## PROBLEMAS ACERCA DEL TRABAJO

### Los cavadores

Cinco cavadores en cinco horas cavan 5 m de zanja. ¿Cuántos cavadores serán necesarios para cavar en 100 horas 100 m de zanja?

### Los aserradores

Unos aserradores sierran un tronco en trozos de a metro. El tronco tiene 5 m de longitud. El aserrado transversal del tronco requiere cada vez $1^{1}/_{2}$ minutos. ¿En cuántos minutos aserrarán todo el tronco?

### El carpintero y los armadores

Una brigada de seis armadores y un carpintero se contrató para realizar un trabajo. Cada armador ganaba 20 rublos y el carpintero, 3 rublos más que el salario medio de cada uno de los siete miembros de la brigada.

¿Cuánto ganaba el carpintero?

### Cinco trozos de cadona

A un herrero le trajeron cinco cadenas de tres eslabones

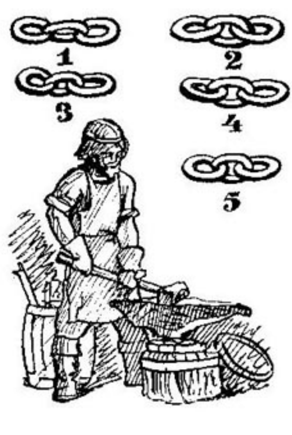



*Figura 204*

cada una —representadas aquí, en la fig. 204— y le encargaron que las uniera formando una sola cadena. Antes de comenzar el trabajo, el herrero se dio a pensar cuántos eslabones tendría que abrir y volver a soldar. Llegó a la conclusión de que tendría que abrir y soldar de nuevo cuatro eslabones.

¿No sería posible realizar este trabajo abriendo menos eslabones?

### ¿Cuántos vehículos?

En un taller fueron reparados durante un mes 40 vehículos, entre automóviles y motocicletas. El número total de ruedas de los vehículos reparados fue de 100 exactamente. ¿Cuántos automóviles y cuántas motocicletas se repararon?

### La monda de patatas

Dos personas mondaron 400 patatas; una de ellas mondaba tres patatas por minuto, la otra, dos. La segunda trabajó 25 minutos más que la primera.
¿Cuánto tiempo trabajó cada una?

### Los dos obreros

Dos obreros pueden hacer un trabajo en siete días, si el segundo empieza a trabajar dos días después que el primero. Si este mismo trabajo lo hiciera separadamente cada obrero, el primero tardaría cuatro días más que el segundo.

¿En cuántos días podría hacer todo el trabajo cada uno de los obreros por separado?

Este problema puede resolverse por procedimientos puramente aritméticos, incluso sin recurrir a operaciones con quebrados.

### La copia del discurso

La copia a máquina de un discurso se ha encomendado a dos mecanógrafas. La mecanógrafa más ducha podría hacer todo el trabajo en 2 horas, la de menos experiencia, en 3 horas.

¿En cuánto tiempo copiarán el discurso, si el trabajo se distribuye entre ellas de modo que lo hagan en el menor tiempo posible?

Los problemas de este tipo pueden resolverse siguiendo el modelo de los célebres problemas relacionados con depósitos de agua, a saber: en nuestro caso se halla qué fracción del trabajo realiza en una hora cada mecanógrafa; después, se suman los dos quebrados y se divide la unidad por esta suma.

¿Puede usted proponer otro procedimiento para resolver estos problemas, distinto del estereotipado?

### ¿Cómo pesar la harina?

Al gerente de un almacén le fue necesario pesar cinco sacos de harina. En el almacén había una báscula, pero faltaban algunas pesas y era imposible hacer pesadas entre 50 y 100 kg. Los sacos pesaban alrededor de 50—60 kg cada uno.

El gerente no se desconcertó, sino que empezó a pesar los sacos de dos en dos. Con cinco sacos se pueden formar 10 pares distintos; por lo tanto hubo que hacer 10 pesadas. Resultó una serie de números, que reproducimos a continuación en orden creciente:

110 kg, 112 kg, 113 kg, 114 kg, 115 kg,

116 kg, 117 kg, 118 kg, 120 kg, 121 kg.

¿Cuánto pesa cada saco por separado?

210-211

SOLUCIONES

### Los cavadores

En este problema es fácil picar en el anzuelo: puede pensarse que si cinco cavadores en 5 horas cavan 5 m de zanja, para cavar 100 m en 100 horas hacen falta 100 hombres. Sin embargo, este razonamiento es completamente falso: se necesitan los mismos cinco cavadores, y nada más.

En efecto, cinco cavadores en cinco horas cavan 5 m; por lo tanto, cinco cavadores en 1 hora cavarían 1 m, y en 100 horas, 100 m.

### Los aserradores

Con frecuencia responden que en $1^1/_2 \times 5$, es decir, en $7^1/_2$ minutos. Al hacer esto se olvidan que el último corte da *dos* trozos de a metro. Por consiguiente, al tronco de 5 metros hay que darle no cinco cortes tranversales, sino solamente cuatro; en esto se tardará en total $1^1/_2 \times 4 = 6$ minutos.

### El carpintero y los armadores

El salario medio de cada miembro de la brigada es fácil de hallar; para esto hay que dividir los 3 rublos de más, en partes iguales, entre los seis armadores. A los 20 rublos de cada uno hay que añadir, pues, 50 copeikas[1]); éste será el salario medio de cada uno de los siete.

De esto deducimos que el carpintero ganaba 20 rublos con 50 copeikas + 3 rublos, es decir, 23 rublos con 50 copeikas.

### Cinco trozos de cadena

Basta abrir los *tres eslabones* de uno de los trozos y unir con ellos los extremos de los otros cuatro.

### ¿Cuántos vehículos?

Si todos los vehículos hubieran sido motocicleta, el número total de ruedas sería 80, es decir, 20 menos que en realidad. La sustitución de una motocicleta por un automóvil hace que el número total de ruedas aumente en dos, es decir, la diferencia disminuye en dos. Es evidente que hay que hacer diez sustituciones de este tipo para que la diferencia se reduzca a cero. Por lo tanto, se repararon 10 automóviles y 30 motocicletas.

En efecto, $10 \times 4 + 30 \times 2 = 100$.

### La monda de patatas

En los 25 minutos de más, la segunda persona mondó $2 \times 25 = 50$ patatas. Restando estas 50 patatas de las 400, hallamos que, trabajando el mismo tiempo, las dos mondaron 350 papatas. Como cada minuto ambas mondan en común $2 + 3 = 5$ patatas, dividiendo 350 por 5, hallamos que cada una trabajó 70 minutos.

Este es el tiempo real que trabajó la primera persona; la segunda trabajó $70 + 25 = 95$ minutos. Efectivamente, $3 \times 70 + 2 \times 95 = 400$.

[1] El rublo tiene 100 copeikas. (*N. del Tr.*)

## Los dos obreros

Si cada uno hiciera la mitad del trabajo por separado, el primero tardaría dos días más que el segundo (porque en hacer *todo* el trabajo tardaría cuatro días más). Como quiera que cuando hacen todo el trabajo juntos existe una diferencia de dos días, es evidente que, en siete días, el primero hace excatamente la mitad del trabajo; el segundo hace su mitad en cinco días. Por lo tanto, el primero podría hacer, él solo, todo el trabajo en 14 días, y el segundo, en 10 días.

## La copia del discurso

La vía no estereotipada de solución de estos problemas es la siguiente. En primer lugar hay que preguntarse: ¿cómo deben repartirse el trabajo las mecanógrafas, para terminar al mismo tiempo? (Porque es evidente que sólo si se cumple esta condición es decir, si ninguna se queda sin trabajo, podrán tardar el menos tiempo posible). Como la mecanógrafa más experta escribe $1^1/_2$ veces más de prisa que la otra, está claro que la parte que haga la primera deberá ser $1^1/_2$ veces mayor que la que haga la segunda, y entonces terminarán de escribir al mismo tiempo. De esto se deduce que la primera deberá encargarse de escribir $^3/_5$ partes del discurso, y la segunda, de $^2/_5$ partes.

Con esto el problema ya está casi resuelto. Queda por saber cuánto tiempo tardará la primera mecanógrafa en hacer sus $^3/_5$ partes del trabajo. Como sabemos, todo el trabajo puede hacerlo en 2 horas; por lo tanto, las $^3/_5$ partes quedarán hechas en $2 \times {}^3/_5 = 1^1/_5$ horas. En este mismo tiempo deberá hacer su trabajo la segunda mecanógrafa.

Así, pues, el tiempo mínimo en que puede ser copiado el discurso por las dos mecanógrafas es igual a 1 hora y 12 minutos.

## ¿Cómo pesar la harina?

El gerente comenzó por sumar los 10 números. La suma obtenida —1156 kg— no era ni más ni menos que el peso cuadruplicado de los sacos, porque el peso de cada saco entra en esta suma cuatro veces. Dividiendo por cuatro hallamos que los cinco sacos pesan 289 kg.

Ahora, por comodidad, designaremos los sacos, en el orden de sus pesos, por números. El más liviano será el Nº 1, el segundo en peso, el Nº 2 y así sucesivamente; el más pesado será el Nº 5. No es difícil imaginarse que en la serie de números 110 kg, 112 kg, 113 kg, 114 kg, 115 kg, 116 kg, 117 kg, 118 kg, 120 kg y 121 kg, el primer número está compuesto por los pesos de los dos sacos más ligeros: el Nº 1 y el Nº 2; el segundo número por los pesos del Nº 1 y del Nº 3; el último número (121), por los de los dos sacos más pesados, es decir, por los del Nº 4 y Nº 5; y el penúltimo número, por los de los sacos Nº 3 y Nº 5. Así, pues:

| | | | |
|---|---|---|---|
| El Nº 1 y el Nº 2 | juntos | pesan | 110 kg |
| el Nº 1 y el Nº 3 | » | » | 112 » |
| el Nº 3 y el Nº 5 | » | » | 120 » |
| y el Nº 4 y el Nº 5 | » | » | 121 ». |

Por consiguiente, es fácil conocer lo que pesan en total los sacos Nº 1, Nº 2, Nº 4 y Nº 5: 110 kg + 121 kg = 231 kg. Restando esta cantidad del peso de todos los sacos (289 kg) se obtiene el peso del saco Nº 3, que es de 58 kg.

Después, de la suma de los pesos de los sacos Nº 1 y Nº 3, es decir, de 112 kg, restamos el peso del saco Nº 3, que ya conocemos; de esto resulta el peso del saco Nº 1, igual a 112 kg — 58 kg = 54 kg.

Del mismo modo hallamos lo que pesa el saco Nº 2, restando 54 kg de 110 kg, es decir, de la suma de los pesos de los sacos Nº 1 y Nº 2. Así obtenemos el peso del saco Nº 2, igual a 110 kg — 54 kg = 56 kg.

De la suma de los pesos de los sacos Nº 3 y Nº 5, es decir, de 120 kg, restamos lo que pesa el saco Nº 3, o sea, 58 kg, y encontramos que el saco Nº 5 pesa 120 kg — 58 kg= = 62 kg.

Nos queda por determinar el peso del saco Nº 4, conociendo la suma de los pesos de los Nº 4 y Nº 5 (121 kg). Restando 62 de 121, hallamos que el saco Nº 4 pesa **59 kg.**

Por lo tanto, los pesos de los sacos son:

54 kg, 56 kg, 58 kg, 59 kg, y 62 kg.

Hemos resuelto el problema sin recurrir a ecuaciones.

# PROBLEMAS ACERCA DE COMPRAS Y PRECIOS

### ¿Cuánto cuestan los limones?

Tres docenas de limones cuestan tantos rublos como limones dan por 16 rublos.

¿Cuánto vale la docena de limones?

### El impermeable, el sombrero y los chanclos

Un individuo compró un impermeable, un sombrero y unos chanclos por 140 rublos. El impermeable vale 90 rublos más que el sombrero, y el sombrero y el impermeable juntos cuestan 120 rublos más que los chanclos.

¿Cuánto cuesta cada cosa por separado?

Este problema debe resolverse de memoria y sin ecuaciones.

### Las compras

Cuando salí de compras llevaba en el portamonedas cerca de 15 rublos sueltos y en monedas de 20 copeikas. Cuando volví traía tantos rublos sueltos como monedas de 20 copeikas llevaba cuando salí, y tantas monedas de 20 copeikas como rublos sueltos tenía antes. En total me quedó la tercera parte de la suma que cogí al salir.

¿Cuánto gasté en las compras?

### Las compra de frutas

Por cinco rublos se han comprado 100 frutas distintas. Los precios de las frutas son los siguientes: las sandías a 50 copeikas cada una, las manzanas a 10 copeikas cada una y las ciruelas a 10 copeikas la decena.

¿Cuántas frutas de cada tipo se han comprado?

### Encarecimiento y abaratamiento

Una mercancia encareció en un 10% y luego se abarató en un 10%.

¿Cuándo era más barata, antes de encarecerla o después de abaratarla?

### Los barriles

A un almacén llevaron seis barriles de kvas[1]). La fig. 205 indica cuántos litros había en cada barril. El primer día se presentaron dos clientes: uno compró

---

[1]) Bebida refrescante rusa.

dos barriles y el otro, tres, con la particularidad de que el primero compró dos veces menos kvas que el segundo. No hubo que destapar ni un solo barril.


*Figura 205*

De los seis barriles sólo quedó uno en el almacén. ¿Cuál?

### La venta de huevos

Este viejo problema popular parece, a primera vista, absurdo por completo, ya que en él se habla de la venta de medio huevo. Sin embargo, puede resolverse perfectamente.

Una campesina llegó al mercado a vender huevos. La primera clienta le compró la mitad de todos los huevos más medio huevo. La segunda clienta adquirió la mitad de los huevos que le quedaban más medio huevo. La tercera clienta sólo compró un huevo. Con esto terminó la venta, porque la campesina no tenía más huevos.

¿Cuántos huevos trajo al mercado?

### El problema de Benedíktov

Muchos aficionados a la literatura rusa no sospechan que el poeta V. Benedíktov[1]) es autor del primer libro de acertijos matemáticos en lengua rusa. Este libro

[1]) Vladímir Grigórievich Benedíktov (5.11.1807-14.4.1873). (*N. del Tr.*)

no fue publicado; quedó en forma de manuscrito y no se encontró hasta el año 1924. Yo tuve ocasión de conocer este manuscrito e incluso, basándome en uno de sus acertijos, determiné el año en que fue compuesto: el de 1869 (que en dicho manuscrito no figura). El problema que proponemos a continuación, planteado por el poeta en forma literaria, está tomado de este libro. Se titula «Solución ingeniosa de un problema difícil».

«Una recovera, que disponía de nueve decenas de huevos para vender, mandó sus tres hijas al mercado y ella confió a la mayor y más lista de ellas una decena, a la segunda, tres decenas, y a la tercera medio ciento. Cuando se iban les dijo:

—Poneos de acuerdo antes sobre el precio a que los vais a vender y no hagáis rebajas; mantened todas el mismo precio; pero yo espero que mi hija mayor, como es más despierta, sabrá sacarle a su decena tanto como la segunda a sus tres, y, además, le enseñará a ésta a sacar por sus tres decenas tanto como la hermana menor por su medio ciento. Dejad que las ganancias y los precios sean iguales para las tres. Sin embargo, yo quisiera que vendierais todos los huevos de forma que redondeando resultaran a no menos de 10 copeikas la decena, y por las nueve decenas, no menos de 90 copeikas».

Aquí interrumpo la narración de Benedíktov, para dar al lector la posibilidad de acertar por su cuenta cómo cumplieron las hijas el encargo de la madre.

## ¿Cuánto cuestan los limones?

Sabemos que 36 limones cuestan tantos rublos como limones dan por 16 rublos. Pero 36 limones valdrán

$$36 \times (\text{el precio de uno})$$

Y por 16 rublos dan

$$\frac{16}{\text{el precio de uno}}.$$

Por lo tanto,

$$36 \times (\text{el precio de uno}) = \frac{16}{\text{el precio de uno}}.$$

Si el segundo miembro no se dividiera por el precio de uno, el primer miembro resultaría ser mayor en una cantidad dos veces igual al precio de uno, es decir, a 16:

$$36 \times (\text{el precio de uno}) \times (\text{el precio de uno}) = 16.$$

Si el primer miembro no se multiplicara por 36, el segundo miembro resultaría disminuido en 36 veces:

$$(\text{el precio de uno}) \times (\text{el precio de uno}) = {}^{16}/_{36}.$$

Está claro que el precio de un limón es igual a ${}^{4}/_{6} = {}^{2}/_{3}$ rublos, y el precio de la docena de limones será ${}^{2}/_{3} \times 12 = 8$ rublos.

## El impermeable, el sombrero y los chanclos

Si en vez del impermeable, el sombrero y los chanclos sólo hubiera comprado dos pares de chanclos, hubiese tenido que pagar no 140 rublos, sino tantos rublos menos como los chanclos son más baratos que el impermeable y el sombero, es decir, 120 rublos menos. Por consiguiente, sabemos que dos pares de chanclos valen $140 - 120 = 20$ rublos, de donde un par costará 10 rublos.

Ahora podemos deducir que el impermeable y el sombrero juntos valen $140 - 10 = 130$ rublos. Pero el impermeable cuesta 90 rublos más que el sombrero. Volvemos a razonar como antes: en vez del impermeable y el sombrero, se compran dos sobreros. En este caso habrá que pagar no 130 rublos, sino 90 rublos menos. Por lo tanto, dos sombreros valen $130 - 90 = 40$ rublos, de donde el precio de un sombrero será 20 rublos.

Así, pues, los precios de las prendas compradas son: el de los chanclos 10 rublos, el del sombrero, 20 rublos; y el del impermeable, 110 rublos.

## Las compras

Llamemos $x$ al número inicial de rublos sueltos e $y$ al número de monedas de 20 copeikas. Entonces, cuando salí de compras llevaba en el portamonedas

$$(100x + 20y) \text{ copeikas.}$$

Cuando volví tenía

$$(100y + 20x) \text{ copeikas.}$$

Sabemos que la última suma es tres veces menor que la primera; por lo tanto

$$3\,(100y + 20x) = 100x + 20y.$$

Simplificando esta expresión, obtenemos:

$$x = 7y.$$

Si $y = 1$, $x = 7$. Partiendo de esta suposición, yo tenía al principio 7 rublos y 20 copeikas; esto no está de acuerdo con la condición del problema («cerca de 15 rublos»).

Hagamos $y = 2$; entonces $x = 14$. En este caso la suma inicial sería igual a 14 rublos y 40 copeikas, lo que concuerda bien con la condición antedicha.

Si se supone $y = 3$, resulta una suma demasiado grande: 21 rublos y 60 copeikas.

Por consiguiente, la única respuesta adecuada es 14 rublos y 40 copeikas. Después de las compras quedaron 2 rublos sueltos y 14 monedas de 20 copeikas, es decir, $200 + 280 = 480$ copeikas; lo que compone, efectivamente, la tercera parte de la suma inicial ($1440 : 3 = 480$).

Se gastaron $1440 - 480 = 960$ copeikas, es decir, el precio de las compras es 9 rublos y 60 copeikas.

## La compra de frutas

A pesar de la aparente indeterminación, el problema sólo tiene una solución. Es esta:

| | | Cantidad | Precio | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Sandías | | 1 | | | 50 copeikas |
| Manzanas | | 39 | 3 rublos | y | 90 copeikas |
| Ciruelas | | 60 | | | 60 copeikas |
| | *Total* | 100 | 5 rublos | y | 00 copeikas |

## Encarecimiento y abaratamiento

Es un error considerar que el precio será el mismo en ambos casos. Hagamos los cálculos correspondientes. Después de encarecer, la mercancía costaba el 110%, o sea, el 1,1 del precio inicial. Después de abaratarla, su precio constituía el

$$1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99,$$

es decir, el 99% del inicial. Por consiguiente, después de la rebaja, la mercancía resultó un 1 % más barata que antes de la subida del precio.

## Los barriles

El primer cliente compró un barril de 15 litros y otro de 18. El segundo, uno de 16 litros, otro de 19 y otro de 31.

En efecto,

$$15 + 18 = 33.$$
$$16 + 19 + 31 = 66,$$

es decir, el segundo cliente compró dos veces más kvas que el primero.

Quedó por vender el barril de 20 litros.

Esta es la única respuesta posible. Otras combinaciones no dan la correlación que se requiere.

### La venta de huevos

El problema se resuelve partiendo del final. Después de que la segunda clienta adquirió la mitad de los huevos que quedaban más medio huevo, a la campesina sólo le quedó un huevo. Es decir, $1^1/_2$ huevos constituyen la segunda mitad de lo que quedó después de la primera venta. Está claro que el resto completo eran tres huevos. Añadiendo $^1/_2$ huevo, obtenemos la mitad de los que tenía la campesina al principio. Así, pues, el número de huevos que trajo al mercado era siete.

Hagamos la comprobación:

$$7:2=3\frac{1}{2};\quad 3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4;\quad 7-4=3$$

$$3:2=1\frac{1}{2};\quad 1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2;\quad 3-2=1,$$

lo que está en pleno acuerdo con la condición del problema.

### El problema de Benedíktov

Reproducimos la terminación de la narración, que interrumpimos, de Benedíktov.

«El problema era difícil. Las hijas, mientras iban al mercado, empezaron a cambiar impresiones, pero la segunda y tercera recurrían al talento y consejo de la mayor. Esta, después de pensar, dijo:

—Hermanas, vamos a vender los huevos no por decenas, como es costumbre hasta ahora, sino por septenas: siete huevos son una septena. A cada septena le ponemos un precio que mantendremos firmemente, como ha dicho la madre. Al precio fijado no se le rebaja ni una copeika, ¿entendido? Por la primera septema pediremos un altín[1]), ¿de acuerdo?

—Demasiado barato —dijo la segunda.

—Pero en cambio —replicó la mayor—, elevaremos el precio en los huevos que nos queden en los cestos después de vender las septenas completas. Yo ya he visto que en el mercado, además de nosotras, nadie vende huevos. No hay quien compita con nosotras. Cuando hay demanda y las mercancías se acaban, el precio de las que quedan sube. Por eso, nosotras nos resarciremos en los huevos que queden.

—¿Y a cuánto vamos a vender los restantes? —preguntó la más joven.

—A 3 altines cada huevo. Si quieren, bien, y si no, nada. A quien le hagan mucha falta, los pagará.

—Eso es caro —advirtió otra vez la de en medio.

—¿Y qué? —prosiguió la mayor—, ¿no vendemos acaso, baratos los primeros huevos por septenas? Lo uno compensa lo otro.

Quedaron de acuerdo.

Llegaron al mercado. Cada una de las hermanas se sentó en su sitio, separada de las otras, y se puso a vender. El público, atraído por la baratura, se agolpó junto a la her-

[1]) Moneda, ya en desuso, que valía 3 copeikas.

mana menor, que tenía medio ciento de huevos, y le compró todos. A cada uno de los siete primeros clientes le vendió una septena, cobró 7 altines y le quedó en el cesto un huevo. La segunda hermana que tenía tres decenas, las vendió a cuatro compradoras, una septena a cada una, y le quedaron dos huevos en el cesto: cobró 4 altines. A la hermana mayor le compraron una septena, por 1 altín, y le quedaron tres huevos.

De improviso se presentó una cocinera, a quien su señora mandó para que comprara no menos de una decena de huevos, al precio que fuera. Acababan de llegar, para pasar un poco de tiempo con su madre, los hijos de la señora, que se pirraban por los huevos fritos. La cocinera corrió de una parte a otra por el mercado. Ya habían vendido todos los huevos. Solamente a tres recoveras les quedaban seis huevos en total: uno a una, dos a otra, y tres a la tercera.

La cocinera, como es natural, se acerca primero a la que tenía tres huevos (que era la hermana mayor, que había vendido su única septena por un altín) y le pregunta:

—¿Cuánto quieres por los tres huevos?

Y ella le responde:

—3 altines por cada uno.

—¡Qué dices!, ¿te has vuelto loca? —exclama la cocinera.

—Como quiera —le replica la otra—, más baratos no los doy. Son los últimos.

La cocinera se dirige a la que tenía dos huevos en el cesto.

—¿A cómo los vende?

—A 3 altines cada uno. Ese es el precio establecido. Se han vendido todos.

—Y este huevo, ¿cuánto vale? —le pregunta la cocinera a la hermana menor.

Y ésta le contesta:

—3 altines.

