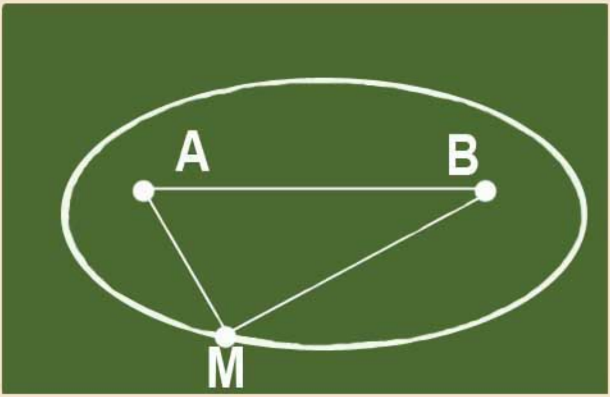
Lecciones populares de matemáticas

RECTAS Y CURVAS

N. B. Vasiliev
V. L. Gutenmajer



Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

Н. Васильев,
В. Гутенмахер

Прямые и кривые

Издательство «Наука»
Москва

N. B. Vasíliev,
V. L. Gutenmájer

Rectas y curvas

Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por
Margarita Gómez

На испанском языке

Impreso en la URSS. 1980

Indice

Prólogo 7
Introducción 11
1. Conjunto de puntos 19
2. Alfabeto 37
3. Combinaciones lógicas 62
4. Máximo y mínimo 81
5. Líneas de nivel 93
6. Curvas de segundo grado 111
7. Rodaduras y trayectorias 143
Respuestas, indicaciones, resoluciones 176
Apéndice I. Método de coordenadas.
(Fórmulas fundamentales) 184
Apéndice II. Algunos datos
de la planimetría escolar 186
Apéndice III. Una docena de tareas. 190

Prólogo

Los principales personajes de este libro son diferentes figuras geométricas, o, como a menudo se denominan, «conjuntos de puntos». Al principio aparecen las figuras mas simples en distintas combinaciones. Estas se mueven, revelan distintas propiedades, se cortan, se unen, forman diferentes familias y cambian su aspecto, hasta llegar a veces a hacerse desconocidas; por otra parte, es interesante ver a viejos conocidos en una situación compleja, rodeados de figuras nuevas, que aparecen al final.

El libro contiene alrededor de doscientos problemas, muchos de los cuales se ofrecen con comentarios o se dan sus soluciones. Los problemas son muy diversos, desde tradicionales, en los que hay que hallar y emplear de alguna forma uno u otro conjunto de puntos, hasta pequeñas investigaciones. que conllevan a importantes conceptos y teorías matemáticas (así son los problemas «sobre el queso», «acerca de la lancha motora» y «en torno al autobús»). Además de teoremas geométricos comunes sobre rectas, circunferencias y triángulos, en el libro se emplean el método de coordenadas, los vectores, las transformaciones geométricas y, sobre todo, el lenguaje del movimiento. Una enumeración de datos geométricos y fórmulas útiles vienen en los apéndices I y II. Algunas sutilezas lógicas, que surgen en las soluciones, se dejan para que el lector reflexione. El signo (?) substituye las palabras «ejercicio», «compruebe» «¿es evidente para usted esta afirmación?», «piense por qué», etc., en dependencia del lugar donde esté. Con el signo □ se señala el comienzo y el final de la solución, y ↓ indica que la solución del problema o la respuesta al mismo se encuentra al final del libro. Los problemas más difíciles de resolver vienen señalados con asterisco.

Los problemas que inician cada parágrafo no son, en general, difíciles, o están analizados detalladamente en el texto. Los demás problemas no es obligatorio resolverlos seguidamente, uno tras otro, al leer el libro, se puede elegir aquellos que a juicio de uno, son los más sugestivos. Muchas cosas, sobre las que se habla en los problemas, es útil comprobarlas en la práctica: hacer un dibujo grande, mejor unas cuantas variantes (situando las figuras en diversas disposiciones). Semejante método experimental, además de que ayuda a adivinar la respuesta, y a formular una hipótesis, sugiere a menudo el camino hacia la demostración matemática. Haciendo dibujos en el margen, los autores se han convencido, de que tras casi cada problema está encerrado un problema auxiliar: trazar unos cuantos puntos o líneas, sobre las que se habla en la tarea. Este problema preliminar resulta con frecuencia más fácil, pero no menos interesante.

En particular estimamos necesario incluir en el libro el apéndice III, el que ayudará a utilizar la obra para un estudio sistemático, dará la posibilidad de descubrir los vínculos, que enlazan problemas de diferentes capítulos, ocultos a primera vista.

N. Vasíliev, V. Gutenmájer

Notaciones

$AB = \rho(A, B)$ — longitud del segmento AB (distancia de A a B).

$\rho(A, l)$ — distancia desde el punto A hasta la recta l.

$\widehat{ABC}$ — magnitud del ángulo ABC (en grados o radianes).

$\overset{\frown}{AB}$ — arco de una circunferencia con extremos en A y B.

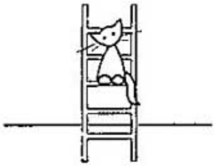
ΔABC — triángulo ABC

S_{ABC} — área del triángulo ABC.

$\{M : f(M) = c\}$— conjunto de todos puntos M que satisfacen la condición $f(M) = c$.

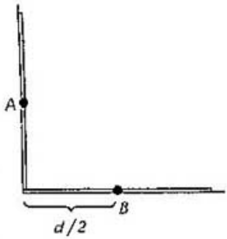
Introducción

Problemas iniciales



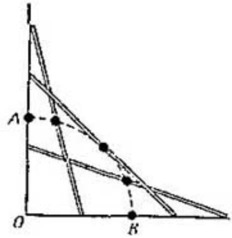
0.1. Una escalera situada sobre el suelo liso y apoyada con un extremo en la pared, se desliza hacia abajo. ¿Por qué línea se mueve un gatito sentado en el centro de la escalera?

Supongamos, que el gatito es flegmático y está sentado tranquilamente. Entonces, tras está formulación convencional, se entrevé el siguiente problema matemático.



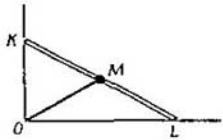
Sea un ángulo recto. Hallar el conjunto de centros de toda clase de segmentos de una longitud dada d, cuyos extremos se hallan sobre los lados del ángulo dado.

Tratemos de adivinar cuál es el conjunto. Claro está, cuando el segmento gira, deslizándose con los extremos por los lados del ángulo, su centro describe cierta línea (esto lo sugiere también la primera formulación del problema). Ante todo, vamos a aclarar dónde están los extremos de esta línea. Corresponden a las posiciones extremas del segmento, que éste ocupa cuando se halla o vertical o horizontalmente. O sea significa, que los extremos de la línea A y B están en los lados del ángulo, a la distancia de $d/2$ respecto a su vértice.

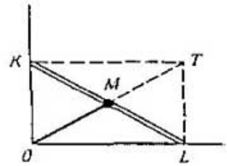


Trace unos cuantos puntos intermedios de esta línea. Si lo hace con suficiente exactitud, verá que todos ellos están a igual distancia del vértice O del ángulo dado.

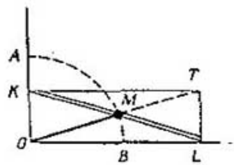
Surge una suposición: la línea buscada es el arco de una circunferencia cuyo radio es $d/2$,y el centro se encuentra en el vértice O. Ahora hace falta **demostrarlo.**



□ Demostremos primero que el centro M del segmento dado KL ($|KL| = d$) siempre está a la distancia de $d/2$ del punto O. Esto se deduce del hecho de que la longitud de la mediana OM del triángulo rectángulo KOL es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa. (En la justedad de esto es fácil convencerse si a partir del triángulo KOL trazamos el rectángulo $KOLT$ y si recordamos que sus diagonales KL y OT son de una misma longitud y se dividen por la mitad en el punto de intersección M).

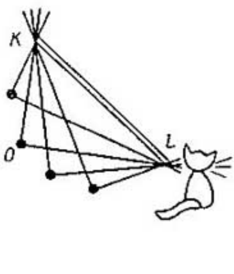


De esta forma, hemos demostrado que el centro del segmento KL siempre está en el arco AB de la circunferencia con el centro O. Este arco es el conjunto de puntos que se busca.



Hablando en rigor, aún tenemos que demostrar que cualquier punto M del arco $\widehat{AB}$ pertenece al conjunto buscado. Esto no resulta difícil de hacer. En realidad, a través de cualquier punto M de nuestro arco podemos trazar un rayo OM, luego trazar sobre él el segmento $|MT| = |OM|$ y bajar desde el punto T las perpendiculares TL y TK a los lados del ángulo. Así obtenemos el segmento necesario KL con el centro en el punto M. □

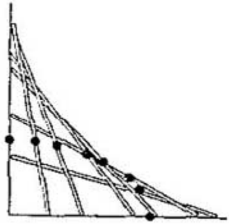
La segunda mitad de la demostración podría parecer innecesaria, pues es claro que el centro del segmento KL describe una «línea continua» con los extremos A y B, o sea, que el punto M pasa por todo el arco AB, y no sólo por alguna de sus partes. Este razonamiento es completamente convincente, pero no es tan fácil darle rigor matemático.



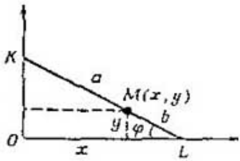
Veamos ahora desde otro punto de vista el movimiento de la escalera en el problema 0.1. Supongamos que el segmento KL («escalera») está fijado y las rectas KO y LO («pared» y «suelo») giran respectivamente alrededor de los puntos K y L de forma que el ángulo entre ellas es siempre recto. El hecho de que la distancia desde el centro del segmento hasta el vértice O del ángulo recto sea siempre la misma, se transforma en un teorema conocido: *si en un plano se dan dos puntos, K y L, entonces el conjunto de* *puntos* O, *para los cuales* $\widehat{KOL} = 90°$, *resulta ser una circunferencia de diámetro* KL. Este teorema, al igual que su generalización, que les ofrecemos en el punto E § 2, servirán reiteradamente para la solución de problemas.

Volvamos a los datos del problema 0.1 y formulemos la pregunta más ampliamente.

0.2. ¿Por qué línea se moverá el gatito, si no está sentado en el centro de la escalera?



En la figura están dibujados unos cuantos puntos de una de estas líneas. Puede verse, que no es una recta, ni una circunferencia, sino una curva nueva para nosotros. Aclarar qué curva es, nos ayudará el método de coordenadas.

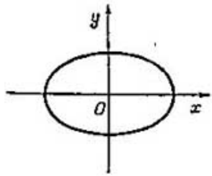


□ Establezcamos un sistema de coordenadas, tomando por ejes Ox y Oy los lados del ángulo. Supongamos que el gatito está sentado en el punto $M(x; y)$, a distancias a y b de los respectivos extremos K y L de la escalera $(a + b = d)$. Hallemos la ecuación que vincula las coordenadas x e y del punto M.

Si el segmento KL está inclinado en un ángulo φ respecto al eje Ox, entonces $y = b \operatorname{sen} \varphi$, y $x = a \cos \varphi$; por esto, con cualquier φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$

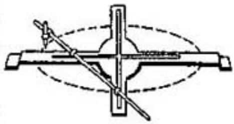
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

El conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen a esta ecuación, es una *elipse*, como veremos en el § 6. De esta manera, el gatito se moverá por una elipse. □



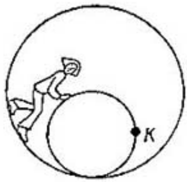
Obsérvese que si $a = b = d/2$, o sea cuando el gatito está sentado como antes, en el centro de la escalera, la ecuación (1) se transforma en la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = (d/2)^2$. Así pues, obtenemos otra solución analítica del problema 0.1.

El resultado del problema 0.2 explica cómo funciona el mecanismo que traza elipses. Este mecanismo, representado en el dibujo, se llama *elipsógrafo* de Leonardo de Vinci.

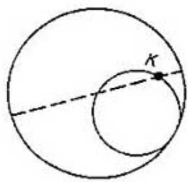


Teorema de Copérnico

0.3. Por el interior de una circunferencia inmóvil rueda tocándola sin deslizar otra circunferencia cuyo radio es dos veces menor que el de la primera. ¿Qué línea describirá el punto K de la circunferencia rodante?

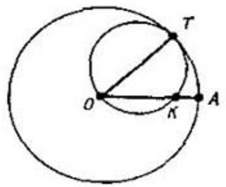


La respuesta a este problema es asombrosamente simple: el punto K se mueve por línea recta, más exactamente, por el diámetro de la circunferencia inmóvil. Este resultado es el que se llama *teorema de Copérnico*.

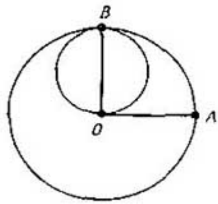


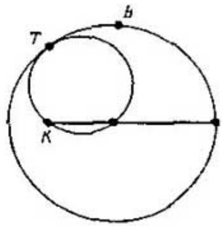
Trate de convencerse en la práctica de la exactitud de este teorema. (Es de suma importancia que la circunferencia interior rueda sin deslizamiento, o sea, que las longitudes de los arcos que giran uno sobre otro sean iguales.) No es difícil demostrarlo, solamente hace falta acordarse del teorema sobre el valor del ángulo inscrito.

□ Supongamos que el punto de la circunferencia rodante, que en el primer momento ocupaba la posición A en la circunferencia inmóvil, ha llegado a la posición K, mientras que T es el punto de contacto de las circunferencias en este momento. Como las longitudes de los arcos $\overset{\frown}{KT}$ y $\overset{\frown}{AT}$ son iguales, y el radio de la circunferencia rodante es dos veces menor, resulta que el valor en grados del arco $\overset{\frown}{KT}$ es dos veces mayor que el del arco $\overset{\frown}{AT}$. De esta manera, si O es el centro de la circunferencia inmóvil, según el teorema del ángulo inscrito (véase § 1 pág. 26) $\widehat{AOT} = \widehat{KOT}$. O sea, que el punto K está sobre el radio AO.

