304-305

Una multiplicación fácil

Si no recuerda usted bien la tabla de multiplicar y tiene dudas cuando multiplica por 9, sus propios dedos le pueden ayudar.

Ponga las dos manos sobre la mesa: sus diez dedos le servirán de máquina calculadora.

Supongamos que hay que multiplicar 4 por 9.

El *cuarto* dedo da la respuesta: a su izquierda hay tres dedos, a su derecha, seis; lea usted: 36; es decir, $4 \times 9 = 36$.

Otros ejemplos: ¿cuántas son 7×9?

El *séptimo* dedo tiene a la izquierda seis dedos, y a la derecha, tres. La respuesta es 63.

¿Cuántas son 9×9? El *noveno* dedo tiene ocho dedos a su izquierda y uno a su derecha. La respuesta es 81.

Esta máquina de calcular animada le ayudará a recordar bien a qué es igual 6×9, y no confundir, como hacen algunos, 54 y 56. El *sexto* dedo tiene a la izquierda cinco dedos, y a la derecha, cuatro; por lo tanto, $6 \times 9 = 54$.

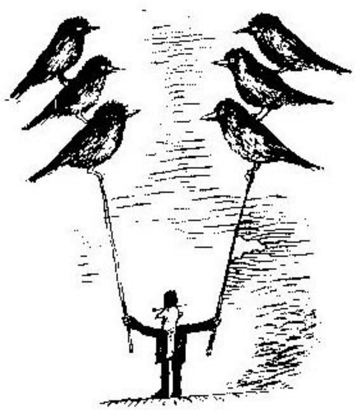


Figura 241

Las chovas y las estacas

(Problema popular)

Llegaron las chovas
y se posaron en estacas.
Si en cada estaca
se posa una chova,
hay una chova
que se queda sin estaca.
Pero si en cada estaca
se posan dos chovas,
en una de las estacas
no habrá chova.
¿Cuántas eran las chovas?
y, ¿cuántas las estacas?

Las hermanas y los hermanos

Yo tengo tantas hermanas como hermanos. Pero mi hermana tiene la mitad de hermanas que de hermanos. ¿Cuántos somos?

Figura 242

¿Cuántos hijos?

Yo tengo seis hijos. Cada hijo tiene una hermana. ¿Cuántos hijos tengo?

20—0999

El desayuno

Dos padres y dos hijos se comieron en el desayuno tres huevos, con la particularidad de que cada uno se comió un huevo entero. ¿Cómo explica usted esto?

Tres cuartas partes de hombre

A un manijero le preguntaron cuántos hombres tenía su cuadrilla. El respondió de un modo bastante confuso:

—Los hombres no son muchos: tres cuartos de los que somos más tres cuartos de hombre, ésa es toda nuestra gente.

¿Podría usted adivinar cuántos hombres había en esta cuadrilla?

¿Cuántos años tienen?

—Dígame, usted, abuelo, ¿qué edad tiene su hijo?

—Tiene tantas semanas como mi nieto días.

—¿Y qué edad tiene su nieto?

—Tiene tantos meses como yo años.

—Entonces, ¿qué edad tiene usted?

—Los tres juntos tenemos exactamente 100 años. Ingéniate y sabrás qué edad tenemos cada uno.

Figura 243

¿Quién es mayor?

Dentro de dos años mi hijo será dos veces mayor que era hace dos años. Y mi hija será dentro de tres años tres veces mayor que era hace tres años.

¿Quién es mayor, el niño o la niña?

La edad de mi hijo

Mi hijo es ahora tres veces más joven que yo. Pero hace cinco años era cuatro veces más joven.

¿Cuántos años tiene?

¿Qué edad tiene?

A un aficionado a los acertijos le preguntaron cuántos años tenía. Su respuesta fue intrincada.

—Multipliquen por tres los años que yo tenga dentro de tres años y réstenle el triplo de los que tenía hace tres años y obtendrán precisamente los años que tengo.

¿Qué edad tiene ahora?

Tres hijas y dos hijos

Un tío fue a ver a sus dos sobrinos y tres sobrinas que ya hacía bastante tiempo que no veía.

Los primeros que salieron a su encuentro fueron el pequeño Volodia y su hermanita Zhenia, y el rapaz le dijo muy ufano que él era dos veces mayor que su hermana. Después llegó corriendo Nadia, y su padre le dijo al recién llegado que las dos niñas juntas eran dos veces mayores que el niño.

Cuando volvió de la escuela Aliosha, dijo el padre que los dos niños juntos tenían el doble de años que las dos niñas juntas.

La última en llegar fue Lida y, cuando vio a su tío exclamó:

—Tío, ha llegado usted precisamente el día de mi cumpleaños. Hoy he cumplido 21 años.

—Y sabes que —añadió el padre—, acabo de darme cuenta de que mis tres hijas juntas tienen el doble de años que mis dos hijos.

¿Cuántos años tenía cada hijo y cada hija?

Años de sindicato

Yendo en el tranvía tuve la ocasión de oír la siguiente conversación entre dos pasajeros.

—¿Entonces, tú llevas en el sindicato el doble de años que yo?

—Sí, el doble.

—Pues, yo recuerdo que en una ocasión me dijiste que llevabas el triple.

—En efecto. Eso fue hace dos años. Entonces llevaba el triple de años, pero ahora sólo el doble.

¿Cuántos años lleva cada uno en el sindicato?

¿Cuántas partidas?

Tres amigos jugaron a las damas. En total jugaron tres partidas. ¿Cuántas partidas jugó cada uno?

El caracol

Un caracol decidió subir a un árbol de 15 m de altura. Durante cada día tenía tiempo de subir 5 m; pero mientras dormía por la noche, bajaba 4 m.

¿Al cabo de cuántos días llegará a la cima del árbol?

Figura 244

A la ciudad

Un koljosiano[1]) fue a la ciudad. La primera mitad del camino fue en tren, 15 veces más de prisa que si hubiera ido andando. Pero la segunda mitad del camino tuvo que hacerla en una carreta de bueyes, dos veces más despacio que a pie.

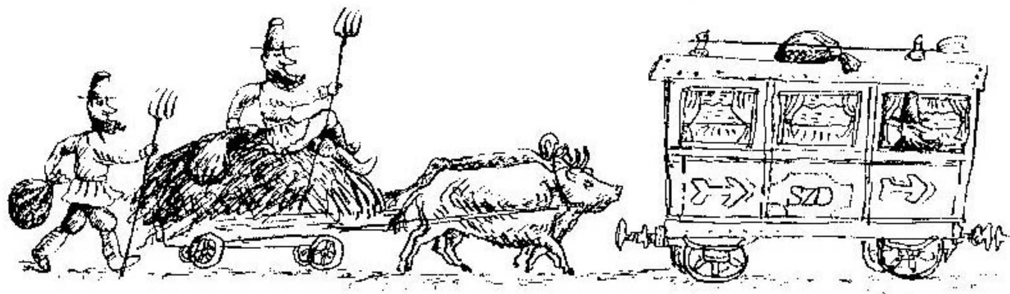


Figura 245

¿Cuánto tiempo ganó, sin embargo, en comparación con el caso en que hubiera ido todo el tiempo a pie?

Al koljós [2])

Desde la fábrica al koljós, la carretera no es lisa: primero va subiendo 8 km, y después baja una cuesta de 24 km. Mijáilov fue hacia allá en bicicleta y, sin detenerse, llegó al cabo de 2 horas y 50 minutos. El regreso también lo hizo en bicicleta, sin descansar, y tardó 4 horas y 30 minutos.

¿Podría usted decir a qué velocidad subía Mijáilov la cuesta y a qué velocidad la baja?

Dos escolares

—Dame una manzana y tendré el doble que tú —le dijo un escolar a otro.

—Eso sería injusto. Es preferible que tú me des a mí una manzana, y entonces tendremos las mismas —le respondió su camarada.

¿Podría usted decir cuántas manzanas tenía cada escolar?

El precio de la encuadernación

He aquí un problema que parece fácil, pero que al resolverlo son muchos los que se equivocan. Un libro

[1]) Campesino participante en una hacienda rural colectiva.
[2]) Hacienda rural colectiva.

encuadernado cuesta 2 rublos y 50 copeikas. El libro vale 2 rublos más que la encuadernación.
¿Cuánto cuesta la encuadernación?

El precio de la hebilla

Un cinturón con su hebilla vale 68 copeikas. La correa cuesta 60 copeikas más que la hebilla.
¿Cuánto vale la hebilla?

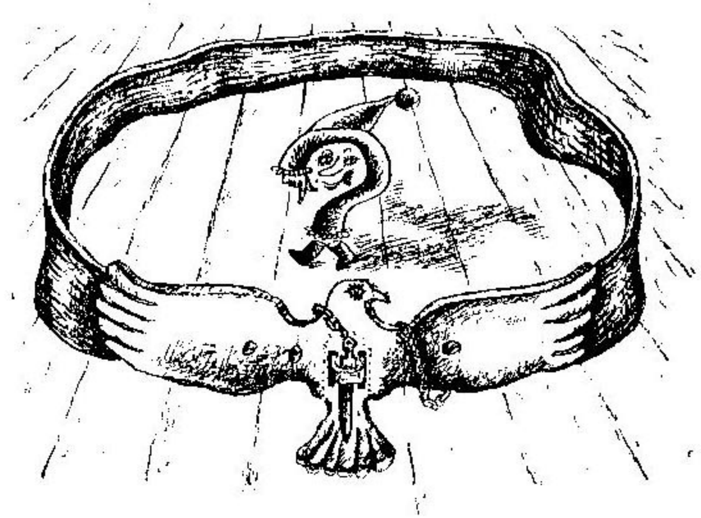


Figura 246

Los barriles de miel

En un almacén quedaban siete barriles llenos de miel, otros siete llenos de miel hasta la mitad, y siete vacíos. Todo esto fue comprado por tres cooperativas, que después tuvieron que repartirse los envases y la miel en partes iguales.
Se plantea la pregunta: ¿cómo hacer este reparto sin transvasar la miel de un barril a otro?
Si cree que esto puede hacerse por varios procedimientos, diga todos los procedimientos que haya ideado.

Los gatitos de Misha

Si Misha ve en cualquier parte un gatito abandonado, lo recoge y se lo lleva a su casa. Siempre tiene varios gatitos, pero procura no decirle a sus camaradas cuantos tiene, para que no se rían de él. Una vez le preguntaron:

—¿Cuántos gatos tienes ahora?

—Pocos —respondió—, tres cuartos de todos los que tengo y tres cuartos de gato, ésos son los que tengo en total.

Sus camaradas pensaron que Misha quería burlarse de ellos. Sin embargo, él les puso un problema fácil de resolver.

¡Resuélvalo!

Los sellos de correos

Un ciudadano compró 5 rublos de sellos de correos de tres valores distintos: de 50 copeikas, de 10 copeikas y de 1 copeika, en total 100 sellos.

¿Podría usted decir cuántos sellos compró de cada tipo?

¿Cuántas monedas?

A un ciudadano le devolvieron 4 rublos y 65 copeikas en rublos, monedas de diez copeikas (grívennik) y monedas de una copeika[1]. En total recibió 42 monedas.

¿Cuántas monedas le dieron de cada valor?

¿Cuántas soluciones tiene este problema?

Calcetines y guantes

En un cajón hay 10 pares de calcetines de color castaño obscuro y 10 pares de calcetines negros; en otro cajón hay 10 pares de guantes de color castaño obscuro y la misma cantidad de pares de guantes negros.

¿Cuántos calcetines y guantes será suficiente sacar de cada cajón, para que con ellos se pueda formar un par, cualquiera, de calcetines y un par de guantes?

«El gusanillo del libro»

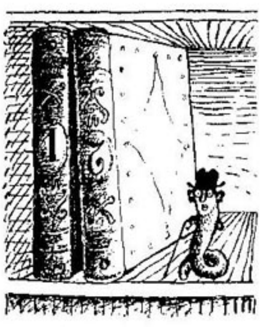


Figura 247

Hay insectos que roen los libros hoja por hoja y de este modo se abren paso a través de los tomos. Uno de estos «gusanillos de los libros», royendo, se abrió camino desde la primera página del primer tomo hasta la última del segundo tomo, que estaba al lado del primero, tal como se representa en la figura.

Cada tomo tiene 800 páginas.

¿Cuántas páginas royó el «gusanillo»?

Este problema no es difícil, pero tampoco tan fácil como usted, probablemente, cree.

---

[1]) La copeika es la centésima parte del **rublo**.

Las arañas y los escarabajos

Un pionero reunió en una caja arañas y escarabajos. En total ocho. Si se cuentan todas las patas de los bichos que hay en la caja resultan 54.

¿Cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja?

Los siete amigos

Un ciudadano tenía siete amigos. El primero venía a visitarlo cada tarde, el segundo, cada segunda tarde,

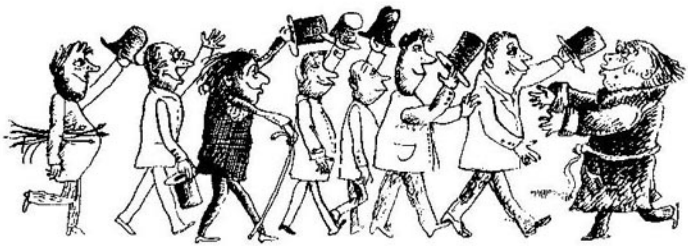


Figura 248

el tercero, cada tercer tarde, el cuarto, cada cuarta tarde y así sucesivamente hasta el séptimo, que venía cada séptima tarde.

¿Con cuánta frecuencia se encontraban los siete amigos y el anfitrión la misma tarde?

Continuación del anterior

Las tardes en que los siete amigos se reunían, el anfitrión los invitaba a beber vino y todos chocaban las copas entre sí por parejas.

Al hacer esto, ¿cuántas veces se oyen las copas chocar entre sí?

SOLUCIONES

Las chovas y las estacas

Este antiguo problema popular se resuelve así. Nos preguntamos: ¿cuántas chovas más habría que tener en el segundo caso que en el primero, para llenar todos los puestos en las estacas? Es fácil comprender que en el primer caso faltó sitio para una chova, mientras que en el segundo todas las chovas tenían puesto y aún faltaban dos chovas; por lo tanto, para ocupar todas las estacas, en el segundo caso, hubiera sido necesario tener $1 + 2$, es decir, tres chovas más que en el primero. Pero en cada estaca se posa una chova más. Luego está claro que las estacas eran tres. Si en cada una de estas estacas hacemos que se pose una chova y añadimos un ave más, obtenemos el número de pájaros: cuatro.

Así, pues, la solución del problema es: cuatro chovas y tres estacas.

Las hermanas y los hermanos

En total son siete: cuatro hermanos y tres hermanas. Cada hermano tiene tres hermanas y tres hermanos, y cada hermana, cuatro hermanos y dos hermanas.

¿Cuántos hijos?

En total son siete hijos: seis varones y una hembra. (De ordinario responden que los hijos son doce; pero en este caso cada hijo tendría seis hermanas, y no una).

El desayuno

La cuestión se explica fácilmente. A la mesa no se sentaron cuatro personas, sino solamente tres: el abuelo, su hijo y el nieto. Tanto el abuelo como su hijo son padres, y tanto el hijo como el nieto son hijos.

Tres cuartas partes de hombre

Sabemos que tres cuartas partes de la cuadrilla más tres cuartas partes de hombre constituyen la cuadrilla entera. Por lo tanto, estas tres cuartas partes de hombre es la cuarta parte que le falta a la cuadrilla. Después ya es fácil comprender que la brigada completa será cuatro veces mayor que tres cuartas partes de hombre. Pero tres cuartas partes tomadas cuatro veces (es decir, multiplicadas por cuatro) dan tres. Por consiguiente, en la cuadrilla había en total tres hombres.

¿Cuántos años tienen?

Calcular los años que tiene cada uno no es difícil. Está claro que el hijo es siete veces mayor que el nieto, y que el abuelo es 12 veces mayor. Si el niño tuviera un año, el hijo tendría 7 y el abuelo 12, y todos juntos, 20. Esto es exactatamente cinco veces menos de lo que ocurre en realidad. Por lo tanto, el nieto tiene cinco años, el hijo, 35 y el abuelo, 60. Hagamos la prueba: $5 + 35 + 60 = 100$.

¿Quién es mayor?

Mayor no es ninguno de los dos: son mellizos y en el momento dado tiene cada uno seis años. La edad se halla por medio de un simple cálculo: dentro de dos años el niño tendrá cuatro años más que hace dos años y será dos veces mayor que entonces; por lo tanto, cuatro años es la edad que tenía hace dos años, y ahora tiene $4 + 2 = 6$ años.

Esta misma es la edad de la niña.

La edad de mi hijo

Si el hijo es ahora tres veces más joven que el padre, éste sará mayor que él en dos veces su edad. Cinco años antes el padre, claro está, también era mayor que el hijo en dos veces la edad *actual* de éste. Por otra parte, como el padre era entonces cuatro veca mayor que el hijo, quiere decir que era mayor que él en tres veces su edad *de entonces*. Por consiguiente, dos veces la edad *actual* del hijo es igual a tres veces su edad *anterior* o, lo que es lo mismo, el hijo es ahora $1^1/_2$ mayor de lo que era hace cinco años. De donde es fácil comprender que cinco años es la mitad de la edad anterior del hijo y, por lo tanto, hace cinco años éste tenía 10 años y ahora tiene 15 años.

Así, pues, el hijo tiene ahora 15 años, y el padre 45. En efecto, hace cinco años tenía el padre 40 años y el hijo, 10, es decir, era cuatro veces más joven.

¿Qué edad tiene?

La solución aritmética es bastante complicada, pero el problema se resuelve fácilmente si se recurre al álgebra y se plantea una ecuación. Llamemos x al número de años que buscamos. En este caso, la edad al cabo de tres años deberá designarse por $x + 3$, y la edad hace tres años, por $x - 3$. Tendremos la ecuación:

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x,$$

que una vez resulta da $x = 18$. El aficionado a los acertijos tiene ahora 18 años.

Hagamos la prueba: dentro de tres años tendrá 21 años; hace tres años tenía 15. La diferencia

$$3 \times 21 - 3 \times 15 = 63 - 45 = 18,$$

es decir, igual a la edad actual del aficionado a los acertijos.

Tres hijas y dos hijos

Sabemos que Volodia es dos veces mayor que Zhenia, y que Nadia y Zhenia juntos tienen el doble de años que Volodia. Por lo tanto, Nadia y Zhenia juntas tienen cuatro veces más años que Zhenia sola. De aquí se deduce directamente que *Nadia en tres veces mayor que Zhenia*.

Sabemos también que los años de Aliosha y Volodia suman el doble que los años de Nadia y Zhenia. Pero la edad de Volodia es doble que la de Zhenia, y Nadia y Zhenia juntas tienen cuatro veces más años que Zhenia sola. Por consiguiente, la suma de los años de Aliosha más el doble de los de Zhenia es igual a 8 veces la edad de Zhenia. Es decir, *Aliosha es seis veces mayor que Zhenia*.

Finalmente, sabemos que la suma de las edades de Lida, Nadia y Zhenia es igual a la de las edades de Volodia y Aliosha.

Ante la vista tenemos la siguiente tabla:

Lida	— 21 años,
Nadia	— tres veces mayor que Zhenia,
Volodia	— dos veces mayor que Zhenia,
Aliosha	— seis veces mayor que Zhenia,

podemos decir que la suma de 21 años más tres veces la edad de Zhenia, más la edad de Zhenia es igual a cuatro veces la edad de Zhenia más 12 veces la edad de Zhenia.

O sea: 21 años más cuatro veces la edad de Zhenia es igual a 16 veces la edad de Zhenia.

De aquí se deduce que 21 años es igual a 12 veces la edad de Zhenia y, por lo tanto, Zhenia tiene $\frac{21}{12} = 1^3/_4$ años.

Ahora ya es fácil determinar que Volodia tiene $3^1/_2$ años, Nadia, $5^1/_4$ y Aliosha, $10^1/_2$ años.

Años de sindicato

Uno lleva ocho años en el sindicato y el otro, cuatro años. Hace dos años el primero llevaba seis años y el segundo, dos, es decir, tres veces menos (el problema se resuelve fácilmente valiéndose de una ecuación).

¿Cuántas partidas?

De ordinario responden que cada uno jugó una partida, sin pararse a pensar que tres jugadores (lo mismo que cualquier otro número impar) no pueden jugar en modo alguno una partida solamente cada uno, porque, ¿con quién jugaría entonces el tercer jugador? En cada partida tienen que participar dos jugadores. Si jugaron A, B y C y fueron jugadas tres partidas, esto quiere decir que jugaron

A con B,
A con C,
B con C.

Se ve fácilmente que cada uno jugó no una, sino dos partidas:

A jugó con B y con C,
B jugó con A y con C,
C jugó con A y con B.

Así, pues, la respuesta correcta a este acertijo es: cada uno de los tres jugó dos veces, aunque sólo se jugaron tres partidas en total.

El caracol

Al cabo de 10 días (con sus noches) y un día más. Durante los primeros 10 días, el caracol sube 10 m (uno cada día), y durante el último día sube 5 m más, es decir, llega a la cima del árbol. (De ordinario responden erróneamente que «al cabo de 15 días»).

A la ciudad

El koljosiano no ganó nada, al contrario, perdió. En la segunda mitad del camino empleó tanto tiempo como hubiera tardado en hacer a pie todo el recorrido hasta la ciudad. Por lo tanto, no pudo ganar tiempo, sino que sólo pudo perderlo.

Perdió $^1/_{15}$ parte del tiempo necesario para recorrer a pie la mitad del camino.

Al koljós

La solución de este problema queda clara si se parte de los siguientes cómputos:

En 24 km subiendo cuesta y 8 km bajando cuesta tarda 4 horas y 30 minutos.

En 8 km subiendo cuesta y 24 km bajando cuesta tarda 2 horas y 50 minutos.

Multiplicando el segundo renglón por tres, tenemos que:

En 24 km subiendo cuesta y 72 km bajando cuesta tardaría 8 horas y 30 minutos.

De aquí se deduce claramente que 72 menos 8, es decir, 64 km bajando cuesta, los recorre el ciclista en 8 horas y 30 minutos menos 4 horas y 30 minutos, o sea, en 4 horas. Por consiguiente, en una hora recorrería $64 : 4 = 16$ km bajando cuesta.

De un modo semejante hallamos que subiendo cuesta recorría 6 km por hora. De la corrección de estas soluciones es fácil convencerse haciendo la prueba.

Dos escolares

Del hecho de que la entrega de una manzana iguale el número de las que tienen los dos escolares se deduce, que uno de ellos tiene dos manzanas más que el otro. Si del número menor se quita una manzana y se agrega al número mayor, la diferencia aumenta en dos más y se hace igual a cuatro. Pero sabemos que en este caso el número mayor será igual al duplo del menor. Por lo tanto, el número menor será entonces 4, y el mayor, 8.

Antes de la entrega de la manzana, uno de los escolares tenía $8 - 1 = 7$, y el otro $4 + 1 = 5$.

Comprobemos si estos números se igualan cuando del mayor se quita una manzana y se le agrega al menor:

$$7 - 1 = 6; \quad 5 + 1 = 6.$$

Así, pues, uno de los escolares tenía siete manzanas y el otro cinco.

El precio de la encuadernación

Por lo general responden sin pensar: la encuadernación cuesta 50 copeikas.

Pero en este caso el libro costaría 2 rublos, es decir, sólo sería 1 rublo y 50 copeikas más caro que a encuadernación.

La respuesta correcta es: el precio de la encuadernación es 25 copeikas, y el del libro, 2 rublos 25 copeikas; entonces el libro resulta exactamente 2 rublos más caro que la encuadernación.

El precio de la hebilla

Usted quizá haya pensado que la hebilla cuesta 8 copeikas. Si es así, se ha equivocado, porque en este caso la correa costaría no 60 copeikas más cara que la hebilla, sino sólo 52. La respuesta correcta es: la hebilla cuesta 4 copeikas; entonces la correa vale $68 - - 4 = 60$ copeikas, es decir, 60 copeikas más que la hebilla.

Los barriles de miel

Este problema se resuelve con bastante facilidad, si se considera que en los 21 barriles comprados había $7 + 3^1/_2$, es decir, $10^1/_2$ barriles de miel.

Por lo tanto, cada cooperativa debe recibir $3^1/_2$ barriles de miel y siete barriles vacíos.

El reparto puede hacerse de dos maneras. Por una de ellas las cooperativas reciben:

1ª cooperativa	3 b. llenos 1 b. medio lleno 3 b. vacíos	En total $3^1/_2$ barriles de miel
2ª cooperativa	2 b. llenos 3 b. medio llenos 2 b. vacíos	En total $3^1/_2$ barriles de miel
3ª cooperativa	2 b. llenos 3 b. medio llenos 3 b. vacíos	En total $3^1/_2$ barriles de miel

Por el otro procedimiento, las cooperativas reciben:

1ª cooperativa	3 b. llenos 1 b. medio lleno 3 b. vacíos	En total $3^1/_2$ barriles de miel
2ª cooperativa	3 b. llenos 1 b. medio lleno 3 b. vacíos	En total $3^1/_2$ barriles de miel
3ª cooperativa	1 b. lleno 5 b. medio llenos 1 b. vacío	En total $3^1/_2$ barriles de miel

Los gatitos de Misha

No es difícil comprender que $^3/_4$ partes de gato es la cuarta parte de todos los gatitos.

Por lo tanto, el total de los gatitos era cuatro veces mayor que $^3/_4$ partes, es decir, tres. En efecto, $^3/_4$ de tres es $2^1/_4$, y quedan $^3/_4$ partes de gato.

Los sellos de correos

Este problema tiene sólo una solución.

El ciudadano compró:

1 sello de a 50 copeikas
39 sellos de a 10 copeikas
60 sellos de a 1 copeika.

Efectivamente, los sellos eran en total $1 + 39 + 60 = 100$.
Y costaban $50 + 390 + 60 = 500$ copeikas.

¿Cuántas monedas?

El problema tiene cuatro soluciones, a saber:

	I procedimiento	II procedimiento	III procedimiento	IV procedimiento
Rublos	1	2	3	4
Monedas de 10 copeikas	36	25	14	3
Copeikas	5	15	25	35
Total de monedas	42	42	42	42

Calcetines y guantes

Bastarán tres calcetines, ya que dos de ellos serán siempre del mismo color. Con los guantes es más complicado el problema, ya que se diferencian entre sí no sólo por el color, sino también porque la mitad de ellos son para la mano derecha y la otra mitad, para la izquierda. Aquí bastarán sacar 21 guantes. Si se sacan menos, por ejemplo, 20, puede ocurrir que todos sean de la misma mano (10 castaños izquierdos y 10 negros izquierdos).

«El gusanillo de libro»

De ordinario responden que el «gusanillo» royó 800 + 800 páginas y dos tapas de encuadernación. Pero esto no es cierto. Ponga juntos dos libros: uno al derecho y otro al reves, como muestra la fig. 247. Mire ahora cuántas páginas hay entre la primera del primer libro y la última del segundo.

Se convencerá de que entre ellas no hay *nada* más que las dos tapas.

«El gusanillo del libro» sólo estropeó, pues, las tapas de los libros, sin tocar sus hojas.

Las arañas y los escarabajos

Para resolver este problema hay que empezar recordando lo que dice la historia natural acerca de cuántas patas tienen los escarabajos y cuántas, las arañas: el escarabajo tiene seis patas y la araña, ocho.

Sabiendo esto, supongamos que en la caja sólo había ocho escarabajos. Entonces el número total de patas sería $6 \times 8 = 48$, es decir, seis menos de las que indica el problema. Probemos ahora a sustituir un escarabajo por una araña. Con esto el número de patas aumentará en dos, porque la araña tiene ocho patas, en vez de seis del escarabajo.

Está claro que si hacemos seis sustituciones como ésta, el número total de las patas que hay en la caja llegará a las 54 requeridas. Pero entonces sólo quedarán cinco de los ocho escarabajos, las demás serán arañas.

Así, pues, en la caja había cinco escarabajos y tres arañas.

Hagamos la prueba: los cinco escarabajos tienen 30 patas, y las tres arañas, 24, con lo que en total serán $30 + 24 = 54$ como exige la condición del problema.

El problema también se puede resolver de otro modo, a saber: puede suponerse que en la caja sólo había ocho arañas. Entonces el número total de patas resultaría ser $8 \times 8 = 64$, es decir, 10 veces más de las indicadas en la condición. Sustituyendo una araña por un escarabajo disminuiremos en dos el número de patas. Hay que hacer cinco sustituciones de este tipo para reducir el número de patas a las 54 que se requieren. En otras palabras, de las ocho arañas sólo hay que dejar tres y sustituir las demás por escarabajos.

Los siete amigos

No es difícil comprender que los siete amigos sólo podrían encontrarse juntos al cabo de un número de días divisible por 2, 3, 4, 5, 6 y 7. El menor de estos números es 420.

Por lo tanto, todos los amigos se reunían sólo una vez cada 420 días.

Continuación del anterior

Cada uno de los ocho asistentes (el antifitrión y sus siete amigos) choca su copa con los otros siete; por lo tanto, resultan $8 \times 7 = 56$ combinaciones de dos. Pero, al proceder así, cada pareja se cuenta dos veces (por ejemplo, el tercer huésped con el quinto y el quinto con el tercero se cuentan como si fueran parejas distintas). Por consiguiente, las copas sumarán $\frac{56}{2} = 28$ veces.

20 **¿Sabe usted contar?**

Esta pregunta puede parecer enojosa a toda persona de más de tres años de edad. ¿Quién no sabe contar? Para decir sucesivamente «uno», «dos», «tres», no hace falta mucha habilidad. Y, a pesar de todo, estoy seguro de que no siempre haría usted bien una cosa tan sencilla al parecer. Todo depende de lo que hay que contar. No es difícil contar los clavos que hay en un cajón. Pero supongamos que en este cajón no hay sólo clavos, sino clavos y tornillos mezclados y se desea saber cuántos clavos y cuántos tornillos hay. ¿Qué hará usted entonces? ¿Separará los clavos de los tornillos y los contará después independientemente?

Este mismo problema se le plantea al ama de casa cuando tiene que contar la ropa antes de darla a lavar. Ella separa la ropa por tipos: hace un montón con las camisas, otro con las toallas, un tercero con las fundas de las almohadas y así sucesivamente. Y sólo después de realizar este fastidioso trabajo empieza a contar las prendas que hay en cada montón.

¡Esto es no saber contar! Porque este procedimiento de contar objetos heterogéneos es bastante incómodo, complicado y a veces irrealizable. Cuando se trata de contar clavos o ropa, no está mal: se pueden agrupar en montones. Pero póngase en el caso de un silvicultor, que tiene que contar cuántos pinos, abetos, abedules y álamos crecen en una misma hectárea de terreno. En este caso es imposible agrupar previamente los árboles por tipos. ¿Va a contar primero los pinos, después, sólo abetos, luego, los abedules y, por fin, los álamos? ¿Recorrerá cuatro veces la parcela?

