placa es

$$P=\int_0^h x\,dS=\frac{a}{h}\int_0^h x(h-x)\,dx=\frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right)=\frac{ah^2}{6}. \blacktriangleright$$

7.10. La velocidad de un cuerpo lanzado hacia arriba verticalmente con una velocidad inicial v_0, despreciando la resistencia del aire, es igual a $v = v_0 - gt$, donde t es el tiempo transcurrido y g la aceleración de la gravedad. ¿A qué altura máxima se eleva el cuerpo?

7.11. Un punto del eje Ox efectúa oscilaciones armónicas alrededor del origen de coordenadas con una velocidad $v = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$, donde t es el tiempo; v_0, ω, φ son unas constantes. Hállese la ley que siguen las oscilaciones del punto y el valor medio de la magnitud absoluta de la velocidad durante el período de oscilaciones.

7.12. Dos cuerpos se mueven por una misma recta: el primer cuerpo con una velocidad $v_1 = 3t^2 - 4t$ (m/s) y el segundo, con una velocidad $v_2 = 4(t + 3)$ (m/s). Suponiendo que en el instante inicial los cuerpos estaban juntos, determínese en qué momento de tiempo y a qué distancia, desde el comienzo del movimiento, estarán juntos de nuevo.

7.13. La velocidad del movimiento de un punto $v = 0{,}1\, te^{-0{,}02t}$ (m/s). Determínese el trayecto recorrido por dicho punto desde el comienzo de su movimiento hasta que se pare por completo ($v(t_2) = 0$).

7.14*. Calcúlese el trabajo necesario para estirar un muelle en 5 cm, si se sabe que la fuerza de 1 N lo estira en 1 cm.

7.15. Calcúlese el trabajo necesario para amontonar la arena formando un cono de radio R y altura H. El peso específico de la arena es γ.

7.16. Calcúlese el trabajo necesario para sacar el agua de un recipiente que tiene forma de paraboloide de revolución con el vértice hacia arriba. El radio de la base es R, la altura es H.

7.17. Calcúlese el trabajo necesario para construir una pirámide de base cuadrada, si H es la altura de la pirámide y a, el lado de la base. El peso específico del material es γ.

7.18. Calcúlese el trabajo necesario para sacar el agua de un recipiente cónico con el vértice hacia arriba. El radio de la base es R, la altura H.

7.19. Calcúlese el trabajo necesario para sacar el agua de una cisterna limitada por las superficies: $y^2 = 2pz$, $x = \pm a$, $z = p$ $(r > 0)$.

7.20*. Una carga eléctrica e_0 concentrada en el origen de coordenadas repele la carga e del punto $(a, 0)$ al punto

$(b,\ 0)$. Determínese el trabajo A de la fuerza de repulsión F. ¿A qué es igual el trabajo, si la carga e se aleja al infinito?

7.21*. Un cilindro con un émbolo móvil, de volumen $V_0 = 0{,}2\text{m}^3$ y presión $p_0 = 10330\ \text{N/m}^2$, está lleno de vapor. ¿Cuál es el trabajo que hay que realizar para reducir el volumen del vapor en dos veces, si la temperatura es constante (proceso isotérmico)?

7.22*. Determínese el trabajo que se realiza al comprimir adiabáticamente el aire, cuyo volumen inicial es $V_0 = 8\text{m}^3$ y la presión $p_0 = 10000\ \text{N/m}^2$, hasta que se obtenga el volumen $V_1 = 2\text{m}^3$.

7.23. Hállese la energía cinética de una bola homogénea de radio R y densidad γ, que gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular ω.

7.24. Hállese la energía cinética de una placa que tiene forma de un segmento parabólico y que gira alrededor del eje de la parábola con una velocidad angular constante ω. La base del segmento es a, la altura h, el espesor de la placa d, la densidad del material γ.

7.25. Hállese la energía cinética de una placa triangular que gira alrededor de la base con una velocidad angular ω. La base de la placa es a, la altura h, el espesor l y la densidad γ.

7.26. Hállese la energía cinética de un cilindro circular homogéneo de densidad γ, radio de la base R y altura H, que gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω.

7.27. Hállese la presión que ejerce el agua sobre una placa triangular vertical de base a y altura h, sumergida en el agua de manera tal que el vértice se encuentra en la superificie y la base es paralela a la superficie del agua.

7.28. El extremo de un tubo sumergido en un líquido, cuyo peso específico es igual a γ, está cerrado con una mariposa redonda. Determínese la presión sobre la mariposa, si su radio es R y el centro se encuentra a la profundidad H.

7.29. Hállese la fuerza con la que un líquido de peso específico γ, presiona contra una pared vertical que tiene forma de semielipse, cuyo eje mayor se encuentra en la superficie del líquido. El eje mayor de la semielipse es a y el menor, b.

7.30. Hállese la presión de un líquido que llena un cilindro circular y cuyo peso específico es γ, sobre las paredes laterales del cilindro, si el radio de la base es R y la altura es H.

7.31. Hállese la masa de una barra de longitud $l = 5$ m, si su densidad lineal varía de acuerdo con la ley $\gamma = 1 + 0{,}1x^3$ (kg/m), donde x es la distancia desde uno de los extremos de la barra.

7.32*. Determínese la cantidad de calor que desprende una corriente alterna $I = I_0 \cos \omega t$ durante el período $2\pi/\omega$ en un conductor eléctrico cuya resistencia es igual a R.

7.33*. Determínese el lapso de tiempo durante el cual el agua que llena un recipiente cilíndrico de altura $H = 20$ cm y con un área de la base $S = 100$ cm^2, fluye por un orificio en el fondo de área $S_0 = 1$ cm^2.

7.34.** Una vez establecido el flujo laminar (de chorro) de un líquido a través de un tubo que tiene sección circular de radio a, la velocidad de la corriente v en un punto que se encuentra a la distancia r del eje del tubo se determina por medio de la fórmula $v = \frac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2)$, donde p es la diferencia de presión en los extremos del tubo, μ es el coeficiente de viscosidad, l es la longitud del tubo. Hállese el consumo de líquido Q, es decir, la cantidad de líquido que pasa a través de la sección transversal del tubo en la unidad de tiempo.

7.35*. ¿Con qué fuerza un semianillo de radio R y masa M atrae un punto material m que se encuentra en su centro?

7.36. Determínese el lapso de tiempo durante el cual el agua fluye de un embudo cónico, que tiene una altura $H = 50$ cm, el radio de la base superior $R = 5$ cm y el radio de la base inferior $r = 0{,}2$ cm

7.37. Determínese el consumo de líquido evacuado a través de un vertedero de sección rectangular. La altura del vertedero es h, el ancho a, el coeficiente de viscocidad μ.

§ 8. Integración numérica de las funciones de una variable

La integración numérica consiste en hallar la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función continua $f(x)$ rigiéndose por la *fórmula de integración numérica*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(x_k),$$

donde los coeficientes a_{nk} son números reales y los nudos x_k pertenecen a $[a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. La forma de la suma

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(x_k)$$

determina el método de integración numérica, y la diferencia

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - S_n(f),$$

el error del método.

Para el método de rectángulos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=1}^{n} f(x_k), \tag{1}$$

$h = \dfrac{b-a}{n}$ (paso de partición), $x_0 = a - \dfrac{h}{2}$, $x_k = x_{k+1} + h$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Para el método de trapecios

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right), \tag{2}$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_k = x_{k-1} + h \ (k = 1, \ldots, n).$$

Para el método de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\right), \tag{3}$$

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_0 = a, \quad x_k = x_{k-1} + h \ (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Los segundos miembros de las fórmulas de los rectángulos (1), los trapecios (2) y de Simpson (3) son sumas integrales y, para $h \to 0$, tienden hacia la integral dada. No obstante, para h fijo cada uno de ellos se diferencia de la integral correspondiente en la magnitud $R_n(f)$. De acuerdo con el error absoluto límite dado $\varepsilon > 0$ se elige el parámetro n, o bien, lo que es lo mismo, el paso h, para el cual se verifica la desigualdad

$$|R_n(f)| < \varepsilon.$$

Las magnitudes $R_n(f)$ se caracterizan (en la suposición de que existen las derivadas que figuran en ellas) por las igualdades

$R_n(f) = \dfrac{b-a}{24} f''(\xi)\,h^2$, $\quad \xi \in [a, b]$ para el método de rectángulos,

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2, \quad \xi \in [a, b] \quad \text{para el método de trapecios,}$$

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{180} f^{(IV)}(\xi) h^4, \quad \xi \in [a, b] \quad \text{para el método de Simpson.}$$

EJEMPLO 1. Hállese $\ln 2$ con una exactitud de hasta 10^{-4}, a partir de la relación $\ln 2 = \int_{0,5}^{1} \frac{dx}{x}$ calculando la integral por el método de Simpson.

◀ Para la función subintegral $f(x) = \frac{1}{x}$ en el segmento $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tenemos $f^{(IV)}(x) = \frac{24}{x^5}$, de donde $|f^{(IV)}(x)| < 24 \cdot 2^5$. Considerando que $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $h = \frac{1}{4n}$, obtenemos

$$|R_n(f)| < \frac{1}{2 \cdot 180} 24 \cdot 2^5 \left(\frac{1}{4n}\right)^4,$$

o bien

$$|R_n(f)| < \frac{1}{120n^4}.$$

Para que se logre la precisión prefijada es necesario el cumplimiento de la desigualdad

$$\frac{1}{120n^4} < 10^{-4}, \quad \text{o bien} \quad n^4 > \frac{10^3}{12},$$

lo que tendrá lugar para $n^4 > 100$. Por eso, se debe elegir $n = 4$. Hallando $h = \frac{1}{16} = 0{,}0625$, calculemos los valores de la función con una exactitud que supere a ciencia cierta *) 10^{-4}. Obtendremos la tabla siguiente: (véase la tabla en la pág. 425).

Calculando la suma

$$\sigma = \sigma_1 + 4\sigma_2 + 2\sigma_3 = 33{,}271415$$

y $\frac{h}{3} = 0{,}0208333$, obtenemos el resultado según la fórmula de Simpson (3):

$$◀ \ln 2 = 0{,}6931.$$

Otro método para estimar el error del método de integración numérica consiste en que se usa la igualdad asintótica

$$\int_a^b f(x)\,dx - s_{n_{\nu+1}}(f) = \frac{S_{n_{\nu+1}}(f) - S_{n_\nu}(f)}{\lambda^m - 1} + o\left(n_{\nu+1}^{-m}\right),$$

---

*) Véase la llamada de la pág. 310.

$x_0=0,5$	$f(x_0)=2$		
$x_1=0,5625$		$f(x_1)=1,7777777$	
$x_2=0,6250$			$f(x_2)=1,6$
$x_3=0,6875$		$f(x_3)=1,4545454$	
$x_4=0,7500$			$f(x_4)=1,3333333$
$x_5=0,8125$		$f(x_5)=1,2307692$	
$x_6=0,8750$			$f(x_6)=1,1428571$
$x_7=0,9375$		$f(x_7)=1,0666666$	
$x_8=1$	$f(x_8)=1$		
	$\sigma_1=3$	$\sigma_2=5,5297589$	$\sigma_3=4,0761904$

donde

$$n_{\nu+1}=\lambda n_\nu \quad (\lambda>1), \quad \nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

y $m=2$ para los métodos de rectángulos y trapecios, $m=4$ para el método de Simpson. El proceso de cálculo según las fórmulas para determinar las sumas $S_n(f)$ se realiza para $n=n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots$ hasta que se cumpla la correlación

$$\frac{|S_{n_{\nu+1}}(f)-S_{n_\nu}(f)|}{\lambda^m-1}<\varepsilon. \tag{4}$$

El método citado se denomina *regla de Runge*. Como criterio de su aplicación sirve la relación

$$\frac{|S_{n_{\nu+1}}(f)-S_{n_\nu}(f)|}{|S_{n_\nu}(f)-S_{n_{\nu-1}}(f)|}\approx\lambda^{-m}.$$

El número $\lambda>1$ puede ser cualquiera, no obstante es preferible que sea igual a 2 ó 3.

EJEMPLO 2. Calcúlese empleando el método de trapecios, con una exactitud de hasta 10^{-4} la integral

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

◀ Elijamos $n_1 = 10$, $n_2 = 20$ y calculemos los valores de la función subintegral $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ respectivamente en los nudos $x_k^{(1)} = x_0 + kh_1 = \dfrac{k}{10}$ $(k = 1, 2, \ldots, 10)$ y $x_k^{(1)} = x_0 + kh_2 = \dfrac{k}{20}$ $(k = 1, 2, \ldots, 20)$ (véase la tabla 6.1)

Tabla 6.1

$x_0^{(1)} = 0$	$f(x_0^{(1)}) = 1$	$x_0^{(2)} = 0$	
		$x_1^{(2)} = 0,05$	$f(x_1^{(2)}) = 0,9999376$
$x_1^{(1)} = 0,1$	$f(x_1^{(1)}) = 0,9995004$	$x_2^{(2)} = 0,1$	
		$x_3^{(2)} = 0,15$	$f(x_3^{(2)}) = 0,9983168$
$x_2^{(1)} = 0,2$	$f(x_2^{(1)}) = 0,9960238$	$x_4^{(2)} = 0,2$	
		$x_5^{(2)} = 0,25$	$f(x_5^{(2)}) = 0,9922778$
$x_3^{(1)} = 0,3$	$f(x_3^{(1)}) = 0,9867674$	$x_6^{(2)} = 0,3$	
		$x_7^{(2)} = 0,35$	$f(x_7^{(2)}) = 0,9792281$
$x_4^{(1)} = 0,4$	$f(x_4^{(1)}) = 0,9694584$	$x_8^{(2)} = 0,4$	
		$x_9^{(2)} = 0,45$	$f(x_9^{(2)}) = 0,9573324$
$x_5^{(1)} = 0,5$	$f(x_5^{(1)}) = 0,9428091$	$x_{10}^{(2)} = 0,5$	
		$x_{11}^{(2)} = 0,55$	$f(x_{11}^{(2)}) = 0,9259358$
$x_6^{(1)} = 0,6$	$f(x_6^{(1)}) = 0,9068453$	$x_{12}^{(2)} = 0,6$	
		$x_{13}^{(2)} = 0,65$	$f(x_{13}^{(2)}) = 0,8857451$
$x_7^{(1)} = 0,7$	$f(x_7^{(1)}) = 0,8629030$	$x_{14}^{(2)} = 0,7$	
		$x_{15}^{(2)} = 0,75$	$f(x_{15}^{(2)}) = 0,8386278$
$x_8^{(1)} = 0,8$	$f(x_8^{(1)}) = 0,8132501$	$x_{16}^{(2)} = 0,8$	
		$x_{17}^{(2)} = 0,85$	$f(x_{17}^{(2)}) = 0,7871027$
$x_9^{(1)} = 0,9$	$f(x_9^{(1)}) = 0,7605057$	$x_{18}^{(2)} = 0,9$	
		$x_{19}^{(2)} = 0,95$	$f(x_{19}^{(2)}) = 0,7337535$
$x_{10}^{(1)} = 1$	$f(x_{10}^{(1)}) = 1,7071068$	$x_{20}^{(2)} = 1$	
	$\sigma_1 = 9,0916166$		$\sigma_2 = 9,0982576$

Hallamos primero la suma $S_{n_1} = \sigma_1 \cdot h_1 = 0,9091616$, donde

$$\sigma_1 = \frac{f(x_0^{(1)}) + f(x_{10}^{(1)})}{2} + \sum_{k=1}^{9} f(x_k^{(1)}) \quad \text{y} \quad h_1 = \frac{1}{10}.$$

Aplicando de nuevo la fórmula de trapecios (2), hallamos

$$S_{n_2} = (\sigma_1 + \sigma_2)\, h_2 = 0,9094937,$$

donde $h_2 = \dfrac{1}{20}$ y $\sigma_2 = \sum\limits_{k=1}^{10} f(x_{2k-1}^{(2)})$. De la relación $x_k^{(1)} = x_{2k}^{(2)}$,

$k = 0, 1, \ldots, 10$, resulta obvio que para hallar S_{n_2} no hace falta calcular de nuevo cada uno de los 21 valores de la función, sino que se debe añadir a los valores hallados anteriormente, que figuran en la suma σ_1, 10 valores nuevos que forman la suma σ_2. Suponiendo en el primer miembro de la desigualdad (4) $\lambda = 2$, $m = 2$, y tomando en consideración los valores de S_{n_1} y S_{n_2}, obtenemos

$$\frac{S_{n_2} - S_{n_1}}{3} = 0{,}0001106.$$

Por eso, con la exactitud de hasta 10^{-4} tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = 0{,}9094. ►$$

Ejemplo 3. Fórmese en FORTRAN el programa para calcular, por el método de rectángulos, la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

◄ La tarea para la computadora electrónica conviene componerla en forma de tres unidades de programa: programa principal, función subprograma que calcula los valores de la función subintegral y función subprograma que realiza el cálculo de la integral por el método de rectángulos.

Programa principal:

```
  EXTERNAL F
  S = RECT (0., 1., F,20)
  WRITE (3, 1) S
1 FORMAT  (' INTEGRAL = ' F6.4)
  STOP
  END
```

Función subprograma para calcular los valores de la función subintegral:

```
  FUNCION F (X)
  F = 1./SQRT(1. +X** 3)
  RETURN
  END
```

Función subprograma para el cálculo de la integral definida por el método de rectángulos:

```
  FUNCION RECT(A, B, F, N)
  H = (B — A)/N
  RECT = 0.
  X = A — H/2.
  DO 1 I = 1,N
  X = X + H
```

```
1 RECT = RECT + F(X)
  RECT = RECT*H
  RETURN
  END
```

En los problemas del 8.1 al 8.24 calcúlense las integrales definidas con una exactitud de hasta 10^{-4}, empleando uno de los siguientes métodos: a) método de rectángulos, b) método de trapecios, c) método de Simpson.

8.1. $\int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. 8.2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$.

8.3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$. 8.4. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$.

8.5. $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$. 8.6. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{1+x^3}\,dx$.

8.7. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{1+x^5}\,dx$. 8.8. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

8.9. $\int\limits_{0}^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. 8.10. $\int\limits_{2}^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

8.11. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x(1-x)}\,dx$. 8.12. $\int\limits_{0}^{1} x\ln(1+x)\,dx$.

8.13. $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2}\,dx$. 8.14. $\int\limits_{0}^{1} e^{x^3}\,dx$.

8.15. $\int\limits_{0}^{0,5} e^{\sqrt{x}}\,dx$. 8.16. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\ln x}$.

8.17. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$. 8.18. $\int\limits_{0}^{3,1416} \ln(5+4\cos x)\,dx$.

8.19. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$. 8.20. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$.

8.21. $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx.$ **8.22.** $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx.$

8.23. $\int\limits_{0,4}^{0,6} \frac{e^x}{x}\, dx.$ **8.24.** $\int\limits_0^{0,8} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$

En los problemas del 8.25 al 8.28 fórmense en FORTRAN los subprogramas para calcular las integrales definidas, empleando los métodos indicados y eligiendo los parámetros nombrados, designando mediante A, B y F el origen del segmento de integración, el extremo del mismo y el identificador de la función subrograma que calcula los valores de la función subintegral, respectivamente.

8.25. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de rectángulos; los parámetros son A, B, F, N, donde N es el número de segmentos en los que se divide el segmento original [A, B].

8.26. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de trapecios; los parámetros son A, B, F, N.

8.27. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de trapecios; los parámetros son A, B, F, EPS, donde EPS es el error absoluto límite.

8.28. La función subprograma para calcular la integral definida por el método de Simpson; los parámetros son A, B, F, N.

8.29. Fórmense en FORTRAN las funciones subprogramas para calcular los valores de las funciones subintegrales en los problemas del 8.1 al 8.24.

8.30. Fórmese en FORTRAN el programa de resolución de los problemas del 8.1 al 8.24, haciendo uso de los subprogramas obtenidos en la resolución de los problemas: a) 8.26 y 8.29; b)* 8.25 y 8.29; c) 8.28 y 8.29.

8.31. Fórmese en FORTRAN el programa de resolución de los problemas 8.1—8.24, haciendo uso de los subprogramas obtenidos en la resolución de los problemas 8.27 y 8.29.

RESPUESTAS

1.1. $\frac{x^8}{4}+C$, **1.2.** $3x\sqrt[3]{x}+C$, **1.3.** $3\ln|x|-\frac{5}{x}+C$. **1.4.** $\frac{x^3}{3}+$ $+\frac{5}{2}x^2-\ln|x|+C$. **1.5.** $x+6\sqrt{x}+3\ln x-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. **1.6.** $\operatorname{sen} x+$

$+C$. 1.7. $\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}+C$. 1.8. $-\frac{1}{3}e^{2-3x}+C$. 1.9. $-\frac{3}{\ln 5}5^{-x/3}+$
$+C$. 1.10. $\frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x+C$. 1.11. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C$.
1.12. $\frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x+C$. 1.13. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. 1.14. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+C$.
1.15. $\frac{2}{3}x\sqrt{mx}+C$. 1.16. $\frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}+C$. 1.17. $2\sqrt{ax}+2x+\frac{2}{3}\times$
$\times\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+C$. 1.18. $\frac{x^3}{3}+2\ln|x|+C$. 1.19. $\frac{2^x e^x}{\ln 2+1}+C$. 1.20. x^2+
$+3\operatorname{sen} x+C$. 1.21 $-2\operatorname{ctg} x-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. 1.22. a) $-x+\operatorname{tg} x+C$,
b) $x-\operatorname{th} x+C$. ● Hágaso uso de las identidades: a) $\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-$
-1; b) $1-\operatorname{th}^2 x=\operatorname{sch}^2 x$. 1.23. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. 1.24. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\times$
$\times\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right|+C$. 1.25. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. 1.26. $\ln|x+\sqrt{x^2+3}|-$
$-\ln|x+\sqrt{x^2-3}|+C$. 1.27. $\ln|x|+2\operatorname{arctg} x+C$. 1.28. $\frac{x^2}{3}+$
$+(a+b)\frac{x^2}{2}+abx+C$. 1.29 $ax+\frac{9}{4}a^{2/3}x^{4/3}+\frac{9}{5}a^{1/3}x^{5/3}+\frac{x^3}{3}+C$.
1.30. $x+3\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|-2\operatorname{tg} x+C$. 1.31. a) $-\operatorname{ctg} x-x+C$;
b) $x-\operatorname{cth} x+C$. 1.32. $\ln|x+\sqrt{x^2-7}|+C$. 1.33. $x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\times$
$\times\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right|+C$. 1.34. $\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3}+C$. 1.35. $-\frac{3}{16}(3-$
$-4\operatorname{sen} x)^{4/3}+C$. 1.36. $\frac{\operatorname{ch}^2 x}{2}+C$. 1.37. $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$. 1.38.
$-\frac{1}{\ln x}+C$. 1.39. $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$. 1.40. $-\frac{1}{b}\ln|a-b\operatorname{tg} x|+C$.
1.41. $-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|2-3\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+C$. 1.42. $\ln|\operatorname{sen} x|+C$.
1.43. $\frac{3^{4x}}{4\ln 3}+C$. 1.44. $\frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b)+C$. 1.45. $-\cos(\ln x)+C$.
1.46. $-2\cos\sqrt{x}+C$. 1.47. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$. 1.48. $-\frac{1}{3}\operatorname{cth} 3x$
$+C$. 1.49. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+C$. 1.50. $-\frac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{-x^2}+C$. 1.51. $\frac{1}{4}\times$
$\times\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|+C$. 1.52. $-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}(e^{-ax})+C$. 1.53. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}$
$\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+C$. 1.54. $\frac{1}{3}\ln|3x+\sqrt{9x^2-1}|+C$. 1.55. $-\ln(\cos x+$

$+\sqrt{\cos^2 x+4})+C$. 1.56. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)+C$. 1.57. $\frac{1}{2}\ln(x^2+$ $+\sqrt{x^4+1})+C$. 1.58. $\frac{1}{b^2}\ln|a^2+b^2x|+C$. 1.59. $\frac{1}{2a\cos^2 ax}+C$. 1.60. $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}+C$. 1.61. $\frac{1}{7-e^x}+C$. 1.62. $\ln|\cos x|+C$. 1.63. $\frac{1}{4}\times$ $\times\ln|\operatorname{sh}4x|+C$. 1.64. $-\frac{a^{1/x}}{\ln a}+C$. 1.65. $\frac{1}{2}\operatorname{th}(x^2+1)+C$. 1.66. $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a-b}\,x-\sqrt{a+b}\,x}{\sqrt{a-b}\,x+\sqrt{a+b}\,x}\right|+C$. 1.67. $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ $\operatorname{arctg}\frac{2x}{2\sqrt{7}}+C$. 1.68. $\frac{1}{8}\ln(4x^2+7)+C$. 1.69. $\frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{x^6+1}|+C$. 1.70. $\frac{1}{\ln a}\ln(a^x+\sqrt{a^{2x}-1})+C$. 1.71. $\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}+C$. ● $\frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)-2}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$. 1.72. $x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+$ $+C$. 1.73. $x-\ln|x^2-4|+\frac{7}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$. 1.74. $\frac{1}{4ab}\ln\left|\frac{ax^2-b}{ax^2+b}\right|+$ $+C$. 1.75. $\frac{1}{48}\ln\left|\frac{3+2x^4}{3-2x^4}\right|+C$. 1.76. $\frac{1}{5}\ln|x^5+5x-8|+C$. 1.77. $\frac{1}{25}\sqrt[4]{(5x^4-3)^5}+C$. 1.78. $3\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+$ $+C$. 1.79. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x)+C$. 1.80. $\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+$ $+\frac{1}{b}\ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})+C$. 1.81. $-\frac{5}{\sqrt[5]{a^x}\ln a}+C$. 1.82. $\frac{3}{4}\times$ $\times\sqrt[3]{(4+e^x)^4}+C$. 1.83. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+4})+C$. 1.84. $x-\frac{1}{\ln 2}\ln(2^x+$ $+1)+C$. ● $\frac{1}{2^x+1}=\frac{(1+2^x)-2^x}{2^x+1}=1-\frac{2^x}{2^x+1}$. 1.85. $e^{\operatorname{arcsen} x}-$ $-\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen} x+C$. 1.86. $e^{\sqrt{x^2-1}}+C$. 1.87. $-\frac{2}{3}\sqrt{(3-\operatorname{ch} x)^3}+$ $+C$. 1.88. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln x}+C$. 1.89. $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2\ln x)+C$. 1.90. $\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$. ● $\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. 1.91. $\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$. ● $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. 1.92. $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|+C$. 1.93. $x+\frac{1}{a}\times$ $\times\operatorname{sen}^2 ax+C$. 1.94. $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. 1.95. $\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}\ln\times$ $\times\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{3}{2}\operatorname{sen}2x+\frac{\operatorname{sen}4x}{8}+C$. 1.96. $-2\sqrt{3-\cos^2 x}+$ $+C$. 1.97. $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{\cos^4 x+3})+C$. 1.98. $\ln|\operatorname{tg} x|+C$. ● $\frac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{2}{\operatorname{sen}2x}$. 1.99. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\cos\sqrt{3x}|+C$. 1.100. $\frac{1}{a}\ln\times$