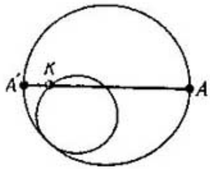


Este razonamiento es válido hasta el momento en que la circunferencia móvil ruede por la cuarta parte de la circunferencia grande (el punto de contacto estará en el punto B de esta última para la cual $\widehat{BOA} = 90°$, y K coincidirá con O). A continuación el movimiento transcurrirá del mismo modo exactamente — todo el cuadro se reflejará simétricamente respecto



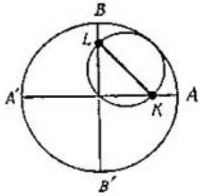


a la recta BO — y, luego de que el punto K llegue al extremo opuesto A' del diámetro AA', la circunferencia rodará por la mitad inferior de la circunferencia inmóvil, y en este tiempo el punto K volverá a A. □

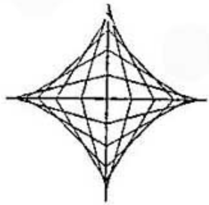


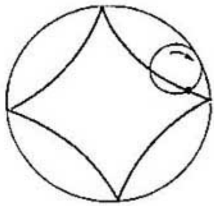
Comparemos los resultados de los problemas 0.1 y 0.3. Su atractivo estriba, por lo visto, en la siguiente circunstancia. En los dos problemas se trata de un movimiento bastante complicado de la figura (en el primero, sobre el movimiento de un segmento; en el segundo, sobre el de una circunferencia). Pero las trayectorias de algunos puntos resultan inesperadamente sencillas. ¡Además de que estos dos problemas se parecen exteriormente, los movimientos estudiados en ellos coinciden!

En efecto, supongamos, que por el interior de una circunferencia de radio d rueda otra circunferencia de radio $d/2$ y que KL es el diámetro de esta última, unido a ella rígidamente. De acuerdo con el teorema de Copérnico, los puntos K y L se trasladan por rectas inmóviles (diámetros de la circunferencia grande, AA' y BB', correspondientemente). De esta forma, el diámetro KL se desliza con sus extremos por dos rectas mutuamente perpendiculares, o sea, que se mueve como el segmento en el problema 0.1.



Otra cuestión interesante, relacionada con el movimiento del segmento





KL: ¿qué conjunto de puntos cubre este segmento, es decir, cuál es la reunión de todas las situaciones posibles del segmento KL durante su movimiento? La curva que limita este conjunto se llama *astroide*. Resulta que puede obtenerse de la forma siguiente: si a una circunferencia de diámetro $d/2$ se le hace rodar dentro de una circunferencia de diámetro $2d$, entonces dibujando la trayectoria de algún punto concreto de la circunferencia rodante se obtendrá una trayectoria que será justamente una astroide. Sobre esta curva y sus familiares más cercanos hablaremos en el § 7, el último de nuestro libro, donde el lector podrá conocer más detalladamente la interconexión de las cuestiones que hemos tratado.

Sin embargo, antes de estudiar estas sutiles cuestiones y curvas, nos detendremos minuciosamente en los problemas relacionados con rectas y circunferencias. Durante los primeros cinco capítulos no aparecerán otras líneas.

I Conjunto de puntos

En el presente parágrafo vamos a examinar e ilustrar, mediante una serie de ejemplos, los planteamientos fundamentales de los problemas que componen el libro, y también el arsenal de conceptos y medios que se utilizan para resolverlos. Concluye este capítulo una gran diversidad de problemas geométricos.

Examinemos primero el término que se encuentra más a menudo en el libro y que sirve como título del capítulo.

«Conjunto de puntos» es un concepto muy general. Puede ser cualquier figura: uno o muchos puntos, una línea o un dominio en la superficie plana.

En muchos problemas de nuestro libro hay que *hallar un conjunto de puntos* que satisfagan a cierta condición. Las respuestas en estos problemas son, por regla general, figuras conocidas del curso de geometría es-

colar (rectas, circunferencias, a veces trozos en los que estas líneas dividen la superficie plana, etc.). Lo principal es adivinar qué figura es. Así, en el problema 0.1 sobre el gato nosotros adivinamos que la respuesta era una circunferencia, y en el problema 0.3 la respuesta resultó ser una recta.

Al resolver algunos problemas hay que realizar toda una investigación, ya que es necesario convencerse de que:

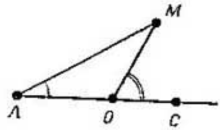
a) *todos los puntos, que satisfacen a dada condición, pertenecen a la figura indicada;*

b) *todos los puntos de la figura satisfacen a dada condición.*

A veces son evidentes las dos afirmaciones, tanto la directa como la inversa; a veces solamente una de ellas; pero en ocasiones es difícil hasta siquiera imaginarse cuál será la respuesta.

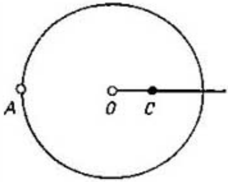
Analicemos unos cuantos problemas típicos.

1.1. El punto O está situado en el segmento AC. Hallar el conjunto de puntos para los cuales $\widehat{MOC} = 2\widehat{MAC}$

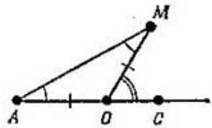


□ *Respuesta.* El lugar geométrico de una circunferencia de radio $|AO|$ con centro en O (sin el punto A) y del rayo OC (sin el punto 0).

Vamos a convencernos de esto. Supongamos que el punto M del conjunto buscado no pertenece a la recta



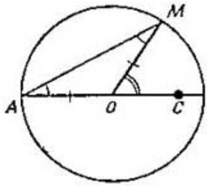
AO. Demostremos que la distancia $|MO|$ desde aquél hasta el punto O es igual a $|AO|$. Tracemos el triángulo OAM. Según el teorema del ángulo exterior del triángulo, la magnitud del ángulo MOC es igual a la suma de las magnitudes de los ángulos interiores A y M, no adyacentes a él, o sea



$$\widehat{OAM} + \widehat{AMO} = \widehat{MOC} = 2\widehat{MAO}.$$

A partir de los datos del problema obtenemos en seguida $\widehat{OAM} = \widehat{AMO}$; por consiguiente, el triángulo AMO es isósceles, o sea, $|OM| = |AO|$.

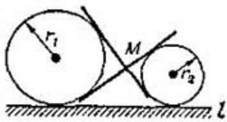
Demostremos, que es justo también lo contrario: cualquier punto M de la circunferencia señalada en la respuesta satisface a la condición. En efecto, el triángulo AMO es isoscéles, sus ángulos A y M son iguales y, por el mismo teorema del ángulo exterior, $\widehat{MOC} = 2MAC$.



Sea que ahora el punto M pertenece al rayo OC, $M \neq 0$. Entonces $\widehat{MOC} = 2\widehat{MAC} = 0$, y la condición se ha cumplido.

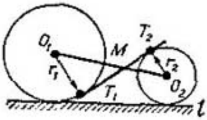
Los demás puntos de la recta AO no pertenecen al conjunto buscado: para ellos, uno de los ángulos MOC y MAC es desarrollado, y el otro es cero (sobre el punto O no se puede decir nada).

1.2. Dos ruedas de radios r_1 y r_2 ($r_1 > r_2$) ruedan por la recta l. Hallar el conjunto de puntos de intersección M de sus tangentes comunes interiores (véase el dibujo).



□ *Respuesta.* Una recta paralela a l.

Observemos que el punto M se encuentra sobre el eje de simetría de estas dos circunferencias, es decir, en la recta O_1O_2, donde O_1 y O_2 son los centros de las mismas. Por esto se puede encontrar el conjunto de puntos de intersección de la recta O_1O_2 y una de las tangentes T_1T_2.

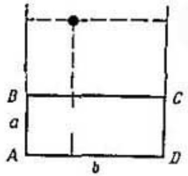


Examinemos una posición arbitraria de las dos circunferencias y tracemos a los puntos de tangencia sus radios O_1T_1 y O_2T_2. Vemos, que el punto M divide el segmento O_1O_2 en la relación r_1/r_2 (los triángulos rectángulos MO_1T_1 y MO_2T_2 son semejantes). Es claro que el conjunto de centros O_1 y el conjunto de centros O_2 son rectas paralelas a la recta l. El conjunto de puntos M, que dividen los segmentos O_1O_2, cuyos extremos se sitúan en dichas rectas, en la misma relación r_1/r_2, también representan en sí una recta paralela a l.

De esta manera, el conjunto de puntos de intersección de las tangentes es una recta paralela a la recta l y se encuentra a la distancia $2r_1r_2/(r_1 + r_2)$ de esta recta (?). □

Para resolver el problema siguiente hay que realizar una investigación más minuciosa. Tendremos que dividir el plano en varias partes, y en cada una realizar un razonamiento particular.

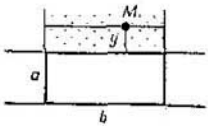
1.3. Dado un rectángulo $ABCD$. Hallar todos los puntos del plano cuya suma de las distancias desde cada uno de ellos hasta las dos rectas AB y CD sea igual a la suma de las distancias hasta las rectas BC y AD.



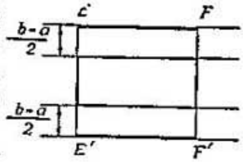
□ Designemos las longitudes de los lados del triángulo por a y b. Examinemos primero un rectángulo distinto al cuadrado: supongamos que $a < b$.

Los puntos que están dentro del rectángulo, y también entre las prolongaciones de los lados mayores, no satisfacen a los requisitos del problema, ya que una suma de las distancias es igual a a, y la otra no es menor de b.

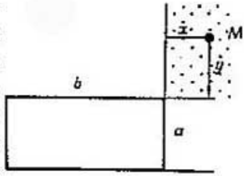
Ahora supongamos que el punto M está entre las prolongaciones de los lados menores del rectángulo. Designemos por y su distancia hasta el lado mayor más cercano del rectángulo; entonces la distancia hasta el lado opuesto el igual a $y + a$. Para que el punto satisfaga las exigencias del problema, es necesario que se cumpla la igualdad $y + (y + a) = b$, de donde $y = (b - a)/2$. De esta forma, los

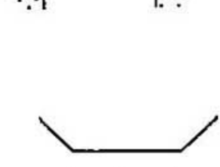


puntos que se encuentran entre las prolongaciones de los lados menores del rectángulo, a las condiciones satisfacen solamente aquéllos que estén a la distancia de $(b - a)/2$ del lado mayor más cercano del rectángulo. El conjunto de puntos en este dominio es la reunión de dos segmentos, EF y $E'F'$.



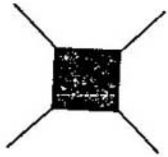
Por último, examinemos cualquier punto M, que esté en el ángulo formado por las prolongaciones de los dos lados vecinos BC y DC del rectángulo. Designemos respectivamente por x e y, las distancias desde el punto M hasta las rectas CD y BC. Entonces el requisito del problema se puede apuntar así: $x + (x + b) = y + (y + a)$, o $y = x + (b - a)/2$. Observemos que las cifras x e y pueden ser consideradas como las coordenadas del punto M en el sistema de coordenadas con ejes Cx y Cy. En este sistema de coordenadas, la ecuación $y = x + (b - a)/2$ determina una recta paralela a la bisectriz del ángulo xCy. Así pues, hemos demostrado que entre los puntos que están en el ángulo examinado, al planteamiento del problema satisfacen solamente aquellos puntos que están situados sobre la recta $y = x + (b - a)/2$.



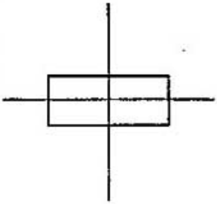


Los mismos razonamientos se pueden exponer también para los otros tres ángulos. De esta forma, hemos estudiado todos los puntos del plano.

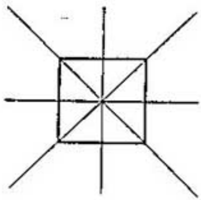
El conjunto de todos los puntos que satisfacen los requisitos planteados viene mostrado en la figura.



Todavía hay que examinar el caso cuando el rectángulo es un cuadrado, o sea, $a = b$, y aclarar en qué se convertirá el conjunto de puntos buscado. Es fácil ver que será un cuadrado y las prolongaciones de sus diagonales (?). □



Consignaremos que, *por cuanto el rectángulo tiene dos ejes de simetría, y los pares de sus lados simétricos figuran en los datos del problema equitativamente, el conjunto requerido de puntos deberá tener esos dos mismos ejes de simetría*; por eso, al resolver el problema era suficiente estudiar solamente un cuarto del plano en que éste está dividido por los ejes de simetría, y no los puntos del plano entero.

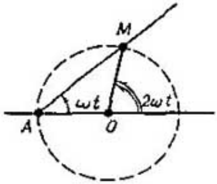


En el caso del cuadrado, sus ejes de simetría son también los ejes de simetría del conjunto buscado.

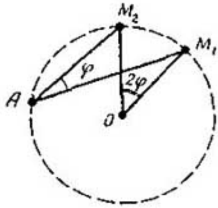
Familia de líneas y el movimiento. A la par con el cojunto de *puntos* vamos a examinar el conjunto de líneas, o, como se dice más a menudo, *la familia de líneas.*

Si en un problema geométrico tratamos con una familia de circunferencias o de rectas, *es cómodo imaginarse ésta como una circunferencia o una recta en movimiento.* En el lenguaje del movimiento hemos formulado y resuelto ya los primeros problemas; dicho lenguaje lo emplearemos reiteradamente también más adelante, pues mediante él se puede explicar con más claridad muchos problemas y teoremas.

Los ejemplos están a la vista. Volvamos al problema 1.1. Su resultado puede representarse así.



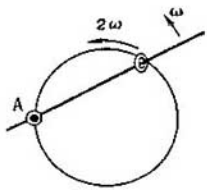
Supongamos que la recta AM gira alrededor del punto A con una velocidad angular constante ω (o sea, gira en un ángulo igual a ω por unidad de tiempo) mientras la recta OM gira alrededor del punto O, con una velocidad angular de 2ω; a propósito sea dicho, en el momento inicial las dos rectas coincidían con la recta AO. Entonces el punto de intersección M de las rectas se mueve por una circunferencia cuyo centro es O.