¿No existe, acaso, algún procedimiento más sencillo, que permita hacer esto recorriendo una *sola* vez la parcela? Sí, ese procedimiento existe y desde hace muchísimo tiempo lo emplean los silvicultores. Demostraré en qué consiste basándome en el ejemplo de los clavos y los tornillos.

Para contar de una sola vez cuántos clavos y cuántos tornillos hay en el cajón, sin separarlos previamente, coja un lapiz y una hoja de papel rayado así:

Clavos	Tornillos

Después, comience a contar. Saque de la caja lo primero que le venga a mano. Si es un clavo, haga una rayita en el papel, en la casilla de los clavos; si es un tornillo, haga la rayita en la casilla de los tornillos. Saque el segundo objeto y proceda del mismo modo. Coja el tercer objeto y así sucesivamente hasta que quede completamente vacío el cajón. Cuando termine de contar, en la casilla de los clavos del papel habrá tantas rayitas como clavos había en el cajón, y en la casilla de los tornillos, tantas rayitas como tornillos había. Sólo queda contar las rayitas trazadas en el papel.

La cuenta de las rayitas puede hacerse más sencilla y más rápida si en vez de ponerlas unas detrás de otras se agrupan de cinco en cinco, formando figuras como la representada en la fig. 249.

Figura 249

Estos cuadraditos conviene agruparlos formando parejas, es decir, después de las primeras diez rayitas, se pone la 11ª en una nueva columna; cuando en la segunda columna se completan dos cuadraditos, se

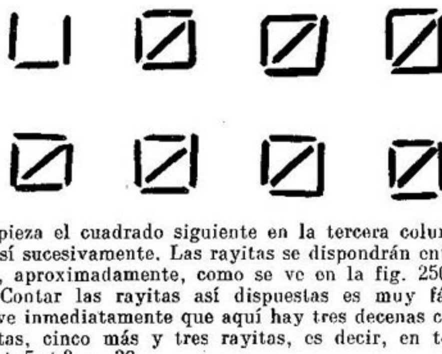


Figura 250

empieza el cuadrado siguiente en la tercera columna y así sucesivamente. Las rayitas se dispondrán entonces, aproximadamente, como se ve en la fig. 250.

Contar las rayitas así dispuestas es muy fácil: se ve inmediatamente que aquí hay tres decenas completas, cinco más y tres rayitas, es decir, en total $30 + 5 + 3 = 38$.

Pueden emplearse figuras de otro tipo; por ejemplo, suelen utilizarse símbolos en los que cada cuadradito significa 10 (fig. 251).

Figura 251

Cuando se cuentan los árboles de distintas especies que hay en una parcela de bosque, se procede idénticamente, pero en la hoja de papel habrá, en este caso, cuatro casillas en vez de dos.

Aquí es preferible que las casillas sean horizontales, y no verticales. Antes de empezar a contar, la hoja tendrá, por lo tanto, la forma siguiente:

Pinos	
Abetos	
Abedules	
Alamos	

Cuando se termina de contar, en el papel se tiene algo parecido a lo que se ve en la fig. 252.

Sacar el total es aquí muy sencillo:

Pinos 53
Abetos 79
Abedules . . . 46
Alamos 37

Este mismo procedimiento de cálculo lo utilizan los médicos para contar los glóbulos rojos y blancos que hay en la muestra de sangre que observan al microscopio.

Si necesita usted contar, por ejemplo, qué plantas hay y en qué cantidad crecen en una parcela pequeña de prado, ya sabe como resolver este problema en un plazo de tiempo mínimo. En la hoja de papel apunte previamente los nombres de las plantas que haya visto, dándole a cada una su casilla, y deje varias casillas libres de reserva para las plantas que puedan encontrarse inesperadamente. Empezará usted a contar

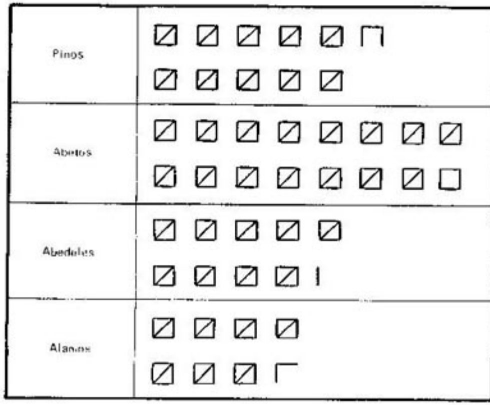


Figura 252

en una hoja de papel semejante a la que representa la fig. 252. Después hará lo mismo que en el caso de la parcela de bosque.

¿Para qué se cuentan los árboles que hay en un bosque?

A los habitantes de la ciudad les parece que esto es hasta imposible. En la novela de L. Tolstoi «Ana Karénina», el experto en agricultura, Levin, le pregunta a un pariente suyo, profano en esta materia, que quiere vender un bosque:

«—¿Has contado los árboles?

—¿Cómo que si he contado los árboles? —le responde sorprendido éste—. «Contar las arenas del mar o los rayos de los planetas, aunque grande fuera su talento...»

— Sí, pero el gran talento de Riabinin (el negociante, —*Y. P.*) puede contarlos. Y ningún mujik lo comprará sin antes contarlos».

Los árboles que hay en un bosque se cuentan para saber cuántos metros cúbicos de madera hay en él. No se cuentan todos los árboles del bosque, sino los de una parcela determinada —de un cuarto o un medio de hectárea—elegida de tal modo, que por la densidad, composición, grosor y altura de sus árboles pueda servir de término medio del bosque dado. Para hacer una elección acertada hay que tener, claro está, un ojo experto. Al hacer la cuenta no basta determinar el número de árboles do cada especie, sino que hay que saber también cuántos troncos hay de cada grosor: cuántos de 25 centímetros, de 30 centímetros, de 35 centímetros, etc. La relación que se hace tiene, por esta razón, no cuatro casillas, como en nuestro ejemplo simplificado, sino muchas más. Ahora puede figurarse usted la gran cantidad de veces que habría que recorrer el bosque, si los árboles se contaran como de ordinario, y no como hemos explicado aquí.

Como ve, contar sólo es fácil cuando se trata de objetos homogéneos. Pero cuando se quiere conocer el número de objetos heterogéneos, hay que recurrir a los procedimientos especiales, que hemos explicado ahora, cuya existencia ignoran muchos.

CALCULO RAPIDO

(Procedimientos fáciles de cálculo mental)

Aquí se han recogido algunos procedimientos de cálculo mental rápido, simples y fáciles de aprender. Los que utilicen estos procedimientos deben recordar que su dominio eficaz presupone no su aplicación mecánica, sino completamente consciente y, además, un entrenamiento más o menos prolongado. Pero una vez aprendidos los procedimientos que recomendamos, pueden hacerse cálculos mentales rápidos con la misma seguridad que se escribieran.

Multiplicación por un número dígito

§ 1. Para multiplicar mentalmente un número por un factor dígito (por ejemplo, 27×8), se opera empezando por multiplicar no las unidades, como en el cálculo escrito, sino las decenas del multiplicando ($20 \times 8 = 160$), después se multiplican las unidades ($7 \times 8 = 56$) y luego se suman ambos resultados ($160 + 56 = 216$).

Otros ejemplos:

$34 \times 7 = 30 \times 7 + 4 \times 7 = 210 + 28 = 238$,
$47 \times 6 = 40 \times 6 + 7 \times 6 = 240 + 42 = 282$.

§ 2. Conviene saber de memoria la tabla de multiplicar hasta 19×9:

	2	3	4	5	6	7	8	9
11	22	33	44	55	66	77	88	99
12	24	36	48	60	72	84	96	108
13	26	39	52	65	78	91	104	117
14	28	42	56	70	84	98	112	126
15	30	45	60	75	90	105	120	135
16	32	48	64	80	96	112	128	144
17	34	51	68	85	102	119	136	153
18	36	54	72	90	108	126	144	162
19	38	57	76	95	114	133	152	171

Sabiendo esta tabla se puede multiplicar mentalmente, por ejemplo, 147×8, así:

$147 \times 8 = 140 \times 8 + 7 \times 8 = 1120 + 56 = 1176.$

§ 3. Cuando uno de los números que se multiplica puede descomponerse en factores dígitos, resulta cómodo multiplicar sucesivamente por estos factores. Por ejemplo:

$225 \times 6 = 225 \times 2 \times 3 = 450 \times 3 + 1350.$

Multiplicación por un número de dos cifras

§ 4. La multiplicación por un número de dos cifras se procura simplificar para el cálculo mental reduciéndola a una multiplicación más habitual por un número dígito.

Cuando el multiplicando es dígito, se considera mentalmente que es multiplicador y las operaciones se hacen como se dijo en el § 1. Por ejemplo:

$6 \times 28 = 28 \times 6 = 120 + 48 = 168.$

§ 5. Si los dos factores tienen dos cifras, uno de ellos se descompone en decenas y unidades. Por ejemplo:

$29 \times 12 = 29 \times 10 + 29 \times 2 = 290 + 58 = 348.$
$41 \times 16 = 41 \times 10 + 41 \times 6 = 419 + 246 = 656.$
(ó $41 \times 16 = 16 \times 41 = 16 \times 40 + 16 - 640 + 16 - 656$)

Resulta más conveniente descomponer en decenas y unidades el factor en que éstas vienen expresadas con números menores.

§ 6. Si el multiplicando o el multiplicador puede descomponerse mentalmente y con facilidad en números dígitos (por ejemplo, $14 = 2 \times 7$), se aprovecha esta circunstancia para disminuir uno de los factores, aumentando el otro las mismas veces (compárese con el § 3). Por ejemplo:

$45 \times 14 = 90 \times 7 = 630.$

Multiplicación y división por 4 y por 8

§ 7. Para multiplicar, mentalmente, un número por 4, se duplica dos veces. Por ejemplo:

$112 \times 4 = 224 \times 2 = 448.$
$335 \times 4 = 670 \times 2 = 1340.$

§ 8. Para multiplicar, mentalmente, un número por 8, se duplica tres veces. Por ejemplo:

$$217 \times 8 = 434 \times 4 = 868 \times 2 = 1736.$$

Otro procedimiento de multiplicar mentalmente por 8 consiste en añadirle un cero al multiplicando y restale el duplo de dicho multiplicando (es decir, en definitiva se multiplica por $10 - 2$):

$$217 \times 8 = 2170 - 434 = 1736.$$

Resulta aún más cómodo proceder así:

$$217 \times 8 = 200 \times 8 + 17 \times 8 = 1600 + 136 = 1736.$$

§ 9. Para dividir un número por 4 mentalmente, se divide dos veces por dos. Por ejemplo:

$$76 : 4 = 38 : 2 = 19.$$
$$236 : 4 = 118 : 2 = 59.$$

§ 10. Para dividir un número por 8 mentalmente, se divide tres veces por dos. Por ejemplo:

$$464 : 9 = 232 : 4 = 116 : 2 = 58.$$
$$516 : 8 = 258 : 4 = 129 : 2 = 64^{1}/_{2}.$$

Multiplicación por 5 y por 25

§ 11. Para multiplicar, mentalmente, un número por 5, se multiplica por $\frac{10}{2}$, es decir, se le añade al número un cero y se divide por dos. Por ejemplo:

$$74 \times 5 = 740 : 2 = 370.$$
$$243 \times 5 = 2430 : 2 = 1215.$$

Cuando el número que se multiplica por 5 es par, resulta más cómodo dividir primeramente por 2 y añadir después un cero a la cantidad obtenida. Por ejemplo:

$$74 \times 5 = \frac{74}{2} \times 10 = 370.$$

§ 12. Para multiplicar un número por 25 mentalmente, se multiplica por $\frac{100}{4}$, es decir, si el número es múltiplo de cuatro, se divide por 4 y al cociente se le añaden dos ceros. Por ejemplo:

$$72 \times 25 = \frac{72}{4} \times 100 = 1800.$$

Si al dividir el número por 4 queda resto,

cuando	el	resto	es	1	se	le	añade	al	cociente		25
»	»	»	»	2	»	»	»	»	»		50
»	»	»	»	3	»	»	»	»	»		75

La base en que funda este procedimiento queda aclarada por el hecho de que $100 : 4 = 25$; $200 : 4 = 50$; y $300 : 4 = 75$.

Multiplicación por $1^1/_2$, por $1^1/_4$, por $2^1/_2$ y por $^3/_4$

§ 13. Para multiplicar, mentalmente, un número por $1^1/_2$, se le añade al multiplicando su mitad. Por ejemplo:

$34 \times 1^1/_2 = 34 + 17 = 51.$
$22 \times 1^1/_2 = 23 + 11^1/_2 = 34^1/_2$ (ó 34,5).

§ 14. Para multiplicar, mentalmente, un número por $1^1/_4$, se le añade al multiplicando su cuarta parte. Por ejemplo:

$48 \times 1^1/_4 = 48 + 12 = 60.$
$58 \times 1/_4 \times 58 + 14^1/_2 = 72^1/_2$ (ó 72,5).

§ 15. Para multiplicar un número por $2^1/_2$ mentalmente, al número duplicado se la añade la mitad del multiplicando. Por ejemplo:

$18 \times 2^1/_2 = 36 + 9 = 45.$
$39 \times 2^1/_2 = 78 + 19^1/^2 = 97^1/_2$ (ó 97,5).

Otro procedimiento consiste en multiplicar por 5 y dividir por dos:

$18 \times 2^1/_2 = 90 : 2 = 45.$

§ 16. Para multiplicar un número por $^3/_4$ mentalmente (es decir, para hallar las $^3/_4$ partes de dicho número), se multiplica por $1^1/_2$ y se divide por dos. Por ejemplo:

$$30 \times \frac{3}{4} = \frac{30+15}{2} = 22\,\frac{1}{2} \text{ (ó 22,5).}$$

Una variante de este procedimiento consiste en que al multiplicando se le resta su cuarta parte o a la mitad del multiplicando se le añade la mitad de esta mitad.

Multiplicación por 15, por 125 y por 75

§ 17. La multiplicación por 15 se sustituye por la multiplicación por 10 y por $1^1/_2$ (porque $10 \times 1^1/_2 = 15$). Por ejemplo:

$18 \times 15 = 18 \times 1^1/_2 \times 10 = 270.$
$45 \times 15 + 450 = 225 = 675.$

§ 18. La multiplicación por 125 se sustituye por la multiplicación por 100 y por $1^1/_4$ (porque $100 \times \times 1^1/_4 = 125$). Por ejemplo:

$26 \times 125 = 26 \times 100 \times 1^1/_4 = 2600 + 650 = 3250.$

$$47 \times 125 = 47 \times 100 \times 1\ \frac{1}{4} = 4700 + \frac{4700}{4} = 4700 + 1175 = 5875.$$

§ 19. La multiplicación por 75 se sustituye por una multiplicación por 100 y por $^3/_4$ (porque $100 \times {}^3/_4 = = 75$). Por ejemplo:

$$18 \times 75 = 18 \times 100 \times \frac{3}{4} = 1800 \times \frac{3}{4} = \frac{1800 + 900}{2} = 1350$$

Observación: Algunos de los ejemplos citados también pueden resolverse fácilmente por el procedimiento del § 6:

$18 \times 15 = 90 \times 3 = 270.$
$26 \times 125 = 130 \times 25 = 3250.$

Multiplicación por 9 y por 11

§ 20. Para multiplicar, mentalmente, un número por 9, se le añade al número un cero y se le resta el multiplicando. Por ejemplo:

$62 \times 9 = 620 - 62 = 600 - 42 = 558.$
$73 \times 9 = 730 - 73 = 700 - 43 = 657.$

§ 21. Para multiplicar un número por 11 mentalmente, se le añade al número un cero y se le suma el multiplicando. Por ejemplo:
$87 \times 11 = 870 \times 87 = 957.$

División por 5, por $1^1/_2$ y por 15

§ 22. Para dividir, mentalmente, un número por 5, se separa con una coma la última cifra del duplo del número. Por ejemplo:

$$68 : 5 = \frac{136}{10} = 13{,}6.$$

$$237 : 5 = \frac{474}{10} = 47{,}4.$$

§ 23. Para dividir un número por $1\,^1/_2$ mentalmente, se divide por 3 el duplo del número. Por ejemplo:

$36 : 1\,^1/_2 = 72 : 3 = 24.$
$53 : 1\,^1/_2 = 106 : 3 = 35\,^1/_3.$

§ 24. Para dividir un número por 15 mentalmente, se divide por 30 el duplo de dicho número. Por ejemplo:

$240 : 15 = 480 : 30 = 48 : 3 = 16.$
$462 : 15 = 924 : 30 = 30\,^{24}/_{30} = 30\,^4/_5 = 30{,}8.$
(ó $924 : 30 - 308 : 10 = 30{,}8$).

Elevación al cuadrado

§ 25. Para elevar al cuadrado un número terminado en 5 (por ejemplo, 85) se multiplica el número de decenas (8) por sí mismo más una unidad ($8 \times 9 = 72$) y se le añade 25 (en nuestro ejemplo se obtiene 7225). Otros ejemplos:

25^2; $2 \times 3 = 6$; 625.
45^2; $4 \times 5 = 20$; 2025.
145^2; $14 \times 15 = 210$; 21025;

Este procedimiento se deduce de la fórmula

$$(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x\,(x + 1) + 25.$$

§ 26. El procedimiento que hemos indicado puede aplicarse también a las fracciones decimales que terminan en la cifra 5:

$8{,}5^2 = 72{,}25$; $14{,}5^2 = 210{,}25$;
$0{,}35^2 = 0{,}1225$; etc.

§ 27. Como $0{,}5 = {}^1/_2$ y $0{,}25 = {}^1/_4$, el procedimiento del § 25 puede utilizarse también para elevar al cuadrado los números que terminan en la fracción $^1/_2$:

$(8\,^1/^2)^2 = 72\,^1/_4.$
$(14\,^1/_2)^2 = 210\,^1/_4$, etc,

§ 28. Cuando la elevación al cuadrado se hace mentalmente, suele ser cómodo utilizar la fórmula:

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2\,ab.$$

Por ejemplo:

$41^2 = 40^2 + 1 + 2 \times 40 = 1601 + 80 = 1681.$
$69^2 = 70^2 + 1 - 2 \times 70 = 4901 - 140 = 4761.$
$36^2 = (35 + 1)^2 = 1225 + 1 + 2 \times 35 = 1296.$

Este procedimiento resulta cómodo cuando los números terminan en 1, 4, 6 y 9.

Cálculos por la fórmula
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

§ 29. Supongamos que hay que hacer mentalmente la multiplicación 52×48.

Nos figuramos estos factores en la forma $(50 + 2) \times (50 - 2)$ y aplicamos la fórmula que figura en el encabezamiento:

$$50 + 2) \times (50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2496.$$

De un modo semejante se procede en general en todos los casos en que uno de los factores resulta cómodo representarlo en forma de suma de dos números, y el otro, en forma de diferencia de estos mismos números.

$$69 \times 71 = (70 - 1) \times (70 + 1) = 4899.$$
$$33 \times 27 = (30 + 3) \times (30 - 3) = 891.$$
$$53 \times 57 = (55 - 2) \times (55 + 2) = 3021.$$
$$84 \times 86 = (85 - 1) \times (85 + 1) = 7224.$$

§ 30. Este mismo procedimiento puede utilizarse también eficazmente para los cálculos del tipo siguiente:

$$7^1/_2 \times 6^1/_2 = (7 + {}^1/_2) \times (7 - {}^1/_2) = 48^3/_4.$$
$$11^3/_4 \times 12^1/_4 = (12 - {}^1/_2) \times (12 + {}^1/_4) = 143^{15}/_{16}.$$

Convieno recordar que $37 \times 3 = 111$

Recordando esto es fácil multiplicar mentalmente el número 37 por 6, 9, 12, etc.

$$37 \times 6 = 37 \times 3 \times 2 = 222.$$
$$37 \times 9 = 37 \times 3 \times 3 = 333.$$
$$37 \times 12 = 37 \times 3 \times 4 = 444.$$
$$37 \times 15 = 37 \times 3 \times 4 = 555, \text{ etc},$$

Conviene recordar que $7 \times 11 \times 13 = 1001$

Recordando esto es fácil practicar mentalmente multiplicaciones del tipo

$77 \times 13 = 1001.$	$91 \times 11 = 1001.$	$143 \times 7 = 1001.$
$77 \times 26 = 2002.$	$91 \times 22 = 2002.$	$143 \times 14 = 2002.$
$77 \times 39 = 3003,$	$91 \times 33 = 3003,$	$143 \times 21 = 3003,$
etc.	etc,	etc.

Aquí sólo se ha hecho mención de los procedimientos mentales más fáciles y de uso más frecuente de multiplicación, división y elevación al cuadrado. Al practicarlos, el lector reflexivo ideará para sí toda una serie de otros procedimientos que facilitan el trabajo de cálculo.

El cuadrado mágico más pequeño

La composición de cuadrados mágicos es un entretenimiento matemático muy antiguo y aún hoy muy extendido. El problema consiste en buscar una disposición tal de los números sucesivos (empezando por el 1), en las casillas de un cuadrado cuadriculado, que las sumas de los números en todas las filas y columnas y siguiendo las dos diagonales del cuadrado sean iguales.

El cuadrado mágico más pequeño es el de 9 casillas; es fácil convencerse, haciendo la prueba, de que es imposible la existencia de un cuadrado mágico de cuatro casillas. He aquí una muestra de cuadrado mágico de 9 casillas:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Figura 253

Si sumamos en este cuadrado los números $4 + 3 + 8$, ó $2 + 7 + 6$, ó $3 + 5 + 7$, ó $4 + 5 + 6$, o cualquier otra fila, columna o diagonal, en todos los casos obtendremos la misma suma, 15. Este resultado puede preverse antes de componer el propio cuadrado, porque las tres filas del cuadrado, la superior, la de en medio y la inferior, deben contener todos sus 9 números, que en conjunto dan la suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Por otra parte, esta suma deberá ser igual, evidentemente, al triplo de la suma de una fila. De aquí se deduce que cada fila debe sumar:

$$45 : 3 = 15.$$

De un modo semejante se puede determinar a priori la suma de los números de una fila o columna de cualquier cuadrado mágico, cualquiera que sea el número de casillas de que conste. Para esto hay que dividir la suma de todos los números del cuadrado por el número de sus filas.

Rotaciones y reflexiones

Una vez compuesto un cuadrado mágico, es fácil obtener sus variantes, es decir, hallar una serie de nuevos cuadrados mágicos. Por ejemplo, si se ha compuesto el cuadrado de la fig. 254, haciéndolo girar mentalmente un cuarto de vuelta completa (es decir, 90°), se obtiene otro cuadrado mágico (fig. 255):

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Figura 254

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Figura 255

Los sucesivos giros, de 180° (media vuelta completa) y de 270° (tres cuartos de vuelta completa), dan otras dos variantes del cuadrado inicial.

Cada uno de los nuevos cuadrados mágicos obtenidos puede a su vez modificarse, si nos lo figuramos como si viéramos su imagen reflejada en un espejo. En la fig. 256 se muestra el cuadrado inicial y una de sus imágenes especulares.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figura 256

Sometiendo un cuadrado de 9 casillas a todas las rotaciones y reflexiones, obtenemos las siguientes modificaciones o variantes suyas (fig. 257):

1

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

3

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Figura 257 (1—3)

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

5

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

7

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8

Figura 257 (4—8)

Esta es la colección completa de todos los cuadrados mágicos que pueden formarse con los nueve primeros números.

El procedimiento de Bachet

Vamos a dar a conocer un viejo procedimiento de componer cuadrados mágicos *impares*, es decir, cuadrados con cualquier número impar de casillas: 3×3; 5×5; 7×7, etc. Este procedimiento fue propuesto en el siglo XVII por el matemático francés Bachet. Como el procedimiento de Bachet sirve, entre otras cosas, para el cuadrado de 9 casillas, resulta conveniente empezar su descripción por este ejemplo, por ser más simple. Así, pues, comenzamos a componer el cuadrado mágico de 9 casillas por el procedimiento de Bachet.

Después de dibujar un cuadrado cuadriculado en nueve casillas, escribimos en orden creciente los números del 1 al 9, disponiéndolos en filas oblicuas, a tres en cada fila, como puede verse en la fig. 258.

Los números que quedan fuera del cuadrado, los escribimos dentro de él, de forma que pasen a los

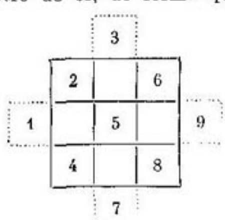


Figura 258

lados opuestos del cuadrado (pero permaneciendo en las mismas columnas o filas en que estaban). Como resultado obtenemos el cuadrado:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Figura 259

Apliquemos la regla de Bachet a la composición de un cuadrado de 5×5 casillas. Empezaremos por la disposición:

				5				
			4		10			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
			16		22			
				21				

Figura 260

Queda sólamente poner dentro del cuadrado los números que han quedado fuera de su marco. Para esto hay que desplazar mentalmente las figuras for-

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Figura 261

madas por los números que están fuera del cuadrado («terrazas»), de modo que pasen a ocupar dentro de éste los lados *opuestos*. De esta manera se obtiene un cuadrado mágico de 25 casillas (fig. 261).

La base de este procedimiento tan sencillo es bastante complicada, pero los lectores pueden convencerse en la práctica de que el procedimiento es correcto.

Después de componer un cuadrado mágico de 25 casillas, por medio de rotaciones y reflexiones puede usted obtener todas sus modificaciones.

El procedimiento hindú

El procedimiento de Bachet o, como también se llama el «procedimiento de las terrazas», no es el único para componer cuadrados con número impar de casillas. De los otros procedimientos que existen, es relativamente fácil uno muy antiguo ideado, al parecer, en la India antes de nuestra era. Este procedimiento puede resumirse en seis reglas. Lea usted atentamente todas estas reglas y fíjese después en cómo se aplican en el ejemplo de cuadrado mágico de 49 casillas representado en la fig. 262.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Figura 262

1. En la mitad de la fila superior se escribe la cifra 1, y en la casilla más baja de la columna inmediata de la derecha, la cifra 2.

2. Los números siguientes se escriben por orden en dirección diagonal hacia arriba.

3. Cuando se llega hasta el borde derecho del cuadrado, se pasa a la casilla extrema izquierda de la fila inmediata superior.

4. Cuando se llega hasta el borde superior del cuadrado, se pasa a la casilla más baja de la columna inmediata de la derecha.

Observación. Cuando se llega hasta la casilla del ángulo superior derecho, se pasa al izquierdo inferior.

5. Cuando se llega a una casilla que ya está ocupada, se pasa a la casilla que se encuentra inmediatamente debajo de la última casilla llenada.

6. Si la última casilla llenada se encuentra en la fila inferior del cuadrado, se pasa a la casilla más alta de la misma columna.

Guiándose por estas reglas se pueden componer rápidamente cuadrados mágicos con cualquier número impar de casillas.

Si el número de casillas del cuadrado *no es divisible* por 3, la composición del cuadrado mágico puede comenzarse no por la regla 1, sino por otra regla.

La unidad puede escribirse en cualquier casilla de la fila diagonal que va desde la casilla central de la columna extrema izquierda a la casilla central de la fila más alta del cuadrado. Todos los números siguientes se escriben de acuerdo con las reglas 2—5.

Esto da la posibilidad de componer por el procedimiento hindú no un cuadrado, sino varios. Como ejemplo damos el siguiente cuadrado mágico de 49 casillas (fig. 263).

32	41	43	3	12	21	23
40	49	2	11	20	22	31
48	1	10	19	28	30	39
7	9	18	27	29	38	47
8	17	26	35	37	46	6
16	25	34	36	45	5	14
24	33	42	44	4	13	15

Figura 263

Ejercicio. Componga por el sistema hindú varios cuadrados mágicos de 25 y 49 casillas. Con los cuadrados obtenidos componga varios más por medio de rotaciones y reflexiones.

Cuadrados con número par de casillas

Para componer los cuadrados mágicos con número par de casillas aún no se ha hallado una regla general y cómoda. Sólo existe un procedimiento relativamente fácil para aquellos cuadrados pares cuyo número de casillas es divisible por 16; el número de casillas de los lados de estos cuadrados es divisible por 4, es decir, sus lados constan de 4, 8, 12, etc., casillas.

Convengamos en qué casillas vamos a llamar «opuestas» entre sí. En la fig. 264 se muestran dos pares de casillas opuestas, que pueden servir de ejemplo: un par se señala con crucecitas y otro con circulitos.

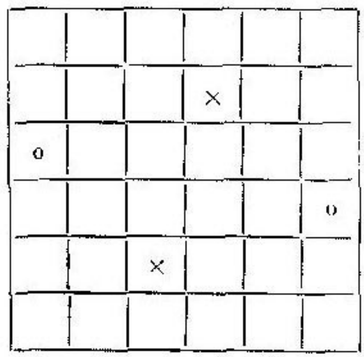


Figura 264

Vemos que si una casilla se encuentra en el cuarto puesto por la izquierda, de la segunda fila por arriba, la casilla opuesta a ella se encontrará en el cuarto puesto *por la derecha* de la segunda fila *por abajo*. (Al lector le conviene entrenarse hallando varios pares más de casillas opuestas). Advertimos que para las casillas tomadas en una fila diagonal, las casillas opuestas se encuentran en esta misma diagonal.

El procedimiento de componer cuadrados con el número indicado de casillas por lado lo explicaremos poniendo como ejemplo el cuadrado de 8 × 8 casillas. Se empieza por escribir ordenadamente en las casillas todos los números del 1 al 64 (fig. 265).

En el cuadrado obtenido, las filas diagonales dan la misma suma, 260, que es precisamente la que debe dar el cuadrado mágico de 8 × 8 casillas. (Compruebe esto). Pero las filas y las columnas de este cuadrado dan otras sumas. Así, la primera fila por arriba da

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Figura 265

en total 36, es decir, 224 menos de lo necesario (260 — — 36); la fila octava, es decir, la más baja, da como suma 484, o sea, 224 más de lo necesario (484 — 260). Teniendo en cuenta que cada número de la octava fila es 56 unidades mayor que el que se halla sobre él en la primera fila y que $224 = 4 \times 56$, llegamos a la conclusión de que las sumas de estas filas pueden igualarse si la mitad de los números de la primera fila intercambian sus puestos con los números que se encuentran debajo de ellos en la octava fila; por ejemplo, los números 1, 2, 3, 4 intercambian sus puestos con los números 57, 58, 59 y 60.