$\times \operatorname{ch} ax + C$. **1.101.** $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)-x+C$. **1.102.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(x^3-3)-\frac{x^3}{3}+C$. **1.103.** $e^{\sec x}+C$. **1.104.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|+C$. **1.105.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C$. **1.106.** $2\ln(\sqrt{x}+1)+C$. **1.107.** $e^x-\ln(e^x+1)+C$. **1.108.** $\frac{1}{25}\left(\frac{(5x-1)^{21}}{21}+\frac{(5x-1)^{20}}{20}\right)+C$. **1.109.** $-2\sqrt{1-e^x}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-e^x)^3}-\frac{2}{5}\sqrt{(1-e^x)^5}+C$. **1.110.** $2\times\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}-\frac{x+1}{2}+2\sqrt{x+1}-2\ln(\sqrt{x+1}+1)\right)+C$. **1.111.** $\frac{1}{2(3-x)^6}-\frac{1}{5(3-x)^5}+C$. **1.112.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{\sqrt{3+e^x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+e^x}+\sqrt{3}}+C$. **1.113.** $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2-1}}\right|+C$. **1.114.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$. **1.115.** $x\,\mathrm{sen}\,x+\cos x+C$. **1.116.** $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$. **1.117.** $\frac{x}{3}\sqrt[3]{x^2}\times\ln x-\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2}+C$. **1.118.** $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$. **1.119.** $(2-x^2)\cos x+2x\,\mathrm{sen}\,x+C$. **1.120.** $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$. **1.121.** $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$. **1.122.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)+C$. ● Póngase $u=x^2$, $dv=xe^{-x^2}\,dx$. **1.123.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$. **1.124.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$. **1.125.** $\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$. **1.126.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\,\mathrm{sen}\,bx+a\cos bx)+C$. **1.127.** $\frac{(x-\sqrt{1-x^2})\,e^{\arccos x}}{2}+C$. **1.128.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$. **1.129.** $\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C$. **1.130.** $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$. **1.131.** $(x^2-2x+1)\,\mathrm{sen}\,x+2(x-1)\cos x+C$. **1.132.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$. **1.133.** $\frac{x}{2}(\mathrm{sen}(\ln x)+\cos(\ln x))+C$. **1.134.** $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$. ● Hágase la sustitución $x=t^2$ e intégrese por partes. **1.135.** $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg}x)^2-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. **1.136.** $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C$. **1.137.** $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$. **1.138.** $e^{-x^2}\frac{\mathrm{sen}\,x-\cos 2x-5}{10}+C$. **1.139.** $-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. ● Póngase $u=x$, $dv=$

$= \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. **1.140.** ◀ $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx =$
$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int x\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\Big(-$
$-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\Big) = \frac{1}{2(n-1)a^2}\Big(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+$
$+(2n-3)I_{n-1}\Big)$. De aquí $I_2 = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)+C$.
$I_3 = \frac{1}{4a^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{3}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)+C$. ▶ **1.141.** ◀
Suponemos $u=\sqrt{x^2+a}$, $dv=dx$. Entonces $du=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}}$, $v=x$.
Tenemos $\int\sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a}-\int\times$
$\times\frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx = x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. De
aquí $\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C$. ▶ **1.142.** ◀
Suponemos $u=x$, $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Entonces $du=dx$, $v=-\sqrt{a^2-x^2}$.
Tenemos $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-x\sqrt{a^2-x^2}+$
$+\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.
De aquí $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+C$. ▶
1.143. $\left(\frac{x^2}{1}-\frac{1}{4}\right)\operatorname{arcsen}x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$. **1.144.** $(\ln(\ln x)-1)\times$
$\times\ln x+C$. **1.145.** $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{x^2}{6}-\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+C$. **1.146.** $-2\times$
$\times\sqrt{1-x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$. **1.147.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+C$.
● Véase la resolución del problema 1.141.

2.1. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$. **2.2.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{2(x-1)}{\sqrt{6}}+C$. **2.3.** $\operatorname{arcsen}\frac{x-4}{4}+C$. **2.4.** $\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+C$. **2.5.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-6}{x}\right|+C$.
2.6. $\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arcsen}\frac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+C$. **2.7.** $\frac{1}{2}\ln|x^2-5x+4|+\frac{5}{6}\ln\times$
$\times\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C$. **2.8.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-3x+3)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C$. **2.9.** $-$
$-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2x+1}{3}+C$. **2.10.** $\sqrt{x^2-6x+1}+C$.
2.11. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+3}{2}+C$. **2.12.** $\frac{1}{2\ln 3}\ln\left|\frac{3^x-3}{3^x-1}\right|+C$. **2.13.** $2\ln\times$

$(x^2-2x+6)+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C$. **2.14.** $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$. **2.15.** $\ln\left|\frac{x}{1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}}\right|+C$. **2.16.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}+C$. **2.17.** $-\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x}-\frac{1}{2}\ln\times$ $\times\frac{2-x+\sqrt{2x^2-x+1}}{|x|}+C$. **2.18.** $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)}-\frac{2}{27}\ln\times$ $\times\frac{5-2x+3\sqrt{x^2+5}}{|x+2|}+C$. **2.19.** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C$. **2.20.** $-\frac{1}{6}\ln|x|-$ $-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$. **2.21.** $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+$ $+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$. **2.22.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C$. **2.23.** $-$ $-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$. **2.24.** $-$ $-\frac{1}{2(x^2-5x+4)^2}+C$. **2.25.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C$. **2.26.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\times$ $\times\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$. **2.27.** $-\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{(x^2+1)^2}+\right.$ $\left.+\frac{3x}{2(x^2+1)^2}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x\right)+C$. ● $\int\frac{x-1}{(x^2+1)^3}\,dx=\int\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx-$ $-\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=-\frac{1}{4(x^2+1)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$. Luego, calcúlese $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$ según la fórmula recurrente obtenida en el problema 1.140. **2.28.** $\frac{1}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{18}\ln(x^2+x+1)+\frac{x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}$ $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. ● $\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$. Aplicando el método de coeficientes indeterminados, obtenemos $\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{9(x-1)}-\frac{1}{3}\,\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{9}\,\frac{x+2}{x^2+x+1}$. Para calcular $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}$ se recomienda la sustitución $x+\frac{1}{2}=t$, y emplear, después, la fórmula recurrente deducida en el problema 1.140. **2.29.** $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$. **2.30.** $\frac{1}{2}\times$ $\times\ln|x+1|-2\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C$. **2.31.** $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2+2x+4}+$ $+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. **2.32.** $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **2.33.** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\operatorname{arctg}x+C$. **2.34.** $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+C$.

2.35. $-\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. ● $\frac{1}{x^2(x^2+a^2)}=\frac{1}{a^2}\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2(x^2+a^2)}$.
2.36. $\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.
● $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}=\frac{1}{2a^2}\frac{(x^2+a^2)-(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}$. 2.37. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\times$
$\times\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 2.38. $\ln|x|-\frac{1}{6}\ln(x^6+1)+$
$+\frac{1}{6(x^6+1)}+C$. ● $\frac{1}{x(x^6+1)^2}=\frac{(1+x^6)-x^6}{x(x^6+1)^2}$. 2.39. $\frac{1}{4x^4}+$
$\frac{1}{2x^2}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. 2.40. $\frac{1}{12}\ln(x^4+1)(x^4-2)^2+C$.
● Póngase $x^4=t$. 2.41. $-\frac{1}{6(x+1)^6}+\frac{3}{7(x+1)^7}-\frac{1}{4(x+1)^8}+C$.
2.42. $\frac{1}{6}\ln|x^3-1|-\frac{1}{12}\ln(x^6+x^3+2)+\frac{1}{6\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^3+1}{\sqrt{7}}+C$.
2.43. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$. 2.44. $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{5\cos^5 x}+C$. 2.45.
$\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^3 x+\frac{3}{5}\operatorname{sen}^5 x-\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x+C$. 2.46. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen} x}{2}+$
$+\frac{\operatorname{sen} 2x}{16}+C$. 2.47. $\frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{32}+C$. 2.48. $\frac{x}{16}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{64}-$
$-\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48}+C$. 2.49. $-\operatorname{ctg} x+\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+C$. 2.50.
$\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 2.51. $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+$
$+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$. 2.52. $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\frac{2}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x+C$. 2.53. $\frac{\sqrt{2}}{2}\times$
$\times\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)+C$. 2.54. $\frac{\operatorname{sen} x}{4\cos^4 x}+\frac{3}{8}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}+$
$+\frac{3}{8}\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|+C$. 2.55. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$. 2.56. $x+$
$+2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}-2\ln\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|+C$. 2.57. $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+$
$+C$. 2.58. $\operatorname{sen} x-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x+\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+C$. 2.59. $-2\sqrt{\cos x}+$
$+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$. 2.60. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{96}\operatorname{sen}^3 4x+\frac{3}{128}\times$
$\times\operatorname{sen} 8x+C$. 2.61. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 2.62. $3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}+$
$+C$. 2.63. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$. 2.64. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\frac{1}{12}\operatorname{sen} 3x+$
$+\frac{1}{20}\operatorname{sen} 5x+C$. 2.65. $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}+C$. 2.66. $-\frac{\operatorname{sen} 25x}{50}+$

$+\frac{\operatorname{sen} 5x}{10}+C$. **2.67.** $\frac{3}{5}\operatorname{sen}\frac{5x}{6}+3\operatorname{sen}\frac{x}{6}+C$. **2.68.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-$ $-\frac{1}{2}\cos x+C$. **2.69.** $\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}+\frac{\operatorname{sen} 5x}{20}+\frac{\operatorname{sen} 7x}{28}+C$. **2.70.** $\frac{1}{24}\times$ $\times\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **2.71.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$.
2.72. $\operatorname{arct}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$. **2.73.** $\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x+x+C$. ● Multiplíquense por $(1-\operatorname{sen} x)$ el numerador y el denominador de la función subintegral. **2.74.** $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x-\sqrt{7}}{2\operatorname{tg} x+\sqrt{7}}\right|+C$. **2.75.** $-\frac{1}{2}\times$ $\times\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x-1}{2}\right)+C$. **2.76.** $-\frac{1}{4}\ln(1+4\cos^2 x)+C$.
2.77. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right)+C$. **2.78.** $\frac{2}{5\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}-\frac{2}{5\sqrt{15}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C$. ● $\frac{1}{(\operatorname{sen} x+4)(\operatorname{sen} x-1)}=\frac{(\operatorname{sen} x+4)-(\operatorname{sen} x-1)}{5(\operatorname{sen} x+4)(\operatorname{sen} x-1)}$.
2.79. $\ln|\operatorname{sen} x-\cos x|+C$. **2.80.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+2}{\operatorname{tg} x+6}\right|+C$. **2.81.** $\frac{\operatorname{sh} 6x}{12}+$ $+\frac{x}{2}+C$. **2.82.** $\frac{\operatorname{ch}^3 2x}{6}-\frac{\operatorname{ch} 2x}{2}+C$. **2.83.** $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}-\frac{x}{8}+C$. **2.84.** $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}+C$. **2.85.** $-2\operatorname{cth} 2x+C$. **2.86.** $\frac{1}{4}\times$ $\times\ln\left|\frac{\operatorname{th} x-2}{\operatorname{th} x+2}\right|+C$. ● Divídanse por $\operatorname{ch}^2 x$ el numerador y el denominador de la fracción subintegral. **2.87.** $-\frac{1}{\operatorname{sh} x}-\operatorname{cth} x+C$. ● Multiplíquense el numerador y el denominador de la fracción subintegral por $\operatorname{ch} x+1$. **2.88.** $2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2}+C$. **2.89.** $\ln|\operatorname{sh} x|-$ $-\frac{\operatorname{cth}^2 x}{2}+C$. **2.90.** $x-\operatorname{th} x-\frac{\operatorname{th}^3 x}{3}+C$. **2.91.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C$.
2.92. $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C$. **2.93.** $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+$ $+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$. **2.94.** $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+a}-6\ln\sqrt[6]{x+a}+3\ln|1+$ $+\sqrt[3]{x+a}|+C$. **2.95.** $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$.
2.96. $\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$. **2.97.** $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+C$.

2.98. $\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$. 2.99. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\times$ $\times\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}\right|+C$. 2.100. $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

2.101. $\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}+C$. 2.102. $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}-a^2\sqrt{a^2-x^2}+C$.

2.103. $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. 2.104. $6\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{2}-$ $-\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{4}(x^3+3x^2-7x-9)+C$. 2.105. $\frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}+C$.

2.106. $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$. 2.107. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+10}+$ $+\frac{9}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+10})+C$. 2.108. $\frac{x-2}{2}\sqrt{4x-x^2}+$ $+2\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{2}+C$. 2.109. $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+5})+C$.

2.110. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$. 2.111. $\frac{x}{9\sqrt{x^2+9}}+C$.

2.112. $\frac{1}{8}(2x^3-5x)\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$. 3.1. $\frac{1}{2}\times$ $\times\ln(x^2+2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$. 3.2. $\frac{x^2}{2}+x+\ln|x^2-$ $-x-1|+\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$. 3.3. $-\frac{1}{5(x-2)}+\frac{1}{25}\ln\times$ $\times\left|\frac{x+3}{x-2}\right|+C$. 3.4. $-\frac{2}{9}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+$ $+\frac{1}{3}\frac{x}{1-x^3}+C$. 3.5. $\frac{1}{4}\left(2\ln\frac{x^4+1}{x^4}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^4+1}\right)+C$.

3.6. $\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right)+C$.

3.7. $-\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}+2\operatorname{arcsen}\frac{\ln x-2}{\sqrt{10}}+C$. 3.8. $-\frac{1}{2}\ln\times$ $\times\left|\frac{2x+2+\sqrt{x^2+8x+4}}{x}\right|+C$. 3.9. $\frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{3}+C$.

3.10. $\frac{\sqrt{(x^2+4x-5)^3}}{3}-(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}+9\ln(x+2+$ $+\sqrt{x^2+4x-5})+C$. 3.11. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{1}{2}\ln(x+2+$ $+\sqrt{x^2+4x-5})+C$. 3.12. $\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{5x}{3\sqrt{16-x^2}}+C$. 3.13. $\frac{1}{2}\times$ $\times\ln(x^2+\sqrt{x^4+16})+C$. 3.14. $\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}+C$. 3.15. $2\sqrt{x}+$

$+4\sqrt[4]{x}-\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}}+C.$ **3.16.** $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$
3.17. $-x+\operatorname{tg}x-\sec x+C.$ **3.18.** $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C.$
3.19. $\frac{1}{3(1-\operatorname{sen}x)^3}+C.$ **3.20.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+C.$ **3.21.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}\right|+C.$ **3.22.** $2\operatorname{tg}x-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4x}+C.$ **3.23.** $\operatorname{arcsen}\times\left(\frac{\sec x}{\sqrt{5}}\right)+C.$ **3.24.** $-\frac{\operatorname{sen}^2x}{2}-5\operatorname{sen}x-24\ln(\operatorname{sen}x+5)+C.$
3.25. $\ln|\operatorname{tg}x|+\operatorname{tg}^2x+\frac{\operatorname{tg}^4x}{4}+C.$ **3.26.** $\operatorname{tg}x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{\operatorname{tg}^5x}{5}+C.$
3.27. $-\frac{\cos x}{4\operatorname{sen}^4x}-\frac{3\cos x}{8\operatorname{sen}^2x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$ **3.28.** $-\frac{x\cos3x}{6}+\frac{\operatorname{sen}3x}{18}+\frac{x\cos x}{2}-\frac{\operatorname{sen}x}{2}+C.$ **3.29.** $\ln|\operatorname{th}x|+C.$ **3.30.** $\operatorname{arctg}\times(\operatorname{th}x)+C.$ **3.31.** $\ln(\operatorname{ch}x)-\frac{\operatorname{th}^2x}{2}-\frac{\operatorname{th}^4x}{4}+C.$ **3.32.** $2\operatorname{sh}\sqrt{1+x}+C.$
3.33. $x\operatorname{th}x-\ln(\operatorname{ch}x)+C.$ **3.34.** $\frac{x}{2}-\frac{x\cos(2\ln x)+2x\operatorname{sen}2(\ln x)}{10}+C.$
3.35. $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C.$ **3.36.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$ **3.37.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C.$
3.38. $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+C.$ **3.39.** $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arcsen}x}(x+\sqrt{1-x^2})+C.$ **3.40.** $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C.$
3.41. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\operatorname{arcsen}x+\frac{1}{2}(\operatorname{arcsen}x)^2+\ln|x|+C.$ **3.42.** $x-e^{-x}\times\operatorname{arcsen}(e^x)-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C,\ x\leqslant0.$ **3.43.** $-\frac{x^2}{6}-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)+C.$ **3.44.** $\frac{x}{4}+\frac{x^2}{12}+\frac{1}{4}(1-x^2)\operatorname{arctg}x+C.$ **3.45.** $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\times\frac{\ln(1+x^2)}{1+x+x^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C.$ **3.46.** $-x^2+\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+C.$ **3.47.** $-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2-1}+\frac{(x^2-1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x^2-1}+1}+C,\ |x|>1.$ **3.48.** $\left(\frac{3-x}{1-x}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\times\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+C,\quad 0<x<1.$
3.49. $e^x+C,\ x>0.$ **3.50.** $x-\ln(1+e^x)-2e^{-x/2}\operatorname{arctg}e^{x/2}-(\operatorname{arctg}e^{x/2})^2+C.$

4.1. $\frac{35}{2}$. ● Divídase el segmento [0, 5] en n partes iguales. 4.2. 1. ● Divídase el segmento $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en n partes iguales. Aplíquese la fórmula: $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$. 4.3. $e^{10}-1$. ● Divídase el segmento [0, 10] en n partes iguales. 4.4. 2/3. ● Divídase el segmento [1, 3] en n partes de modo tal que las abscisas de los puntos de división formen una progresión geométrica. 4.5. 15/4. 4.6. 9/2. 4.7. 5. 4.8. 19/15. 4.9. $3\frac{57}{64}$. 4.10. 45/4. 4.11. 1. 4.12. 1. 4.13. e^2-e. 4.14. $7/\ln 2$. 4.15. $\ln 2{,}5$. 4.16. $(\ln 3)/2$. 4.17. $\pi/12$. 4.18. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$. 4.19. $\frac{\pi}{6}+\frac{8\sqrt{3}}{27}$. 4.20. $\frac{1}{3}(2-3\operatorname{ch}2+\operatorname{ch}^3 2)$. 4.21. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. 4.22. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 4.23. $\frac{11}{2}+7\ln 2$. 4.24. $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$. 4.25. $\frac{1}{2}(e-\sqrt[4]{e})$. 4.26. sen 1. 4.27. $\frac{\pi}{4}$. 4.28. $\frac{2}{3}$. 4.29. $\frac{1}{12}\operatorname{sh}2+\frac{1}{6}$. 4.30. $\frac{1}{6}\ln\frac{2}{5}$. 4.31. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 4.32. $2-\ln 5$. 4.33. $\frac{\pi}{4}$. 4.34. $\frac{\pi}{4}$. ◀ La suma $S_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$ puede considerarse como suma integral para la función $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ en el segmento [0, 1]. Por ello, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$. ▶ 4.35. 1. 4.36. $\frac{2}{3}(2^{3/2}-1)$. 4.37. $\frac{19}{6}$. 4.38. $\frac{45}{2}$. 4.39. 7. 4.40. $\frac{16}{3}$. 4.41. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4.42. $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$. 4.43. $2\ln\frac{3}{2}$. 4.44. $4-3\ln 3$. 4.45. a) Menos. ● Divídase el segmento de integración en los segmentos [−2, −1] y [−1, 1] y hágase uso de las propiedades 1) y 9). b) Más; c) menos. 4.46. a) Segunda; b) primera; c) segunda. 4.47. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{2}{\pi}$; d) $\frac{4}{3\pi}$. 4.48. $\frac{2}{\pi}I_0\cos\varphi$. 4.49. $2\sqrt{7}<I<6$. 4.50. $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}<$

$< I < \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. 4.51. a) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) < I < \frac{2\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$; b) $|I| < \frac{\sqrt{30}}{4}$. 4.52. a) $\frac{4}{3} < I < \frac{2}{3}\sqrt{5}$; b) $I < \sqrt{2{,}125}$.

4.53. a) $\frac{dI}{d\beta} = \frac{e^{\beta}}{\beta}$; b) $\frac{dI}{d\alpha} = -\frac{e^{\alpha}}{\alpha}$. 4.54. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ 4.55. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 4.56. $\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}$. 4.57. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

4.58. $\frac{x^2-x}{\ln x}$. 4.60. No. 4.61. $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$. 4.62. $\ln\frac{3}{2}$.

4.63. $\frac{1}{4}(2+\operatorname{sh} 2)$. 4.64. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. 4.65. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 4.66. π.

4.67. $\frac{\pi}{6}$. 4.68. $\frac{\pi}{6}$. 4.69. $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$. 4.70. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 4.71. $\frac{1}{32}(\pi+2)$.

4.72. $2\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)$. 4.73. $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. 4.74. $\frac{1}{6}$. 4.75. $4-\pi$.

4.76. $\frac{81}{16}\pi$. 4.80. 1. 4.81. $\pi\sqrt{2}-4$. 4.82. $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3)$.

4.83. $e-2$. 4.84. $\frac{4}{25}(e^{3\pi/4}+1)$. 4.85. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.

4.86. $\frac{e^2+1}{4}$. 4.87. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. 4.88. $\frac{\pi^2-8}{32}$. 4.89. $\frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1)$.

4.90. $I_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k}\cdot\frac{\pi}{2}\ (n=2k)$; $I_{2k+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2k+1)}\times$ $\times\ (n=2k+1)$; $I_7 = \frac{16}{35}$; $I_8 = \frac{35}{256}\pi$. 4.91. $I_4 = 24-\frac{65}{e}$.

5.1. $\frac{1}{2}$. 5.2. Diverge. 5.3. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 5.4. $\frac{2}{5}$. 5.5. Diverge. 5.6. $1+\ln 2$. 5.7. $\frac{1}{3}$. 5.8. $\frac{1}{2}$. 5.9. Diverge. 5.10. Converge. 5.11. Converge. 5.12. Diverge. 5.13. Diverge. 5.14. Converge. 5.15. Converge. 5.16. Diverge. 5.17. Diverge. 5.18. $\frac{5}{2}(\sqrt[5]{3}+1)$. 5.19. Diverge. 5.20. π. 5.21. $\frac{\pi}{3}$. 5.22. $\frac{16}{3}$. 5.23. $2\sqrt{2}$. 5.24. Diverge. 5.25. π. 5.26. Converge. 5.27. Diverge. 5.28. Diverge. 5.29. Converge. 5.30. Diverge.

6.1. e^2. 6.2. πab. 6.3. 16/3. 6.4. 9/2. 6.5. $\frac{3}{2}(3\pi-2)$. 6.6. $\frac{56}{15}p^2$. 6.7. a^2. 6.8. $\frac{a^2}{4}(\pi-2\ln 2)$. 6.9. $\frac{c^3}{6p}$. 6.10. $2\ln 2-\frac{1}{2}$. 6.11. 32/3.

6.12. 1. 6.13. a^2. 6.14. $1{,}5-2\ln 2$. 6.15. $\frac{e}{2}-1$. 6.16. $4\ln 2-1$.

6.17. $\frac{\pi a^2}{2}-\frac{2}{3}a^2$ y $\frac{\pi a^2}{2}+\frac{2}{3}a^2$. 6.18. $a^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln(2+\sqrt{3})\right)$.

6.19. $r(a+h)-\frac{a^2r}{\sqrt{2ah+h^2}}\ln\frac{a+h+\sqrt{2ah+h^2}}{a}$. 6.20. $5\pi a^2$.

6.21. $\frac{a^2}{2}(3\sqrt{2}-2-\ln(1+\sqrt{2}))$. 6.22. $\frac{\pi a^2}{2}+a^2-\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ y $\frac{\pi a^2}{2}-a^2+\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$. 6.23. $\frac{a^2r}{\sqrt{2ah-h^2}}\arccos\left(1-\frac{h}{a}\right)-(a-h)r$. 6.24. $\frac{a^2}{4}(\pi+2\ln 2)$. 6.25. πa^2. 6.26. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 6.27. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$.