De aquí podemos deducir *el conocido teorema sobre el ángulo inscrito.* Si la recta AM durante un tiempo t gira de la posición AM_1 a la posición AM_2 en un ángulo ωt, la recta OM gira en un ángulo $2\omega t$; dicho de otro modo, *la magnitud del ángulo inscrito* M_1AM_2 *es igual a la mitad de la magnitud angular del correspondiente ángulo central* M_1OM_2.

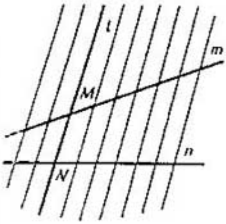
Este teorema se puede formular de manera más palpable, por ejemplo así.

Teorema sobre el anillo en la circunferencia. En una circunferencia de alambre se ha insertado un anillo pequeño. Alrededor del punto A de la circunferencia gira una varilla que pasa por este anillo. *Si la varilla gira con una velocidad angular uniforme* ω, *entonces el anillo correrá por la circunferencia con una velocidad angular uniforme de* 2ω.

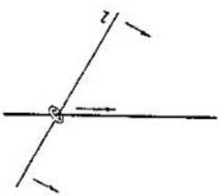


Expondremos otro ejemplo más de un teorema que se puede formular en el lenguaje del movimiento.

Supongamos que la recta l posee en el plano *un movimiento de avance uniforme*, o sea de tal forma que su dirección no cambie, y el punto M de su intersección con una recta inmóvil m se mueva uniformemente por esta última. Entonces *el punto de intersección N de la recta l con cualquier otra recta inmóvil n se moverá también uniformemente*. De hecho, esto es otra formulación del teorema geométrico acerca de que *las líneas paralellas trazan en los lados del ángulo segmentos proporcionales*. Por analogía con el teorema sobre el anillo en la circunferencia, le vamos a dar a este hecho el siguiente aspecto.

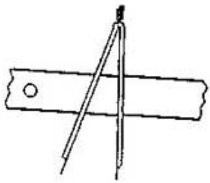


Teorema sobre el anillo en una recta. En dos rectas, en el punto de intersección se ha insertado un anillo pequeño. *Si una de ellas está inmóvil y la otra realiza un movimiento de avance* (paralelamente a sí misma) *y uniforme, el anillo realiza también un movimiento de manera uniforme.*



En adelante, más de una vez nos vamos a encontrar con diferentes familias de rectas. En los casos cuando se trate de una familia de rectas que pasen por un punto o que sean paralelas a una dirección, puede ser útil uno u otro teorema sobre el anillo.

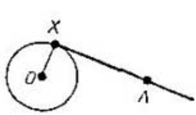
Problemas de construcción. En los problemas clásicos de construcción («trazar un triángulo», «marcar un segmento», «trazar una secante», «hallar un punto»), por lo general se tiene en cuenta que el trazamiento hay que realizarlo mediante «el círculo y la regla». Con otras palabras, por cualesquiera dos puntos podemos trazar una recta y trazar una circunferencia de dado radio, y también hallar los puntos de intersección de las líneas trazadas.



Para resolver problemas de este tipo *es cómodo representar las circunferencias y rectas como conjuntos de puntos que satisfacen a cierta condición.*

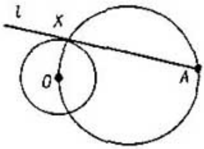
1.4. Sean dados una circunferencia y un punto A fuera de ella. Trazar por el punto A una recta l, tangente a dada circunferencia.

□ Si X es el punto de tangencia de la recta l con la circunferencia, el ángulo OXA es recto. El conjunto de puntos M, para los cuales el ángulo OMA es recto, constituye, como sabemos, una circunferencia cuyo diámetro es OA.

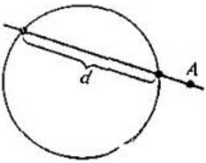


De esta manera, la recta l se puede trazar así. Dibujemos una circunferencia que tenga de diámetro el segmento OA.

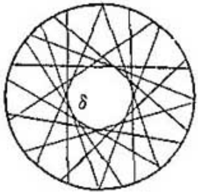
Hallemos el punto X de intersección de esta circunferencia con la dada (tales puntos son dos, simétricos respecto a la recta OA). Después, por los puntos A y X tracemos la recta l. □



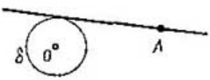
1.5. Sean dados el punto A y una circunferencia. Trazar por el punto A una recta de tal forma que la cuerda cortada por la circunferencia en la recta tenga la longitud d.



□ Estudiemos el conjunto de todas las rectas, en las que la circunferencia corta una cuerda de la longitud d. Estas rectas son tangentes a una determinada circunferencia δ, cuyo centro coincide con el centro O de la circunferencia dada, mientras su radio es igual a $\sqrt{r^2 - d^2/4}$, donde r es el radio de esta última (?). Así pues, el problema se reduce al anterior: trazar una tangente por el punto A a una circunferencia δ con el centro O.



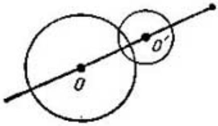
El problema tiene dos soluciones, si el punto A está fuera de la circunferencia δ; una, si se encuentra sobre la circunferencia δ; y ninguna, si está dentro de la circunferencia δ. □



A menudo el conjunto buscado se puede obtener a partir de otro conocido aplicando una transformación simple: *mediante un viraje*, *simetría*, *traslado paralelo* o *homotecia*. (Este método es sobre todo útil en los problemas de construcción). Recordemos como se traza la imagen de una recta o de una circunferencia al emplear los métodos de traslación o transformación de semejanza.

Para una recta es suficiente marcar dos puntos A' y B' — imágenes de ciertos puntos A y B — y trazar por los puntos A' y B' la recta.

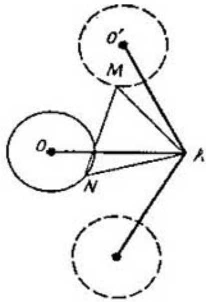
Para una circunferencia de radio r es suficiente marcar un punto O' — imagen de su centro O— y trazar una circunferencia con el centro O' del mismo radio (si se trata del traslado) o de radio kr (siendo k el coeficiente de semejanza).



Mostremos ejemplos típicos de problemas en los que se emplean las transformaciones (en este caso, traslados).

1.6. Sean dados un punto A y una circunferencia. Hallar el conjunto de vértices M de triángulos equiláteros ANM, el vértice N de los cuales está sobre dada circunferencia.

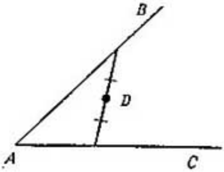
☐ Supongamos que N es algún punto de dada circunferencia. Si viramos el segmento AN en 60° con respecto al punto A, el punto N caerá en el vértice M del triángulo equilátero ANM. De aquí se deduce en seguida que, si viramos la circunferencia, como una figura rígida con respecto al punto A, en 60°, cada punto N de ella se trasladará al correspondiente a él tercer vértice M del triángulo equilátero ANM.



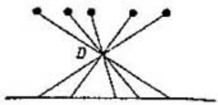
De este modo, todos los puntos M están en una de las dos circunferencias, que se obtienen de la dada virándola en 60° en sentido horario o antihorario respecto al punto A.

De la misma manera se puede mostrar que cada punto M de la reunión de las dos circunferencias obtenidas es el vértice de cierto triángulo equilátero ANM. □

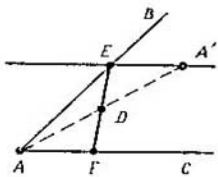
1.7a. Sean dados un ángulo y, dentro de él, un punto D. Trazar un segmento los extremos del cual estén sobre los lados de dado ángulo y su centro sea el punto D.



□ Examinemos el conjunto de segmentos, un extremo de los cuales esté en el lado AC del ángulo dado (con el vértice A), y el centro se encuentre en el punto dado D. Los otros extremos de estos segmentos pertenecen, evidentemente, a un rayo simétrico al lado AC del ángulo con relación al punto D.



La construcción se reduce a lo siguiente: marcamos el punto A' simétrico al punto A con relación a D; a través de A' trazamos una recta paralela a la recta AC, hasta que se cruce en el punto E con la recta AB, y obtenemos el segmento necesario EF, con el centro en el punto D. El

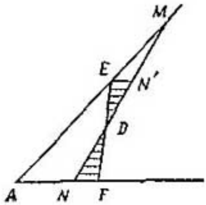


problema tiene siempre una sola solución.

Es curioso que esta construcción resuelve el siguiente problema.

1.7b. Dados un ángulo y, dentro de él, un punto D. Trazar por el punto D una recta que corte del ángulo dado un triángulo cuya superficie sea la menor posible.

☐ Demostremos que la recta buscada resulta ser justamente la recta EF que hemos trazado en el problema anterior, o sea, aquélla para la cual el segmento, que se corta por los lados del ángulo, se divide por el punto D en partes iguales.



Tracemos por el punto D la recta MN, diferente a EF, y demostremos que:

$$S_{MAN} > S_{EAF}. \qquad (1)$$

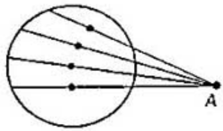
Puede considerarse que el punto M sobre el lado AB está más lejos del vértice del ángulo A, es decir que E (el caso cuando M está más cerca de A que E se estudia por analogía; los lados AB y AC cambian de papel). Es suficiente convencerse de que

$$S_{EDM} > S_{FDN}, \qquad (2)$$

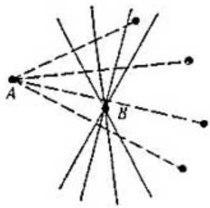
pues de aquí en seguida se deduce la desigualdad (1). Pero la desigualdad (2) es evidente, ya que el triángulo EDM comprende por entero el triángulo EDN', simétrico a FDN respecto al punto D.

Diversidad de problemas.

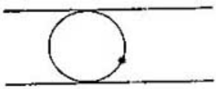
1.8. Se dan dos puntos A y B. Hallar el conjunto de bases de las perpendiculares bajadas desde el punto A a cualesquiera rectas que pasan por el punto B.



1.9. En un plano se dan una circunferencia y un punto A. Determinar el conjunto de puntos medios de las cuerdas que se cortan por dada circunferencia en las rectas que pasan por el punto A. (Naturalmente deberán estudiarse todos los casos: cuando el punto A está dentro, fuera y sobre la circunferencia).

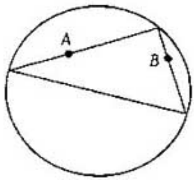


1.10. Sean dados dos puntos A y B. Hallar el conjunto de puntos, cada uno de los cuales es simétrico al punto A con relación a cierta recta que pase por el punto B.

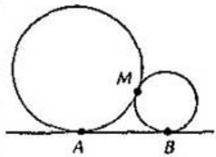


1.11. Trazar una circunferencia tangente a dos rectas paralelas dadas y que pase por un punto dado, situado entre las mismas.

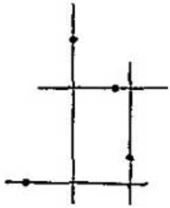
1.12. Trazar una circunferencia de radio r, tangente a dada recta y a dada circunferencia.



1.13. Están dados una circunferencia y dos puntos, A y B, dentro de ella. Hay que inscribir en la circunferencia un triángulo rectángulo de modo que sus catetos pasen correspondientemente por estos puntos. ↓



1.14. Sean dos puntos A y B. Dos circunferencias tienen tangencia a la recta AB; una, en el punto A; la otra, en el punto B, y son tangentes mutuamente en el punto M. Hallar el conjunto de los puntos M. ↓



1.15. En un plano se han dado cuatro puntos. Hallar el conjunto de centros de los rectángulos formados por cuatro rectas que pasan correspondientemente por cada punto. ↓

1.16. Los lados OP y OQ del rectángulo $OPMQ$ están sobre los lados del ángulo recto dado. Hallar el conjunto de puntos M a condición de que:

a) la longitud de la diagonal PQ,

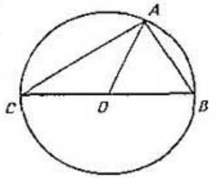
b) la suma de los lados OP y OQ,

c) la suma de los cuadrados de los lados OP y OQ sea igual a una magnitud dada d.

1.17. Hallar el conjunto de puntos, la suma de los cuadrados de las distancias desde los cuales hasta los cuatro lados del rectángulo dado (o hasta sus prolongaciones) sea igual al cuadrado de su diagonal.

1.18. A y B son dos ciudades. Hallar el conjunto de puntos M que tengan la siguiente propiedad: si se va en línea recta de M a B, la distancia de M a A irá aumentando continuamente.

1.19. Supongamos, que sobre el triángulo ABC se sabe que la longitud de la mediana AO:



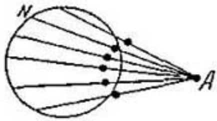
a) es igual a la mitad de la longitud del lado BC,

b) es mayor de la mitad de la longitud del lado BC,

c) es menor de la mitad de la longitud del lado BC.

Demostrar que el ángulo A es correspondientemente: a) recto, b) agudo, c) obtuso.

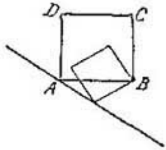
1.20. En un plano se han dado una circunferencia y el punto A. Hallar el conjunto de puntos medios del segmento AN, donde N es un punto cualquiera de la circunferencia.



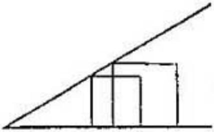
1.21. Sean dados un círculo y un punto fuera de él. Trazar por este punto una secante de forma que la longitud de los segmentos de la secante fuera y dentro del círculo sean iguales.

1.22. Por el punto de intersección de dos circunferencias dadas trazar una recta en la que estas circunferencias corten cuerdas de igual longitud.

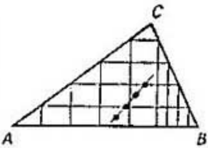
1.23. Hallar el conjunto de vértices C de los cuadrados $ABCD$, en los cuales el vértice A esté en dada recta y el vértice B, en dado punto.