Lo dicho acerca de las filas primera y octava es cierto también para las filas segunda y séptima, tercera y sexta y, en general, para cada par de filas equidistantes de las filas extremas. Haciendo el intercambio de números en todas las filas, se obtiene un cuadrado cuyas filas dan sumas iguales.

Pero es necesario que las columnas también den la misma suma. En la disposición inicial de los números podríamos haber logrado esto haciendo un intercambio de números semejante al que acabamos de hacer con los números de las filas. Pero ahora, después de las permutaciones hechas en las filas, el problema se complica. Para hallar rápidamente los números que hay que intercambiar, existe el siguiente procedimiento, que puede utilizarse desde el principio: en vez de las permutaciones —en las filas y en las columnas—, intercambian sus puestos los números opuestos entre sí (en la pág. 337 se explicó qué números se llaman opuestos). Sin embargo, esta regla es insuficiente, ya que hemos establecido que deben intercambiarse no todos los números de la fila, sino únicamente la *mitad*; los demás números continúan en sus puestos. Pero, ¿qué pares de números opuestos son los que hay que intercambiar?

A esta pregunta responden las cuatro reglas siguientes:

1. El cuadrado mágico debe dividirse en cuatro cuadrados, como muestra la fig. 266.

1×	2	3	4×	5×	6	7	8×
9×	10×	11	12	13	14	15×	16×
17	18×	19×	20	21	22×	23×	24
25	26	27×	28×	29×	30×	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Figura **266**

2. En el cuadrado superior de la izquierda se señalan con crucecitas la mitad de todas las casillas, de manera que en cada columna y en cada fila de este cuadrado resulte señalada exactamente la mitad de las casillas que figuran en ella. Esto puede hacerse por diversos procedimientos, por ejemplo, como se ve en la fig. 266.

3. En el cuadrado superior de la derecha se señalan con crucecitas las casillas *simétricas* a las que se señalaron en el cuadrado superior de la izquierda.

4. Ahora no queda más que intercambiar los números que se encuentran en las casillas señaladas, con los números que se hallan en las casillas opuestas.

Como resultado de todas las permutaciones realizadas se obtiene el cuadrado mágico de 64 casillas que se representa en la fig. 267.

Pero en el cuadrado superior de la izquierda podríamos haber marcado las casillas de muchas maneras distintas, sin infringir la regla 2.

64	2	3	61	60	6	7	57
56	55	11	12	13	14	50	59
17	47	46	20	21	43	42	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	23	22	44	45	19	18	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	58	59	5	4	62	63	1

Figura 267

Esto puede hacerse, por ejemplo, como muestran los dibujos de la fig. 268.

El lector hallará, indudablemente, otras muchas formas de distribuir las crucecitas en las casillas del cuadrado superior de la izquierda.

	×	×	
×	×		
×			×
		×	×

1

	×	×	
×			×
×			×
	×	×	

2

×			×
	×	×	
	×	×	
×			×

3

×	×		
×	×		
		×	×
		×	×

4

Figura 268

Aplicando después las reglas 3 y 4, pueden obtenerse varios cuadrados mágicos más, de 64 casillas.

Por este mismo procedimiento pueden construirse cuadrados mágicos de 12 × 12, 16 × 16, etc., casillas.

Proponemos al lector que haga esto por sí mismo.

Por qué se llaman así los cuadrados mágicos

La primera mención acerca de un cuadrado mágico se encuentra en un antiguo libro oriental que data de los años 4000—5000 antes de nuestra era.

Los cuadrados mágicos eran más conocidos en la antigua India. La afición a los cuadrados mágicos pasó de la India a los pueblos árabes, los cuales atribuían a estas combinaciones numéricas propiedades misteriosas.

En Europa occidental los cuadrados mágicos eran en la edad media patrimonio de los representantes de las seudociencias, los alquimistas y los astrólogos. De las viejas ideas supersticiosas es de donde estos cuadrados numéricos recibieron su denominación de «mágicos» —es decir, pertenecientes a la magia—, tan extraña a las matemáticas. Los astrólogos y los alquimistas creían que una tablilla con la representación de un cuadrado mágico era capaz de salvar de la desgracia a la persona que la llevaba como talismán.

La composición de los cuadrados mágicos no es sólo una distracción. Su teoría fue elaborada por muchos matemáticos eminentes.

Esta teoría encuentra aplicación en ciertos problemas matemáticos importantes. Así, por ejemplo, existe un procedimiento de resolución de sistemas de ecuaciones con muchas incógnitas que utiliza las deducciones de la teoría de los cuadrados mágicos.

23

JUEGOS Y TRUCOS ARITMETICOS

El dominó

Una cadena de 28 fichas

¿Por qué las 28 fichas del dominó se pueden colocar, cumpliendo las reglas del juego, en una cadena continua?

El principio y el fin de la cadena

Cuando las 28 fichas del dominó se colocaron formando cadena, en uno de los extremos de ésta resultó haber 5 puntos.

¿Cuántos puntos había en el otro extremo?

Un truco con el dominó

Un camarada suyo coge una de las fichas del dominó y le propone a usted que, con las 27 restantes, forme una cadena continua, afirmando que esto siempre es posible, cualquiera que sea la ficha quitada. El se va a otra habitación para no ver la cadena que usted hace.

Usted empieza su tarea y se convence de que el camarada tenía razón: con las 27 fichas puede formar una cadena. Pero su sorpresa es aún mayor cuando su camarada, sin salir de la habitación contigua y sin ver la cadena que usted ha hecho, le dice desde allí el número de puntos que hay en sus extremos.

¿Cómo puede saberlo? Y, ¿por qué está seguro de que con 27 fichas cualesquiera del dominó se puede formar una cadena continua?

El cuadrado

La fig. 269 representa un cuadrado formado con las fichas del dominó, cumpliendo las reglas del juego. Los lados de este cuadrado tienen la misma longitud, pero las sumas de los puntos que hay en ellos son distintos: la fila superior y la columna de la izquierda contienen cada una 44 puntos, las otras dos, una 59 y la otra 32.

¿Podría usted hacer un cuadrado de este tipo en el cual todos los lados contengan igual número de puntos, es decir, 44?

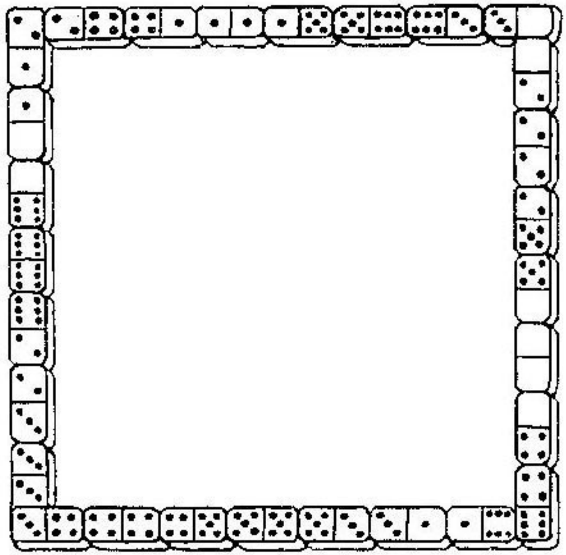


Figura 269

Figura 270

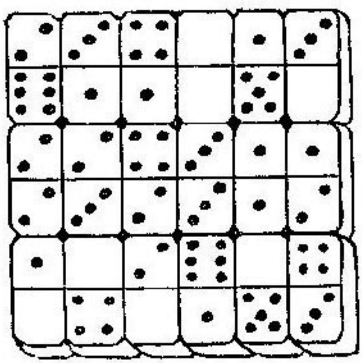


Figura 271

Los siete cuadrados

Cuatro fichas de dominó pueden elegirse de tal modo que con ellas pueda hacerse un cuadrado, en el que cada uno de los lados contenga la misma suma de puntos. Una muestra puede verse en la fig. 270: sumando los puntos que hay en cada lado del cuadrado, se obtiene 11 en todos los casos.

Disponiendo de un juego de dominó completo, ¿podría usted hacer, al mismo tiempo, *siete* cuadrados de este tipo? No se exige que la suma de los puntos de un lado sea la misma en todos los cuadrados. Lo único que hace falta es que cada cuadrado tenga en sus cuatro lados el mismo número de puntos.

Cuadrados mágicos hechos con el dominó

La fig. 271 muestra un cuadrado de 18 fichas de dominó que llama la atención, porque la suma de los puntos de cualquiera de sus filas, columnas o diagonales es la misma: 13. Los cuadrados de este tipo se llaman mágicos desde muy antiguo.

Le proponemos a usted que haga con fichas de dominó varios cuadrados mágicos de a 18 fichas, pero cuyas filas, columnas y diagonales dé otra suma de puntos. 13 es la suma mínima que pueden dar las filas de un cuadrado mágico formado con 18 fichas. La suma máxima es 23.

Una progresión de fichas de dominó

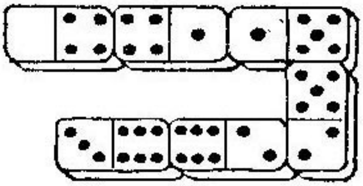


Figura 272

En la fig. 272 pueden verse seis fichas de dominó, colocadas según las reglas del juego, que se distinguen entre sí en que el número de puntos de las fichas (es decir, de las dos mitades de cada ficha) aumenta sucesivamente en una unidad: la serie comienza en el 4 y consta de los números de puntos siguientes: 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Una serie de números que aumentan (o disminuyen) sucesivamente en una misma cantidad, se llama «progresión aritmética». En nuestra serie cada número es mayor que el precedente en una unidad; pero en una progresión, la diferencia existente entre sus números puede ser cualquiera otra.

El problema consiste en componer varias progresiones más, con seis fichas cada una.

«El juego de las 15» o «taquin»

La popular cajita con 15 fichas cuadradas, numeradas, tiene una historia interesante, que pocos de los jugadores sospechan. La referiremos con las palabras del matemático alemán, investigador de este juego, W. Arens.

«Hace cerca de medio siglo —a finales de los años 70 del siglo pasado— apareció en los Estados Unidos el «juego de las 15»; se propagó rápidamente y, debido al incalculable número de jugadores asiduos que atrajo, se convirtió en una verdadera calamidad social.

Lo mismo ocurrió por este lado del océano, en Europa. Aquí podían verse las cajitas con las 15 fichas incluso en manos de los pasajeros de los tranvías de caballos. Los dueños de oficinas y tiendas, desesperados por la afición de sus empleados a este juego, se vieron obligados a prohibirlo durante las horas laborales. Los propietarios de establecimientos de diversión aprovechaban esta manía para organizar grandes concursos. Este juego penetró hasta en las salas solemnes del reichstag alemán. «Como si fuera ahora veo en el reichstag a señores honorables mirando atentamente las cajitas cuadradas que tenían en sus manos» —recuerda el conocido geógrafo y matemático S. Günther, que era diputado durante los años de la epidemia del juego.

En París este juego halló acogida al cielo raso, en los bulevares, y pronto se propagó de la capital a todas las provincias. «No había ni una sola casita de campo en donde no anidara esta araña, esperando una víctima propensa a caer en sus redes» —escribía un autor francés.

En el año 1880 llegó, por lo visto, la fiebre del juego a su punto culminante. Pero poco después de esto, el tirano era derribado y vencido por las armas de las matemáticas. La teoría matemática del juego descubrió que de los numerosísimos problemas que pueden proponerse, sólo tienen solución la mitad; la otra mitad es imposible de resolver, cualesquiera que sean los procedimientos que se sigan.

Quedó claro por qué algunos problemas no cedían ni a los mayores esfuerzos y por qué los organizadores de concursos se atrevían a ofrecer premios enormes a los que los resolvieran. En este sentido superó a todos el inventor del juego, que le propuso al editor de un periódico neoyorquino, para el suplemento dominical, un problema irresoluble con un premio de 1000 dólares por su solución; y como el editor se quedó dudando, el inventor dijo que estaba dispuesto a aportar la suma señalada de su propio bolsillo. El inventor fue Samuel (Sam) Lloyd, que, además, se hizo muy conocido como autor de problemas ingeniosos y de multitud de acertijos. Sin embargo, es interesante el hecho de que no pudo patentar en Norteamérica el juego que había inventado. Según las instrucciones, para obtener la patente debía presentar el «modelo práctico» para llevar a cabo la partida de prueba; Lloyd le propuso al empleado de la oficina de patentes resolver un problema, y cuando este último le preguntó si dicho problema tenía solución, el inventor tuvo que responder: «No, esto es imposible desde el punto de vista matemático». «En este caso —replicó el empleado— no puedo haber modelo práctico y, sin él, no hay patente». Lloyd se conformó con esta resolución, pero, si hubiera podido prever el éxito sin precedentes de su invento, es probable que hubiera sido más exigente» [1]).

A continuación vamos a citar la exposición que hace el propio inventor del juego acerca de algunos datos de su historia:

«Los antiguos habitantes del reino del ingenio —escribe Lloyd— recuerdan como a principios de los años 70 hice yo que todo el mundo se rompiera la

[1]) Este episodio fue utilizado por Mark Twain en su novela «El pretendiente americano».

cabeza con una cajita, que contenía fichas móviles y que recibió el nombre de «juego de las 15». El orden de las 15 fichas en la cajita cuadrada era correcto, pero las fichas 14 y 15 estaban trocadas como muestra la ilustración que se adjunta (fig. 274). El problema consistía en, moviendo sucesivamente las fichas, ponerlas en orden, corrigiendo la posición de las fichas 14 y 15.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figura 273
Colocación normal de las fichas (posición I)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Figura 274
Caso irresoluble (posición II)

El premio de 1000 dólares ofrecido por la primera solución correcta de este problema no lo consiguió nadie, a pesar de que se intentó sin descanso resolverlo. Se contaban graciosas historias de comerciantes que se olvidaban de abrir sus tiendas y de empleados honorables que se pasaban toda la noche debajo de un farol callejero, buscando la solución. Nadie quería renunciar a la búsqueda de la solución, porque todos estaban seguros de que les aguardaba el éxito. Se dice que los pilotos, distraídos con el juego, encallaban los barcos, los maquinistas se olvidaban de parar el tren en las estaciones, los granjeros abandonaban sus arados».

* * *

Ahora daremos a conocer a nuestro lector los rudimentos de la teoría de este juego. En su forma general esta teoría es muy complicada y está íntimamente relacionada con una de las partes del álgebra superior («teoría de los determinantes»). Nosotros nos limitaremos solamente a ciertos razonamientos expuestos por V. Arens.

El problema del juego consiste de ordinario en que, valiéndose de los movimientos sucesivos que permite hacer la existencia de un campo libre, hay que hacer que las 15 fichas, colocadas al principio de cualquier modo, queden ordenadas según sus números, es decir, en el ángulo superior izquierdo estará la ficha 1, a su derecha, la 2, después, la 3 y luego, en el ángulo superior derecho, la 4; en la fila siguiente se encontrarán, de izquierda a derecha, las 5, 6, 7 y 8 y así sucesivamente. Esta ordenación normal definitiva se da en la fig. 273.

Figúrese ahora que las 15 fichas se encuentran en el mayor desorden. Por medio de una serie de movimientos siempre se puede trasladar la ficha 1 al lugar que ocupa en la figura.

De igual modo, sin tocar la ficha 1, se puede hacer que la ficha 2 ocupe el puesto inmediato de la derecha. Después, sin tocar las fichas 1 y 2, se pueden colocar las 3 y 4 en sus puestos normales; si casualmente no se hallan en las dos últimas columnas, es fácil trasladarlas primeramente a esta zona y luego, haciendo una serie de traslaciones, lograr el resultado apetecido. Ahora la fila superior 1, 2, 3, 4 ya está puesta en orden y en las siguientes manipulaciones con las fichas no tocaremos esta fila. Por este mismo procedimiento procuraremos poner en orden la segunda fila: 5, 6, 7 y 8; es fácil convencerse de que esto siempre se puede conseguir. Después, en el espacio correspondiente a las dos últimas filas, hay que poner en la posición normal las fichas 9 y 13; esto también se logra siempre. Ninguna de las fichas 1, 2, 3, 4. 5, 6, 7, 8, 9, y 13, puestas ya en orden, vuelven a moverse; queda un pequeño espacio de seis campos, de los cuales uno está libre y los otros cinco ocupados por las fichas 10, 11, 12, 14 y 15 en orden arbitrario. Dentro de los límites de este espacio de seis puestos siempre pueden ponerse en sus lugares normales las fichas 10, 11 y 12. Cuando esto se ha conseguido, las fichas 14 y 15 resultan colocadas en la última fila en orden normal o en orden inverso (fig. 274). Por este procedimiento, que el lector puede comprobar en la práctica, llegamos al siguiente resultado.

Cualquiera que sea la colocación inicial de las fichas, éstas pueden ponerse en el orden representado en la fig. 273, posición *I*, o en el orden que indica la fig. 274, posición *II*.

Si una colocación determinada, que llamaremos *S* para simplificar, puede transformarse en la posición *I*, es evidente que también será posible la transformación inversa, es decir, la posición *I* en la posición *S*. Esto se explica porque todos los pasos de las fichas son reversibles: si, por ejemplo, en el esquema *I* podemos colocar la ficha 12 en el campo libre, este mismo paso podemos darlo al revés haciendo el movimiento contrario.

Tenemos, pues, dos series de colocaciones tales, que de las posiciones de una de ellas se puede pasar a la posición normal *I* y de las posiciones de la otra, a la posición *II*. Y viceversa, de la colocación normal puede obtenerse cualquiera de las posiciones de la primera serie, y de la colocación *II*, cualquier posición de la segunda serie. Finalmente, si se tienen dos posiciones cualesquiera pertenecientes a una misma serie, de la una se puede pasar a la otra y viceversa.

Y, continuando por este camino, ¿no podrían unificarse las posiciones *I* y *II*? Puede demostrarse de un modo riguroso (aunque no entraremos en pormenores) que de una de estas dos posiciones es imposible pasar a la otra, cualquiera que sea el número de pasos que se den. Por esta razón, el número enorme de posiciones posibles de las fichas se descompone en dos series independientes: 1ª, aquella de cuyas posiciones se puede pasar a la posición normal *I*, es decir, la de las posiciones resolubles; y 2ª, aquella de cuyas posiciones puede pasarse a la posición *II* y de las que, por consiguiente, en modo alguno puede pasarse a la posición normal, es decir, éstas son las posiciones por cuya resolución se ofrecían premios enormes.

¿Cómo puede saberse si una posición dada pertenece a la primera serie o a la segunda? Un ejemplo aclarará esto.

Consideremos la colocación representada en la fig. 275.

1	2	3	4
5	6	7	9
8	10	14	12
13	11	15	

Figura 275

La primera fila de fichas está en orden, lo mismo que la segunda, a excepción de la última ficha (9). Esta ficha ocupa el puesto que en la posición normal pertenece a la 8. La ficha 9 está por lo tanto, *antes* que la 8: este adelantamiento del orden normal se llama «desorden». Acerca de la ficha 9 decimos: aquí existe un desorden. Si continuamos observando las fichas, descubrimos otro adelantamiento en la ficha 14, que está colocada tres puestos antes (las fichas 12, 13 y 11) de su posición normal: aquí hay tres desórdenes (la ficha 14 está antes que la 12; la 14, delante de la 13; y la 14, antes que la 11). En total contamos ya $1 + 3 = 4$ desórdenes. Después, la ficha 12 está colocada antes que la 11 y lo mismo ocurre con la ficha 13, que está antes que la 11. Esto da dos desórdenes más. En total tenemos seis desórdenes. De un modo semejante se establece el número total de desórdenes que hay en cada colocación, después de dejar libre el último puesto en el ángulo inferior derecho. Si el número total de desórdenes es *par*, como en el caso que hemos examinado, de la colocación dada puede pasarse a la posición final normal, en otras palabras, la colocación pertenecerá a la serie de las que puedan resolverse. Pero si el número de desórdenes es *impar*, la colocación dada pertenecerá a la segunda serie, es decir, a la de las imposibles de resolver (el desorden nulo se considera par).

Gracias a la claridad que introdujeron en este juego las matemáticas, ahora es ya completamente incomprensible el apasionamiento febril y el interés que despertó en su tiempo. Las matemáticas crearon una teoría exhaustiva de este juego, una teoría que no deja ni un solo punto dudoso. El resultado del juego depende no de determinadas casualidades ni del ingenio, como en otros juegos, sino de factores puramente matemáticos, que los predeterminan con absoluta fidelidad.

Ocupémonos ahora de los problemas de este campo.

He aquí algunos problemas *resolubles* ideados por Loyd, el inventor del juego.

Primer problema

Partiendo de la colocación representada en la fig. 274, poner las fichas en el orden correcto, pero con el campo libre en el ángulo superior izquierdo (fig. 276).

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Figura 276

Segundo problema

Partiendo de la colocación que se ve en la fig. 274, déle a la caja un giro de un cuarto de vuelta a la derecha y mueva las fichas hasta que tomen la posicion que indica la fig. 277.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figura 277

Tercer problema

Moviendo las fichas según las reglas del juego, convierta la caja en un cuadrado mágico, a saber: coloque las fichas de tal modo, que la suma de sus números sea la misma en todas las direcciones e igual a 30.

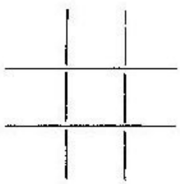
«El juego de las 11»

En este juego participan dos jugadores. Se colocan en la mesa 11 cerillas (o granos, chinas, etc.). El primer jugador coge una, dos o tres de ellas, las que quiera. Después, el segundo jugador coge también una, dos o tres cerillas, según desee. Luego vuelve a coger el primer jugador y así sucesivamente. No se pueden coger más de tres cerillas de una vez. El que coge la última cerilla, pierde.

¿Cómo deberá jugar usted para ganar siempre?

«El juego de las 15»

Ahora no se trata del «juego de las 15», que consiste en mover fichas cuadradas, numeradas, dentro de una cajita. El juego que proponemos es de otro tipo y se parece más al juego de los ceros y los unos. Juegan dos jugadores sucesivamente. El primer jugador escribe una cifra cualquiera, del 1 al 9, en uno de los cuadrados de la cuadrícula que se representa a continuación



El segundo jugador escribe otra cifra, eligiendo el cuadrado de tal forma, que el primer jugador, en el turno siguiente, no pueda terminar una fila de tres cifras (la fila puede ser transversal o diagonal) con una suma igual a 15.

Gana el jugador que termina en uno de sus turnos una fila con la suma 15 o que llena el último cuadrado de toda la cuadrícula.

¿Qué piensa usted, existe algún procedimiento de ganar siempre en este juego?

«El juego de las 32»

Juegan dos jugadores. Ponen en la mesa 32 cerillas. El que empieza coge una, dos, tres o cuatro cerillas. Después, el otro coge también las cerillas que quiere, pero no más de cuatro. Luego el primero vuelve a coger no más de cuatro cerillas y así sucesivamente. El que coge la última cerilla gana el juego.

Como ve, este juego es fácil. Pero es además interesante, porque el que empieza el juego puede ganar siempre, si calcula bien el número de cerillas que debe coger.

¿Podría usted decir cómo debe jugar para ganar?

Lo mismo, pero al contrario

El «juego de las 32» se puede modificar: el que coge la última cerilla no gana, sino que, por el contrario, pierde.

¿Cómo hay que jugar en este caso para ganar?

«El juego de las 27»

Este juego es parecido al anterior. También toman parte en él dos jugadores y, del mismo modo, cogen por turno no más de cuatro cerillas. Pero el final es distinto: se considera ganador el que, al terminar el juego, tiene un número par de cerillas.

Aquí también lleva ventaja el que empieza. Este, calculando bien sus jugadas, puede ganar siempre. ¿En qué consiste el secreto para no perder en el juego?

De otra forma

En el «juego de las 27» se puede poner también la condición inversa, es decir, que se considere vencedor aquel, que, una vez terminado el juego, resulte tener un número impar de cerillas. ¿Cuál será en este caso el procedimiento para no perder?

Viaje matemático

En este juego pueden participar varias personas. Para esto hay que hacer lo siguiente:

1) un tablero para el juego (de cartón);
2) un dado (de madera) y
3) varias fichas, una para cada jugador.

El tablero se recorta, en forma de cuadrado, de una hoja de cartón. Es preferible que sea de grandes dimensiones. El cuadrado debe dividirse en 10×10 casillas, las cuales se numeran del 1 a 100, como muestra el dibujo en pequeño de la fig. 278.

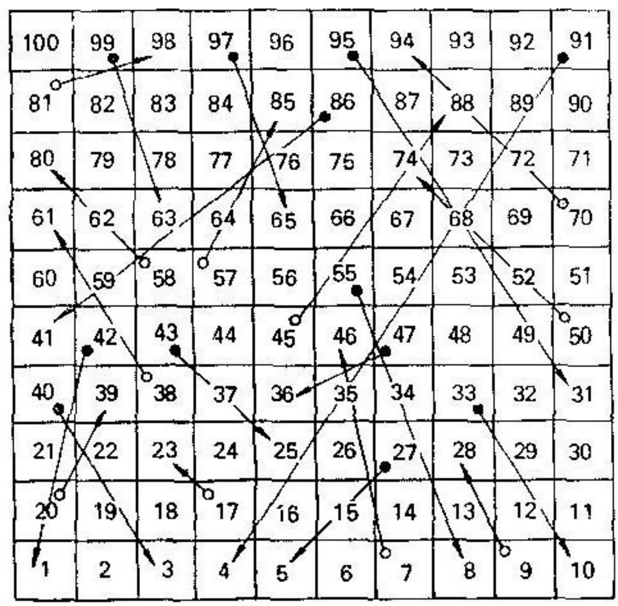


Figura 278

El dado, de 1 cm de altura aproximadamente, se corta de una varilla de madera de sección cuadrangular; sus caras se alisan con papel de lija y se marcan con las cifras del 1 al 6 (lo mejor es representar estas cifras por puntos, lo mismo que en las fichas del dominó).

De fichas pueden servir redondelitos o cuadraditos de cartón de distintos colores u otros objetos cualesquiera.

Los participantes, después de coger sus fichas respectivas, comienzan el juego echando el dado sucesivamente. El que saca 6 puntos empieza a moverse por las casillas del tablero, poniendo su ficha en la número 6. Cuando le llega su turno de echar otra vez el dado, adelanta su ficha en tantas casillas como puntos salen. Al llegar a una casilla en la cual comienza una flecha, la ficha deberá seguir dicha flecha hasta el fin, unas veces hacia adelante y otras hacia atrás.

El que llaga primero a la centésima casilla, gana la partida.

Piense un número

Haga atentamente todas las operaciones que aquí se dicen con el número que haya pensado y yo le diré el resultado de sus cálculos.

Si el resultado es otro, compruebe sus cálculos y se convencerá de que el error es suyo y no mío.

№ 1

Piense un número
menor que 10
(y que no sea cero)

Multiplíquelo por 3.
Al resultado, añádale 2.
Multiplique por 3 lo obtenido
Al producto súmele el número pensado.
Tache la primera cifra del total.
Al resto, añádale 2.
Divida por 4 lo obtenido.
Añádale 19 al resultado.

Ahora tendrá 21

№ 2

Piense un número
menor que 10
(y que no sea cero)

Multiplíquelo por 5.
Duplique el producto.
Al resultado, añádale 14.
De esta suma reste 8.
Tache la primera cifra del resto.
Divida por 3 lo que queda.
Añádale 10 al cociente.

Ahora tendrá 12

№ 3

Piense un número
menor que 10
(y que no sea cero)

Añádale 29.
Quite la última cifra de la suma.
Multiplique lo que queda por 10.
Súmele 4 al producto.
Multiplique lo obtenido por 3.
Réstele 2 al resultado.

Ahora tendrá 100

№ 4

Piense un número
menor que 10
(y que no sea cero)

Multiplíquelo por 5.
Duplique lo obtenido.

Reste del resultado el número que pensó.
Sume las cifras de la diferencia obtenida.
Al total, añádale 2.
Eleve al cuadrado la suma.
Réstele 10 al número obtenido
Divida la diferencia por 3.

Ahora
tendrá
37

№ 5

Piense un número
menor que 10
(*y que no sea cero*)

Multiplíquelo por 25.
Añádale 3.
Lo obtenido, multiplíquelo por 4.
Tache la primera cifra de este producto.
Eleve al cuadrado el número que queda.
Sume las cifras del resultado obtenido.
Añádale 7.

Ahora
tendrá
16

№ 6

Piense un número
de dos cifras

Súmele 7.
Reste de 110 esta suma.
Al resto, añádale 15.
Al total, súmele el número pensado.
Divida por dos el número obtenido.
Reste 9 del resultado.
Multiplique por 3 la diferencia.

Ahora
tendrá
150

№ 7

Piense un número
menor que 100

Súmele 12.
Reste de 130 esta suma.
Añádale 5 a la diferencia.
Al total, añádale el número pensado.
Reste 120 de la suma obtenida.
Multiplique por 7 la diferencia.
Réstele 1 al producto.
Divida por 2 el resto.
Súmele 30 al cociente.

Ahora
tendrà
40

№ 8

Piense un número cualquiera
(*que no sea cero*)

Duplíquelo.
Añádale 1 al número obtenido.
Multiplique por 5 el nuevo resultado.
Deseche todas las cifras, menos la última.
Multiplique por sí misma la cifra que queda.
Sume las cifras del resultado.

Ahora
tendrá
7

№ 9

Piense un número menor que 100

Súmele 20.
El número obtenido réstelo de 170.
Reste 6 de lo que quede.
Súmele a la diferencia el número pensado.
Sume las cifras del número obtenido.
Multiplique esta suma por sí misma.
Réstele 1 al total.
Divida por 2 la cantidad obtenida.
Súmele 8 al cociente.

Ahora tendrá 48

№ 10

Piense un número de tres cifras

Escriba a su derecha este mismo número.
Divida por 7 el número que resulte.
Divida el cociente por el número pensado.
Divida por 11 la cantidad obtenida.
Duplique el resultado.
Sume las cifras del número que obtiene.

Ahora tendrá 8

Vamos a adivinar

Juguemos ahora, amigo lector, a adivinar: usted pensará números, y yo los adivinaré. No importa que los lectores sean miles ni que estén leyendo este libro en cualquier lugar, a millares de kilómetros de mí, el número que tenga en su mente lo adivinaré de todos modos.

Empecemos.

Piense la cifra que quiera. Pero no confunda las palabras «cifra» y «número»: cifras sólo hay 10, del 0 al 9; los números son, en cambio, una cantidad infinita. Así, pues, piense cualquier *cifra*. ¿La ha pensado ya? Bien, multiplíquela por 5; pero no se equivoque, de lo contrario no resultará bien el juego.

¿Ha multiplicado ya por 5?... ¿Sí?, pues multiplique por 2 lo que haya obtenido. ¿Lo ha hecho?... Súmele 7 al producto.