6.28. 12π. 6.29. $\frac{24}{5}ab\sqrt{3}$. 6.30. $\frac{8}{15}$. 6.31. $\frac{3}{2}\pi a^2$. 6.32. $\frac{\pi a^2}{8}$.

6.33. $\frac{\pi a^2}{4}$. 6.34. $\frac{a^2}{4}\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$. 6.35. $\frac{\pi a^2}{4}$. 6.36. $\frac{1}{4}(e^{4\pi}-1)^2$.

6.37. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. 6.38. $\frac{\pi a^2}{4}$. 6.39. a^2. 6.40. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. 6.41. $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$. 6.42. $2\sqrt{3}$. 6.43. $2p(3\sqrt{3}-1)$. 6.44. $4a\ln(a+\sqrt{a^2-1})-2\sqrt{a^2-1})$. 6.45. $\pi a\sqrt{2}$. 6.46. $\pi a-2(a-b)\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$.
● Pásese a las coordenadas polares. 6.47. $\frac{1}{2}\operatorname{sh}6$. 6.48. $\frac{4}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$. 6.49. $\frac{134}{27}p$. 6.50. $6a$. 6.51. $\sqrt{2}(e-1)$. 6.52. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

6.53. $\frac{13}{3}$. 6.54. $4a\sqrt{3}$. 6.55. $x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y=\frac{3}{2}a$.

6.56. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$. 6.57. $8(2-\sqrt{3})$. 6.58. $\frac{3}{2}\pi a$. ● $0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi$.

6.59. $5\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{5}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 6.60. $\frac{16}{3}a$. 6.61. $2a\sqrt{6}$.

6.62. $a\sqrt{3}$. 6.63. 8. 6.64. $\frac{1}{3}a\sqrt{t}(3+2t)$. 6.65. $8\sqrt{2}$. 6.66. $\frac{\pi}{8}\times(\operatorname{sh}12+12)$. 6.67. a) $8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$; b) $2\pi+\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$.

6.68. $\frac{2\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$. 6.69. 48π. 6.70. $\frac{16}{15}\pi a^2(\sqrt{2}+1)$. 6.71. a) $3\pi a^2$; b) $\frac{56}{5}\pi a^2\sqrt{3}$. 6.72. $\pi\left(\sqrt{5}+4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. 6.73. a) $9\pi^2a^2$; b) $24\pi a^2$.

6.74. $3\pi a^2$. 6.75. $\frac{8}{3}\pi a^2(3\pi-4)$. 6.76. $6\pi^2 a^2$. 6.77. $4\pi^2 a^2$. 6.78. $\frac{96}{5}\pi a^2$. 6.80. $\frac{8}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$. 6.81. $\frac{128}{105}a^3$. 6.82. $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$. 6.83. $\frac{272}{15}\pi$. 6.84. $\frac{11}{4}\pi$. 6.85. $\frac{\pi^3}{2}$. 6.86. $\frac{64}{3}\pi$. 6.87. $\frac{\pi a^2 h}{2}$. 6.88. a) $\frac{\pi a^3}{2}$; b) $\frac{\pi a^3}{4}$. 6.89. $\frac{8}{15}\pi a^3$. 6.90. $\frac{3}{4}\pi^2 a^3$. 6.91. $\frac{64}{105}\pi a^3$. 6.92. $\frac{\pi a^3}{12}\times$ $\times(3\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2)$.

7.1. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. 7.2. $M_x=\frac{1}{2}\left(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\right.$ $\left.+\ln\left((\sqrt{2}-1)(e+\sqrt{1+e^2})\right)\right)$, $I_x=\frac{1}{3}\left((1+e^2)^{3/2}-\sqrt{8}\right)$. 7.3. $M_x=$ $=\frac{32}{3}a^2$, $I_x=\frac{256}{15}a^3$. 7.4. $M_x=2a^2$, $I_x=\frac{\pi a^3}{2}$. 7.5. $M_x=2a^2$, $M_y=\pi a^2$. 7.6. $\bar{x}=\frac{a(\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1)}{\operatorname{sh}1}=a\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)$, $\bar{y}=\frac{a(2+\operatorname{sh}2)}{4\operatorname{sh}1}=$ $=\frac{a}{2}(\operatorname{csch}1+\operatorname{ch}1)$. 7.7. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{2}{5}a$. 7.8. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{4}{5}a$. 7.9. $\bar{x}=$ $=\bar{y}=\frac{2}{5}a$. 7.10. $\frac{v_0^2}{2g}$. 7.11. $x=\frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$; $v_{\text{med}}=\frac{2}{\pi}v_0$. 7.12. $t=6$ sec, $s=144$ m. 7.13. 250 m. 7.14. $\approx 0{,}125$ joulos. ● De acuerdo con la ley de Hook, la fuerza es proporcional al estiramiento del muelle. 7.15. $\frac{1}{12}\gamma\pi R^2 H^2$. 7.16. $\frac{1}{3}\pi R^2 H^2$. 7.17. $\frac{1}{12}\gamma a^2 H^2$. 7.18. $\frac{1}{4}\pi H^2 R^2$. 7.19. $\frac{16}{15}\sqrt{2}\,ap^3$. 7.20. $e_0 e\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$; $\frac{e_0 e}{a}$. ● De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza de interacción de las cargas en el vacío es igual a $F=\frac{e_0 e}{x^2}$, donde x es la distancia entre las cargas. 7.21. $2066\ln 2$. ● En un proceso isotérmico $pv=p_0v_0$. El trabajo es igual a $A=\int\limits_{v_1}^{v_2}p\,dv$, donde v_1 y v_2 son los valores inicial y final del volumen. 7.22. $\frac{p_0v_0}{k-1}\left(\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}-1\right)$. ● En un proceso adiabático $pv^k=p_0v_0^k$, donde $k\approx 1{,}4$ (ley de Poisson). El trabajo es igual a $A=\int\limits_{v_0}^{v_1}\frac{p_0v_0^k}{v^k}\,dv$. 7.23. $\frac{4}{15}\pi\gamma\omega^2 R^5$. 7.24. $\frac{1}{60}\omega^2\gamma\,dha^3$. 7.25. $\frac{1}{24}\gamma\,alh^3\omega^2$. 7.26. $\frac{1}{4}\pi\omega^2\gamma R^4 H$. 7.27. $\frac{ah^2}{3}$. 7.28. $\gamma\pi R^2 H$.

7.29. $\frac{2}{3}\gamma ab^2$. **7.30.** $\gamma\pi RH^2$. **7.31.** 20,625 kg. **7.32.** $\frac{0{,}24I_0^2R\pi}{\omega}$. ● De acuerdo con la ley de Joule—Lenz, la cantidad de calor que se desprende por una corriente directa durante el tiempo t es igual a $Q=0{,}24I^2Rt$. **7.33.** $\frac{S}{\mu S_0}\sqrt{\frac{2H}{g}}\approx 5{,}6$ min. ● De acuerdo con la ley de Torricelli, la velocidad con la que el agua fluye por un orificio a la distancia x de la superficie libre es igual a $v=\mu\sqrt{2gx}$, donde $\mu\approx 0{,}6$, g es la aceleración de la gravedad. **7.34.** $\frac{\pi pa^4}{8\mu l}$.

$$◀\ Q=\int_0^a v\cdot 2\pi r\,dr=\frac{2\pi p}{4\mu l}\int_0^a (a^2-r^2)\,r\,dr=\frac{\pi p}{2\mu l}\left(-\frac{(a^2-r^2)^2}{4}\right)\Bigg|_0^a=$$

$=\frac{\pi pa^4}{8\mu l}$. ▶ **7.35.** $\frac{2kmM}{\pi R^2}$. ● Aplíquese la ley de la gravitación universal. **7.36.** $\frac{R^2}{3r^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}\approx 11$ minutos. **7.37.** $\frac{2}{3}\mu ah\sqrt{2gh}$.

8.1. 0,5236. **8.2.** 0,1963. **8.3.** 0,1178. **8.4.** 0,3926. **8.5.** 1,7500. **8.6.** 3,2413. **8.7.** 4,2218. **8.8.** 0,4969. **8.9.** 0,6082. **8.10.** 2,6291. **8.11.** 0,3927. **8.12.** 0,2500. **8.13.** 1,4627. **8.14.** 1,3419. **8.15.** 0,8120. **8.16.** 1,1184. **8.17.** 0,1728. **8.18.** 4,3555. **8.19.** 0,6205. **8.20.** 0,6076. **8.21.** 1,5708. **8.22.** 0,9160. **8.23.** 0,6651. **8.24.** 0,7724.

8.25.

```
      FUNCTION  R(A, B, F, N)
      H = (B - A)/N
      R = 0.
      X = A - H/2.
      DO 1 I = 1,N
      X = X + H
    1 R = R + F(X)
      R = R * H
      RETURN
      END
```

8.26.

```
      FUNCTION  TR(A, B, F, N)
      H = (B - A)/N
      TR = (F(A) + F(B))/2.
      X = A
      DO 1 I = 1,N
      X = X + H
    1 TR = TR + F(X)
      TR = TR * H
      RETURN
      END
```

8.27.

```
      FUNCTION  T(A, B, F, EPS)
      T1 = (F(A) + F(B))/2
      T = T1
      H = B - A
      N = 1
    1 X = A - H/2.
      DO 2 I = 1,N
      X = X + H
```

```
2 T = T + F(X)
  T2 = T
  N = N * 2
  H = H/2.
  T = T * H
  EPS1 = ABS(T - T1)/3.
  IF(EPS.GT.EPS1) GO TO 3
  RETURN
3 T1 = T
  T = T2
  GO TO 1
  END
```

8.28.

```
  FUNCTION P(A, B, F, N)
  H = (B - A)/(2 * N)
  P1 = 0.
  P2 = 0.
  X = A
  DO 1 I = 1,N
  X = X + N
  P1 = P1 + F(X)
  X = X + H
1 P2 = P2 + F(X)
  P = (F(A) - F(B) + 2 * P2 + 4. *P1)*H/3
  RETURN
  END
```

8.29. Para el problema 8.1 la respuesta se escribe del modo siguiente:

```
  FUNCTION F(X)
  F = 1./SQRT(5. + 4. * I - X * X)
  RETURN
  END
```

Para los problemas restantes el operador que determina el valor de F tiene la forma siguiente:

```
F = (X ** 3)/(X ** 8 + 1.)          (para 8.2)
F = X/(X * X + 3. * X + 2.)         (para 8.3)
F = 1/(4. + X**2)                   (pava 8.4)
F = (1 + SQRT(X))/X**2              (para 8.5)
F = SQRT(1. - X**3)                 (para 8.6)
F = SQRT(1. + X**5)                 (para 8.7)
F = 1./SQRT(1. + X**4)              (para 8.8)
```

```
F = 1.(SQRT(1. — X**4)                          (para 8.9)
F = 1./(1. + X**2)**0.333333                    (para 8.10)
F = SQRT(X*(1. — X))                            (para 8.11)
F = X*ALOG(1. + X)                              (para 8.12)
F = EXP(X**2)                                   (para 8.13)
F = EXP(X**3)                                   (para 8.14)
F = EXP(SQRT(X))                                (para 8.15)
F = 1./ALOG(X)                                  (para 8.16)
Y = 1. + X**2                                   (para 8.17)
F = ALOG(Y)/Y                                   (para 8.18)
F = ALOG(5. + 4.*COS(X))                        (para 8.19)
F = (SEN(X) — X)/SQRT(X) + SQRT(X)              (para 8.20)
F = (X**0.333333)*COS(X)                        (para 8.21)
F = SQRT(SEN(X))*SEN(X/2.)                      (para 8.22)
F = (ATAN(X) — X)/X + 1.                        (para 8.23)
F = EXP(X)/X                                    (para 8.24)
F = (SEN(X) — X)/X + 1.
```

8.30. b) La respuesta se da para el problema 8.15:

```
  EXTERNAL F
  N = 16
  Y = R(0.0, 0.5, F, N)
1 Y1 = Y
  N = N*2
  Y = R(0.0, 0.5, F, N)
  EPS = ABS((Y1 — Y)/3.)
  IF(EPS — 0.0001)2,2,1
2 WRITE (3,3) Y
3 FORMAT (' INTEGRAL = ', F8.4)
  STOP
  END
```

● El problema que se plantea ante la calculadora electronica debe contener tres programas: uno que se indica aquí y los otros dos obtenidos al resolver los problemas 8.25 y 8.29.

El programa para la resolución de cualquier otro problema se diferencia del que se da mediante los operadores que contienen una referencia a la función subprograma R, por ejemplo, para el problema 8.18 Y = R(0.0, 3.1416.F,N).

c) Diferencia con relación al programa aducido arriba en los operadores mencionados:

```
Y = P(0.0,0.5,F,N)
EPS = ABS((Y1 — Y)/15.)
```

8.31. La respuesta para el problema 8.16.

```
  EXTERNAL F
  Y = T(2.,3.,F,0.0001)
  WRITE (3,1) Y
1 FORMAT (', ', F20.4)
  STOP
  END
```

● Véanse las indicaciones para el problema 8.30, b).

CAPÍTULO 7

CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. Conceptos fundamentales

1. Concepto de función de varias variables. Recordemos que todo juego ordenado de n números reales $x_1, \ldots, x_n$ se denota $(x_1, \ldots, x_n)$ ó $P(x_1, \ldots, x_n)$ y se llama punto del espacio aritmético n-dimensional $\mathbb{R}^n$, y los números $x_1, \ldots, x_n$ llevan el nombre de coordenadas del punto $P = P(x_1, \ldots, x_n)$. La distancia entre los puntos $P(x_1, \ldots, x_n)$ y $P'(x_1', \ldots, x_n')$ se determina por la fórmula

$$\rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2}.$$

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario de puntos de un espacio aritmético n-dimensional. Si a cada punto $P(x_1, \ldots, x_n) \in D$ se le ha puesto en correspondéncia cierto número real bien determinado $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$, se dice que sobre el conjunto D está definida la *función numérica* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de n variables $x_1, \ldots, x_n$. El conjunto D se denomina campo de definición, y el conjunto $E = \{u \in \mathbb{R} \mid u = f(P), P \in D\}$, campo de valores de la función $u = f(P)$.

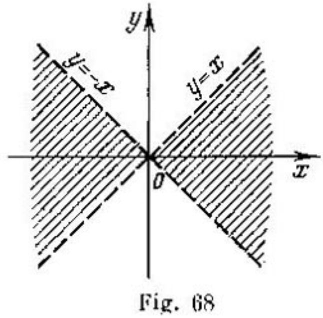

Fig. 68

En el caso particular de $n = 2$ la función de dos variables $z = f(x, y)$ puede considerarse como función de los puntos de un plano en el espacio geométrico tridimensional, provisto de un sistema fijo de coordenadas $Oxyz$. Se llama gráfica de dicha función el conjunto de puntos

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\},$$

que representa, hablando en general, cierta superficie en $\mathbb{R}^3$

EJEMPLO 1. Hállese el campo de definición de la función

$$z = \operatorname{arcsen} \frac{y}{x}.$$

◀ La función está definida para

$$-1 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 1, \quad x \neq 0.$$

Por consiguiente, $-x \leqslant y \leqslant x$ para $x > 0$, y $x \leqslant y \leqslant -x$ para $x < 0$. El campo de definición de la función está expuesto en la fig. 68 y contiene las fronteras del campo, a excepción del origen de coordenadas. ▶

EJEMPLO 2. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$. Hállense $f(3, -2)$, $f(x, y)$, $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$.

◀ Tenemos:

$$f(3, -2) = \frac{3^2 - (-2)^2}{3(-2)} = -\frac{5}{6}, \quad f(y, x) = \frac{y^2 - x^2}{xy},$$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{y^2 - x^2}{xy} = -f(x, y). \blacktriangleright$$

1.1. Exprésese el área S de un triángulo como una función de longitudes de sus dos lados x e y, si el perímetro del triángulo es igual a $2p$. Hállese el campo de definición de esta función.

1.2. Exprésese el volumen V de un cono circular como función del área S de su superficie lateral y de su longitud l de la generatriz. Hállese el campo de definición de esta función.

1.3. Exprésese el área S de un trapecio isósceles como una función de longitudes de sus lados, si x e y son las longitudes de las bases y z es la longitud del lado lateral. Hállese el campo de definición de esta función.

Hállense los campos de definición de las funciones de dos variables (R = const):

1.4. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. **1.5.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

1.6. $z = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$. **1.7.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}$.

1.8. $z = (2x + 3y - 1)/(x - y)$.

1.9. $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$. **1.10.** $z = \ln(-x - y)$.

1.11. $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$. **1.12.** $z = y\sqrt{\cos x}$.

1.13. $z = \sqrt{\log_a (x^2 + y^2)}$. **1.14.** $z = \arccos \dfrac{x}{x + y}$.

1.15. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-4}$.

1.16. $z=\operatorname{arcsen}\frac{x}{y^2}+\operatorname{arcsen}(1-y)$.

1.17. $f(r, \varphi)=r\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}$.

1.18. $f(r, \varphi)=r\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Hállense los campos de definición de las funciones de tres variables:

1.19. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}$. ($R=\text{const}$).

1.20. $u=\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

1.21. $u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

Hállense los campos de definición de las funciones de n variables:

1.22. $u=\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}+\ldots+\sqrt{1-x_n^2}$.

1.23. $=u\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\ldots-\frac{x_n^2}{a_n^2}}$.

1.24. Sea dada una función $f(x, y)=\frac{2x-3y}{3x-2y}$. Hállense $f(2, 1)$, $f(1, 2)$, $f(3, 2)$, $f(2, 3)$, $f(a, a)$, $f(a, -a)$.

1.25. Sea dada una función $f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$. Hállense $f(-3, 4)$ y $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

1.26. Hállese $f(x)$, si $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x>0)$.

1.27. Sea $z = x + y + f(x - y)$. Hállense las funciones f y z, si $z = x^2$ para $y = 0$.

1.28.** Hállese $f(x, y)$, si $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$.

1.29. Sean dadas las funciones: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x, y)=x^2 - y^2$. Hállense: a) $f(\varphi(x, y), y^2)$; b) $\varphi(f(x, y), \varphi(x, y))$.

1.30. Sean dadas las funciones: $\varphi(x, y) = e^x \cos y$, $\psi(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$. Demuéstrese:

a) $\varphi^2(x, y) - \psi^2(x, y) = \varphi(2x, 2y)$;

b) $2\varphi(x, y)\psi(x, y) = \psi(2x, 2y)$.

1.31. Sean dadas las funciones: $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = \operatorname{sen} x$. Hállense: a) $f(\varphi(x), \psi(x))$; b) $\varphi(f(x, y))$.

2. Límite y continuidad de la función. El número A se denomina *límite* de la función $u = f(P)$ cuando el punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiende al punto $P_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que de la condición

$$0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

se deduce

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon.$$

En este caso se escribe:

$$A = \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

EJEMPLO 3. Aclárese si la función $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ tiene límite cuando $x \to 0$, $y \to 0$.

◀ Supongamos que el punto $P(x, y)$ tiende al punto $P_0(0, 0)$. Examinemos la variación de x e y a lo largo de la recta $y = kx$. Obtenemos

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

El resultado tiene valores diferentes en función de k elegido, razón por la cual la función no tiene límite. ▶

La función $u = f(P)$ se llama *continua en el punto* P_0, si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1) la función $f(P)$ está definida en el punto P_0;

2) existe $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$;

3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Una función se llama *continua en el campo*, si es continua en cada punto de este campo. Si en el punto P_0 está perturbada por lo menos una de las condiciones de 1) a 3), P_0 se denominará punto de discontinuidad de la función $f(P)$. Los puntos de discontinuidad pueden ser aislados y pueden formar líneas de discontinuidad, superficies de discontinuidad, etc.

EJEMPLO 4. Hállense los puntos de discontinuidad de la función

$$u = \frac{1 - xyz}{2x + 3y - z + 4}.$$

◀ La función no está definida en los puntos, donde se anula el denominador. Por ello, la función tiene una superficie de discontinuidad, a saber, el plano $2x + 3y - z + 4 = 0$. ▶

Hállense los límites:

1.32. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$. **1.33.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy}$.

1.34. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{y}$.

1.35. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

1.36. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

1.37. Muéstrese que para $x\to 0$ e $y\to 0$ la función $z=\dfrac{x}{y-x}$ puede tender hacia cualquier límite. Dénse ejemplos de tal aproximación del punto (x, y) hacia el punto $(0, 0)$, para la cual $\lim z = 3$, $\lim z = 2$, $\lim z = 1$, $\lim z = -2$.

1.38. Muéstrese que para la función $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ no existe $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$, calculando los límites reiterados

$$\lim_{x\to 0} (\lim_{y\to 0} f(x, y)), \qquad \lim_{y\to 0} (\lim_{x\to 0} f(x, y)).$$

1.39. Muéstrese que para la función $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ existen y son iguales entre sí los límites reiterados

$$\lim_{x\to 0} (\lim_{y\to 0} f(x, y)) = \lim_{y\to 0} (\lim_{x\to 0} f(x, y)) = 0,$$

y, sin embargo, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ no existe.

1.40. Aclárese si tiene límite la función $\operatorname{sen} \ln (x^4+y^2)$, cuando $x\to 0$, $y\to 0$.

1.41. Aclárese si tiene límite la función $\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$, cuando $x\to\infty$, $y\to\infty$.

1.42*. Muéstrese que la función

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{si} \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x=y=0 \end{cases}$$

es continua en el punto (0, 0) a lo largo de cada rayo $x = t\cos\alpha$, $y = t\,\mathrm{sen}\,\alpha$ $(0 \leqslant t < +\infty)$ que pasa por dicho punto, es decir, $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\,\mathrm{sen}\,\alpha) = f(0, 0)$, sin embargo esta función no es continua en el punto (0, 0).

1.43. Muéstrese que en el punto (0, 0) las funciones que siguen más abajo son continuas respecto a cada una de las variables x e y, pero son discontinuas en la totalidad de variables:

a) $$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si} \quad x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x=y=0; \end{cases}$$

b) $$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{si} \quad x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x=y=0. \end{cases}$$

Hállense los puntos de discontinuidad de las funciones de dos variables:

1.44. $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$.

1.45. $z=\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2\,\pi x+\mathrm{sen}^2\,\pi y}$. **1.46.** $z=\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y}$.

1.47. $z=\ln(1-x^2-y^2)$. **1.48.** $z=\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)(y^2-x)}$.

1.49. $z=\dfrac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$.

Hállense los puntos de discontinuidad de las funciones de tres variables:

1.50. $u=\dfrac{1}{xyz}$. **1.51.** $u=\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1}$.

1.52. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$. **1.53.** $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$.

1.54. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$.

3. Derivadas parciales. Sea $(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ un punto fijo arbitrario perteneciente al campo de definición de la función $u = f(x_1, \ldots, x_n)$. Dando al valor de la variable x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ un incremento Δx_k, examinemos el límite

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}.$$

Este límite lleva el nombre de *derivada parcial (de primer orden)* de la función dada respecto de la variable x_k en el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ y se designa $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ ó f'_{x_k} $(x_1, \ldots, x_n)$.

Las derivadas parciales se calculan según las reglas y fórmulas de derivación corrientes (considerando todas las variables, a excepción de x_k, como magnitudes constantes).

EJEMPLO 5. Hállense las derivadas parciales de la función

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

◀ Considerando y constante, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Considerando x constante, se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \text{ ▶}$$

La función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se denomina *homogénea* de grado m, si para cualquier número real $t \neq 0$ se verifica la igualdad

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Si una función homogénea $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de grado m tiene derivadas parciales respecto de cada una de las variables, se cumple la relación (*teorema de Euler*)

$$x_1 f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_2 f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$

$$\ldots + x_n f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

EJEMPLO 6. Compruébese el teorema de Euler, si

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

◀ Tenemos

$$f(tx, ty) = A(tx)^2 + 2B(tx)(ty) + C(ty)^2 = t^2 f(x, y).$$

Por consiguiente, $m = 2$;

$$f'_x(x, y) = 2(Ax + By), \quad f'_y(x, y) = 2(Bx + Cy),$$

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) \equiv 2x(Ax + By) + 2y(Bx + Cy) = 2f(x, y). \blacktriangleright$$

Se llaman *derivadas parciales de segundo orden* de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ las derivadas parciales de sus derivadas parciales de primer orden. Las derivadas parciales de segundo orden se designan del modo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial x_l} = f''_{x_k x_l}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_n),$$

etc.

De un modo análogo se determinan y se designan las derivadas parciales de orden superior al segundo.

El resultado de la derivación múltiple de una función respecto a las diferentes variables no depende de la sucesión en que se realiza la derivación, siempre que las derivadas parciales «mixtas» que aparecen en este caso sean continuas.

EJEMPLO 7. Hállense las derivadas parciales de segundo orden de la función $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

◀ Tenemos (véase el ejemplo 5)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Derivamos por segunda vez:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$\left(\text{nos hemos convencido aquí de que } \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial z}\right)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \blacktriangleright$$

Hállense las derivadas parciales de primer y segundo órdenes de las funciones dadas:

1.55. $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$. **1.56.** $z = xy + \frac{y}{x}$.

1.57. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. **1.58.** $z = xe^{-xy}$.

1.59. $z=\frac{\cos y^2}{x}$. 1.60. $z=y^x$.

1.61. $z=\ln(x^2+y^2)$. 1.62. $z=\arcsen\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1.63. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 1.64. $u=\left(\frac{y}{x}\right)^z$.

1.65. $u=xy^2z^3t^4+3x-4y+2z-t+1$.