1.24. a) ¿Dónde puede hallarse el cuarto vértice del cuadrado, si dos de sus vértices están sobre un lado de dado ángulo agudo, y el tercero, sobre el otro? Examine las diversas variantes de situaciones del cuadrado.

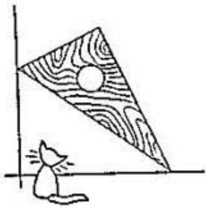


b) Dado un triángulo acutángulo ABC. Inscribir en él un cuadrado, en el cual dos vértices se hallan en lado AB.

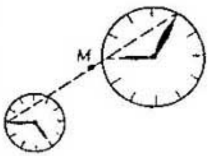


1.25*. ¿Qué línea describe el punto medio de un segmento entre dos transeuntes que marchan uniformemente por dos caminos rectos? ↓

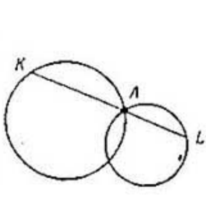
1.26*. En dado triángulo ABC se inscriben todo género de rectángulos en los cuales un lado esté sobre la recta AB. Hallar el conjunto de centros de estos rectángulos.



1.27. Un triángulo rectángulo de madera se traslada por el plano de forma que los vértices de sus ángulos se muevan por los lados de dado ángulo recto. ¿Cómo se moverá el vértice del ángulo recto de dicho triángulo?



1.28*. Sobre una mesa hay dos relojes planos. Uno y otro andan con exactitud. ¿Por qué línea se traslada el centro M del segmento que une los extremos de sus agujas minuteras? ↓



1.29*. Por el punto A de intersección de dos circunferencias dadas, se traza una recta arbitraria que corta estas circunferencias de nuevo en los puntos K y L, correspondientemente. Hallar el conjunto de centros de los segmentos KL. ↓

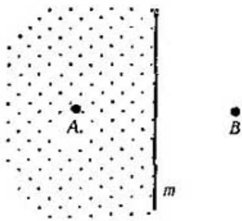
2 Alfabeto

Este capítulo es un formulario de teoremas sobre los conjuntos de puntos que satisfacen a unas u otras condiciones geométricas. Poco a poco vamos a hacer una lista entera de teoremas y condiciones que puedan emplearse en las soluciones de problemas de distinto tipo.

Se puede trazar un paralelo entre los problemas geométricos: hallar un conjunto de puntos, y los problemas corrientes de álgebra: resolver una ecuación (sistema de ecuaciones, desigualdad). En rigor, resolver una ecuación o una desigualdad significa hallar un conjunto de números, que satisfagan a cierta condición. Lo mismo que en el curso escolar de álgebra las ecuaciones más diversas (por ejemplo, trigonométricas, logarítmicas) generalmente se reducen a ecuaciones lineales o cuadradas, a menudo hasta las tareas geométricas más difíciles resultan ser solamente una nueva propiedad de la recta o de la circunferencia.

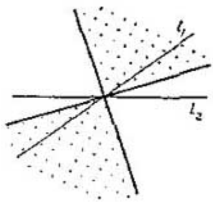
La analogía entre los problemas de álgebra y los problemas donde hay que hallar un conjunto de puntos, no es solamente externa. Mediante el método de coordenadas se puede reducir el uno al otro. Empleando este método, veremos que enunciados geométricos, que a primera vista parecen diferentes, se abarcan por teoremas comunes.

Empezaremos nuestro alfabeto con las afirmaciones más sencillas.



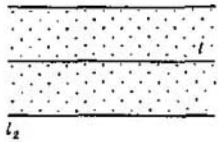
A. *El conjunto de puntos equidistantes de dos puntos dados A y B, es una recta perpendicular al segmento AB y pasa por su punto medio.*

Esta recta m la denominaremos *mediatriz* del segmento AB. Ella divide el plano en dos semiplanos. Los puntos de un semiplano están más cerca de A que de B; y los del otro, al contrario. Los puntos A y B son simétricos con relación a m.



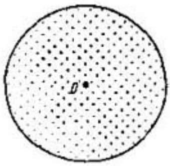
B. *El conjunto de puntos equidistantes de dos líneas dadas cruzadas l_1 y l_2, son dos rectas recíprocamente perpendiculares que dividen por la mitad los ángulos formados por las rectas l_1 y l_2.*

Estas rectas sirven como ejes de simetría de la figura formada por las rectas l_1 y l_2. Este conjunto — *«la cruz de bisectrices»* — divide el plano en cuatro partes. En el dibujo están señalados dos ángulos rectos y el conjunto de puntos situados más cerca de la recta l_1, que de la recta l_2.



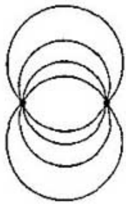
C. *El conjunto de puntos cuya distancia hasta una recta dada l es igual al número dado h ($h > 0$), es un par de rectas l_1 y l_2 paralelas a la recta l y situadas a diferentes lados de ésta.*

La franja entre las rectas l_1 y l_2 es el conjunto de puntos que distan menos de h respecto a la recta l.



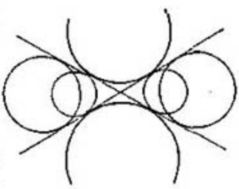
D. *El conjunto de puntos cuyas distancias hasta el punto dado O es igual a cierto número r ($r > 0$) es una circunferencia de radio r con el centro O.* (Esto es la definición de la circunferencia).

Una circunferencia divide el plano en dos partes: interior y exterior. Para los puntos situados en el círculo, la distancia hasta el centro es menor de r, mientras que para los puntos situados fuera del mismo, mayor de r.



Unas cuantas modificaciones pequeñas de las condiciones **A**, **B**, **C**, **D** ofrecemos en forma de los cuatro problemas siguientes.

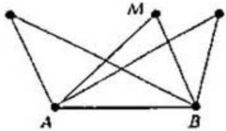
2.1. Hallar el conjunto de centros de circunferencias que pasan por dos puntos dados.



2.2. Hallar el conjunto de centros de circunferencias tangentes a dos rectas dadas que se intersecan.

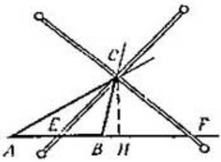
2.3. Hallar el conjunto de centros de circunferencias de radio r, tangentes a dada recta.

2.4. Dados dos puntos A y B. Hallar el conjunto de puntos M, para los cuales la superficie S_{AMB} del triángulo AMB es igual a cierto número $c > 0$.



Ilustremos la afirmación B con un ejemplo de mayor contenido, demostremos el teorema de las bisectrices del triángulo.

2.5. Supongamos que «la cruz de bisectrices» de AC y BC corta la recta AB en los puntos E y F. Demostrar que



$$\frac{|AE|}{|EB|}=\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{|AC|}{|CB|}.$$

□ Sea que M es uno de los puntos E y F. Haremos notar que

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{S_{ACM}}{S_{MCB}}.$$

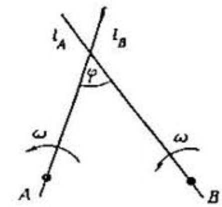
(Los triángulos ACM y MCB tienen la altura común CH).

La relación de las superficies se puede expresar de otra forma; puesto que el punto M pertenece a la cruz de bisectrices, entonces será equidistante de las rectas AC y BC, o sea,

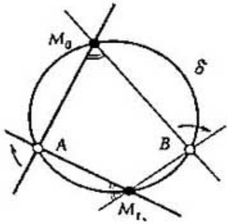
$$\frac{S_{ACM}}{S_{MCB}}=\frac{|AC|}{|CB|}. \quad □$$

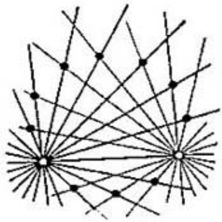
La circunferencia y un par de arcos. El siguiente punto del alfabeto es otra variante más del teorema del ángulo inscrito y del anillo en la circunferencia, que hemos analizado en el parágrafo 1.

E°. *Dos rectas que se cortan l_A y l_B, giran en el plano alrededor de sus dos puntos A y B a una velocidad angular igual a* ω (ni que decir tiene que la magnitud del ángulo entre ellas se mantiene constante). La trayectoria del punto de intersección de estas rectas es una circunferencia.



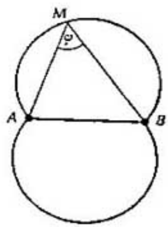
□ Tracemos una circunferencia δ, que pase por tres puntos: A, B y una posición más, M_0, punto de intersección de las rectas l_A y l_B. Según el teorema «sobre el anillo en la circunferencia» del parágrafo 1, el punto de intersección de la recta l_A y la circunferencia δ se mueve por ésta uniformemente a la velocidad angular de 2ω. De la misma manera se mueve el punto de intersección l_B con la circunferencia δ. Puesto que en cierto momento (situación M_0) ellas coinciden, también coincidirán en cualquier otro momento.





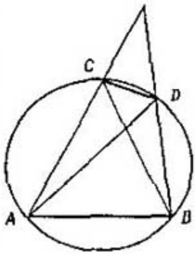
Ofrecemos otra variante más del teorema E, sin utilizar el lenguaje del movimiento.

E. *El conjunto de puntos, desde los cuales el segmento AB se ve con un ángulo del valor dado* φ (o sea, el conjunto de puntos, para los cuales $\widehat{AMB} = \varphi$) es un par de arcos con los extremos en los puntos A y B, simétricos con relación a la recta AB.



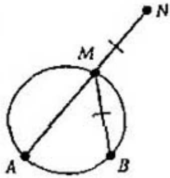
El dominio limitado por estos arcos, es el conjunto de puntos M, para los cuales $\widehat{AMB} > \varphi$.

Observemos, que si $\varphi = 90°$, el conjunto E será una circunferencia con el diámetro AB. Ya hablamos de esto después de analizar el problema **0.1**.

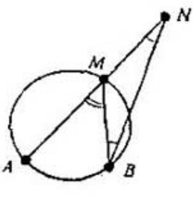


2.6. La cuerda AB de dada circunferencia está sujeta, y la CD se traslada, sin cambiar su longitud. ¿Acorde con qué línea se mueve el punto de intersección de las rectas: a) AD y BC; b) AC y BD?

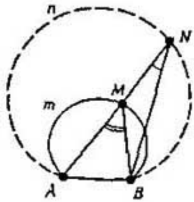
2.7. Sean en un plano dos puntos A y B. Hallar el conjunto de vértices M y N de los paralelogramos $AMBN$ para los cuales se da el ángulo $MAN = \varphi$.



2.8a. Sean una circunferencia y dos puntos A y B en ella. Supongamos que M es un punto arbitrario en la misma. En la prolongación del segmento AM, desde el punto M se marca un segmento MN cuya longitud sea igual al segmento BM. Hallar el conjunto de puntos N.

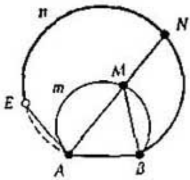


☐ Sea N cierto punto trazado como se indica en el problema; entonces $|BM| = |NM|$ y $\widehat{NBM} = \widehat{MNB}$. Pero como $\widehat{AMB} = \widehat{MBN} + \widehat{MNB}$, entonces $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}/2$. El valor del ángulo AMB para todos los puntos M que están



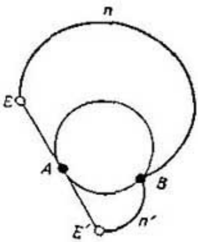
en uno de los arcos $\widehat{AB}$, es el mismo (véase E): $\widehat{AMB} = \varphi$. Por esto $\widehat{ANB} = \varphi/2$, o sea, todos estos puntos resultan en el arco $\widehat{AnB}$, que contiene el ángulo $\varphi/2$. (El centro del arco coincide con el centro del arco $\widehat{AmB}$ de dada circunferencia (?)).

¿Nos satisfacen todos los puntos del arco $\widehat{AnB}$? No, no todos.



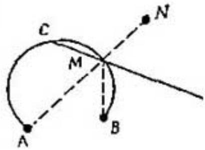
Observemos que cuando el punto M recorre el arco AnB, desde el punto B hasta el punto A, la cuerda AM gira alrededor del punto A, desde la recta AB hasta la tangente a esta circunferencia en el punto A. Por esto al conjunto buscado le pertenece sólo una parte del arco AnB, a saber, el arco EnB (E es el punto donde el arco AnB se corta por la tangente hacia el punto A).

En este caso puede considerarse que el punto B pertenece a nuestro conjunto (se obtiene para la posición del punto M cuando éste coincide con B y «la longitud del segmento MB es igual a 0»). El punto E, hablando en rigor, no pertenece a nuestro conjunto; cuando el punto M coincide con el punto A, no tiene sentido hablar sobre la dirección de la recta AM.



Por analogía se estudian los puntos que están del lado contrario de la recta AB. Así pues, el conjunto de puntos buscado consta de dos arcos: $\widehat{EnB}$ y $\widehat{E'n'B}$. □

Se puede resolver el problema 2.8a de otra forma, si se observa que los puntos N y B son simétricos con respecto a la recta CM, donde C es el centro del arco $\overset{\frown}{AmB}$. De esta observación resulta que el conjunto de puntos N se reduce al conjunto de puntos del problema 1.10 para los puntos A y C.



Plantearemos un problema análogo al 2.8a, en el cual al lector se le propone hacer una investigación semejante.

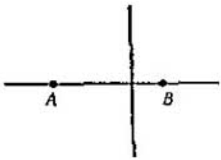
2.8b. Las condiciones quedan las mismas que para el problema 2.8a, a excepción de que el segmento MN se sitúa en dirección opuesta: en el rayo MA.

Cuadrados de las distancias. Examinemos dos puntos A y B en el plano y un número arbitrario C.

F. *El conjunto de puntos M, para los cuales*

$$|AM|^2 - |BM|^2 = c,$$

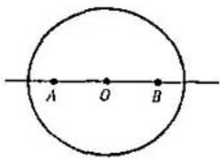
es una recta perpendicular al segmento AB. (En particular, siendo $c = 0$ resulta la mediatriz A.)