Ahora táchele la primera cifra al número obtenido; deje solamente la última cifra.

¿Ya está?... Súmele 4 a lo que haya quedado. Réstele 3. Añádale 9.

¿Ha hecho todo lo que he dicho?... Pues, ahora le diré cuánto ha obtenido.

Ha obtenido 17.

¿No es así? Si quiere lo hacemos otra vez. ¡Venga!

¿Ha pensado la cifra?... Triplíquela. Lo que haya resultado vuélvalo a triplicar. Ahora, súmele al número obtenido la cifra que haya pensado.

¿Lo ha hecho?... Añádale 5 a lo obtenido. Tache en la suma resultante todas las cifras, menos la última. ¿Las ha tachado? ... Súmele 7 a lo que quede. Réstele 3 y añádale 6.

¿Quiere que le diga qué número tiene ahora en su imaginación?

El 15.

¿He acertado? Si no he acertado, la culpa es de usted. Por lo visto, se ha equivocado en alguna de las operaciones.

Si quiere que probemos por tercera vez, yo no tengo inconveniente.

¿Ha pensado la cifra? ... Duplíquela. Lo que haya obtenido, vuelva a duplicarlo. Duplique otra vez el nuevo resultado. Añada la cifra pensada. Vuelva a añadir la cifra pensada. Súmele 8. Tache todas las cifras, menos la última. Al número que queda réstele 3. Después, súmele 7.

Ahora tendrá usted 12.

Yo podría acertar cuántas veces fuera necesario, sin equivocarme nunca. ¿Cómo lo hago?

Debe pensar usted que todo lo que está aquí impreso lo escribí yo varios meses antes de que este libro viese la luz y, por lo tanto, mucho antes de que usted pensara sus números. Esto demuestra que el número que yo acierto no depende en nada del que usted piensa.

Pero, ¿cuál es el secreto?

Adivinar un número de tres cifras

Piense un número de tres cifras. Sin enseñármelo, duplique su primera cifra; de las demás cifras prescinda por ahora. A lo que haya resultado, súmele 5. Lo obtenido multiplíquelo por 5, añádale la segunda cifra del número que pensó y multiplique por 10 el resultado. Al número recién obtenido súmele la tercera cifra del número pensado y dígame lo que ha obtenido. Inmediatamente le diré qué número pensó usted.

Pondré un ejemplo. Supongamos que pensó usted el número 387.

Haga con él las operaciones siguientes:
Duplique la primera cifra: $3 \times 2 = 6$.
Súmele 5. $6 + 5 = 11$.
Multiplique por 5. $11 \times 5 = 55$.
Añada la segunda cifra: $55 + 8 = 63$.
Multiplique por 10. $63 \times 10 = 630$.
Sume la tercera cifra: $630 + 7 = 637$.
Usted me dice que ha obtenido el número 637, y yo le digo el número que usted pensó.
¿Cómo lo adivino?

Truco numérico

Piense un número.
Súmele 1.
Multiplique por 3.
Vuelva a sumarle 1.
Añada el número pensado.
Dígame el resultado que ha obtenido.
Cuando usted me diga el resultado final de todas estas operaciones, yo le restaré 4, dividiré el resto por 4 y obtendré el número que usted había pensado.
Por ejemplo, usted piensa el número 12.
Le añade 1, y obtiene 13.
Lo multiplica por 3, y resultan 39.
Le suma 1, y tendrá 40.
Le añade el número pensado: $40 + 12 = 52$.
Cuando usted me dice que ha obtenido el número 52, yo le resto 4, y la diferencia, 48, la divido por 4. Obtengo 12, que es el número que usted había pensado.
¿Por qué se acierta siempre de este modo?

¿Cómo adivinar la cifra tachada?

Pídale a un compañero que piense un número cualquiera de varias cifras y que haga lo siguiente:
que escriba el número pensado,
que cambie como quiera el orden de sus cifras,
que reste el número menor del mayor,
que tache una de las cifras del resto (que no sea cero),
y que le diga las demás cifras en un orden cualquiera.
En respuesta, usted le dice cuál es la cifra tachada.
Ejemplo. Su compañero piensa el número 3857.
Después hace lo siguiente:

3857,
8735,
$8735 - 3857 = 4878$.

Después de tachar la cifra 7, él le dice a usted las demás cifras en el orden, por ejemplo, siguiente: 8, 4, 8.

Por estas cifras puede usted hallar la tachada. ¿Qué debe hacer para esto?

¿Cómo adivinar el día y el mes de nacimiento?

Propóngale a un compañero que escriba en una hoja de papel el día del mes en que nació y que haga las operaciones siguientes:

que duplique el número escrito,
que multiplique por 10 lo obtenido,
que le sume 73 al producto,
que multiplique por 5 la suma,
y que, al total, le añada el número de orden del mes en que nació.

El le dice a usted el resultado final de todas las operaciones y usted le dice a él la fecha en que nació.

Ejemplo. Su compañero nació el 17 de agosto, es decir, el día 17 del mes 8. El hace lo siguiente:

$$\begin{aligned} 17 \times 2 &= 34, \\ 34 \times 10 &= 340, \\ 340 + 73 &= 413, \\ 413 \times 5 &= 2065, \\ 2065 + 8 &= 2073. \end{aligned}$$

Su compañero le dice a usted el número 2073 y usted le dice a él la fecha en que nació.

¿Cómo puede usted hacer esto?

¿Cómo se adivina la edad del interlocutor?

Usted puede adivinar la edad que tiene su interlocutor, si le pide que haga lo siguiente:

que escriba, una detrás de otra, dos cifras que se diferencien entre sí en más de 1;
que escriba entre ellas una tercera cifra cualquiera;
que invierta el orden de las cifras del número así obtenido;
que reste el número menor del mayor;
que ponga las cifras del resto en orden inverso;
que le sume este nuevo número al resto anterior;
que le añada a esta suma la edad que tiene.

Su interlocutor le dice a usted el resultado final de todas las operaciones, y usted le dice la edad que él tiene.

Ejemplo. Su interlocutor tiene 23 años. Hace lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&25,\\
&275,\\
&572,\\
572 - 275 &= 297,\\
297 + 792 &= 1089,\\
1089 + 23 &= 1112.
\end{aligned}
$$

Su interlocutor le dice a usted el número 1112, y usted, partiendo de esto, halla la edad que él tiene.

¿Cómo puede usted hacerlo?

¿Cómo adivinar el número de hermanos y hermanas?

Usted puede adivinar cuántos hermanos y hermanas tiene un camarada suyo, si le pide que haga lo siguiente:

que añada 3 al número de hermanos;
que multiplique por 5 el número obtenido;
que a este producto le sume 20;
que multiplique la suma por 2;
que al resultado le añada el número de hermanas
y que a esta suma le agregue 5.

Su camarada le dice a usted el resultado final de estas operaciones, y usted le dice cuántos hermanos y hermanas tiene él.

Ejemplo. Su compañero tiene cuatro hermanos y siete hermanas. El hace lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
4 + 3 &= 7,\\
7 \times 5 &= 35,\\
35 + 20 &= 55,\\
55 \times 2 &= 110,\\
110 + 7 &= 117,\\
117 + 5 &= 122.
\end{aligned}
$$

Su camarada le dice a usted que ha obtenido el número 122, y usted le dice cuántos hermanos y hermanas tiene él.

¿Cómo puede usted hacer esto?

Truco con la guía de teléfonos

Este truco no es menos sorprendente y se hace como sigue.

Propóngale a un compañero suyo que escriba cualquier número de tres cifras diferentes. Supongamos que escribe el número 648. Dígale que ponga las cifras del número elegido en orden inverso y que del número mayor reste el menor [1]). El escribirá lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 846 \\ -\,648 \\ \hline 198 \end{array}$$

Pídale ahora que ponga también en orden inverso las cifras de esta diferencia y que sume los dos números. Su compañero escribirá:

$$\begin{array}{r} 198 \\ +\,891 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Estas operaciones las hará sin que usted las vea, de manera que pensará que usted no sabe el resultado total.

Entonces, usted le da una guía de teléfonos, y le dice que la abra por la página cuyo número coincide con las tres primeras cifras del resultado final. Su camarada la abrirá por la página 108 y quedará en espera de lo que usted diga. Usted le pide que, en esta página, cuente de arriba abajo (o de abajo arriba) tantos apellidos de abonados como indica la última cifra del número total (es decir, del número 1089). El busca al abonado que hace nueve, y usted le dice cómo se llama este abonado y cuál es el número de su teléfono.

Su sabiduría, como es natural, asombrará a su compañero, ya que él eligió el primer número que se le ocurrió, y usted acertó sin titubear el apellido del abonado y el número de su teléfono.

¿En qué consiste el secreto de este truco?

¿Cómo adivinar una ficha de dominó?

Este es un truco aritmético basado en el cálculo.

Supongamos que un compañero suyo se guarda en el bolsillo una ficha cualquiera de dominó. Usted puede adivinar qué ficha es ésta, si él hace, sin equivocarse, unas operaciones fáciles. Figúrese, por ejemplo, que la ficha que ocultó es la 6—3.

Pídale a su compañero que duplique uno de estos números (por ejemplo, el 6):

$6 \times 2 = 12.$

[1]) Si el resto tiene sólo dos cifras (99), se escribe con un cero delante (099).

Al número duplicado, que le sume 7;
$12 + 7 = 19$.

Después, que multiplique por 5 el número obtenido:
$19 \times 5 = 95$.

A este producto, que le sume el otro número de la ficha de dominó (es decir, el 3):

$95 + 3 = 98$.

Su compañero le dice a usted este resultado final, y usted le resta mentalmente 35 y conoce la ficha que él guardó:
$98 - 35 = 63$, es decir, la ficha $6 - 3$.

¿Por qué resulta así y por qué hay que restar siempre 35?

Una memoria sorprendente

Algunos ilusionistas llaman la atención con su extraordinaria memoria: recuerdan largas series de palabras, números, etc. Cualquiera de ustedes puede también admirar a sus camaradas con un truco semejante. He aquí como hay que hacerlo.

Prepare 50 tarjetas de papel y escriba en ellas los números y las letras que se indican en la tabla siguiente.

A 24 020	B 36 030	C 48 040	D 510 050	E 612 060
A1 34 212	B1 46 223	C1 58 234	D1 610 245	E1 712 256
A2 44 404	B2 56 416	C2 68 428	D2 7 104 310	E2 3 124 412
A3 54 616	B3 66 609	C3 786 112	D3 8 106 215	E3 9 126 318
A4 64 828	B4 768 112	C4 888 016	D4 9 108 120	E4 10 128 224
A5 750 310	B5 870 215	C5 990 120	D5 10 110 025	E5 11 130 130

A6 852 412	B6 972 318	C6 1 092 224	D6 11 112 130	E6 12 132 036
A7 954 514	B7 1 074 421	C7 1 194 328	D7 12 114 235	E7 13 134 142
A8 1 056 616	B8 1 176 524	C8 1 296 432	D8 13 116 340	E8 14 136 248
A9 1 158 718	B9 1 278 627	C9 1 398 536	D9 14 118 445	E9 15 138 354

En cada tarjeta habrá escrito, de este modo, un número de bastantes cifras y, en el ángulo superior izquierdo, un símbolo constituido por una letra latina o una letra y una cifra. Estas tarjetas repártalas en sus compañeros y dígales que usted se acuerda perfectamente del número que hay escrito en cada una de las tarjetas. Que le digan a usted solamente el símbolo de la tarjeta, y usted dirá en el acto el número que hay escrito en ella. A usted le dicen, por ejemplo, «E4», y usted responde inmediatamente:

—El número 10 128 224.

Como los números son de muchas cifras y suman en total medio ciento, su arte debe, naturalmente, admirar a los presentes. No obstante, usted no se ha aprendido de memoria los 50 largos números. El problema se resuelve de un modo mucho más fácil. ¿Cuál es el secreto de este truco?

Una memoria extraordinaria

Después de escribir en una hoja de papel una larga fila de cifras —20—25 cifras— declara usted que puede repetirla, sin equivocarse, cifra a cifra. Y, en efecto, lo hace usted, a pesar de que en la sucesión de cifras no se nota ninguna regularidad.

¿Cómo puede usted hacer esto?

Unos dados mágicos

Haga varios cubos de papel (por ejemplo, cuatro) y marque sus caras con cifras situadas como muestra la fig. 279. Con estos cubos podrá usted hacerle a sus amigos un truco aritmético interesante.

Pídales a sus compañeros que, en ausencia de usted, pongan los cubos uno encima de otro, formando columna, en las posiciones que quieran. Después de esto, usted entra en la habitación, echa una ojeada a la columna de cubos y halla inmediatamente a qué es

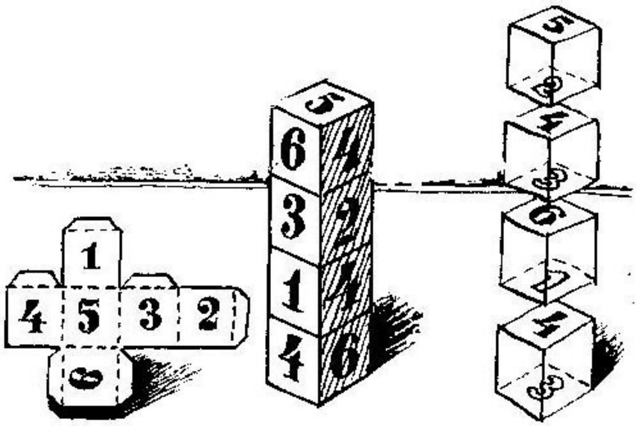


Figura 279

igual la suma de todas las cifras que hay en las caras tapadas de los cuatro cubos. Por ejemplo, en el caso que representa la figura, usted dice 23. Es fácil convencerse de que esto es cierto.

Un truco con tarjetas

Haga siete tarjetas como las que se ven en la fig. 280. Escriba en ellas los números y hágales los cortes rectangulares tal como están en las muestras indicadas. Una de las tarjetas se deja en blanco, pero en ella también se hacen cortes.

Al copiar los números en las tarjetas hay que prestar mucha atención para no equivocarse.

Cuando haya hecho esto, entréguele las seis tarjetas con números a un compañero suyo y pídale que piense en uno cualquiera de los números escrito en ellas. Después, dígale que le devuelva a usted todas aquellas tarjetas en que figure el número pensado.

Una vez recibidas las tarjetas, las coloca usted cuidadosamente unas escima de otras, las cubre con la tarjeta en blanco y suma mentalmente los números que se ven a través de las ventanillas. El número que resulta es el pensado.

Lo más probable es que ni usted mismo pueda descubrir el secreto del truco. Este se basa en un modo especial de elegir los números que figuran en las tarjetas. El fundamento de esta elección es bastante

39	63	54	38	45	61	49	33
53	□	57	46	43	41	□	62
34	40	□	55	42	51	59	35
60	32	44	59	□	58	□	58
36	48	50	56	52	47	42	37

45	63	27	10	58	9	61	42
29	8	11	57	30	59	□	62
13	24	□	60	40	47	14	56
46	□	12	44	□	25	□	27
43	15	41	31	26	62	12	28

33	49	27	17	21	55	61	39
3	□	31	51	63	43	□	13
15	7	1	19	15	23	59	41
57	□	29	9	□	35	□	51
53	5	47	25	45	33	11	37

54	23	18	58	63	31	26	51
29	□	61	50	20	27	□	62
56	28	□	17	59	48	21	60
31	□	19	55	□	30	16	53
63	49	24	57	22	52	27	25

5	47	28	53	61	13	20	52
37	□	44	30	46	55	4	7
22	63	□	12	62	14	60	31
23	□	29	54	□	15	□	6
46	36	39	21	45	28	63	38

11	38	62	51	43	26	55	15
10	□	63	35	31	19	□	46
14	3	□	59	27	7	58	18
26	□	6	47	2	39	□	22
54	23	50	30	35	42	11	34

	□					□	
		□					
	□			□		□	

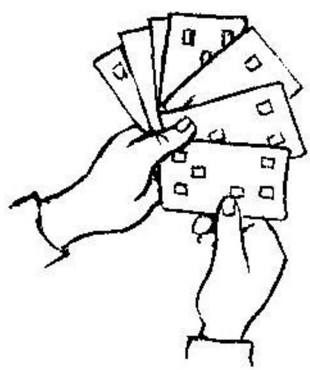


Figura 280

complicado y no voy a detenerme en él. En otro libro mío («Problemas recreativos»), dedicado a lectores con mejor preparación matemática, puede usted hallar una explicación detallada de este nuevo truco y de sus variantes más curiosas.

¿Cómo adivinar la suma de unos números que no se han escrito?

Usted se compromete a predecir la suma de tres números, de los cuales sólo se ha escrito uno. Este truco se hace así. Se le dice a un compañero que escriba un número con tantas cifras como quiera: éste será el primer sumando.

Supongamos que él escribe el número 84 706. En este caso, dejando sitio libre para los sumandos segundo y tercero, se escribe a priori la suma de los tres números:

1er sumando ←——→	84 706
2o »	
3er »	
Suma	184 705

Después de esto su camarada escribe el segundo sumando (que debe tener tantas cifras como el primero), y usted escribe el tercer sumando:

1er sumando ←——→	84 706
2o »	30 485
3er »	69 514
Suma	184 705

Es fácil convencerse de que la suma se predijo bien. ¿En qué consiste el secreto de este truco?

Predicción de la suma

Las supersticiones numéricas, lo mismo que los prejuicios de otros tipos, eran muy frecuentes en la Rusia de antes de la revolución. Como ejemplo de las consecuencias absurdas a que puede conducir la propensión a estas supersticiones, citaremos el caso de Iliá Teglev, héroe de la narración de Turguéniev «Pon ... pon ...», que basándose en una coincidencia casual de números, cree ser un Napoleón no reconocido. Este personaje se suicida, y en uno de sus bolsillos se descubre una hoja de papel con los cálculos siguientes:

Napoleón nació el 15 de agosto de 1769

	1769
	15
	8 (agosto es el 8º mes)
Total	1792

	1
	7
	9
	2
Total	19 (!)

Iliá Teglev nació el 7 de enero de 1811

	1811
	7
	1 (enero es el 1er mes)
Total	1819

	1
	8
	1
	9
Total	19 (!)

Napoleón murió el 5 de mayo 1825

	1825
	5
	5 (mayo es el 5º mes)
Total	1835

	1
	8
	3
	5
Total	17 (!)

Iliá Teglev murió el 21 de julio de 1834

	1834
	21
	7 (julio es el 7º mes)
Total	1862

	1
	8
	6
	2
Total	17 (!)

Adivinaciones numéricas semejantes se pusieron en boga a comienzos de la primera guerra mundial. Entonces, por medio de ellas se pretendía predecir cómo terminaría. En 1916 los periódicos suizos descubrieron a sus lectores el siguiente «misterio» acerca de la suerte de los emperadores de Alemania y Austria-Hungaría:

	Guillermo II	Francisco José
Año de nacimiento	1859	1830
Año de la coronación	1888	1848
Edad	57	86
Años en el trono	28	68
	Total 3832	Total 3832

Como puede ver, las sumas son iguales y cada una de ellas es el doble del año 1916. De esto se deduce que este año, fatal para ambos emperadores, predecía una derrota.

En este caso nos encontramos no con una coincidencia casual, sino, simplemente, con una majadería. La gente, cegada por la superstición, no se dio cuenta de que con sólo modificar ligeramente el orden de los renglones en los cálculos desaparecía por completo su carácter misterioso.

Ponga los renglones en este orden:

año de nacimiento,
edad,
año de la coronación,
años en el trono.

Y ahora piense: ¿qué año debe obtenerse si al de nacimiento de una persona se le añade su edad? Está claro que resultará el año en que se hace el cálculo. El mismo año debe obtenerse si al año de la coronación de un emperador se le suman los años que lleva en el trono. Por esto, es fácil comprender por qué la suma de estos cuatro números daba, para ambos emperadores, el mismo total, es decir, el doble del año 1916. Otra cosa no se podía esperar.

Lo que acabamos de decir puede utilizarse para hacer un interesante truco numérico. Dígale a un compañero suyo, que no conozca este sencillo secreto, que escriba en un papel, sin que usted lo vea, los cuatro números siguientes:

el año en que nació,
el año en que empezó a trabajar en la fábrica, (o que ingresó en la escuela, etc),
su edad, y
el número de años que lleva trabajando en la fábrica (o estudiando en la escuela, etc).

Aunque usted no conozca ninguno de los cuatro números escritos, no le costará trabajo adivinar su suma: lo único que tendrá que hacer es duplicar el año en que se hace el truco.

Si repite el truco, su secreto puede ser fácilmente descubierto. Para dificultar esto, introduzca entre los cuatro sumandos varios más, que usted conozca; si opera con discreción, la suma resultará distinta cada vez y descubrir el secreto será más difícil.

23

SOLUCIONES

El dominó

Una cadena de 28 fichas

Para simplificar los problemas prescindamos por ahora de las siete fichas dobles, es decir, de las 0—0, 1—1, 2—2, etc. Quedan 21 fichas, en las cuales cada número de puntos se repite seis veces. Por ejemplo, 4 puntos (en un campo) figuran en las seis fichas siguientes:

4—0; 4—1; 4—2; 4—3; 4—5; 4—6.

Como puede verse, cada número de puntos se repite un número *par* de veces. Está claro que las fichas de este juego se pueden poner una al lado de otra, de modo que estén juntos los campos de igual número de puntos, hasta que se acaben todas las fichas. Y cuando ya se ha hecho esto, es decir, cuando nuestras 21 ficha están dispuestas formando una cadena continua, entre las juntas 0—0, 1—1, 2—2, etc., colocamos las siete fichas dobles que habíamos apartado. Después de esto las 28 fichas del dominó resultan puestas en cadena, cumpliendo las reglas del juego.

El principio y el fin de la cadena

Es fácil demostrar que la cadena formada con las 28 fichas del dominó debe terminar con el mismo número de puntos que comienza. En efecto, si no ocurriera así, los números de puntos que resultaran estar en los extremos de la cadena se repetirían un número *impar* de veces (puesto que dentro de la cadena los puntos forman parejas). Pero, como sabemos, en el juego completo de fichas de dominó cada número de puntos se repite ocho veces, es decir, un número de veces par. Por consiguiente, la suposición que hemos hecho, de que los números de puntos que hay en los extremos sean distintos, es incorrecta: estos números de puntos deben ser iguales. (Los razonamientos de este tipo reciben en matemáticas el nombre de «demostraciones por reducción al absurdo»).

De la propiedad que acabamos de demostrar de la cadena de fichas se deduce la consecuencia siguiente: una cadena de 28 fichas siempre puede cerrarse y obtener un anillo. Es decir, el juego completo de fichas de dominó puede colocarse, cumpliendo las reglas del juego, no sólo formando una cadena con los extremos libres, sino también formando un anillo cerrado.

Los lectores pueden preguntarse: ¿por cuántos procedimientos diferentes puede hacerse esta cadena o anillo? Sin entrar en los pesados pormenores del cálculo, diremos que el número de procedimientos distintos de formar la cadena (o el anillo) con las 28 fichas es enorme: superior a 7 billones. El número exacto es:

7 959 229 931 520

(éste es el resultado de multiplicar los factores siguientes: $2^{13} \times 3^8 \times 5 \times 7 \times 4231$).

Un truco con el dominó

La solución de este acertijo se desprende de lo dicho anteriormente. Como ya sabemos, las 28 fichas del dominó siempre pueden colocarse de manera que formen un anillo cerrado; por lo tanto, si de este anillo se quita una ficha tendremos que:

1) las 27 fichas restantes formarán una cadena continua, cuyos extremos no se cierran;

2) los números de puntos de los extremos de esta cadena son precisamente los que hay en la ficha que se quitó.

Por esto, si escondemos una ficha del dominó, podemos predecir los números de puntos que habrá en los extremos de la cadena que se forme con las demás fichas.

El cuadrado

La suma de los puntos de todos los lados del cuadrado que se busca debe ser igual a $44 \times 4 = 176$, es decir, 8 más que la suma total de los puntos que tiene el juego completo de fichas de dominó (168). Ocurre esto, claro está, porque los números de puntos que

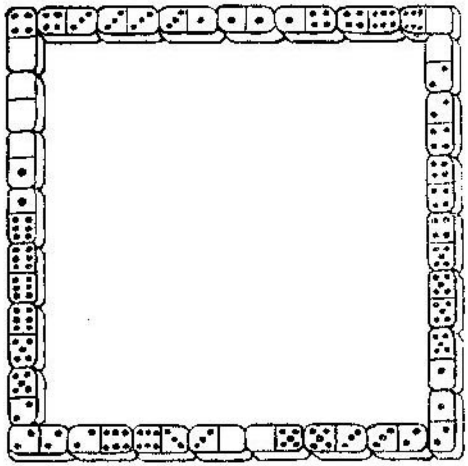


Figura 281

ocupan los vértices del cuadrado se suman dos veces. Esto determina cuál debe ser la suma de los puntos que haya en los vértices del cuadrado: 8. Así se simplifica un poco la búsqueda del orden en que hay que colocar las fichas, aunque el encontrarlo, a pesar de todo, es bastante difícil. La solución se da en la fig. 281.

Los siete cudrados

Damos dos de las muchas soluciones posibles de este problema. En la primera solución (fig. 282, arriba) tenemos:

1 cuadrado con la suma 3,	2 cuadrados con la suma 9,
1 » » » » 6,	1 cuadrado » » » 10,
1 » » » » 8,	1 » » » » 16.

En la segunda solución (fig. 282, abajo):

2 cuadrados con la suma 4,	2 cuadrados con la suma 10.
1 cuadrado » » » 8,	2 » » » » 12.

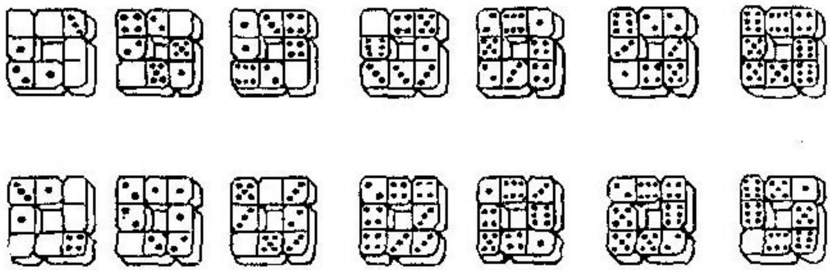


Figura 282

Cuadrados mágicos hechos con el dominó

En la fig. 283 se da una muestra de cuadrado mágico en la cual la suma de los puntos en cada fila, columna o diagonal es 18.

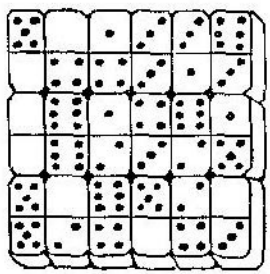


Figura 283

Una progresión de fichas de dominó

Como ejemplo citamos dos progresiones en las cuales la diferencia es 2:

a) 0—0; 0—2; 0—4; 0—6; 4—4 (ó 3—5); 5—5 (ó 4—6).

b) 0—1; 0—3 (ó 1—2); 0—5 (ó 2—3); 1—6 (ó 3—4); 3—6 (ó 4—5); 5—6.

Progresiones de seis fichas se pueden hacer en total 23. Sus fichas iniciales son las siguientes:

a) para las progresiones con diferencia 1:

0—0,	1—1,	2—1,	2—2,	3—2,
0—1,	2—0,	3—0,	3—1,	2—4,
1—0,	0—3,	0—4,	1—4,	3—5,
0—2,	1—2,	1—3,	2—3,	3—4.

b) para las progresiones con diferencia 2:

0—0, 0—2, 0—1.

«El juego de las 15» o «taquin»

Primer problema

La colocación dada por el problema puede obtenerse, partiendo de la posición inicial, por medio de los 44 pasos siguientes:

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
10, 6, 2, 1.

Segundo problema

La colocación dada por el problema se obtiene dando los siguientes 39 pasos:

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,
9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

Tercer problema

El cuadrado mágico con suma 30 se obtiene después de dar la serie de pasos siguientes:

12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,
4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

«El juego de las 11»

Si usted es mano, debe coger dos cerillas; quedan nueve. Cualquiera que sea el número de cerillas que coja el segundo jugador, usted deberá dejar en la mesa, después de su segunda jugada, sólo cinco cerillas; se comprende fácilmente que esto siempre es posible. Y cuando su adversario haya cogido las cerillas que quiera de esas cinco, usted le deja una y gana. Si a usted no le toca hacer la primera jugada, sólo podrá ganar si su adversario desconoce el secreto de cómo hay que jugar para ganar siempre.

«El juego de las 15»

Si se quiere ganar con seguridad hay que empezar con la cifra 5. ¿En qué casilla hay que escribirla? Veamos, uno a continuación de otro, los tres casos posibles.

1. El cinco se escribe en la casilla de en medio. Cualquiera que sea la casilla que elija su compañero de juego, usted podrá escribir en la casilla que quede libre en la misma fila.

		x
	5	
$10-x$		

$15 - 5 - x$ (donde x es la cifra escrita por su adversario). El número $15 - 5 - x$, o sea, $10 - x$, es, claro está, menor que 9.

2. El cinco se escribe en una de las casillas de los ángulos. Su compañero elige la casilla x o la casilla y. Si él escribe la cifra x, usted deberá escribir $y = 10 - x$; si escribe y, usted responderá con la cifra $x = 10 - y$. En ambos casos ganará usted.

5		
		x
	y	

3. El cinco se escribe en la casilla de en medio de la columna extrema. Su compañero podrá ocupar una de las cuatro casillas x, y, z, t.

	x	z
5		
	y	t

A la cifra x responderá usted con $y = 10 - z$; a la y, con $x = 10 - y$; a la z, con $t = 10 - z$, y a la t, con $z = 15 - t$. En todos los casos ganará.

«El juego de las 32»

El simple secreto que hay que saber para no perder nunca en este juego, se descubre con bastante facilidad si se intenta jugar una partida al revés, es decir, empezando por el final. No es difícil darse cuenta de que si en su penúltima jugada le deja a su adversario cinco cerillas en la mesa, ganará usted con toda seguridad, porque él no puede coger más de cuatro cerillas y, por consiguiente, usted puede coger después todas las demás. Pero, ¿qué hay que hacer para estar seguro de que en la penúltima jugada podrán dejarse cinco cerillas? Para esto en la jugada precedente hay que dejarle al adversario 10 cerillas exactamente: entonces, por muchas que él coja siempre quedarán seis por lo menos, y usted después siempre podrá dejarle cinco. Y, ¿qué hay que hacer para lograr que al compañero le queden 10 cerillas para coger? En la jugada anterior hay que dejar en la mesa 15 cerillas.