1.66. Hállense $f'_x(3, 2)$, $f'_y(3, 2)$, $f''_{xx}(3, 2)$, $f''_{x,y}(3, 2)$, $f''_{yy}(3, 2)$, si $f(x, y)=x^3y+xy^2-2x+3y-1$.

1.67. Hállense $f'_x(1, 2)$, $f'_y(1, 2)$, $f''_{xx}(1, 2)$, $f''_{xy}(1, 2)$, $f''_{yy}(1, 2)$, si $f(x, y)=\int\limits_x^{x^2+y^2} e^t\,dt$.

1.68. Muéstrese que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, si $z=x\,\mathrm{sen}\,(ax+by)$.

1.69. Muéstrese que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, si $z=\cos\frac{y}{x}\times$ $\times\arccos\frac{x}{y}$.

1.70. Hállense $f'''_{xxx}(0, 1)$, $f'''_{xxy}(0, 1)$, $f'''_{xyy}(0, 1)$, $f'''_{yyy}\times$ $\times(0, 1)$, si $f(x, y)=e^{x^2y}$.

1.71. Hállese $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta}$, si $u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

1.72. Hállese $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}$, si $u=x^3\,\mathrm{sen}\,y+y^3\,\mathrm{sen}\,x$.

1.73. Hállese $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p\,\partial y^q}$, si $u=(x-x_0)^p\,(y-y_0)^q$.

Compruébese el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas en los problemas 1.74—1.77.

1.74. $z=x^3+x^2y-y^3$. 1.75. $z=\frac{y}{x^3-y^3}$.

1.76. $z=\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$. 1.77. $u=\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$.

1.78. Calcúlese

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

si $x=r\cos\theta\cos\varphi$, $y=r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z=r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

1.79. Muéstrese que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}+x+z=0$, si $z=$ $=4e^{-2y}+(2x+4x-3e)\,e^{-y}-x-1$.

1.80. Muéstrese que $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$, si $u=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

1.81. Muéstrese que $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$, si $u=\frac{x-y}{z-t}+\frac{t-x}{y-z}$.

1.82. Muéstrese que la función $u=A\operatorname{sen}\lambda x\cos a\lambda t$ satisface la *ecuación de oscilaciones de una cuerda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.83. Muéstrese que la función $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$ satisface la *ecuación de conducción del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.84. Muéstrese que la función

$$u=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

satisface la *ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

1.85*. Muéstrese que la función

$$f(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{si}\quad x=y=0\end{cases}$$

tiene derivadas parciales $f'_x(x,\,y)$ y $f'_y(x,\,y)$ en el punto (0, 0), aunque es discontinua en este punto.

1.86*. Muéstrese que para la función

$$f(x,\,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si}\ x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{si}\ x=y=0\end{cases}$$

el valor de la segunda derivada mixta en el punto (0, 0) depende de la sucesión de derivación, a saber: $f''_{xy}(0, 0) = -1$, $f''_{yx}(0, 0) = 1$.

4. Diferencial de una función y su aplicación. Se llama *incremento total* de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, correspondiente a los incrementos de los argumentos $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, la diferencia

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

La función $u = f(P)$ se denomina *derivable* en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si en todo lugar de cierto entorno de dicho punto el incremento total de la función puede representarse en la forma

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho),$$

donde $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son números que no dependen de $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Se llama *diferencial du de primer orden* de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la parte principal, lineal respecto a $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, del incremento total de dicha función en el punto mencionado, es decir,

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n.$$

Las diferenciales de las variables independientes se toman iguales, por definición, a sus incrementos:

$$dx_1 = \Delta x_1, \quad dx_2 = \Delta x_2, \ldots, dx_n = \Delta x_n.$$

Para la diferencial de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se verifica la fórmula

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n. \qquad (1)$$

Las funciones u, v de varias variables obedecen a las reglas habituales de derivación:

$$d(u + v) = du + dv,$$
$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

EJEMPLO 8. Hállese el incremento total y la diferencial de la función $f(x, y) = x^2 y$ en el punto (x, y).

◄ $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y)$,

$$\Delta f(x, y) = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y = 2xy \cdot \Delta x + x^2 \Delta y + 2x \Delta x \Delta y + y \Delta x^2 + \Delta x^2 \Delta y,$$

$$df(x, y) = 2xy\,\Delta x + x^2 \Delta y.$$ ►

EJEMPLO 9. Hállese la diferencial de la función

$$f(x, y, z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

◀ 1er MÉTODO. Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{xz}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{yz}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Conforme a la fórmula (1) obtenemos

$$df(x, y, z)=-\frac{xz}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx-\frac{yz}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dz=$$

$$=\frac{(x^2+y^2)\,dz-z\,(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

2do MÉTODO. Aplicando las reglas de derivación, tenemos:

$$df(x, y, z)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dz-z\cdot d\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dz-z\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)\,dz-z\,(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \ ▶$$

Cuando $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_n^2}$ es suficientemente pequeño para una función derivable $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tienen lugar las igualdades aproximadas

$$\Delta u\approx du,$$

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n)\approx$$

$$\approx f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+df(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

EJEMPLO 10. Calcúlese aproximadamente

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}.$$

◀ Vamos a considerar el número buscado como un valor de la función $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ para $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, si $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$. Tenemos:

$$f(4, 3)=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

$$\Delta f(x, y)\approx df(x, y)=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\Delta f(4, 3)\approx\frac{4\cdot 0{,}05+3\cdot 0{,}07}{5}\approx 0{,}08.$$

Por consiguiente,

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2} \approx 5+0{,}08=5{,}08. \blacktriangleright$$

Se denomina *diferencial de segundo orden* d^2u de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la diferencial de su diferencial de primer orden que se considera como función de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ fijas:

$$d^2u = d\,(du).$$

Análogamente se define la diferencial de tercer orden:

$$d^3u = d\,(d^2u).$$

En general,

$$d^mu = d\,(d^{m-1}u).$$

La diferencial de m-ésimo orden de la función $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables independientes, se expresa mediante la fórmula simbólica

$$d^mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right)^m u, \qquad (2)$$

que se desarrolla formalmente según la ley binomial.

Por ejemplo, en el caso de una función $z = f(x, y)$ de dos variables independientes x e y, para las diferenciales de segundo y tercero órdenes son lícitas las fórmulas

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2, \qquad (3)$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3. \qquad (4)$$

Ejemplo 11. Hállese d^2z, si $z = e^{xy}$.

◀ Tenemos (conforme a las reglas de derivación)

$$dz = e^{xy}\cdot d\,(xy) = e^{xy}\,(y\,dx + x\,dy).$$

Derivamos por segunda vez teniendo presente que dx y dy no dependen de x e y (es decir, considerando dx y dy constantes):

$$d^2z = e^{xy}\,d\,(xy)\cdot(y\,dx + x\,dy) + e^{xy}\cdot d\,(y\,dx + x\,dy) =$$
$$= e^{xy}\,(y\,dx + x\,dy)^2 + e^{xy}\,2\,dx\,dy = e^{xy}\,(y\,dx + x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy). \blacktriangleright$$

1.87. Hállense el incremento total y la diferencial de la función $z = x^2 - xy + y^2$, si x varía de 2 hasta 2,1, e y, de 1 hasta 1,2.

1.88. Hállense el incremento total y la diferencial de la función $z = \lg(x^2 + y^2)$, si x varía de 2 hasta 2,1, e y, de 1 hasta 0,9.

Hállense las diferenciales de las funciones:

1.89. $z=\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. **1.90.** $z=\operatorname{tg}\frac{y^2}{x}$.

1.91. $z=\ln\cos\frac{x}{y}$. **1.92.** $u=(xy)^z$.

1.93. $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^{x_2-x_3}\cdot\ln x_4$.

1.94. Hállese $df(1, 2, 1)$, si $f(x, y, z)=\frac{z}{x^2+y^2}$.

Calcúlese aproximadamente:

1.95. $(2{,}01)^{3{,}03}$. **1.96.** $\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$.

1.97. $\operatorname{sen} 28°\cdot\cos 61°$.

1.98. Un vaso cilíndrico tiene las siguientes dimensiones interiores: el radio de la base $R = 2{,}5$ m, la altura $H = 4$ m y el espesor de las paredes $l = 1$ dm. Hállese aproximadamente el volumen del material gastado para fabricar el vaso.

1.99. Un paralelepípedo rectangular tiene las siguientes dimensiones: $a = 2$ m, $b = 3$ m, $c = 6$ m. Hállese aproximadamente la magnitud en que varía la longitud de la diagonal, si a aumenta en 2 cm, b en 1 cm, y c disminuye en 3 cm.

1.100. En un cono truncado los radios de las bases son $R = 20$ cm, $r = 10$ cm y la altura $h = 30$ cm. ¿Cómo variará aproximadamente el volumen del cono, si R aumenta en 2 mm, r en 3 mm y h disminuye en 1 mm?

Hállense las diferenciales de primer y segundo órdenes de las siguientes funciones (x, y, z son variables independientes):

1.101. $z=x^3+3x^2y-y^3$. **1.102.** $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$.

1.103. $z=\sqrt{x^2+2xy}$. **1.104.** $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1.105. $z=(x+y)\,e^{xy}$. **1.106.** $z=x\ln\frac{y}{x}$.

1.107. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{x+y}$. **1.108.** $u=xy+yz+zx$.

1.109. $u=e^{xyz}$.

1.110. Hállese d^3z, si $z=e^y\operatorname{sen} x$.

1.111. Hállese d^3u, si $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

1.112. Hállese d^6u, si $u=\ln(x+y+z)$.

1.113. Hállese d^mu, si $u=e^{ax+by+cz}$.

§ 2. Derivación de las funciones compuestas e implícitas

1. Funciones compuestas de una y de varias variables independientes. Si $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función derivable de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las cuales son, a su vez, funciones derivables de una variable independiente t:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t),$$

la derivada de la función compuesta $u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ se calcula según la fórmula

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}. \qquad (1)$$

En particular, si t coincide, por ejemplo, con la variable x_1, entonces la derivada «total» de la función u respecto de x_1 es

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_1}. \qquad (2)$$

Ejemplo 1. Hállese $\frac{du}{dt}$, si $u = xyz$, donde $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

◀ Según la fórmula (1) tenemos

$$\frac{du}{dt} = yz \cdot 2t + xz \cdot \frac{1}{t} + xy \cdot \sec^2 t =$$

$$= 2t \ln t \operatorname{tg} t + \frac{(t^2+1)\operatorname{tg} t}{t} + (t^2+1) \ln t \sec^2 t. \ ▶$$

Ejemplo 2. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z = y^x$, donde $y = \varphi(x)$.

◀ Tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$. Conforme a la fórmula (2), obtendremos

$$\frac{dz}{dx} = y^x \ln y + xy^{x-1} \cdot \varphi'(x). \ ▶$$

Sea $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, ..., $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ ($t_1, t_2, \ldots, t_m$ son las variables independientes). Las derivadas parciales de la función u respecto de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ se expresan del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1}, \\
\frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial u}{\partial t_m} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_m}.
\end{aligned} \qquad (3)$$

En este caso la expresión (1) del § 1 para la diferencial de primer orden conserva su forma intacta (*propiedad de invariación de la forma de la primera diferencial*)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

Las expresiones para diferenciales de órdenes superiores de una función compuesta se diferencian, hablando en general, de las expresiones del tipo (2) del § 1.

Por ejemplo, la diferencial de segundo orden se expresa por la fórmula

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 u + \\ + \frac{\partial u}{\partial x_1} d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} d^2x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} d^2x_n. \qquad (4)$$

EJEMPLO 3. Hállense dz y d^2z, si $z = f(u, v)$, donde $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, $v = xy$.

◀ Tenemos $dz = f'_u\, du + f'_v\, dv$, donde

$$du = x\, dx - y\, dy, \qquad dv = y\, dx + x\, dy.$$

Por consiguiente,

$$dz = f'_u \cdot (x\, dx - y\, dy) + f'_v \cdot (y\, dx + x\, dy) = \\ = (xf'_u + yf'_v)\, dx + (xf'_v - yf'_u)\, dy.$$

Derivamos por segunda vez:

$$d^2z = d(f'_u) \cdot du + f'_u \cdot d(du) + d(f'_v)\, dv + f'_v \cdot d(dv) = \\ = (f''_{uu}\, du + f''_{uv} \cdot dv)\, du + f'_u \cdot d^2u + (f''_{uv}\, du + f''_{vv}\, dv)\, dv + \\ + f'_v \cdot d^2v, \quad \text{donde} \quad d^2u = dx^2 - dy^2, \quad d^2v = 2dx\, dy.$$

Por consiguiente,

$$d^2z = (f''_{uu}(x\, dx - y\, dy) + f''_{uv}(y\, dx + x\, dy))(x\, dx - y\, dy) + \\ + f'_u(dx^2 - dy^2) + (f''_{uv}(x\, dx - y\, dy) + f''_{vv}(y\, dx + x\, dy)) \times \\ \times (y\, dx + x\, dy) + f'_v \cdot 2dx\, dy = f''_{uu}(x\, dx - y\, dy)^2 + \\ + f''_{uv}(y\, dx + x\, dy)(x\, dx - y\, dy) + f'_u(dx^2 - dy^2) + \\ + f''_{vv}(x\, dx - y\, dy)(y\, dx + x\, dy) + f''_{u}(y\, dx + x\, dy)^2 + \\ + 2f'_v\, dx\, dy = f''_{uu}(x^2\, dx^2 - 2xy\, dx\, dy + y^2\, dy^2) + \\ + 2f''_{uv}(xy(dx^2 - dy^2) + (x^2 - y^2)\, dx\, dy) + \\ + f''_{vv}(y^2\, dx^2 + 2xy\, dx\, dy + x^2\, dy^2) + f'_u(dx^2 - dy^2) + \\ + 2f'_v\, dx\, dy = (x^2 f''_{uu} + 2xyf''_{uv} + y^2 f''_{vv} + f'_u)\, dx^2 + \\ + 2(xyf''_{vv} + (x^2 - y^2) f''_{uv} - xyf''_{uu} + f'_v)\, dx\, dy + \\ + (y^2 f''_{uu} - 2xyf''_{uv} + x^2 f''_{vv} - f'_u)\, dy^2. \; ▶$$

2.1. Hállese $\frac{dz}{dt}$, si $z=e^{2x-3y}$, donde $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-t$.

2.2. Hállese $\frac{dz}{dt}$, si $z=x^y$, donde $x=\ln t$, $y=\operatorname{sen} t$.

2.3. Hállese $\frac{dz}{dt}$, si $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, donde $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$.

2.4. Hállese $\frac{du}{dt}$, si $u=\frac{yz}{x}$, donde $x=e^t$, $y=\ln t$, $z=t^2-1$.

2.5. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z=\ln(e^x+e^y)$, donde $y=\frac{1}{3}x^3+x$.

2.6. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{dz}{dx}$, si $z=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}$, donde $y=e^{(x+1)^2}$.

2.7. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=u^2\ln v$, donde $u=\frac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$.

2.8. Hállese dz, si $z=u^2v-v^2u$, donde $u=x\operatorname{sen} y$, $v=y\cos x$.

2.9. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=f(u, v)$, donde $u=\frac{2y}{x+y}$, $v=x^2-3y$.

2.10. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=f(u, v)$, donde $u=\ln(x^2-y^2)$, $v=xy^2$.

2.11. Hállese dz, si $z=f(u, v)$, donde $u=\cos(xy)$ $v=x^5-7y$.

2.12. Hállese dz, si $z=f(u, v)$, donde $u=\operatorname{sen}\frac{x}{y}$, $v=\sqrt{x/y}$.

2.13. Hállese du, si $u=f(x, y, z)$, donde $x=s^2+t^2$, $y=s^2-t^2$, $z=2st$.

2.14. Hállense $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, si $u=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, donde $x_3=g(x_1, x_2)$, $x_4=h(x_1, x_2, x_3)$.

2.15. Muéstrese que la función $z=y\cdot\varphi(\cos(x-y))$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y}$.

2.16. Muéstrese que la función $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)-x^2-y^2$ satisface la ecuación $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2$.

2.17. Muéstrese que la función $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$ satisface la ecuación $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

2.18. Muéstrese que la función $u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x,\ z-x)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz.$$

2.19. Hállense $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $z=f(u,\ v)$, donde $u=xy$, $v=x/y$.

2.20. Hállese $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, si $u=f(x,\ y,\ z)$, donde $z=\varphi(x,\ y)$.

2.21. Hállense todas las derivadas parciales de segundo orden de la función $u=f(x,\ xy,\ xyz)$.

2.22. Muéstrese que la función $u=x\varphi(x+y)+y\psi\times\times(x+y)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

2.23. Muéstrese que la función $u=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ satisface la ecuación

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

2.24. Hállese d^2u, si $u=f(t)$, donde $t=x^2+y^2+z^2$.

2.25. Hállese d^2u, si $u=f(ax,\ by,\ cz)$.

2.26. Hállese d^2z, si $z=f(u,\ v)$, donde $u=x\operatorname{sen} y$, $v=y\cos x$.

2. Funciones implícitas de una y de varias variables independientes. Supongamos que la ecuación $f(x,\ y)=0$, donde f es una función derivable de las variables x e y, define y como función de x. La primera derivada de esta función implícita $y=y(x)$ en el punto x_0 se expresa mediante la fórmula

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\frac{f'_x(x_0,\ y_0)}{f'_y(x_0,\ y_0)} \tag{5}$$

a condición de que $f'_y(x_0,\ y_0)\neq 0$, donde $y_0=y(x_0)$, $f(x_0,\ y_0)=0$.

Las derivadas de órdenes superiores se calculan por medio de la derivación sucesiva de la fórmula (5).

EJEMPLO 4. Hállense $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, si

$$1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$$

◀ Designemos el primer miembro de esta ecuación con $f(x, y)$. Entonces

$$f'_x(x, y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}},$$

$$f'_y(x, y) = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}.$$

De acuerdo con la fórmula (5) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\frac{y}{x}.$$

Derivamos por segunda vez, tomando en consideración que y es una función de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{y - x\left(-\frac{y}{x}\right)}{x^2} = \frac{2y}{x^2}. \quad ▶$$

Supongamos que la ecuación $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$, donde F es una función derivable de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$, define u como una función de las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Las derivadas parciales de esta función implícita $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el punto $M^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ se calculan según las fórmulas

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M=M^0} = -\frac{F'_{x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)}{F'_u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (6)$$

condición de que $F'_u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0) \neq 0$, donde $u^0 = u(M^0)$ y $F(M^0, u^0) = 0$.

Las derivadas parciales de la función u se pueden hallar también de la manera siguiente: calculamos la diferencial total de la función $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ y la igualamos a cero:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F}{\partial u}du = 0$$

y hallamos de aquí du.

EJEMPLO 5. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

◀ 1er MÉTODO. Designemos el primer miembro de la ecuación dada con $F(x, y, z)$. Entonces

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz,$$
$$F'_y(x, y, z) = 6y^2 - 3xz - 2,$$
$$F'_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

De acuerdo con las fórmulas (6) obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{3x^2-3yz}{3z^2-3xy} = \frac{x^2-yx}{xy-z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{6y^2-3xz-2}{3z^2-3xy} = \frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}.$$

2do MÉTODO. Derivamos la ecuación dada:

$$3x^2\,dx + 6y^2\,dy + 3z^2\,dz - 3yz\,dx - 3xz\,dy - 3xy\,dz - 2dy = 0.$$

De aquí hallamos dz:

$$dz = \frac{3(x^2-yz)\,dx + (6y^2-3xz-2)\,dy}{3(xy-z^2)}.$$

Comparando con la fórmula $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2-yz}{xy-z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}. \ ▶$$

2.27. Hállese $\frac{dy}{dx}$, si $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$.

2.28. Hállese $\frac{dy}{dx}$, si $y \operatorname{sen} x - \cos(x-y) = 0$.

2.29. Hállense $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x + y = e^{x-y}$.

2.30. Hállense $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

2.31. Hállense $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, si $x^2 + 2xy + y^2 - 4y + 2y - 2 = 0$.

2.32. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto $(1, -2, 2)$, si $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

2.33. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z\ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0$.

2.34. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2) = 0$.

2.35. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $f(yz, e^{xz}) = 0$.

2.36. Hállese dz, si $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

2.37. Hállese dz, si $xz - e^{z/y} + x^3 + y^3 = 0$.

2.38. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, si $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

2.39. Hállense $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $x + y + z = e^z$.

2.40. Hállese d^2z, si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.41. Muéstrese que la función z, definida por la ecuación $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$, donde φ es una función derivable arbitraria de dos variables, satisface la ecuación

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

2.42. Muéstrese que la función z, definida por la ecuación $(x - a\cos\alpha)^2 + (y - a \operatorname{sen}\alpha)^2 = \left(\frac{z - a}{m}\right)^2$, donde a, α, m son constantes, satisface la ecuación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = m^2.$$

2.43. Muéstrese que la función z, definida por la ecuación $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

3. Sistemas de las funciones implícitas y de las definidas en forma paramétrica. Limitémonos a considerar las funciones de dos variables independientes. Supongamos que un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x, y, u, v) &= 0, \\ G(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

tiene la solución $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$ y $v = v_0$, con la particularidad de que las funciones F y G tienen en el entorno del punto $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ derivadas parciales continuas de primer orden y el jacobiano

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

distinto de cero en el punto P_0. Entonces, en cierto entorno del punto P_0 el sistema (7) determina un único sistema de funciones continuas $u(x, y)$ y $v(x, y)$ que tienen derivadas parciales continuas y que satisfacen las condiciones

$$u(x_0, y_0) = u_0, \quad v(x_0, y_0) = v_0.$$

Las diferenciales de estas funciones du y dv (y, por tanto, también las derivadas parciales) pueden hallarse a partir del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv = 0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}\,dx + \frac{\partial G}{\partial y}\,dy + \frac{\partial G}{\partial u}\,du + \frac{\partial G}{\partial v}\,dv = 0.$$

EJEMPLO 6. Las funciones u y v de las variables independientes x e y vienen dadas implícitamente mediante el sistema de ecuaciones

$$u + v = x, \quad u - yv = 0.$$

Hállense du, dv, d^2u, d^2v.

◀ El jacobiano del sistema $\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -y - 1$ es distinto de cero cuando $y \neq -1$. Derivando hallamos dos ecuaciones que ligan entre sí las diferenciales de todas las cuatro variables:

$$du + dv = dx, \quad du - y\,dv - v\,dy = 0.$$

Al resolver este sistema respecto a du y dv para $y \neq -1$, obtenemos

$$du = \frac{y\,dx - v\,dy}{1 + y}, \quad dv = \frac{dx - v\,dy}{1 + y}.$$

Derivamos por segunda vez:

$$d^2u = \frac{(dx\,dy + dv\,dy)(1 + y) + dy\,(y\,dx + v\,dy)}{(1 + y)^2} =$$

$$= \frac{\left(dx\,dy + \dfrac{dx - v\,dy}{1 + y}\,dy\right)(1 + y) - dy\,(y\,dx + v\,dy)}{(1 + y)^2} =$$

$$= \frac{(1 + y)\,dx\,dy + dx\,dy - v\,dy^2 - y\,dx\,dy - v\,dy^2}{(1 + y)^2} = \frac{2\,(dx\,dy - v\,dy^2)}{(1 + y)^2},$$

$$d^2v = \frac{-dv\,dy\,(1 + y) - dy\,(dx - v\,dy)}{(1 + y)^2} =$$

$$= \frac{-\dfrac{dx - v\,dy}{1 + y}\,dy\,(1 + y) - dx\,dy + v\,dy^2}{(1 + y)^2} =$$

$$= \frac{-dx\,dy + v\,dy^2 - dx\,dy + v\,dy^2}{(1 + y)^2} = \frac{2\,(v\,dy^2 - dx\,dy)}{(1 + y)^2} = -d^2u. \ ▶$$

Supongamos que la función z de las variables independientes x e y viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

y

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

en el entorno del punto $P(u_0, v_0)$. En este caso la diferencial dz de esta función (y, por tanto, sus derivadas parciales) en el entorno del punto P puede ser hallada a partir del sistema de ecuaciones

$$dx = \frac{dx}{du} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

EJEMPLO 7. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = cv.$$

◀ Tenemos

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} v & u \cos v \end{vmatrix} = u \neq 0 \quad \text{para} \quad u \neq 0.$$

Encontramos por derivación tres ecuaciones que ligan las diferenciales de todas las cinco variables:

$$dx = \cos v \, du - u \operatorname{sen} v \, dv, \quad dy = \operatorname{sen} v \, du + u \cos v \, dv,$$

$$dz = c \, dv.$$

De las primeras dos ecuaciones hallamos dv:

$$dv = \frac{\cos v \, dy - \operatorname{sen} v \, dx}{u}.$$

Sustituyamos el valor hallado de dv en la tercera ecuación:

$$dz = \frac{c}{u} (\cos v \, dy - \operatorname{sen} v \, dx).$$

De aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c \operatorname{sen} v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c \cos v}{u}. \; ►$$

2.44. Las funciones y e z de una variable independiente x vienen dadas por el sistema de ecuaciones

$$7x^2 + y^2 - 3z^2 = -1, \quad 4x + 2y^2 - 3z^2 = 0.$$

Hállense $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{\partial x^2}$ para $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

2.45. Las funciones y y z de una variable independiente x vienen dadas por el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

Hállense dy, dz, d^2y, d^2z.

2.46. Las funciones u y v de las variables independientes x e y están dadas implícitamente por el sistema de ecuaciones

$$xu + yv = 1 \quad x + y + u + v = 0.$$

Hállense du, dv, d^2u, d^2v.

2.47. Muéstrese que $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, si $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2.48. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2v^2$.