¿Que hacer? Tuvo que comprar los huevos a aquel precio exorbitante.

—Vengan acá todos los huevos que quedan.

Y la cocinera dio a la hermana mayor 9 altines por sus tres huevos, que con el altín que ya tenía formaron 10; a la segunda le pagó 6 altines por el par de huevos, que con los 4 que había cobrado antes por las cuatro septenas sumaron también 10 altines. La hermana menor recibió de la cocinera 3 altines por su único huevo, y juntándolos a los 7 que antes le reportó la venta de las 7 septenas, vio que, lo mismo que sus hermanas, tenía 10 altines.

Luego las hermanas regresaron a su casa, cada una le dio a la madre 10 altines y le contaron cómo habían vendido los huevos y cómo, manteniendo una condición común con respecto al precio, habían logrado cobrar lo mismo por una decena que por medio ciento.

La madre quedó muy satisfecha de que sus hijas hubieran cumplido su encargo al pie de la letra y de la ingeniosidad de la mayor, que les había aconsejado lo que tenían que hacer para cumplirlo; y aún fue mayor su alegría por el hecho de que el dinero recaudado por sus tres hijas —30 altines, o 90 copeikas— fuera el que ella quería».

* * *

Al lector quizá le interese conocer en qué consiste el manuscrito no publicado de V. Benedíktov, del que hemos copiado el problema anterior. La obra de Benedíktov carece de título, pero de su carácter y destino se habla con detenimiento en el prólogo del libro.

«El cálculo aritmético puede aplicarse a diversos pasatiempos, juegos, bromas, etc. Muchos de los llamados *trucos* (subrayado en el original. —*Ya. P.*) se basan en cálculos numéricos, realizados a veces por medio de naipes, en los que se toma en consideración el número de los propios naipes o el número de puntos que se adjudican a unos u otros o ambas cosas a la vez. Algunos problemas, en cuya resolución deben figurar los números más enormes, representan hechos curiosos y dan una idea de estos números que superan todo lo imaginable. Nosotros los incluimos en esta parte adicional de la aritmética. Algunos problemas requieren para su resolución una inteligencia extraordinariamente despierta y pueden resolverse aunque a primera vista parezcan completamente absurdos y contradictorios del sentido común, por ejemplo, el que insertamos aquí bajo el título: «Venta ingeniosa de huevos». La parte práctica, aplicada, de la aritmética requiere a veces no sólo saber las reglas teóricas que se exponen en la aritmética pura, sino también agudeza, que se adquiere por medio del desarrollo mental que reporta el conocimiento de las diversas facetas de las cosas serias y de simples entretenimientos, que por esto hemos creído conveniente que tengan aquí su puesto».

El libro de Benedíktov está dividido en 20 capítulos cortos, no numerados, pero sí titulados cada uno. Los primeros capítulos llevan los títulos siguientes: «Los llamados cuadrados mágicos», «Adivinación de un número pensado desde 1 hasta 30», «Adivinación de sumas distribuidas en secreto», «La cifra pensada en secreto, se descubre por sí sola», «Conocimiento de una cifra tachada», etc. Sigue a continuación una serie de trucos con naipes, de carácter aritmético. Después de ellos va un capítulo curioso: «El caudillo hechicero y el ejército aritmético», donde la multiplicación con los dedos se presenta en forma de anécdota; luego se encuentra el problema que reproducimos antes, acerca de la venta de huevos. El penúltimo capítulo —«La falta de granos de trigo para llenar las 64 casillas del tablero de ajedrez»— cuenta la conocida leyenda antigua sobre la invención del juego del ajedrez.

Finalmente, el capítulo 20, «El número enorme de los habitantes que han vivido en la Tierra», contiene un intento interesante de calcular el número total de la población de la Tierra desde que existe la humanidad (un análisis detallado del cálculo de Benedíktov fue hecho por mí en el libro «Algebra recreativa»).

# EL PESO Y LA PESADA

### Un millón de objetos

Un objeto pesa 89,4 g. Calcule mentalmente cuántas toneladas pesará un millón de estos objetos.

### La miel y el keroseno

Un tarro de miel pesa 500 g. Este mismo tarro lleno de keroseno pesa 350 g. El keroseno es dos veces más ligero que la miel.

¿Cuánto pesa el tarro?

### El peso del tronco

Un tronco redondo pesa 30 kg.

¿Cuánto pesaría si fuera el doble de grueso y la mitad de largo?

### Debajo del agua

En una balanza ordinaria hay: en un platillo, un canto que pesa 2 kg exactos, y en el otro, una pesa de hierro de 2 kg. Yo sumergí con precaución este peso en agua.

¿Siguen los platillos en equilibrio?

### La balanza decimal

100 kg de clavos de hierro se equilibran en una balanza decimal, con pesas también de hierro, y la balanza se hunde en agua.

¿Se conserva el equilibrio debajo del agua?

### Un trozo de jabón

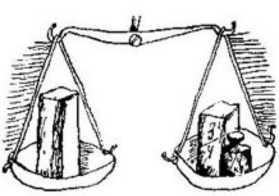


*Figura 206*

En un platillo de una balanza se ha puesto un trozo de jabón, en el otro, $^3/_4$ partes de un trozo de jabón igual, y, además, una pesa de $^3/_4$ de kg. La balanza está en equilibrio.

¿Cuánto pesa el trozo entero de jabón?

Este problema no es difícil. Procure resolverlo mentalmente, sin recurrir al lápiz y al papel.

### Las gatas y los gatitos

Por la fig. 207 puede ver que cuatro gatas y tres gatitos pesan 15 kg, y tres gatas y cuatro gatitos pesan 13 kg.

¿Cuánto pesa cada gata y cada gatito, por separado?

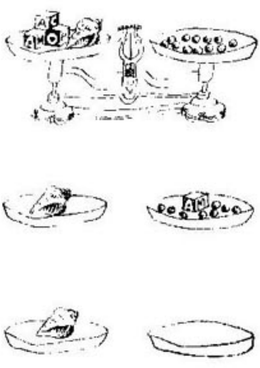


Figura 208

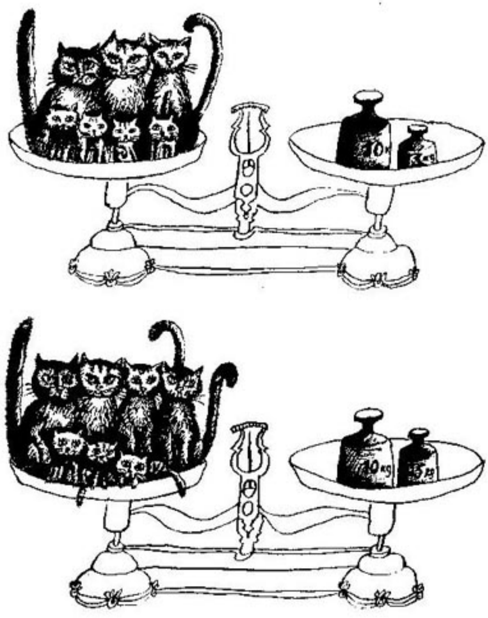


Figura 207

Se supone que todas las gatas pesan lo mismo y que los gatitos también son iguales.

Procure resolver este problema mentalmente.

Las conchas y las cuentas de vidrio

La fig. 208 representa cómo tres cubos de un rompecabezas infantil y una concha se equilibran con 12 cuentas de vidrio y que, después, la concha sola se equilibra con un cubo y ocho cuentas.

¿Cuántas cuentas de vidrio habrá que poner en el platillo libre de la balanza, para equilibrar la concha que está en el otro platillo?

### El peso de las frutas

Este es un problema del mismo tipo que el anterior. La fig. 209 muestra que tres manzanas y una pera

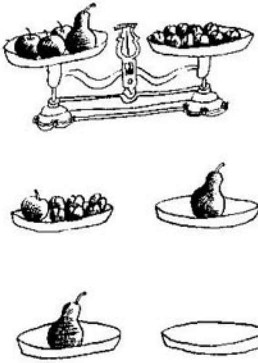


*Figura 209*

pesan lo mismo que 10 melocotones, y seis melocotones y una manzana pesan lo mismo que una pera.

¿Cuántos melocotones serán necesarios para equilibrar la pera?

### ¿Cuántos vasos?

En la fig. 210 puede ver que una botella y un vaso se equilibran con una jarra; la propia botella se equilibra con el vaso y un plato pequeño; y dos jarras se equilibran con tres platos iguales que el anterior.

¿Cuántos vasos hay que poner en el platillo libre de la balanza, para equilibrar la botella?

### Con una pesa y un martillo

Hay que distribuir 2 kg de azúcar molida en paquetes de 200 gramos. Sólo se dispone de una pesa de 500 gramos y de un martillo, que pesa 900 g.

¿Cómo conseguir los 10 paquetes de 200 g, utilizando únicamente esta pesa y el martillo?

### El problema de Arquímedes

El más antiguo de los acertijos relativos a pesadas es, sin duda, el que Hierón II, antiguo tirano de Siracusa, le planteó al célebre matemático Arquímedes.

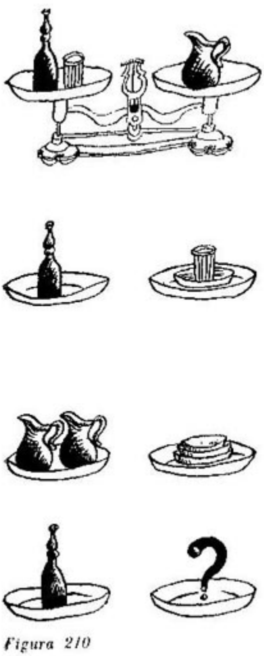


*Figura 210*

Dice la tradición que Hierón II encargó a un maestro orfebre que hiciera una corona para una estatua y ordenó que le entregasen la cantidad necesaria de oro y plata. Cuando le entregaron la corona acabada, la

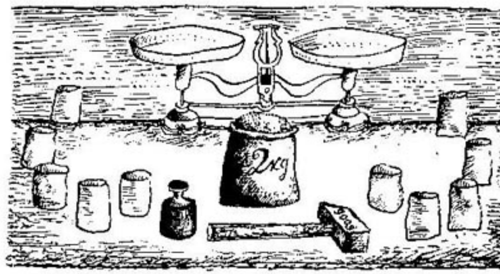



*Figura 211*

mandó pesar, y resultó que pesaba lo mismo que el oro y la plata juntos que había recibido el orfebre. Pero el tirano recibió una denuncia, según la cual el maestro se había quedado con parte del oro y lo había sustituido con plata. Hierón II llamó a Arquímedes y le propuso determinar las cantidades de oro y plata que había en la corona recién hecha.

Arquímedes resolvió este problema partiendo de que el oro puro pierde en el agua la vigésima parte de su peso, mientras que la plata sólo pierde la décima parte.

Si quiere usted probar sus fuerzas intentando resolver un problema análogo, suponga que al maestro orfebre le dieron 8 kg de oro y 2 kg de plata y que, cuando Arquímedes pesó la corona dentro del agua, pesó aquella no 10 kg, sino $9^{1}/_{4}$ kg. Determine con estos datos con cuánto oro se quedó el orfebre. Se supone que la corona es maciza.

15—0990

11

SOLUCIONES

## Un millón de objetos

Los cálculos de este tipo se hacen mentalmente así: hay que multiplicar 89,4 g. por un millón, es decir, por mil millares.

Multiplicamos en dos veces: 89,4 g $\times$ 1000 = 89,4 kg, porque el kilogramo es mil veces mayor que el gramo. Después, 89,4 kg $\times$ 1000 = 89,4 t, porque la tonelada es mil veces mayor que el kilogramo.

Por lo tanto, el peso buscado es 89,4 t.

## La miel y el keroseno

Como la miel es dos veces más pesada que el keroseno, la diferencia de peso 500 — 350, es decir, 150 g, es el peso del keroseno que cabe en el tarro (el tarro lleno de miel pesa lo mismo que pesaría si en él cupiera doble cantidad de keroseno). De aquí deducimos el peso neto del tarro: 350 — 150 = 200 g. En efecto, 500 — 200 = 300 g, es decir, la miel es dos veces más pesada que el mismo volumen de keroseno.

## El peso del tronco

Suelen responder que si el grosor del tronco se duplica, pero su longitud se reduce a la mitad, su peso no debe variar. Pero esto es un error. Cuando el diámetro se duplica, el volumen del tronco redondo *se cuadruplica*, mientras que cuando su longitud se hace la mitad, el volumen sólo disminuye hasta la *mitad*. Por esto el tronco grueso y corto deberá ser más pesado que el largo y delgado, es decir, deberá pesar 60 kg.

## Debajo del agua

Todo cuerpo, cuando se sumerge en agua, se hace más ligero: «pierde» en peso tanto como pesa el agua que desaloja. Conociendo este principio (descubierto por Arquímedes) podemos responder sin dificultad a la pregunta planteada en el problema.

El canto de 2 kg de peso ocupa un volumen mayor que la pesa de hierro de 2 kg, porque el material de aquél (granito) es más liviano que el hierro. De aquí se deduce que el canto desaloja más volumen de agua que la pesa, y, por el principio de Arquímedes, pierde dentro del agua más peso que la pesa. Así, pues, la balanza, dentro del agua, se inclinará hacia el lado de la pesa.

## La balanza decimal

Cuando se sumerge en agua un objeto de hierro (macizo), éste pierde la octava parte de su peso[1]). Por esto, las pesas pesarán debajo del agua $^7/_8$ de su peso inicial, los clavos también pesarán $^7/_8$ partes de su peso en seco. Y como las pesas eran 10 veces más ligeras que los clavos, debajo del agua también serán 10 veces más livianas y, por consiguiente, la balanza decimal seguirá en equilibrio debajo del agua.

[1]) Esta cifra no se da en las condiciones del problema, porque, para su resolución, no tiene importancia que la propia magnitud de la pérdida sea la octava, la décima o la vigésima parte del peso.

### Un trozo de jabón

$^3/_4$ partes del trozo de jabón + $^3/_4$ de kg pesan tanto como el trozo entero. Pero este trozo entero contiene $^3/_4$ partes del trozo + $^1/_4$ parte del mismo. Por consiguiente, $^1/_4$ parte del trozo pesa $^3/_4$ de kg, y el trozo entero pesa cuatro veces más que $^3/_4$ de kg, es decir, 3 kg.

### Las gatas y los gatitos

Comparando ambas pesadas se ve fácilmente que, con la sustitución de una gata por un gatito, el peso total disminuye en 2 kg. De aquí se deduce que la gata pesa 2 kg más que el gatito. Conociendo esto, sustituimos en la primera pesada las cuatro gatas por gatitos: tendremos entonces $4 + 3 = 7$ gatitos, que pesarán no 15 kg, sino $2 \times 4$, o sea, 8 kg menos. Es decir, los 7 gatitos pesarán $15 - 8 = 7$ kg.

Está claro, pues, que 1 gatito pesa 1 kg y una gata, $1 + 2 = 3$ kg.

### La concha y las cuentas de vidrio

Compare la primera pesada con la segunda. Verá usted que, en la primera pesada, la concha puede sustituirse por un cubo y ocho cuentas de vidrio, puesto que lo uno y lo otro pesan lo mismo. En este caso tendríamos en el platillo de la izquierda cuatro cubos y ocho cuentas, y esto estaría equilibrado por 12 cuentas. Quitando ahora ocho cuentas de cada platillo no violaremos el equilibrio. Pero en el platillo de la izquierda quedan cuatro cubos, y en el de la derecha, cuatro cuentas. Esto quiere decir que un cubo pesa lo mismo que una cuenta.

Ahora está claro cuántas cuentas de vidrio pesa la concha: sustituyendo (en la segunda pesada) un cubo por una cuenta, en el platillo de la derecha, sabemos que la concha pesa lo mismo que nueve cuentas de vidrio.

Este resultado es fácil de comprobar.

Sustituya en la primera pesada los cubos y la concha, del platillo de la izquierda, por el número correspondiente de cuentas, y obtendrá $3 + 9 = 12$, como tenía que ser.

### El peso de las frutas

Sustituimos, en la primera pesada, la pera por seis melocotones y una manzana; tenemos derecho a hacer esto, porque la pera pesa tanto como seis melocotones y una manzana. Tendremos entonces en el platillo de la izquierda cuatro manzanas y seis melocotones, y en el derecho, 10 melocotones. Quitando de cada platillo seis melocotones, sabemos que cuatro manzanas pesan lo mismo que cuatro melocotones. De aquí se deduce que un melocotón pesa lo mismo que una manzana.

Ahora es ya fácil comprender que la pera pesa lo mismo que siete melocotones.

### ¿Cuántos vasos?

Este problema puede resolverse por diversos procedimientos. He aquí uno de ellos.

En la tercera pesada se sustituye cada jarra por una botella y un vaso (según la primera pesada, al hacer esto la balanza debe seguir en equilibrio). Sabemos entonces que dos botellas y dos vasos equilibran tres platos pequeños. Basándonos en la segunda pesada podemos sustituir cada botella por un vaso y un plato pequeño. Resulta que cuatro vasos y dos platos pequeños se equilibran con tres platos pequeños.

Quitando dos platos pequeños de cada platillo de la balanza, establecemos que cuatro vasos equilibran a un plato.

Por consiguiente, una botella se equilibra (por comparación con la segunda pesada) con cinco vasos.

## Con una pesa y un martillo

El orden en que deben hacerse las pesadas es el que sigue. Primero se pone en un platillo el martillo y en el otro, la pesa y la cantidad de azúcar molida necesaria para que la balanza esté en equilibrio. Está claro que el azúcar echado en este platillo pesará $900 - 500 = 400$ g. Esta misma operación se repite tres veces más. El azúcar restante pesará $2000 - (4 \times 400) = 400$ g.

Ahora no queda más que dividir en dos partes iguales cada uno de los cinco paquetes de 400 gramos así obtenidos. Esto puede hacerse fácilmente sin pesas: se va echando el contenido del paquete de 400 gramos en dos paquetes colocados en los platillos de la balanza, hasta que ésta queda en equilibrio.

## El problema de Arquímedes

Si la corona encargada estuviera hecha de oro puro, fuera del agua pesaría 10 kg, y dentro del agua perdería la vigésima parte de su peso, es decir $^1/_2$ kg. Pero, como sabemos, la corona no pierde dentro del agua $^1/_2$ kg, sino $10 - 9^1/_4 = {}^3/_4$ de kg. Esto ocurre porque la corona contiene plata —metal que sumergido en el agua pierde no la vigésima parte de su peso, sino la décima. La corona debe tener tanta plata como se necesita para perder en el agua no $^1/_2$ kg, sino $^3/_4$ de kg, es decir $^1/_4$ de kg más. Si en nuestra corona de oro puro sustituimos mentalmente 1 kg de oro por plata, la pérdida que experimenta aquélla en el agua será mayor que antes en $^1/_{10} - {}^1/_{20} = {}^1/_{20}$ kg. Por consiguiente, para que resulte la pérdida de $^1/_4$ de kg más de peso, hay que sustituir por plata tantos kilogramos de oro como veces $^1/_{20}$ de kg está contenido en $^1/_4$ de kg; pero $^1/_4 : {}^1/_{20} = 5$. Por lo tanto, la corona tenía 5 kg de plata y 5 kg de oro en vez de 2 kg de plata y 8 de oro, es decir, 3 kg de oro habían sido substraídos y sustituidos por plata.

### La cifra seis

Pregúntele a cualquiera de sus conocidos mayores cuánto tiempo hace que tiene reloj. Supongamos que hace ya 15 años que lo tiene. Prosiga esta conversación aproximadamente así:

—¿Y cuántas veces al día mira usted su reloj?

—Unas veinte, poco más o menos —es la respuesta que sigue.

—Esto quiere decir que durante un año lo mira usted 6000 veces por lo menos, y en 15 años habrá visto su esfera unas 6000 × 15 veces, o sea, cerca de 100 mil veces. Supongo que si ha visto usted un objeto 100 mil veces lo conocerá y recordará perfectamente.

—Sin duda.

—Entonces conocerá magníficamente la esfera de su reloj y no le costará trabajo dibujar de memoria cómo está representada en ella la cifra seis.

Y ofrézcale a su interlocutor papel y lápiz.

El hará lo que usted le pide, pero... en la mayoría de los casos la cifra que dibuje no será como la representada en su reloj.

¿Por qué?

Responda a esta pregunta *sin mirar al reloj*. Muestre cómo dibujó su conocido la cifra seis y cómo la debía haber representado.

### Los tres relojes

En casa hay tres relojes. El 1 de enero todos ellos indicaban la hora correctamente. Pero sólo marchaba bien el primer reloj; el segundo se atrasaba 1 minuto al día, y el tercero se adelantaba 1 minuto al día. Si los relojes continúan marchando así; ¿al cabo de cuánto tiempo volverán los tres a marcar la hora exacta?

### Los dos relojes

Ayer comprobé mi reloj de pared y mi despertador y puse sus manecillas en punto. El reloj de pared se atrasa 2 minutos por hora, y el despertador se adelanta 1 minuto también por hora.

Hoy se pararon los dos relojes: se les acabó la cuerda. En la esfera del reloj de pared las manecillas marcan las 7 en punto, y en la del despertador, las 8.

¿A qué hora comprobé ayer los relojes?

### ¿Qué hora es?

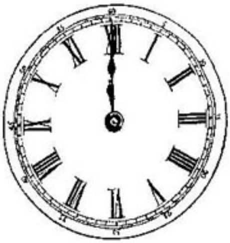


*Figura 212*

—¿A dónde va tan de prisa?
—Al tren de las seis. ¿Cuántos minutos quedan hasta su salida? —Hace 50 minutos quedaban 4 veces más minutos después de las tres. ¿Qué significa esta rara respuesta?
¿Qué hora era?

### ¿Cuándo se encuentran las manecillas?

A las 12 las manecillas del reloj están una sobre otra. Pero usted se habrá dado cuenta, probablemente, de que éste no es el único instante en que las manecillas se encuentran: durante el día alcanza la una a la otra varias veces.

¿Puede usted decir todos aquellos instantes en que esto ocurre?

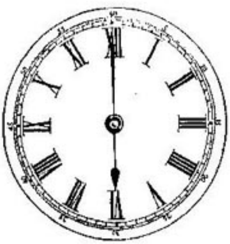


*Figura 213*

### ¿Cuándo están las manecillas dirigidas en sentidos opuestos?

A las 6 sucede lo contrario que a las 12, las manecillas están dirigidas en sentidos opuestos. Pero, ¿ocurre esto sólo a las 6, o hay otros instantes en que las manecillas se sitúan también así?

### A ambos lados de las seis

Yo miré el reloj y vi que sus dos manecillas estaban a ambos lados de la cifra 6 y a distancias iguales. ¿A qué hora fue esto?

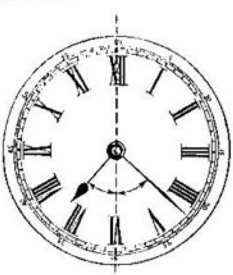


*Figura 214*

### ¿A qué hora?

¿A qué hora adelanta el minutero al horario en la misma distancia exactamente que éste se halla por delante de la cifra 12 en la esfera? ¿Puede ocurrir esto en varios instantes durante el día, o no ocurre nunca?

### Al contrario

Si ha seguido con atención la marcha de un reloj, es posible que haya observado precisamente una posición de las manecillas contraria a la que acabamos de mencionar, es decir, la posición en que el horario adelanta al minutero en tanto como este último ha pasado del número 12.

¿Cuándo ocurre esto?

### Tres y siete

Un reloj da las tres. Mientras suenan las campanadas pasan 3 segundos. ¿Cuánto tiempo será necesario para que este reloj dé las siete?
Por si acaso, prevengo que no se trata de un problema de broma y que no encierra ninguna trampa.

### El tictac del reloj

Finalmente, haga el pequeño experimento siguiente. Ponga su reloj sobre la mesa, aléjese de él tres o cuatro pasos y escuche su tictac. Si en la habitación reina un silencio suficiente, escuchará usted que su reloj parece que marcha con interrupciones: el tictac se oye durante cierto tiempo, luego deja de oírse varios segundos, vuelve otra vez a sonar y así sucesivamente.

¿Cómo se explica esta marcha irregular?

# SOLUCIONES

## La cifra seis

La mayoría de las personas no avisadas responden a esta pregunta dibujando una de las cifras 6 ó VI.