G. Supongamos que $|AB| = 2a$. *El conjunto de puntos M, para los cuales*

$$|AM|^2 + |BM|^2 = c$$

a) siendo $c > 2a^2$ *es una circunferencia con centro en* el medio O del segmento AB y radio $r = \sqrt{(c - 2a^2)/2}$,

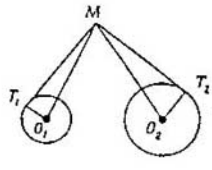


b) en caso de $c = 2a^2$, *el punto O,*

c) cuando $c < 2a^2$, *un conjunto vacío.*

Las afirmaciones F y G no son difíciles de demostrar con ayuda del teorema de Pitágoras o mediante el método de coordenadas (?). No vamos a ofrecer demostraciones por separado para cada una de ellas, sino que las deduciremos como corolarios de un teorema más común. Pero antes las ilustraremos con unos ejemplos.

2.9. Hallar el conjunto de puntos para los cuales las tangentes trazadas a dos circunferencias dadas, tienen una misma longitud.

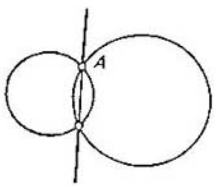


□ Sean O_1 y O_2 los centros de dichas circunferencias; r_1 y r_2, sus radios ($r_2 \geqslant r_1$); MT_1 y MT_2, las tangentes trazadas desde el punto M hacia las mismas. Aplicando el teorema de Pitágoras, apuntemos la condición $|MT_1|^2 = |MT_2|^2$ así:

$$|MO_1|^2 - |O_1T_1|^2 = |MO_2|^2 - |O_2T_2|^2,$$

o

$$|MO_2|^2 - |MO_1|^2 = r_2^2 - r_1^2.$$



De acuerdo con la afirmación F, el conjunto de puntos M se encontrará sobre una recta, perpendicular a la recta O_1O_2.

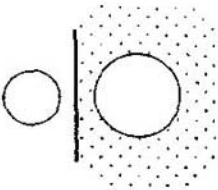
Si las circunferencias se cortan, esta recta pasará por los puntos de intersección. En realidad, si A es uno de dichos puntos, entonces

$$|O_2A|^2 - |O_1A|^2 = r_2^2 - r_1^2$$

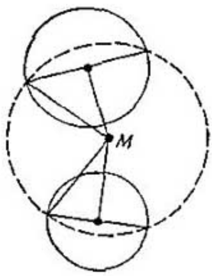
y, por consiguiente, el punto A se halla en esta recta. El conjunto de los puntos buscados en este caso viene representado en el dibujo; resulta ser el lugar geométrico de dos rayos.

Si las circunferencias son concéntricas (y además $r_2 > r_1$), el conjunto de puntos buscado resulta vacío. Si las circunferencias coinciden, todos los puntos están fuera del círculo. Si las circunferencias no se intersecan ni son concéntricas, la respuesta será una recta. □

La recta sobre la que se habla en el problema 2.9, se llama *eje radical de dos circunferencias*. Sean dadas dos circunferencias que no se cortan. Entonces su eje radical divide el complemento a estos dos círculos en dos partes: el conjunto de puntos M, para los cuales $|MT_1| > |MT_2|$, y el conjunto de puntos M, para los cuales $|MT_1| < |MT_2|$.



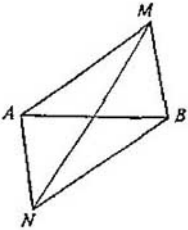
2.10. Hallar el conjunto de centros de circunferencias que cortan cada una de las dos circunferencias dadas en puntos diametralmente opuestos.



2.11. a) La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados. Demostrarlo.

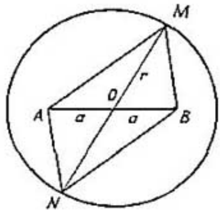
b) Si en un cuadrilátero convexo $AMBN$ las diagonales son perpendiculares mutuamente, entonces $|AM|^2 +$

$+ |BN^2| = |AN|^2 + |BM|^2$; Demostrarlo. ↓



□ a) Supongamos que los vértices A y B del paralelogramo $AMBN$ distan a de su centro O, los vértices M y N, distan r del mismo y que $c = 2(a^2 + r^2)$. Como $|OM| = \sqrt{(c - 2a^2)/2}$, entonces, de acuerdo con **G**, la suma de los cuadrados de las distancias desde el punto M hasta los puntos A y B es igual a c. Igualmente $|AN|^2 + |BN|^2 = c$; por eso :

$$|AM|^2 + |BM|^2 + AN|^2 + |BN|^2 = 2c = 4(a^2 + r^2) = |MN|^2 + |AB|^2. \ \square$$



Ahora ofrecemos el teorema común que incluye los puntos **F**, **G**, **A** y **D** del alfabeto.

Teorema sobre los cuadrados de las distancias. *El conjunto de puntos M para los que se cumple la condición*

$$\lambda_1|MA_1|^2 + \lambda_2|MA_2|^2 + \ldots + \lambda_n|MA_n|^2 = \mu, \quad (1)$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son los puntos dados y *$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu$, los números dados, representa en sí una de las más simples figuras geométricas siguientes:*

1°, *si* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \neq 0$, *puede ser una circunferencia, un punto o un conjunto vacío;*

2°, *si* $\lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_n = 0$, *puede ser una recta, todo el plano o un conjunto vacío.*

El teorema lo demostraremos con ayuda del método de coordenadas.

□ El cuadrado de las distancias entre los puntos $M\ (x;\ y)$ y $A_k(x_k;\ y_k)$ se calcula empleando la fórmula

$$|MA|^2=(x-x_k)^2+(y-y_k)^2=$$
$$=x^2+y^2-2x_kx-2y_ky+x_k^2+y_k^2.$$

Examinemos la expresión:

$$\lambda_1|MA_1|^2+\lambda_2|MA_2|^2+\dots$$
$$\dots+\lambda_n|MA_n|^2.$$

Para anotarla en coordenadas hay que sumar unas cuantas expresiones de tipo

$$\lambda\ (x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2).$$

Es claro que al final la condición (1) se escribirá en forma de la ecuación

$$dx^2+dy^2+ax+by+c=0, \qquad (2)$$

donde $d=\lambda_1+\lambda_2+\ \dots\ +\lambda_n$.

Demostremos ahora que la ecuación (2) corresponde a una de las figuras enumeradas anteriormente.

1°. Si $d\neq 0$, podemos transformar (2) de la siguiente forma:

$$x^2+y^2+\frac{a}{d}\,x+\frac{b}{d}\,y+\frac{c}{d}=0,$$

$$\left(x+\frac{a}{2d}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2d}\right)^2=$$
$$=\frac{b^2+a^2-4dc}{4d^2}. \qquad (2')$$

Vemos que la ecuación es:

una circunferencia con el centro en el punto $C(-a/2d; -b/2d)$, si la parte derecha de (2′) es positiva;

un punto $C(-a/2d; -b/2d)$, si la parte derecha es igual a cero;

un conjunto vacío, si la parte derecha es negativa.

2°. Si $d = 0$, la ecuación (2) toma la forma

$$ax + by + c = 0.$$

Esto será:

una recta, si $a^2 + b^2 \neq 0$,

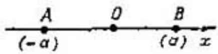
todo el plano, si $a = b = c = 0$,

un conjunto vacío, si $a = b = 0$, $c \neq 0$. □

En un problema concreto, por regla general, es fácil aclarar, cuál de estos casos tiene lugar. Volvamos de nuevo a los puntos F y G de nuestro alfabeto, que quedaron sin demostrar.

Demostración de F. La condición $|MA|^2 - |MB|^2 = c$ es un caso particular de (1), donde $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, de donde $d = 0$, y, por consiguiente, determina una recta, o un plano, o bien un conjunto vacío.

Como la ecuación $(x + a)^2 - (x - a)^2 = c$ tiene siempre la única solución $x = c/4a$, en la recta AB existe solamente un punto del conjunto. Por consiguiente, el conjunto buscado es una recta. Desde el punto de vista de la simetría es evidente que ésta será perpendicular a la recta AB. □

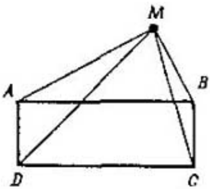


Demostración de G. La condición $|MA|^2 + |MB|^2 = c$ es un caso particular de (1), aquí $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $d \neq 0$ y, por tanto, el conjunto buscado resulta o un conjunto vacío, o un punto, o bien una circunferencia. Como los puntos A y B figuran en la condición simétricamente, el centro de la circunferencia se encuentra en el centro del segmento AB.

Para saber cuándo el conjunto buscado es una circunferencia y determinar su radio, busquemos en la recta AB los puntos, que satisfagan a la condición $|AM|^2 + |BM|^2 = c$. Para esto observemos que la ecuación $(x - a)^2 + (x + a)^2 = c$ tiene solución, cuando $c \geqslant 2a^2$; además

$$|x| = r = \sqrt{(c - 2a^2)/2}. \quad \square$$

2.12. Hallar el conjunto de puntos, la suma de los cuadrados de las distancias desde los cuales hasta los dos vértices opuestos de un rectángulo dado es igual a la suma de los cuadrados de las distancias hasta sus dos otros vértices.



$\square$ *Respuesta*. Todo el plano. Demostrémoslo. Supongamos que $ABCD$ es el rectángulo dado; entonces estamos buscando el conjunto de puntos M, para los cuales

$$|MA|^2 + |MC|^2 - |MB|^2 - |MD|^2 = 0.$$

Pongamos en la condición (1) que $n = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. De acuerdo con el teorema, el conjunto buscado es una recta, o un conjunto vacío, o bien todo el plano.

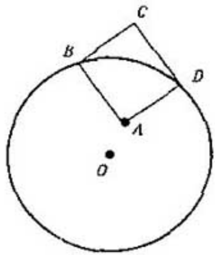
Señalemos que los vértices A, B, C y D del mismo rectángulo satisfacen la condición. Por ejemplo, para el punto A es correcta la igualdad:

$$|AA|^2 + |AC|^2 - |AB|^2 - |AD|^2 = 0$$ (teorema de Pitágoras).

Así pues, el conjunto buscado no es vacío ni es una recta. Por lo tanto resulta que el conjunto es todo el plano. □

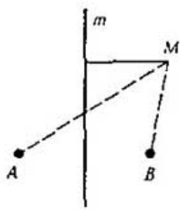
Del resultado del problema 2.12 se deduce que si $ABCD$ es un rectángulo, para cualquier punto M del plano se cumple la igualdad

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2.$$

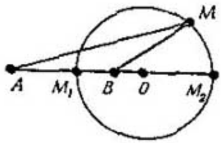


Basándose en este hecho, resuelva el siguiente problema.

2.13. Sean una circunferencia y un punto A dentro de ésta. Hallar el conjunto de los cuartos vértices C de los rectángulos $ABCD$, los vértices B y D de los cuales pertenecen a la circunferencia dada.



2.14. Demostrar que $|MA|^2 - |MB|^2 = 2\,|AB|\,\rho(M, m)$, donde m es la mediatriz del segmento AB, además $|MA| > |MB|$.



Añadamos a nuestro alfabeto un punto más, que a menudo se emplea en geometría y es también corolario del teorema de los cuadrados de distancias.

H. *El conjunto de puntos M, para los cuales*

$$|MA| / |MB| = k, \quad k > 0, \ k \neq 1,$$

es una circunferencia, cuyo diámetro pertenece a la recta AB.

Este conjunto de puntos, la relación de cuyas distancias hasta dos puntos dados A y B es constante, se llama *circunferencia de Apolonio.*

□ Copiemos la condición H en forma de

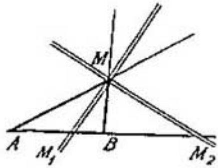
$$|MA|^2 - k^2 |MB|^2 = 0.$$

Esta condición es un caso particular del requisito (1), donde $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda = -k^2$ y por consiguiente si $1 - k^2 \neq 0$, el conjunto buscado es o una circunferencia, o un punto, o bien un conjunto vacío. Puesto que la ecuación

$$(x + a)^2 = k^2 (x - a)^2$$

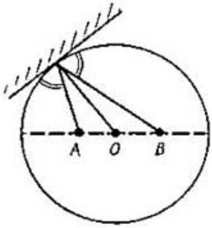
cuando $k^2 \neq 1$ siempre tiene dos soluciones, en la recta AB existen dos puntos M_1 y M_2 de este conjunto, por lo tanto, el conjunto buscado es una circunferencia. Como la condición es simétrica con relación a la recta AB, el diámetro de esta circunferencia es el segmento M_1M_2. □

Observemos, a propósito sea dicho, que si M es un punto de la circunferencia de Apolonio, entonces la cruz de las bisectrices de las rectas AM y MB corta la recta AB en los puntos M_1 y M_2. (Esto emana del teorema sobre la cruz de las bisectrices 2.5, ya que $\left|\frac{AM_1}{BM_1}\right| = \left|\frac{AM_2}{BM_2}\right| = \left|\frac{AM}{BM}\right|$).

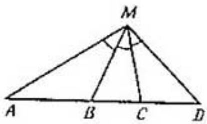


Este razonamiento se emplea en el siguiente problema.

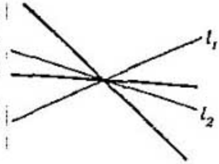
2.15. En el diámetro de una mesa redonda de billar estaban situadas dos bolas A y B. La bola B fue impulsada de forma que, al retroceder del borde de la mesa, dio en la bola A. Restablecer la trayectoria de la bola B, si el golpe no fue dirigido por el diámetro.



2.16. Sobre dada recta se hallan los puntos A, B, C, D. Trazar en el plano un punto desde el cual los segmentos AB, BC, CD se vean con un mismo ángulo.

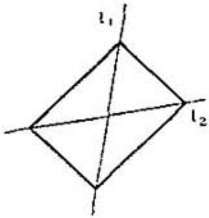


Distancias hasta las rectas. Hasta ahora en el alfabeto se han utilizado fundamentalmente unas u otras propiedades que caracterizan la circunferencia. En los dos puntos siguientes del alfabeto solamente van a figurar rectas (que se encuentran por pares).



Examinemos dos rectas l_1 y l_2 que se cortan en el plano y una cifra positiva c.