2.49. Hállense $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $x = a\cos u \operatorname{ch} v$, $y = b \operatorname{sen} \times$ $\times\, u \operatorname{ch} v$, $z = c \operatorname{sh} v$.

2.50. Hállese dz, si $x = e^u \cos v$, $y = e^u \operatorname{sen} v$, $z = uv$.

2.51. Hállese dz, si $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 +$ $+\, v^3$ $(u \neq v)$.

4. Cambio de variables en las expresiones diferenciales. Al considerar las expresiones diferenciales nos encontramos a menudo con la necesidad de expresar las derivadas (que figuran en éstas) respecto de unas variables en términos de las derivadas respecto de algunas variables nuevas.

EJEMPLO 8. Transfórmese la ecuación

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0,$$

suponiendo $x = \cos t$.

◀ Expresemos las derivadas de y respecto de x mediante las derivadas de y respecto de t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{-\operatorname{sen} t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\frac{-\operatorname{sen} t\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t\cdot\frac{dy}{dt}}{\operatorname{sen}^2 t\cdot(-\operatorname{sen} t)}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Sustituyamos las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación dada y cambiando x por $\cos t$, tenemos:

$$(1-\cos^2 t)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)-\cos t\left(-\frac{1}{\operatorname{sen} t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)=0,$$

o bien $\frac{d^2y}{dt^2}=0$. ▶

EJEMPLO 9. Transfórmese la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

considerando x como función e y, como un argumento.

◀ Expresemos las derivadas de y respecto a x mediante las derivadas de x respecto de y:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=$$

$$=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Sustituyamos estas expresiones de las derivadas en la ecuación dada:

$$\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}+2y\cdot\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=0,$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dy^2}-2y\frac{dx}{dy}=0.\ ▶$$

EJEMPLO 10. Pásese a las coordenadas polares en la expresión

$$A=\frac{x+yy'}{xy'-y}.$$

◀ Tenemos

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi,$$

$dx = \cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$, $dy = \operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$, de donde

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}.$$

Sustituyamos las expresiones x, y, y' en A:

$$A = \frac{r\cos\varphi + r\operatorname{sen}\varphi \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}}{r\cos\varphi \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi} - r\operatorname{sen}\varphi} = \frac{\dfrac{dr}{d\varphi}}{r}.$$

EJEMPLO 11. Transfórmese la ecuación

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

pasando a las variables nuevas independientes u y v, si $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

◀ Expresemos las derivadas parciales de z respecto a x e y en érminos de las derivadas parciales de z respecto a u y v.

Tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

De acuerdo con las fórmulas (3) obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot y + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{1}{y}\right)y + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y} =$$

$$= y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}x - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right) =$$

$$= x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right) =$$

$$= x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{x}{y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}x - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right) =$$

$$= x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Sustituyamos las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación dada:

$$x^2\left(y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) -$$
$$- y^2\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0.$$

Al simplificar para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, obtendremos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2xy}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 12. Transfórmese la ecuación $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$, tomando como variables nuevas independientes $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ y como función nueva, $w = \ln z - (x + y)$.

◀ Expresemos las derivadas parciales de z respecto a x e y en términos de las derivadas parciales de w respecto a u y v. Con este fin derivemos las relaciones dadas:

$$du = 2(x\,dx + y\,dy),$$
$$dv = -\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right),$$
$$dw = \frac{dz}{z} - (dx + dy).$$

Tomando en consideración la fórmula (1) § 1, tenemos

$$\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv = \frac{dz}{z} - (dx + dy),$$

o bien

$$2\frac{\partial w}{\partial u}(x\,dx + y\,dy) - \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right) = \frac{dz}{z} - (dx + dy),$$

de donde

$$dz = z\left(\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dx + \left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dy\right).$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right).$$

Sustituyamos las expresiones $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en la ecuación dada:

$$yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)-xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)=(y-x)\,z,$$

o bien $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. ▶

2.52. Transfórmese la ecuación

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}-y=0,$$

suponiendo $x=1/t$.

2.53. Transfórmese la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{(1+x^2)^2}=0,$$

suponiendo $x=\operatorname{tg} t$.

2.54. Transfórmese la ecuación

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

considerando y como argumento.

2.55. Transfórmese la ecuación

$$(xy'-y)^2=2xy\,(1+y'^2),$$

pasando a las coordenadas polares.

2.56. Transfórmese la expresión $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$, pasando a las coordenadas polares.

2.57. Transfórmese la ecuación

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

pasando a las nuevas variables independientes u y v, si $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

2.58. Transfórmese la ecuación $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$, pasando a las nuevas variables independientes u y v, si $u=y$, $v=y/x$.

2.59. Transfórmese la expresión $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, pasando a las coordenadas polares.

2.60. Transfórmese la expresión

$$w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

pasando a las coordenadas esféricas ($r=\rho$ sen θ, $\varphi=\varphi$, $z=\rho\cos\theta$).

2.61. Transfórmese la ecuación

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz,$$

tomando como nuevas variables independientes $u=yz-x$, $v=xz-y$, y como función nueva, $w=xy-z$.

2.62. Transfórmese la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{2}y\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x},$$

tomando como nuevas variables independientes $u=\frac{x}{y}$, $v=x$ y como función nueva, $w=xz-y$.

2.63. Transfórmese la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z,$$

tomando como nuevas variables independientes $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$, y como función nueva, $w=ze^y$.

§ 3. Aplicaciones de las derivadas parciales

1. Fórmula de Taylor. Si una función $f(P)$ es $m+1$ veces derivable en cierto entorno $U(P_0)$ del punto P_0 $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, entonces para todo punto $P(x_1, \ldots, x_n)\in U(P_0)$ es válida la *fórmula de*

$$f(P)=f(P_0)+\frac{df(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{1!}+\frac{d^2f(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{2!}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{d^mf(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{m!}+\frac{d^{m+1}f(\widetilde{P}, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{(m+1)!}, \quad (1)$$

donde $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_n^0$, y $\widetilde{P}$ es un punto del entorno mencionado.

Por ejemplo, en el caso de una función $f(x, y)$ de dos variables x e y, la fórmula de Taylor en forma desarrollada se escribe como sigue:

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}(f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0))+$$
$$+\frac{1}{2!}(f''_{xx}(x_0, y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0)+$$
$$+f''_{yy}(x_0, y_0)(y-y_0)^2+\ldots+\frac{1}{m!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\times$$
$$\times f(x_0, y_0)+\frac{1}{(m+1)!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}\times$$
$$\times f(x_0+\theta(x-x_0), \quad y_0+\theta(y-y_0)). \quad (2)$$

El último sumando en la fórmula (2) (*término residual*) puede ser escrito más breve en la forma:

$$o(\rho^m), \text{ donde } \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

(*forma de Peano*).

En un caso particular, cuando $x_0 = y_0 = 0$, la *fórmula* (2) lleva el nombre *de Maclaurin*.

EJEMPLO 1. Desarróllese la función $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$ según la fórmula de Taylor en el entorno del punto $(2, -1)$.

◀ Tenemos $f(2, -1) = 2$. Calculemos sucesivamente las derivadas parciales de la función dada y sus valores en el punto $(2, -1)$:

$$f'_x(x, y)=3x^2-10x-y+10, \quad f'_x(2, -1)=3;$$
$$f'_y(x, y)=-x+2y+5, \quad f'_y(2, -1)=1;$$
$$f''_{xx}(x, y)=6x-10, \quad f''_{xx}(2, -1)=2;$$
$$f''_{xy}(x, y)=-1, \quad f''_{xy}(2, -1)=-1;$$
$$f''_{yy}(x, y)=2, \quad f''_{yy}(2, -1)=2;$$
$$f'''_{xxx}(x, y)=6, \quad f'''_{xxx}(2, -1)=6.$$

Todas las derivadas posteriores son idénticamente iguales a cero.

A partir de la fórmula (2) obtenemos el desarrollo buscado

$$f(x, y) = 2 + 3(x-2) + (y+1) + (x-2)^2 - \\ - (x-2)(y+1) + (y+1)^2 + (x-2)^3. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1) hasta los términos de segundo orden inclusive, la función

$$f(x, y) = y^x.$$

◀ Tenemos $f(1, 1) = 1$. Calculemos las derivadas parciales de primer y segundo órdenes de la función dada y sus valores en el punto (1, 1):

$$\begin{aligned}
&f'_x(x, y) = y^x \ln y, && f'_x(1, 1) = 0;\\
&f'_y(x, y) = xy^{x-1}, && f'_y(1, 1) = 1;\\
&f''_{xx}(x, y) = y^x \ln^2 y, && f''_{xx}(1, 1) = 0;\\
&f''_{xy}(x, y) = y^{x-1}(x\ln y + 1), && f''_{xy}(1, 1) = 1;\\
&f''_{yy}(x, y) = x(x-1)y^{x-2}, && f''_{yy}(1, 1) = 0.
\end{aligned}$$

Conforme a la fórmula (2) obtenemos

$$f(x, y) = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + o(\rho^2),$$

donde $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. ▶

3.1. Desarróllese $f(x+h, y+k)$ en potencias positivas enteras de h y k, si $f(x, y) = xy^2$.

3.2. Hállese el incremento adquirido por la función $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ al pasar de los valores $x = -2$, $y = 1$ a los valores $x_1 = -2 + h$, $y_1 = 1 + k$.

3.3. Desarróllese según la fórmula de Taylor la función $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ en el entorno del punto (2, 1).

3.4. Desarróllese $f(x+h, y+k, z+l)$ en potencias enteras positivas de h, k, l, si $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 2yz + 3x - y - 4z + 1$.

3.5. Desarróllese según la fórmula de Taylor la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)$ en el entorno del punto (1, −1, 2).

3.6. Desarróllese según la fórmula de Maclaurin hasta los términos de tercer orden inclusive, la función $f(x, y) = e^y \cos x$.

3.7. Desarróllese según la fórmula de Maclaurin hasta los términos de cuarto orden inclusive, la función $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$.

3.8. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1) hasta los términos de tercer orden inclusive la función $f(x, y) = y/x$.

3.9. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1, 0) hasta los términos de segundo orden inclusive, la función $f(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$.

3.10. Desarróllese según la fórmula de Taylor en el entorno del punto (1, 1) hasta los términos de segundo orden inclusive, la función implícita $z(x, y)$ que se define mediante la ecuación

$$z^3 + 3yz - 4x = 0, \quad \text{si} \quad z(1, 1) = 1.$$

2. Extremo de una función. Una función $u = f(P)$ tiene un *máximo* (*mínimo*) en el punto $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si existe tal entorno del punto P_0, para todos los puntos del cual $P(x_1, \ldots, x_n)$, distintos de P_0, se verifica la desigualdad $f(P_0) > f(P)$ ($f(P_0) < f(P)$, respectivamente). El máximo o el mínimo de una función lleva el nombre de *extremo* de la misma.

Condición necesaria para la existencia de un extremo. Si una función *derivable* $f(P)$ alcanza su extremo en el punto P_0, entonces en dicho punto

$$f'_{x_k}(P_0) = 0 \text{ para todo } k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

o bien $df(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0$ idénticamente respecto de $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

Los puntos, donde se cumplen las condiciones (3), se llaman puntos *estacionarios* de la función $u = f(P)$. De este modo, si P_0 es un punto de extremo de la función $u = f(P)$, entonces o bien P_0 es un punto estacionario, o bien en dicho punto la función no es derivable.

Condiciones suficientes para la existencia de extremo. Supongamos que $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ es un punto estacionario de la función $u = f(P)$, siendo dicha función dos veces derivable en cierto entorno del punto P_0 y todas sus segundas derivadas parciales son continuas en el punto P_0. En este caso:

1) si la segunda diferencial $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ como función de $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, tiene signo constante, cualesquiera que sean los juegos de valores $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ no nulos simultáneamente, la función $u = f(P)$ tendrá en P_0 un extremo, a saber, un máximo cuando $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) < 0$, y un mínimo, cuando $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) > 0$;

2) si $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ es una función de signo variable $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, es decir, admite tanto valores positivos como negativos, el punto P_0 no será un punto de extremo de la función $u = f(P)$;

3) si $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \geqslant 0$ ó $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \leqslant 0$, con la particularidad de que existen tales juegos de valores $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, no nulos simultáneamente, para los cuales el valor de la segunda diferencial se reduce a cero, entonces la función $u = f(P)$ puede tener extremo en el punto P_0 y puede no tenerlo (en este caso se necesita un análisis adicional para aclarar la cuestión).

En el caso particular de una función de dos variables, las condiciones suficientes de un extremo pueden formularse de la manera siguiente. Sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto estacionario de la función $z = f(x, y)$, siendo dicha función dos veces derivable en cierto entorno del punto P_0 y todas sus segundas derivadas parciales son continuas en el punto P_0. Introduzcamos las designaciones:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

y

$$D = AC - B^2.$$

Entonces:

1) si $D > 0$, la función $z = f(x, y)$ tiene en el punto $P_0(x_0, y_0)$ un extremo, a saber, un máximo si $A < 0$ $(C < 0)$, y un mínimo, si $A > 0$ $(C > 0)$;

2) si $D < 0$, en el punto $P_0(x_0, y_0)$ no existe extremo;

3) si $D = 0$, se requiere un análisis adicional.

EJEMPLO 3. Analícese el extremo de la función

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

◀ Hallemos las derivadas parciales de primer orden y formemos un sistema de ecuaciones del tipo (3):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 - y) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3(y^2 - x) = 0,$$

o bien

$$x^2 - y = 0,$$
$$y^2 - x = 0.$$

Resolviendo el sistema, hallamos dos puntos estacionarios:

$$P_1(0, 0) \quad \text{y} \quad P_2(1, 1).$$

Hallemos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

A continuación formemos el discriminante $D = AC - B^2$ para cada punto estacionario.

Para el punto P_1

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 0, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_1} = -3, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1} = 0, \quad D = -9 < 0.$$

Por consiguiente, en el punto P_1 no hay extremo.

Para el punto P_2

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2} = 6, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_2} = -3, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2} = 6,$$
$$D = 36 - 9 > 0, \quad A > 0.$$

Por consiguiente, en el punto P_2 la función alcanza un mínimo que es igual a

$$z_{\min} = z|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1+1-3 = -1. \ \blacktriangleright$$

Hállense los extremos de las funciones de dos variables:

3.11. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

3.12. $z = xy^2 (1 - x - y)$ $(x > 0,\ y > 0)$.

3.13. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

3.14. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $(x > 0,\ y > 0)$.

3.15. $z = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

3.16. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

3.17. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3.18. $z = (2x_2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

3.19. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

Hállense los extremos de las funciones de tres variables:

3.20. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.

3.21. $u = xy^2z^3 (1 - x - 2y - 3z)$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

3.22. $u = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$.

Hállense los extremos de las funciones z definidas implícitamente:

3.23*. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0$.

3.24. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$.

3. **Extremo condicionado.** La función $u = f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$ tiene un *máximo condicionado* (un *mínimo condicionado*) en el punto $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si existe tal entorno del punto P_0, para todos los puntos P del cual $(P \neq P_0)$ que satisfacen la ecuación de enlace

$$\varphi_k(P) = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ m < n),$$

se cumple la desigualdad $f(P_0) > f(P)$ $(f(P_0) < f(P)$, respectivamente).

El problema de búsqueda de un extremo condicionado se reduce al análisis del extremo corriente de la *función de Lagrange*

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, \ldots, x_n);$$

λ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ se denominan *multiplicadores de Lagrange*.

Las condiciones necesarias para la existencia de un extremo condicionado se expresan por medio del sistema de $n+m$ ecuaciones

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L(P)}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \\ &\varphi_k(P)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \end{aligned} \qquad (4)$$

a partir del cual pueden ser halladas las incógnitas

$$x_1,\ \ldots,\ x_n,\quad \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m,$$

donde $x_1,\ \ldots,\ x_n$ son las coordenadas del punto en el que puede haber un extremo condicionado.

Las condiciones suficientes para la existencia de extremo condicionado están asociadas con el análisis de la 2[da] diferencial de la función de Lagrange $d^2L\,(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_m^0,\ dx_1,\ \ldots,\ dx_n)$ para cada sistema de valores $x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_m^0$, obtenido de (4) a condición de que $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n$ satisfagan las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_k(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)}{\partial x_j}\,dx_j=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \qquad (5)$$

para $dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2\neq 0$. A saber, la función $f(P)$ tiene un máximo condicionado en el punto $P_0\,(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ siempre que para toda clase de valores $dx_1,\ \ldots,\ dx_n$ que satisfacen las condiciones (5) y no son nulos simultáneamente se verifica la desigualdad $d^2L\,(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_m^0,\ dx_1,\ \ldots,\ dx_n)<0$, y un mínimo condicionado, si bajo las mismas condiciones $d^2L\,(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_m^0,\ dx_1,\ \ldots,\ dx_n)>0$.

En el caso de la función $z=f(x,\ y)$, cuando la ecuación de enlace $\varphi(x,\ y)=0$, la función de Lagrange tiene la forma

$$L(x,\ y,\ \lambda)=f(x,\ y)+\lambda\cdot\varphi(x,\ y).$$

El sistema (4) se compone de tres ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \varphi(x,\ y)=0.$$

Sea $P_0\,(x_0,\ y_0)$, λ_0 cualquiera de las soluciones de este sistema y sea

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(P_0) & \varphi_y'(P_0) \\ \varphi_x'(P_0) & L_{xx}''(P_0,\ \lambda_0) & L_{xy}''(P_0,\ \lambda_0) \\ \varphi_y'(P_0) & L_{xy}''(P_0,\ \lambda_0) & L_{yy}''(P_0,\ \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Si $\Delta<0$, entonces la función $z=f(x,\ y)$ tiene en el punto $P_0\,(x_0,\ y_0)$ un máximo condicionado; si $\Delta>0$, se tiene en el mismo punto un mínimo condicionado.

EJEMPLO 4. Hállese el extremo condicionado de la función $z = x + 2y$, si $x^2 + y^2 = 5$.

◀ Formemos la función de Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Tenemos $\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y$.

El sistema de ecuaciones (4) adquiere la forma

$$1 + 2\lambda x = 0,$$
$$2 + 2\lambda y = 0,$$
$$x^2 + y^2 = 5.$$

El sistema tiene dos soluciones: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Puesto que $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$, entonces

$$d^2L = 2\lambda\,(dx^2 + dy^2).$$

Cuando $\lambda = \frac{1}{2}$, $d^2L > 0$. Por ello la función tiene un mínimo condicionado en el punto $P_1\,(-1, -2)$ y $z_{\min} = -5$. Cuando $\lambda = -\frac{1}{2}$, $d^2L < 0$. Por ello la función tiene un máximo condicionado en el punto $P_2\,(1, 2)$ y $z_{\text{máx}} = 5$.

O bien, de otra forma

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5,$$

$$\varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 2y, \quad \varphi'_x(-1, -2) = -2, \quad \varphi'_y(-1, -2) = -4,$$

$$L''_{xx} = 1, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{yy} = 1 \quad \text{para} \quad \lambda = \frac{1}{2};$$

por consiguiente,

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

es decir, la función tiene un mínimo condicionado en el punto $P_1\,(-1, -2)$. Por analogía, para el punto $P_2\,(1, 2)$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0.$$

es decir, $P_2\,(1, 2)$ es el punto de máximo condicionado. ▶

Hállense los extremos condicionados de las funciones:

3.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ para $x + y + 3 = 0$.

3.26. $z + \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ para $x + y = 2$.

3.27. $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ para $x^2 + y^2 = 1$.

3.28. $z = xy^2$ para $x + 2y = 1$.

3.29. $z = 2x + y$ para $x^2 + y^2 = 1$.

3.30. $u = 2x + y - 2z$ para $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

3.31. $u = x^2 + y^2 + z^2$ para $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

3.32. $u = xy^2z^3$ para $x + 2y + 3z = 12$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

3.33. $u = xyz$ para $x + y + z = 4$, $xy + yz + zx = 5$.

3.34*. Demuéstrese la desigualdad

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} > \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3,$$

si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4. Valores máximo y mínimo de una función. Si una función $f(P)$ es derivable en una región acotada y cerrada, entonces alcanza su valor máximo (mínimo) bien en el punto estacionario o bien en un punto de frontera de la región.

EJEMPLO 5. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = x^3 + y^3 - 3xy$ en la región

$$0 \leqslant x \leqslant 2, \quad -1 \leqslant y \leqslant 2.$$

◀ La región dada es un rectángulo.

1) Hallemos los puntos estacionarios (véase el ejemplo 3): $P_1(0, 0)$ y $P_2(1, 1)$. Los valores de la función en estos puntos: $z_1 = 0$, $z_2 = -1$.

2) Analicemos la función en las fronteras de la región.

a) Cuando $x = 0$, se tiene $z = y^3$. Esta función es monótona creciente y en los extremos del segmento $[-1, 2]$ toma los valores: $z|_{y=-1} = -1$, $z|_{y=2} = 8$.

b) Cuando $x = 2$, se tiene $z = 8 + y^3 - 6y$. Hallemos los valores de esta función en el punto estacionario y en los extremos del segmento $[-1, 2]$. Tenemos: $z' = 3y^2 - 6$; $z' = 0$ para $y^2 = 2$, o bien, en la región dada, para $y = \sqrt{2}$; $z|_{y=\sqrt{2}} = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z|_{y=-1} = 13$; $z|_{y=2} = 4$.

c) Cuando $y = -1$, se tiene $z = x^3 - 1 + 3x$ y $z' = 3x^2 + 3 > 0$. La función es monótona creciente de $z|_{x=0} = -1$ hasta $z|_{x=2} = 13$.

d) Cuando $y = 2$ se tiene $z = x^3 + 8 - 6x$; $z' = 3x^2 - 6$; $z' = 0$ para $x = \sqrt{2}$; $z|_{x=\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z|_{x=0} = 8$, $z|_{x=2} = 6$.

3) Al comparar todos los valores encontrados de la función concluimos que $z_{\text{máx}} = 13$ en el punto $(2, -1)$; $z_{\text{mín}} = 1$ en los puntos $(1, 1)$ y $(0, -1)$. ▶

EJEMPLO 6. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de un baño rectangular abierto, de capacidad V dada, para que su área de superficie sea la menor posible? Hállese este área.

◀ El baño tiene forma de un paralelepípedo rectangular. Sean x, y, z sus dimensiones. Dado que el volumen $V = xyz$ está prefijado, se tiene $z = \dfrac{V}{xy}$. El área de la superficie del baño es igual a

$$S = S(x, y) = 2(xz + yz) + xy = 2(x + y)\frac{V}{xy} + xy =$$

$$= 2V\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) + xy.$$

El problema se reduce a la búsqueda del mínimo de la función $S(x, y)$, siendo, de acuerdo con el sentido del problema, $x > 0$, $y > 0$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$S'_x(x, y) = -\frac{2V}{x^2} + y = 0,$$

$$S'_y(x, y) = -\frac{2V}{y^2} + x = 0,$$

hallamos el punto estacionario $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}$. Comprobemos el cumplimiento de las condiciones suficientes del mínimo:

$$S''_{xx}(x, y) = \frac{4V}{x^3}, \qquad S''_{xy}(x, y) = 1, \qquad S''_{yy}(x, y) = \frac{4V}{y^3}.$$

Por consiguiente,

$$A = S''_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \qquad B = S''_{xy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 1,$$

$$C = S''_{yy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \qquad D = AC - B^2 = 4 - 1 > 0, \qquad A > 0.$$

Así pues, la función $S(x, y)$ tiene mínimo para $x = y = \sqrt[3]{2V}$; y por tanto, $z = \dfrac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$;

$$S_{\text{mín}} = 2V\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2V}}\right) + \sqrt[3]{4V^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}. \ ▶$$

3.35. Hállese el valor máximo de la función $z = x - 2y + 5$ en las regiones:

a) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$;

b) $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 1$.

3.36. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = x^2 + y^2 - xy - x$ en la región $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$.

3.37. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = xy$ en la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

3.38. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = xy^2$ en la región $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

3.39. Represéntese el número positivo a en forma de un producto de cuatro factores positivos de una manera tal que la suma de sus magnitudes inversas sea mínima.

3.40. Hállese un paralelepípedo de volumen máximo entre todos los paralelepípedos rectangulares que tienen una suma dada de longitudes de las aristas igual a $12a$.

3.41. Hállese un paralelepípedo rectangular que tenga un volumen máximo, si la longitud de la diagonal del paralelepípedo es d.

3.42. Hállese tal punto dentro de un cuadrilátero, para el cual la suma de los cuadrados de las distancias entre dicho punto y los vértices sea mínima.

3.43. Un paralelepípedo rectangular que tenga el mayor volumen posible inscríbase en una semiesfera de radio R.

3.44. Un paralelepípedo rectangular que tenga un volumen máximo inscríbase en un cono circular recto cuyo radio de la base es R y la altura H.

3.45. Hállese un triángulo de área máxima entre todos los triángulos que tienen la base a y el ángulo α en el vértice.

3.46*. En la elipse $x^2 + 9y^2 = 9$ hállense los puntos más y menos alejados de la recta $4x + 9y = 16$.

3.47*. En la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ están dados dos puntos $A\,(-\sqrt{3},\ 0{,}5)$ y $B\,(1,\ \sqrt{3}/2)$. Hállese en la misma elipse tal punto C que el triángulo ABC tenga un área máxima.

3.48. Determínense las dimensiones exteriores de un cajón cerrado, que tiene un espesor dado de las paredes δ y un volumen (interior) V, de modo tal que la cantidad del material que se gasta para su fabricación sea mínima.