Esto demuestra que una cosa puede verse 100 mil veces y no conocerse. El secreto está en que, por lo general, en la esfera de los relojes de caballero *no figura* la cifra seis, porque en su lugar se halla el segundero.

## Los tres relojes

Al cabo de 720 días. En este tiempo, el segundo reloj se atrasa 720 minutos, es decir, exactamente en 12 horas; el tercer reloj se adelanta igual tiempo. Entonces los tres relojes marcarán lo mismo que el 1° de enero, o sea, la hora exacta.

## Los dos relojes

El despertador se adelanta 3 minutos por hora con respecto al reloj de pared. Se adelantará una hora, o sea, 60 minutos, al cabo de 20 horas. Pero durante estas 20 horas el despertador se habrá adelantado 20 minutos con relación a la hora exacta. Por lo tanto, las manecillas fueron puestas en punto 19 horas y 20 minutos antes, es decir, a las 11 horas 40 minutos.

## ¿Qué hora es?

Entre las 3 y las 6 hay 180 minutos. No es difícil comprender que el número de minutos que quedan hasta las seis se halla si $180 - 50$, es decir, 130, se divide en dos partes tales, que una de ellas sea cuatro veces mayor que la otra. Por consiguiente, hay que hallar la quinta parte de 130. Así, pues, eran las seis menos 26 minutos.

En efecto, 50 minutos antes faltaban $26 + 50 = 76$ minutos para las 6, y, por lo tanto, desde las 3 habían pasado $180 - 76 = 104$ minutos; esta cantidad de minutos es cuatro veces mayor que los minutos que faltan ahora para las seis.

## ¿Cuándo se encuentran las manecillas?

Comencemos a observar el movimiento de las manecillas a las 12. En este instante las dos manecillas están una sobre otra. Como el horario se mueve 12 veces más despacio que el minutero (puesto que describe una circunferencia completa en 12 horas, mientras que el minutero lo hace en 1 hora), durante la hora próxima no pueden encontrarse. Pero pasó una hora; el horario señala la cifra 1, después de recorrer $^{1}/_{12}$ parte de la circunferencia completa; el minutero ha dado una vuelta completa y se encuentra de nuevo en las 12, a $^{1}/_{12}$ parte de circunferencia del horario. Ahora las condiciones de la competición son distintas que las de antes: el horario se mueve más despacio que el minutero, pero va delante y el minutero tiene que darle alcance. Si la competición durara una hora entera, el minutero tendría tiempo de recorrer una circunferencia completa, mientras que el horario sólo recorrería $^{1}/_{12}$ parte de la circunferenica, es decir, el minutero habría recorrido $^{11}/_{12}$ de circunferencia más que aquél. Pero, para alcanzar al horario, el minutero sólo tiene que recorrer, más que aquél, la $^{1}/_{12}$ parte de circunferencia que los separa. Para esto no hace falta una hora entera, sino tantas veces menos como $^{1}/_{12}$ es menor que $^{11}/_{12}$, es decir, 11 veces menos. Esto quiere decir que las manecillas se encuentran al cabo de $^{1}/_{11}$ de hora, o sea, al cabo de $^{60}/_{11} = 5^{5}/_{11}$ de minuto.

Así, pues, el encuentro de las manecillas ocurre $5^{5}/_{11}$ de minuto después de pasar una hora, es decir, a la 1 y $5^{5}/_{11}$ de minuto.

¿Cuándo se produce el encuentro siguiente?

No es difícil darse cuenta de que esto ocurrirá al cabo de 1 hora y $5^{5}/_{11}$ de minuto, es decir, a las 2 y $10^{10}/_{11}$ de minuto. El otro, 1 hora y $5^{5}/_{11}$ de minutos después, o sea, a las 3 y $16^{4}/_{11}$ de minuto, y así sucesivamente. En total habrá 11 encuentros; el undécimo llegará al cabo de $1^{1}/_{11} \times 11 = 12$ horas de producirse el primero, es decir, a las 12; en otras palabras, coincidirá con el primer encuentro, y, en adelante, los encuentros se repiten en los mismos instantes que antes.

He aquí los instantes en que las manecillas se encuentran:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1er | encuentro | a la | 1 | y | $5\frac{5}{11}$ | de minuto |
| 2º | » | a las | 2 | » | $10\frac{10}{11}$ | » » |
| 3er | » | » » | 3 | » | $16\frac{4}{11}$ | » » |
| 4º | » | » » | 4 | » | $21\frac{9}{11}$ | » » |
| 5º | » | » » | 5 | » | $27\frac{3}{11}$ | » » |
| 6º | » | » » | 6 | » | $32\frac{8}{11}$ | » » |
| 7º | » | » » | 7 | » | $38\frac{2}{11}$ | » » |
| 8º | » | » » | 8 | » | $43\frac{7}{11}$ | » » |
| 9º | » | » » | 9 | » | $49\frac{1}{11}$ | » » |
| 10º | » | » » | 10 | » | $53\frac{6}{11}$ | » » |
| 11º | » | » » | 12. | | | |

### ¿Cuándo están las manecillas dirigidas en sentidos opuestos?

Este problema se resuelve de un modo muy parecido al anterior. Empecemos otra vez en las 12, cuando las dos manecillas coinciden. Hay que calcular cuánto tiempo será necesario para que el minutero adelante al horario en media circunferencia exactamente; en este caso las manecillas estarán dirigidas precisamente en sentidos opuestos. Ya sabemos (véase el problema precedente) que en una hora entera el minutero adelanta al horario en $^{11}/_{12}$ de circunferencia completa; para adelantarlo solamente en $^{1}/_{2}$ de circunferencia necesitará menos de una hora—tantas veces menos como $^{1}/_{2}$ es menor que $^{11}/_{12}$, es decir, necesitará nada más que $^{6}/_{11}$ de hora. Esto quiere decir que, después de las 12, las manecillas estarán por primera vez dirigidas en sentidos opuestos al cabo de $^{6}/_{11}$ de hora, o sea, de $32^{8}/_{11}$ de minuto. Mire el reloj a las 12 y $32^{8}/_{11}$ de minuto y verá que las manecillas tienen sentidos opuestos.

¿Es éste el único instante en que las manecillas se sitúan así? Está claro que no. Las manecillas ocupan posiciones semejantes a ésta $32^8/_{11}$ de *minuto después de cada encuentro.* Pero ya sabemos que durante 12 horas las manecillas se encuentran 11 veces; por lo tanto, también se situarán en sentidos opuestos 11 veces en 12 horas. Hallar estos instantes no es difícil:

$$\text{Las } 12 + 32\,\frac{8}{11} \text{ de min} = \text{las } 12 \text{ y } 32\,\frac{8}{11} \text{ de min,}$$

$$\text{la } 1 \text{ y } 5\,\frac{5}{11} \text{ de min} + 32\,\frac{8}{11} \text{ de min} = \text{la } 1 \text{ y } 38\,\frac{2}{11} \text{ de min,}$$

$$\text{las } 2 \text{ y } 10\,\frac{10}{11} \text{ de min} + 32\,\frac{8}{11} \text{ de min} = \text{las } 2 \text{ y } 43\,\frac{7}{11} \text{ de min,}$$

$$\text{las } 3 \text{ y } 16\,\frac{4}{11} \text{ de min} + 32\,\frac{8}{11} \text{ de min} =$$

$$= \text{las } 3 \text{ y } 49\,\frac{1}{11} \text{ de min, etc.}$$

Doy a usted la posibilidad de que calcule los demás instantes.

## A ambos lados de las seis

Este problema se resuelve lo mismo que el anterior. Supongamos que las dos manecillas estaban en las 12 y que, después, el horario se separó de las 12 en una parte determinada de vuelta completa que llamaremos $x$. Durante este intervalo, el minutero habrá tenido tiempo de girar en $12 \cdot x$. Si el tiempo transcurrido no es mayor que una hora, para satisfacer la condición de nuestro problema es preciso que el minutero diste del fin de una circunferencia completa tanto como el horario haya tenido tiempo de separarse de su principio; en otras palabras:

$$1 - 12 \cdot x = x.$$

De aquí se deduce que $1 = 13 \cdot x$ (porque $13 \cdot x - 12 \cdot x = x$). Por lo tanto, $x = {}^1/_{13}$ parte de la vuelta completa. Esta fracción de vuelta la recorre el horario en ${}^{12}/_{13}$ de hora, es decir, cuando marca las 12 y $55^5/_{13}$ de min. Durante este tiempo, el minutero habrá recorrido 12 veces más, es decir, ${}^{12}/_{13}$ de vuelta completa; como ve, las dos manecillas están a la misma distancia de las 12 y, por consiguiente, lo mismo de separadas de las 6 por ambos lados.

Hemos hallado una de las posiciones de las manecillas, la que se produce durante la *primera* hora. Durante la *segunda* hora vuelve a presentarse en posición semejante; la encontramos, razonando como en el caso precedente, por medio de la igualdad

$$1 - (12x - 1) = x, \quad \text{ó} \quad 2 - 12x = x,$$

de donde $2 = 13x$ (porque $13x - 12x = x$) y, por consiguiente, $x = {}^2/_{13}$ de vuelta completa. Las manecillas ocuparán esta posición a la 1 y ${}^{11}/_{13}$ de hora, o sea, a la 1 y $50^{10}/_{13}$ de min.

Por tercera vez, las manecillas se hallarán en la posición conveniente cuando el horario se aparte de las 12 en ${}^3/_{13}$ de circunferencia completa, es decir, a las 2 y ${}^{10}/_{13}$ de hora, y así sucesivamente. En total habrá 11 posiciones, con la particularidad de que después de las seis las manecillas cambiarán entre sí sus puestos: el horario ocupará los puntos en que estuvo antes el minutero y éste, los que ocupó antes el horario.

## ¿A qué hora?

Si se comienzan a observar las manecillas a las 12 en punto, durante la primera hora no se nota la disposición buscada. ¿Por qué? Porque el horario recorre $^1/_{12}$ parte de lo que recorre el minutero y, por lo tanto, queda retrasado con respecto a él mucho más de lo necesario para la disposición que se busca. Cualquiera que sea el ángulo a que se aparte de las 12 el minutero, el horario girará $^1/_{12}$ parte de este ángulo, y no $^1/_2$, como se requiere. Pero pasó una hora; ahora el minutero está en las 12 y el horario, en la 1, es decir, $^1/_{12}$ partes de vuelta delante del minutero. Veamos si esta disposición de las manecillas puede producirse durante la segunda hora. Supongamos que este instante se produjo cuando el horario se apartó de las 12 en una fracción de vuelta que llamaremos $x$. Durante este tiempo el minutero habrá recorrido un espacio 12 veces mayor, es decir, $12x$. Si de aquí se resta una vuelta completa, el resto $12x - 1$ deberá ser el doble que $x$, o sea, ser igual a $2x$. Vemos, por consiguiente, que $12x - 1 = 2x$, de donde se deduce que una vuelta completa es igual a $10x$ (en efecto, $12x - 10x = 2x$). Pero si $10x$ es igual a una vuelta completa, $1x = {}^1/_{10}$ parte de vuelta. Y ésta es la solución del problema: el horario se separó de la cifra 12 en $^1/_{10}$ parte de vuelta completa, para lo que se requieren $^{12}/_{10}$ partes de hora o una hora y 12 minutos. Al ocurrir esto, el minutero se encontrará a doble distancia de las 12, es decir, a la distancia de $^1/_5$ parte de vuelta, lo que responde a $^{60}/_5 = 12$ minutos, como debía ser.

Hemos encontrado una solución del problema. Pero tiene otras: durante las 12 horas, las manecillas se encuentran en posiciones semejantes no una vez, sino varias. Intentaremos hallar las demás soluciones.

Para esto esperaremos a que sean las 2; el minutero estará entonces en las 12 y el horario en las 2. Razonando como antes, obtenemos la igualdad:

$$12x - 2 = 2x,$$

de donde dos vueltas completas son iguales a $10x$ y, por lo tanto, $x = {}^1/_5$ parte de vuelta entera. Esto corresponde al instante $^{12}/_5 = 2$ horas y 24 minutos.

Los demás instantes puede usted calcularlos ya fácilmente. Entonces sabrá que las manecillas se sitúan de acuerdo con la condición del problema en los 10 instantes siguientes:

| | |
|---|---|
| a la 1 y 12 min | a las 7 y 12 min |
| a las 2 y 24 » | a » 8 y 24 » |
| a » 3 y 36 » | a » 9 y 36 » |
| a » 4 y 48 » | a » 10 y 48 » |
| a » 6 | a » 12. |

Las respuestas: «a las 6» y a las «12» pueden parecer erróneas, pero sólo a primera vista. En efecto: a las 6, el horario está en las 6 y el minutero en las 12, es decir, exactamente el doble de lejos. A las 12, el horario se halla a la distancia «cero» de las 12, y el minutero, si lo desea, a «dos ceros» de distancia (porque cero doble es lo mismo que cero); por consiguiente, también este caso satisface, en esencia, la condición del problema.

## Al contrario

Después de las explicaciones precedentes, ya no es difícil resolver este problema. Es fácil comprender, razonando como antes que la disposición que se requiere de las manecillas se dará por primera vez en el instante definido por la igualdad:

$$12x-1=\frac{x}{2},$$

de donde $1 = 11\frac{1}{2}x$, ó $x = \frac{2}{23}$ partes de una vuelta completa, o sea, al cabo de $1\frac{1}{23}$ horas, después de las 12. Es decir, a la 1 y $2\frac{14}{23}$ de minuto estarán las manecillas dispuestas como se requiere. Efectivamente, el minutero debe estar en el punto medio entre las 12 y la $1\frac{1}{23}$, o sea, en las $\frac{12}{23}$ de hora, lo que constituye precisamente $\frac{1}{23}$ de vuelta completa (y el horario recorrerá $\frac{2}{23}$ de vuelta completa).

Por segunda vez, las manecillas se situarán como es debido en el instante definido por la igualdad:

$$12x-2=\frac{x}{2},$$

de donde $2 = 11\frac{1}{2}x$, y $x = \frac{4}{23}$; el instante buscado será, pues, el de las 2 y $5\frac{5}{23}$ de minuto.

El tercer instante, las 3 y $7\frac{19}{23}$ de minuto, etc.

## Tres y siete

Generalmente responden: «7 segundos». Pero, como ahora veremos, esta respuesta es falsa.

Cuando el reloj da las tres, notamos dos intervalos:

1) entre la primera y la segunda campanada;

2) entre la segunda y la tercera campanada.

Ambos intervalos duran 3 segundos; es decir, cada uno de ellos dura la mitad, o sea, $1\frac{1}{2}$ segundos.

En cambio, cuando el reloj da las siete, el número de estos intervalos es seis. Y seis veces por $1\frac{1}{2}$ segundos son 9 segundos. Por consiguiente, el reloj «da las siete» (es decir, da siete campanadas) en 9 segundos.

## El tictac del reloj

Los intervalos incomprensibles en el tictac del reloj se deben simplemente al cansancio del oído. Nuestro oído, cuando se cansa, se debilita durante unos segundos, y en estos intervalos no oímos el tictac. Al cabo de un corto espacio de tiempo pasa el cansancio y se recupera la agudeza inicial, con lo que volvemos a escuchar la marcha del reloj. Luego se produce otra vez el cansancio y así sucesivamente.

236-237

## PROBLEMAS ACERCA DE LOS MEDIOS DE TRANSPORTE

### El vuelo

Un avión recorre la distancia que hay desde la ciudad $A$ hasta la ciudad $B$ en 1 hora y 20 minutos. Pero el vuelo de retorno lo efectúa en 80 minutos.

¿Cómo explica usted esto?

### Las dos locomotoras

Sin duda, usted habrá tenido ocasión de ver cómo dos locomotoras llevan un tren: una de ellas va delante, y la otra, detrás. Pero, ¿ha pensado lo que ocurre, en este caso, con los enganches de los vagones y con sus topes? La locomotora que va delante sólo tira de los vagones cuando sus enganches están tensos; pero entonces los topes no están en contacto y la locomotora que va detrás no puede empujar a los vagones. Y al contrario, cuando la locomotora trasera le empuja al tren, unos topes ejercen presión sobre los otros, pero los enganches no están en tensión y, por lo tanto, el trabajo que realiza la locomotora delantera es inútil.

Resulta, pues, que ambas locomotoras no pueden mover el tren simultáneamente: eficazmente trabaja bien una locomotora o bien la otra.

¿Por qué, entonces, enganchan dos locomotoras?

### La velocidad del tren

Usted va en un vagón de ferrocarril y quiere saber qué velocidad lleva el tren.

¿Puede usted determinarla por el golpeteo de las ruedas?

### Los dos trenes

Dos trenes salieron al mismo tiempo de dos estaciones, el uno al encuentro del otro. El primero llegó a la estación de destino una hora después de cruzarse con el segundo, y éste, 2 horas y 15 minutos después del encuentro.

¿Cuántas veces es mayor la velocidad de un tren que la del otro?

Este problema puede resolverse mentalmente.

## *Problemas acerca de los medios de transporte*

### ¿Cómo arranca el tren?

Usted quizá se haya dado cuenta de que antes que el tren empiece a andar hacia adelante, el maquinista deja con frecuencia que retroceda un poco.

¿Para qué hace esto?

### La regata

Dos balandros participan en una regata, en la que deben recorrer 24 km de ida y vuelta en el tiempo más corto posible. El primer balandro recorrió todo el camino con la velocidad uniforme de 20 km por hora; el segundo fue *hacia allá* con una velocidad de 16 km por hora, y *retornó* con la de 24 km por hora.

Venció en las regatas el primer balandro, aunque, al parecer, el segundo debía rezagarse del primero en una dirección, el mismo espacio exactamente que lo adelantaría en el camino de vuelta, y, por consiguiente, debería llegar al mismo tiempo que el primero.

¿Por qué llegó más tarde?

### Desde Ensk hasta Equisgrado

Navegando a favor de la corriente, un vapor desarrolla 20 km por hora; navegando en contra, sólo 15 km por hora. En ir desde el embarcadero de la ciudad de Ensk hasta el embarcadero de Equisgrado, tarda 5 horas menos que en el viaje de regreso.

¿Qué distancia hay entre estas dos ciudades?

## El vuelo

En este problema no hay nada que explicar, porque el avión hace el recorrido en los dos sentidos en el mismo tiempo, ya que 80 minutos = 1 hora y 20 minutos.

El problema está previsto para el lector distraído, que puede pensar que entre 1 hora 20 minutos y 80 minutos hay diferencia. Aunque parezca extraño hay quien pica en este anzuelo, con la particularidad de que entre ellos son más los que están acostumbrados a hacer cálculos que los que tienen poca experiencia. Esto se debe a la costumbre de utilizar el sistema métrico decimal y las unidades monetarias decimales. Al ver escrito: «1 hora y 20 minutos» y al lado «80 minutos», inconscientemente nos figuramos la diferencia entre estas cantidades como la que hay entre 1 rublo y 20 copeikas y 80 copeikas. En este error psicológico se basa el problema.

## Las dos locomotoras

Este problema acertijo se resuelve sencillísimamente. La locomotora delantera no tira de todo el tren, sino sólo de, aproximadamente, la mitad de los vagones. Los demás vagones son empujados por la locomotora trasera. En la primera parte del tren, los enganches de los vagones están tensos, en el resto, sin tensar, y los topes de los vagones se apoyan unos en otros.

## La velocidad del tren

Como es natural, usted habrá notado que, cuando se viaja en un vagón de ferrocarril, se siente continuamente un traqueteo acompasado; no hay ballestas capaces de hacerlo inapreciable. Este traqueteo se debe a que, en los puntos de unión de los raíles (fig. 215), las ruedas experimentan sacudidas que se propagan a todo el vagón.

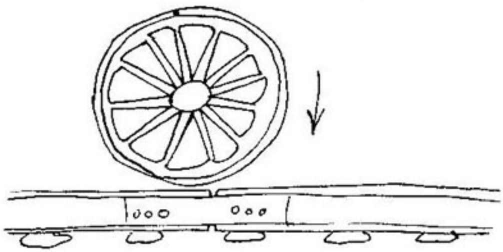


*Figura 215*

Estas sacudidas desagradables, que causan considerables deterioros tanto en los vagones como en las vías, pueden utilizarse para calcular la velocidad del tren. Para esto no hay más que contar cuántas sacudidas por minuto experimenta el vagón, con lo que se sabe cuántos raíles recorrió el tren. Después se multiplica este número por la longitud de cada raíl, y se obtiene la distancia recorrida por el tren en un minuto.

La longitud ordinaria de un raíl es de cerca de 15 m[1]). Una vez contado, reloj en

[1]) Cuando salga del vagón en alguna estación, puede medir la longitud de un raíl contando los pasos que tiene. Siete pasos equivalen, aproximadamente, a 5 m.

mano, el número de sacudidas por minuto, multiplíquelo por 15 y después por 60 y luego divídalo por 1000, con lo que obtendrá el número de kilómetros que recorre el tren en una hora:

$$\frac{(\text{el número de sacudidas}) \times 15 \times 60}{1000} = \text{el número de km por h.}$$

## Los dos trenes

El tren más rápido recorrió hasta el punto de encuentro (en que se cruzó con el otro tren) un camino tantas veces más largo que el recorrido por el más lento, como veces mayor es la velocidad del primero que la del segundo. Después del encuentro, al tren más rápido le quedaba por recorrer, hasta la estación, el camino que había recorrido el más lento hasta dicho encuentro, y viceversa. En otras palabras, el tren rápido recorrió después del encuentro un camino tantas veces más corto como veces mayor es su velocidad. Si designamos por $x$ la relación entre las velocidades, el tren rápido tardó en recorrer la parte de camino comprendida entre el punto de encuentro y la estación de destino $x^2$ menos tiempo que el lento. De aquí de deduce que $x^2 = 2^1/_4$ y $x = 1^1/_2$, es decir, la velocidad de un tren es vez y media mayor que la del otro.

## ¿Cómo arranca el tren?

Cuando el tren llega a la estación y se para, los enganches de los vagones quedan tensos. Si la locomotora empieza a tirar del tren en estas condiciones, tiene que hacer que todos los vagones arranquen *a la vez*; cuando el tren es muy pesado la máquina no tiene suficiente fuerza para esto. Pero en cambio, si la locomotora hace previamente que el tren retroceda, los enganches no estarán tensos y los vagones se irán poniendo en movimiento *sucesivamente*, uno después de otro, con lo que el arranque resulta más fácil.

Concretamente, el maquinista hace lo mismo que el carrero de un carro muy cargado, que sólo se monta cuando éste ya está en marcha, porque de lo contrario el caballo tendría que mover del sitio de un tirón un peso demasiado grande.

## La regata

El segundo balandro llegó más tarde porque navegó *menos tiempo* a 24 km por hora que a 16 km por hora.

En efecto, a 24 km por hora navegó $^{24}/_{24}$, es decir, 1 hora, mientras que a 16 km por hora, $^{24}/_{16}$, o sea, $1^1/_2$ hora. Por esto en el camino de *ida* perdió más tiempo que el que ganó en el de vuelta.

## Desde Ensk hasta Equisgrado

Navegando a favor de la corriente, el vapor recorre 1 km en 3 minutos; cuando navega contra la corriente, 1 km en 4 minutos. En el primer caso, el vapor gana 1 minuto en cada kilómetro, y como en todo el recorrido gana 5 horas de tiempo, o 300 minutos, se deduce que desde Ensk hasta Equisgrado hay 300 km.

Efectivamente:

$$\frac{300}{15} - \frac{300}{20} = 20 - 15 = 5.$$

### El vaso de guisantes

Usted habrá visto más de una vez guisantes y habrá tenido en sus manos vasos con mucha frecuencia. Por lo tanto, conocerá bien las dimensiones de unos y otros. Pues, figúrese un vaso lleno hasta arriba de guisantes secos y que estos guisantes se ensartan como cuentas en un hilo.

Si este hilo, con los guisantes, se extiende, ¿qué longitud tendrá?

### El agua y el vino

En una botella hay un litro de vino, y en otra, un litro de agua. De la primera a la segunda se transvasa una cucharada de vino y, después, de la segunda a la primera se transvasa una cucharada de la mezcla obtenida.

¿Qué hay ahora más, agua en la primera botella o vino en la segunda?

### El dado

*Figura 216*

He aquí un dado (fig. 216), es decir, un pequeño cubo en cuyas caras van marcados puntos desde 1 hasta 6.