Así, restando cada vez cinco cerillas, nos enteramos de que antes hay que dejar en la mesa 20, y con anterioridad, 25, y, finalmente, la primera vez, 30 cerillas, es decir, al comenzar el juego hay que coger dos cerillas.

Por lo tanto, el secreto para ganar siempre es: la primera vez hay que coger dos cerillas; luego, después que su compañero haya cogido varias, se cogen las cerillas necesarias para que en la mesa queden 25; la vez siguiente se dejan en la mesa 20 cerillas, luego 10, y finalmente cinco. La última cerilla será siempre para usted.

Lo mismo, pero al contrario

Si la condición del juego es la inversa, o sea, que el que coja la última cerilla *pierde*, en la penúltima jugada deberá dejar en la mesa seis cerillas. Entonces, cualquiera que sea la cantidad que coja su compañero, no podrá dejarle a usted menos de dos ni más de cinco, es decir, en cualquier caso, podrá usted dejarle a él en la jugada siguiente la última cerilla. Para esto, en la jugada precedente hay que dejar en la mesa 11 cerillas, y en las jugadas anteriores a ésta, 16, 21, 26, y 31 cerillas respectivamente.

Así, pues, usted empieza cogiendo una sola cerilla, y en las siguientes jugadas le va dejando a su adversario 26, 21, 16, 11 y 6 cerillas; la última cerilla le tocará a él inevitablemente.

«El juego de las 27»

Aquí es más difícil hallar el procedimiento de ganar siempre que en el «juego de las 32».

Hay que partir de los dos razonamientos siguientes:

1. Si al final de la partida tiene usted un número *impar* de cerillas, deberá dejarle a su adversario cinco cerillas, con lo que estará seguro de ganar el juego. En efecto, en la siguiente jugada su compañero le dejará a usted cuatro, tres, dos o una cerilla; si le deja cuatro, usted coge tres y gana; si le deja tres, cogerá las tres y ganará; y si le deja dos, cogerá una y también ganará.

2. Si cuando la partida está próxima a terminar usted tiene un número *par* de cerillas, deberá dejarle a su adversario seis o siete. Efectivamente, veamos como transcurre después la partida. Si su adversario le deja seis cerillas, en la jugada siguiente coge usted una y, teniendo ya un número de cerillas impar, puede dejarle tranquilamente cinco cerillas a su compañero, con las cuales él perderá la partida inevitablemente. Si él le deja a usted no seis cerillas, sino cinco, usted coge cuatro y gana. Si le deja cuatro, usted coge todas y gana. Si le deja tres, usted coge dos y gana. Y, finalmente, si le deja dos, también gana usted. Menos de dos no le puede dejar.

Ahora ya no es difícil hallar el procedimiento para ganar siempre. Este procedimiento consiste en que, si usted tiene un número impar de cerillas, debe dejarle sobre la mesa a su adversario un número de ellas que sea igual a un múltiplo de 6 menos una unidad, a saber, 5, 11, 17 ó 23; y si tiene usted un número par de cerillas, deberá dejarle a su adversario un número de cerillas que sea múltiplo de 6 ó mayor que él en una unidad, es decir, 6 ó 7, 12 ó 13, 18 ó 19, 24 ó 25. El cero puede considerarse como número par; por esto, al empezar la partida deberá usted coger dos o tres de las 27 cerillas, y después proceder de acuerdo con lo antedicho.

Llevando la partida de este modo, ganará usted con toda seguridad. Pero procure que su adversario no coja el hilo del juego.

De otra forma

Si la condición del juego es la inversa y se considera ganador el que tenga un número *impar* de cerillas, deberá usted proceder del modo siguiente: si tiene usted un número *par* de cerillas, déjele a su adversario un número de ellas que sea menor que un múltiplo de 6 en una unidad; y si tiene un número impar, déjele a él un número de cerillas que sea múltiplo de 6 ó mayor que él en una unidad. Esto debe conducir inevitablemente a que gane usted. Al empezar el juego tiene usted cero cerillas (es decir, un número que se considera par); por lo tanto, en la primera jugada coja cuatro cerillas y déjele a su adversario 23.

Piense un número

Caso N° 1. Si el número pensado es a, las operaciones que se hacen al principio son:

$$(3a + 2) \times 3 + a = 10a + 6.$$

Se obtiene un resultado de dos cifras, la primera de las cuales es el número pensado, y la segunda es 6.

Tachando la primera cifra se excluye el número pensado.

Lo demás se comprende sin dificultad.

Los casos de adivinación N° 2, N° 3, N° 5 y N° 8 son diversas variantes del caso que acabamos de analizar.

En los casos N° 4, N° 6, N° 7 y N° 9 se utiliza otro procedimiento para eliminar el número pensado.

Por ejemplo, en el N° 9 las operaciones que se hacen al principio son:

$$170 - (a + 20) - 6 + a = 114.$$

Lo demás no es difícil de comprender.

Para adivinar el N° 10 se emplea un procedimiento especial. Escribir a la derecha de un número de tres cifras el mismo número, equivale a multiplicar dicho número por 1001 (por ejemplo, $356 \times 1001 = 356\,356$). Pero $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Por esto, si el número pensado es a, las operaciones que se hacen al principio son:

$$\frac{a \times 1001}{7 \times a \times 11} = 13.$$

El resto es comprensible.

Como puede ver, la adivinación se basa en todos los casos en excluir el número pensado al hacer las operaciones. Sabiendo esto, procure usted mismo idear varios ejemplos nuevos de adivinanza.

Vamos a adivinar

Para comprender en qué consiste la adivinación en estos casos, fíjese en las operaciones que yo le digo que haga con las cifras pensadas.

En el primer ejemplo usted empezó multiplicando por 5 la cifra; después multiplicó por 2 lo obtenido. Es decir, multiplicó usted la cifra por 2×5, o sea, por 10, y todo número multiplicado por 10 da un resultado que termina en cero. Sabiendo esto, yo le pido que le añada 7; ahora ya sé que el número que tiene en su mente es de dos cifras: la primera la desconozco, pero la segunda sé que es 7. La cifra que desconozco le pido que la tache. ¿Qué número tiene ahora en su pensamiento? El 7, claro está. Yo podría decirle ya este número, pero como soy astuto, para que pierda usted la pista le pido que sume y reste a este siete diversos números, cosa que yo también hago mentalmente. Y por fin, le digo que ha obtenido usted 17. Este número tiene que resultarle a usted cualquiera que sea la cifra que piense.

La segunda vez sigo ya otro camino al hacer la adivinación, de lo contrario descubriría usted demasiado pronto en qué consiste el secreto. Yo hago que empiece usted por triplicar la cifra pensada, luego le pido que vuelva a triplicar el resultado y que al número obtenido le añada la cifra que pensó. ¿Qué debe resultarle a usted en fin de cuentas? Es fácil de comprender, porque todo lo hecho equivale a multiplicar la cifra pensada por $3 \times 3 + 1$, es decir, por 10. Y otra vez sé que resulta un número de dos cifras, cuya segunda cifra es cero. Y después hago lo mismo que antes: digo que le sume a este número cualquier cifra y que tache a continuación la primera, que para mí es desconocida; queda la cifra que conozco, con la cual se hacen varias operaciones para borrar las huellas.

Tercer caso. Aquí también se hace lo mismo, pero de otra forma. Yo le digo que duplique la cifra pensada, que lo obtenido vuelva a duplicarlo, que duplique también este segundo resultado y que a lo que salga le sume dos veces la cifra que pensó. ¿Qué da todo esto? Da la cifra pensada multiplicada por $2 \times 2 \times 2 + 1 + 1$, es decir, por 10. Lo demás se comprende fácilmente. Incluso si el número que usted pensó es 1 ó 0, el truco no falla.

Ahora ya puede hacer usted, tan bien como yo, estos experimentos con aquellos amigos suyos que no hayan leído este libro. También podrá usted idear sus propios procedimientos para adivinar. Esto no es difícil.

Adivinar un número de tres cifras

Fijémonos otra vez en las operaciones que se hicieron con cada cifra. La primera cifra se multiplicó primero por 2, luego por 5 y después por 10, es decir, en total por $2 \times 5 \times \times 10 = 100$. La segunda cifra se multiplicó por 10. La tercera se añadió sin variación alguna. Además, a todo esto se le sumó $5 \times 5 \times 10$, o sea, 250.

Por lo tanto, si al número obtenido se le resta 250, quedará: la primera cifra multiplicada por 100, más la segunda multiplicada por diez, más la tercera. En resumen, queda precisamente el número pensado.

De esto se deduce claramente lo que hay que hacer para adivinar el número pensado: al resultado de todas las operaciones hay que restarle 250. Lo que queda es el número de que se trata.

Truco numérico

Fijándose atentamente en las operaciones hechas, es fácil advertir que el adivinador debe obtener el número pensado miltiplicado por 4, más 4. Por lo tanto, si se restan estos 4 y se divide lo demás por 4, se obtiene el número pensado.

¿Cómo adivinar la cifra tachada?

El que sabe cómo se deduce la condición de divisibilidad por 9, conoce que la suma de las cifras de cualquier número da, cuando se divide por 9, el mismo resto que el propio número. Dos números formados con las mismas cifras, pero colocadas en otro orden, deben, por esta razón, dar los mismos restos si se dividen por 9. Por consiguiente, si de uno de estos números se resta el otro, la diferencia será divisible por 9 (porque la diferencia de los restos iguales es nula).

Sobre la base de lo expuesto puede usted saber que su compañero obtuvo, como resultado de la resta, un número cuyas cifras dan una suma múltiplo de 9. Como las cifras que él le dijo a usted son 8, 4, 8 y dan la suma 20, la cifra tachada tiene que ser, evidentemente, 7, que sumada a 20 da un número divisible por 9.

¿Cómo adivinar el día y el mes de nacimiento?

Para saber la fecha que se busca hay que restarle 365 al resultado final; en este caso, las dos últimas cifras de la diferencia indicarán el número de orden del mes, y las que están delante de ellas, el del día. En nuestro ejemplo

$$2073 - 365 = 1708.$$

Por el número 17—08 deducimos la fecha: 17/VIII. La razón de por qué esto es así se comprende si el número de orden del mes se designa por K, y el del día, por N, y se hacen con ellos las operaciones que se requieren.

Obtenemos $(2K \times 10 + 73) \times 5 + N = 100K + N + 365$.

Está claro que al restar 365 debemos obtener un número que contenga K centenas y N unidades.

¿Cómo se adivina la edad del interlocutor?

Haciendo varias veces las operaciones, se nota fácilmente que a la edad hay que añadirle siempre un mismo número, a saber, 1089. Por esto, si del número total que le dicen a usted se resta 1089, debe obtenerse la edad buscada.

Si el truco se hace varias veces, para evitar que el secreto sea descubierto se puede variar la última operación proponiendo, por ejemplo, dividir por 9 el número 1089 y sumar la edad al cociente.

¿Cómo adivinar el número de hermanos y hermanas?

Para saber el número de hermanos y hermanas hay que restar 75 del resultado final. En nuestro ejemplo

$$122 - 75 = 47.$$

La primera cifra de la diferencia es el número de hermanos, la segunda, el de hermanas.

En efecto, si el número de hermanos es a y el de hermanas es b, las operaciones conducen a la expresión

$$[(a + 3) \times (5 + 20)] \times 2 + b + 5 = 10a + b + 75,$$

y en el resto deberá obtenerse un número de dos cifras a y b unidades.

Este truco puede hacerse si se tiene la seguridad de que el número de hermanas no es mayor que nueve.

Truco con la guía de teléfonos

El secreto de este truco consiste sencillamente en que usted sabía de antemano el resultado final de las operaciones hechas por su compañero: cualquiera que sea el número de tres cifras con que se hagan las operaciones enumeradas, el resultado que se obtenga será siempre el mismo: 1089. De esto es fácil convencerse haciendo la prueba. Mirar previamente la guía de teléfonos y aprenderse el nombre y el apellido del abonado que figura en el renglón noveno (por abajo o por arriba) de la página 108, ya no es cosa difícil.

¿Cómo adivinar una ficha de dominó?

Veamos lo que se hizo con el primer número. Primero lo multiplicamos por 2, después por 5, y en total por 10. Además, le sumamos el número 7, que después multiplicamos por 2; es decir, le añadimos $7 \times 5 = 35$.

Por lo tanto, si al resultado le restamos 35, quedarán tantas decenas como puntos hay en una de las mitades de la ficha. La suma de los puntos de la otra mitad da la segunda cifra del resultado.

Ahora está claro por qué las cifras del resultado dan de una sola vez los dos números de puntos.

Una memoria sorprendente

El secreto de este truco consiste en que el símbolo de la tarjeta —la letra y la cifra— le indica a usted el número que hay escrito en ella.

Ante todo debe recordar usted que la letra A significa 20; la B, 30; la C, 40; la D, 50 y la E, 60. Por esto, la letra junto con la cifra que lleva al lado significa cierto número. Por ejemplo, A1 significa 21; C3, 43; E5, 65.

Conociendo este número y siguiendo la regla que veremos a continuación, puede usted formar el número de muchas cifras que figura en la tarjeta. Pondremos un ejemplo para demostrar como se hace esto.

Supongamos que el símbolo nombrado es E4, es decir, 64. Con este número hace usted lo siguiente:

Primero, suma sus cifras:

$$6 + 4 = 10.$$

Segundo, lo duplica:

$$64 \times 2 = 128.$$

Tercero, de la cifra mayor resta la menor:

$$6 - 4 = 2.$$

Cuarto, multiplica entre sí las dos cifras:

$$6 \times 4 = 24.$$

Y los resultados obtenidos los escribe unos a continuación de otros:

$$10\ 128\ 224.$$

Esto es el número que hay escrito en la tarjeta.

Las operaciones que hay que hacer se pueden representar así

$$\boxed{+,\ 2,\ -,\ \times}$$

es decir, suma, duplicación, resta y multiplicación.

Otros ejemplos.

El símbolo de la tarjeta es D3.

¿Qué número hay escrito en ella?

$$\begin{aligned} &D3 = 53,\\ &5 + 3 = 8,\\ &53 \times 2 = 106,\\ &5 - 3 = 2,\\ &5 \times 3 = 15, \end{aligned}$$

El número es el 8 106 215.

El símbolo de la tarjeta es B8.

¿Qué número hay escrito en ella?

$$\begin{aligned} &B8 = 38, \\ &3 + 8 = 11, \\ &38 \times 2 = 76, \\ &8 - 3 = 5, \\ &8 \times 3 = 24. \end{aligned}$$

El número es 1 476 524.

Para no cansar la memoria, puede usted ir diciendo las cifras a medida que las obtiene o irlas escribiendo despacio en el encerado.

Como descubrir el ardid que usted utiliza no es fácil, este truco suele desconcertar bastante al público.

Una memoria extraordinaria

El secreto es simple hasta más no poder: usted escribe sucesivamente los números de los teléfonos de varios amigos suyos.

Unos dados mágicos

Todo consiste en el orden en que están dispuestos los números en las caras de cada dado. Los números están colocados de manera que la suma de los que hay en las caras opuestas de cada dado es igual siempre a siete (compruébelo en la fig. 279). Por esto la suma de los números que hay en las caras superiores e inferiores de los cuatro dados que forman la columna es igual a $7 \times 4 = 28$. Restándole a 28 el número que hay escrito en la cara superior del dado que hay en lo alto, se puede hallar sin temor a equivocación la suma de los números que hay en las siete caras que no se ven de los dados de la columna.

¿Cómo adivinar la suma de unos números que no se han escrito?

Si a un número de cinco cifras se le suman 99 999, es decir, $100\,000 - 1$, delante del número aparece un uno y la última cifra disminuye en una unidad. En esto se funda el truco. Sumándole mentalmente 99 999 al primer sumando

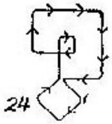
$$+\begin{array}{r} 84\,706 \\ 99\,999 \end{array}$$

escribe usted la suma futura de los tres sumandos: 184 705. Lo único que tiene que hacer ahora es procurar que el segundo y el tercer sumandos juntos sumen 99 999. Para esto, al escribir el tercer sumando, restará usted mentalmente de nueve cada una de las cifras del segundo sumando. En nuestro ejemplo el segundo sumando es 30 485; por lo que usted escribirá 69 514. Y como

$$+\begin{array}{r} 30\,485 \\ 69\,514 \\ \hline 99\,999, \end{array}$$

el resultado escrito a priori tiene que ser exacto inevitablemente.

378-379



DE UN TRAZO

(dibujo de figuras sin levantar el lápiz)

El problema de los puentes de Königsberg

La atención del genial matemático Euler la atrajo en una ocasión un problema sui generis que él enunció de esta forma:

«En Königsberg[1]) hay una isla que se llama Kneiphof. El río que la baña se divide en dos brazos (fig. 284), sobre los cuales hay tendidos siete puentes.

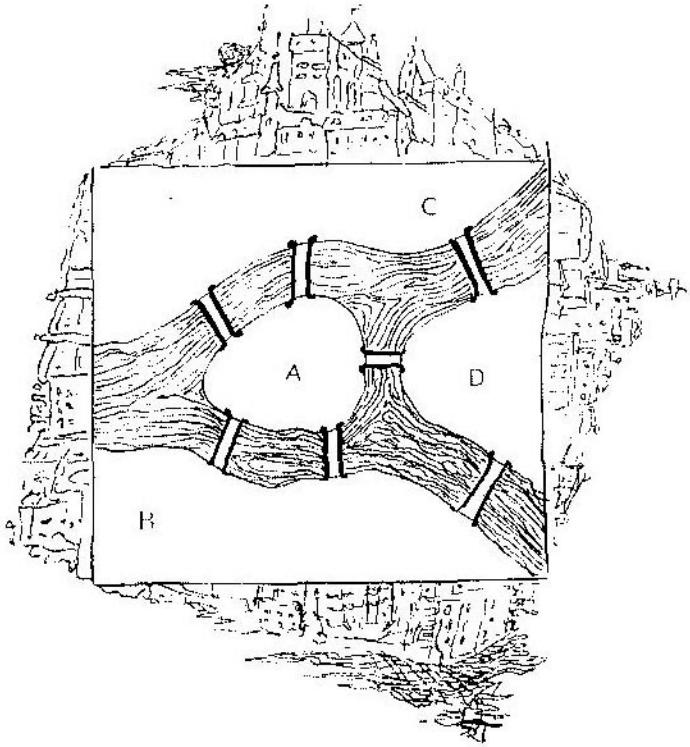


Figura 284

¿Pueden cruzarse todos estos puentes sin pasar por ninguno más de una vez?

Hay quien afirma que es posible. Otros, por el contrario, consideran que es imposible cumplir esta condición».

¿Qué opina usted?

---

[1]) Ahora Kaliningrado.

¿Qué es la topología?

Al problema de los puentes de Königsberg le dedicó Euler toda una investigación matemática, que fue presentada en 1736 a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Este trabajo comienza con las siguientes palabras, que determinan a qué rama de las matemáticas corresponde el estudio de estos problemas:

«Además de la rama de la geometría que estudia las magnitudes y los procedimientos de medición, que fue ya cuidadosamente elaborada en la antigüedad, Leibniz hizo mención por vez primera de otra rama que él llamó «geometría de posición». Esta rama de la geometría se ocupa solamente del orden en que están dispuestas las partes de las figuras, unas con respecto a otras, prescindiendo de sus dimensiones[1]).

Hace poco tuve ocasión de oír una conversación acerca de un problema de geometría de posición, y decidí exponer aquí, a modo de ejemplo, el procedimiento que hallé para resolverlo». Euler se refería al problema de los puentes de Königsberg.

Aquí no vamos a reproducir los razonamientos del gran matemático. Nos limitaremos a dar unas ideas concretas que confirman su conclusión. Consiste ésta en que el recorrido que plantea el problema es imposible.

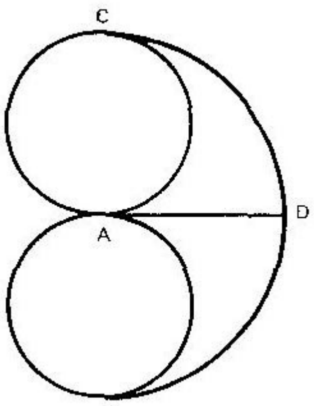


Figura 285

Análisis del problema

Para mayor claridad sustituimos el dibujo de la disposición de los brazos del río por el esquema simplificado de la fig. 285. En el problema planteado no tienen ninguna importancia las dimensiones de la isla ni las longitudes de los puentes (éste es el rasgo característico de todos los problemas topológicos: el no depender de las dimensiones relativas de las partes de la figura).

Por esto los lugares A, B, C y D (fig. 284) podemos sustituirlos en el esquema por los puntos de igual denominación en que se encuentran los caminos a seguir durante el recorrido. El problema se reduce ahora, como puede verse, a dibujar la fig. 285 de un trazo, es decir, sin levantar la pluma del papel y sin recorrer una misma línea dos veces.

---

[1]) En la actualidad esta rama de la geometría superior se llama «topología» y se ha convertido en una amplísima ciencia matemática. Los problemas que ofrecemos en este capítulo se refieren a un dominio que sólo constituye una pequeña parte de la topología.

Demostraremos que es imposible dibujar nuestra figura de un solo trazo. En efecto, a cada uno de los puntos nodales A, B, C y D hay que llegar por uno de los caminos y luego salir de él por otro camino; esta regla sólo tiene dos excepciones, a saber: el primer punto, al cual no hay que llegar de ninguna parte, y el último, del cual no hay que salir. Por lo tanto, para poder recorrer nuestra figura sin levantar la pluma es necesario que en cada uno de los puntos nodales, menos dos, converjan dos a cuatro caminos, es decir, un número par de ellos. Pero en cada uno de los puntos A, B, C y D de nuestra figura converge precisamente un número impar de líneas. Por esto es imposible dibujarla de un solo trazo de pluma y, por consiguiente, es imposible pasar los puentes de Königsberg como indica la condición del problema.

Siete problemas Intente dibujar de un solo trazo cada una de las siete figuras de la fig. 286. Recuerde las condiciones: dibujar todas las líneas de la figura dada sin levantar la pluma del papel, sin hacer rayas de más y sin pasar dos veces por una misma línea.

Un poco de teoría Los intentos de dibujar con una línea ininterrumpida las figs. 286, *1—6*, conducen a diversos resultados. Algunas figuras pueden dibujarse cualquiera que sea el punto desde el cual se comience a trazar la línea ininterrumpida. Otras sólo se pueden dibujar de un solo trazo cuando se empiezan desde puntos determinados. Finalmente, hay un tercer grupo de figuras que no puede dibujarse con una línea ininterrumpida. ¿A qué se debe esta diferencia? ¿Existen indicios que permitan determinar a priori si una figura dada puede dibujarse de un solo trazo y, si esto es así, el punto desde el cual debe comenzarse a trazar?

La teoría da respuestas exhaustivas a estas preguntas. Veamos algunos de los postulados de esta teoría.

Llamaremos «pares» a los puntos de la figura en que converge un número *par* de líneas, para diferenciarlos de los puntos «impares», a los cuales concurre un número *impar* de ellas.

Puede demostrarse (aunque no nos detengamos a hacerlo) que cualquiera que sea la figura, o no tendrá puntos impares o, si los tiene, serán dos, cuatro, seis o, en general, un número par de ellos. Si la figura *carece* de puntos impares, podrá dibujarse siempre de un solo trazo, empezando por cualquiera de sus puntos. De este tipo son las figs. 286, *1* y *5*.

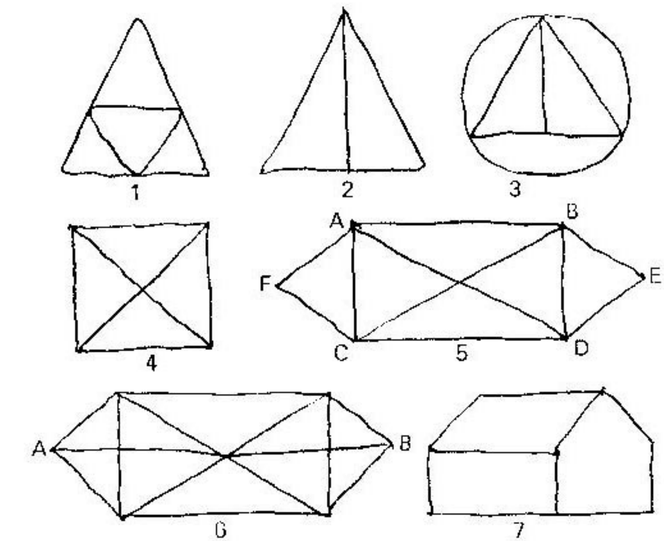


Figura 286

Si la figura tiene solamente dos puntos impares, se podrá dibujar de un solo trazo si se empieza por uno cualquiera de estos puntos impares. Se comprende fácilmente que el dibujo terminará en el segundo punto impar. A este tipo pertenecen las figuras *2*, *3* y *6*; la figura *6*, por ejemplo, debe empezarse a dibujar por el punto *A* o por el punto *B*.

Si la figura tiene más de un par de puntos impares, no puede dibujarse de un solo trazo. Las figuras *4* y *7*, que tienen dos pares de puntos impares, son de este último tipo.

Lo expuesto es suficiente para conocer las figuras que no pueden dibujarse de un solo trazo y las que pueden dibujarse, así como el punto desde el cual hay que comenzar a dibujarlas. El profesor W. Arens propone guiarse después por la regla: «Todas las líneas ya dibujadas de la figura dada deben considerarse inexistentes y, al elegir la siguiente línea a trazar, debe procurarse que la figura conserve su integridad (es decir, que no se descomponga), si esta línea también se quita del dibujo.»

Supongamos, por ejemplo, que la figura *5* comenzó a dibujarse siguiendo el camino $ABCD$. Si ahora se traza la línea DA, quedan sin dibujar dos figuras, la ACF y la BDE, que *no están ligadas* entre sí (la figura *5* se descompone). En este caso, después de terminar la figura AFC no podemos pasar a lafigura BDE, ya que no habrá líneas aún no dibujadas que las liguen entre sí. Por esto, una vez recorrido el camino $ABCD$, no se puede seguir adelante por la línea DA, sino que antes debe trazarse el camino $DBED$ y luego, por la línea DA que queda, pasar a la figura AFC.

Otros siete problemas

Dibuje sin levantar la pluma del papel las figuras siguientes:

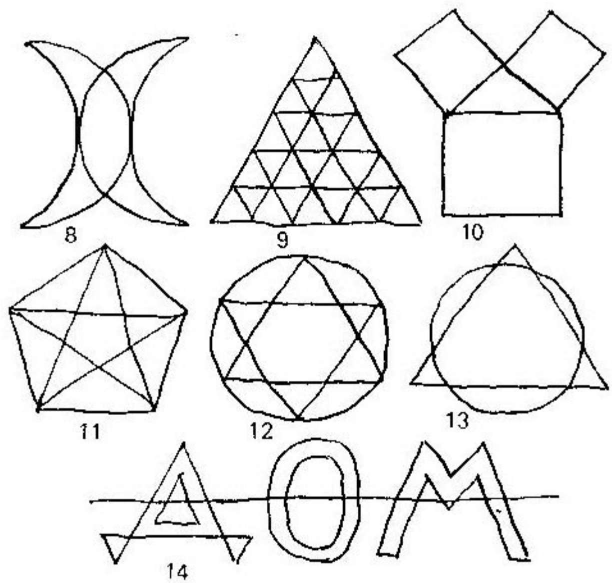


Figura 287

Los puentes de Leningrado

Para terminar proponemos un problema que sirve de tema a una de las muestras de la sala de matemáticas de la Casa de la Ciencia Recreativa. El problema consiste en pasar por los 17 puentes que unen entre sí las partes del territorio de Leningrado, que representa la figura, sin recorrer ninguno de ellos dos veces. A diferencia del problema de los puentes de Königsberg, el recorrido que se plantea esta vez es realizable y nuestro lector tiene ya los conocimientos teóricos necesarios para poder resolver este problema sin necesidad de ayuda.

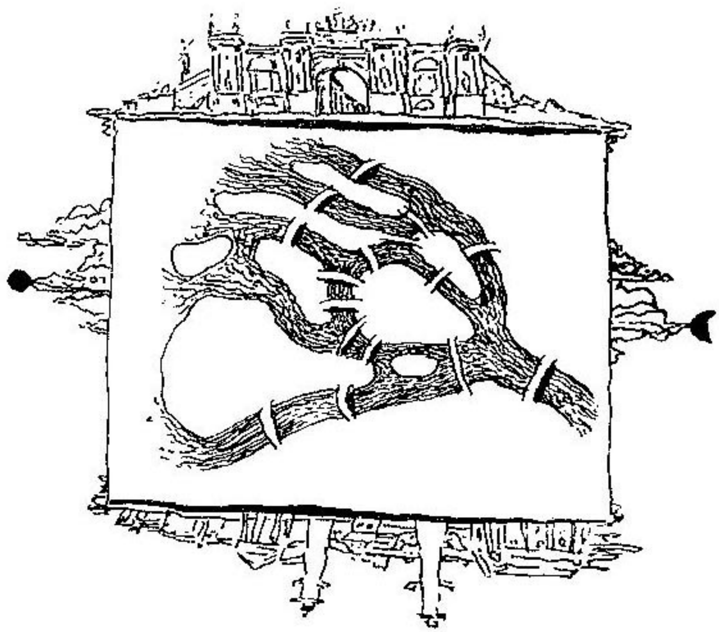
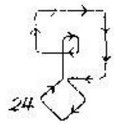


Figura 288

384-385



SOLUCIONES

En las figs. 289 y 290 se dan las soluciones correspondientes a los problemas del capítulo «De un solo trazo».