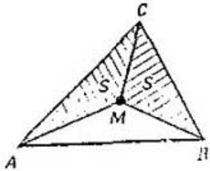
I. *El conjunto de puntos M, el cociente* $\rho'(M, l_1)/\rho(M, l_2)$ de cuyas distancias hasta las rectas l_1 y l_2 es igual a c, es un par de rectas que pasan por el punto de intersección de dichas rectas l_1 y l_2.



J. *El conjunto de puntos M, la suma* $\rho(M, l_1) + \rho(M, l_2)$ *de cuyas distancias hasta las rectas* l_1 y l_2 *es igual a c, es el contorno de un rectángulo cuyas diagonales se encuentran sobre estas mismas.*

Antes de demostrar estos teoremas, los ilustraremos con dos ejemplos.

2.17. Dado el triángulo ABC. Hallar el conjunto de puntos M, para los cuales $S_{AMC} = S_{BMC}$.

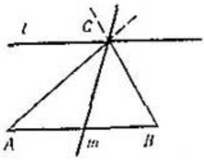


☐ Sean h_b y h_a las distancias desde el punto M hasta las rectas AC y BC, correspondientemente. Entonces

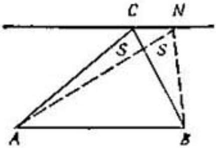
$$S_{AMC} = \frac{|AC| \cdot h_b}{2}, \quad S_{BMC} = \frac{|BC| \cdot h_a}{2},$$

por consiguiente, $h_a/h_b = |AC|/|BC|$.

O sea, que el conjunto buscado M resulta ser el conjunto I para las rectas AC y BC mientras $c = |AC|/|BC|$. De esta manera, representa en sí un par de rectas que pasan por el punto C. Demostremos que la recta m contiene la mediana del triángulo, y la otra, l, es paralela a AB. Para



esto es suficiente tomar un punto en cada una de estas rectas y comprobar que para ellas se cumple la condición.



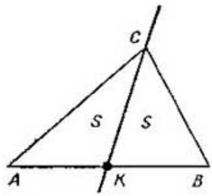
Designemos por h la longitud de la altura del triángulo trazada desde el vértice C. Sea N un punto de la recta l; entonces

$$S_{ACN}=\frac{|CN|\cdot h}{2} \quad \text{y} \quad S_{BCN}=\frac{|CN|\cdot h}{2},$$

o sea, $S_{ACN}=S_{BCN}$ y la recta l pertenece al conjunto buscado.

Supongamos que K es el centro del lado AB, o sea que $|AK|=|KB|$.

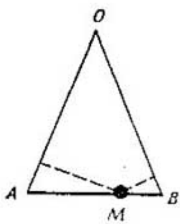
Entonces $S_{AKC}=|AK|\cdot h/2=$ $=|BK|\cdot h/2=S_{BKC}$, y por lo tanto toda la recta m pertenece al conjunto buscado. □



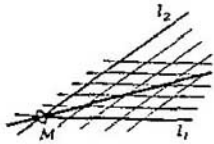
Por analogía con la cruz de las bisectrices, el par de rectas m y l puede ser denominado «cruz de las medianas» del vértice C del triángulo.

La afirmación J, en realidad, se puede reducir al siguiente problema así.

2.18. Está dado un triángulo isósceles AOB. Demostrar que la suma de las distancias desde el punto M de su base AB hasta las rectas AO y BO es igual a la longitud de la altura bajada al lado lateral.



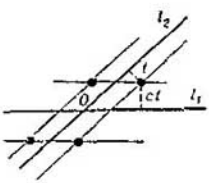
No vamos a aducir demostraciones geométricas de los puntos I y J, aunque no son difíciles, sino que vamos a presentarlos con ayuda del lenguaje del movimiento (al igual que se ha hecho anteriormente en el punto E «circunferencia y un par de arcos»). Formulemos primero el lema, que sintetiza el teorema del anillo en la recta (pág. 27).



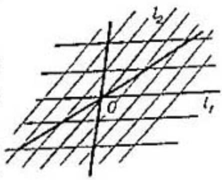
Lema. *Sobre dos rectas l_1 y l_2 en el punto de su intersección se ha insertado un anillo pequeño M. Si cada recta realiza un movimiento de traslación uniforme, el anillo M realiza un movimiento uniforme por cierta recta.*

□ Esta recta se puede trazar señalando dos posiciones M_1 y M_2 del anillo. Los puntos de intersección de las rectas en movimiento con la recta inmóvil M_1M_2 se mueven uniformemente. Como en dos momentos de tiempo (cuando el anillo M pasa por los puntos M_1 y M_2) dichos puntos coinciden el uno con el otro, coincidirán todo el tiempo. □

Demostración de I. Para cierta cifra positiva t, el conjunto de puntos que se encuentran a la distancia t de l_2 y ct de l_1 son los cuatro vértices de un paralelogramo cuyo centro es el punto de intersección O de las rectas l_1 y l_2. En realidad, el conjunto de puntos que están a la distancia t de l_2 es un par de rectas paralelas (véase C), y el conjunto de puntos, que está a la distancia ct de l_2, también es un par de rectas paralelas, y sus puntos de intersección son los cuatro vértices del paralelogramo. Estos cuatro pun-



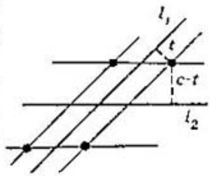
tos satisfacen a la condición I, ya que $ct/t = c$.

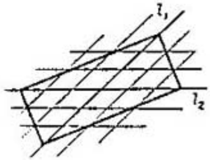


Cambiando el número t desde 0 hasta la infinidad, obtendremos todos los puntos del conjunto buscado.

Si tomamos t como «tiempo», vemos que las cuatro rectas trazadas se mueven uniformemente (manteniéndose paralelas a l_1 y l_2). Según el lema los puntos de intersección (los anillos) avanzan por rectas que pasan por el punto O. □

Demostración de J. Tracemos dos rectas a la distancia t de l_1, y otras dos, a la distancia ct de l_2 $(0 \leqslant t \leqslant c)$. Los cuatro puntos de intersección de estas rectas pertenecen al conjunto buscado. Cuando el «tiempo» t varía desde 0 hasta c, las rectas se mueven uniformemente y cada uno de sus puntos de intersección, de acuerdo con el lema, pasa cierto segmento. Los extremos de estos segmentos, correspondientes a $t = 0$ y $t = c$, están sobre las rectas l_1, l_2 y son los vértices del rectángulo. □

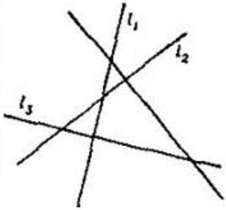




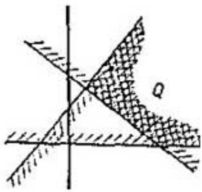
Ofreceremos el teorema general, que incluye los puntos B, C, I, J del alfabeto. Examinemos *el conjunto de puntos M, para los cuales*:

$$\lambda_1\rho(M, l_1) + \lambda_2\rho(m, l_2) + \dots$$
$$\dots + \lambda_n\rho(M, l_n) = \mu; \qquad (3)$$

aquí $l_1, l_2, \dots, l_n$ son las rectas dadas, y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu$— los números dados.

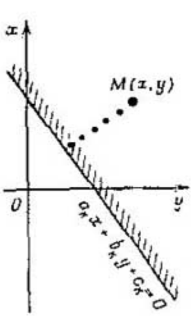


Es difícil describir por completo este conjunto para todo el plano. Sin embargo, como veremos ahora, en cada pedazo, en que las rectas l_1, l_2, ..., l_n dividen el plano, el conjunto (3) es, por regla general, una parte de cierta recta. Designemos una de estas partes por Q.



Teorema sobre la distancia hasta las rectas. *El conjunto de puntos que satisfacen a la condición* (3) *y pertenecen a Q, es o* 1) *la intersección de la parte Q con cierta recta (un rayo, un segmento, incluso una recta entera), o* 2) *todo el pedazo Q, o* 3) *un conjunto vacío.*

Habiendo comprendido cual es el conjunto que se obtiene en cada parte (como en el problema 1.3) hallaremos todo el conjunto incógnito. La demostración del problema la realizaremos con ayuda del método de coordenadas.



☐ Supongamos, que queremos hallar el conjunto de puntos en una de las partes Q del plano, dividido por las rectas l_1, l_2, . . ., l_n. Esta parte del plano Q se puede representar como la intersección de n semiplanos con las rectas colindantes l_1, l_2, ..., l_n.

La ecuación $a_k x + b_k y + c_k = 0$ de la recta l_k se puede elegir de tal manera que en el semiplano necesario $a_k x + b_k y + c_k \geqslant 0$ y $a_k^2 + b_k^2 = 1$ (?), entonces para los puntos $M(x; y)$ de este semiplano $\rho(M, l_k) = a_k x + b_k y + c_k$.

Para anotar el valor de $\lambda_1 \rho(M, l_1) + \lambda_2 \rho(M, l_2) + \ldots + \lambda_n \rho(M, l_n)$ mediante coordenadas, hay que sumar varias

expresiones lineales tipo $\lambda_k a_k x + \lambda_k b_k y + \lambda_k c_k$. Como resultado la condición (3) se apunta como una ecuación lineal
$ax + by + c = 0$.

Siendo $a^2 + b^2 \neq 0$, es una recta. Siendo $a = b = 0$, es un plano o un conjunto vacío. □

Otra demostración de este teorema puede obtenerse reduciéndola con ayuda del problema 2.14 al teorema de los cuadrados de distancias ⟨?⟩.

2.19. a) Sea dado un triángulo regular ABC. Hallar el conjunto de puntos para los cuales la suma de las distancias hasta las rectas AB, BC, y CA son iguales al número dado $\mu > 0$. ↓

b) Sea dado un rectángulo $ABCD$. Hallar el conjunto de puntos para los cuales la suma de las distancias hasta las rectas AB, BC, CD, DA es igual al número dado μ.

2.20*. a) Tres rectas l_0, l_1, l_2 se cortan en un mismo punto, siendo el ángulo entre cada dos de ellas igual a 60°. Hallar el conjunto de puntos para los cuales
$\rho(M, l_0) = \rho(M, l_1) + \rho(M, l_2)$.

b) Sea dado un triángulo equilátero ABC. Hallar el conjunto de puntos M, para los cuales la distancia hasta una de las rectas AB, BC, CA sea igual a la semisuma de las distancias hasta las otras dos. ↓

Todo el alfabeto. El conjunto de puntos, que satisfacen cierta condición se representa de la siguiente manera: dentro de las llaves se escribe inicialmente la letra empleada para designar «un punto arbitrario» del conjunto (en nuestro caso, por regla general, la letra M, pero puede ser cualquier otra); después se ponen dos puntos, y detrás se escribe la condición, con la ayuda de la cual se destaca el conjunto de puntos que nos hace falta.

Apuntemos ahora brevemente todos los conjuntos del alfabeto:

A. $\{M : |MA| = |MB|\}$.
B. $\{M : \rho(M, l_1) = \rho(M, l_2)\}$.
C. $\{M : \rho(M, l) = h\}$.
D. $\{M : |MO| = r\}$.
E. $\{M : A\widehat{MB} = \varphi\}$.
F. $\{M : |AM|^2 - |MB|^2 = c\}$.
G. $\{M : |AM|^2 + |MB|^2 = c\}$.
H. $\{M : |AM|/|MB| = k\}$.
I. $\{M : \rho(M, l_1)/\rho(M, l_2) = k\}$.
J. $\{M : \rho(M, l_1) + \rho(M, l_2) = c\}$.

Recordemos que todos los puntos del alfabeto, aparte de E, los hemos dividido en dos grupos
A, D, F, G, H y B, C, I, J.

El primer grupo son casos particulares del conjunto

$$\{M : \lambda_1 |MA_1|^2 + \lambda_2 |MA_2|^2 + \ldots + \lambda_n |MA_n|^2 = \mu\},$$

y el segundo, casos particulares del conjunto

$$\{M : \lambda_1 + \rho(M, l_1) + \lambda_2\rho(M, l_2) + \ldots + \lambda_n\rho(M, l_n) = \mu\}.$$

En el § 6 vamos a complementar el alfabeto con cuatro letras más

K. $\{M : |MA| + |MB| = c\}$.

L. $\{M : ||MA| - |MB|| = c\}$.

M. $\{M : |MA| = \rho(M, l)\}$.

N. $\{M : |MA|/\rho(M, l) = c\}$.

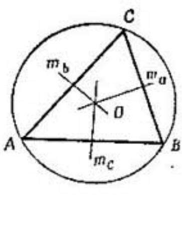
Estos conjuntos son elipses, hipérbolas, parábolas, las cuales se agrupan también, naturalmente, en un grupo: curvas de segundo orden.

3 Combinaciones lógicas

Aquí hay reunidos diversos problemas, en los que toman parte, como regla, combinaciones de varias estipulaciones geométricas. Resolviendo estos problemas, aprenderemos a clasificar los puntos, y a imaginarnos los vínculos entre las condiciones como operaciones que se realizan respecto a los conjuntos.

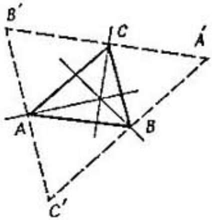
Por un punto. En los primeros problemas trataremos un tema tradicional de la geometría; mediante manipulaciones simples con los conjuntos del alfabeto demostraremos el teorema sobre los puntos notables del triángulo. Toda la lógica de los razonamientos se reducirá, por lo común, al empleo del carácter transitivo de la igualdad: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

3.1. En el triángulo ABC las mediatrices de los lados (perpendiculares en sus puntos medios) se intersecan en cierto punto (*centro de la circunferencia circunscrita al triángulo*).



□ Las mediatrices m_c y m_a de los lados AB y BC se cortan, evidentemente, en cierto punto O. Como el punto O pertenece a la mediatriz m_c, de acuerdo con A (§ 2) tiene lugar la igualdad $|OA| = |OB|$. Así mismo, por cuanto O pertenece a la mediatriz m_a resulta que $|OB| = |OC|$. Consiguientemente, $|OA| = |OC|$ por lo tanto, el punto O pertenece a la mediatriz m_b del lado AC.