Pedro apuesta a que, si echa cuatro veces seguidas el dado, una de estas cuatro veces caerá con un punto solo hacia arriba.

Vladimiro, en cambio, asegura que el punto solo no saldrá en ninguna de las cuatro jugadas o que, si sale, será más de una vez.

¿Quién tiene más probabilidades de ganar?

### La cerradura Yale

Aunque esta cerradura se usa desde hace ya mucho tiempo (porque fue inventada en el año 1865), son aún pocos los que conocen su estructura. Por esto se oyen con frecuencia manifestaciones de duda acerca de que pueda existir un gran número de cerraduras de este tipo y de llaves para ellas. Sin embargo, basta conocer el ingenioso mecanismo de estas cerraduras para convencerse de que es posible diversificarlas en alto grado.

En la fig. 217, a la izquierda, se ve la parte «frontal» de la cerradura Yale. El nombre de esta cerradura es el de su inventor, el cerrajero norteamericano

Limus Yale. Alrededor del ojo de la cerradura se observa un pequeño círculo: esta es la base del tambor, que pasa a través de toda la cerradura. El problema de abrir la cerradura consiste en hacer girar este tambor, pero aquí está precisamente la dificultad. El tambor se mantiene en una posición determinada por medio de cinco tumbadores o clavijas de acero (fig. 217, a la derecha). Cada una de estas clavijas

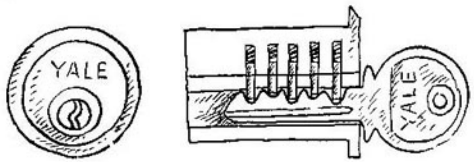



*Figura 217*

está cortada en dos y hasta que no se colocan de manera que todos estos cortes coinciden con la línea de contacto entre el tambor y el cilindro, es imposible conseguir que aquél gire.

Esta colocación se le da a las clavijas con una llave que tiene en su borde los salientes adecuados. Basta meter la llave, para que los tumbadores ocupen la única posición que hace posible la apertura de la cerradura.

Ahora es fácil comprender que el número de distintas cerraduras de este tipo puede ser realmente muy grande. Este número depende de la cantidad de procedimientos por que puede cortarse en dos cada clavija. En la práctica, esta cantidad, como es lógico, no es infinita, pero sí muy grande.

Suponga, por ejemplo, que cada clavija se puede cortar en dos partes sólo por 10 procedimientos e intente calcular cuántas cerraduras diferentes, de este tipo, se pueden hacer con esta condición.

### ¿Cuántos retratos?

Dibuje un retrato en un cartón y córtelo en tiras. Supongamos que lo corta en nueve tiras. Si sabe dibujar un poco, no le será difícil hacer otras tiras con las imágenes de las diversas partes de la cara, pero de tal modo, que dos tiras contiguas, aunque pertenezcan a diferentes retratos, puedan aplicarse la una a la otra sin que se note discontinuidad en los trazos. Si para cada parte de la cara hace usted cuatro tiras diferentes[1]), tendrá 36 tiras, con las cuales, juntándolas de nueve en nueve, podrá formar diversos retratos.

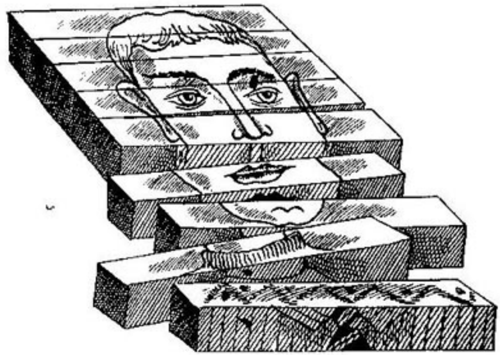


*Figura 218*

En los almacenes, donde en un tiempo se vendían juegos de tiras (o tarugos) para componer retratos (fig. 218), decían los dependientes que con las 36 tiras se podían obtener *mil* fisonomías distintas.

¿Es esto cierto?

### Las hojas del árbol

Si a un árbol viejo cualquiera, por ejemplo, a un tilo, se le arrancan todas las hojas y se ponen unas al lado de otras, sin intervalos, ¿qué longitud aproximada tendrá la fila que forman? ¿Bastará para rodear con ella una casa grande?

### En el ábaco

Es indudable que usted sabrá contar en el ábaco y que comprenderá lo fácil que es marcar en él 25 rublos.

Pero el problema se complica si le ponen la condición de que mueva no siete bolas, como se hace de ordinario, sino 25 bolas.

En efecto, haga usted la prueba de marcar en el ábaco la suma de 25 rublos, desplazando 25 bolas exactamente.

---

[1]) Lo más cómodo es pegarlas en las cuatro caras de unos tarugos, en forma de prisma cuadrangular regular.

En la práctica, claro está, esto no se hace nunca, pero el problema tiene solución y la respuesta es bastante interesante.

### Un millón de pasos

Usted sabe perfectamente lo que es un millón y también lo que es la longitud de un paso suyo. Si esto es así, no le será difícil responder a la siguiente pregunta: ¿A qué distancia se alejará si da un millón de pasos, a más de 10 kilómetros o a menos?

### El metro cúbico

En una escuela preguntó el maestro: ¿qué altura tendría la columna que se formara, si se pusieran uno encima de otro todos los milímetros cúbicos que contiene un metro cúbico?

—Sería más alta que la torre Eiffel (300 metros) — exclamó uno de los alumnos.

— Y más alta que el Mont Blana (5 kilómetros) —agregó otro.

¿Cuál de los dos se equivocó más?

### ¿Quién contó más?

Dos personas contaron durante una hora todos los transeúntes que pasaron junto a ellos por la acerca. Una los contaba desde la puerta de su casa, y la otra, yendo y viniendo por la acera.

¿Quién contó más transeúntes?

## El vaso de guisantes

Si resolviéramos este problema a ojo, es seguro que cometeríamos una gran equivocación. Hay que hacer un cálculo, aunque sólo sea aproximado.

El diámetro de un guisante seco tiene cerca de $^1/_2$ centímetro. En un centímetro cúbico caben, por lo menos, $2 \times 2 \times 2 = 8$ guisantes (empaquetados densamente caben más). En un vaso, cuya capacidad sea de 250 $cm^3$, el número de guisantes será, por lo menos, de $8 \times 250 = 2000$. Insertados en un hilo se extenderán $^1/_2 \times 2000 = 1000$ cm, es decir, 10 m.

## El agua y el vino

Al resolver este problema es fácil confundirse si no se tiene en cuenta que el volumen de los líquidos que hay en las botellas después de los transvases es igual al inicial, es decir, a 1 litro. Aclarado esto, razonaremos como sigue. Supongamos que, después de hacer el trasiego, en la segunda botella hay $n$ $cm^3$ de vino y, por lo tanto, $(1000 - n)$ $cm^3$ de agua. ¿Adónde fueron a parar los $n$ $cm^3$ de agua que faltan? Es evidente que deberán estar en la primera botella. Por consiguiente, después de hacer el transvase, en el vino hay tanta agua como en el agua vino.

## El dado

Si el dado se lanza cuatro veces, el número total de las posiciones que puede tomar es igual a $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$. Supongamos que la primera jugada ya se ha hecho y que ha salido un solo punto. En este caso, en todas las demás tiradas, el número total de las posiciones que le convienen a Pedro, es decir, en que salga cualquier número de puntos que no sea uno, será $5 \times 5 \times 5 = 125$. Del mismo modo serán posibles, cada vez, 125 posiciones favorables para Pedro, si el único punto sale solamente en la segunda tirada, solamente en la tercera o solamente en la cuarta. Así, pues, existen $125 + 125 + 125 + 125 = 5\,000$ posibilidades distintas de que el punto único salga una y sólo una vez cuando el dado se lanza cuatro veces. En cambio, existen $1296 - 500 = 796$ posibilidades adversas, ya que todos los demás casos son desfavorables.

Vemos, por lo tanto, que Vladimiro tiene más posibilidades de ganar que Pedro: 796 contra 500.

## La cerradura Yale

No es difícil calcular que el número de cerraduras diferentes es igual a $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$.

Cada una de estas 100 000 cerraduras tiene su llave correspondiente, única con que aquélla puede abrirse. La existencia de 100 mil cerraduras y llaves distintas constituye una garantía suficiente para el poseedor de una de ellas, ya que el que quisiera penetrar en su domicilio, valiéndose de otra llave, sólo tendría una probabilidad de la 100 mil de hallar la necesaria.

Nuestro cálculo ha sido al buen tuntún: lo hemos hecho suponiendo que cada clavija de la cerradura puede dividirse en dos partes sólo por diez procedimientos. En realidad es probable que pueda hecerse de más maneras, con lo que la cantidad de cerraduras diferentes aumenta considerablemente. De aquí se deduce la ventaja de este tipo de cerradura (si está bien hecha) frente a las ordinarias, entre las cuales, en cada docena hay una o dos iguales.

## ¿Cuántos retratos?

El número de retratos es mucho mayor que mil. Se pueden contar del modo siguiente. Designemos las nueve partes de los retratos por las cifras romanas I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII y IX; para cada parte tenemos cuatro tiras, que numeraremos con las cifras árabes 1, 2, 3 y 4.

Tomamos la tira I, 1. A ella podemos aplicarle las II, 1; II, 2; II, 3 y II, 4.

Por consiguiente, aquí pueden hacerse cuatro combinaciones. Pero como la parte I de la cabeza puede representarse por cuatro tiras (I, 1; I, 2; I, 3 y I, 4) y cada una de ellas puede acoplarse a la parte II por cuatro procedimientos distintos, resulta que las dos partes superiores de la cabeza I y II pueden unirse de $4 \times 4 = 16$ modos diferentes.

A cada una de estas 16 colocaciones se le puede adosar la parte III de cuatro maneras (III, 1; III, 2; III, 3 y III, 4); por lo tanto, las tres primeras partes de la fisonomía pueden combinarse de $16 \times 4 = 64$ modos distintos.

De la misma manera llegaremos a saber que las partes I, II, III y IV pueden disponerse de $64 \times 4 = 256$ formas diversas; las partes I, II, III, IV y V, de 1024; las I, II, III, IV, V y VI, de 4096, y así sucesivamente. Y finalmente, las nueve partes del retrato se pueden agrupar por $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$, es decir, 262 144 procedimientos.

Así, pues, con nuestros nueve tarugos se pueden componer no 1000, sino más de un *cuarto de millón* de retratos diferentes.

Este problema es bastante aleccionador: por él podemos comprender la causa de que sea tan difícil encontrar dos personas que tengan las mismas facciones. Ya en las «Enseñanzas» de Monomaj[1]) se expresa admiración por el hecho de que siendo enorme la cantidad de personas que hay en el mundo, cada una tiene su propia fisonomía. Pero nosotros acabamos de comprobar que, si el rostro humano se caracterizara solamente por nueve rasgos, que permitieran cada uno nada más que cuatro variantes, podrían existir más de 260 000 caras diferentes. Sin embargo, los rasgos característicos del rostro humano son en realidad más de nueve y pueden variar por más de cuatro procedimientos. Así, si los rasgos son 20 y cada uno varía de 10 modos, tendremos $10 \times 10 \times \times 10 \times 10 \ldots$ (20 factores), es decir, $10^{20}$ ó 100 000 000 000 000 000 000 de caras distintas.

Esta cantidad es muchas veces mayor que el número de personas que hay en todo el mundo.

## Las hojas del árbol

No sólo una casa grande, sino hasta una ciudad no muy grande se podría rodear con las hojas puestas en fila de un árbol, porque esta fila se extendería... ¡unos doce kilómetros! Efectivamente, un árbol viejo no tiene menos de 200—300 mil hojas. Si admitimos que sean 250 mil y consideramos que cada hoja tiene 5 cm de anchura, la fila que se obtiene tendrá 1 250 000 cm de longitud, o sea, 12 500 m ó $12^1/_2$ kilómetros.

[1]) Vladímir Vsévolodovich Monomaj (1053-1125) Gran Príncipe de Kíev. (*N. del Tr.*)

## En el ábaco

25 rublos se pueden marcar en el ábaco con 25 bolas, del modo siguiente:

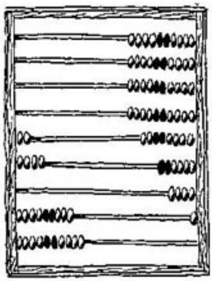


*Figura 219*

En efecto, aquí se han marcado 20 rublos + 4 rublos + 90 copeikas + 10 copeikas = = 25 rublos.

Y el número total de bolas es: $2 + 4 + 9 + 10 = 25$.

## Un millón de pasos

Un millón de pasos son mucho más de 10 km, incluso más de 100 km. Si la longitud de un paso es aproximadamente igual a $^3/_4$ de metro, 100 000 pasos serán 750 km. Y como de Moscú a Leningrado sólo hay 640 km, si usted da un millón de pasos desde Moscú, se alejará más que la distancia que hay desde esta ciudad a Leningrado.

## El metro cúbico

Las dos respuestas distan mucho de ser ciertas, porque la columna resultaría ser 100 veces más alta que la montaña más alta de la Tierra. En efecto, en un metro cúbico hay $1000 \times 1000 \times 1000$, o sea, un millar de millones de milímetros cúbicos. Puestos unos encima de otros, estos milímetros cúbicos formarían una columna de 1 000 000 000 mm de altura, es decir, de 1 000 000 m ó 1000 km.

## ¿Quién contó más?

Las dos contaron el mismo número de transeúntes. Efectivamente, aunque la que estaba en la puerta contó los transeúntes que pasaban en ambos sentidos, la que iba y venía por la acera vio doble número de personas yendo a su encuentro.

15

# SITUACIONES EMBARAZOSAS

**El maestro y el alumno**

Lo que vamos a narrar más adelante dicen que ocurrió en la Grecia antigua. Un maestro en sabiduría, el sofista Protágoras, se encargó de enseñar a un joven todos los recursos del arte de la abogacía. El maestro y el alumno hicieron un contrato según el cual el segundo se comprometía a pagar al primero la retribución correspondiente en cuanto se revelaran por primera vez sus éxitos, es decir, inmediatamente después de ganar su primer pleito.

El joven cursó sus estudios completos. Protágoras esperaba que le pagase, pero su alumno no se apresuraba a tomar parte en juicio alguno. ¿Qué hacer? El maestro, para conseguir cobrar la deuda, lo llevó ante el tribunal. Protágoras razonaba así: si gano el pleito, me tendrá que pagar de acuerdo con la sentencia del tribunal; si lo pierdo y, por consiguiente lo gana él, también me tendrá que pagar, ya que, según el contrato, el joven tiene la obligación de pagarme en cuanto gane el primer pleito.

El alumno consideraba, en cambio, que el pleito entablado por Protágoras era absurdo. Por lo visto, el joven había aprendido algo de su maestro y pensaba así: si me condenan a pagar, de acuerdo con el contrato no debo hacerlo, puesto que habré perdido el primer pleito, y si el fallo es favorable al demandante, tampoco estaré obligado a abonarle nada, basándome en la sentencia del tribunal.

Llegó el día del juicio. El tribunal se encontró en un verdadero aprieto. Sin embargo, después de mucho pensarlo halló una salida y dictó un fallo que, sin contravenir las condiciones del contrato entre el maestro y el alumno, le daba al primero la posibilidad de recibir la retribución estipulada.

¿Cuál fue la sentencia del tribunal?

**La herencia**

He aquí otro problema muy remoto que solían plantearse entre sí los juristas de la antigua Roma.

Una viuda estaba obligada a repartirse, con el hijo que debía nacer, la herencia de 3500 rublos que le dejó su marido. Si nacía un niño, la madre, de acuerdo con las leyes romanas, debía recibir la mitad de la parte del hijo. Si nacía una niña, la madre recibiría el doble que la hija. Pero nacieron dos mellizos: un niño y una niña.

¿Cómo hay que dividir la herencia para cumplir las condiciones que la ley imponía?

**El trasiego** Ante usted hay una jarra con 4 litros de leche. Tiene que dividir estos 4 l en partes iguales entre dos camaradas, pero sólo dispone de dos jarras vacías: una de $2^{1}/_{2}$ l de capacidad, y otra, de $1^{1}/_{2}$ l.

¿Cómo pueden dividirse los 4 l de leche en dos mitades, valiéndose tan sólo de estas tres vasijas?

. Está claro que hay que hacer varios trasiegos de una jarra a otra.

Pero, ¿cómo deben hacerse?

**¿Cómo alojarlos?** El administrador de guardia de un hotel se vio una vez en situación muy embarazosa. Llegaron de improviso 11 huéspedes y cada uno pedía habitación independiente. En el hotel sólo había 10 números libres. Los huéspedes eran muy exigentes y no había más remedio que alojar 11 personas en 10 habitaciones, de manera que, en cada una hubiera una sola persona. Esto, por lo visto, es imposible. Pero el administrador de guardia encontró una solución a tan difícil problema.

He aquí lo que ideó. En la primera habitación alojó al primer huesped y le pidió permiso para que, durante unos 5 minutos, se encontrara en su habitación el undécimo huesped. Cuando estos dos huéspedes quedaron acomodados, alojó:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| el | 3er | huésped | en | la | 2ª | habitación |
| » | 4º | » | » | » | 3ª | » |
| » | 5º | » | » | » | 4ª | » |
| » | 6º | » | » | » | 5ª | » |
| » | 7º | » | » | » | 6ª | » |
| » | 8º | » | » | » | 7ª | » |
| » | 9º | » | » | » | 8ª | » |
| » | 10º | » | » | » | 9ª | » |

Como puede verse, quedaba libre la 10ª habitación. En ella alojó al undécimo huésped, que temporalmente se encontraba en la primera habitación, con lo que quedó satisfecha toda la compañía y, seguramente, bastante admirados muchos lectores de este libro.

¿En qué consiste el secreto de esta treta?

**Las dos velas** La luz eléctrica se apagó inesperadamente en el apartamento: se fundió el cortacircuitos. Yo encendí dos velas que tenía previstas en la mesa del escritorio, y seguí trabajando a su luz hasta que repararon la avería.

Al día siguiente fue necesario determinar cuánto tiempo estuvo sin corriente el apartamento. Yo no me di cuenta de qué hora era cuando se apagó la luz ni de a qué hora se volvió a encender. Tampoco sabía qué longitud inicial tenían las velas. Sólo recordaba que las dos velas eran igual de largas, pero de grosor distinto: la más gruesa era de las que se consumen por completo en 5 horas, y la otra, de las que duran 4 horas.

A ambas las encendí por primera vez. Los cabos de las velas no los encontré, los habían tirado.

—Eran tan pequeños —me dijeron— que no valía la pena guardarlos.

—Pero, ¿no recuerdan cómo eran de largos?

—Eran distintos. Uno era cuatro veces más largo que el otro.

Esto fue todo lo que pude saber. Tuve que limitarme a estos datos para calcular el tiempo durante el cual estuvieron encendidas las velas.

¿Cómo resolvería usted esta dificultad?

**Los tres exploradores** En una situación no menos difícil se encontraron una vez tres exploradores a pie, que tenían que cruzar un río sin puente. Es cierto que por el río se paseaban en una canoa dos muchachos dispuestos a prestar ayuda a los soldados. Pero la canoa era tan pequeña, que sólo podía aguantar el peso de un soldado; incluso un soldado y un niño no podían montarse en ella sin peligro de zozobrar. Por otra parte, los soldados no sabían nadar.

En estas condiciones parecía que sólo un soldado podría pasar el río. No obstante, los tres exploradores estuvieron pronto en la orilla opuesta y devolvieron la barquilla a los muchachos.

¿Cómo consiguieron esto?

**El hato de vacas**

Esta es una de las variantes de un problema antiquísimo y muy interesante.

Un padre repartió entre sus hijos un hato de vacas. Al mayor le dio una vaca y $1/7$ de todas las demás; al segundo, dos vacas y $1/7$ de todas las demás; al tercero, tres vacas y $1/7$ de todas las demás; al cuarto, cuatro vacas y $1/7$ de todas las demás, y así sucesivamente. Así quedó repartido el hato entre los hijos sin que sobrara nada.

¿Cuántos eran los hijos y qué cantidad de vacas tenía el hato?

**El metro cuadrado**

Cuando Aliosha oyó por primera vez que un metro cuadrado tiene un millón de milímetros cuadrados, no quería creerlo.

—¿De dónde pueden salir tantos? —se asombraba—. Yo tengo una hoja de papel milimetrado que tiene exactamente un metro de longitud y otro de anchura. ¿Es posible que en este cuadrado haya un millón de cuadraditos milimétricos? ¡No lo creo!

—Pues, cuéntalos —le dijeron.

Y Aliosha se decidió a contar todos los cuadraditos. Se levantó por la mañana temprano y empezó a contar, señalando meticulosamente con un punto cada cuadradito contado.

En señalar un cuadradito tardaba un segundo y la cosa iba rápida.

Trabajó Aliosha sin enderezar el espinazo. Pero, ¿qué piensa usted?, ¿consiguió aquel día convencerse de que en un metro cuadrado hay un millón de milímetros cuadrados?

**El ciento de nueces**

Cien nueces deben repartirse entre 25 personas de manera que a ninguna de ellas le toque un número par de nueces.

¿Puede usted hacer esto?

**¿Cómo repartir el dinero?**

Dos pastores decidieron hacer gachas: uno de ellos echó en el caldero 200 g de harina y el otro, 300 g. Cuando las gachas estuvieron a punto y los pastores iban a empezar a comer, se unió a ellos un caminante.

Cuando se marchó, les dio, por haber comido con ellos, 50 copeikas.

¿Cómo deberán los pastores repartirse equitativamente el dinero recibido?

**Un reparto de manzanas**

Hay que dividir nueve manzanas en partes iguales entre 12 pioneros. El reparto se desea hacer de tal modo, que ninguna manzana quede dividida en más de cuatro partes. El problema, a primera vista, parece que no tiene solución, pero el que sabe quebrados puede resolverlo sin gran dificultad.

Una vez hallada la solución, tampoco será difícil resolver otro problema de este mismo tipo: repartir siete manzanas entre 12 niños, de manera que ninguna de ellas sea dividida en más de cuatro partes.

**¿Cómo repartir las manzanas?**

A casa de Miguelito vinieron cinco compañeros suyos. El padre de Miguelito quiso invitar a los seis niños a manzanas, pero resultó que solamente había cinco frutos. ¿Qué hacer? Como no quería disgustar a ninguno, tendría que repartirlas entre todos. Está claro que habría que cortar las manzanas. Pero cortarlas en trozos muy pequeños no estaba bien; el padre no quería que ninguna manzana fuera cortada en más de tres partes. Se planteaba, pues, el problema siguiente: repartir cinco manzanas, en partes iguales, entre seis niños, de manera que ninguna manzana resulte cortada en más de tres partes.

¿Cómo resolvió el padre de Miguelito este problema?

**Una barca para tres**

Tres aficionados al deporte del remo tienen una barca común y quieren arreglárselas de tal modo, que cada uno de ellos pueda utilizar la barca en cualquier instante, sin que ningún extraño pueda llevársela. Para esto piensan atar la barca con una cadena cerrada por tres candados.

Cada uno de los amigos tiene una sola llave, pero con ella puede abrir el candado y coger la barca sin esperar a que lleguen los otros con sus llaves.

¿Qué hicieron para que todo les saliera tan bien?

**Esperando el tranvía**

Tres hermanos, que volvían del teatro a casa, llegaron a la parada del tranvía dispuestos a montarse en el primer vagón que pasase. El tranvía no llegaba, pero el hermano mayor dijo que debían esperar.

—¿Para qué esperar aquí? —replicó el hermano de en medio—. Mejor es que sigamos adelante. Cuando el tranvía nos alcance, nos montamos en él, pero ya habremos recorrido parte del camino y llegaremos antes a casa.

—Si echamos a andar —opuso el hermano menor—, será preferible que vayamos no hacia adelante, sino hacia atrás: así encontraremos antes al tranvía que venga y antes estaremos en casa.

Como los hermanos no pudieron llegar a un acuerdo, cada uno hizo como pensaba: el mayor se quedó a esperar el tranvía, el de en medio, echó a andar hacia adelante, y el menor, hacia atrás.

¿Qué hermano llegó antes a casa y cuál de los tres procedió más lógicamente?

SOLUCIONES

## El maestro y el alumno

La sentencia fue la siguiente: denegar la demanda del maestro, pero concediéndole el derecho a entablar querella por segunda vez, sobre una nueva base, a saber: la de que el alumno ya había ganado su primer pleito. Esta segunda demanda debería ser resuelta, indudablemente, a favor del maestro.