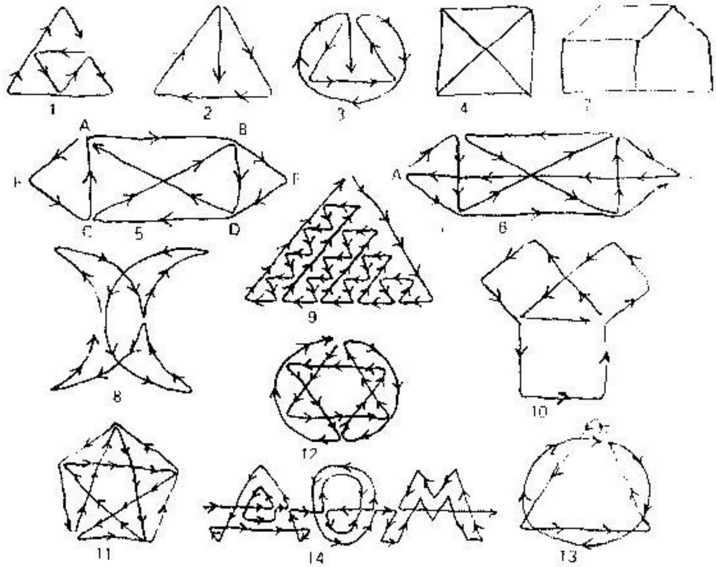


Figura 289

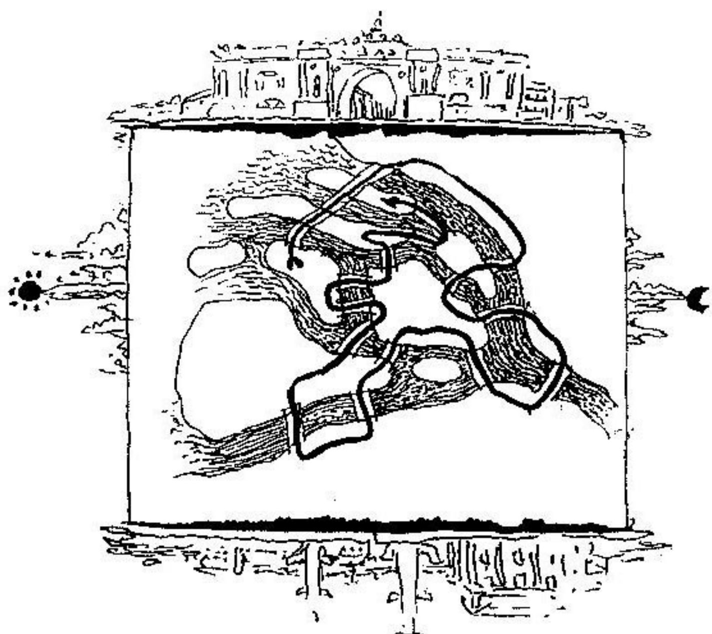


Figura 290

El carro

¿Por qué se desgasta más y se quema con más frecuencia el eje delantero del carro que el eje trasero?

El número de caras

He aquí una pregunta que sin duda parecerá a muchos demasiado ingenua o, al contrario, demasiado ingeniosa: ¿Cuántas caras tiene un lápiz hexagonal?

Antes de mirar la solución, recapacite acerca de la pregunta.

¿Qué representan estos dibujos?

Un giro desacostumbrado da a los objetos representados en la fig. 291 un aspecto raro, que hace difícil el reconocerlos. No obstante, procure imaginarse lo pintado

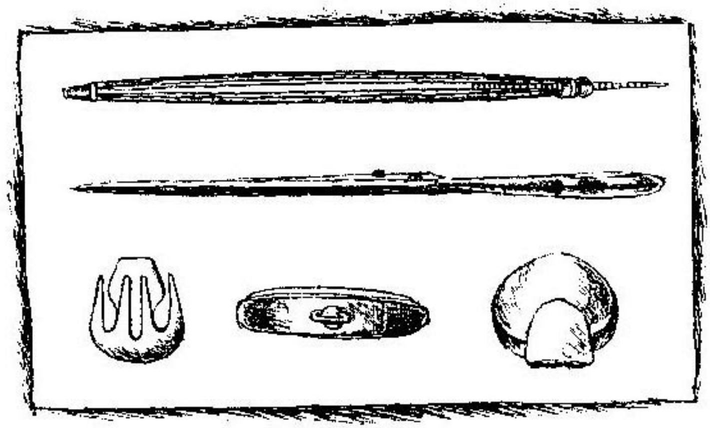


Figura 291

por el dibujante. Se trata de objetos de uso ordinario que usted conoce perfectamente.

Los vasos y los cuchillos

En una mesa hay tres vasos colocados de tal forma, que las distancias entre ellos son mayores que la longitud de cada uno de los cuchillos intercalados (fig. 292). A pesar de esto es necesario hacer, con los tres cuchillos, puentes que unan entre sí los tres vasos. Está claro que no se permite mover los vasos de sus sitios; tampo-

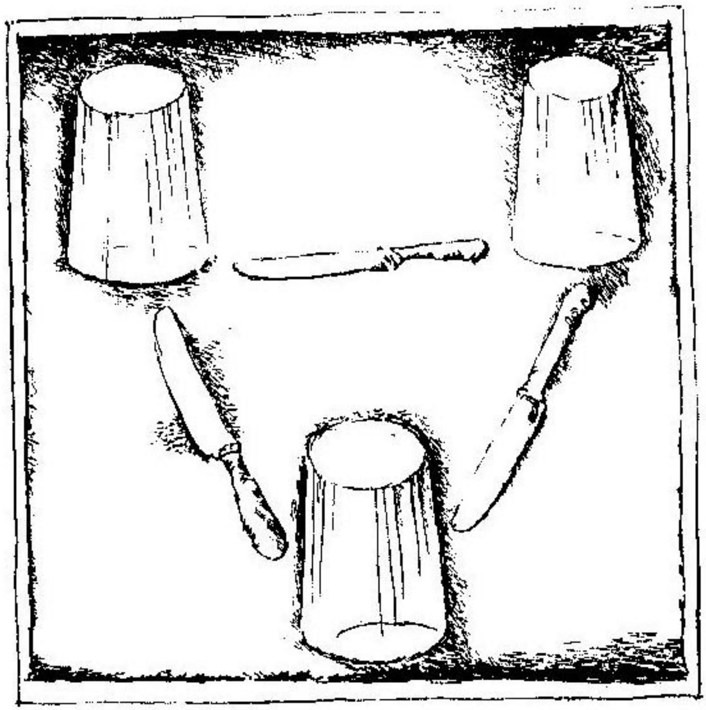


Figura 292

co se puede utilizar ninguna otra cosa además de los tres vasos y los tres cuchillos.

¿Podría usted hacer esto?

¿Cómo está hecho esto?

En la fig. 293 se ve un cubo hecho de dos trozos de madera machihembrados: el macho de la mitad superior entra en la hembra de la inferior. Pero fíjese en la forma y en la disposición de este machihembrado y diga cómo se las compuso el carpintero para unir las dos partes, porque cada mitad está hecha de un solo trozo de madera.

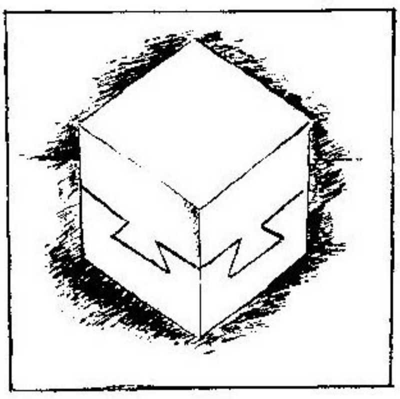


Figura 293

Un tapón para tres orificios

En una tabla (fig. 294) se han practicado seis filas de orificios, a razón de tres en cada fila. De un material cualquiera hay que hacer, para cada fila, *un* tapón que sirva para tapar los tres orificios.

Para la fila primera no es difícil hacer esto: está claro que puede utilizarse como tapón el tarugo representado en la figura.

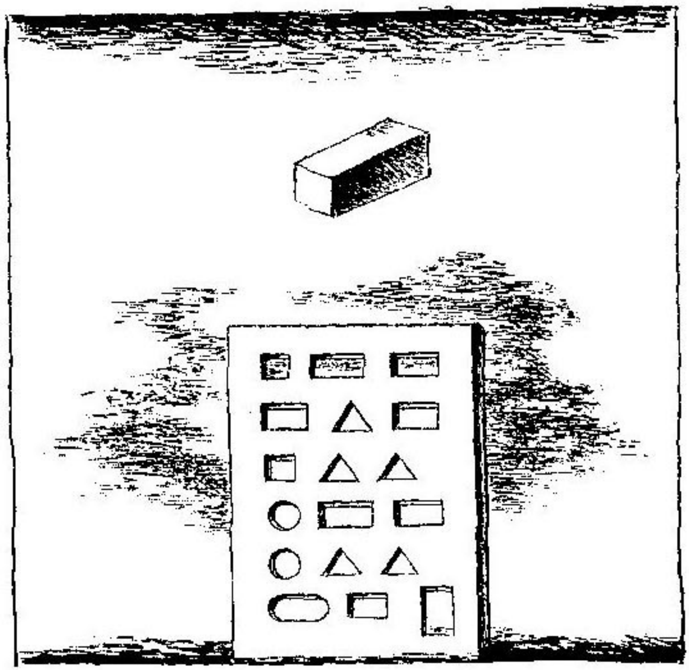


Figura 294

Idear la forma de los tapones para las otras cinco filas es algo más difícil; no obstante, estos problemas también puede resolverlos todo aquel que sepa algo de dibujo técnico: en este caso se trata, en esencia, de hacer una pieza a partir de sus tres proyecciones.

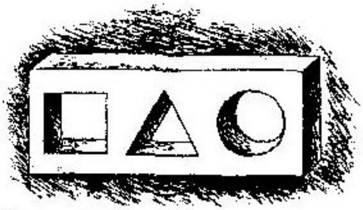


Figura 295

Hallar el tapón

He aquí una tablilla (fig. 295) con tres agujeros: uno cuadrado, otro rectangular y otro redondo.

¿Puede existir un tapón cuya forma sea tal que permita tapar estos tres agujeros?

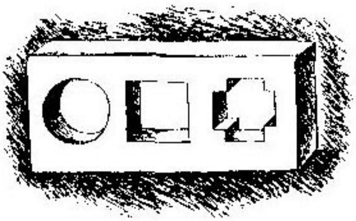


Figura 296

Un segundo tapón

Si consiguió resolver el problema anterior, ¿no podría encontrar otro tapón para los orificios que se muestran en la fig. 296?

Figura 297

Un tercer tapón

Para terminar, aquí tiene otro problema del mismo tipo: ¿puede existir un tapón que sirva para los tres agujeros que se ven en la fig. 297?

Dos jarros

Un jarro es el doble de alto que otro, pero el segundo es $1^1/_2$ veces más ancho que el primero (fig. 298). ¿Cuál de ellos tiene más capacidad?

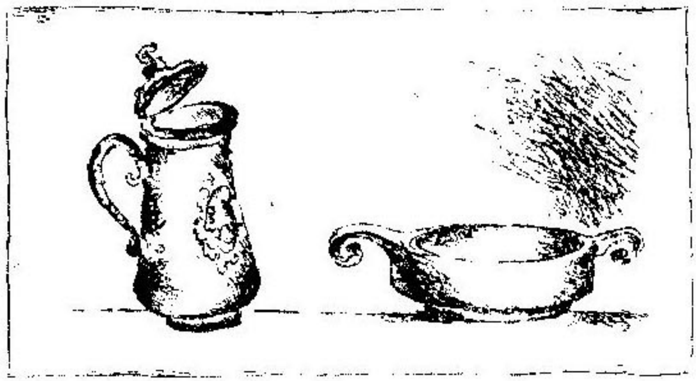


Figura 298

¿Cuántos vasos?

En estos anaqueles (fig. 299) hay vasijas de tres dimensiones, pero están colocadas de tal modo, que la capacidad total de las vasijas que hay en cada anaquel

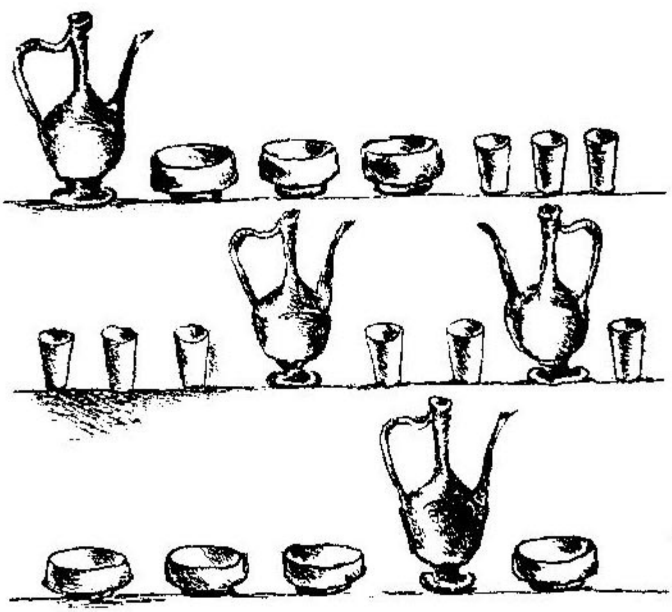


Figura 299

es la misma. La capacidad de la menor de las vasijas es un vaso. ¿Qué capacidad tienen las vasijas de los otros dos tamaños?

Dos cacerolas

Hay dos cacerolas de cobre de igual forma e idéntico espesor de las paredes. La capacidad de la primera es ocho veces mayor que la de la segunda.

¿Cuántas veces mayor es su peso?

Cuatro cubos

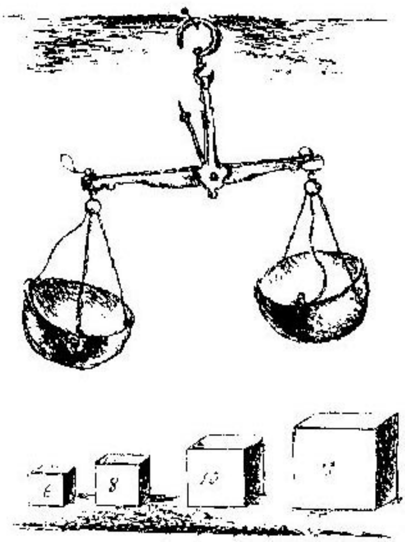


Figura 300

De un mismo material se han hecho cuatro cubos macizos de alturas distintas (fig. 300), a saber: 6 cm, 8 cm, 10 cm y 12 cm. Hay que colocarlos en los platillos de una balanza de modo que éstos queden en equilibrio.

¿Qué cubo o cubos pondrá usted en un platillo y cuáles (o cuál) en el otro?

Hasta la mitad

En un barril abierto hay agua. Al parecer esta agua llena el barril hasta la mitad. Pero usted quiere saber si efectivamente está lleno el barril hasta la mitad o si tiene más o menos agua. A mano no tiene usted ni un palo ni nada que pueda servirle de instrumento para medir el barril.

¿Cómo podría usted convencerse de que el barril está lleno justamente hasta la mitad?

¿Qué pesa más?

Se tienen dos cajas cúbicas de dimensiones iguales (fig. 301). En la de la izquierda hay una gran esfera de hierro cuyo diámetro es igual a la altura de la caja. La de la derecha está llena de bolas de hierro pequeñas colocadas como se ve en la figura.

¿Qué caja pesa más?

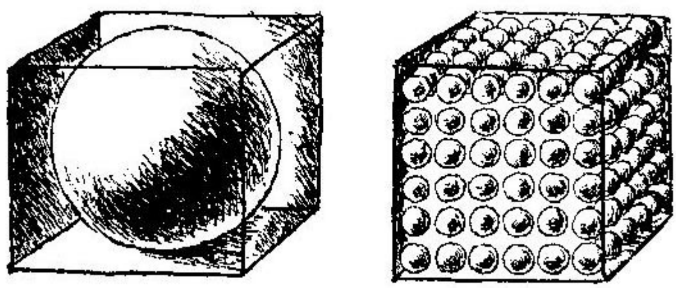


Figura 301

La mesa de tres patas

Existe la creencia de que una mesa de tres patas no cojea nunca, aunque sus patas tengan longitudes distintas.

¿Es verdad esto?

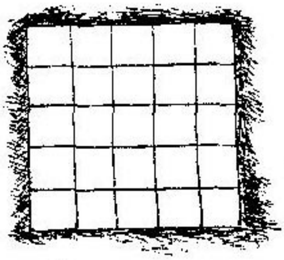


Figura 302

¿Cuántos rectángulos?

¿Cuántos rectángulos puede usted contar en esta figura (fig. 302)?

No se apresure a responder. Fíjese bien en que se pregunta no por el número de *cuadrados*, sino por el de rectángulos en general —grandes y pequeños— que pueden contarse en la figura.

El tablero de ajedrez

¿Cuántos cuadrados, en diversas posiciones, puede usted contar en un tablero de ajedrez?

El ladrillito

Un ladrillo ordinario pesa 4 kg.

¿Cuánto pesará un ladrillito de juguete, hecho del mismo material, si todas sus dimensiones son cuatro veces menores?

El gigante y el enano

¿Cuántas veces aproximadamente pesará más un gigante de 2 m de altura que un enano de 1 m?

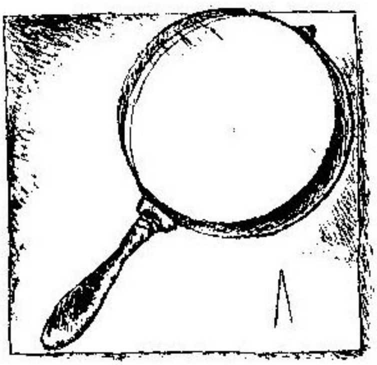


Figura 303

Por el ecuador

Si usted pudiera darle la vuelta a la Tierra por el ecuador, su coronilla describiría una trayectoria más larga que cada punto de sus talones.

¿Sería muy grande la diferencia entre ellas?

Visto con lupa

Un ángulo de $1\,{}^1/_2{}^\circ$ se mira con una lupa de cuatro aumentos.

¿Qué magnitud aparente tendrá el ángulo (fig. 303)?

Figuras semejantes

Este problema se dedica a los que ya saben en qué consiste la semejanza geométrica. Hay que dar respuesta a las dos preguntas siguientes:

1. ¿Son semejantes los triángulos interno y externo de la figura 304, *a*?

2. ¿Son semejantes los cuadriláteros externo e interno del marco del cuadro (fig. 304, *b*)?

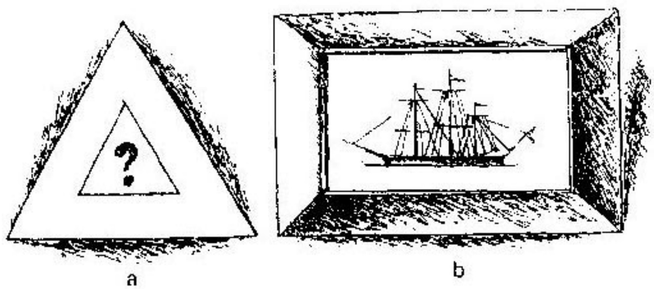


Figura 304

La altura de la torre

En la ciudad en que usted vive hay una torre cuya altura desconoce. Usted tiene una tarjeta postal con la fotografía de dicha torre.

¿Cómo puede utilizarse esta fotografía para determinar la altura de la torre?

¿Qué longitud?

Calcule mentalmente qué longitud tendría una cinta formada por todos los cuadraditos milimétricos que caben en 1 m², puestos uno a continuación del otro y en contacto directo.

Del mismo tipo

Calcule mentalmente cuántos kilómetros de altura tendría una columna formada con todos los cubitos milimétricos que caben en 1 m³, puestos uno encima de otro.

Azúcar

¿Qué pesa más, un vaso lleno de azúcar molido o el mismo vaso lleno de azúcar en terrones?

El camino de la mosca

En la pared interna de un tarro cilíndrico de vidrio se ve una gota de miel a 3 cm del borde superior de la vasija. Y en la pared externa, en el punto diametralmente opuesto a la gota de miel, se ha posado una mosca (fig. 305).

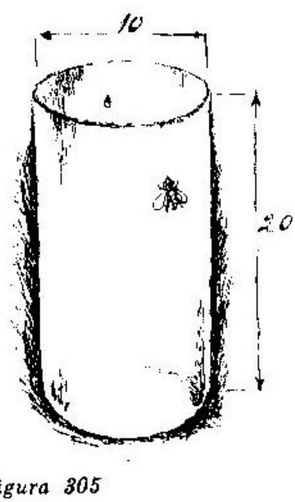


Figura 305

Indíquele a la mosca el camino más corto para llegar a la gota de miel.

La altura del tarro es igual a 20 cm; su diámetro, a 10 cm.

No confíe en que la misma mosca encontrará el camino más corto y así le ayudará a resolver el problema; para esto tendría que poseer la mosca unos conocimientos geométricos demasiado grandes para su cabeza.

El camino del escarabajo

Junto a la carretera hay un adoquín de granito de 30 cm de longitud, 20 cm de altura y 20 cm de anchura (fig. 306). En el punto *A* de dicho adoquín hay un

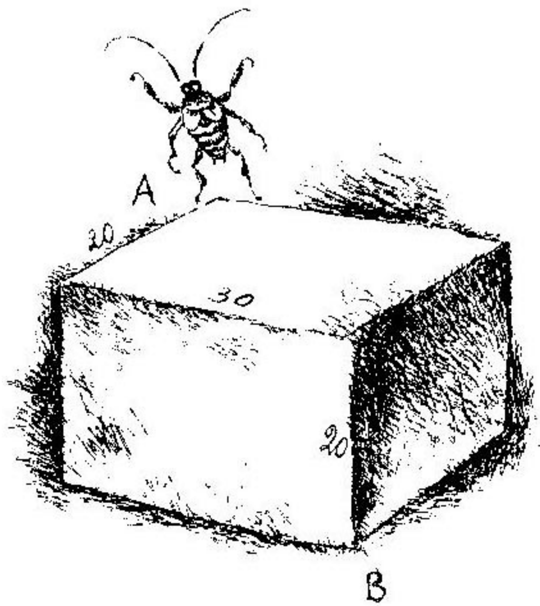


Figura 306

escarabajo que quiere ir por el camino más corto al ángulo *B*.

¿Por dónde pasa este camino más corto y cuál es su longitud?

El viaje del abejorro

Un abejorro emprende un largo viaje. Desde su nido paterno sale volando en línea recta hacia el sur, cruza un río y, finalmente, después de toda una hora de vuelo, se posa en una ladera cubierta de aromático trébol. Aquí permanece el abejorro media hora volando de flor en flor.

Ahora le conviene al abejorro visitar el huerto en que vio ayer unos groselleros en flor. Este huerto se halla al oeste de la ladera, y el abejorro se apresura a volar en línea recta hacia allá. Al cabo de $^3/_4$ de hora ya estaba en el huerto. Los groselleros estaban en plena floración y para poder libar en todos ellos necesitó el abejorro una hora y media.

Luego, sin desviarse hacia ningún lado, el abejorro se dirigió a su casa siguiendo el camino más corto.

¿Cuánto tiempo estuvo ausente el abejorro?

La fundación de Cartago

Acerca de la fundación de la antigua ciudad de Cartago existe la siguiente leyenda. Dido, hija del rey de Tiro, al perder a su esposo (asesinado por el hermano de Dido), huyó a Africa y desembarcó con muchos tirios en su costa norte. Aquí le compró al rey de Numidia tanta tierra «como podía delimitar una piel de toro». Cuando el trato quedó cerrado, Dido cortó la piel de toro a tiras muy estrechas y, gracias a esta estratagema, abarcó un territorio suficiente para construir una fortaleza. Así, según la leyenda, se creó el recinto fortificado de Cartago, en torno al cual se edificó después la ciudad.

Calcule qué área, según esta leyenda, podría ocupar la fortaleza, considerando que la piel de toro tenía 4 m^2 de superficie y que las tiras que Dido cortó de aquélla eran de 1 mm de anchura.

El carro

A primera vista parece que este problema no tiene nada que ver con la geometría. Pero en esto consiste precisamente el conocimiento de esta ciencia, en saber encontrar la base geométrica del problema en aquellos casos en que se halla oculta por detalles secundarios. En esencia, nuestro problema es indudablemente de geometría: sin saber geometría es imposible resolverlo.

Así, pues, ¿por qué se desgasta más el eje delantero del carro? Todos sabemos que las ruedas delanteras son menores que las traseras. En una misma distancia, un círculo pequeño da más vueltas que otro mayor; el círculo pequeño tiene la circunferencia menor y, por eso, entra más veces en la longitud dada. Ahora está claro que en todos los viajes del carro sus ruedas delanteras dan más vueltas que las traseras, y, como es natural, a mayor número de vueltas, mayor desgaste del eje.

El número de caras

Este problema, lejos de ser una broma, pone de manifiesto el error a que conduce el empleo de algunas palabras. Un lápiz hexagonal no tiene seis caras, como piensan muchos. El número total de sus caras, si no se le ha sacado punta, es ocho: seis laterales y dos pequeñas «frontales». Si tuviera en realidad seis caras, su forma sería muy distinta: parecería una varilla de sección cuadrangular.

La costumbre de contar en los prismas nada más que las caras laterales, olvidándose de las bases, es muy frecuente.

¿Qué representan estos dibujos?

Representan, bajo un giro desacostumbrado, los objetos siguientes: una navaja de afeitar, unas tijeras, un tenedor, un reloj de bolsillo y una cuchara. Cuando miramos un objeto cualquiera, vemos en realidad su proyección sobre el plano perpendicular al rayo visual. En nuestro caso se muestran no las proyecciones que estamos acostumbrados a ver, y esto basta para que el objeto parezca desconocido.

Los vasos y los cuchillos

Esto es fácil de conseguir poniendo los cuchillos como se ve en la fig. 307. Cada cuchillo apoya uno de sus extremos en un vaso y el otro, en un cuchillo, que a su vez también se apoya en otro cuchillo. Los cuchillos se sostienen entre sí.

¿Cómo está hecho esto?

El secreto es bien sencillo, como puede verse en la fig. 308.

Todo consiste en que tanto los salientes como los entrantes (machos y hembras) no se cruzan, como parece al mirar el objeto acabado, sino que son paralelos entre sí y tienen dirección oblicua. Estos salientes son muy fáciles de introducir en las ranuras correspondientes.

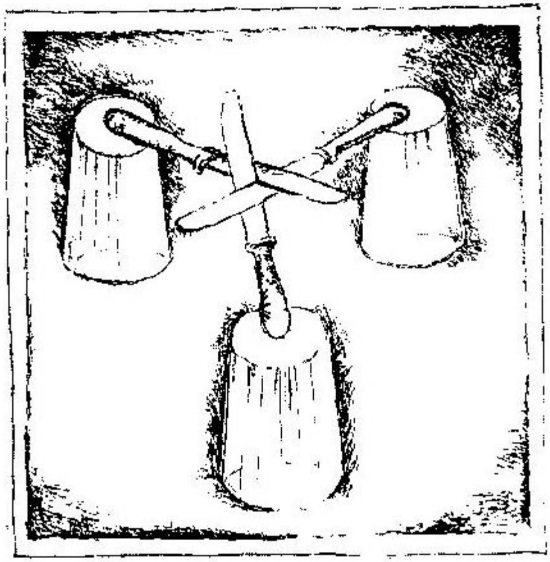


Figura 307

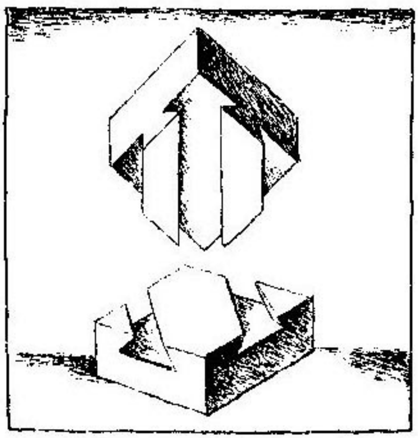


Figura 308

Un tapón para tres orificios

Los tapones necesarios para el fin propuesto se muestran en la fig. 309.

Hallar el tapón

El tapón que hace falta en este caso, existe. Tiene la forma que se ve en la fig. 310. Es fácil comprobar que un tapón así puede tapar el agujero cuadrado, el triangular y el redondo.

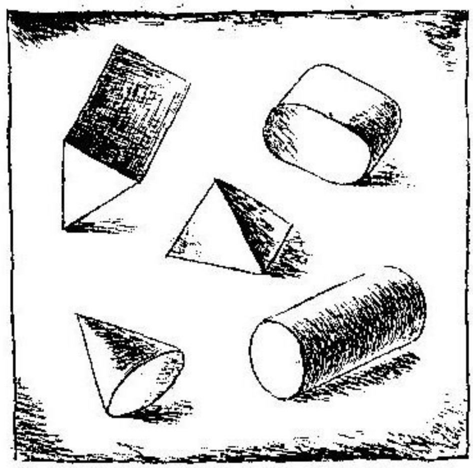


Figura 309

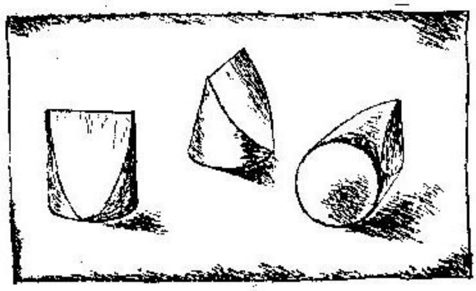


Figura 310

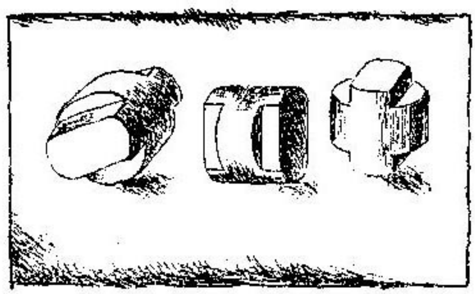


Figura 311

Un segundo tapón

También existe el tapón necesario para los tres orificios representados en la fig. 311: uno redondo, otro cuadrado y un tercero en forma de cruz. El tapón se representa en las tres posiciones.

Un tercer tapón

Este tapón también lo hay. En la fig. 312 puede verlo usted por tres de sus lados.

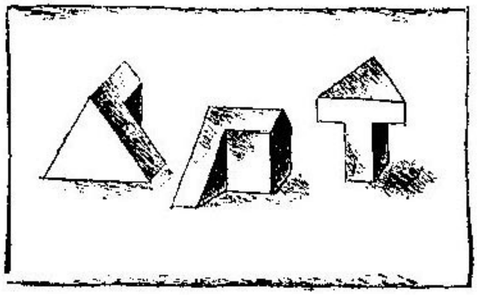


Figura 312

Problemas como éstos tienen que resolver con frecuencia los delineantes, cuando por tres proyecciones de una pieza cualquiera de una máquina, tienen que determinar su forma.

Dos jarros

El jarro cuya anchura es $1^1/_2$ veces mayor, si tuviera la misma altura que el otro, tendría una capacidad $(1^1/_2)^2$, es decir, $2^1/_4$ veces mayor. Y como su altura sólo es dos veces menor, su capacidad, en fin de cuentas, es mayor que la del jarro más alto.

¿Cuántos vasos?

Comparando el primer anaquel con el tercero, notamos que se diferencian entre sí en lo siguiente: en el tercer anaquel hay de más una vasija de tamaño medio, pero, en cambio, hay tres vasijas pequeñas menos. Y como la capacidad total de las vasijas de cada anaquel es la misma, es evidente que la capacidad de una vasija de tamaño medio es igual a la de tres pequeñas. Así, pues, la vasija de tamaño medio tiene la capacidad de tres vasos. Nos queda por determinar la capacidad de la vasija mayor. Sustituyendo en el primer anaquel las vasijas de tamaño medio por el número correspondiente de vasos, obtenemos una vasija grande y 12 vasos.