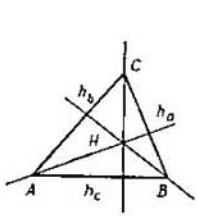
Como resultado hemos demostrado que las tres mediatrices se encuentran en el punto O. □



3.2. Las tres alturas del triángulo ABC se intersecan en un punto. (Este punto se llama *ortocentro del triángulo.*)

□ Tracemos por cada vértice del triángulo una recta paralela al lado opuesto a dicho vértice. Estas rectas forman un triángulo nuevo $A'B'C'$, en el cual A, B, C son los puntos medios de los lados, y las alturas del triángulo ABC pertenecen a las mediatrices de los lados $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Por consiguiente, de acuerdo con 3.1 se encontrarán en un mismo punto. □

Ofrecemos la segunda demostración de 3.2, parecida a la demostración de la afirmación 3.1.



□ Imaginémonos cada altura como un conjunto de puntos que satisfacen a cierta condición. Utilicemos para esto el punto F del alfabeto.

Sabemos que el conjunto
$\{M: |MA|^2 - |MB|^2 = d\}$
es una perpendicular a la recta AB. Escojamos d de modo que esta recta contenga el vértice C. Para esto hay que tomar $d = |CA|^2 - |CB|^2$. De esta manera, la recta

$$h_c = \{M: |MA|^2 - |MB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2\},$$

contiene la altura del triángulo, bajada desde el vértice C.

Por analogía se pueden representar las rectas, que contienen las otras dos alturas del triángulo:

$$h_a = \{M: |MB|^2 - |MC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2\},$$
$$h_b = \{M: |MC|^2 - |MA|^2 = |BC|^2 - |BA|^2\}.$$

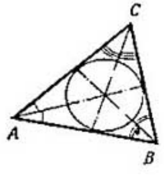
Supongamos que las dos primeras rectas h_c y h_a se cortan en el punto H, entonces para éste se cumplen simultáneamente las igualdades

$$|HA|^2 - |HB|^2 = |CA|^2 - |CB|^2$$
$$|HB|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |CA|^2.$$

Sumando estas dos igualdades obtenemos

$$|HA|^2 - |HC|^2 = |AB|^2 - |CB|^2.$$

Es decir, el punto H también pertenece a la tercera recta h_b. □



3.3. Las tres bisectrices del triángulo ABC se intersecan en un punto (*centro de la circunferencia inscrita al triángulo*).

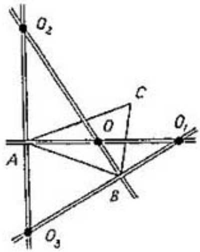
☐ Supongamos que a, b y c son rectas a las que pertenecen los lados del triángulo. Es evidente que las bisectrices l_a y l_b de sus ángulos A y B se encontrarán en cierto punto O (dentro del triángulo). Para este punto O se cumplen las igualdades

$$\rho(O, b) = \rho(O, c)$$

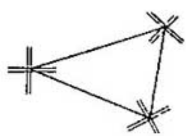
y

$$\rho(O, a) = \rho(O, c).$$

Por consiguiente, $\rho(O, b) = \rho(O, a)$ y el punto O también pertenecerá a la bisectriz l_c del ángulo C del triángulo. ☐

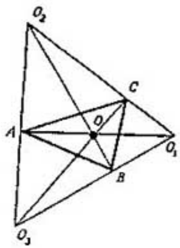


Observación. El conjunto de puntos M del plano para los cuales $\rho(M, c) = \rho(M, b)$ y $\rho(M, a) = \rho(M, c)$ consta de cuatro puntos — O, O_1, O_2, O_3 — de intersección de dos «cruces de bisectrices». Razonando de la misma forma que durante la solución del problema 3.3 obtenemos que también la tercera «cruz» (de las bisectrices de las rectas a y b) pasa por dichos puntos.



De ahí obtenemos que las seis bisectrices de los ángulos internos y externos del triángulo se encuentran de tres en tres en los cuatro puntos. Uno de estos puntos es el centro de la circunferencia inscrita, y los otros tres, los centros de las llamadas *circunferencias exinscritas*.

Señalemos, que si en un triángulo acutángulo arbitrario $O_1O_2O_3$ los puntos A, B, C son los pies de las alturas, entonces O_1, O_2, O_3 son los exicentros, o sea los puntos que equidistan de los tres lados (de un lado y las prolongaciones de los otros dos) del triángulo ABC. Al mismo tiempo, las alturas del triángulo $O_1O_2O_3$ sirven de bisectrices del triángulo ABC.

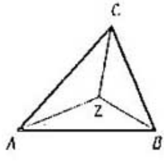


3.4. Las medianas del triángulo se cortan en un punto (*centro de gravedad del triángulo*).

Este teorema se puede demostrar de distintas maneras.

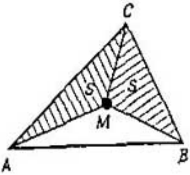
La primera demostración que expondremos explica la denominación «centro de gravedad del triángulo».

□ Coloquemos en los vértices del triángulo ABC tres cargas G_A, G_B, G_C de igual masa, digamos de 1 g, y hallemos la posición de sus centros de gravedad. El centro de gravedad de dos cargas —G_A y G_B— se encuentran en el punto medio del segmento AB; o sea, el centro de gravedad Z pertenece a la mediana correspondiente. De la misma forma se puede mostrar que Z pertenece a las dos otras medianas; por consiguiente, las tres medianas se encuentran en el punto Z. □



No obstante, ofreceremos también la demostración en el espíritu de las tres anteriores.

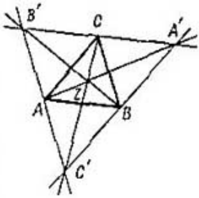
□ Sea un triángulo ABC. Los puntos de las medianas del triángulo trazadas desde los vértices A, B, C, satisfacen las condiciones siguientes (correspondientemente) (véase 2.17):



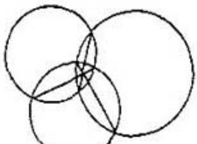
$$S_{AMB}=S_{CMA},$$
$$S_{AMB}=S_{BMC},\ S_{BMC}=S_{CMA} \tag{1}$$

Está claro que de las dos primeras condiciones se deduce la tercera y, por consiguiente, las medianas se intersecan en un punto Z. □

Observación. El conjunto de puntos que satisfacen las condiciones (1), son (de acuerdo con 2.17) un par de rectas: «cruces de medianas». De esta forma, tres conjuntos semejantes se cortan en cuatro puntos: Z, A', B', C'. Consignaremos que el triángulo $A'B'C'$ es justamente el triángulo $A'B'C'$ que examinamos en la primera demostración del teorema sobre las alturas 3.2.

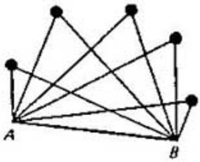


3.5. a) Demostrar que para cualesquiera tres circunferencias, los tres ejes radicales de cada par de circunferencias pasan por un punto o son paralelos (véase 2.9).



b) Demostrar que, si tres circunferencias se cortan de par en par, las tres cuerdas comunes de cada par de circunferencias (o sus prolongaciones) pasan por un punto o son paralelas. ↓

3.6. («Punto de Torricelli».) Demostrar que en un triángulo ABC cuyos ángulos sean menores de 120° existe un punto T, desde el cual todos los lados se ven con un mismo ángulo (o sea, un punto tal, que $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA}$).



3.7. Examinemos todos los triángulos posibles cuya base es AB y el ángulo del vértice opuesto es igual a φ. Hallar el conjunto:

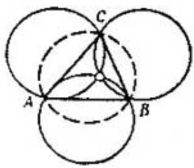
a) de puntos donde se cortan las medianas;

b) de puntos donde se encuentran las bisectrices; ↓

c) de puntos donde se intersecan las alturas. ↓

3.8. a) Tres rectas a, b, c, que se cortan de par en par y pasan correspondientemente por tres puntos dados A, B, C, giran con igual velocidad angular ω. Demostrar que en cierto momento estas rectas pasan por un punto. ↓

b) Demostrar que tres circunferencias, simétricas a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC con relación a las rectas AB, BC y CA, pasan por un punto, el ortocentro del triángulo ABC. ↓

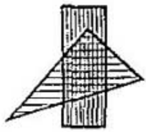


3.9. («Teorema de Ceva»). En los lados AB, BC, CA de un triángulo se han elegido los puntos C_1, A_1, B_1. Demostrar, que los segmentos AA_1, BB_1, CC_1 se intersecan en un punto sólo cuando se cumple la condición:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1.$$

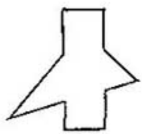
3.10. Desde los puntos C_1, A_1, B_1 que se hallan correspondientemente sobre los lados AB, BC, CA del triángulo dado ABC, se han trazado perpendiculares a dichos lados. Demostrar que estos tres perpendiculares se encontrarán en un punto únicamente cuando se cumpla la condición

$$|AC_1|^2+|BA_1|^2+|CB_1|^2=$$
$$=|AB_1|^2+|BC_1|^2+|CA_1|^2. \downarrow$$



Intersección y reunión. Vamos a destacar las operaciones principales que empleamos constantemente.

Sean dados dos o varios conjuntos de puntos. *Intersección* de estos conjuntos se llama el lugar geométrico de todos los puntos que pertenecen simultáneamente a todos los conjuntos dados. *Reunión* de estos conjuntos se llama el lugar geométrico de todos los puntos que pertenecen, por lo menos, a uno de ellos.



Si en el problema se exigía hallar los puntos, que satisfacían simultáneamente a varias condiciones, procedíamos así: hallábamos el conjunto de puntos, que satisfacían por separado a cada condición y tomábamos la intersección de estos conjuntos. Con una situación semejante nos encontramos también en problemas de álgebra:

el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0 \end{cases}$$

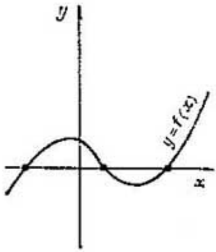
en esencia, es la intersección de los conjuntos de soluciones por separado de las ecuaciones que constituyen este sistema.

Si en el problema se exige hallar los puntos, que satisfacen **por lo menos a una condición** de entre varias, es claro que hay que hallar los conjuntos de puntos, que satisfacen por separado a cada una de las condiciones y tomar la reunión de estos conjuntos. Justamente así procedemos resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, cuyo primer miembro se descompone en factores

$$f(x) = f_1(x)\, f_2(x),$$

hallamos el conjunto de soluciones de cada ecuación $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ y tomamos su reunión.

También despierta asociaciones algebraicas otra noción con la cual nos encontramos aquí: *la partición.* Para resolver la desigualdad $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$, comúnmente es suficiente resolver la correspondiente ecuación $f(x) = 0$. Los puntos obtenidos parten el dominio de definición de la función f (segmento o recta) en pedazos, en cada uno de los cuales la función conserva su signo. Igualmente, los conjuntos de puntos del



plano para los cuales están cumplidas unas u otras desigualdades, por lo común son dominios, limitados por líneas, en las que se cumplen las igualdades correspondientes. Hemos visto muchos ejemplos sencillos que muestran esto en el § 2.

En el siguiente problema chocaremos con particiones y combinaciones de conjuntos más complejas.

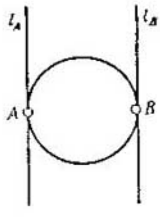
3.11. Supongamos que hay dos puntos A y B en un plano. Hallar el conjunto de puntos M, para los cuales el triángulo AMB sea:

a) rectángulo;

b) acutángulo;

c) obtusángulo.

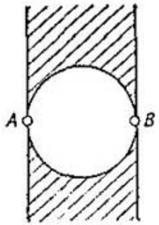
☐ a) El triángulo AMB es rectángulo, si se cumple una de las tres condiciones: 1) $\widehat{AMB} = 90°$, 2) $\widehat{BAM} = 90°$, 3) $\widehat{ABM} = 90°$.



El conjunto buscado es por eso la reunión de los tres conjuntos siguientes: 1) una circunferencia de diámetro AB, 2) una recta l_A que pasa por el punto A perpendicularmente al segmento AB, 3) una recta l_B que pasa por el punto B y es perpendicular al segmento AB.

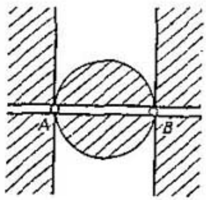
De esta reunión es necesario excluir los puntos A y B, que están sobre la recta AB (pues conllevan a la «degeneración» del triángulo AMB). ☐

☐ b) El triángulo AMB es acutángulo, si al mismo tiempo se cumplen tres condiciones: 1) $\widehat{AMB} < 90°$, 2) $\widehat{BAM} < 90°$; 3) $\widehat{ABM} < 90°$.

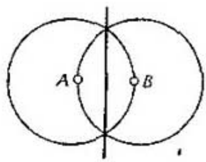


El conjunto buscado es por eso la intersección de los tres conjuntos siguientes: 1) la parte exterior de un círculo de diámetro AB (véase § 2 D); 2) un semiplano sin la recta colindante l_A, que contiene el punto B; 3) un semiplano sin la recta colindante l_B, que contiene el punto A.

Su intersección es una franja entre las rectas l_A y l_B, de la cual se ha excluido un círculo de diámetro AB. □



□ c) Observemos que cada punto M del plano (que no está sobre la recta AB), satisface a una de las tres condiciones: a) el ΔAMB es rectángulo, o bien b) el ΔAMB es acutángulo, o por último c) el ΔAMB resulta obtusángulo; además estas condiciones se excluyen mutuamente. Por eso, al conjunto c) tienen que pertenecerle todos aquellos puntos del plano que no corresponden a a), ni a b). Este conjunto es la reunión del círculo y de dos semiplanos (sin la recta AB). □



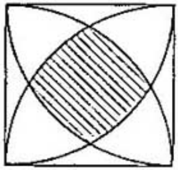
3.12. En el plano hay dados dos puntos A y B. Hallar el conjunto de puntos M tales que:

a) el triángulo AMB sea isósceles;

b) en el triángulo AMB el lado AB sea el mayor;

c) en el triángulo AMB el lado AM sea el mayor.