3.49. En un plano están dados n puntos materiales $P_1\,(x_1,\ y_1)$, $P_2\,(x_2,\ y_2)$, . . ., $P_n\,(x_n,\ y_n)$ cuyas masas son m_1, m_2, . . ., m_n, respectivamente. ¿Cuál es la posición del punto $P\,(x,\ y)$, para la cual el momento de inercia del sistema respecto del punto P sea el mínimo?

3.50*. Los puntos A y B están situados en diferentes medios ópticos, separados uno del otro por el plano A_1B_1 (fig. 69). La velocidad de propagación de la luz en el primer medio es v_1, y en el segundo, v_2. Aplicando el principio de Fermat, según el cual el rayo luminoso se propaga a lo largo de aquella línea AMB, para cuyo recorrido se requiere el mínimo de tiempo, dedúzcase la ley de refracción del rayo luminoso.

3.51. Aplicando el principio de Fermat, dedúzcase la ley de la reflexión del rayo luminoso de un plano en un medio homogéneo (fig. 70).

3.52*. Si por un circuito eléctrico de resistencia R pasa una corriente I, la cantidad de calor que se desprende en una unidad de tiempo es proporcional a I^2R. Determínese

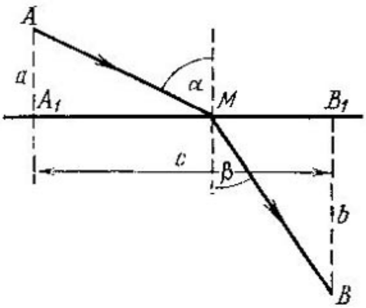

Fig. 69

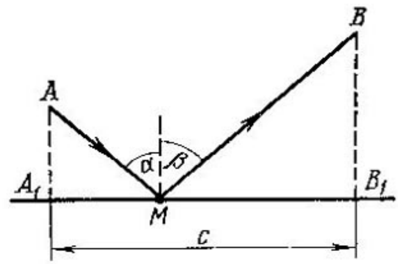

Fig. 70

¿cómo se debe ramificar la corriente I en las corrientes $I_1, I_2, \ldots, I_n$ con ayuda de n conductores cuyas resistencias son $R_1, R_2, \ldots, R_n$, para que el desprendimiento de calor sea mínimo?

5. Aplicaciones geométricas de las derivadas parciales. Se llama *plano tangente* a una superficie en el punto M_0 de ésta (*punto de tangencia*) un plano, que contiene en sí todas las tangentes a las curvas trazadas en la superficie por el punto mencionado.

Se denomina *normal* a la superficie una recta perpendicular al plano tangente y que pasa por el punto de tangencia.

Si la ecuación de la superficie tiene la forma

$$F(x, y, z) = 0,$$

la ecuación del plano tangente en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \qquad (5)$$

Las ecuaciones de la normal es:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}. \tag{6}$$

En el caso de que una superficie sea dada en la forma explícita

$$z=f(x,\ y),$$

la ecuación del plano tangente en el punto $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ tiene por expresión

$$z-z_0=f'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0),$$

mientras que la ecuación de la normal será

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,\ y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,\ x_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

EJEMPLO 7. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie

$$x^2-2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$$

en el punto $M(1,\ 2,\ 3)$.

◀ Designando mediante $F(x,\ y,\ z)$ el primer miembro de la ecuación de la superficie, hallemos las derivadas parciales y sus valores en el punto M:

$$F'_x(x,\ y,\ z)=2x+y-2z,\qquad F'_x(1,\ 2,\ 3)=-2;$$
$$F'_y(x,\ y,\ z)=4y+x+z,\qquad F'_y(1,\ 2,\ 3)=12;$$
$$F'_z(x,\ y,\ z)=-6z+y-2x,\qquad F'_z(1,\ 2,\ 3)=-18.$$

Según las fórmulas (5) y (6) tenemos

$$-2(x-1)+12(y-2)-18(z-3)=0,\quad \text{ó}$$
$$x-6y+9z-16=0$$

lo que representa la ecuación del plano tangente,

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{-18},\quad \text{ó}\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{9}$$

es la ecuación de la normal. ▶

Se llama *punto singular* de una curva plana $f(x,\ y)=0$ el punto $M(x_0,\ y_0)$ cuyas coordenadas satisfacen el sistema de tres ecuaciones

$$f(x_0,\ y_0)=0,\quad f'_x(x_0,\ y_0)=0,\quad f''_y(x_0,\ y_0)=0. \tag{7}$$

Supongamos que las condiciones (7) quedan cumplidas, los números

$$A=f''_{xx}(x_0,\ y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,\ y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,\ y_0)$$

no todos son iguales a cero y $\Delta=AC-B^2$. En este caso:

a) si $\Delta > 0$, M será un *punto aislado* (fig. 71).
b) si $\Delta < 0$, M será un *nudo* (*punto doble*) (fig. 72).
c) si $\Delta = 0$, M será o bien un *punto de retroceso de primera especie* (fig. 73) o *de segundo especie* (fig. 74), o bien un *punto aislado o de autoadherencia* (fig. 75).

El coeficiente angular $k = y'$ de la tangente a la curva en un punto singular se halla a partir de la ecuación

$$A + 2Bk + Ck^2 = 0.$$

En el caso de un punto aislado no hay tangente, en un nudo hay dos tangentes diferentes; en un punto de retroceso y en un punto de autoadherencia hay una tangente común a las dos ramas de la curva.

Fig. 71

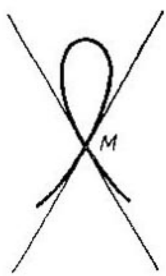

Fig. 72

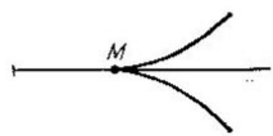

Fig. 72

Fig. 74

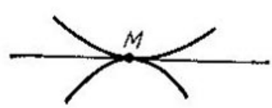

Fig. 75

Si $\Delta = 0$, para resolver la cuestión sobre el tipo de punto singular se debe estudiar la disposición de los puntos de la curva en cierto entorno del punto singular.

En el caso de una curva transcendente pueden haber también otros tipos de puntos singulares: *puntos angulosos*, *puntos terminales*, etc.

EJEMPLO 8. Analícense los puntos singulares de la concoide

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2x^2 = 0 \quad (a > 0,\ b > 0).$$

◀ Designando el primer miembro de la ecuación mediante $f(x, y)$, hallemos las derivadas parciales y las igualamos a cero:

$$f'_x(x, y) = 2x(x - a)^2 + 2(x - a)(x^2 + y^2) - 2b^2x = 0,$$
$$f'_y(x, y) = 2y(x - a)^2 = 0.$$

El sistema de ecuaciones tiene una única solución $x_0 = y_0 = 0$, es decir, la curva tiene un punto singular $O(0, 0)$.

Hallemos las segundas derivadas:

$$f''_{xx}(x, y) = 2\left((x-a)^2 + 2x(x-a) + x^2 + y^2 + 2x(x-a) - b^2\right),$$

$$f''_{xy}(x, y) = 4y(x-a),$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2(x-a)^2.$$

Calculando sus valores en el punto O, obtenemos $A = 2(a^2 - b^2)$, $B = 0$, $C = 2a^2$, $\Delta = AC - B^2 = 4a^2(a^2 - b^2)$.

Si $a > b$, entonces $\Delta > 0$ y el punto O está aislado (fig. 76). Si $a < b$, entonces $\Delta < 0$ y el punto O es un nudo (fig. 77). Si $a = b$,

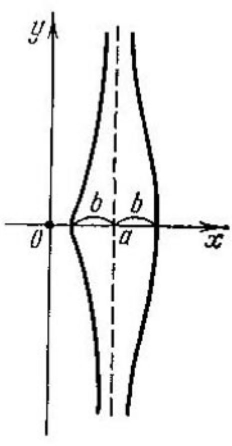

Fig. 76

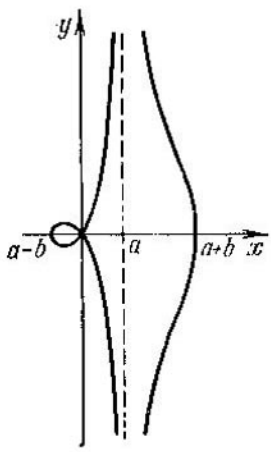

Fig. 77

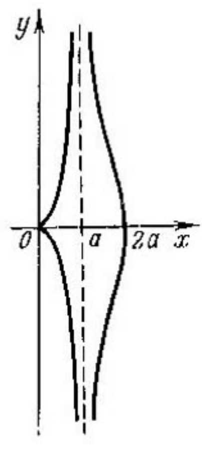

Fig. 78

entonces $\Delta = 0$. Hallemos el coeficiente angular de la tangente:

$$2(a^2 - b^2) + 2a^2k^2 = 0, \qquad k = \frac{b^2 - a^2}{a^2} = 0,$$

es decir, la tangente coincide con el eje Ox.

De la ecuación de la curva obtenemos (para $a = b$) $y = \pm \frac{x}{x-a}\sqrt{2ax - x^2}$, y, por ende, la curva es simétrica respecto del eje Ox ($0 \leqslant x < a$; $a < x \leqslant 2a$). Por esta razón, cuando $a = b$, O será un punto de retroceso de primera especie (fig. 78). ▶

Se denomina *envolvente de una familia de curvas planas* la línea (o conjunto de varias líneas) que toca todas las curvas de la familia dada, siendo cada punto de ella un punto de tangencia.

Si una familia de curvas de un solo parámetro $f(x, y, \alpha) = 0$ tiene una envolvente, la ecuación de esta última puede obtenerse a partir del sistema de ecuaciones

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \tag{8}$$

Eliminando del sistema (8) el parámetro α, obtendremos la ecuación de la forma $D(x, y) = 0$. La curva que se determina por esta ecuación lleva el nombre de *curva discriminante*. Una curva discriminante se compone de una envolvente y de un conjunto de puntos singulares de la familia dada.

EJEMPLO 9. La ecuación de la trayectoria del movimiento de un proyectil lanzado desde el punto O con una velocidad inicial v_0 formando el ángulo α con relación al horizonte (sin tomar en consideración la resistencia de aire) es

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{3v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Considerando α como parámetro, hállese la envolvente de todas las trayectorias del proyectil dispuestas en un mismo plano vertical.

◀ Tenemos

$$f(x, y, \alpha) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - y,$$

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = \frac{x}{\cos^2 \alpha} - \frac{gx^2 \operatorname{sen} \alpha}{v_0^2 \cos^3 \alpha} = \frac{x}{\cos^2 \alpha} \left(1 - \frac{gx}{v_0^2} \operatorname{tg} \alpha\right).$$

Formemos un sistema del tipo (8)

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad \frac{x}{\cos^2 \alpha} \left(1 - \frac{gx}{v_0^2} \operatorname{tg} \alpha\right) = 0.$$

De la segunda ecuación obtenemos: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gx}$ y $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{g^2x^2}{g^2x^2 + v_0^4}$. Sustituyendo en la primera ecuación, hallamos la ecuación de la envolvente (*parábola de seguridad*):

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g^2x^2 + v_0^4}{2v_0^2 g}, \quad \text{o bien } y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \ ▶$$

3.53. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies en los puntos que se indican:

a) $z = \operatorname{sen} x \cos y$ en el punto $(\pi/4, \pi/4, 1/2)$;

b) $z = e^{x \cos y}$ en el punto $(1, \pi, 1/e)$.

3.54. Hállese la distancia entre el origen de coordenadas y el plano tangente a la superficie $z = y \operatorname{tg} \frac{x}{a}$ en el punto $\left(\frac{\pi a}{4}, a, a\right)$.

3.55. Hállense los ángulos formados por la normal a la superficie $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ en el punto $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ con los ejes de coordenadas.

3.56. Para la superficie $z = 4x - xy + y^2$ hállese la ecuación del plano tangente p ralelo al plano $4x + y + 2z + 9 = 0$.

3.57. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies en los puntos indicados:

a) $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$ en el punto $(2, 1, 3)$;

b) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ en el punto $(2, 2, 1)$;

c) $z^2 + 4z + x^2 = 0$ en los puntos de intersección con el eje Oz.

3.58. Para la superficie $x^2 - z^2 - 2x + 6y = 4$ hállese la ecuación de la normal paralela a la recta $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$.

3.59. Hállense en la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ los puntos, donde los planos tangentes son paralelos a los ejes de coordenadas.

3.60. Muéstrese que los planos tangentes a la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ cortan en los ejes de coordenadas los segmento cuya suma de los cuadrados es constante e igual a a^2.

3.61. Hállense las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguientes superficies, dadas paramétricamente, en los puntos que se indican:

a) $x = r \cos \varphi$, $y = r \operatorname{sen} \varphi$, $z = r \operatorname{ctg} \alpha$ en el punto (r_0, φ_0);

b) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av$ en el punto (u_0, v_0).

3.62*. ¿Cuál es el ángulo que forman al intersecarse el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el parabaloide hiperbólico $bz = xy$ en el punto común (x_0, y_0, z_0)?

3.63*. Muéstrese que las superficies siguientes son ortogonales dos a dos:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$;

b) $xyz = a^3$ y $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - y^2)$;

c) $xy = az^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$ y $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$.

4. Analícense los puntos singulares de las curvas:

3.64. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

3.65. $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$. **3.66.** $x^2 + y^2 = x^6$.

3.67. $y^2 = (x-1)^3$. **3.68.** $(y-2x^2)^2 = x^5$.
3.69. $4y^2 = x^5 + 5x^4$. **3.70.** $y^2 = ax^2 + x^3$.
3.71. $y^2 = 1 - e^{-x^2}$. **3.72.** $y^2 = 1 - e^{-x^3}$.

3.73*. $y = \frac{x}{1+e^{1/x}}$. **3.74*.** $y = x^x$.

3.75. Hállese la envolvente de la familia de las rectas $y = ax + a^2$.

3.76. Hállese la envolvente de la familia de las rectas $x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = p$ ($p = \text{const}$, $p > 0$).

3.77. Hállese la envolvente de la familia de las circunferencias $x^2 + (y-C)^2 = R^2$ ($R = \text{const}$).

3.78. Hállese la envolvente de la familia de las parábolas $y^2 = 2px + p^2$.

3.79. Hállese la envolvente de la familia de las parábolas $y = 3a^2 + 2ax - x^2$.

3.80. Hállese la envolvente de la familia de las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(l-a)^2} = 1$ (l — const).

3.81. Hállese la envolvente de la familia de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y tienen su centro dispuesto en la parábola $y^2 = 4x$.

3.82. Analícese el carácter de las curvas discriminantes de la familia de las líneas siguientes (C es un parámetro variable)

a) parábolas cúbicas $y - 1 = (x - C)^3$;
b) parábolas semicúbicas $(y - C)^2 = (x - C)^3$;
c) parábolas de Neil $(y - 1)^3 = (x - C)^2$;
d) estrofoide $(a - x)(y - C)^2 = x^2(a + x)$.

§ 4. Números aproximados y operaciones con ellos

1. Errores absoluto y relativo. Supongamos que el número a es una *aproximación* del número A. Por ejemplo, $A = \sqrt{3}$ y $a = 1{,}7$. Cuando $a > A$, el número a se llama *aproximación por exceso*; cuando $a < A$, *aproximación por defecto*. Así, el número 1,73 es una aproximación de $\sqrt{3}$ por defecto, y el número 1,74, aproximación por exceso. El *error absoluto* de la aproximación (del número aproximado) a se determina por la igualdad

$$\Delta = |a - A|.$$

Por cuanto el número exacto A es en muchos casos desconocido, tampoco se sabe el error absoluto Δ; no obstante puede ser indicada la cota superior del error absoluto. La menor de las cotas superiores Δ_x del error absoluto lleva el nombre de *error absoluto límite*. En los cálculos prácticos como error absoluto límite Δ_a se toma con frecuencia una de las cotas superiores. Tiene lugar la inclusión

$$A \in [a - \Delta_a, \ a + \Delta_a],$$

la cual se anota habitualmente en la forma $A = a \pm \Delta_a$. Por ejemplo, $\sqrt{3} = 1,7321 \pm 0,0001$.

El *error relativo* del número a se determina por la igualdad

$$\delta = \frac{\Delta}{a}.$$

De un modo análogo se determina también el *error relativo límite*

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{a}.$$

Por ejemplo, para $A = \sqrt{3}$ y $a = 1,7321$

$$\delta_a = \frac{0,0001}{1,7321} = 0,00006.$$

En la notación decimal de un número se llama *cifra significativa* o signo cualquier cifra distinta de cero. El cero se considera cifra significativa sólo en el caso cuando se dispone entre las cifras significativas o está más a la derecha de todas las cifras significativas.

Se denomina *redondeo* de un número la sustitución del mismo por otro número que tenga menos cifras significativas. Al redondear se observan las siguientes reglas:

1) si la primera de las cifras desechadas es inferior a 5, los signos que se conservan se dejan sin cambios;

2) si la primera de las cifras desechadas es superior a 5, el último de los signos que se conservan se aumentan en 1;

3) si la primera de las cifras desechadas es igual a 5, mientras que entre las cifras que la siguen hay algunas distintas de cero, el último de los signos que se conservan se aumentan en 1;

4) si la primera de las cifras desechadas es igual a 5, mientras que todas las cifras que la siguen son ceros, el último de los signos decimales que se conservan se aumentan en 1 cuando es impar y se deja invariable, cuando es par.

Si el error absoluto de un número aproximado a no sobrepasa la unidad del orden expresado por la n-ésima cifra significativa en la notación decimal de este número, entonces a se llama *número poseedor de n signos justos en el sentido amplio*. En cambio, si el error absoluto no es superior a la mitad de la unidad del orden mencionado más arriba, entonces el número aproximado a lleva el nombre de *número que tiene n signos justos en el sentido estrecho*. En tal caso para el error relativo límite δ_a se verifican las desigualdades

$$\delta_a \frac{1}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad \text{y} \quad \delta_a \leqslant \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

en el primer y segundo casos, respectivamente; en ambas desigualdades k significa la primera cifra significativa del número a. Viceversa, si el error relativo límite satisface la desigualdad

$$\delta_a \leqslant \frac{1}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{10^{n-1}},$$

el número aproximado correspondiente a, cuya primera cifra significativa es k, tiene n signos justos en el sentido estrecho.

4.1. Hállense los errores absoluto y relativo de los siguientes números aproximados obtenidos durante las mediciones de:

a) 23,015 kg; b) 84,5 cm; c) 25°15′.

4.2. Al medir la longitud de un trayecto se ha obtenido el resultado 25,2 km con exactitud de hasta 2 m, y al medir un área (levantamiento fotográfico aéreo) se ha obtenido el resultado 1500 m² con exactitud de hasta 30 m². Calcúlense los errores absoluto límite y relativo límite de ambos resultados.

4.3. Al medir la longitud de un tramo de camino de longitud 10 km se ha cometido un error igual a 10 m, y al medir el diámetro de una tuerca de 4 cm de diámetro se ha cometido un error igual a 1 mm. ¿Cuál de estas dos mediciones será más exacta?

4.4. ¿Cuáles son los errores absoluto límite y relativo límite de los números aproximados obtenidos al redondear

a) 36,1; b) 0,08?

4.5. Redondéense los números 29,15 y 3,25 hasta el primer signo decimal tras la coma.

4.6. Redondéense el número 5,3726 hasta las milésimas, hasta las centésimas y hasta las décimas partes. Hállense los errores absoluto y relativo de cada uno de los redondeos citados.

4.7. Redondéense hasta las tres cifras significativas los siguientes números: 0,02025, 1876672, 599983.

4.8. Determínese el número de signos justos en el sentido estrecho y dése la notación correspondiente de los siguientes números aproximados:

a) 413287,51 con una exactitud del 1%; b) 0,0794 con una exactitud del 2%.

4.9. ¿Cuántos signos debe tener el número $\sqrt{21}$ para que el error relativo límite no sobrepase el 1%?

4.10. ¿Cuántos signos deben tener los números $\ln 40$ y $\operatorname{arctg} 2$, para que su error relativo límite no sobrepase el 0,1%?

2. Operaciones con números aproximados. Sea $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función derivable en la región que se considera. Entonces el error absoluto límite Δ_u del valor de la función se determina por la correlación

$$\Delta_u = \sum_{h=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_h} \right| \Delta_{x_h}, \qquad (1)$$

donde Δ_{x_k} son errores absolutos límites de los valores de los argumentos correspondientes. Para el error relativo límite tiene lugar la igualdad

$$\delta_u = \sum_{h=1}^{n} \left| \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \Delta_{x_k}. \qquad (2)$$

EJEMPLO 1. Hállense los errores absoluto límite y relativo límite del volumen de un cono de radio r y altura h, si $r = 15 \pm 0{,}02$ cm, $h = 19{,}1 \pm 0{,}05$ cm y $\pi = 3{,}14$.

◀ Tenemos $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 4498{,}1$ cm³. Teniendo presente que $r = 15$, $h = 19{,}1$, $\pi = 3{,}14$, $\Delta_r = 0{,}02$, $\Delta_h = 0{,}05$ y $\Delta_\pi = 0{,}0016$, hallemos $\frac{\partial v}{\partial \pi} = \frac{1}{3} r^2 h = 1432{,}5$, $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r h = 599{,}74$ y $\frac{\partial v}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi r^2 = 235{,}5$. Aplicando la fórmula (1), obtenemos el error absoluto límite

$$\Delta_v = \left| \frac{\partial v}{\partial \pi} \right| \Delta_\pi + \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| \Delta_r + \left| \frac{\partial v}{\partial h} \right| \Delta_h = 26{,}06 \text{ cm}^3.$$

El error relativo límite puede determinarse a partir de la igualdad

$$\delta_v = \frac{26{,}1}{4498} = 0{,}006.$$

De este modo, $v = 4498 \pm 26{,}1$ cm³. ▶

Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

4.11*. El error absoluto límite de una suma es igual a la suma de los errores absolutos límite de los sumandos.

4.12*. El error relativo límite de un producto es igual a la suma de los errores relativos límite de los factores.

4.13*. El error relativo límite de la n-ésima potencia es n veces mayor que el error relativo límite de la base.

4.14*. El error relativo límite de un cociente es igual a la suma de errores relativos límite del dividendo y del divisor.

4.15*. El error absoluto límite Δ_{uv} de un producto uv satisface la correlación $\Delta_{uv} = \Delta_u v + \Delta_v u$.

Realícense las operaciones indicadas sobre los números aproximados en los cuales todos los signos decimales son justos en el sentido estrecho:

4.16. $130,6 + 0,255 + 1,15224 + 41,84 + 11,8216$.

4.17. $17,83 + 1,07 + 1,1 \cdot 10^2$. **4.18.** $153,21 - 81,329$.

4.19. $61,32 - 61,31$. **4.20.** $35,2 \cdot 1,748$.

4.21. $65,3 \cdot 78,5$. **4.22.** $7,6 : 2,314$.

4.23. $170 : 5$. **4.24.** $40,5^3$.

4.25. $\sqrt{54,71}$.

4.26. Al medir el radio de un círculo con una exactitud de hasta 0,5 cm se ha obtenido el número 12 cm. Hállense los errores absoluto y relativo del área del círculo.

4.27. Determínese el error absoluto del logaritmo decimal de un número aproximado x calculado con un error relativo δ.

4.28. ¿Con qué error absoluto límite se deben medir los lados de un rectángulo $a \approx 4$ m y $b \approx 5$ m, para que su área S pueda calcularse con una exactitud de hasta 0,1 m²?

◀ Tenemos: $S = ab$ y $\Delta S = 0,1$. Suponiendo iguales los sumandos en la fórmula (1), obtenemos

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta x_i = \frac{\Delta_u}{n}, \text{ de donde } \Delta x_i = \frac{\Delta_u}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}$$

(*principio de igual efecto*). Por ello, calculando las derivadas parciales $\frac{\partial S}{\partial a} = b = 5$ y $\frac{\partial S}{\partial b} = a = 4$, hallamos que

$$\Delta_a = \frac{0,1}{2 \cdot 5} = 0,01, \quad \Delta_b = \frac{0,1}{2 \cdot 4} = 0,0125.$$

Repartiendo el número 0,1 en la fórmula para Δ_s entre dos sumandos en partes no iguales, sino de algún otro modo, obtendremos otros valores para Δ_a y Δ_b, que aseguran, no obstante, el mismo error absoluto. ▶

4.29. ¿Con qué error absoluto se debe medir el lado x de un cuadrado para determinar el área de este cuadrado con una exactitud de hasta 0,001 m², si 2 m $< x <$ 3 m?

4.30. Calcúlese la densidad de aluminio, si un cilindro de aluminio de 2 cm de diámetro y 11 cm de altura tiene una masa igual a 93,4 g. El error relativo de medición de las longitudes es igual a 0,01, y el error relativo de determinación de las masas es igual a 0,001.

4.31. ¿Con qué exactitud debe determinarse el radio de la base R y la altura H de una lata cilíndrica para que su capacidad pueda ser calculada con una exactitud de hasta el 1%?

4.32. ¿Con qué exactitud se debe tomar el valor aproximado del ángulo $x \approx 25°$ para determinar el valor del sen x con cuatro signos juntos en el sentido estrecho?

4.33. ¿Con qué número de signos justos en el amplio sentido debe tomarse el valor del argumento $x \approx 2$ para obtener el valor de la función $y = e^x$ con una exactitud de hasta $0{,}001$?

4.34. ¿Con qué número de signos justos debe conocerse el término independiente de la ecuación $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ para obtener las raíces de esta ecuación con cuatro signos justos en el sentido estrecho?

4.35. Se pide medir con una exactitud de hasta el 1% el área de la superficie lateral de un cono truncado cuyos radios de las bases son ≈ 2 m y ≈ 1 m, mientras que la generatriz es igual aproximadamente a 5 m. ¿Con qué exactitud se deben medir con este fin los radios y la generatriz y cuantos signos debe tener el número π?