## La herencia

La viuda debe recibir 1000 rublos, el hijo, 2000 rublos, y la hija, 500 rublos. En este caso se cumplirá la voluntad del testador, ya que la viuda recibe la mitad que el hijo y el doble que la hija.

## El trasiego

Hay que hacer los siete trasiegos que se indican claramente en la tabla siguiente:

| | 4 l | $1^1/_2$ l | $2^1/_2$ l |
|---|---|---|---|
| 1er trasiego | $1^1/_2$ | — | $2^1/_2$ |
| 2º | $1^1/_2$ | $1^1/_2$ | 1 |
| 3er | 3 | — | 1 |
| 4º | 3 | 1 | — |
| 5º | $^1/_2$ | 1 | $2^1/_2$ |
| 6º | $^1/_2$ | $1^1/_2$ | 2 |
| 7º | 2 | — | 2 |

## ¿Cómo alojarlos?

El secreto consiste en que se quedó sin habitación el segundo huésped: después de los huéspedes 1° y 11° se pasó al 3°, olvidándose del 2°. Por esto se «consiguió» un alojamiento que era imposible a todas luces.

## Las dos velas

Para resolver este problema hay que plantear una ecuación muy sencilla. Llamemos $x$ al número de horas que estuvieron encendidas las velas. Cada hora ardía $^1/_5$ parte (de la longitud) de la vela gruesa y $^1/_4$ parte de la vela delgada. Por lo tanto, la longitud del cabo de la vela gruesa vendrá expresada (en fracciones de la longitud de la vela entera) por $1 - ^x/_5$, y la del cabo de la delgada, por $1 - ^x/_4$. Sabemos que las velas eran iguales de largas, y que el cuádruple de la longitud del cabo de la primera, $4\,(1 - ^x/_5)$, era igual a la longitud $1 - ^x/_4$ del cabo de la segunda:

$$4\left(1-\frac{x}{5}\right)=1-\frac{x}{4}.$$

Resolviendo esta ecuación hallamos que $x = 3^3/_4$.

Por lo tanto, las velas estuvieron encendidas 3 horas y 45 minutos.

## Los tres exploradores

Hubo que hacer los seis viajes que siguen:

*1er viaje.* Los dos muchachos van a la orilla opuesta, uno se queda allí y el otro le trae la barca a los exploradores.

*2° viaje.* El muchacho que trajo la barca se queda en esta orilla y en la canoa se monta el primer soldado, el cual se traslada a la otra orilla. La barca la trae de vuelta el segundo muchacho.

*3er viaje.* Los dos muchachos cruzan el río en la barca, uno queda en la otra orilla y el otro vuelve con la barca.

*4° viaje.* El segundo soldado cruza el río. La barca vuelve con el muchacho que se quedó en la otra orilla.

*5° viaje.* Es una repetición del tercero.

*6° viaje.* El tercer soldado se traslada a la orilla opuesta. La barca regresa con un muchacho, se monta el otro y continúan su interrumpido paseo por el río.

Ahora los tres soldados están en la otra orilla.

## El hato de vacas

Para resolver este problema por aritmética (es decir, sin recurrir a las ecuaciones) hay que empezar por el fin.

El hijo menor recibió tantas vacas como hermanos tenía, porque $^1/_7$ del hato restante no pudo recibir, ya que después de él no quedó ningún resto.

El hijo precedente recibió una vaca menos que hermanos tenía y, además $^1/_7$ del hato restante. Esto quiere decir, que lo que recibió el hijo menor eran la $^6/_7$ partes de este hato restante.

De aquí se deduce que el número de vacas que recibió el hijo menor debe ser divisible por seis.

Supongamos que este hijo menor recibió seis vacas y veamos si sirve esta suposición. Si el hijo menor recibió seis vacas, quiere decir que era el sexto hijo y que en total eran seis hermanos. El quinto hijo recibió cinco vacas y, además, $^1/_7$ de siete, es decir, seis vacas. Se comprende que los últimos hijos recibieron $6 + 6$ vacas, que constituyen las $^6/_7$ partes de las que quedaron después de recibir su parte el cuarto hijo. El resto completo sería $12 : {^6/_7} = 14$ vacas; por consiguiente, el cuarto hijo recibió $4 + {^{14}/_7} = 6$.

Calculamos el resto del hato después de recibir su parte el tercer hijo: $6 + 6 + 6$, es decir, 18, son las $^6/_7$ partes de dicho resto; por lo tanto, el resto completo será $18 : {^6/_7} = 21$. Al tercer hijo le correspondieron, pues, $3 + {^{21}/_7} = 6$ vacas.

Del mismo modo hallamos que los hijos segundo y primero también recibieron seis vacas cada uno.

Nuestra suposición ha resultado verosímil: los hijos eran seis en total y en el hato había 36 vacas.

¿Hay otras soluciones? Supongamos que los hijos no fueran seis, sino 12; esta suposición no sirve. Tampoco sirve el número 18. Y más adelante no vale la pena probar porque 24 o más hijos no podía tener.

## El metro cuadrado

El mismo día era imposible que se convenciera Aliosha. Aunque hubiera estado contando día y noche sin descansar, en un día no hubiera contado nada más que 86 400 cuadraditos. Porque 24 horas tienen en total 86 400 segundos. Tendría que contar casi 12 días sin descanso, y si contara 8 horas al día, para llegar al millón necesitaría un mes.

## El ciento de nueces

Muchos empiezan inmediatamente a probar todas las combinaciones posibles, pero su esfuerzo es vano. Sin embargo, basta pensar un poco para comprender la inutilidad de toda búsqueda: el problema no tiene solución.

Si el número 100 se pudiera dividir en 25 sumandos impares, resultaría que un número impar de números impares puede dar en total 100, es decir, un número par, cosa que, claro está, es imposible.

En efecto, tendríamos 12 pares de números impares y, además, un número impar; cada par de números impares da, como suma, un número par, por lo tanto, la suma de 12 números pares será también un número par, y si a esta suma se añade un número impar, se obtiene un resultado impar. El número 100 no puede componerse en modo alguno con estos sumandos.

## ¿Cómo repartir el dinero?

La mayoría de los que intentan resolver este problema responden, que el que echó 200 g debe recibir 20 copeikas, y el que echó 300 g, 30 copeikas. Este reparto carece de fundamento.

Hay que razonar así: las 50 copeikas deben considerarse como la parte a pagar por un comensal. Como los comensales fueron tres, el precio de las gachas (500 g de harina) es igual a 1 rublo 50 copeikas. El que echó los 200 g aportó, expresándolo en dinero, 60 copeikas (ya que los cien gramos cuestan $150 : 5 = 30$ copeikas), y comió por valor de 50 copeikas; por lo tanto habrá que darle $60 - 50 = 10$ copeikas.

El que aportó los 300 g (es decir, el equivalente a 90 copeikas en dinero) deberá recibir $90 - 50 = 40$ kopeikas.

Así, pues, de las 50 kopeikas, a uno le corresponden 10 copeikas y al otro 40 copeikas.

## Un reparto de manzanas

El reparto de nueve manzanas, en partes iguales, entre 12 pioneros, sin cortar ninguna en más de cuatro partes, es completamente posible.

Hay que proceder así.

Seis manzanas se dividen en dos partes cada una y se obtienen 12 medias manzanas. Las tres manzanas restantes se dividen en cuatro partes iguales cada una, y resultan 12 cuartas partes de manzana. Ahora, a cada uno de los 12 pioneros se la da una mitad y una cuarta parte de manzana: $^{1}/_{2} + ^{1}/_{4} = ^{3}/_{4}$.

De este modo cada pionero recibe $^{3}/_{4}$ de manzana, que es lo que se requería, porque $9 : 12 = ^{3}/_{4}$.

De una manera semejante se pueden repartir las siete manzanas entre los 12 pioneros, de modo que todos reciban la misma cantidad y ninguna manzana se corte en más de cuatro partes. En este caso cada uno debe recibir $^7/_{12}$ de manzana. Pero sabemos que $^7/_{12} = {^3/_{12}} + {^4/_{12}} = {^1/_4} + {^1/_3}$.

Por esto, dividiremos tres manzanas en cuatro partes cada una, y las cuatro manzanas restantes, en tres partes cada una. Resultan 12 cuartas partes y 12 terceras partes.

Está claro que a cada uno hay que darle una cuarta parte y una tercera parte, es decir, $^7/_{12}$ partes de manzana.

## ¿Cómo repartir las manzanas?

Las manzanas se repartieron como sigue. Tres manzanas se cortaron por la mitad y resultaron seis mitades, que se les dieron a los niños. Las dos manzanas restantes se cortaron cada una en tres partes iguales; salieron seis terceras partes, que también se repartieron entre los compañeros de Miguelito.

Por lo tanto, a cada niño se le dio media manzana y una tercera parte de manzana, es decir, todos recibieron la misma cantidad.

Como puede verse, ni una sola manzana fue cortada en más de tres partes iguales.

## Una barca para tres

Los candados deben colgarse unos de otros como se ve en la fig. 220. Puede verse fácilmente que esta cadena de candados puede abrirla y volverla a cerrar con su llave cada uno de los propietarios de la barca.

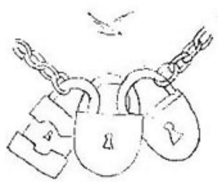


*Figura 220*

## Esperando el tranvía

El hermano menor, yendo hacia atrás por la vía, vio el tranvía venir y se montó en él. Cuando este tranvía llegó a la parada en que estaba el hermano mayor, éste se subió a él. Un poco después, el mismo tranvía alcanzó al hermano de en medio, que había seguido adelante, y lo recogió. Los tres hermanos se encontraron en el mismo tranvía y, claro está, llegaron a casa al mismo tiempo.

Sin embargo, el que procedió más cuerdamente fue el hermano mayor, que esperó tranquilamente en la parada y se cansó menos que los demás.

Las páginas más interesantes de los «Viajes de Gulliver a algunos países remotos» son sin duda aquellas en que se relatan sus extraordinarias aventuras en el país de los diminutos liliputienses y en el de los gigantes «brobdingnagianos». En el país de los liliputienses las dimensiones —altura, anchura y grosor— de todas las personas, animales, plantas y cosas eran 12 veces menores que las ordinarias en nuestro mundo. En el país de los gigantes, por el contrario, eran 12 veces mayores. Por qué eligió Swift, autor de los «Viajes de Gulliver», el número 12, es fácil de comprender si se recuerda que ésta es precisamente la relación del pie a la pulgada en el sistema métrico inglés (el autor de los «Viajes» era inglés). 12 veces menor o 12 veces mayor, parece que no son una disminución o aumento demasiado considerables. Sin embargo, la diferencia de la naturaleza y condiciones de vida en estos países fantásticos, con respecto a aquellas a que estamos acostumbrados, resultó ser extraordinaria. Con frecuencia esta diferencia llama tanto la atención, por lo insospechada que es, que da material para problemas complicados. Aquí queremos ofrecer a nuestros lectores una decena de estos rompecabezas.

### Los animales de Liliput

«Para llevarme a la capital mandaron millar y medio de los más grandes caballos» —cuenta Gulliver del país de los liliputienses.

¿No le parece a usted que 1500 caballos son demasiados para este fin, aún teniendo en cuenta las dimensiones relativas de Gulliver y de los caballos liliputienses?

Acerca de las vacas, toros y ovejas de Liliput refiere Gulliver un hecho no menos sorprendente. Cuando se marchaba, ¡«se las metía en el bolsillo» simplemente! ¿Es posible esto?

### El lecho era duro

De cómo los liliputienses prepararon el lecho para su gigantesco huésped, «Viajes de Gulliver» dice lo siguiente:

«Seiscientos colchones de dimensiones liliputienses ordinarias fueron traídos en carretas a mi local, donde los sastres iniciaron su trabajo. De un centenar y medio de colchones, cosidos entre sí, salió uno en el que cabía libremente a lo largo y a lo ancho. Pusieron, uno encima de otro, cuatro colchones como éste, pero aún así, este lecho era tan duro para mí como el suelo de piedra».

¿Por qué era tan duro este lecho para Gulliver?

¿Está bien hecho el cálculo que aquí se da?

**La barca de Gulliver**

Gulliver se fue de Liliput en una barca que casualmente llegó a sus costas. La barca pareció a los liliputienses un navío monstruoso, que superaba mucho las dimensiones de los barcos más grandes de su flota.

¿Podría usted calcular aproximadamente cuántas toneladas liliputienses de desplazamiento[1]) tenía esta barca, sabiendo que podía levantar 300 kg de carga?

**El barril y el cubo de los liliputienses**

«Cuando me harté de comer —dice después Gulliver sobre su estancia en Liliput—, dije por señas que quería beber. Los liliputienses, con gran destreza y valiéndose de unas cuerdas, elevaron hasta el nivel de mi cuerpo un barril de vino del mayor tamaño, le hicieron rodar hacia mi mano y le quitaron la tapa. Yo me bebí todo de un golpe. Me trajeron rodando otro, lo dejé seco de un trago, lo mismo que el primero, y pedí más, pero no tenían».

*Figura 221*

En otro pasaje dice Gulliver que los cubos de los liliputienses «no eran mayores que un dedal grande nuestro». ¿Es posible que fueran tan pequeños los barriles y los cubos en un país en que todos los objetos eran sólo 12 veces menores que los normales?

**La ración y la comida de Gulliver**

Los liliputienses, leemos en los «Viajes», establecieron para Gulliver la siguiente norma de productos alimenticios:

«Le será entregada diariamente una ración de comestibles y bebidas suficiente para alimentar 1728 súbditos de Liliput».

*Figura 222*

«Trescientos cocineros —cuenta Gulliver en otro pasaje— me preparaban la comida. Alrededor de mi casa montaron barracas, donde hacían los guisos y vivían los cocineros con sus familias. Cuando llegaba la hora de comer, cogía yo con la mano veinte servidores

[1]) El desplazamiento de un buque es igual a la carga máxima que éste puede levantar (incluyendo el peso del propio buque). Una tonelada es igual a 1000 kg.

y los ponía sobre la mesa, y unos cien me servían desde el suelo: unos servían las viandas, los demás traían los barriles de vino y de otras bebidas valiéndose de pértigas, que llevaban, entre dos, sobre los hombros. A medida que iba haciendo falta, los que estaban arriba subían todo a la mesa sirviéndose de cuerdas y poleas».

¿En qué cálculo se basaron los liliputienses para establecer una ración tan enorme y por qué hacía falta una cantidad tan grande de criados para alimentar a un solo hombre, que no era más que una docena de veces más alto que ellos? ¿Son proporcionales esta ración y apetito con la magnitud relativa de Gulliver y los liliputienes?

*Figura 223*

**Los trescientos sastres**

«300 sastres liliputienses recibieron la orden de hacerme un traje completo según los modelos locales». ¿Se necesita, acaso, un ejército de sastres como éste para hacerle un traje a un hombre, cuya talla sólo es una docena de veces mayor que la de un liliputiense?

**Las manzanas y las avellanas gigantescas**

«Una vez —leemos en los «Viajes de Gulliver a Brobdingnag (país de los gigantes)» — fue conmigo al huerto un enano palaciego. Aprovechando el momento en que yo, conforme iba paseando, me encontraba debajo de uno de los árboles, cogió él una rama y la sacudió sobre mi cabeza. Una granizada de manzanas del tamaño de un barrilete cayó ruidosamente al suelo; una me pegó en la espalda y me tiró...»

En otra ocasión «un travieso escolar me tiró una avellana a la cabeza y por poco me da, y la había lanzado con tal fuerza, que me hubiera descalabrado inevitablemente, porque la avellana era poco menor que una pequeña calabaza nuestra».

¿Cuánto piensa, usted, que pesarían aproximadamente la manzana y la avellana de los gigantes?

**El anillo de los gigantes**

Entre los objetos que sacó Gulliver del país de los gigantes había, según él, «un anillo de oro que me regaló la propia reina de Brobdingnag, quitándoselo graciosamente de su dedo meñique y poniéndomelo en el cuello como si fuera un collar».

¿Es posible que un anillo del dedo meñique, aunque fuera de una giganta, pudiera servirle de collar a Gulliver? ¿Cuánto pesaría este anillo?

**Los libros de los gigantes**

Acerca de los libros del país de los gigantes, Gulliver nos refiere los siguientes pormenores:

«Me dieron permiso para coger de la biblioteca libros que leer, pero para que yo pudiera leerlos hubo que hacer todo un dispositivo. Un carpintero me hizo una escalera de madera que podía trasladarse de un sitio a otro. Esta escalera tenía 25 pies de altura y la longitud de cada peldaño alcanzaba 50 pies. Cuando decía que quería leer, colocaban mi escalera a unos diez pies de la pared, con los peldaños vueltos hacia ésta, y en el suelo ponían el libro abierto, apoyándolo en la pared. Yo me subía al escalón más alto y empezaba a leer el renglón superior, recorriendo de izquierda a derecha y viceversa 8 ó 10 pasos, según fuera la longitud de los renglones. A medida que avanzaba la lectura y que los renglones se iban encontrando más abajo que el nivel de mis ojos, descendía yo al segundo peldaño, después al tercero y así sucesivamente. Cuando terminaba de leer una página, volvía a encaramarme en lo más alto y comenzaba la página nueva del mismo modo que antes. Las hojas las pasaba con las dos manos, lo que no era difícil, porque el papel en que imprimen sus libros no es más grueso que nuestro cartón, y su mayor infolio no tiene más de 18—20 pies de largo».

¿Guarda proporción todo esto?

**Los cuellos de los gigantes**

Para terminar nos detendremos en un problema de este tipo no tomado directamente de la narración de las aventuras de Gulliver.

Usted quizá no sepa que el número del cuello no es otra cosa que el de centímetros de su perímetro. Si el perímetro de su cuello mide 38 cm, le vendrá bien un cuello del número 38; un cuello de un número menor le vendrá estrecho y uno de un número mayor le vendrá ancho. El perímetro del cuello de un hombre maduro tiene, por término medio, cerca de 40 cm. Si Gulliver hubiera querido encargar en Londres una partida de cuellos para los habitantes del país de los gigantes, ¿qué número hubiese tenido que encargar?

## Los animales de Liliput

En la respuesta a «La ración y la comida de Gulliver» (pág. 263) se ha calculado que Gulliver, por el volumen de su cuerpo, era 1728 veces mayor que los liliputienses. Está claro que también era el mismo número de veces más pesado. Por lo tanto, a los liliputienses les era tan difícil transportar su cuerpo en un carruaje tirado por caballos, como transportar 1728 liliputienses adultos. Ahora se comprende por qué hubo que enganchar tal cantidad de caballos liliputienses al carro en que iba Gulliver.

*Figura 224*

Los animales de Liliput también eran 1728 veces menores en volumen, y, por lo tanto, la misma cantidad de veces más ligeros, que los nuestros.

Una vaca de las nuestras tiene metro y medio de altura y pesa, aproximadamente 400 kg. Una vaca de los liliputienses tenía 12 cm y pesaba $^{400}/_{1728}$ kg, es decir, menos de $^{1}/_{4}$ de kg. Está claro que una vaca de juguete como ésa, se puede meter en un bolsillo si se quiere.

«Sus caballos y toros más grandes —cuenta con toda veracidad Gulliver—, no medían más de 4—5 pulgadas de altura, las ovejas, cerca de $1^{1}/_{2}$ pulgada, los gansos eran como nuestros gorriones y así sucesivamente hasta los animales más diminutos. Sus animales pequeños eran casi invisibles a mis ojos. Vi como un cocinero desplumaba una alondra del tamaño de una mosca ordinaria o quizá menor; en otra ocasión una muchacha, en presencia mía, enhebraba un hilo invisible en una aguja que yo tampoco podía ver».

## El lecho era duro

El cálculo está bien hecho. Si un colchón de los liliputienses era 12 veces más corto y, como es natural, 12 veces más estrecho que un colchón ordinario, su superficie sería $12 \times 12$ veces menor que la de nuestro colchón. Para que pudiera tumbarse Gulliver eran necesarios, por lo tanto, 144 (redondeando, 150) colchones liliputienses. Pero este colchón era muy delgado (12 veces más delgado que el nuestro). Ahora se comprende por qué, incluso cuatro capas de colchones de este tipo, no eran un lecho suficientemente blando: resultaba un colchón cuatro veces más delgado que el nuestro ordinario.

## La barca de Gulliver

Sabemos por el libro que la barca de Gulliver podía levantar 300 kg, es decir, que desplazaba cerca de $^1/_3$ de t. Una tonelada es el peso de 1 m³ de agua; por lo tanto, la barca desplazaba $^1/_3$ de m³ de agua. Pero todas las medidas lineales de los liliputienses eran 12 veces menores que las nuestras, y las cúbicas, 1728 veces. Es fácil comprender que $^1/_3$ de nuestro metro cúbico contenía cerca de 575 m³ de Liliput y que la barca de Gulliver tenía un desplazamiento de 575 t., o cerca de esto, ya que la cantidad inicial de 300 kg la hemos tomado arbitrariamente.

En nuestros días, cuando buques de decenas de miles de toneladas surcan los mares, un barco de estas dimensiones no asombraría a nadie, pero debe tenerse en cuenta que por los años en que fueron escritos los «Viajes de Gulliver» (a principios del siglo XVIII), eran todavía raros los navíos de 500—600 t.

## El barril y el cubo de los liliputienses

Los barriles y los cubos de los liliputienses, si tenían la misma forma que los nuestros, debían ser 12 veces menores no sólo en altura, sino también en anchura y longitud, y, por lo tanto, su *volumen* sería $12 \times 12 \times 12 = 1728$ veces menor. Esto quiere decir, que si consideramos que en cubo nuestro caben 60 vasos, es fácil calcular que un cubo de los liliputienses sólo podía contener $^{60}/_{1728}$ o, redondeando, $^1/_{30}$ de vaso. Esto es un poquito más de una cucharilla de té y, en efecto, no supera la capacidad de un dedal grande.

Si la capacidad de un cubo de los liliputienses era igual a la de una cucharilla de té, la capacidad de un barril de vino, si cabían en él 10 cubos, no superaba medio vaso. ¿Qué tiene de particular que Gulliver no pudiera saciar su sed con dos barriles de éstos?

## La ración y la comida de Gulliver

El cálculo es correcto. No hay que olvidar que los liliputienses, aunque pequeños, eran completamente semejantes a personas ordinarias y las partes de su cuerpo tenían las proporciones normales. Por lo tanto, no sólo eran 12 veces más bajos, sino también 12 veces más estrechos y 12 veces más delgados que Gulliver. Por esta razón, el volumen de su cuerpo no era 12 veces menor que el del cuerpo de Gulliver, sino $12 \times 12 \times 12$, es decir, 1728 veces menor. Y, está claro, para mantener la vida de un cuerpo así hace falta una cantidad de alimentos respectivamente mayor. He aquí por qué los liliputienses calcularon que a Gulliver le hacía falta una ración suficiente para alimentar a 1728 liliputienses.

Ahora se comprende para qué se necesitaban tantos cocineros. Para preparar 1728 comidas se precisan, por lo menos, 300 cocineros, considerando que un cocinero liliputiense puede guisar media docena de comidas liliputienses. Está claro que también se necesitaba una gran cantidad de gente para elevar esta carga hasta la mesa de Gulliver, cuya altura, como es fácil calcular, era comparable con la de una casa de tres pisos liliputienses.

## Los trescientos sastres

La superficie del cuerpo de Gulliver no era 12 veces mayor que la del cuerpo de los liliputienses, sino $12 \times 12$, es decir, 144 veces mayor. Esto queda claro si nos figuramos que a cada pulgada cuadrada de la superficie del cuerpo de un liliputiense le corresponde un pie cuadrado de superficie del cuerpo de Gulliver, y el pie cuadrado tiene 144 pulgadas cuadradas. Si esto es así, para hacerle un traje a Gulliver haría falta 144 veces más paño que para el traje de un liliputiense y, por lo tanto, una cantidad respectivamente mayor de tiempo de trabajo. Si un sastre puede coser un traje en dos días, para coser 144 trajes (o un traje de Gulliver) en un día, se necesitarían precisamente unos 300 sastres.