Comparando esto con el segundo anaquel comprendemos que la capacidad de una vasija grande es igual a la de seis vasos.

Dos cacerolas

Las dos cacerolas son cuerpos geométricamente semejantes. Si la cacerola grande tiene una capacidad ocho veces mayor, todas sus dimensiones lineales serán dos veces mayores: será dos veces más alta y dos veces más ancha en ambas direcciones. Pero si es el doble de alta y de ancha, su superficie será 2×2, es decir, cuatro veces mayor, porque las superficies de los cuerpos semejantes guardan entre sí la misma relación que los cuadrados de sus dimensiones lineales. Si el espesor de las paredes de las cacerolas es el mismo, el peso de éstas depende de la magnitud de su superficie. De aquí se deduce la respuesta a la pregunta que plantea el problema: la cacerola grande pesa *cuatro veces* más.

Cuatro cubos

En un platillo hay que colocar los tres cubos menores, y en el otro, el grande. No es difícil cerciorarse de que la balanza debe permanecer en equilibrio. Para esto no hay más que demostrar que la suma de los volúmenes de los tres cubos menores es igual al volumen del mayor. Esto se deduce de la igualdad

$$6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3,$$

es decir,

$$216 + 512 + 1000 = 1728.$$

Hasta la mitad

El procedimiento más sencillo es inclinar el barril de modo que el agua llegue hasta el borde (fig. 313). Si en estas condiciones se ve, aunque sólo sea un poco, el fondo del barril, quiere decir que el agua no llegaba a la mitad. Si, por el contrario, el fondo

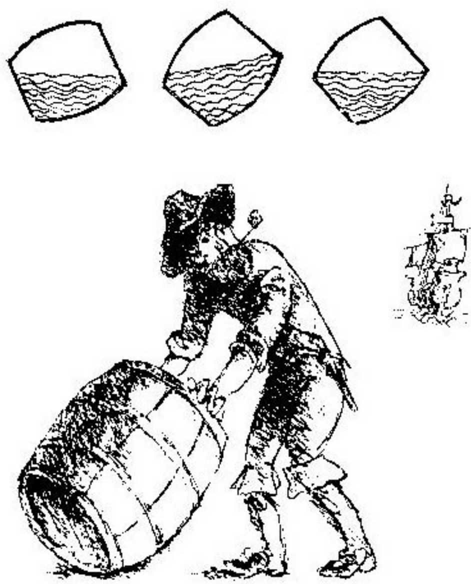


Figura 313

queda por debajo del nivel del agua, está claro que ésta llenaba más de la mitad del barril. Y, finalmente, si el borde superior del fondo se halla precisamente al nivel del agua, ésta ocupa exactamente la mitad del barril.

¿Qué pesa más?

El cubo de la derecha nos lo figuramos formado por cubos pequeños, en cada uno de los cuales hay una bola. Se ve entonces fácilmente que la esfera grande ocupa una fracción del cubo entero igual a la que en un cubo pequeño ocupa una bola. El número de bolas y de cubos pequeños no es difícil de calcular: $6 \times 6 \times 6 = 216$. El volumen de 216 bolas constituye la misma fracción de 216 cubos pequeños que una bola pequeña de un cubo pequeño, es decir, la misma que la esfera grande constituye del cubo grande. De aquí se deduce claramente que en ambas cajas hay la misma cantidad de metal y que, por consiguiente, deben pesar lo mismo.

La mesa de tres patas

Una mesa de tres patas siempre puede tocar el suelo con los extremos de las tres, porque por cada tres puntos del espacio puede pasar un plano, y sólo uno; por esta razón no cojean las mesas de tres patas. Como ve, se trata de una razón puramente geométrica y no física.

Por esto es tan cómodo usar trípodes en los instrumentos de agrimensura y en las cámaras fotográficas. Una cuarta pata no daría más estabilidad al soporte, sino al contrario, haría que cada vez fuera necesario tomar medidas para que no cojeara.

¿Cuántos rectángulos?

En esta figura pueden contarse 225 rectángulos en diversas posiciones.

El tablero de ajedrez

En un tablero de ajedrez hay representados no 64 cuadrados, sino muchos más: porque además de los cuadrados blancos y negros pequeños, hay en ella cuadrados bicolores constituidos por 4, 9, 16, 25, 36, 49 y 64 cuadraditos simples. Teniendo en cuenta todos ellos, resultan:

cuadraditos simples				64
cuadrados	formados	por 4	cuadraditos	49
»	»	» 9	»	36
»	»	» 16	»	25
»	»	» 25	»	16
»	»	» 36	»	9
»	»	» 49	»	4
»	»	» 64	»	1
			Total	204

Así, pues, en un tablero de ajedrez hay 204 cuadrados de distinto tamaño, diversamente colocados.

El ladrillito

La respuesta que supone que el ladrillito de juguete pesa 1 kg, es decir, nada más que cuatro veces menos que el ordinario, encierra un gran error, ya que este ladrillito no sólo es cuatro veces *más corto*, sino también cuatro veces *más estrecho* y cuatro veces *más bajo*; por lo tanto, su volumen y su peso serán $4 \times 4 \times 4 = 64$ veces menores.

Por consiguiente, la respuesta concreta será: el ladrillito de juguete pesa $4000 : 64 = 62{,}5$ g.

El gigante y el enano

Usted ya está preparado para poder dar una solución correcta a este problema. Como las figuras del cuerpo humano son aproximadamente semejantes, a una talla doble del individuo le corresponderá un volumen no dos veces mayor, sino ocho. Por lo tanto, nuestro gigante pesará unas ocho veces más que el enano.

El gigante más alto que se ha conocido era alsaciano y medía 275 cm, es decir, todo un metro más que una persona de estatura mediana. El enano más pequeño tenía menos de 40 cm de altura, o sea, era aproximadamente siete veces más bajo que el enorme alsaciano. Por esto, si en el platillo de una balanza se pusiera al gigante alsaciano, en el otro platillo habría que colocar, para lograr el equilibrio, $7 \times 7 \times 7 = 343$ enanos, es decir, toda una multitud.

Por el ecuador

Considerando que la estatura de la persona es igual a 175 cm y llamando R al radio de la Tierra, tenemos: $2 \times 3{,}14 \times (R + 175) - 2 \times 3{,}14 \times R = 2 \times 3 \times 175 = 1100$ cm, es decir, cerca de 11 m. Pero lo sorprendente es que este resultado no depende en absoluto del radio de la esfera y, por consiguiente, es igual tanto para la enorme esfera del sol como para una bola pequeña.

Visto con lupa

Si usted cree que nuestro ángulo visto con lupa tiene $1^1/_2 \times 4 = 6°$, se equivoca. El valor de un ángulo no aumenta cuando se mira con lupa. Es verdad que el arco que

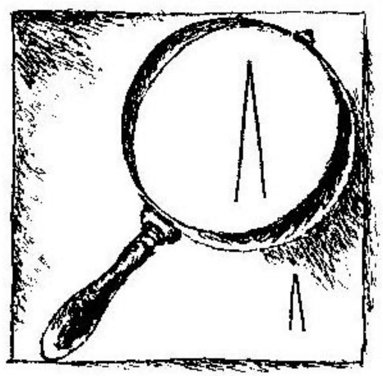


Figura 314

mide dicho ángulo aumenta indudablemente, pero el radio de este arco aumenta la misma cantidad de veces que él, de modo que el valor del ángulo central permanece invariable. La fig. 314 aclara lo dicho.

Figuras semejantes

A las dos preguntas planteadas en el problema suelen responder con frecuencia afirmativamente. Pero en realidad sólo son semejantes los triángulos; en cambio, los cuadriláteros exterior e interior del marco, en general, no son semejantes. Para que dos triángulos sean semejantes basta que sus ángulos sean iguales, y como los lados del triángulo interior son paralelos a los del exterior, estas figuras son semejantes. Pero para que los demás polígonos sean semejantes no basta la igualdad de los ángulos (o, lo que es lo mismo, el paralelismo de sus lados), es necesario además que los *lados* de los polígonos sean *proporcionales*. En el caso de los cuadriláteros exterior e interior de un marco sólo se da esta condición si son cuadrados (o, en general, rombos). En todos los demás casos los lados del cuadrilátero exterior no son proporcionales a los lados del cuadrilátero interior y, por consiguiente, las figuras no son semejantes. La inexistencia de semejanza se hace evidente cuando los marcos son rectangulares y los listones que lo forman son

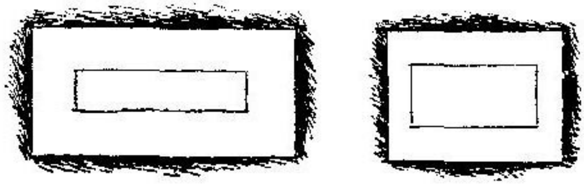


Figura 315

anchos, como en la fig. 315. En el marco de la izquierda, los lados exteriores se relacionan entre sí como 2 : 1, mientras que los interiores, como 4 : 1. En el marco de la derecha, entre los lados exteriores existe la relación 4 : 3, y entre los interiores, 2 : 1.

La altura de la torre

Para poder determinar por medio de la fotografía la altura de la torre, es necesario, en primer lugar, medir lo más exactamente posible la altura y la longitud de la base de su imagen fotográfica. Supongamos que la altura de la imagen sea 95 mm y la longitud de su base 19 mm. En este caso, mide usted la longitud de la base de la torre real; supongamos que resulta ser igual a 14 m.

Después de esto razonaremos así:

La fotografía de la torre y la configuración de su original son semejantes geométricamente. Por consiguiente, la altura de la torre real será tantas veces mayor que la longitud de su base, como veces mayor sea la altura de la imagen fotográfica que la longitud de su base. Esta segunda relación es igual a 95 : 19, es decir, 5; de donde se deduce que la altura de la torre es cinco veces mayor que la longitud de su base e igual en realidad a $14 \times 5 = 70$ m.

Así, pues, la altura de la torre de la ciudad es de 70 m.

Conviene advertir, no obstante, que para determinar la altura de una torre no sirve cualquier fotografía, sino únicamente aquellas en las cuales no se hayan alterado las proporciones del original, como suele ocurrir en las hechas por fotógrafos poco duchos.

¿Qué longitud?

En un metro cuadrado hay mil veces mil milímetros cuadrados. Cada mil milímetros cuadrados, puestos uno a continuación de otro sin interrupción, constituyen 1 m; mil veces mil constituyen 1000 m, es decir, 1 km, por lo tanto, la cinta tendría un kilómetro de longitud.

Del mismo tipo

La respuesta llama la atención: la columna tendría... 1000 km de altura.

Hagamos el cálculo mental. En 1 m^3 hay $1000 \times 1000 \times 1000$ milímetros cúbicos. Cada 1000 milímetros cúbicos, puestos uno sobre otro, da una columna de 1 m. Mil veces más milímetros darán una columna de $1000 \text{ m} = 1$ km. Pero como tenemos aún 1000 veces más milímetros cúbicos, constituirán en total una columna de 1000 km.

Azúcar

Haciendo un pequeño esfuerzo mental, este problema, que parece muy difícil, se resuelve con bastante facilidad. Supongamos para simplificar que los trozos del azúcar en terrones tienen un diámetro 100 veces mayor que los granos del azúcar molida. Figurémonos ahora que todos los granos de azúcar aumentarán 100 veces de diámetro, junto con el vaso en que se encuentran. La capacidad del vaso aumentaría en 100 × × 100 × 100, es decir, un millón de veces; la misma cantidad de veces aumentaría el peso del azúcar contenida en él. Llenemos mentalmente un vaso normal de esta azúcar molida aumentada, es decir, echemos en él la millonésima parte del contenido del vaso gigante. La cantidad echada pesará, claro está, lo mismo que pesa un vaso ordinario de azúcar molida común. Pero, ¿qué es de por si el azúcar molida aumentada que hemos echado? Ni más ni menos que azúcar en terrón. Por lo tanto, en un vaso cabe la misma cantidad en peso de azúcar en terrones que de azúcar molida.

Si en lugar del aumento de 100 veces hubiéramos supuesto un aumento de 60 veces u otro cualquiera, el resultado hubiera sido el mismo. La esencia del razonamiento consiste en que los trozos de azúcar en terrones se consideran como cuerpos semejantes geométricamente a los granos de azúcar molida y colocados de un modo también semejante. Esta suposición no es rigurosamente correcta, pero se aproxima bastante a la realidad (si se trata de azúcar en terrones, pero no de cortadillo).

El camino de la mosca

Para resolver este problema desarrollamos la superficie lateral del tarro cilíndrico en una figura plana; obtenemos un rectángulo (fig. 316, *a*) de 20 cm de altura, cuya base es igual a la circunferencia del tarro, es decir, a $10 \times 3^1/_7 = 31^1/_2$ cm (aproximada-

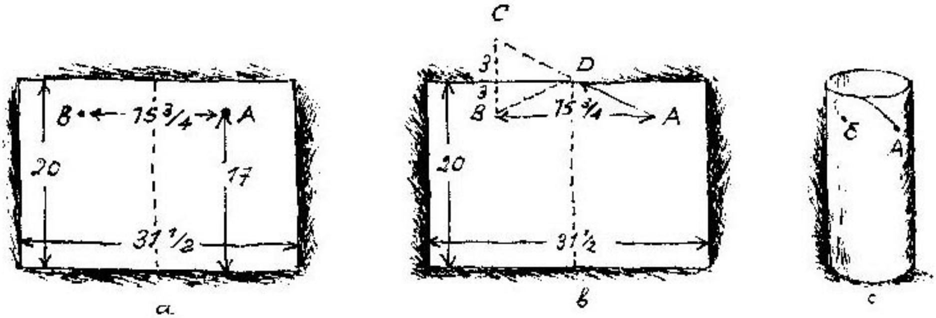


Figura 316

mente). Señalamos en este rectángulo las posiciones que ocupan la mosca y la gota de miel. La mosca está en el punto A, a 17 cm de la base; la gota, en el punto B, a la misma altura y la distancia de una semicircunferencia de tarro con respecto a A, es decir, a $15^3/_4$ cm.

Para hallar ahora el punto en que la mosca debe pasar el borde del tarro, procedemos del modo siguiente. Desde el punto B (fig. 316, *b*) trazamos una recta perpendicular al lado superior del rectángulo y la prolongamos hasta una distancia igual: obtenemos el punto C. Este punto se une por medio de una recta con A. El punto D será el lugar por donde la mosca debe pasar al otro lado del tarro, y el camino ADB resulta ser el más corto.

Una vez hallado el camino más corto en el rectángulo desarrollado, lo volvemos a la forma cilíndrica y, de este modo, sabemos el camino que debe seguir la mosca para llegar antes a la gota de miel (fig. 316, c).

El camino del escarabajo

El camino es fácil de encontrar, si mentalmente hacemos girar la cara superior del adoquín, de forma que quede en el mismo plano que la cara delantera (fig. 317). Entonces es evidente que el camino más corto es la línea recta que une A y B. ¿Qué longitud

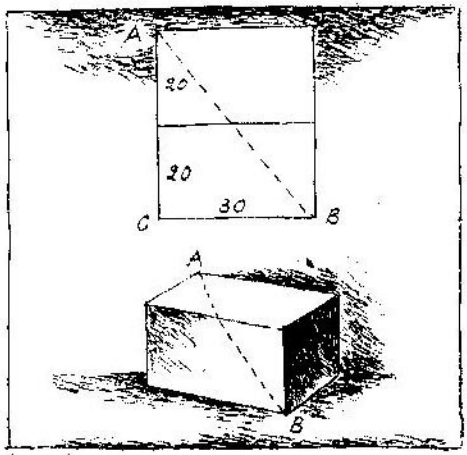


Figura 317

tiene este camino? Tenemos el triángulo rectángulo ABC, en el cual $AC = 40$ cm y $CB = 30$ cm. Por el teorema de Pitágoras, el tercer lado, AB, deberá ser igual a 50 cm, ya que $30^2 + 40^2 = 50^2$.

Así, pues, el camino más corto es $AB = 50$ cm.

El viaje del abejorro

El problema se resolvería muy fácilmente si se dijera el tiempo que tardó el abejorro en llegar volando desde el huerto hasta su nido. Esto no se dice en el problema, pero la geometría puede ayudarnos a saberlo.

Dibujemos el recorrido del abejorro. Sabemos que al principio voló «en línea recta hacia el sur» durante 60 minutos. Después voló 45 minutos «hacia el oeste», es decir, formando un ángulo recto con su camino anterior. Y desde allí volvió a su casa siguiendo el «camino más corto», es decir, una línea recta. Obtenemos el triángulo rectángulo ABC, del cual conocemos los dos catetos AB y BC, y tenemos que hallar el tercer lado, o sea, la hipotenusa AC.

La geometría enseña que si una cantidad cualquiera está contenida tres veces en un cateto y cuatro en el otro, en el tercer lado del triángulo, o sea, en la hipotenusa, esta misma cantidad estará contenida cinco veces exactamente.

Por ejemplo, si los catetos de un triángulo son iguales respectivamente a 3 y 4 m, su hipotenusa será igual a 5 m; si los catetos tienen 9 y 12 km, el tercer lado tendrá 15 km, y así sucesivamente. En nuestro caso un cateto equivale a 3 × 15 minutos de

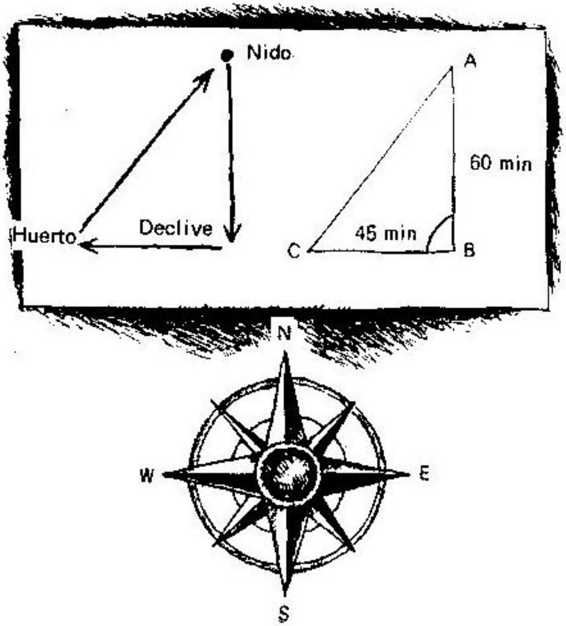


Figura 318

camino, el otro, a 4 × 15; por lo tanto, la hipotenusa $AC = 5 \times 15$ minutos de camino. De este modo hemos sabido que desde el huerto a su nido voló el abejorro 75 minutos, es decir, $1^1/_4$ horas.

Ahora ya es fácil calcular el tiempo que estuvo ausente el abejorro. En sus vuelos tardó:

$$1 \text{ hora} + {}^3/_4 \text{ de hora} + 1^1/_4 \text{ horas} = 3 \text{ horas.}$$

En sus paradas se entretuvo:

$$^1/_2 + 1^1/_2 \text{ horas} = 2 \text{ horas.}$$

En total: 3 horas + 2 horas = 5 horas.

La fundación de Cartago

Si el área de una piel de toro es igual a 4 m^2 ó 4 millones de mm^2 y la anchura de la tira es 1 mm, la longitud total de la correa cortada (que es de suponer que Dido la cortase en espiral) sería 4 millones de mm, o 4000 m, es decir, 4 km. Con esta correa se puede rodear una parcela cuadrada de 1 km^2 o una parcela redonda de 1,3 km^2.

Medición del camino por los pasos

Una regla graduada o una cinta métrica no siempre se tiene a mano, conviene por eso saber pasar sin ellas aunque sea aproximadamente. Las distancias más o menos largas, como, por ejemplo, las que se recorren durante las excursiones, lo más fácil es medirlas por pasos. Para esto hay que saber la longitud de sus pasos y saber contarlos. Está claro que los pasos no son siempre iguales: podemos andar con pasos cortos y podemos también, si queremos, andar con pasos largos. Pero de ordinario andamos con pasos de longitud aproximadamente igual, y conociendo su longitud media, pueden medirse las distancias por pasos sin cometer gran error.

Para conocer la longitud del paso medio hay que medir la longitud de muchos pasos juntos y de aquí calcular la longitud de uno. Para esto, como es natural, no puede prescindirse de una cinta métrica o de un cordón.

Tienda la cinta en un sitio liso y mida una distancia de 20 m. Trace esta línea sobre el terreno y quite la cinta. Ahora recorra esta línea andando normalmente y cuente el número de pasos que da. Puede ocurrir que su paso no entre un número entero de veces en la longitud medida. En este caso, si el resto del camino es menor que la mitad de la longitud de un paso, se puede despreciar; si es mayor que la mitad de dicha longitud, el resto se considera como un paso entero. Dividiendo la longitud total, 20 m, por el número de pasos, se obtiene la longitud media de un paso. Este número debe recordarse para, en caso de necesidad, emplearlo en las mediciones.

Para no equivocarse al contar los pasos, sobre todo en las distancias largas, se puede proceder del modo siguiente. Los pasos se cuentan solamente hasta 10; al llegar a este número se encoge un dedo de la mano izquierda. Cuando todos los dedos de la mano izquierda ya se han encogido, es decir, cuando se ha recorrido 50 pasos, se encoge un dedo de la mano derecha. Así se pueden contar hasta 250 pasos, después de lo cual se empieza de nuevo, teniendo cuidado de recordar cuantas veces se encogieron todos los dedos de la mano derecha. Si, por ejemplo, después de recorrer cierta distancia ha encogido usted dos veces todos los dedos de la mano derecha y al final del camino tiene usted tres dedos encogidos en la mano derecha y cuatro en la izquierda, habrá dado usted

$2 \times 250 + 3 \times 350 + 4 \times 10 = 690$ pasos.

A esto hay que añadir los pasos que dio después de encoger por última vez un dedo de la mano izquierda.

Aquí conviene dar a conocer la antigua regla siguiente: la longitud del paso medio de una persona adulta es igual a la mitad de la distancia que hay desde el suelo hasta sus ojos.

Otra antigua regla práctica se refiere a la *velocidad* con que se anda: una persona recorre en una hora tantos kilómetros como pasos da en 3 segundos. Es fácil demostrar que esta regla sólo es cierta para una longitud determinada del paso, que además resulta ser bastante largo. En efecto: llamemos x m a la longitud del paso y n al número de pasos que se dan en 3 segundos. En este caso el peatón recorrerá en 3 segundos nx m y en una hora (3600 segundos), $1200\ nx$ m, ó $1{,}2\ nx$ km. Para que este camino recorrido sea igual al número de pasos dados en 3 segundos, deberá existir la igualdad: $1{,}2\ nx = n$, ó $1{,}2\ x = 1$.

De donde $x = 0{,}83$ m.

Si es cierta la regla anterior acerca de la dependencia entre la longitud del paso y la estatura de la persona. la segunda regla, que acabamos de considerar, se justifica únicamente para las personas de estatura mediana, es decir, de cerca de 175 cm.

Una escala viva

Para medir objetos de magnitudes medianas, si no se tienen a mano un metro o una cinta métrica, se puede hacer lo siguiente. Hay que tensar una cuerda o medir con un palo, la distancia desde el extremo de un brazo extendido horizontalmente hasta el hombro opuesto (fig. 319), en un hombre adulto esto es aproximadamente igual a la longitud de un metro. Otro procedimiento de obtener la longitud aproximada del metro consiste en tomar sobre una línea recta seis «cuartas», es decir, seis distancias entre los extremos de los dedos pulgar e índice abiertos lo más posible (fig. 320, *a*).

Esta última indicación nos conduce al arte de medir a «mano limpia»; para esto sólo es necesario medir previamente los elementos de nuestra propia mano y recordar bien los resultados de estas mediciones.

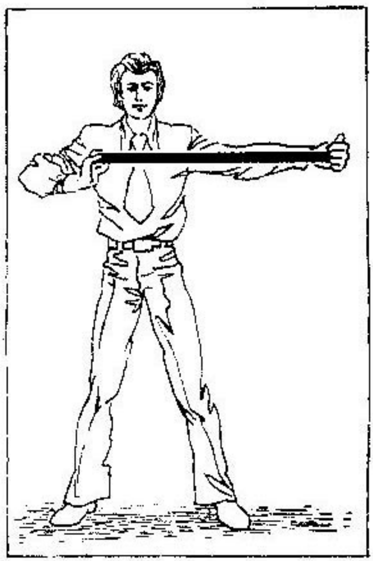


Figura 319

¿Qué hay que medir en la mano? En primer lugar, la anchura de la palma, como muestra la fig. 320, *b*.

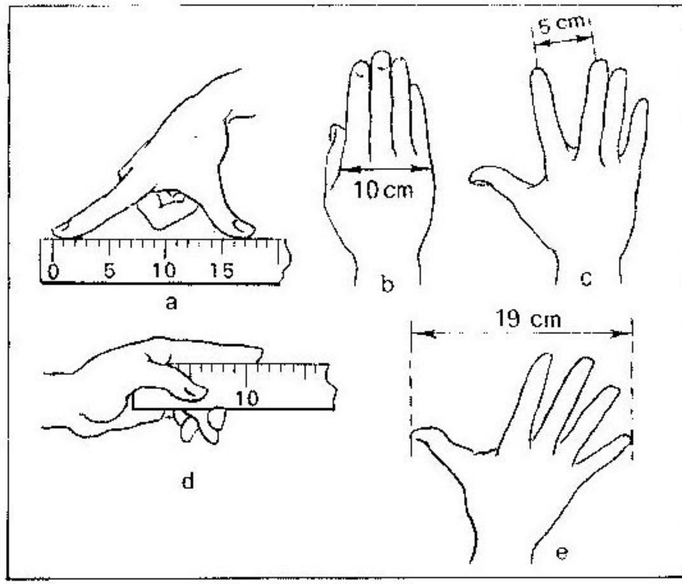


Figura 220

En un hombre adulto esta magnitud es igual a 10 cm, la suya puede ser menor, y usted debe saber en cuánto es menor precisamente. Después debe medir la distancia entre las puntas de sus dedos corazón e índice cuando están separados lo más posible (fig. 320, *c*). También conviene saber la longitud de su dedo índice, desde la base del dedo pulgar, como se indica en la fig. 320, *d*. Y, finalmente, mida la distancia que hay entre los extremos de su dedo pulgar y meñique cuando están lo más abiertos que sea posible, como en la fig. 320, *e*.

Utilizando esta «escala viva» podrá usted medir aproximadamente objetos pequeños.

Mediciones con monedas [1])

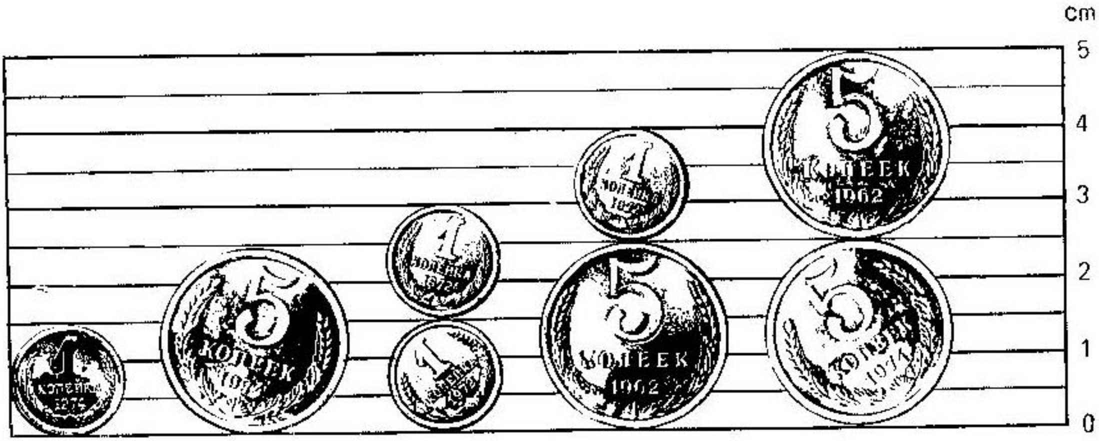
Un buen servicio pueden prestar las monedas de cuño moderno. Son pocos los que saben que el diámetro de la moneda de una copeika es igual a $1^1/_2$ cm y que el de la de cinco copeikas es $2^1/_2$ cm, de modo

[1]) Aquí se dan los diámetros de las monedas soviéticas. El lector debe medir los de las monedas de su país, hacer una tabla y aprenderse de memoria las combinaciones más importantes. (*N. del Tr.*)

que puestas una al lado de otra estas dos monedas miden 4 cm (fig. 321). Por lo tanto, si tiene usted varias monedas de cobre podrá medir con suficiente precisión las siguientes longitudes:

Con la moneda de 1 copeika	$1^1/_2$ cm
» » » » 5 copeikas	$2^1/_2$ »
» 2 monedas de 1 copeika	3 »
» 1 moneda de 5 y 1 de 1 copeika	4 »
» 2 monedas de 5 copeikas etc.	5 »

Si del diámetro de una moneda de 5 copeikas se resta el de una moneda de 1 copeika, se obtiene exactamente 1 cm.



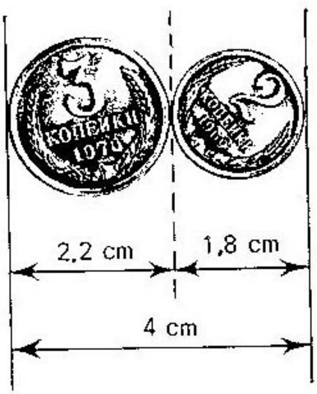


Figura 321

Si no tiene usted monedas de 5 ni de 1 copeika, sino solamente de 2 y de 3 copeikas, también éstas pueden sacarle de un apuro si recuerda con seguridad que estas dos monedas puestas una al lado de la otra miden 4 cm. Doblando por la mitad una tira de papel de 4 cm de largo y volviéndola luego a doblar otra vez por la mitad, tendrá usted una cinta de 4 cm graduada en cm [1]).

Como puede ver, con cierta preparación y un poco de ingenio pueden hacerse mediciones útiles en la práctica sin necesidad de regla graduada.

[1]) El diámetro de la moneda de 15 copeikas es aproximadamente igual a 2 cm, pero sólo aproximadamente, porque el diámetro verdadero de esta moneda es 1,956 mm. Las dimensiones antes indicadas de las monedas de cobre son, en cambio, exactas. Con un pie de rey puede comprobarse fácilmente que esto es así.

27 0990

A esto puede añadirse que las monedas de cobre (bronce) pueden servir también de pesas en caso de necesidad. Las monedas nuevas (sin desgastar) de cobre pesan tantos gramos como valor en copeikas tienen, es decir, la moneda de 1 copeika pesa 1 g, la de 2 copeikas, 2 g y así sucesivamente. El peso de las monedas usadas se diferencia de un modo insignificante de estas normas. Como de ordinario no suelen tenerse a mano pesas pequeñas de 1—10 g, el conocimiento de las relaciones que acabamos de mencionar puede ser de gran utilidad.