RESPUESTAS

1.1. $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+p-1)}$; $0 < x < p$, $0 < y < p$, $x + y > p$ **1.2.** $V = \frac{S^2}{3\pi^2 l^3}\sqrt{\pi^2 l^4 - S^2}$; $0 < S < \pi l^2$. **1.3.** $S = \frac{x+y}{4}\sqrt{4z^2 - (x-y)^2}$; $z > \frac{x-y}{2}$. **1.4.** $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. **1.5.** $x^2 + y^2 \geqslant R^2$. **1.6.** $x^2 + y^2 < R^2$. **1.7.** $x^2 + y^2 > R^2$. **1.8.** $x = y$. **1.9.** $-1 \leqslant x^2 + y \leqslant 1$. **1.10.** $x + y < 0$. **1.11.** $x \leqslant x^2 + y^2 < 2x$. **1.12.** Las franjas $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k es un número entero). **1.13.** $0 < x^2 + y^2 \leqslant 1$ para $0 < a < 1$, $x^2 + y^2 \geqslant 1$ para $a > 1$. **1.14.** Dos ángulos obtusos opuestos por el vértice y formados por las rectas $y = 0$ e $y = -2x$, incluyendo la frontera sin el vértice común $(0, 0)$. **1.15.** $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$. **1.16.** El triángulo curvilíneo formado por la recta $y = 2$ y las parábolas $y^2 = \pm x$, excluyendo el vértice $(0, 0)$. **1.17.** $0 \leqslant \varphi < \pi$. **1.18.** La parte de un plano comprendida entre los rayos $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ y $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ y $\varphi = \frac{5\pi}{4}$. **1.19.** $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant R^2$. **1.20.** $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $z \neq 0$. **1.21.** $x^2 + y^2 - z^2 < 1$. **1.22.** El cubo n-dimensional $-1 \leqslant x_k \leqslant 1$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). **1.23.** El elipsoide n-dimensional $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n^2}\leqslant 1$. **1.24.** $f(2, 1)=1/4$; $f(1, 2)=4$; $f(3, 2)=0$; $f(2, 3)=\infty$; $f(a, a)=-1$; $f(a, -a)=1$. **1.25.** $f(-3, 4)=-24/25$; $f(1, y/x)=f(x, y)$. **1.26.** $\sqrt{1+x^2}$. **1.27.** $f(x)=x^2-x$; $z=2y+(x-y)^2$. **1.28.** $\frac{x^2(1-y)}{1+y}$. ◀ Designemos $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$. Entonces, $x=\frac{u}{1+v}$, $y=\frac{uv}{1+v}$, $f(u, v)=\frac{u^2}{(1+v)^2}-\frac{u^2v^2}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$. Resta dar el nombre x e y a las variables u y v. ▶ **1.29.** a) $x^4-2x^2y^2+2y^4$; b) $4x^2y^2$. **1.31.** a) $\cos 2x$; b) $\cos(x^2-y^2)$. **1.32.** -6. **1.33.** 1. **1.34.** 0. **1.35.** e. **1.36.** 1. **1.37.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z=\frac{1}{k-1}$ a lo largo de la recta $y=kx$; $\lim z=3$ para $k=4/3$; $\lim z=2$ para $k=3/2$; $\lim z=1$ para $k=2$; $\lim z=-2$ para $k=1/2$. **1.40.** No lo tiene. **1.41.** No lo tiene. **1.42.** ● Analícese la variación de x e y en la parábola $y=x^2$. **1.44.** $(1, -1)$. **1.45.** (m, n), donde $m, n\in\mathbb{Z}$. **1.46.** Las líneas de discontinuidad son las rectas $x=k\pi$ e $y=m\pi$, donde $k, m\in\mathbb{Z}$. **1.47.** La línea de discontinuidad es la circunferencia $x^2+y^2=1$. **1.48.** Las líneas de discontinuidad son la recta $x+y=0$ y la parábola $y^2=x$. **1.49.** Las líneas de discontinuidad son una circunferencia $x^2+y^2=1$ y una hipérbola $x^2-y^2=1$. **1.50.** Las superficies de discontinuidad son los planos coordenados $x=0$, $y=0$, $z=0$. **1.51.** La superficie de discontinuidad es un elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **1.52.** La superficie de discontinuidad es el cono $x^2+y^2-z^2=0$. **1.53.** La superficie de dicontinuidad es el hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2=1$. **1.54.** La superficie de discontinuidad es el hiperboloide de dos hojas $x^2+y^2-z^2=-1$. **1.55.** $\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4-15x^2y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=5y^4-15x^3y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20x^3-30xy^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-45x^2y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=20y^3-30x^3y$. **1.56.** $\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x+\frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1-\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **1.57.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{3xy^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. **1.58.** $\frac{\partial z}{\partial x}=(1-xy)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\,(xy-2)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x\,(xy-2)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{-xy}$. **1.59.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos y^2}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y\operatorname{sen} y^2}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\cos y^2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2y\operatorname{sen} y^2}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2\operatorname{sen} y^2+4y^2\cos y^2}{x}$.

1.60. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=y^{x-1}\times$ $\times(x\ln y+1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)\,y^{x-2}\ (y>0)$. **1.61.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ $=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$. **1.62.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\operatorname{sgn}x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{|x|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ $=\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{(y^2-x^2)\operatorname{sgn}x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$, **1.63.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=$ $=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. **1.64.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{y}\times$ $\times\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{z(z+1)}{x^2}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$ $=\frac{z(z-1)}{y^2}\left(\frac{y}{z}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln^2\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=-\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{1}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$. **1.65.** $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3t^4+3$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3t^4-4$, $\frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2t^4+2$, $\frac{\partial u}{\partial t}=$ $=4xy^2z^3t^3-1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2xz^3t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6xy^2zt^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=$ $=12xy^2z^3t^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=2yz^3t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=3y^2z^2t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}=4y^2z^3t^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=6xyz^2t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}=8yz^3t^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t}=12xy^2z^2t^3$. **1.66.** $f'_x(3,2)=$ $=56$, $f'_y(3,2)=42$, $f''_{xx}(3,2)=36$, $f''_{xy}(3,2)=31$, $f''_{yy}(3,2)=6$. **1.67.** $f'_x(1,2)=e(2e^4-1)$, $f'_y(1,2)=4e^5$, $f''_{xx}(1,2)=e(6e^4-1)$, $f''_{xy}(1,2)=8e^5$, $f''_{yy}(1,2)=18e^5$. **1.70.** $f'''_{xxx}(0,1)=0$, $f'''_{xxy}(0,1)=2$, $f'''_{xyy}(0,1)=0$, $f'''_{yyy}(0,1)=0$. **1.71.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta}=-\frac{6}{r^4}+$ $+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, donde $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. **1.72.** $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}=-6(\cos x+\cos y)$. **1.73.** $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\,\partial y^q}=p!q!$ **1.78.** $r^2\cos\theta$. **1.85.** $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. ● Compruébese que la función es nula en todos los puntos de los ejes Ox y Oy y úsese la definición de las derivadas parciales. **1.86.** ● Compruébese, usando las reglas de derivación y la definición de la derivada parcial, que $f'_x(x,y)=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$ para $x^2+y^2\neq 0$, $f'_x(0,0)=0$,

y, por tanto, $f'_x(0, y) = -y$. De aquí $f''_{xy}(0, y) = f''_{xy}(0, 0) = -1$. Análogamente hallamos que $f''_{yx}(0, 0) = 1$. **1.87.** $\Delta z = 0{,}33$, $dz = 0{,}3$. **1.88.** $\Delta z = 0{,}0187$. $dz = 0{,}0174$. **1.89.** $dz = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\,(y+\sqrt{x^2+y^2})} + \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **1.90.** $dz = \frac{y}{x^2 \cos^2 \frac{y^2}{x}}(2x\,dy - y\,dx)$. **1.91.** $dz = \frac{1}{y^2} \times \operatorname{tg}\frac{x}{y}(x\,dy - y\,dx)$. **1.92.** $du = (xy)^z\left(\frac{z}{x}dx + \frac{z}{y}dy + \ln(xy)\,dz\right)$. **1.93.** $df = (x_2 - x_3)\,x_1^{x_2-x_3-1}\ln x_4\,dx_1 + x_1^{x_2-x_3}\ln x_1 \ln x_4\,dx_2 - x_1^{x_2-x_3} \times \ln x_1 \cdot \ln x_4 \times dx_3 + x_1^{x_2-x_3}\frac{dx_4}{x_4}$. **1.94.** $df(1, 2, 1) = \frac{5dz - 2(dx + 2dy)}{25}$.
1.95. 8,29. **1.96.** 2,95. **1.97.** 0,227. **1.98.** 8,2 m³. **1.99.** Disminuirá en 1,57 cm. **1.100.** Aumentará en 617,5 cm³. **1.101.** $dz = 3x(x+2y)dx + 3(x^2 - y^2)\,dy$, $d^2z = 6((x+y)\,dx^2 + 2x\,dx\,dy - y\,dy^2)$. **1.102.** $dz = (x\,dy - y\,dx)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$, $d^2z = 2\left(\frac{y}{x^3}dx^2 + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx\,dy - \frac{x}{y^3}dy^2\right)$. **1.103.** $dz = \frac{(x+y)\,dx + x\,dy}{\sqrt{x^2+2xy}}$, $d^2z = \frac{-y^2dx^2 + 2xy\,dx\,dy - x^2dy^2}{(x^2+2xy)^{3/2}}$.
1.104. $dz = \frac{x^2\,dy - xy\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $d^2z = \frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}(y(2x^2 - y^2)\,dx^2 + 2x \times (2y^2 - x^2)\,dx\,dy - 3x^2y\,dy^2)$. **1.105.** $dz = e^{xy}((y^2 + xy + 1)\,dx + (x^2 + xy + 1)\,dy)$, $d^2z = e^{xy}(y(y^2 + xy + 2)\,dx^2 + 2(x+y)(xy+2) \times dx\,dy + x(x^2 + xy + 2)\,dy^2)$. **1.106.** $dz = \left(\ln\frac{y}{x} - 1\right)dx + \frac{x}{y}dy$; $d^2z = -\frac{1}{x}dx^2 + \frac{2}{y}dx\,dy - \frac{x}{y^2}dy^2$. **1.107.** $dz = \frac{1}{2x^2 + 2xy + y^2} \times (y\,dx + x\,dy)$, $d^2z = -\frac{1}{(2x^2+2xy+y^2)^2}(2y(2x+y)\,dx^2 + 2(y^2 - 2x^2) \times dx\,dy - 2x(x+y)\,dy^2)$. **1.108.** $du = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, $d^2u = 2(dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx)$. **1.109.** $du = e^{xyz}(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)$, $d^2u = e^{xyz}(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)^2 + 2(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx)$. **1.110.** $d^3z = e^y(-\cos x\,dx^3 - 3\operatorname{sen} x\,dx^2\,dy + 3\cos x\,dx\,dy^2 + \operatorname{sen} x\,dy^3)$. **1.111.** $d^3u = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dx\,dy\,dz)$. **1.112.** $d^6u = -\frac{5!\,(dx + dy + dz)^6}{(x+y+z)^6}$. **1.113.** $d^mu = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^m$.

2.1. $\frac{dz}{dt} = e^{2x-3y}(2\sec^2 t - 3(2t-1))$. **2.2.** $\frac{dz}{dt} = x^y\left(\frac{y}{xt} + \ln x \cos t\right)$. **2.3.** $\frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$. **2.4.** $\frac{du}{dt} = \frac{x(z + 2yt^2) - yzte^t}{tx^2}$. **2.5** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x + e^y(x^2+1)}{e^x + e^y}$. **2.6.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y^2 + (x+1)^2}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{y(1 - 2(x+1)^2}{y^2 + (x+1)^2}$. **2.7.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2u\left(\frac{ux}{v} - \frac{y\ln v}{x^2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2u\left(\frac{\ln v}{x} +\right.$

$+\frac{uy}{v}\Big)$. **2.8.** $dz=((2uv-v^2)\operatorname{sen} y-(u^2-2uv)\,y\operatorname{sen} x)\,dx+(2uv-$
$-v^2)\,x\cos y+(u^2-2uv)\cos x)\,dy$. **2.9.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_v(u,v)-\frac{2y}{(x-y)^2}\times$
$\times f'_u(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{(x-y)^2}f'_u(u,v)-3f'_v(u,v)$. **2.10.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y^2}\times$
$\times f'_u(u,v)+y^2f'_v(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf'_v(u,v)-\frac{2y}{x^2-y^2}f'_u(u,v)$. **2.11.**
$dz=(5x^4f'_v(u,v)-yf'_u(u,v)\operatorname{sen}(xy))\,dx-(x\operatorname{sen}(xy)\,f'_u(u,v)+$
$+7f'_v(u,v))\,dy$. **2.12.** $dz=\frac{1}{y^2}\left(\cos\frac{x}{y}f'_u(u,v)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,f'_v\times\right.$
$\left.\times(u,v)\right)(y\,dx-x\,dy)$. **2.13.** $du=(2sf'_x(x,y,z)+2sf'_y(x,y,z)+$
$+t2f'_z(x,y,z))\,ds+(2tf'_x(x,y,z)-2tf'_y(x,y,z)+2sf'_z(x,y,z))\,dt$.
2.14. $\frac{\partial u}{\partial x_1}=f'_{x_1}(x_1,x_2,x_3,x_4)+f'_{x_3}(x_1,x_2,x_3,x_4)\,g'_{x_1}(x_1,x_2)+$
$+f'_{x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)\,(h'_{x_1}(x_1,x_2,x_3)+h'_{x_3}(x_1,x_2,x_3)\,g'_{x_1}(x_1,x_2))$
$\frac{\partial u}{\partial x_2}=f'_{x_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)+f'_{x_3}(x_1,x_2,x_3,x_4)\,g'_{x_2}(x_1,x_2)+f'_{x_4}(x_1,x_2,$
$x_3,x_4)\,(h'_{x_2}(x_1,x_2,x_3)+h'_{x_3}(x_1,x_2,x_3)\,g'_{x_2}(x_1,x_2))$. **2.19.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$
$=y^2f''_{uu}(u,v)+2f''_{uv}(u,v)+\frac{1}{y^2}f''_{vv}(u,v)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=xyf''_{uu}(u,v)-$
$-\frac{x}{y^3}f''_{vv}(u,v)+f'_u(u,v)-\frac{1}{y^2}f'_v(u,v)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2f''_{uu}(u,v)-\frac{2x^2}{y^2}\times$
$\times f''_{uv}(u,v)+\frac{x^2}{y^4}f''_{vv}(u,v)+\frac{2x}{y^3}f'_v(u,v)$, **2.20.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}+f''_{xz}\varphi'_y+$
$+f''_{yz}\varphi'_x+f''_{zz}\varphi'_x\varphi'_y+f'_z\varphi''_{xy}$. **2.21.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}+$
$+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33}$,
$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=$
$=xyf''_{13}+xy^2f''_{23}+xy^2zf''_{33}+yf'_3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3$ *).
2.24. $d^2u=4f''(t)\cdot(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2+2f'(t)\cdot(dx^2+dy^2+dz^2)$. **2.25.**
$d^2u=a^2f''_{11}\,dx^2+b^2f''_{22}\,dy^2+c^2f''_{33}\,dz^2+2abf''_{12}\,dx\,dy+2acf''_{13}\,dx\,dz+$
$+2bcf''_{23}\,dy\,dz$. **2.26.** $d^2z=(\operatorname{sen}^2 y\cdot f''_{uu}-2y\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y\cdot f''_{uv}+y^2\operatorname{sen}^2 x f''_{vv}-$
$-y\cos x\cdot f'_v)\,dx^2+(x\operatorname{sen} 2y\cdot f''_{uu}+2(\operatorname{sen} y\cos x-xy\operatorname{sen} x\cos y)\,f''_{uv}-$
$-y\operatorname{sen} 2x\cdot f''_{vv}+2(\cos y\cdot f'_u-\operatorname{sen} x\cdot f'_v))\,dx\,dy+(x^2\cos^2 y\cdot f''_{uu}+2x\cos x\times$

---

* En las respuestes a los problemas 2.21 y 2.25 mediante f'_i y f''_{ij} están designadas las derivadas parciales de la función $f(\varphi_1(x,y,z),\varphi_2(x,y,z),\varphi_3(x,y,z))$ respecto a las variables φ_i ó φ_i y φ_j.

$\times \cos y\cdot f''_{uv}+\cos^2 x\cdot f''_{vv}-x\,\mathrm{sen}\,y\cdot f'_u)\,dy^2$. **2.27.** $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2e^{2x}-xe^{2y}}{x^2e^{2y}-ye^{2x}}$. **2.28.** $\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x+\mathrm{sen}\,(x-y)}{\mathrm{sen}\,(x-y)-\mathrm{sen}\,x}$. **2.29.** $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x+y+1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. **2.30.** $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{y^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. **2.31.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=0$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{3}$, $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{1}{3}$. **2.32.** $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$. **2.33.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz(x+z)-z^3}{z^3+2xy(x+z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz(x+z)}{z^3+2xy(x+z)}$.
2.34. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_u(u,v)+2xF'_v(u,v)}{F'_u(u,v)+2zF'_v(u,v)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_u(u,v)+2yF'_v(u,v)}{F'_u(u,v)+2zF'_v(u,v)}$, donde $u=x+y+z$, $v=x^2+y^2+z^2$. **2.35.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ze^{xz}f'_v(u,v)}{yf'_u(u,v)+xe^{xz}f'_v(u,v)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{zf'_u(u,v)}{yf'_u(u,v)+xe^{xz}f'_v(u,v)}$, donde $u=yz$, $v=e^{xz}$. **2.36.** $dz=\frac{z\,dx-z(1+x^2z^2)\,dy}{y(1+x^2z^2)-x}$. **2.37.** $dz=\frac{y^2(z+3x^2)\,dx+(3y^4+ze^{z/y})\,dy}{y(e^{z/y}-xy)}$.
2.38. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{1+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2y(x-2)}{(1+z)^3}$. **2.39.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$. **2.40.** $d^2z=\frac{c^4}{a^2b^2z^3}((y^2-b^2)\times$ $\times\,dx^2-2xy\,dx\,dy+(x^2-a^2)\,dy^2)$. **2.44.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{5}{3}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{3}{8}$, $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{5}{18}$. **2.45.** $dy=-\frac{4x}{5y}\,dx$, $dz=\frac{x}{5z}\,dx$, $d^2y=-\frac{4}{25y^3}(4x^2+5y^2)\,dx^2$, $d^2z=\frac{1}{25z^3}(5z^2-x^2)\,dx^2$. **2.46.** $du=\frac{(y-u)\,dx+(y-v)\,dy}{x-y}$, $dv=\frac{(x-u)\,dx+(x-v)\,dy}{y-x}$, $d^2v=-d^2u=\frac{2}{(x-y)^2}((y-u)\,dx^2+(y-v+u-x)\,dx\,dy+(v-x)\,dy^2)$.
2.48. $\frac{\partial z}{\partial x}=uv^2+u^2v$, $\frac{\partial z}{\partial y}=uv^2-u^2v$. **2.49.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c}{a}\cos u\,\mathrm{cth}\,v$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c}{b}\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{cth}\,v$. **2.50.** $dz=e^{-u}((v\cos v-u\,\mathrm{sen}\,v)\,dx+(u\cos v+v\,\mathrm{sen}\,v)\,dy)$. **2.51.** $dz=-3uv\,dx+\frac{3}{2}(u+v)\,dy$. **2.52.** $\frac{d^2y}{dt^2}-y=0$. **2.53.** $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$. **2.54.** $\frac{d^3x}{dy^3}+\frac{d^2x}{dy^2}=0$. **2.55.** $r'^2=\frac{1-\mathrm{sen}\,2\varphi}{\mathrm{sen}\,2\varphi}r^2$. **2.56.** $w=r\frac{\partial u}{\partial r}$. **2.57.** $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}$. **2.58.** $\frac{\partial z}{\partial r}=$

$= u\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$ **2.59.** $w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}$. **2.60.** $w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$. **2.61.** $\dfrac{\partial w}{\partial v} = 0$. **2.62.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$. **2.63.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = 2w$.

3.1. $f(x+h,\ y+k) = xy^2 + y^2h + 2xyk + 2yhk + xk^2 + hk^2$. **3.2.** $\Delta f(x, y) = -h^2 + 2hk + 3k^2$. **3.3.** $f(x, y) = 12 + 15(x-2) + 6(x-2)^2 + 3(x-2)(y-1) - 6(y-1)^2 + (x-2)^3 - 2(y-1)^3$. **3.4.** $f(x+h,\ y+k,\ z+l) = f(x, y, z) + h(2x + y + 3) + k(x + 4y - 2z - 1) + l(6z - 2y - 4) + h^2 + 2k^2 + 3l^2 + hk - 2kl$. **3.5.** $f(x, y, z) = 8 - 8(y+1) + 4(z-2) + (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 2(x-1)(y+1) - 2(x-1) \times (z-2) - 2(y+1)(z-2)$. **3.6.** $f(x, y) = 1 + y + \dfrac{1}{2!}(y^2 - x^2) + \dfrac{1}{3!}(y^3 - 3x^2y) + o(\rho^3)$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. **3.7.** $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{3!}(xy^3 - x^3y) + o(\rho^4)$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. **3.8.** $f(x, y) = 1 - (x-1) + (y-1) + (x-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)^3 + (x-1)^2(y-1) + o(\rho^3)$, donde $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. **3.9.** $f(x, y, z) = (x-1) + (y-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - \dfrac{1}{2}(y-1)^2 + z^2 + o(\rho^2)$, donde $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$. **3.10.** $z = 1 + \dfrac{2}{3}(x-1) - \dfrac{1}{2}(y-1) - \dfrac{2}{9}(x-1)^2 - \dfrac{1}{8}(y-1)^2 + o(\rho^2)$, donde $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. **3.11.** $z_{\text{mín}} = -9$ cuando $x = 0$, $y = 3$. **3.12.** $z_{\text{máx}} = 1/64$ cuando $x = 1/4$, $y = 1/2$. **3.13.** $z_{\text{mín}} = -4/3$ cuando $x = 0$, $y = -2/3$. No hay extremo en el punto estacionario $(2, -2/3)$. **3.14.** $z_{\text{mín}} = 30$ cuando $x = 5$, $y = 2$. **3.15.** $z_{\text{mín}} = 10 - 18 \ln 3$ cuando $x = 1$, $y = 3$. **3.16.** $z_{\text{mín}} = -28$ cuando $x = 2$, $y = 1$; $z_{\text{máx}} = 28$ cuando $x = -2$, $y = -1$. No hay extremos en los puntos estacionarios $(1, 2)$ $(-1, -2)$. **3.17.** $z_{\text{mín}} = 0$ cuando $x = y = 0$. No hay extremos en los puntos estacionarios $(-5/3, 0)$, $(1, 4)$, $(1, -4)$. **3.18.** $z_{\text{mín}} = 0$ cuando $x = y = 0$; $z_{\text{máx}} = 2e^{-1}$ cuando $x = \pm 1$, $y = 0$. No hay extremos en los puntos estacionarios $(0, \pm 1)$. **3.19.** $z_{\text{máx}} = 2$ cuando $x = y = 0$. **3.20.** $u_{\text{mín}} = -14$ cuando $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$. **3.21.** $u_{\text{máx}} = 1/7^7$ cuando $x = y = z = 1/7$. **3.22.** $u_{\text{mín}} = 2^{9/4}$ cuando $x = 2^{1/4}$, $y = 2^{1/2}$, $z = 2^{3/4}$. **3.23.** La ecuación define dos funciones, de las cuales una tiene un máximo ($z_{\text{máx}} = 6$) cuando $x = -2$, $y = 1$, y la otra, un mínimo ($z_{\text{mín}} = -2$) cuando $x = -2$, $y = 1$; en los puntos de la circunferencia $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ cada una de las funciones citadas tiene un extremo de contorno $z = 2$. ● Las funciones mencionadas se definen en forma explícita mediante la igualdad $z = 2 \pm$

$\pm\sqrt{16-(x+2)^2-(y-1)^2}$ y quedan determinadas sólo en el interior y en la circunferencia $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ en cuyos puntos ambas funciones toman el valor $z=2$. Este valor es mínimo para una de las funciones y máximo para la otra. **3.24.** La ecuación define dos funciones, de las cuales una tiene un mínimo ($z_{\text{mín}}=1$) cuando $x=0$, $y=-2$, y la otra, un máximo ($z_{\text{máx}}=-8/7$) cuando $x=0$, $y=$ $=16/7$. **3.25.** $z_{\text{mín}}=-19/4$ cuando $x=y=-3/2$. **3.26.** $z_{\text{mín}}=$ $=2$ cuando $x=y=1$. **3.27.** $z_{\text{mín}}=-1-2\sqrt{2}$ cuando $x=$ $=-1/\sqrt{2}$, $y=1/\sqrt{2}$; $z_{\text{máx}}=1-2\sqrt{2}$ cuando $x=1/\sqrt{2}$, $y=$ $=-1\sqrt{2}$. **3.28.** $z_{\text{mín}}=0$ cuando $x=1$, $y=0$; $z_{\text{máx}}=1/27$ cuando $x=y=1/3$. **3.29.** $z_{\text{mín}}=-5$ cuando $x=-2/\sqrt{5}$, $y=-1/\sqrt{5}$; $z_{\text{máx}}=\sqrt{5}$ cuando $x=2/\sqrt{5}$, $y=1/\sqrt{5}$. **3.30.** $u_{\text{mín}}=-18$ cuando $x=-4$, $y=-2$, $z=4$; $u_{\text{máx}}=18$ cuando $x=4$, $y=2$, $z=-4$. **3.31.** $u_{\text{mín}}=4$ cuando $x=y=0$, $z=\pm 2$; $u_{\text{máx}}=16$ cuando $x=\pm 4$, $y=z=0$; no hay extremo cuando $x=z=0$ e $y=\pm 3$. **3.32.** $u_{\text{máx}}=2^8$ cuando $x=y=z=2$. **3.33.** $u_{\text{máx}}=2$ en los puntos $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$; $u_{\text{mín}}=50/27$ en los puntos $(2/3, 5/3, 5/3)$, $(5/3, 2/3, 5/3)$, $(5/3, 5/3, 2/3)$. **3.34.** ● Búsquese el mínimo de la función $u=(x^3+y^3+z^3)/3$ para $x+y+z=s$. **3.35.** a) $z_{\text{máx}}=$ $=6$ cuando $x=1$, $y=0$; b) $z_{\text{máx}}=5$ para $x=y=0$. **3.36.** $z_{\text{máx}}=$ $=6$ para $x=3$, $y=0$ y cuando $x=0$, $y=3$; $z_{\text{mín}}=-1$ para $x=y=1$. **3.37.** $z_{\text{máx}}=1/2$ para $x=y=\pm 1/\sqrt{2}$; $z_{\text{mín}}=-1/2$ para $x=-y=\pm 1/\sqrt{2}$. **3.38.** $z_{\text{máx}}=2/(3\sqrt{3})$ para $x=1/\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{2/3}$; $z_{\text{mín}}=-2/(3\sqrt{3})$ para $x=-1/\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{2/3}$. **3.39.** $a=\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[4]{a}}}}$. **3.40.** Un cubo cuya arista tiene la longitud a. **3.41.** Un cubo cuya arista tiene la longitud $d/\sqrt{3}$. **3.42.** Las coordenadas del punto buscado son iguales a las medias aritméticas de las coordenadas de los vértices. **3.43.** Las longitudes de los lados del paralelepípedo son: $2R/\sqrt{3}$, $2R/\sqrt{3}$, $R/\sqrt{3}$. **3.44.** Las longitudes de los lados del paralelepípedo son $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}R, \frac{H}{3}$. **3.45.** Un triángulo isósceles en el que el lado lateral es $a/(2\operatorname{sen}\alpha/2)$. **3.46.** $(-12/5, -3/5)$, $(12/5, 3/5)$. ● Sustitúyanse las condiciones suficientes de extremo por los razonamientos geométricos.