## Las manzanas y las avellanas gigantescas

Es fácil calcular que una manzana, que siendo de las nuestras pesa alrededor de 100 g, en el país de los gigantes debería pesar, de acuerdo con su volumen, 1728 veces mayor, 173 kg[1]). Una manzana así, si se cae del árbol y le pega a un hombre en la espalda, no es probable que lo deje vivo. Gulliver salió demasiado bien parado del peligro de que semejante carga lo aplastara.

Una avellana del país de los gigantes debería pesar 3 ó 4 kg, si se toma en consideración que una avellana de las nuestras pesa unos 2 g. Esta avellana gigantesca podría

*Figura 225*

tener alrededor de diez centímetros de diámetro. Y un objeto duro, de 3 kg de peso, lanzado con la velocidad que puede llevar una avellana, puede, naturalmente, romperle la cabeza a un hombre de dimensiones normales. Cuando en otro lugar dice Gulliver que una granizada ordinaria del país de los gigantes lo tiró al suelo y los granizos «le golpearon cruelmente la espalda, los costados y todo el cuerpo, como si fueran bolas grandes de madera de las de jugar al croquet», esto es completamente verosímil, porque cada granizo del país de los gigantes debería pesar no menos de un kilogramo.

## El anillo de los gigantes

El diámetro del dedo meñique de una persona de dimensiones normales mide cerca de $1^1/_2$ cm. Multiplicando por 12, tendremos el diámetro del anillo de la giganta, $1^1/_2 \times 12 = 18$ cm; un anillo de este diámetro tiene una circunferencia de $18 \times 3^1/_7 =$ $= 56$ cm, aproximadamente.

[1]) Una manzana «antonovka» de a medio kilogramo (que las suele haber) debería pesar en el país de los gigantes ... ¡864 kg!

Estas dimensiones son suficientes para que pueda pasar por él una cabeza de tamaño normal (de lo que es fácil convencerse midiéndose con una cuerda la cabeza por su sitio más ancho).

*Figura 226*

En cuanto al peso de este anillo puede decirse que, si un anillito ordinario pesa, por ejemplo, 5 g, uno del mismo tipo, pero del país de los gigantes, pesaría... ¡$8^1/_2$ kg!

### Los libros de los gigantes

Si se parte de las dimensiones de un libro moderno de formato ordinario (de 25 centímetros de largo y 12 de ancho), lo que dice Gulliver nos parece algo exagerado. Para leer un libro de menos de 3 m de altura y $1^1/_2$ de anchura no hace falta una escalera ni es necesario andar hacia la derecha y hacia la izquierda 8 ó 10 pasos. Pero en los tiem-

*Figura 227*

pos de Swift, es decir, a principios del siglo XVIII, el formato ordinario de los libros (infolio) era mucho mayor que ahora. El infolio, por ejemplo, de la «Aritmética» de Magnitski, que salió a luz en la época de Pedro I, tenía cerca de 30 cm de alto y 20 cm de ancho. Aumentando estas dimensiones 12 veces, obtenemos unas medidas imponentes para los libros de los gigantes, a saber: 360 cm (casi 4 m) de altura y 240 cm (2,4 m) de anchura. Leer un libro de 4 metros sin escalera es imposible. Y, sin embargo, esto no es aún un infolio de verdad, cuyas dimensiones son las de una hoja de periódico grande.

Pero incluso este modesto infolio debía pesar en el país de los gigantes 1728 veces más que en el nuestro, es decir, cerca de 3 t. Calculando que tuviera 500 hojas, obtenemos que cada hoja del libro de los gigantes pesaría unos 6 kg, lo que, para los dedos de la mano, resulta bastante oneroso.

## Los cuellos de los gigantes

El perímetro del cuello de los gigantes sería tantas veces mayor que el del cuello de una persona normal, como veces mayor era su diámetro, es decir, 12 veces. Y si una persona normal necesita un cuello del número 40, un gigante gastaría el número $40 \times 12 = 480$.

Como vemos, todo lo que en Swift, al parecer, son imágenes tan raras de su fantasía, resulta que está meticulosamente calculado. Pushkin, respondiendo a ciertos reproches de los críticos a «Eugenio Oneguin» decía, que en su novela «el tiempo estaba calculado por el calendario». Con la misma razón podría decir Swift de «Gulliver» que todos su personajes están concienzudamente calculados según las reglas de la geometría[1]).

[1]) Pero no de acuerdo con las reglas de la *mecánica*, porque en este sentido pueden hacerse a Swift reproches importantes (Véase mi «Mecánica Recreativa»).

266-267



## La recompensa

He aquí lo que, según la tradición, ocurrió hace muchos siglos en la Roma antigua[1]).

I. El caudillo Terencio, por orden del emperador, realizó una campaña victoriosa y volvío a Roma con trofeos. Cuando llegó a la capital, solicitó ser recibido por el emperador.

El emperador lo recibió afablemente, le agradeció los servicios militares que había prestado al imperio y le prometió, en recompensa, darle una alta posición en el senado.

Pero como a Terencio no era esto lo que le hacía falta, replicó:

—Muchas fueron las victorias que alcancé para acrecentar tu poderío y dar gloria a tu nombre. No he temido a la muerte, si hubiera tenido no una, sino muchas vidas, todas las habría inmolado por tí. Pero estoy cansado de guerrear; mi juventud ha pasado, la sangre corre ya más despacio por mis venas. Me ha llegado la hora de descansar en la casa de mis progenitores y de gozar las alegrías de la vida familiar.

—¿Qué deseas de mí, Terencio? —le preguntó el emperador.

—¡Escúchame, señor, con indulgencia! Durante los largos años de mi vida militar, cuando cada día teñía con sangre mi espada, no tuve tiempo de asegurar mi bienestar monetario. Soy pobre, señor...

—Prosigue, valeroso Terencio.

—Si quieres recompensar a tu humilde servidor —continuó el caudillo alentado—, ayúdame con tu generosidad a vivir en paz y en la abundancia, junto al hogar de mi familia, los días que me resten. Yo no busco honores ni una alta posición en el Senado todopoderoso. Quisiera apartarme del poder y de la vida social, para descansar tranquilo. Señor, dame dinero para asegurar el resto de mi vida.

El emperador —según reza la tradición— no brillaba por su generosidad. Le gustaba acumular dinero para él, pero era tacaño para gastarlo en otros. Por esto, la petición del caudillo le hizo pensar.

---

[1]) Esta narración, en interpretación libre, está tomada de un antiguo manuscrito latino perteneciente a una de las bibliotecas particulares de Inglaterra.

—¿Qué cantidad consideras suficiente para tí, Terencio? —le preguntó.

—Un millón de denarios, señor.

El emperador volvió a quedarse pensativo. El caudillo esperaba cabizbajo.

Por fin dijo el emperador:

—Valeroso Terencio, tú eres un gran guerrero y tus gloriosas hazañas merecen una gran recompensa. Yo te daré riqueza. Mañana a mediodía oirás aquí lo que he resuelto.

Terencio hizo una reverencia y se retiró.

II. Al día siguiente, a la hora fijada, se presentó el caudillo en el palacio del emperador.

—¡Salve, esforzado Terencio! —dijo el emperador.

Terencio inclinó sumisamente la cabeza.

—He venido, señor, a oír tu decisión. Prometiste generosamente que me recompensarías.

Y el emperador le respondió:

—No quiero que un guerrero tan noble como tú reciba por sus hazañas una mísera recompensa. Escúchame. En mi tesorería hay 10 millones de ases de cobre[1]). Atiende ahora mis palabras. Vas a la tesorería, coges una moneda, vuelves aquí y la depositas a mis pies. Al día siguiente irás otra vez a la tesorería coges una moneda igual a dos ases y la colocas aquí junto a la primera. El tercer día traerás una moneda de 4 ases; el cuarto, una de 8, el quinto, una de 16, y así sucesivamente duplicando el valor de la moneda. Yo ordenaré que cada día te hagan una moneda del valor correspondiente. Y mientras tengas fuerza suficiente para levantar las monedas, las irás sacando de mi tesorería. Nadie tiene derecho a ayudarte; debes utilizar solamente tu propia fureza. Y cuando te des cuenta de que ya no puedes levantar la moneda, para: nuestro convenio habrá terminado, pero todas las monedas que hayas logrado sacar serán para tí y ésa será tu recompensa.

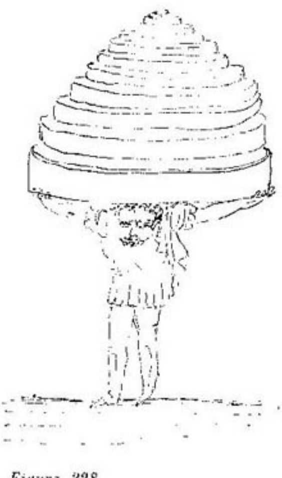


*Figura 228*

Terencio escuchaba codiciosamente cada palabra del emperador. Veía ya la cantidad enorme de monedas, una mayor que otra, que sacaría él de la tesorería del imperio.

—Tu recompensa es verdaderamente generosa —repuso sonriendo de gozo—. Estoy satisfecho de tu benevolencia, señor.

---

1) As, mondea igual a una décima parte del dinario.

III. Y comenzaron las visitas diarias de Terencio a la tesorería imperial. Esta se hallaba cerca de la sala en que recibía el emperador. Los primeros traslados de monedas no le costaron a Terencio ningún trabajo.

El primer día sacó de la tesorería sólo 1 as. Era una moneda pequeña, de 21 mm de diámetro y 5 g de peso[1]).

También fueron fáciles los traslados segundo, tercero, cuarto, quinto y sexto, en que el caudillo sacó monedas 2, 4, 8, 16 y 32 veces más pesadas que la primera.

La séptima moneda pesaba, en nuestro sistema de medidas, 320 g y tenía $8^1/_2$ cm de diámetro (más exactamente 84 mm)[2]).

El octavo día tuvo que sacar Terencio de la tesorería una moneda, equivalente a 128 monedas simples, que pesaba 640 g y tenía cerca de $10^1/_2$ cm de anchura.

El noveno día llevó Terencio a la sala del emperador una moneda igual a 256 monedas simples, que medía 13 cm de anchura y pesaba más de $1^1/_4$ kg.

El duodécimo día el diámetro de la moneda alcanzó casi 27 cm y su peso de $10^1/_4$ kg.

El emperador, que hasta entonces había mirado al caudillo amablemente, ahora lo hacía con aire de triunfo. Veían que ya eran 12 los traslados hechos, y que de la tesorería sólo habían salido 2000 y pico pequeñas monedas de cobre.

El día 13° le proporcionó al valiente Terencio una moneda igual a 4096 monedas simples. Tenía cerca de 34 cm de anchura y su peso equivalía a $20^1/_2$ kg.

El día 14° sacó Terencio de la tesorería una pesada moneda de 41 kg y cerca de 42 cm de anchura.

—¿No te has cansado, mi valiente Terencio? —le preguntó el emperador, conteniendo la risa.

—No, señor mío —le repuso sombrío el caudillo, limpiándose el sudor de la frente.

Llegó el día 15°. Pesada fue este día la carga de Terencio. Poco a poco llegó hasta el emperador llevando una enorme moneda equivalente a 16 384 monedas simples. Tenía 53 cm de anchura y pesaba 80 kg, lo mismo que un fuerte guerrero.

---

[1]) El peso de una moneda de 5 copeikas de cuño actual.

[2]) Si una moneda tiene 64 veces más volumen que la ordinaria, sólo será cuatro veces más ancha y más gruesa, porque $4\times 4\times 4 = 64$. Esto debe tenerse en cuenta más adelante al calcular las dimensiones de las monedas de que se habla en el cuento.

El 16° día, el caudillo se tambaleaba oprimido por la carga que llevaba acuestas. Era una moneda igual a 32 768 monedas simples, que pesaba 164 kg y cuyo diámetro alcanzó 67 cm.

El caudillo estaba agotado y respiraba con dificultad. El emperador se sonreía...

Cuando Terencio llegó al día siguiente a la sala en que recibía el emperador, fue acogido a carcajadas. Ya no podía llevar la carga sobre la espalda, y la iba rodando. Esta moneda tenía 84 cm de diámetro y pesaba 328 kg. Este peso correspondía al de 65 536 monedas simples.

El decimooctavo día fue el último del enriquecimiento de Terencio. Este día terminaron sus visitas a la tesorería y sus pesadas peregrinaciones a la sala del emperador. Esta vez tuvo que llevar una moneda que equivalía a 131 072 monedas simples. Tenía más de un metro de diámetro y pesaba 655 kg. Utilizando su lanza como palanca, Terencio a duras penas pudo hacerla rodar hasta la sala, donde cayó estrepitosamente a los pies del emperador.

Terencio estaba completamente extenuado.

—No puedo más... Basta —murmuró.

El emperador hizo un gran esfuerzo para contener la risa de satisfacción que le producía el rotundo éxito de su treta, y dio orden al tesorero de que calculase cuántos ases había llevado Terencio a la sala de recepción. El tesorero cumplió la orden y dijo:

—Soberano, gracias a tu benevolencia, el victorioso caudillo Terencio ha recibido como recompensa 262 143 ases.

Así, pues, el tacaño emperador sólo le dio a su caudillo cerca de la 40ª parte de la suma, de un millón de dinarios, que Terencio le había pedido.

* * *

Comprobemos el cálculo que hizo el tesorero y, a la vez, el peso de las monedas que sacó Terencio:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| el | 1er | día | 1 | que | pesaba | 5 g |
| » | 2º | » | 2 | » | » | 10 » |
| » | 3er | » | 4 | » | » | 20 » |
| » | 4º | » | 8 | » | » | 40 » |
| » | 5º | » | 16 | » | » | 80 » |
| » | 6º | » | 32 | » | » | 160 » |
| » | 7º | » | 64 | » | » | 320 » |
| » | 8º | » | 128 | » | » | 640 » |
| » | 9º | » | 256 | » | » | 1 kg 280 » |
| » | 10º | » | 512 | » | » | 2 » 560 » |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| el 11º | día | 1 024 | que pesaban | 5 kg | 120 g |
| » 12º | » | 2 048 | » » | 10 » | 240 » |
| » 13º | » | 4 096 | » » | 20 » | 480 » |
| » 14º | » | 8 192 | » » | 40 » | 960 » |
| » 15º | » | 16 384 | » » | 81 » | 920 » |
| » 16º | » | 32 768 | » » | 163 » | 840 » |
| » 17º | » | 65 536 | » » | 327 » | 680 » |
| » 18º | » | 131 072 | » » | 655 » | 360 » |

La suma de los números de estas series se puede calcular fácilmente: la de la segunda columna es igual a 262 143, de acuerdo con la regla existente[1]). Terencio le pidió al emperador un millón de dinarios, o sea, 10 millones de ases. Por consigiente, recibió una suma 10 000 000 : 263 143 = 38 veces menor que la que había solicitado.

**La leyenda del tablero de ajedrez**

I. El ajedrez es uno de los juegos más antiguos que se conocen. Tiene ya muchos siglos de existencia y no es de extrañar que haya muchas tradiciones relacionadas con él, cuya veracidad, debido al mucho tiempo transcurrido, es imposible comprobar. Una de estas leyendas es la que quiero referir ahora. Para comprenderla no hay que saber jugar al ajedrez; basta saber que se juega sobre un tablero dividido en 64 casillas o escaques (negros y blancos alternativamente).

El ajedrez fue ideado en la India, y cuando el monarca hindú Sheram lo conoció, quedó admirado de su ingeniosidad y de la diversidad de situaciones que podían darse en él. Al saber que el juego había sido inventado por un súbdito suyo, ordenó que lo llamasen, para premiarlo personalmente por su feliz idea.

El inventor, que se llamaba Zeta, se presentó ante el trono del soberano. Era un sabio modestamente vestido, que vivía de lo que le pagaban sus discípulos.

—Quiero premiarte dignamente, Zeta, por el magnífico juego que has ideado —le dijo el monarca.

El sabio hizo una reverencia.

—Soy lo suficientemente rico para poder satisfacer tu deseo más atrevido —continuó el monarca—. Dime qué premio quieres y lo recibirás.

---

[1]) Cada número de esta serie es igual a la suma de todos los precedentes más una unidad. Por esto, cuando hay que sumar todos los números de una serie de este tipo, por ejemplo, de 1 a 32 768, nos limitamos a añadirle al último número (32 768) la suma de todos los precedentes, es decir, le añadimos el mismo número menos una unidad (32 768—1), y obtenemos 65 535.

Zeta permaneció callado.

—No seas tímido —le animó el monarca—. Expresa tu deseo. Para complacerte no escatimaré nada.

—Grande es tu bondad señor. Pero dame un plazo para pensar la respuesta. Mañana, después de reflexionar bien, te haré mi petición.

*Figura 229*

Cuando al día siguiente se presentó de nuevo Zeta ante los peldaños del trono, maravilló al monarca con la simpar modestia de su petición.

—Señor —dijo Zeta—, ordena que me den por el primer escaque del tablero de ajedrez un grano de trigo.

—¿Un simple grano de trigo? —se asombró el monarca.

—Sí, señor. Por el segundo escaque ordena que me den dos granos, por el tercero, cuatro, por el cuarto 8 por el quinto, 16, por el sexto, 32 ...

—¡Basta! —le interrumpió el monarca irritado—. Recibirás los granos de trigo por los 64 escaques del tablero, de acuerdo con tu petición, es decir, correspondiéndole a cada uno el doble que al precedente. Pero ten presente que tu petición es indigna de mi generosidad. Pidiendo una recompensa tan insignificante, menosprecias irrespetuosamente mi gracia. En verdad que, como maestro que eres, debías dar mejor ejemplo de respeto a la bondad de tu soberano. ¡Puedes retirarte! Mis servidores se sacarán el saco de trigo.

Zeta se sonrió al salir del salón y se puso a esperar a la puerta del palacio.

II

Durante la comida, el monarca se acordó del inventor del ajedrez y mandó que preguntaran si se había llevado ya el desatinado Zeta su miserable recompensa

—Señor —le respondieron—, tu orden se está cumpliendo. Los matemáticos de la corte están calculando el número de granos de trigo que hay que entregar.

El monarca se disgustó, no estaba acostumbrado a que su mandato se cumpliera tan lentamente.

Por la noche, cuando iba a acostarse, volvió Sheram a interesarse por el tiempo que hacía que Zeta había transpuesto con su saco de trigo la verja del palacio.

—Señor —le respondieron—, tus matemáticos siguen trabajando sin descanso y esperan que antes del alba terminarán el cálculo.

—¿Por qué demoran tanto este asunto? —exclamó el monarca—. Mañana, antes de que yo me despierte, debe serle entregado todo a Zeta, ¡hasta el último grano! Y, ¡que no tenga que dar dos veces la orden!

Por la mañana dieron cuenta al monarca de que el decano de los matemáticos de la corte pedía permiso para hacerle una información importante.

El monarca ordenó que lo hicieran pasar.

—Antes de que me hables de tu asunto —dijo Sheram—, deseo saber si le ha sido entregada a Zeta la miserable recompensa que él mismo fijó.

—Precisamente para eso me he atrevido a presentarme ante tí a una hora tan temprana —replicó el anciano—. Hemos calculado concienzudamente la cantidad de granos que desea recibir Zeta. Esta cantidad es tan grande...

—Por muy grandes que sea —le interrumpió orgullosamente el monarca—, mis graneros no se empobrecerán. La recompensa está prometida y debe darse...

—Señor, satisfacer ese deseo es imposible. En todos tus graneros no hay la cantidad de granos que pide Zeta. No los hay en todos los graneros de tu reino. Ni en toda la superficie de la Tierra se podría encontrar ese número de granos de trigo. Si deseas cumplir tu promesa a toda costa, manda convertir en campos labrados los reinos de la Tierra, manda secar los mares y océanos, manda fundir los hielos y las nieves que cubren los desiertos lejanos del norte. Que todo ese espacio sea completamente sembrado de trigo. Y todo lo que nazca en esos campos, ordena que se lo den a Zeta. Sólo entonces podrá recibir su recompensa.

El monarca escuchó boquiabierto las palabras del sabio.

—Pero dime, ¿qué monstruoso número es ese? —le dijo pensativo.

—Dieciocho trillones, cuatrocientos cuarenta y seis mil seiscientos cuarenta y cuatro billones, setenta y tres mil setecientos nueve millones, quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince, señor.

III. Esta es la leyenda. ¿Ocurrió en realidad lo que en ella se cuenta? No lo sabemos. Pero que el premio de que habla la leyenda debería expresarse por dicho número, es cosa que puede usted comprobar si tiene paciencia para hacer el cálculo. Empezando por la unidad, hay que sumar los números 1, 2, 4, 8, 16, etc. El resultado de la 63ª duplicación indicará lo que había que darle al inventor por el 64° escaque.

Procediendo como se explicó en la página 271 hallamos sin dificultad la suma total de los granos debidos, si duplicamos el último número y le restamos una unidad. Por lo tanto, el cálculo se reduce solamente a multiplicar entre sí 64 doses: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times$ $\times 2 \times 2$ y así sucesivamente 64 veces.

Para simplificar las operaciones, dividimos estos 64 factores en seis grupos de a 10 doses y en uno, el último, de cuatro doses. El producto de 10 doses, como es fácil comprobar, es 1024, y el de cuatro doses, 16. Por consiguiente, el resultado que se busca es igual a $1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times$ $\times 1024 \times 16$.

Haciendo la multiplicación $1024 \times 1024$ obtenemos 1 048 576.

Ahora nos queda hallar $1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times$ $\times 1\,048\,576 \times 16$ y restarle al resultado una unidad, con lo cual conoceremos el número buscado de granos, es decir, 18 446 744 073 709 551 615.

Si desea usted saber lo enorme que es este número gigantesco, calcule las dimensiones que debería tener el granero capaz de contener esta cantidad de granos de trigo. Se sabe que un metro cúbico de trigo contiene cerca de 15 millones de granos. Por lo tanto, la recompensa al inventor del ajedrez debería ocupar un volumen aproximado de 12 000 000 000 000 m$^3$ o 12 000 km$^3$. Si el granero tuviera 4 m de altura y 10 m de anchura, su longitud debería ser de 300 000 000 km, es decir, ¡dos veces mayor que la distancia de la Tierra al Sol!

Está claro que el monarca hindú no podía dar un premio como éste. Pero si hubiera sabido matemáticas, le hubiese sido fácil liberarse de una deuda tan onerosa. Para esto no hubiera tenido que hacer más que proponer a Zeta que él mismo contara los granos, uno a uno, del trigo que debía recibir.

En efecto, si Zeta se hubiera puesto a contar sin descanso, día y noche, pasando un grano por segundo, el primer día sólo hubiese contado 86 400 granos. En contar un millón de granos tardaría no menos de 10 días. Un metro cúbico de trigo le llevaría aproximadamente medio año. Contando continuamente durante 10 años no reuniría más de 20 metros cúbicos. Como puede ver, aunque hubiera consagrado el resto de su vida a contar, Zeta sólo hubiese recibido una parte insignificante del premio que pidió.

**Una propagación rápida**

Una cápsula de amapola está llena de granitos minúsculos; de cada uno de ellos puede crecer una nueva planta. ¿Cuántas amapolas se obtendría si todas las semillas de una cápsula fueran fértiles? Para conocer esto hay que contar las semillas que hay en la cápsula. Esta ocupación es algo aburrida, pero el resultado es tan interesante que vale la pena armarse de paciencia y llevar la cuenta hasta el fin. Resulta que una cápsula de amapola contiene cerca de 3000 semillas.

¿Qué se deduce de esto? Se deduce que, si alrededor de nuestra amapola hay una superficie suficiente de tierra apropiada, cada semillita germinará y el verano siguiente crecerán en este sitio 3000 amapolas. ¡Todo un campo de amapolas procedente de una sola cápsula!

Pero veamos lo que ocurre después. Cada una de las 3000 plantas dará, por lo menos, una cápsula (lo más frecuente es que dé varias), que contendrá 3000 semillas. Al germinar, las semillas de cada cápsula darán 3000 plantas nuevas y, por consiguiente, al segundo año tendremos no menos de

$3000 \times 3000 = 9\,000\,000$ de plantas.

Es fácil calcular que al tercer año el número de descendientes de nuestra única amapola inicial alcanzará ya

$$9\,000\,000 \times 3000 = 27\,000\,000\,000.$$

Y al cuarto año

$$27\,000\,000\,000 \times 3000 = 81\,000\,000\,000\,000.$$

Al quinto año el mundo les vendrá estrecho a las amapolas, porque el número de plantas sería igual a

$$81\,000\,000\,000\,000 \times 3000 = 243\,000\,000\,000\,000\,000.$$

El área de todas las tierras emergidas, es decir, de todos los continentes e islas de la Tierra es igual a 135 millones de kilómetros cuadrados (135 000 000 000 000 de metros cuadrados, o sea, 2000 veces menor que el número de amapolas que crecerían.