El palito que desaparece

Copie cuidadosamente en un papel aparte el dibujo representado en la fig. 322. Córtelo con unas tijeras siguiendo la circunferencia, y, después, gire el círculo cortado en sentido contrario al de las agujas del reloj, de manera que la parte cortada de cada palito quede enfrente del trozo restante del palito vecino. Al hacer esto ocurre una metamorfosis extraña: en vez de 13 palitos, en la figura sólo quedan 12. Uno de los palitos desaparece inesperadamente. ¿Dónde se mete? Cuando el disco se hace girar en sentido contrario, vuelve a aparecer el palito que desapareció. ¿De dónde sale?

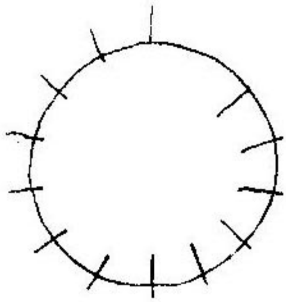


Figura 322

Un nudo misterioso

Pasemos ahora a los trucos que se hacen no con números, sino con objetos.

He aquí un truco interesante con el que podrá maravillar no poco a sus compañeros.

Coja un cordel de 30 cm, de longitud aproximadamente (fig. 323) y haga en él un nudo flojo (sin apretar)

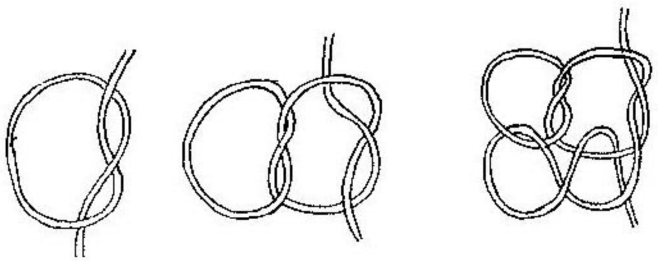


Figura 323

como el que se ve en el dibujo de la izquierda. Añádale a este nudo otro (véase el dibujo siguiente). Usted pensará, claro está, que tirando ahora de los extremos del cordel resultará un doble nudo seguro. Pero aguarde un poco: vamos a intrincar aún más nuestro nudo haciendo pasar uno de los extremos del cordel por ambas lazadas, como muestra el dibujo de la derecha.

Con esto terminan los preparativos; puede pasar a la parte principal del truco. Sujete el cordel por uno de sus extremos y dígale a uno de sus compañeros que tire del otro. Resulta algo que ni usted ni él esperaban: en vez de un nudo complejo y enredado, queda el cordel liso. El nudo desaparece por completo.

Este truco sólo le saldrá bien si hace el tercer nudo tal como se ve en nuestra figura. Unicamente en este caso todos los nudos se desharán de por sí al tirar de la cuerda. Si quiere que el truco no le falle, fíjese bien en el dibujo.

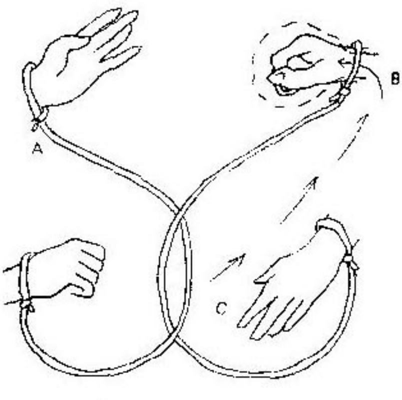


Figura 324

Liberación Ato a dos de sus compañeros —A y B— como muestra la fig. 324: los cordeles rodean las muñecas de las dos manos de cada uno y, además, se cruzan de tal modo, que sus compañeros no pueden separarse. Pero esto sólo es así al parecer. Existe un procedimiento de separar a los prisioneros sin cortar el cordel. ¿En qué consiste?

El cordel que ata las manos del compañero *A* se coge por el punto indicado en la figura por la letra *C* y se hace pasar por el lazo que rodea a la mano *B* en la dirección que señala la flecha. Cuando haya pasado ya una parte suficiente del cordel, por la lazada que se forma se mete la mano *B*, se tira del cordel *A* y los compañeros quedan separados uno del otro.

El par de botas De un papel fuerte recorte un cuadro, un par de botas y un anillo ovalado de la forma que muestra la fig. 325 y de dimensiones proporcionales a éstas. El agujero del anillo ovalado debe tener la misma anchura que la banda del cuadro, pero tiene que ser más estrecho que la caña de las botas. Por esto, si le proponen a usted que meta las botas en el marco, de manera que queden colgando como se ve en la figura, le parecerá seguramente que esto es imposible.

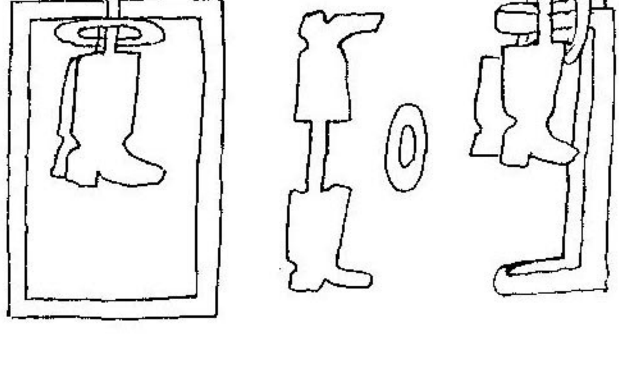


Figura 325

Sin embargo puede hacerse, si se descubre por dónde hay que empezar.

El secreto es el siguiente. Hay que doblar el cuadro de modo que una mitad quede sobre la otra. Un extremo del cuadro doblado se mete por el anillo ovalado. Por este extremo, entre las dos partes del cuadro, se hace pasar la figura desdoblada de las botas, que después se vuelve a doblar, y se corre hacia el doblez del cuadro. Luego se desplaza el anillo y se coloca sobre las cañas de las botas como requiere el problema.

Ahora ya no queda más que desdoblar el cuadro, y el problema está resuelto.

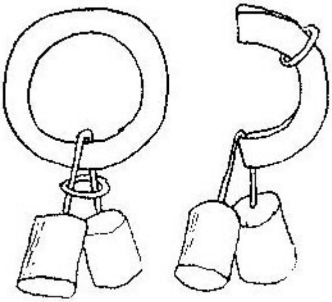


Figura 326

Los tapones en el anillo

De un anillo de papel fuerte cuelgan dos tapones sujetos por un cordoncito corto, cuyos extremos pasan por una arandela de alambre (fig. 326).

Hay que sacar los tapones del anillo de papel. ¿Cómo hay que hacerlo?

Esto parece una cosa muy difícil, pero habiendo resuelto el problema anterior, podrá usted encontrar sin dificultad la solución de éste.

Hay que proceder así: doblar el anillo de papel y sacar la arandela corriéndola hacia el extremo libre; ahora ya no cuesta ningún trabajo sacar los tapones.

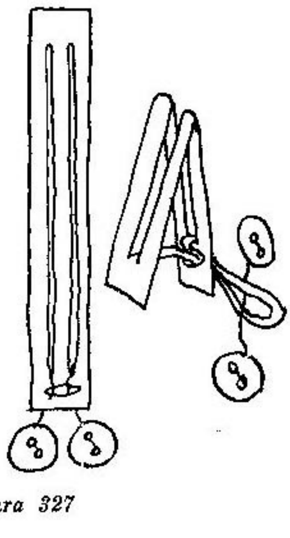


Figura 327

Los dos botones

En una hoja de papel fuerte haga dos ranuras próximas entre sí, como muestra la fig. 327, y debajo de ellas recorte un agujero redondo un poco más ancho que la distancia entre las ranuras. Meta por el agujero y las ranuras un cordoncito y ate después en cada uno de sus extremos un botón lo suficientemente grande para que no quepa por el agujero.

¿Podría usted sacar los botones del papel sin desatar el cordoncito?

El secreto consiste en lo siguiente: hay que doblar la hoja de papel de manera que los extremos superior e inferior de la estrecha tira que hay entre las ranuras queden el uno sobre el otro; después hay que meter esta tira por el agujero redondo y sacar los botones haciendo pasar uno de ellos por el lazo que se forma. Ya está todo. Desdoble la hoja de papel y la tendrá separada de los dos botones.

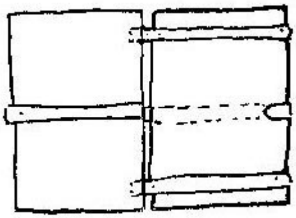


Figura 328

«Un billetero encantado»

Corte de un cartón dos rectángulos del tamaño de un cuadernito de notas, por ejemplo, de 7 cm de longitud y 5 cm de anchura. Consiga tres trozos de cinta (en último caso pueden servir unas tiras de papel). Dos de ellas deben ser un centímetro más largas que la anchura de los rectángulos, y la tercera, un centímetro más larga que el doble de dicha anchura.

Pegue las tres cintas a los rectángulos como indica la fig. 328; al hacer esto, dos de los extremos de las cintas cortas dóblelos, de modo que queden debajo del cartón derecho, y péguelos a él, y los otros dos extremos péguelos a la parte trasera del rectángulo izquierdo. Un extremo de la cinta larga péguelo por la parte de fuera del rectángulo derecho, pase la cinta por debajo de él y luego por encima del rectángulo izquierdo, y pegue el otro extremo debajo de éste.

Los preparativos han terminado y el billetero «encantado» ya está hecho. Con él puede usted hacer un truco extraordinario que puede llamarse «el papel animado» o algo por el estilo. Coja un trozo de papel, en el que su amigo estampe su firma previamente para que no pueda sustituirlo por otro, y colóquelo debajo de las dos cintas. Cierre el billetero y vuélvalo a abrir. Y, ¿qué ocurre? El papel se ha salido de debajo de las dos cintas y, de un modo inesplicable para los profanos, se ha metido debajo de la única cinta que hay en el lado opuesto del billetero.

El secreto está en que, cuando usted cierra el billetero, lo abre después por la parte opuesta.

Esto es muy sencillo, pero resulta difícil de comprender para los que no conocen el truco.

Adivinación de las cerillas

Cuando yo era pequeño me llamó mucho la atención un truco que hizo mi hermano mayor. Estaba yo entretenido en mi habitación, cuando oí en la de al lado unas carcajadas que despertaron mi curiosidad. Me asomé a ver lo que era. Los que se reían eran mi hermano y un amigo suyo, estudiante.

—¡Ven aquí, pequeño! Te vamos a enseñar un truco interesante.

Esto era precisamente lo que yo quería. Mi hermano era un gran animador.

—Mira —dijo mi hermano, poniendo sobre la mesa unas cerillas en desorden—. Pongo aquí de cualquier forma diez cerillas. Ahora me voy de la habitación a la cocina y tú, mientras tanto, piensa en cualquiera de ellas. Cuando la hayas pensado, llámame. Yo miraré las cerillas y te diré inmediatamente en cual de ellas habías pensado.

—Y él dirá que no era ésa —terció el amigo—. No, aquí hace falta establecer un control.

—Bueno, haremos lo siguiente: cuando el pequeño haya pensado la cerilla, que te diga cuál es. Tú serás testigo.

—Eso es otra cosa. Ahora podemos empezar.

Mi hermano salió. Yo me cercioré de que efectivamente se había ido a la cocina y de que por el ojo de la cerradura era imposible ver nada. Después, pensé en una de las cerillas, se la indiqué al estudiante sin llegar a tocarla, y él le gritó a mi hermano:

—¡Listo!

Yo no creía que mi hermano pudiera acertar la cerilla, tanto más cuando yo ni siquiera la había tocado: todas las cerillas seguían en sus puestos lo mismo que antes. ¿Cómo podía acertar?

Pero, ¡acertó! Se acercó a la mesa y señaló inmediatamente la cerilla que yo había pensado. Yo incluso procuré no mirarlo, para que la mirada no me delatara. Sin embargo, mi hermano, sin volver la vista hacia mí, la acertó. ¡Era como para volverse loco!

—¿Quieres que lo hagamos otra vez?

—¡Claro que sí!

Repetimos y ... ¡otra vez acertó! Unas diez veces volvimos a hacer el experimento, y cada una de ellas mi hermano señaló sin titubear la cerilla que yo había pensado.

A mí casi se me saltaron las lágrimas: tales eran las ganas que tenía de saber el secreto. Y, por fin, mis torturadores tuvieron lástima de mí y me dijeron lo que hacían.

¿En qué cree usted que consistía el secreto?

Once cerillas levantadas con una sola

Ponga una docena de cerillas de la forma que representa la fig. 329 y procure después levantar todo este montón cogiendo el extremo saliente de la cerilla que está debajo. Si es suficientemente hábil, lo conseguirá. Como ve, con destreza e ingenio, con una sola cerilla pueden levantarse once.

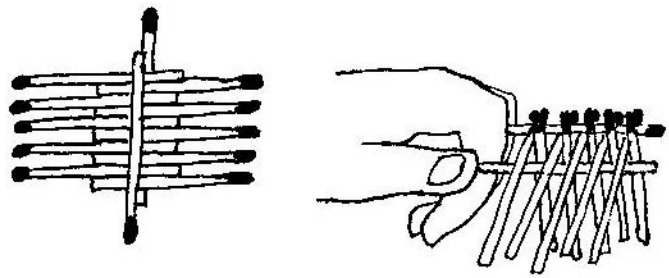


Figura 329

Este experimento puede no salir bien las primeras veces, en este caso no hay más que tener paciencia y repetirlo.

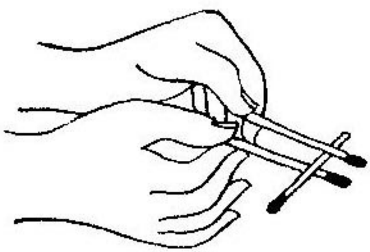


Figura 330

¿Es fácil hacerlo? ¿Qué cree usted?, ¿es fácil hacer lo que se ha representado en la fig. 330, es decir, levantar sobre los extremos de dos cerillas una tercera? Parece que es sencillo, ¿verdad? Pues, haga la prueba y se convencerá de que para hacer esto hace falta gran habilidad y mucha paciencia: la cerilla cambiará de posición al menor movimiento de sus músculos.

En una calle estrecha Dibuje en una hoja de papel una calle estrecha formada por 15 casillas (fig. 331).

Para el juego se necesita además un dado, es decir, un cubo cuyas caras estén marcadas con las cifras del 1 al 6, y dos fichas (también pueden servir dos monedas o botones).

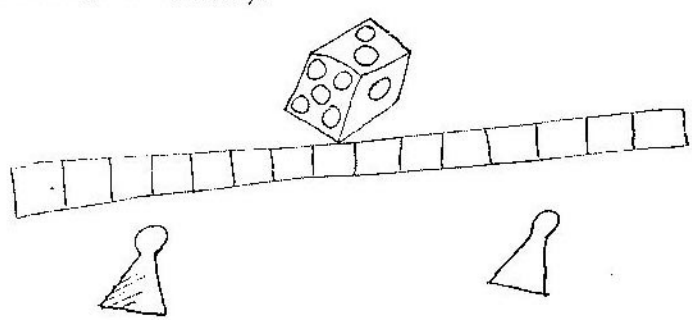


Figura 331

Las reglas del juego no son difíciles. Juegan dos personas. Cada una coloca su ficha en la primera casilla de la calle. Después echan el dado sucesivamente y el que saca más puntos comienza la partida. Cada uno de los jugadores corre su ficha hacia adelante tantas casillas como puntos saca, pero no tiene derecho a pasar la casilla ocupada por su rival. Si saca más puntos que casillas expeditas quedan, el jugador debe retroceder tantas casillas como puntos le sobren.

Esto hace que las fichas se encuentren ya en medio de la calle ya en sus mismos extremos. El juego termina cuando uno de los jugadores se ve obligado a abandonar la calle. Gana el que se queda.

Tracerías estrelladas

No todo el mundo sabe que con sólo unas tijeras, sin necesidad de instrumentos de dibujo, pueden hacerse encajes de papel variados y muy bonitos.

Coja una hoja de papel blanco y dóblela sucesivamente como indican los dibujos A, B, C, D, y E de la fig. 332. Cuando llegue al doblez

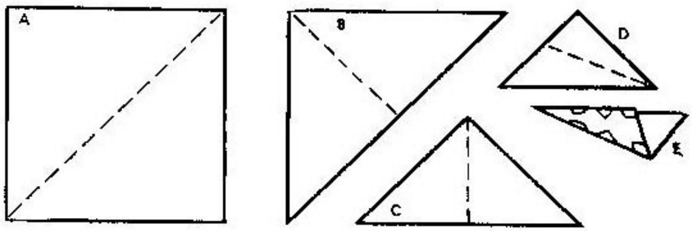


Figura 332

E, corte el papel doblado siguiendo líneas irregulares, como las que se ven representadas en la figura.

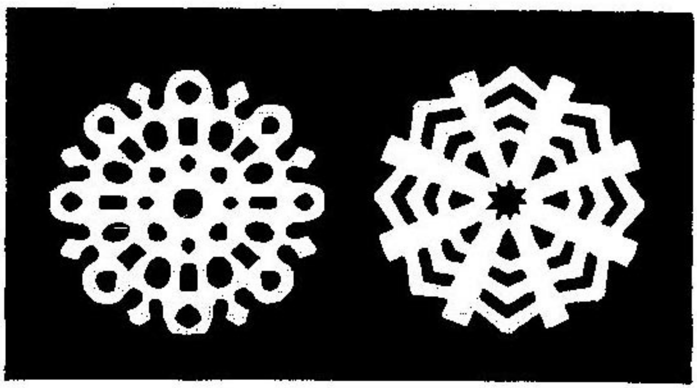


Figura 333

Si luego abre el papel y lo alisa, tendrá un bello arabesco, que resultará aún mejor si lo pega sobre un papel oscuro (fig. 333).

La estrella de cinco puntas ¿Sabe usted cómo se recorta una estrella regular de cinco puntas? Este problema no es sencillo: si no se tiene costumbre resulta una estrella de puntas desiguales.

Hay dos procedimientos de recortar estrellas perfectas y bonitas.

Por el primer procedimiento se empieza trazando una circunferencia en una hoja de papel, valiéndose de un compás o de un platillo pequeño. Después se recorta el círculo, se dobla por la mitad y el semicírculo que resulta se dobla otras cuatro veces, como muestra la fig. 334, *A*.

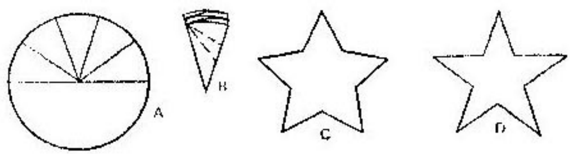


Figura 334

Esta es la parte más difícil del problema: para esto hay que saber medir bien a ojo, porque el semicírculo debe plegarse en cinco partes iguales.

Cuando el círculo ya está plegado, se corta con unas tijeras por la parte ancha, siguiendo una de las líneas de puntos indicados en la fig. 334, *B*. Al abrir después el papel, se obtiene una estrella regular de cinco puntas con los entrantes más o menos profundos (fig. 334, *C* y *D*) según lo oblicuo que se de el corte.

El segundo procedimiento quizá sea más fácil, ya que en él no se parte de un círculo, sino de un cuadrado. Se empieza por coger un papel cuadrado (fig. 335, *A*) y doblarlo por la mitad. Después se hacen tres dobleces más, como se muestra sucesivamente en la fig. 340, *B*, *C* y *D*. En la fig. 340, *D* se indica con puntos la línea de corte.

La estrella que se obtiene al extender el papel se ve en la fig. 335, *E*.

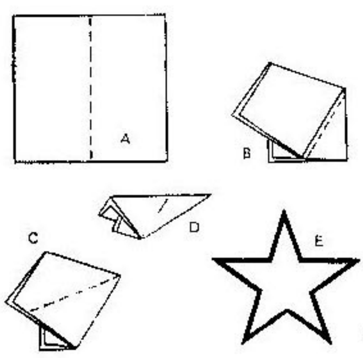


Figura 335

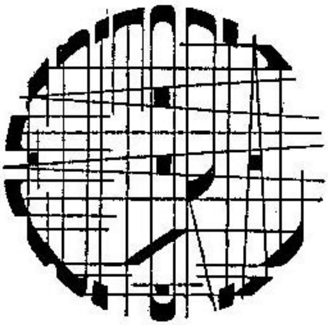


Figura 336

¿Qué hay escrito aquí?

En este círculo (fig. 336) hay algo escrito. Si lo mira de frente no distinguirá nada. Pero si se mira el círculo como es debido, pueden leerse dos palabras. ¿Cuáles son?

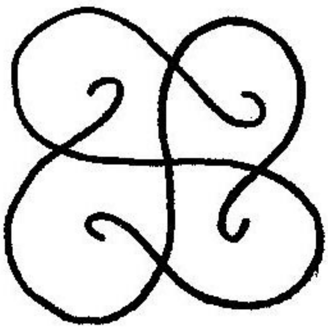


Figura 337

Parece fácil

Fíjese usted bien en el dibujo de la fig. 337 y procure retenerlo en su memoria para poderlo dibujar después sin mirarlo. ¿Lo ha retenido ya?... Pues, empiece a dibujarlo. Primero marcará los cuatro puntos finales a que deben llegar los retorcidos extremos de las líneas. La primera curva la dibuja usted, seguramente, con bastante diligencia. ¡Magnífico! Ahora traza la segunda. Pero en vano, la tozuda línea no sale como es debido. El problema resulta ser mucho más difícil quo parecía a primera vista.

¿En qué pie?

¿En qué pie se apoya el futbolista, en el derecho o en el izquierdo (fig. 338)?
Parece que se apoya en el pie derecho; pero con la misma seguridad puede decirse que sobre el izquierdo.

Figura 338

Por mucho que mire el dibujo, no podrá resolver esta duda. El dibujante borró tan concienzudamente las huellas, que no será posible determinar qué pie es el que tiene levantado el futbolista y sobre cuál se apoya.

El lector me preguntará: «¿Poro usted, sabe en qué pie se apoya?». No, yo tampoco lo sé. Y el dibujante tampoco lo sabe, se le ha olvidado. De modo que esto seguirá siendo un secreto por los siglos de los siglos.

¿Hay muchos peces?

En la fig. 339 puede verse un dibujo rompecabezas. El pescador parece que no ha pescado nada todavía.

Figura 339

Pero, si se fija bien en el dibujo, verá que la pesca ha sido copiosa: ya ha cogido tres peces grandes. ¿Dónde están?

¿Dónde está el domador?

Figura 340

¿Donde está el domador de este tigre (*fig.* 340)? Su imagen está representada en este mismo dibujo. Búsquela.

La puesta del sol

El cuadro que aquí reproducimos (fig. 341) representa una puesta del sol. Fíjese bien y diga: ¿está bien pintado? En este dibujo hay un detalle absurdo. Descúbralo.

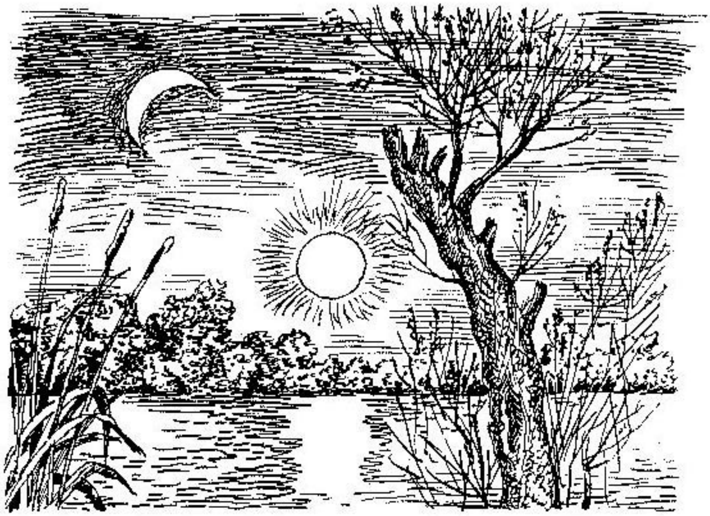


Figura 341

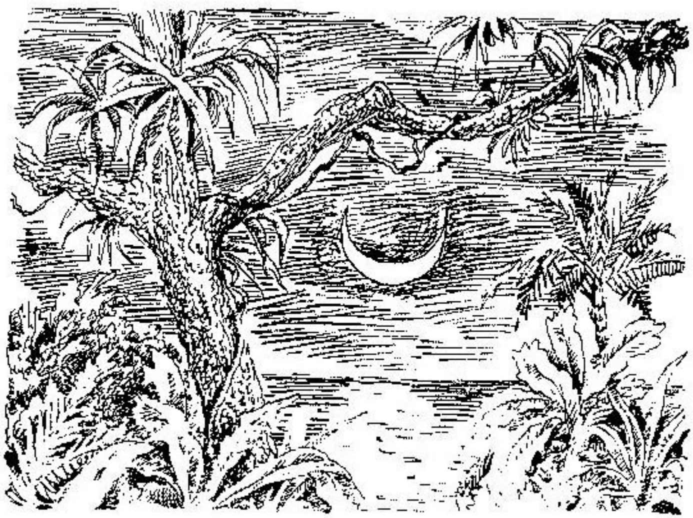


Figura 342

La puesta de la luna

En la fig. 342 ve usted un paisaje tropical con una rara imagen de la luna en el horizonte. ¿Está bien dibujado este cuadro? ¿No hay en él algún detalle absurdo?

27

SOLUCIONES

El palito que desaparece

Para explicar en qué se basa este truco, lo consideraremos primeramente de una forma simplificada. En la fig. 343 puede ver usted una hoja de cartón en la que están representados 13 palitos. Esta hoja está cortada diagonalmente. Si ambas partes de la hoja se desplazan un poco, como muestra el dibujo inferior de la figura, en vez de 13 palitos

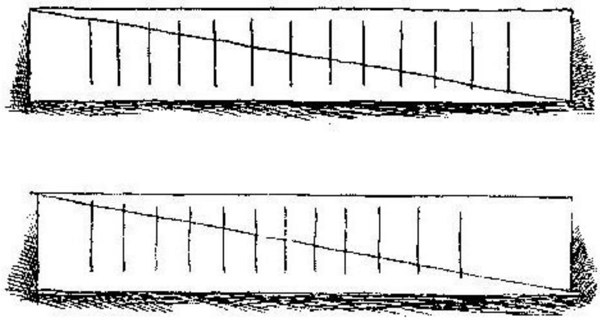


Figura 343

resultan sólo 12: uno de ellos desaparece. En este caso no es difícil comprender adónde fue a parar, porque cada uno de los 12 palitos es un poco más largo que antes, en un trocito igual precisamente a su 12-ava parte. Está claro que, al efectuar el desplazamiento, un palito se dividió en 12 partes, las cuales fueron a alargar a cada uno de los demás. Cuando las partes de la hoja de cartón se desplaza en sentido contrario, el palito desaparecido vuelve a reaparecer, a costa de un acortamiento de los otros.

Los palitos dispuestos circularmente (véase la fig. 322) poseen esta misma peculiaridad: cuando el círculo gira un ángulo pequeño, uno de los 13 palitos desaparece, se distribuye en partes iguales entre los 12 restantes.

Adivinación de las cerillas

El secreto consistía en que me engañaban. El estudiante, que debía controlar la adivinación, era en realidad cómplice de mi hermano y le hacía señas.

Figura 344

¿Cómo? Ese es el quid del truco. Resulta que las cerillas no se encontraban en la mesa de cualquier forma, sino que mi hermano las dispuso de tal modo (fig. 344), que podían dar a entender partes del rostro humano: la cerilla superior representaba el cabello; la que estaba debajo de ella, la frente; después iban los ojos, la nariz, la boca, la barbilla y el cuello, y a los lados, los oídos. Cuando mi hermano entraba en la habitación, lo primero que hacía era mirar al supuesto controlador, y éste se llevaba la mano a la nariz, al cuello, al ojo derecho o al oído izquierdo y, sin que yo me diera cuenta, le daba a entender cuál era la cerilla en que yo había pensado.

¿Qué hay escrito aquí?

Llévese el círculo a los ojos como muestra la fig. 345. Primero podrá leer claramente «editorial», y después, girando el círculo un cuarto de vuelta hacia la derecha, verá la palabra «estatal».

Figura 345

Las letras se han alargado y estrechado mucho y por eso es difícil leerlas de frente. Pero cuando nuestra vista se desliza a lo largo de las letras, su longitud disminuye mientras su anchura sigue siendo la misma. Por esto las letras toman su forma habitual y lo escrito se lee sin dificultad.

¿Hay muchos peces?

Le ayudaré al lector a buscar la pesca. Un pez está cabeza abajo sobre la espalda del pescador. Otro, entre la punta de la caña y el anzuelo. El tercero se encuentra debajo de sus pies.

¿Dónde está el domador?

El ojo del tigre es a la vez ojo del domador, cuya cara mira sin embargo hacia el lado opuesto.

La puesta del sol

El detalle absurdo de este dibujo es que la luna tiene su parte convexa *no* por el lado del sol, si no por el contrario. Pero si la luna recibe la luz del sol, no puede en modo alguno tener vuelta hacia él su parte no iluminada.

«La mayoría de los pintores —dice con respecto a esta cuestión el insigne astrónomo francés Flammarion— aún no saben esto, porque no pasa año sin que en el Salón de París (sala de exposiciones) aparezca un gran número de lunas invertidas».

La puesta de luna

Aunque parezca raro, en la fig. 342 está bien representada la luna. Este es un pasaje tropical, y en los trópicos la posición de la luna se diferencia de la que tiene en las latitudes medias del hemisferio norte. En éstas, la luna creciente tiene los «cuernos a poniente» y la menguante, los «cuernos a levante». Pero en los países tropicales la luna está como colgada *horizontalmente*.

Ocurre esto por lo siguiente. En los países del hemisferio norte el sol y la luna (lo mismo que todos los astros) siguen durante su movimiento diario circunferencias inclinadas; por esto, cuando el sol ilumina a la luna por las noches, se encuentra debajo del horizonte en *dirección oblicua*, alumbra a la luna por la derecha o por la izquierda y los cuernos de ésta miran a la izquierda o a la derecha. En cambio, en el ecuador todos los astros se mueven por arcos verticales; el sol que alumbra a la luna no se halla a su derecha ni a su izquierda, sino *debajo de ella*. La luna es iluminada desde abajo y por eso toma la forma de góndola que reproduce la figura.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otras idiomas extranjeros.

Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», I Rizhski per., 2, 129820 Moscú, I-110, GSP, URSS.