3.47. $C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$. ● Hágase uso de la expresión del área del triángulo en términos de las coordenadas de sus vértices. **3.48.** $x=y=z=\sqrt[3]{V}+2\delta$. **3.49.** $x=\frac{m_1x_1+m_2x_2\ldots m_nx_n}{m_1+m^2+\ldots+m_n}$, $y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$. **3.50.** $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{v_1}{v_2}$. ● Es evidente que el punto M, por el cual el rayo pasa de un medio al otro, deberá encontrarse entre los puntos A_1 y B_1, siendo $AM=\frac{a}{\cos\alpha}$, $BM=\frac{b}{\cos\beta}$, $A_1M=a\ \mathrm{tg}\,\alpha$, $B_1M=b\ \mathrm{tg}\,\beta$. La duración del movimiento del rayo es igual a $\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$. El problema se reduce a la búsqueda del mínimo de la función $f(\alpha, \beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$ a condición de que $a\,\mathrm{tg}\,\alpha+b\,\mathrm{tg}\,\beta=c$. **3.51.** $\alpha=\beta$. **3.52.** $I_1:I_2:\ldots$ $\ldots:I_n=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}:\ldots:\frac{1}{R_n}$. ● Hállese el mínimo de la función $f(I_1, I_2, \ldots, I_n)=I_1^2R_1+I_2^2R_2+\ldots+I_n^2R_n$, si $I_1+I_2+\ldots+I_n=I$. **3.53.** a) $x-y-2z+1=0$, $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-2}$; b) $x+ez-2=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-\pi}{0}=\frac{z-\frac{1}{e}}{e}$. **3.54.** $\frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$. **3.55.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{6}}$. **3.56.** $4x+y+2z-78=0$. **3.57.** a) $2x+7y-5z+4=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{-5}$; b) $x+y-4z=0$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$; c) $z=0$, $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ (en el punto $(0, 0, 0)$); $z=-4$, $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+4}{1}$ (en el punto $(0, 0, -4)$). **3.58.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-\frac{10}{3}}{3}=\frac{z+4}{4}$. **3.59.** En los puntos $(0, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$ los planos tangentes son paralelos al plano Oxy, en los puntos $(\pm 2, \mp 4, \pm 2)$ al plano Oxz, en los puntos $(\pm 4, \mp 2, 0)$, al plano Oyz. **3.61.** a) $x\cos\varphi_0+y\,\mathrm{sen}\,\varphi_0-z\,\mathrm{tg}\,\alpha=0$, $\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\,\mathrm{sen}\,\varphi_0}{\mathrm{sen}\,\varphi}=\frac{z-r_0\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{-\mathrm{tg}\,\alpha}$; b) $ax\,\mathrm{sen}\,v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0$, $\frac{x-u_0\cos v_0}{a\,\mathrm{sen}\,v_0}=\frac{y-u_0\,\mathrm{sen}\,v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}$. **3.62.** $\cos\varphi=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$. ● Un ángulo formado por dos superficies en el punto de su intersección se denomina ángulo entre dos planos tangentes trazados a dichas superficies en un punto dado. **3.63.** Las superficies se llaman ortogonales, si se cortan bajo un ángulo recto en cada punto de la línea de su intersección. **3.64.** El punto aislado $(0, 0)$. **3.65.** El nudo $(0, 0)$. **3.66.** Un punto aislado $(0, 0)$. **3.67.** El punto de retroceso de primera especie $(1, 0)$. **3.68.** El punto de retroceso de segunda especie $(0, 0)$. **3.69.** El punto de autoadherencia (0, 0). **3.70.** (0, 0) es un punto aislado, si $a < 0$; un nudo, si $a > 0$; un punto de retroceso de primera especie, si $a = 0$. **3.71.** Un nudo (0, 0). **3.72.** El punto de retroceso de primera especie (0, 0). **3.73.** Un punto anguloso (0, 0). Muéstrese que $\lim\limits_{x\to+0} y' = 0$, $\lim\limits_{x\to-0} y' = 1$. **3.74.** El punto terminal (0, 1). Muéstrese que $\lim\limits_{x\to+0} y = 1$. **3.75.** $y = -x^2/4$. **3.76.** $x^2 + y^2 = p^2$. **3.77.** $x = \pm R$. **3.78.** No hay envolvente. **3.79.** $y = -\frac{4}{3}x^2$. **3.80.** $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$. **3.81.** $y^2 = -\frac{x^3}{x+2a}$. **3.82.** a) La curva discriminante $y = 1$ es una envolvente y constituye un conjunto de puntos de inflexión de la familia dada; b) la curva discriminante se descompone en las rectas: $y = x - \frac{4}{27}$ (la envolvente) e $y = x$ (el conjunto de puntos de retroceso de primera especie); c) la curva discriminante $y = 1$ es un conjunto de puntos de retroceso de primera especie y no es una envolvente; d) la curva discriminante se descompone en las rectas: $x = -a$ (la envolvente) y $x = 0$ (el conjunto de nudos).

4.1. a) 1 g, 0,0043%; b) 1 mm, 0,12%; c) 1′, 0,066%. **4.2.** 1) $\Delta =$ $= 0{,}002$ km, $\delta = 0{,}008\%$; 2) $\Delta = 30$ m², $\delta = 2\%$. **4.3.** La primera. **4.4.** a) 0,05, 0,14%; b) 0,005, 6,25%; **4.5.** 29,2 y 3,2. **4.6.** 1) 5,373, 0,0004, 0,0074%; 2) 5,73, 0,0026, 0,048%; 3) 5,4, 0,0274, 0,51%. **4.7.** $202\cdot10^{-1}$, $188\cdot10^{1}$, $600\cdot10^{3}$. **4.8.** a) Dos, $41\cdot10^{4}$; b) uno, $8\cdot10^{-2}$. **4.9.** No menos que con dos signos. **4.10.** No menos que con tres signos. **4.11.** —**4.15.** Hágase uso de la fórmula (1), § 4. **4.16.** 185,7. **4.17.** $1{,}3\cdot10^{2}$. **4.18.** 71,88. **4.19.** No se puede realizar la sustracción. **4.20.** 61,6. **4.21.** $512\cdot10$. **4.22.** 3,3. **4.23.** $3\cdot10$. **4.24.** $66\cdot10^{3}$. **4.25.** 7,397. **4.26.** $\leqslant 12\pi$ cm², $\leqslant 8{,}3\%$, **4.27.** $\approx 0{,}43\delta$. **4.29.** $\leqslant 0{,}17$ mm. **4.30.** $(2{,}7 \pm$ $\pm 0{,}1)$ g/cm³. **4.31.** De acuerdo con el principio de efecto igual, mídase R con el error relativo 0,25% y la altura H, con el error relativo 0,5%. **4.32.** 12″. **4.33.** 4. **4.34.** 4. **4.35.** De acuerdo con el principio de igual efecto, se puede tomar π con tres signos justos en el sentido estrecho, mídanse los radios con la exactitud de hasta 0,8 cm, y la directriz, con la exactitud de hasta 1,25 cm.

APÉNDICE

DESCRIPCIÓN BREVE DEL LENGUAJE FORTRAN-IV

El FORTRAN es un lenguaje algorítmico cómodo destinado para resolver diferentes problemas aplicados. La palabra «FORTRAN» está formada por las sílabas iniciales de dos palabras inglesas FORmula TRANslator (intérprete de fórmulas).

El programa en FORTRAN se anota, como regla, en un formulario especial y de una sucesión de operadores. Para cada operador se destina una línea aparte. La línea del formulario comprende 80 columnas (posiciones). En ausencia de formularios especiales, el programa FORTRAN se anota en un papel corriente tomando en consideración que cada línea debe comprender no más de 80 símbolos y observándose las exigencias que se exponen más abajo. El operador del FORTRAN ocupa las columnas del 7 al 72 inclusive. Las columnas desde la primera hasta la quinta inclusive se destinan para la marca del operador. La marca que representa un número entero sin signo alguno puede escribirse en cualesquiera de las cinco columnas citadas. Los blancos dentro de la marca si ignoran. Si falta lugar para el operador en una línea, puede continuarse en la otra. Los signos de las operaciones aritméticas no se repiten. La continuación de la anotación puede ocupar no más de 19 líneas, en cada una de las cuales se anota en la sexta columna un símbolo, distinto de 0 ó del blanco. Comúnmente se pone el número de la línea de continuación.

Anotación de los comentarios. El programa puede contener diferentes explicaciones que facilitan su lectura y asimilación. Los comentarios se pueden disponer en cualquier lugar del programa. En la primera posición de la línea del comentario se pone obligatoriamente la letra C. Para la anotación de los comentarios se puede utilizar cualquier símbolo del FORTRAN.

Las construcciones principales del lenguaje FORTRAN están constituidas por los *operadores*. Éstos se dividen en dos clases: directivos (ejecutables) y descriptivos (no ejecutables). Los operadores directivos indican las operaciones y el orden en que se ejecutan dichas operaciones. Los operadores descriptivos se utilizan para describir las magnitudes, indicar el tipo de éstas, su estructura, etc.

Símbolos principales. A título de letras para la anotación de los operadores se usan las letras mayúsculas del alfabeto latino: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z y las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La cifra 0 (cero) se tacha (∅) para distinguirla de la letra O. Los símbolos especiales son:

$+$, el signo de sumación,
$-$, el signo de sustracción,
$*$, el signo de multiplicación,
$/$, el signo de división,
. , el punto decimal,
, , la coma.
(, el paréntesis izquierdo (abrir paréntesis)
) , el paréntesis derecho (cerrar paréntesis).

Constantes y variables. Existen seis tipos de constantes: enteras, reales, complejas, lógicas, de símbolo, sexadecimales.

La constante entera (forma I) es un número cualquiera anotado sin punto decimal. El valor de una constante entera no puede sobrepasar de $2^{31} - 1 \approx 2 \cdot 10^9$.

La constante real (forma F) es un número cualquiera escrito con un punto decimal que divide las partes entera y fraccionaria del número. El número máximo de cifras en la forma F es igual a 7.

Forma exponencial de notación de un número real (forma E). En esta forma todo número consta de una constante entera o real y un exponente. La primera letra del exponente es siempre E, tras la cual sigue la constante entera (valor del exponente) formada por no más de dos cifras decimales con un signo o sin éste. El número de cifras de la mantisa no debe ser superior a 7.

Cuando hay necesidad de recurrir a una exactitud mayor, se emplea la constante de precisión doble (forma D). Se anota como un número con un punto decimal que contiene de 8 a 16 cifras significativas, o bien en la forma exponencial en la que en lugar de E se pone la letra D; la mantisa puede contener hasta 16 cifras significativas.

Las variables son unas magnitudes a las que se han asignado ciertas denominaciones, o sea nombres simbólicos. El nombre simbólico es un juego de letras o de letras y cifras; la cantidad de éstas en un juego varía de 1 a 6. El nombre siempre comienza con una letra. No se permite que en los nombres se empleen símbolos especiales o blancos.

Tipos de variables. El tipo de variables corresponde al tipo de datos que ellas describen. Las variables enteras describen números enteros, las variables reales describen números reales, etc. En el caso más sencillo para describir el tipo de las variables sirve el operador

$$\text{tipo } a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

donde el tipo es una de las palabras de servicio REAL (real), INTEGER (íntegro), DOUBLE PRECISION (precisión doble), LOGICAL (lógico); $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los nombres de las variables. Si el programa no contiene indicaciones explícitas acerca del tipo de variables, entonces las variables cuyos nombres comienzan por las letras I, J, K, L, M, N representan magnitudes enteras; todas las demás variables representan variables reales.

Variables con índices. La tabla es una sucesión ordenada de magnitudes (elementos de la tabla), denotada por un nombre simbólico único. Todo elemento de la tabla se determina mediante el nombre de la tabla y su posición en ésta última, es decir, mediante los valores de los índices. A título de nombre de la tabla puede servir cualquier nombre simbólico admisible. Los índices se encierran entre paréntesis. El número de índices lleva el nombre de dimensión de la tabla. El número de elementos en la tabla se denomina tamaño de la tabla. En calidad de índices se emplea cualquier expresión aritmética y las variables, tanto del tipo entero como real. En el caso de una expresión de tipo real se toma como índice su parte entera, es decir, se desecha la parte fraccionaria. Los índices de los elementos de una tabla siempre son mayores o iguales a 1.

Descripción de las tablas. Las tablas, que se usan en el programa han de ser obligatoriamente descritas. La descripción de las tablas se da al principio del programa y se dispone antes del primer operador directivo. Para describir la tabla sirve el operador DIMENSION cuya forma general es

$$\text{DIMENSION } a_1 (n_1, n_2, \ldots, n_i), \ldots, a_k (m_1, m_2, \ldots, m_k),$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son los nombres de las tablas. Las cotas superiores de variación de los índices están dadas por números positivos enteros, $1 \leqslant i \leqslant 7$, $1 \leqslant k \leqslant 7$. Los elementos de una tabla multidimensional se disponen en la memoria de destinación sucesivamente uno tras otro, de suerte que el primer índice cambia más rapidamente y el posterior, más lentamente.

Expresiones aritméticas. Las expresiones aritméticas en el FORTRAN son análogas a las expresiones algebraicas corrientes. En las expresiones aritméticas pueden figurar constantes, variables simples o con índices, funciones que se unen con ayuda de las operaciones aritméticas. Si en una expresión faltan los paréntesis, los cálculos se realizan de acuerdo con las reglas siguientes: al principio se realiza la elevación a potencia (el signo **), luego la multiplicación (el signo *) y división (el signo /) y después, la sumación y la sustracción. Si en una expresión se tienen paréntesis, entonces al principio se realizan los cálculos dentro de los paréntesis. Si la expresión contiene funciones, en primer lugar se calculan los argumentos de estas funciones y los valores correspondientes de las mismas. Las expresiones aritméticas pueden contener constantes, variables y funciones de diferentes tipos. Previamente a la ejecución de una operación las variables se reducen a un mismo tipo, razón por la cual con el fin de disminuir el tiempo gastado para realizar la operación, no se recomienda que se mezclen las variables de diferentes tipos en una expresión (la notación Y + 5. es preferible en comparación con la notación Y + 5).

Operadores descriptivos principales del FORTRAN. Algunos de los operadores descriptivos se han examinado más arriba. Nos detendremos en otros operadores que se encuentran con frecuencia.

El operador EQUIVALENCE se anota en la forma

$$\text{EQUIVALENCE } (a, b, c, \ldots), \ldots, (d, e, f, \ldots),$$

donde a, b, c, . . ., d, e, f, . . . son variables, simples o con índices. El sentido del operador dado consiste en que los valores, que corresponden a a, b, c, . . ., se disponen en una célula y los correspondientes a d, e, f, . . . están también todos en una célula. Las variables a cotejar deben ser de igual longitud. Hay que tener en cuenta que al cotejar los elementos sueltos de las tablas, se someten al cotejo todos los demás elementos de las dos tablas.

El operador COMMON se anota en la forma COMMON A, B, C, . . ., donde A, B, C son los nombres de las variables con índices o sin ellos. La zona COMMON es especial y está destinada para guardar los datos comunes para dos o varios subprogramas o bien datos comunes para el programa principal y sus subprogramas. En el FORTRAN-IV la zona COMMON puede dividirse en varios bloques. La estructura de la notación del operador COMMON, con la utilización de los bloques, es la siguiente:

COMMON (nombre del bloque) a_1, a_2 . . .

El operador FUNCTION tiene la siguiente forma

FUNCTION nombre (argumento$_1$, . . ., argumento$_n$).

El operador dado constituye el título del subprograma. Los argumentos en el operador son ficticios e intervienen sólo en la descripción del método empleado para calcular las funciones. Como argumentos pueden figurar las variables sin índices, las tablas o los nombres de las funciones. En el interior del subprograma debe encontrarse, aunque sea una sola vez, un operador que tiene el nombre de función subprograma en el miembro derecho del operador de asignación. El último operador directivo de la función subprograma debe ser el operador RETURN. Éste asegura el retorno del mando al programa principal. END debe ser el último operador del subprograma. Al referirse a la función subprograma debe haber una correspondencia entre los tipos y la cantidad de variables verdaderas y formales.

El operador SUBROUTINE tiene la forma

SUBROUTINE nombre (argumento$_1$, argumento$_2$, . . ., argumento$_n$).

El operador constituye el título del subprograma SUBROUTINE. Este subprograma se emplea cuando es necesario obtener varios resultados. Las variables, cuyos valores se calculan, se indican en la lista de argumentos. La función subprograma considerada anteriormente nos proporciona explícitamente un solo resultado. El subprograma SUBROUTINE es individual y sus variables están localizadas sólo en este subprograma, en lo que toca a la región de su acción. En el programa principal la referencia al subprograma SUBROUTINE se realiza con ayuda del operador

CALL nombre (argumento$_1$, . . ., argumento$_n$).

Aquí la sucesión argumento$_1$, . . ., argumento$_n$ representa los parámetros verdaderos de entrada y de salida. A título de argumento del subprograma puede figurar el nombre de cualquier subprograma. En este caso el programa principal debe incluir el operador descriptivo

EXTERNAL nombre$_1$, nombre$_2$, . . .

Tanto en la función subprograma como en el subprograma SUBROUTINE, al emplear a título de parámetro formal el nombre de tabla, éste se debe describir con ayuda del operador DIMENSION. Se admiten emplear como cotas de variación de los índices las variables enteras, a la par con las constantes enteras. Dichas variables han de incluirse forzosamente en el número de argumentos formales. El subprograma SUBROUTINE debe contener al menos un operador RETURN. El subprograma termina en operador END que significa el fin del subprograma SUBROUTINE.

La introducción y la retirada de la información en el FORTRAN se realiza bajo el mando del operador FORMAT. A la entrada éste indica en qué posiciones (columnas) deben leerse los datos para las variables enumeradas en la lista e/s (entrada/salida) y en qué formato. La estructura de la lista e/s la volveremos a considerar más abajo. A la salida el operador FORMAT señala a qué posiciones y en qué formato se realiza la retirada. La forma de representación de una variable o de un número y del campo, del cual debe tomarse la lectura a la entrada (o en el que deben imprimirse a la salida), se determinan por la especificación del formato del operador FORMAT. En los casos más sencillos el número de espesificaciones del formato en el operador FORMAT ha de corresponder al número de variables en la lista e/s. El operador FORMAT se escribe en la forma

$$\text{marca FORMAT } (S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

donde la marca es un número entero sin signo, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son las especificaciones.

He aquí las especificaciones que se encuentran con mayor frecuencia. Para la introducción (retirada) de los datos numéricos sirven las especificaciones I_w, $F_{w.d}$, $E_{w.d}$; aquí w es el número total de posiciones que se destinan para el número dado (la cantidad total de cifras del número), d es el número de cifras decimales después del punto decimal. La longitud del campo d debe incluir las posiciones para el punto y el signo del número para la especificación de F, como también las posiciones para el signo del exponente, la letra E(D) y dos posiciones para el valor del exponente, en el caso de las especificaciones E, D. Durante la salida del número deben preverse en el formato E(D) cuatro posiciones para el exponente del número y, además, las posiciones para 0 entero, el punto y el signo de dicho número. A la salida ha de observarse la limitación $w - d \geqslant 7$. Al salir los datos en el caso de la especificación F, si el número retirado no cabe dentro de las posiciones destinadas, el campo correspondiente se llena por los asteriscos. Para la notación reiterada de varias especificaciones iguales se puede emplear sólo una de ellas anteponiéndole un número igual a la cantidad de repeticiones. Se pueden repetir los grupos de especificaciones encerrándolos entre paréntesis y anteponiendo al paréntesis un número entero igual a la cantidad de repeticiones de los grupos. Al salir para la imprenta un texto o algunos comentarios, se emplean las especificaciones del tipo H y las del tipo «literal». La especificación del formato del tipo H tiene la forma wH, donde w es el número de cualesquiera símbolos de letras y cifras, admisibles en el FORTRAN, que se disponen tras la letra H inmediatamente. Cuando se usa la especificación del tipo «literal», la información de letras y cifras debe encerrarse entre comillas. La ventaja de la especificación del tipo «literal» consiste en que en este caso no hay necesidad en indicar la cantidad de símbolos, mientras que al usar la especificación del tipo H esta indicación es obligatoria. Para dirigir la disposición de los datos en una línea, se usa, en el caso más simple, la especificación del tipo wX, donde w es el número de blancos que se emplean con el objeto de mejorar el carácter ilustrativo de los resultados en la salida.

El operador FORMAT puede disponerse en cualquier lugar del programa.

El operador FORMAT actúa recíprocamente con los operadores de la entrada—salida: el READ (leer) para la entrada y el WRITE (escribir) para la salida. La forma general de los operadores READ y WRITE es la siguiente:

READ (i, n1) lista

WRITE (i, n2) lista

Aquí i en el primer caso significa el número del dispositivo, del cual sale la información a leer, en el segundo caso determina el impresor de sistema, n1 es la marca del operador FORMAT. En los sistemas de operación de disco el operador READ para la introducción de la información proveniente de la tarjeta perforada tiene, como regla, la forma READ(1, n1) lista, y el operador WRITE: WRITE(3, n2) lista, respectivamente. La lista e/s tiene la forma $a_1, a_2, \ldots, a_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los elementos de la lista. Como elementos de la lista pueden figurar: las variables (simples o con índices), los nombres de las tablas, la forma de DO implícito. Esta última se utiliza con una frecuencia particular cuando es necesario grabar en la memoria o hacer salir para el impresor cierta parte de la tabla, como también para organizar la salida de la tabla en líneas. La forma de DO implícito se encierra entre paréntesis. Entre paréntesis se disponen las variables con índices o las formas de DO implícito separadas mediante comas, si hay varias. Tras la última variable se anotan los parámetros de índice $i = m_1, m_2, m_3$, donde i es el índice, m_1, m_2, m_3 son las cotas inferior y superior y el paso de variación del índice, respectivamente. Si $m_3 = 1$, el paso no se indica.

Al perforar la información, para el operador READ se emplean todas las 80 columnas (posiciones) de la tarjeta, las que determinan la anotación a la entrada. La anotación a la salida no debe sobrepasar de 120 símbolos en la línea del impresor de sistema. Para sacar la información para el impresor puede utilizarse el operador PRINT n2 lista.

Operadores directivos principales del FORTRAN. El operador aritmético de asignación tiene la forma

variable = expresión

Aquí el signo = se diferencia del signo algebraico corriente de igualdad. Este signo tiene el sentido «sustituir por . . . », es decir, se calcula el valor de la expresión aritmética que se encuentra en el miembro derecho y la magnitud obtenida se convierte en el nuevo valor corriente de la variable que está a la izquierda del signo de igualdad. Por esto, por ejemplo, resulta admisible la notación I = I + 1; ésta implica el aumento del valor de la variable entera I en una unidad.

Todos los operadores del programa escrito en FORTRAN se ejecutan sucesivamente, siempre que no haya entre ellos operadores especiales que dirigen la sucesión de ejecución de los operadores. Éstos son los operadores que siguen:

El operador GO TO n asegura la transmisión incondicional de mando al operador con la marca n. En el programa no deben haber operadores que tengan marcas iguales. El operador marcado puede disponerse en cualquier lugar del programa.