Como puede ver, si todas las semillas de la amapola germinaran, la descendencia de una sola planta podrían cubrir al cabo de cinco años la superficie de todas las tierras de la esfera terrestre, formando un tupido matorral, en el que habría 2000 plantas en cada metro cuadrado. ¡He aquí el gigante numérico que se oculta en cada diminuta semilla de amapola!

Haciendo un cálculo semejante para otra planta cualquiera que dé menos semillas, llegaríamos al mismo resultado, con la única diferencia de que su descendencia cubriría toda la superficie de la Tierra no en cinco años, sino en un plazo un poco mayor. Tomemos, por ejemplo, el diente de león, que da anualmente cerca de 100 semillas[1]). Si todas ellas germinaran, tendríamos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| el | 1er | año | 1 | planta |
| » | 2º | » | 100 | plantas |
| » | 3er | » | 10 000 | » |
| » | 4º | » | 1 000 000 | » |
| » | 5º | » | 100 000 000 | » |
| » | 6º | » | 10 000 000 000 | » |
| » | 7º | » | 1 000 000 000 000 | » |
| » | 8º | » | 100 000 000 000 000 | » |
| » | 9º | » | 10 000 000 000 000 000 | » |

---

1) En una cabezuela de diente de león llegaron a contarse cerca de 200 semillas.

Esta cifra es 70 veces mayor que el número de metros cuadrados que tiene la superficie de todas las tierras emergidas.

Por consiguiente, al noveno año todos los continentes de la Tierra estarían cubiertos de dientes de león, con una densidad de 70 plantas por metro cuadrado.

¿Por qué no observa en realidad esta reproducción extraordinariamente rápida? Porque la inmensa mayoría de las semillas perecen sin germinar: no caen en tierra apropiada y no germinan en absoluto, o dan brotes, pero son ahogados por otras plantas o destruidas por los animales. Si no existiera esta destrucción intensiva de las semillas y los brotes, cada planta podría cubrir completamente y en poco tiempo todo nuestro planeta.

Esto es cierto no sólo para las plantas, sino también para los animales. De no ser por la muerte, la descendencia de una pareja de animales cualesquiera, más tarde o más temprano, llenaría toda la Tierra. Las plagas de langosta, que cubren a veces enormes extensiones, pueden dar cierta idea de lo que ocurriría si la muerte no impidiera la multiplicación de los animales. Al cabo de dos o tres decenas de años se cubrirían los continentes de bosques y estepas intransitables, donde millones de animales lucharían entre sí por un sitio. El océano se poblaría de peces tan densamente, que la navegación sería imposible. Y el aire apenas si sería transparente, debido a la multitud de aves e insectos que polularían en él.

Para terminar citaremos varios casos verídicos de multiplicación extraordinariamente rápida de animales colocados en condiciones propicias.

En América no existían gorriones al principio. Este pájaro, tan corriente en nuestras tierras, fue importado premeditadamente por los Estados Unidos para que destruyera los insectos perniciosos. Como es sabido, los gorriones se alimentan en abundancia de gusanos voraces y de otros insectos perjudiciales para las huertas y jardines. A los gorriones les gustó el nuevo ambiente; en América no había aves de rapiña que los destruyeran y ellos empezaron a multiplicarse rápidamente. La cantidad de insectos perniciosos empezó a disminuir notablemente, pero pronto los gorriones fueron tan numerosos, que faltos de alimento animal tuvieron que recurrir al vegetal, y empezaron a devastar los sembrados[1]). Hubo que comenzar la lucha contra los gorriones. Esta lucha le costó tan caro a los norteamericanos, que motivó una ley que prohibía en adelante la importación a EE.UU. de toda clase de animales.

Segundo caso. Cuando los europeos descubrieron Australia, en este país no había *conejos*. El conejo fue llevado allí a finales del siglo XVIII, y como no existían animales carnívoros que se alimentaran de ellos, la multiplicación de estos roedores adquirió un ritmo extraordinariamente rápido. Pronto una verdadera plaga de conejos invadió toda Australia, ocasionando daños horrorosos a la agricultura y convirtiéndose en un verdadero desastre. Medios enormes fueron lanzados a la lucha contra este azote de la agricultura, y solamente gracias a las enérgicas medidas tomadas fue posible poner fin a este infortunio. Una cosa muy parecida ocurrió en California también con los conejos.

El tercer caso aleccionador tuvo lugar en la isla de Jamaica. En esta isla había muchísimas serpientes venenosas. Para acabar con ellas se acordó llevar a la isla el *pájaro* llamado *secretario*, furioso destructor de las serpientes venenosas. El número de serpientes disminuyó, en efecto, rápidamente, pero, en cambio, se propagaron extraordinariamente las ratas de campo, que antes eran devoradas por las serpientes. Las ratas ocasionaron tales destrozos en las plantaciones de caña de azúcar, que hubo que pensar seriamente en cómo exterminarlas. Se sabe que uno de los mayores enemigos de las ratas es la *mangosta* de la India. Se resolvió llevar a Jamaica cuatro parejas de estos animales y dejar que se propagaran libremente. Las mangostas se aclimataron bien a su nueva patria y pronto poblaron toda la isla. Antes de 10 años habían exterminado a las ratas casi por completo. Pero cuando se acabaron las ratas, las mangostas empezaron a alimentarse de lo que podían y se hicieron omnívoras: atacaban a los cachorros, cabritos, lechones y aves de corral, y se comían los huevos. Y cuando se multiplicaron aún más, empezaron con los árboles frutales, los campos de trigo y las plantaciones. Los isleños tuvieron que emprender la persecución de las que fueron aliados, pero sólo lograron limitar hasta cierto punto el daño ocasionado por las mangostas.

---

[1]) Y en las islas Hawai desplazaron totalmente a todos los pájaros pequeños.

El almuerzo gratuito

10 jovenes decidieron celebrar con un almuerzo camaraderil, en un restaurante, la terminación de sus estudios en la escuela de enseñanza media. Cuando se reunieron todos y ya habían servido el primer plato, empezaron a discutir acerca de cómo sentarse a la mesa. Unos proponían colocarse por orden alfabético, otros, por edades, los terceros, por las calificaciones obtenidas, los cuartos, por estaturas, etc.

La discusión se prolongó, la sopa tuvo tiempo de enfriarse, pero a la mesa nadie se sentaba.

Los reconcilió el camarero, que les dirigió las palabras siguientes:

—Amigos jóvenes, dejad vuestra disputa, sentaos a la mesa de cualquier modo y escuchadme.

Todos se sentaron y el camarero prosiguió:

—Que uno de vosotros apunte el orden en que acabáis de sentarse. Mañana venid de nuevo a comer aquí y sentaos en otro orden. Pasado mañana vuélvanse a sentar de otro modo y así sucesivamente hasta que prueben todas las colocaciones posibles. Cuando llegue el turno de volverse a sentar como ahora, yo prometo solemnemente que empezaré a invitarles diariamente con las comidas más exquisitas y sin cobrarles nada.

La proposición gustó. Acordaron reunirse cada día en este restaurante y probar todas las maneras posibles de sentarse a la mesa, para cuanto antes comenzar a disfrutar de las comidas gratuitas.

Pero ese día no llegó. Y no porque el camarero no quisiera cumplir su promesa, sino porque el número de todas las colocaciones posibles es demasiado grande. Este número es igual a 3 628 800, ni más ni menos. Esta cantidad de días, como no es difícil calcular, constituye... ¡Casi 10 mil años!

A usted quiza le parezca exagerado que 10 personas puedan sentarse a la mesa de tantas maneras distintas. En este caso, compruebe el cálculo.

En primer lugar hay que aprender a determinar el número de permutaciones. Para simplificar empezaremos el cálculo con un número pequeño de objetos, por ejemplo, con tres. Llamémosles $A$, $B$ y $C$.

Queremos saber de cuántas maneras se pueden cambiar de sitio, poniendo uno en lugar de otro. Razonamos así. Si dejamos aparte el objeto $C$, los otros dos pueden colocarse solamente de dos maneras.

Ahora vamos a agregar el objeto $C$ a cada una de estas parejas. Lo podemos hacer de tres modos:

1) poniendo $C$ *detrás* de la pareja;
2) » $C$ *delante* de la pareja;
3) » $C$ *entre* los objetos que forman la pareja.

El objeto $C$, además de estas tres posiciones, es evidente que no puede tener otras. Pero cuando tenemos *dos* parejas, $AB$ y $BA$, el número total de maneras en que pueden colocarse los tres objetos será $2 \times 3 = 6$.

Sigamos adelante. Hagamos el cálculo para cuatro objetos. Sean estos $A$, $B$, $C$ y $D$. Lo mismo que antes, dejamos aparte uno de los objetos, por ejemplo, el $D$, y con los restantes hacemos todas las combinaciones posibles. Ya sabemos que el número de estas combinaciones es seis. ¿Por cuántos procedimientos se puede añadir el cuarto objeto, $D$, a cada una de estas seis triadas? Es evidente que se puede:

1) poner $D$ *detrás* de la triada;
2) » $D$ *delante* de la triada;
3) » $D$ *entre* el objeto primero y segundo;
4) » $D$ *entre* el objeto segundo y tercero.

Obtenemos, por consiguiente, en total $6 \times 4 = 24$ combinaciones; y como $6 = 2 \times 3$, y $2 = 1 \times 2$, el número total de todas las permutaciones se puede representar en forma del producto $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Razonando de este modo, en el caso de cinco objetos sabremos que el número de combinaciones correspondientes es igual a $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Si los objetos son seis, tendremos $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$, y así sucesivamente.

Volvamos ahora al caso de los 10 comensales. El número de sus posibles permutaciones podremos determinarlo tomándonos la molestia de hacer la multiplicación $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$.

El número que se obtiene, como ya se dijo antes, es 3 628 800.

El cálculo será más difícil si entre los 10 comensales hubiese cinco muchachas y quisieran sentarse a la mesa alternando con los jóvenes. Aunque en este caso el número de los posibles traslados es mucho menor, su cálculo es algo más complicado.

Supongamos que uno de los jóvenes se sienta a la mesa en un sitio cualquiera. Los cuatro restantes podrán sentarse, dejando entre ellos sillas vacías para las muchachas, de $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ maneras diferentes. Como el número total de sillas es 10, el primer joven podrá sentarse en 10 sitios; por lo tanto, el número total de combinaciones que pueden hacer los jóvenes será $10 \times 24 = 240$.

¿De cuántas maneras podrán sentarse las muchachas en las sillas vacías que hay entre los jóvenes? Evidentemente que de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ maneras. Combinando cada una de las 240 posiciones de los jóvenes con cada una de las 120 posiciones de las muchachas, obtenemos el número total de las colocaciones posibles, es decir, $240 \times 120 = 28\,800$.

Este número es mucho menor que el anterior y requeriría solamente un poco menos de 79 años. Si los jóvenes clientes del restaurante llegasen a vivir hasta los 100 años, podrían recibir la comida gratuita, si no del mismo camarero, de uno de sus herederos.

Sabiendo contar las permutaciones, podremos determinar ahora cuántas combinaciones diferentes pueden hacerse con las fichas en la cajita del «juego de los 15»[1]). En otras palabras, podemos calcular el número total de problemas que puede ofrecernos este juego. Es fácil comprender que este cálculo se reduce a determinar el número de permutaciones de 15 objetos. Como sabemos, para esto hay que multiplicar $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times$ $\times \ldots$ y así sucesivamente $\ldots \times 14 \times 15$.

Este cálculo da el resultado siguiente: 1 307 674 365 000, es decir, más de un billón.

De este enorme número de problemas, la mitad es imposible de resolver. Existen, pues, más de 600 millares de millones de posiciones imposibles de resolver en este juego. Por esto se comprende en parte la epidemia de entusiasmo despertado por el «juego de los 15», que se apoderó de la gente que no sospechaba la existencia de un número tan enorme de casos insolubles.

Advertimos también, que si fuera imaginable dar a las fichas una nueva posición cada segundo, para probar todas las posiciones posibles sería necesario trabajar sin descanso, día y noche, durante más de 40 mil años.

Para terminar esta charla acerca del número de permutaciones, resolveremos un problema de este tipo tomado de la vida escolar.

En una clase hay 25 alumnos. ¿De cuántas formas pueden sentarse en los pupitres?

---

[1]) En este caso siempre debe quedar libre la casilla del ángulo inferior derecho.

El camino a seguir para resolver este problema (para los que han asimilado lo dicho anteriormente) es muy sencillo: hay que multiplicar los 25 números siguientes: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times 23 \times \times 25$.

Las matemáticas enseñan procedimientos para simplificar los cálculos, pero no saben facilitar las operaciones del tipo de la indicada. Para hacer *con exactitud* este cálculo no existe más procedimiento que multiplicar atentamente todos los números. Con lo único que puede ganar un poco de tiempo en las operaciones es agrupando eficazmente los factores. El resultado que se obtiene es un número enorme, de 26 cifras, cuya magnitud es imposible imaginar.

Este número es: 15 511 210 043 330 985 984 000 000.

De todos los números con que nos hemos encontrado hasta ahora, éste es, sin duda, el más grande, y a él, más que a ningún otro, le corresponde merecidamente el título de «número enorme». El número de diminutas gotitas de agua que hay en todos los océanos y mares de la Tierra es modesto comparado con este número descomunal.

282-283



### Con siete cifras

Escriba, una detrás de otra, siete cifras del 1 al 7: 1 2 3 4 5 6 7.

Estas cifras pueden unirse entre sí por medio de signos más y menos, de modo que se obtenga el resultado 40:

$$12 + 34 - 5 + 6 - 7 = 40.$$

Procure usted encontrar ahora otra combinación de estas mismas cifras que dé 55 y no 40.

### Nueve cifras

Escriba sucesivamente nueve cifras: 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Sin alterar su orden, puede usted poner entre ellas signos más y menos, de modo que el resultado que den sea exactamente 100.

Por ejemplo, no es difícil, poniendo seis signos (más o menos), obtener el número 100 del siguiente modo:

$$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100.$$

Si sólo quiere poner cuatro signos (más o menos), también puede obtener 100:

$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100.$$

Pero intente usted obtener 100 utilizando los signos más y menos sólo tres veces.

Esto es mucho más difícil, pero completamente posible; lo único que hay que hacer es buscar la solución con paciencia.

### Con diez cifras

Exprese usted el número 100 empleando todas las 10 cifras.

¿Por cuántos procedimientos puede hacerlo? Existen no menos de cuatro procedimientos.

### La unidad

Exprese usted la unidad valiéndose de todas las diez cifras.

### Con cinco doses

Dispone usted de cinco doses y de los signos de las operaciones matemáticas que crea necesarios. Valiéndose solamente de este material numérico, aprovechándolo totalmente y utilizando los signos de las operaciones matemáticas, exprese los números siguientes: 15, 11 y 12 321.

### Otra vez con cinco doses

¿Puede expresarse el número 28 con cinco doses?

### Con cuatro doses

Este problema es más difícil que los precedentes. Hay que expresar el número 111 por medio de cuatro doses. ¿Puede expresarse?

### Con cinco treses

Usted sabe, como es natural, que con cinco treses y los signos de las operaciones matemáticas se puede escribir el número 100 así:

$$33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100.$$

Pero, ¿puede escribirse el número 10 con cinco treses?

### El número 37

Escriba de un modo semejante el número 37, utilizando solamente cinco treses y los signos de las operaciones.

### Por cuatro procedimientos

Exprese el número 100, con cinco cifras iguales, por cuatro procedimientos diferentes.

### Con cuatro treses

Expresar el número 12 por medio de cuatro treses es muy sencillo:

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3.$$

Un poco más ingenioso es expresar de un modo semejante los números 15 y 18 con cuatro treses:

$$15 = (3 + 3) + (3 \times 3);$$

$$18 = (3 \times 3) + (3 \times 3).$$

Pero si fuera necesario expresar, de este mismo modo, el número 5 por medio de cuatro treses, lo más probable es que no cayese pronto en que $5 = \frac{3+3}{3} + 3$.

Prueba ahora a buscar por su cuenta los procedimientos para expresar con cuatro treses los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, es decir, todos los números del 1 al 10 (ya hemos dicho como se escribe el número 5).

### Con cuatro cuatros

Si ha conseguido resolver el problema anterior y le gustan estos rompecabezas, intente componer todos los números del 1 al 100 con cuatro cuatros. Esto no es más difícil que expresar estos mismos números con treses.

### Con cuatro cincos

Hay que expresar el número 16 valiéndose de cuatro cincos unidos entre sí por los signos de las operaciones.

¿Cómo puede hacerse?

### Con cinco nueves

Exprese el número 10 con cinco nueves. Hágalo, por lo menos, por dos procedimientos.

### Veinticuatro

Es muy fácil expresar el número 24 por tres ochos: $8 + 8 + 8$. Pero, ¿puede usted hacer lo mismo con otras tres cifras iguales? Este problema tiene más de una solución.

### Treinta

El número 30 es fácil de representar con tres cincos: $5 \times 5 + 5$. Hacer esto mismo con otras tres cifras iguales es más difícil. Haga la prueba. Quizá logre encontrar varias soluciones.

### Mil

¿Puede usted expresar el número 1000 con ocho cifras iguales? Además de las cifras pueden utilizarse los signos de las operaciones.

### ¿Cómo obtener veinte?

Aquí ve usted tres números, escritos uno debajo de otro,

111
777
999

Hay que tachar seis de estas cifras de tal modo, que los números que queden sumen 20.

¿Puede usted hacerlo?

### Tachar nueve cifras

La siguiente columna de cinco filas contiene 15 cifras impares:

1 1 1
3 3 3
5 5 5
7 7 7
9 9 9

El problema consiste en tachar nueve cifras, eligiéndolas de manera, que al sumar las columnas de las seis cifras restantes se obtenga el resultado 1111.

### En el espejo

¿Qué año del siglo pasado aumenta $4\,^1/_2$ veces si se mira su imagen en el espejo?

### ¿Qué año?

¿Hay algún año del siglo actual que no varíe al ponerlo «cabeza abajo»?

### ¿Qué números?

¿Qué dos números enteros, si se multiplican entre sí dan 7?

No olvide que los dos números han de ser *enteros*; por lo tanto, las soluciones del tipo $3\,^1/_2 \times 2$ ó $2\,^1/_3 \times 3$ no valen.

### Sumar y multiplicar

¿Qué dos números enteros dan más sumándolos que multiplicándolos entre sí?

### Lo mismo

¿Qué dos números enteros dan lo mismo si se multiplican entre sí que si se suman?

### Número par primo

Usted sabe, claro está, qué números se llaman primos o simples: los que sólo se dividen exactamente por sí mismos y por la unidad. Los demás números se llaman compuestos.

¿Qué piensa usted, son compuestos todos los números pares o existen algunos que son primos?

### Tres números

¿Qué tres números enteros, si se multiplican entre sí, dan lo mismo que se obtiene de su suma?

### Suma y multiplicación

Es indudable que usted ya se habrá fijado en la curiosa peculiaridad de las igualdades

$2 + 2 = 4, \quad 2 \times 2 = 4.$

Este es el único ejemplo en que la suma y el producto de dos números enteros (iguales) dan el mismo resultado.

Pero es muy posible que usted no sepa que existen números que, sin ser iguales, poseen esta misma propiedad, es decir, su suma es igual a su producto.

Procure encontrar ejemplos de estos números. Para que no crea que su búsqueda será inútil, le diré que hay muchos números de éstos, pero que no todos son enteros.

### Multiplicación y división

¿Qué dos números enteros, si se divide el mayor por el menor, dan lo mismo que se obtiene cuando se multiplican entre sí?

### Un número de dos cifras

Si cierto número de dos cifras se divide por la suma de sus cifras, como resultado vuelve a obtenerse la suma de las cifras del dividendo. Halle este número.

### Diez veces mayor

Los números 12 y 60 tienen una propiedad interesante: si se multiplican, se obtiene un número exactamente 10 veces mayor que si se suman:

$12 \times 60 = 720, \quad 12 + 60 = 72.$

Intente encontrar otra pareja como ésta. Si tiene suerte, quizá pueda encontrar varios números con esta misma propiedad.

### Con dos cifras

¿Cuál es el menor número entero y positivo que puede escribir usted con dos cifras?

### El número mayor

¿Cuál es el mayor número que puede usted escribir con cuatro unos?

### Quebrados singulares

Fíjese atentamente en el quebrado $\frac{6729}{13458}$. En él se ha utilizado una vez cada una de las nueve cifras significativas. Este quebrado, como es fácil comprobar, es igual a $\frac{1}{2}$.

¿Podría usted, siguiendo este modelo, componer con las nueve cifras los quebrados $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{9}$?

### ¿Por cuánto multiplicó?

Un escolar hizo una multiplicación y después borró del encerado gran parte de las cifras, de modo que sólo se conservó la primera fila de números y dos cifras de la última fila; de las demás únicamente quedaron vestigios. Lo que siguió escrito era:

$$\begin{array}{r} 235 \\ \times\ ** \\ \hline **** \\ **** \phantom{*} \\ \hline **56* \end{array}$$

¿Podría usted restablecer el número por el cual multiplicó el escolar?

### ¿Qué cifras faltan?

En este ejemplo de multiplicación más de la mitad de las cifras se han sustituido por asteriscos:

$$\begin{array}{r} *1* \\ \times\ 3*2 \\ \hline *3* \\ +\ 3*2*\phantom{*} \\ *2*5\phantom{**} \\ \hline 1*8*30 \end{array}$$

¿Podría usted restablecer las cifras que faltan?

288-289



### ¿Qué números?

He aquí otro problema del mismo tipo. Hay que establecer qué números son los que se multiplican en el ejemplo siguiente:

```
   **5
 × 1**
  ----
  2**5
+13*0
 ***
 -----
 4*77*
```

### Casos raros de multiplicación

Observe el siguiente caso de multiplicación de dos números:

$48 \times 159 = 7632.$

Llama la atención porque en él participa una vez cada una de las nueve cifras significativas.

¿Podría usted seleccionar varios ejemplos más de este tipo? Si los hay, ¿cuántos son los que existen?

### Una división misteriosa

Esto que aquí se representa no es más que un ejemplo de división de dos números de varias cifras, en el cual todas ellas se han sustituido por puntos:

```
........   | ...
....       |------
--------   | .....
 ....
 ...
 -------
  ...
  ...
  ------
  ....
  ....
  ------
```

No se da ni una sola cifra del dividendo ni del divisor. Se sabe únicamente que la *penúltima* cifra del cociente es 7. Hay que hallar el resultado de esta división.

Advertimos, por si acaso, que todos los números se consideran escritos aquí según el sistema de numeración decimal.

Este problema sólo tiene una solución.

### ¿Qué se dividió?

Restablezca las cifras que faltan en el siguiente ejemplo de división:

```
*2*5*  | 325
***    |-----
-----  | 1**
*0**
*9**
-----
 *5*
 *5*
 ---
```

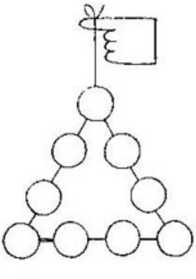


*Figura 230*

### División po 11

Escriba cualquier número de nueve cifras, en que no se repita ninguna de ellas (es decir, que tenga todas las cifras diferentes), que sea divisible por 11 exactamente. Escriba el menor de estos números. Escriba el mayor de estos números.

### Triángulo numérico

Distribuya las nueve cifras significativas por los círculos de este triángulo (fig. 230), de modo que en cada lado sumen 20.

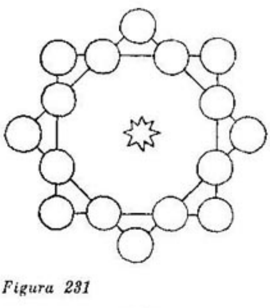


*Figura 231*

### Otro triángulo numérico

Distribuir todas las cifras significativas por los círculos del mismo triángulo de manera que en cada lado sumen 17.

### La estrella de ocho puntas

Los números del 1 al 16 deben situarse en los puntos de intersección de las líneas del dibujo representado en la fig. 231, de modo que la suma de los números que hay en cualquiera de los lados de cada cuadrado sea 34 y la de los que hay en los vértices de cada cuadrado también sea 34.

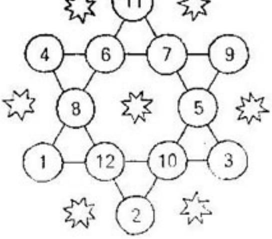



*Figura 232*

### La estrella mágica

La estrella numérica de seis puntas representada en la fig. 232 posee una propiedad «mágica»: todas sus seis filas de números suman lo mismo:

$4+6+7+9=26$,
$4+8+12+2=26$,
$9+5+10+2=26$,
$11+6+8+1=26$,
$11+7+5+3=26$,
$1+12+10+3=26$,

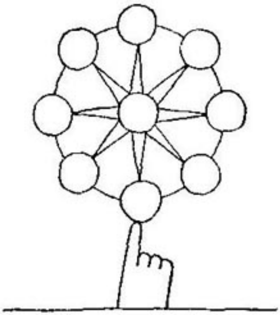


*Figura 233*

Pero la suma de los números situados en las puntas de la estrella es otra:

$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30.$

¿No podría usted perfeccionar esta estrella colocando los números en los círculos de tal manera que no sólo las filas rectas den la misma suma (26), sino que también compongan esta suma (26) los números situados en sus puntas?

### La rueda numérica

Las cifras del 1 al 9 deben disponerse en el dibujo de la fig. 233, de modo que, estando una en el centro de la circunferencia y las demás en los extremos de los diámetros, la suma de las tres cifras de cada fila (diámetro) sea igual a 15.

### El tridente

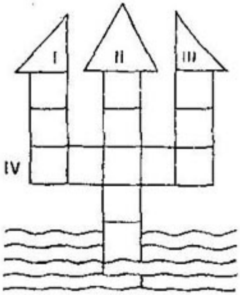



*Figura 234*

En las casillas del tridente aquí representado (fig. 234) hay que escribir los números del 1 al 13 de tal manera, que la suma de las cifras en cada una de las tres columnas verticales (*I*, *II*, *III*) y en la fila horizontal (*IV*) sea la misma.

Procure hacerlo.

## SOLUCIONES

### Con siete cifras

Este problema tiene no una, sino tres soluciones distintas, a saber:

$$123+4-5-67=55;$$
$$1-2-3-4+56+7=55;$$
$$12-3+45-6+7=55$$

### Nueve cifras

He aquí por qué procedimiento puede usted obtener 100 de una serie de nueve cifras y tres signos más y menos:

$$123-45-67+89=100$$

Esta es la única solución posible; ninguna otra combinación de las nueve cifras y de los signos más y menos, empleados *tres veces*, puede dar el resultado 100.

Lograr este mismo resultado utilizando los signos de sumar y restar menos de tres veces, es imposible.

### Con diez cifras

Aquí tiene cuatro soluciones:

$$70+24\frac{9}{18}+5\frac{3}{5}=100;$$
$$80\frac{27}{54}+19\frac{3}{6}=100;$$
$$87+9\frac{4}{5}+3\frac{12}{60}=100;$$
$$50\frac{1}{2}+49\frac{38}{76}=100.$$

### La unidad

Hay que representar la unidad como suma de dos quebrados;

$$\frac{148}{296}+\frac{35}{70}=1.$$

Los que sepan álgebra pueden dar otras soluciones, como, por ejemplo, $123\,456\,789^0$; $234\,567^{9-8-1}$, etc., ya que todo número elevado a la potencia cero es igual a la unidad.

### Con cinco doses

El número 15 puede escribirse así:

$$(2+2)^2-\frac{2}{2}=15; \quad \frac{22}{2}+2\times 2=15;$$
$$(2\times 2)^2-\frac{2}{2}=15; \quad \frac{22}{2}+2^2=15;$$
$$2^{(2+2)}-\frac{2}{2}=15; \quad \frac{22}{2}+2+2=15.$$

Y el número 11, así:

$$\frac{22}{2}+2-2=11.$$

El número 12 321. A primera vista parece que es imposible escribir este número de cinco cifras con cinco números iguales. Sin embargo, el problema puede resolverse. La solución es:

$$\left(\frac{222}{2}\right)^2=111^2=111\times 111=12\,321.$$

## Otra vez con cinco doses

$$22+2+2+2=28.$$

## Con cuatro doses

$$\frac{222}{2}=111.$$

## Con cinco treses

He aquí la solución del problema

$$\frac{33}{3}-\frac{3}{3}=10.$$

Es interesante el hecho de que este problema se resolvería exactamente lo mismo, si el número 10 hubiera que expresarlo no con cinco treses, sino con cinco unidades, cinco cuatros, cinco sietes, cinco nueves y, en general, por cualesquiera cinco cifras iguales.

En efecto:

$$\frac{11}{1}-\frac{1}{1}=\frac{22}{2}-\frac{2}{2}=\frac{44}{4}-\frac{4}{4}=\frac{99}{9}-\frac{9}{9}\text{, etc.}$$

Existen otras formas de resolver este mismo problema:

$$\frac{3\times 3\times 3+3}{3}=10,$$

$$\frac{3^3}{3}+\frac{3}{3}=10.$$

## El número 37

Hay dos soluciones:

$$33+3+\frac{3}{3}=37;$$

$$\frac{333}{3\times 3}=37.$$

### Por cuatro procedimientos

El número 100 puede expresarse por medio de cinco cifras iguales, utilizando para ello unos, treses y —lo que es aún más fácil— cincos:

$$111-11=100;$$

$$33\times 3+\frac{3}{3}=100;$$

$$5\times 5\times 5-5\times 5=100;$$

$$(5+5+5+5)\times 5=100.$$

### Con cuatro treses

$$1=\frac{33}{33}\ \text{(hay otros procedimientos)};$$

$$2=\frac{3}{3}+\frac{3}{3};$$

$$3=\frac{3+3+3}{3};$$

$$4=\frac{3\times 3+3}{3};$$

$$6=(3+3)\times\frac{3}{3}.$$

Sólo damos las soluciones hasta el número seis. Las demás piénselas usted mismo. Las soluciones indicadas también pueden componerse de otras combinaciones de treses.

### Con cuatro cuatros

$$1=\frac{44}{44},\quad \text{ó}\quad \frac{4+4}{4+4},\quad \text{ó}\quad \frac{4\times 4}{4\times 4},\ \text{etc.}$$

$$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4},\quad \text{ó}\quad \frac{4\times 4}{4+4};$$

$$3=\frac{4+4+4}{4},\quad \text{ó}\quad \frac{4\times 4-4}{4};$$

$$4=4+4\times(4-4);$$

$$5=\frac{4\times 4+4}{4};$$

$$6=\frac{4+4}{4}+4;$$

$$7=4+4-\frac{4}{4},\quad \text{ó}\quad \frac{44}{4}-4;$$

$$8=4+4+4-4,\quad \text{ó}\quad 4\times 4-4-4;$$

$$9=4+4+\frac{4}{4};$$

$$10=\frac{44-4}{4}.$$

### Con cuatro cincos

Sólo existe un procedimiento:

$$\frac{55}{5}+5=16.$$

### Con cinco nueves

Dos procedimientos son:

$$9+\frac{99}{99}=10,$$

$$\frac{99}{9}-\frac{9}{9}=10.$$

El que sepa álgebra puede añadir varias soluciones más, por ejemplo:

$$\left(9\frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}}=10,$$

$$9+99^{9-9}=10.$$

### Veinticuatro

Aquí tiene dos soluciones:

$$22+2=24;\quad 3^3-3=24.$$

### Treinta

Damos tres soluciones:

$$6\times 6-6=30;\quad 3^3+3=30;\quad 33-3=30.$$

### Mil

$$888+88+8+8+8=1000.$$

### ¿Cómo obtener veinte?

He aquí como hay que hacer esto (las cifras tachadas han sido sustituidas por ceros):

011
000
009

En efecto, $11+9=20$.

### Tachar nueve cifras

Este problema admite varias soluciones. Damos cuatro ejemplos, sustituyendo por ceros las cifras tachadas:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 111 | 011 | 101 |
| 000 | 030 | 330 | 303 |
| 005 | 000 | 000 | 000 |
| 007 | 070 | 770 | 707 |
| 999 | 900 | 000 | 000 |
| 1111 | 1111 | 1111 | 1111 |

### En el espejo

Las únicas cifras que no se desfiguran en el espejo son 1, 0 y 8. Por lo tanto, el año que se busca sólo puede contener estas cifras. Sabemos además que se trata de uno de los años del siglo XIX, cuyas primeras dos cifras son 18.

Ahora ya es fácil comprender que este año es el 1818. En el espejo, el año 1818 se convertirá en 8181, que es exactamente $4^1/_2$ mayor que 1818:

$$1818 \times 4\frac{1}{2} = 8181.$$

Este problema no tiene más soluciones.

### ¿Que año?

En el siglo XX sólo hay un año de este tipo, el 1961.

### ¿Qué números?

La respuesta es fácil: 1 y 7. Otros números que den 7 no hay.

### Sumar y multiplicar

Números de estos hay tantos como se quieran:

$$3 \times 1 = 3; \quad 3 + 1 = 4;$$
$$10 \times 1 = 10; \quad 10 + 1 = 11;$$

y, en general, toda pareja de números enteros en que uno de ellos sea la unidad.

Esto se debe a que sumándole una unidad, el número aumenta, mientras que si se multiplica por la unidad, el número no varía.

### Lo mismo

Estos números son 2 y 2. Otros números enteros que tengan estas propiedades no existen.

### Número par primo

Existe un número par primo, el 2. Este número sólo es divisible por sí mismo (y por la unidad).

### Tres números

1, 2 y 3 dan el mismo resultado cuando se multiplican entre sí que cuando se suman:

$$1 + 2 + 3 = 6; \quad 1 \times 2 \times 3 = 6.$$

### Suma y multiplicación

Existe una cantidad innumerable de pares de números de este tipo. He aquí varios ejemplos:

$$3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}, \quad 3 \times 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}; \qquad 11 + 1{,}1 = 12{,}1, \quad 11 \times 1{,}1 = 12{,}1$$
$$5 + 1\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}, \quad 5 \times 1\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}; \qquad 21 + 1\frac{1}{20} = 22\frac{1}{20}; \quad 21 \times 1\frac{1}{20} = 22\frac{1}{20};$$
$$9 + 1\frac{1}{8} = 10\frac{1}{8}, \quad 9 \times 1\frac{1}{8} = 10\frac{1}{8}; \qquad 101 + 1{,}01 = 102{,}01, \quad 101 \times 1{,}01 = 102{,}01, \text{ etc.}$$

### Multiplicación y división

Números así hay muchos. Por ejemplo:

$$2:1=2,\quad 2\times1=2;$$
$$7:1=7,\quad 7\times1=7;$$
$$43:1=43,\quad 43\times1=43;$$

### Un número de dos cifras

El número buscado debe ser, evidentemente, un cuadrado exacto. Como entre los números de dos cifras sólo hay *seis* cuadrados, por medio de pruebas puede hallarse fácilmente la única solución, es decir, el número 81:

$$\frac{81}{8+1}=8+1.$$

### Diez veces mayor

He aquí cuatro parejas de números de este tipo:

11 y 110; 14 y 35; 15 y 30; 20 y 20

En efecto:

$$11\times110=1210;\quad 11+110=121;$$
$$14\times35=490;\quad 14+35=49;$$
$$15\times30=450;\quad 15+30=45;$$
$$20\times20=400;\quad 20+20=40;$$

Este problema no tiene otras soluciones. Buscar las soluciones a ciegas es bastante embarazoso. Teniendo nociones de álgebra, el problema resulta más fácil y es posible no sólo buscar todas las soluciones, sino también cerciorarse de que no tiene más que cinco.

### Con dos cifras

El número menor que puede escribirse con dos cifras no es 10, como pensarán posiblemente algunos lectores, sino la unidad expresada del modo siguiente:

$\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ y así sucesivamente hasta $\frac{9}{9}$.

Los que saben álgebra añaden a estas expresiones una serie de otras:

$1^0$, $2^0$, $3^0$, $4^0$ y así sucesivamente hasta $9^0$,

porque todo número elevado a la potencia cero es igual a la unidad[1]).

### El número mayor

Por lo general responden a esta pregunta escribiendo el número 1111. Pero este número dista mucho de ser el mayor. Mucho mayor —en 250 millones de veces— es $11^{11}$.

Aunque representado nada más que por cuatro unidades, este número contiene, si se calcula, más de 285 millares de millones de unidades.

---

[1]) Pero serían erróneas las soluciones $\frac{0}{0}$ ó $0^0$; estas expresiones carecen de sentido en general.

## Quebrados singulares

El problema tiene varias soluciones. He aquí una de ellas:

$$\frac{1}{3}=\frac{5823}{17\,469}\,;\quad \frac{1}{4}=\frac{3942}{15\,768}\,;$$
$$\frac{1}{5}=\frac{2697}{13\,485}\,;\quad \frac{1}{6}=\frac{2943}{17\,658}\,;$$
$$\frac{1}{7}=\frac{2394}{16\,758}\,;\quad \frac{1}{8}=\frac{3187}{25\,496}\,;$$
$$\frac{1}{9}=\frac{6381}{57\,429}\,.$$

Existe un gran número de variantes; sobre todo puede representarse de muchas formas la fracción $\frac{1}{8}$ (¡por más de 40 procedimientos!).

## ¿Por cuánto multiplicó?

Razonaremos así. La cifra 6 se obtuvo de la suma de una columna de dos cifras, de las cuales, la inferior puede ser 0 ó 5. Pero si la inferior es 0, la superior tendrá que ser 6. ¿Puede ser 6 la cifra superior? Hagamos la prueba. Resulta que cualquiera que sea la segunda cifra del multiplicador, es imposible obtener 6 en el penúltimo lugar del primer producto parcial. Por lo tanto, la cifra inferior de la penúltima columna debe ser 5; y, en este caso, sobre ella se encuentra un **1**.

Ahora ya es fácil reconstruir parte de las cifras borradas:

$$\begin{array}{r} 235\\ \times\ **\\ \hline **1*\\ +\ ***5\phantom{*}\\ \hline **56* \end{array}$$

La última cifra del multiplicador debe ser mayor que 4, de lo contrario el primer producto parcial no tendría cuatro cifras. Esta cifra no puede ser 5 (porque con ella no se obtendría 1 en el penúltimo lugar). Veamos si sirve 6. Tenemos:

$$\begin{array}{r} 235\\ \times\ *6\\ \hline 1410\\ +\ ***5\phantom{0}\\ \hline **560 \end{array}$$

Razonando de igual modo en adelante, hallamos que el multiplicador es igual a **96**.

## ¿Qué cifras faltan?

Las cifras que faltan se reponen gradualmente, si se razona como sigue.

Para mayor comodidad numeraremos las filas:

$$\begin{array}{rl} *1* & \mathrm{I}\\ \times\ 3*2 & \mathrm{II}\\ \hline *3* & \mathrm{III}\\ 3*2*\phantom{0} & \mathrm{IV}\\ +\ *2*5\phantom{00} & \mathrm{V}\\ \hline 1*8*30 & \mathrm{VI} \end{array}$$

Se comprende fácilmente que el último asterisco de la fila III es un 0, ya que 0 figura al final de la fila VI.

Ahora se determina el valor del último asterisco de la fila I: ésta es una cifra que multiplicada por 2 da un número que termina en cero, y multiplicada por 3, un número que termina en 5 (V fila). Por lo tanto, sólo puede ser 5.

No es difícil darse cuenta de que el asterisco de la fila II es un 8, porque sólo al multiplicarlo por 8, el número 15 da un resultado que termina en 20 (IV fila).

Finalmente, queda claro el valor del primer asterisco de la fila I: es la cifra 4, porque sólo el 4 multiplicado por 8 da un resultado que empieza en 3 (fila IV).

Hallar las demás cifras desconocidas no ofrece ya dificultad: basta multiplicar los números de las dos primeras filas, que ya están completamente determinados.

En fin de cuentas se obtiene el siguiente ejemplo de multiplicación:

$$\begin{array}{r} 415 \\ \times\ 382 \\ \hline 830 \\ +\ 3320\phantom{0} \\ 1245\phantom{00} \\ \hline 158530 \end{array}$$

## ¿Qué números?

Razonando de un modo semejante a como se hizo en el ejemplo anterior, descubrimos los valores de los asteriscos en este caso.

Se obtiene:

$$\begin{array}{r} 325 \\ \times\ 147 \\ \hline 2275 \\ 1300\phantom{0} \\ +\ 325\phantom{00} \\ \hline 47775 \end{array}$$

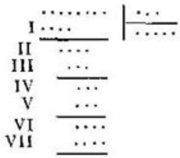
## Casos raros de multiplicación

El lector que tenga paciencia puede encontrar nueve casos de multiplicación de este tipo, a saber:

$$\begin{array}{rcrcl} 12 & \times & 483 & = & 5796 \\ 42 & \times & 138 & = & 5796 \\ 18 & \times & 297 & = & 5346 \\ 27 & \times & 198 & = & 5346 \\ 39 & \times & 186 & = & 7254 \\ 48 & \times & 159 & = & 7632 \\ 28 & \times & 157 & = & 4396 \\ 4 & \times & 1738 & = & 6952 \\ 4 & \times & 1963 & = & 7852 \end{array}$$

## Una división misteriosa

Para mayor comodidad numeraremos las filas de puntos según la posición dada.



Observando la fila II llegamos a la conclusión de que la segunda cifra del cociente es 0, ya que fue necesario bajar, una detrás de otra, dos cifras del dividendo. Designemos todo el divisor por $x$. Las filas IV y V demuestran que el número $7x$ (producto de la penúltima cifra del cociente por el divisor) después de restarlo de un número que no supera a 999, dio un resto no menor que 100. Está claro que $7x$ no puede ser mayor que $999-100$, es decir, que 899, de donde $x$ no es mayor que 128. Vemos después que el número de la fila III es mayor que 900, de lo contrario al restarlo de un número de cuatro cifras no daría un resto de dos cifras. Pero en este caso la tercera cifra del cociente deberá ser 900 : 128, es decir, mayor que 7,03 y, por consiguiente, igual a 8 ó a 9. Como los números de las filas I y VII son de cuatro cifras, es evidente que la tercera cifra del cociente es 8 y la última, 9.

Con esto queda resuelto, en realidad, el problema, puesto que el resultado que se buscaba de la división (es decir, el cociente) lo hemos encontrado: 90 879.

No hay necesidad de seguir adelante y buscar el dividendo y el divisor. El problema sólo planteaba encontrar el *resultado* de la división, o sea, el cociente. El problema no exige descifrar todo lo escrito. Pero, además, existe no una, sino 11 parejas de números que satisfacen, al hacer la división, la disposición dada de los puntos y dan la cifra 7 en el cuarto lugar del cociente.

Estos números son:

$$\left.\begin{array}{r}
10\,360\,206 : 114 \\
10\,451\,085 : 115 \\
10\,541\,964 : 116 \\
10\,632\,843 : 117 \\
10\,723\,722 : 118 \\
10\,814\,601 : 119 \\
10\,905\,480 : 120 \\
10\,996\,359 : 121 \\
11\,087\,238 : 122 \\
11\,178\,117 : 123 \\
11\,268\,996 : 124
\end{array}\right\} = 90\,879$$

## ¿Qué se dividió?

**El caso de división buscado es:**

$$
\begin{array}{r|l}
-\,52650 & 325 \\
\underline{325}\phantom{00} & \overline{162} \\
-\,2015\phantom{0} & \\
\underline{1950}\phantom{0} & \\
-\,650 & \\
\underline{650} &
\end{array}
$$

## División por 11

Para poder resolver este problema hay que conocer la condición de divisibilidad por 11. Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par y las de lugar impar es divisible por 11 o igual a cero.

Probemos, por ejemplo, el número 23 658 904.

La suma de las cifras de lugar par es:

$$3 + 5 + 9 + 4 = 21;$$

Y la suma de las cifras de lugar impar:

$$2 + 6 + 8 + 0 = 16.$$

Su diferencia (descontando la menor de la mayor) es igual a:

$$21 - 16 = 5.$$

Esta diferencia (5) no es divisible por 11; por lo tanto, el número que hemos tomado no puede dividirse por 11 sin que quede resto.

Ensayemos otro número, el 7 344 535:

$$
\begin{array}{r}
3 + 4 + 3 = 10; \\
7 + 4 + 5 + 5 = 21; \\
21 - 10 \qquad = 11.
\end{array}
$$

Y como 11 es divisible por 11, el número ensayado también es múltiplo de 11.

Ahora es fácil comprender en qué orden hay que escribir las nueve cifras para obtener un número múltiplo de 11 que satisfaga las condiciones del problema.

Por ejemplo: 352 049 786

Hacemos la prueba:

$$
\begin{array}{r}
3 + 2 + 4 + 7 + 6 = 22, \\
5 + 0 + 9 + 8 = 22.
\end{array}
$$

La diferencia $22 - 22 = 0$; por consiguiente, el número que hemos escrito es múltiplo de 11.

El mayor de todos los números de este tipo es: 987 652 413.

El menor: 102 347 586.

## Triángulo numérico

La solución se muestra en la fig. 235. Las cifras medias de cada fila pueden permutarse y, de este modo, obtener una serie de soluciones más.

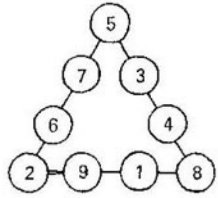



*Figura 235*

## Otro triángulo numérico

La solución se da en la fig. 236. Las cifras medias de cada fila se pueden permutar y obtener así una serie de soluciones más.

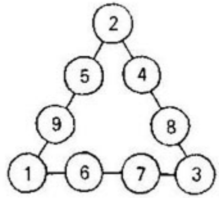



*Figura 236*

## La estrella de ocho puntas

La solución puede verse en la fig. 237.

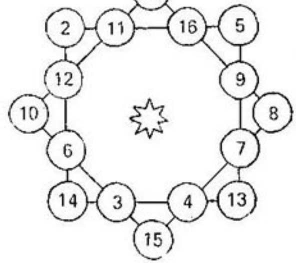



*Figura 237*

## La estrella mágica

Para simplificar la búsqueda de la disposición que se requiere de los números, nos atendremos a las siguientes consideraciones.

La suma de los números que hay en las puntas de la estrella es igual a 26; y la de todos los números de la estrella, 78. Por lo tanto, la suma de los números del hexágono interior será $78 - 26 = 52$.

Consideremos ahora uno de los grandes triángulos. La suma de los números de cada uno de sus lados es igual a 26, y si sumamos los números de sus tres lados, obtenemos $26 \times 3 = 78$, con la particularidad de que cada uno de los números que hay en las puntas participa dos veces. Y como la suma de los números de los tres pares internos (es decir, del hexágono interior) debe, como sabemos, ser igual a 52, la suma duplicada de los números que hay en los vértices de cada triángulo será $78 - 52 = 26$; la suma simple será 13.

El campo de las búsquedas se ha reducido ya considerablemente. Sabemos, por ejemplo, que ni 12 ni 11 pueden ocupar las puntas de la estrella (¿por qué?). Por lo tanto, podemos empezar los ensayos a partir de 10, en este caso se determinan inmediatamente los dos números que deben ocupar los restantes vértices del triángulo. Estos números son 1 y 2.

Prosiguiendo por este camino, encontramos finalmente la disposición requerida. Esta disposición se muestra en la fig. 238.

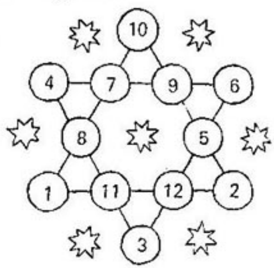



*Figura 238*

## La rueda numérica

La solución se da en la fig. 239.

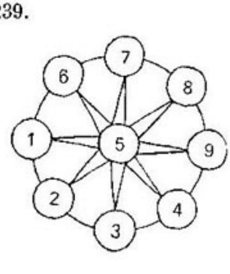



*Figura 239*

## El tridente

He aquí la colocación que se exige de los números (fig. 240). La suma de los números en cada una de las tres columnas verticales y en la fila horizontal es igual a 25.

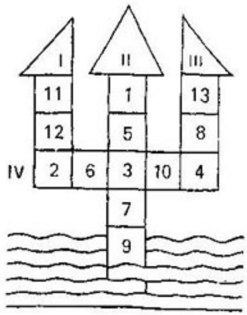



*Figura 240*