3.13. En el plano se da un cuadrado cuyos lados son de longitud 1. Demostrar que cualquier punto en el plano que diste no más de 1, con respecto a cada vértice de este cuadrado, se encontrará a una distancia no menor de 1/8 respecto a cada lado del mismo.

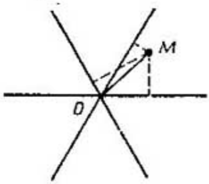


□ El conjunto de puntos M que están alejados a una distancia no mayor de 1 de cada uno de los cuatro vértices, es la intersección de cuatro círculos de radio 1 trazados desde dichos vértices del cuadrado. Esto es un «cuadrilátero», limitado por cuatro arcos; su vértice está a la distancia de $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ del lado más cercano. Comprobemos, que estas cifras son mayores que 1/8:

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{7}{8}>\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{49}{16}>3.$$

Ahora está claro que todos los puntos de nuestro conjunto están a más de 1/8 de distancia de los lados del cuadrado. □

3.14. Por el punto O del plano hay trazadas tres rectas, las cuales parten este plano en seis ángulos congruentes. Demostrar que si la distancia desde el punto M hasta cada recta es menor de 1, la distancia $|OM|$ será menor de 7/6.

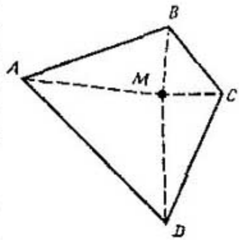


3.15. Sea dado un cuadrado $ABCD$. Hallar el conjunto de puntos más cercanos de la recta AB que de las rectas BC, CD y DA.

3.16. Sea dado un triángulo ABC. Hallar en el plano un conjunto de puntos M de modo que el área de cada uno de los triángulos AMB, BMC, CMA sea menor que el área del triángulo ABC.

3.17. Sobre los lados de un cuadrilátero convexo arbitrario $ABCD$, empleándolos como diámetros, se trazan círculos. Demostrar que éstos tapan todo el tetrágono.

☐ Supongamos que dentro del tetrágono existe un punto M, situado fuera de los círculos. Entonces, de acuerdo con § 2, E, todos los ángulos AMB, BMC, CMD y DMA son agudos y su suma será menor de 360°, lo cual es imposible. ☐



3.18*. Una parcela de bosque tiene la forma de polígono convexo, siendo su área S y su perímetro p. Demostrar que dentro del bosque se puede señalar un punto que dista más de S/p respecto al lindero.

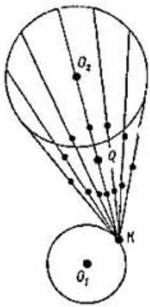
3.19*. En el plano está dado el cuadrado $ABCD$. Hallar el conjunto de puntos M para los cuales $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$.

En los problemas siguientes tendremos que examinar la reunión de infinidad de conjuntos.

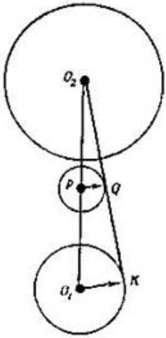
3.20. a) Sea dado un punto O. Examinemos la familia de circunferencias de radio de 3 cm, cuyos centros están a 5 cm de distancia del punto O, y una familia de circunferencias de radio 5 cm, cuyos centros están a 3 cm de distancia del punto O. Demostrar que la reunión de circunferencias de la primera familia coincide con la reunión de la segunda familia.

b) Hallar el conjunto de puntos de segmentos en los cuales un extremo está sobre una de las circunferencias dadas, y el otro, sobre la segunda.

□ b) Designemos los radios de las circunferencias dadas por r_1 y r_2, y sus centros, por O_1 y O_2, respectivamente. Fijemos primero algún punto K de la primera circunferencia y hallemos el conjunto de puntos medios de los segmentos un extremo de los cuales coincide con el punto K. Es evidente que dicho conjunto será una circunferencia de radio $r_2/2$ con centro en el punto medio del segmento KO_2. (Esta circunferencia se obtiene por la homotecia de la circunferencia (O_2, r_2) con coeficiente de 1/2 y centro en K.) Señalemos, que el punto Q está a una distancia de $r_1/2$ del punto P, que es el punto medio del segmento O_1O_2.



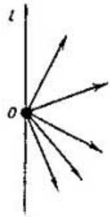
Si ahora empezamos a mover el punto K por la circunferencia (O_1, r_1), entonces el punto Q se trasladará por la circunferencia de radio $r_1/2$ con centro en el punto P. De esta manera, el conjunto buscado es una reunión de todas las circunferencias de radio $r_2/2$, cuyos centros están sobre la circunferencia de radio $r_1/2$ cuyo centro es el punto P.



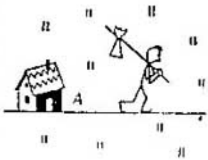
Qué resulta ser esta reunión de infinidad de circunferencias, se muestra en el dibujo.

Así pues, el conjunto de todos los puntos que satisfacen la condición del problema, representa en sí un anillo cuyo radio exterior es $(r_1 + r_2)/$ $/2$ y el interior, $|r_1 - r_2|/2$. En caso cuando $(r_1 = r_2)$, este conjunto se transforma en un círculo. □

3.21. Desde el punto O, situado sobre la recta l, que limita el semiplano, hacia el interior de este semiplano están trazados n vectores de longitud igual a la unidad. Demostrar que si n es impar, la longitud de la suma de estos vectores no es menor de 1. ↓



3.22. A través de la aldea A, rodeada por todas partes de prados, pasa un camino recto. Una persona puede ir por el camino a velocidad de 5 km/h mientras que por el prado, a 2 km/h. Trazar el conjunto de puntos hasta los cuales podría llegar desde A en una hora.

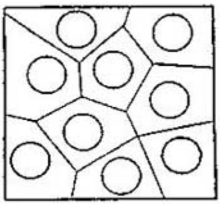


Problema sobre el queso.

3.23. Sea un pedazo cuadrado de queso con agujeros. ¿Siempre se podrá cortar éste en pedazos convexos de forma que en cada pedazo haya justamente un agujero?

Desde el punto de vista de su formulación matemática, este problema se presenta del siguiente modo.

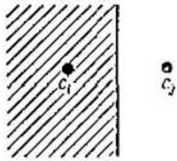
Dentro de un cuadrado hay situados, de dos en dos, unos cuantos círculos que no se cortan entre sí. ¿Se puede partir este cuadrado en polígonos convexos de forma que en cada uno de ellos resulte justamente un círculo?

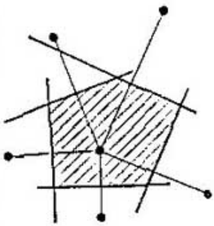


□ La respuesta resulta siempre positiva. Para cualquier ejemplo con pequeña cantidad de círculos no es difícil cortar el cuadrado en polígonos convexos. Mas para ofrecer una demostración completa, tenemos que señalar un método de partición del cuadrado que sirva para cualquier cantidad y situación de los círculos.

Examinemos primero un problema más simple: *consideraremos que los radios de todos los círculos son iguales.* Se puede proponer el siguiente método de partición del cuadrado. Al principio vamos a describirlo brevemente, con una frase. Adheriremos a cada círculo aquellos puntos del cuadrado que están situados más cerca de dicho círculo que de todos los demás; así se obtendrán justamente los polígonos convexos buscados ⟨?⟩.

Expliquemos esto más detalladamente. Señalemos los centros C_1, C_2, ..., C_n de los círculos dados. Sea C_i uno de estos centros. Hallemos el conjunto de puntos, cuyas distancias hasta C_i no sean mayores que hasta los demás centros C_j. El conjunto de puntos del plano más cercanos de C_i que de C_j (para cierto j) es un semiplano limitado por la mediatriz del segmento C_iC_j (A). A nosotros nos interesan los puntos que están más cerca de C_i que de todos los demás centros, o sea, los puntos que pertenecen a los semiplanos mencionados, pero que corresponden a diferentes C_j ($j \neq i$). El conjunto de todos estos puntos, es decir, la intersección de todos los $(n - 1)$ semiplanos, será, claro está, un polígono convexo ⟨?⟩. Puesto que cada semiplano contiene el punto C_i así como además el círculo completo con el centro C_i (¡pues los círculos con los centros C_i y C_j no se cortan y tienen un mismo radio!), la intersección también contendrá dicho círculo.

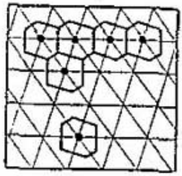




Un polígono así

$\{M: |MC_i| \leqslant |MC_j|$ para todos $j \neq i\}$.

corresponde a cada centro C_i. Es evidente que estos polígonos tapan todo el cuadrado y no tienen puntos internos comunes: para conocer a que conjunto concretamente pertenece el punto M, cabe ahora preguntar «¿Cuál de los centros C_i está más cerca del punto M?». Si hay dos o unos cuantos centros «más cercanos al punto M», entonces M cae sobre una de las medianas, o sea, sobre el límite de los polígonos, sobre la línea de partición. De esta manera, el cuadrado se divide en polígonos convexos, cada uno de los cuales contiene justamente un círculo.



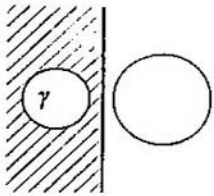
Como ejemplo bonito examinemos el caso cuando los centros de los círculos están situados en los nudos de una red, constituida por paralelogramos iguales.

Nuestro método de división se puede describir de la forma siguiente.

En todos los paralelogramos de la red tracemos las diagonales menores. Como resultado, obtendremos una red con los mismos nudos, formada de triángulos acutángulos iguales. Dentro de cada triángulo tracemos las mediatrices. Los hexágonos obtenidos forman la partición necesaria del cuadrado.

Así pues, hemos aclarado el problema 3.23 para el caso cuando todos los círculos tienen radios iguales.

En el caso general, cuando *los radios de los círculos son distintos*, el cuadrado se puede dividir de la forma siguiente. Desde cada punto situado fuera de los círculos dados, se pueden trazar las tangentes a todas las circunferencias. El conjunto correspondien-

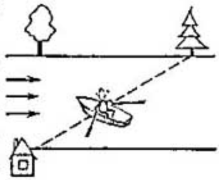


te al círculo dado γ, estará constituido por los puntos del mismo y por los puntos para los cuales la longitud de la tangente a la circunferencia γ es menor que la de la tangente a las demás circunferencias. Este conjunto es la intersección de varios semicírculos que contienen el círculo γ; como bordes de estos semicírculos sirven los ejes radicales de la circunferencia γ y de alguna de las demás circunferencias (véanse los problemas 2.9 y 3.5). Así pues, todo el cuadrado estará representado en forma de una reunión de polígonos convexos que no tienen puntos comunes internos, y cada uno de los polígonos contendrá su círculo. □

4 Máximo y mínimo

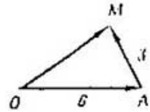
Este parágrafo comienza por problemas muy simples, en los cuales hay que hallar el valor máximo o mínimo que puede adquirir una u otra magnitud, y termina con complicados problemas de investigación. Los problemas sobre máximo y mínimo se pueden, por regla general, reducir a la investigación de cierta función dada en forma analítica. Pero aquí hemos reunido, en lo fundamental, problemas en los que razonamientos geométricos permiten alcanzar más rápido el objetivo. Usted verá que durante la solución de semejantes problemas se emplean diferentes conjuntos de puntos.

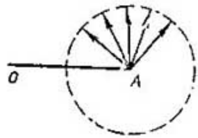
4.1. ¿En qué ángulo respecto a la orilla hay que dirigir la lancha para que durante el tiempo necesario para pasar el río se arrastre lo menos posible por la corriente, si la velocidad de ésta es de 6 km/h, mientras que la velocidad de la lancha en agua estancada, de 3 km/h?

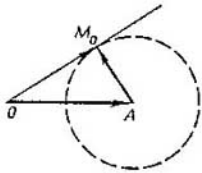


□ *Respuesta.* En un ángulo de 60°.

Tenemos que dirigir la lancha de modo que su velocidad absoluta (la velocidad respecto a las orillas) constituya el mayor ángulo posible con la orilla ⟨?⟩ (véase el dibujo). Sean el vector $\overrightarrow{OA}$ la velocidad de la corriente del río, y $\overrightarrow{AM}$, la velocidad de la lancha con relación al agua. La suma $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$ nos da el valor absoluto de la velocidad de la lancha (la velocidad respecto a la orilla). La longitud del vector $\overrightarrow{AM}$ es igual a 3, y podemos dirigirlo hacia cualquier lado. El conjunto de las posibles posiciones del punto M es la circunferencia de radio 3 con centro en el punto A. Está claro que entre todos los vectores $\overrightarrow{OM}$, el ángulo mayor con relación a la orilla lo forma $\overrightarrow{OM_0}$, dirigido por la tangente a la circunferencia.



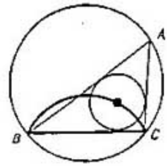


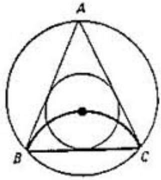


Obtenemos un triángulo rectángulo en el cual uno de sus catetos es la mitad de la hipotenusa. En semejante triángulo, el ángulo buscado es igual a 60°. □

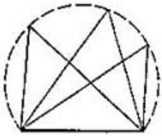
4.2. Entre los triángulos con $\hat{A} = \varphi$ y la base dada BC, escoger el triángulo para el cual el radio de la circunferencia inscrita sea el mayor.

□ Examinemos los puntos A que están a un lado de la recta BC, para los cuales $B\hat{A}C = \varphi$. El conjunto de centros de las circunferencias inscritas en el triángulo ABC es el arco de la circunferencia con los extremos B y C (véase 3.7., *b*). Es evidente que el radio mayor de la circunferencia inscrita será el del triángulo isósceles. □



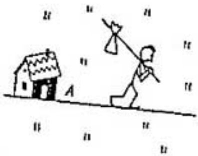


4.3. Entre todos los triángulos con la base dada y con el ángulo dado del vértice, elegir el de mayor área.



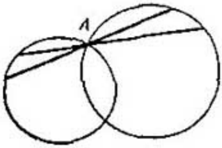
4.4. Por dos caminos mutuamente perpendiculares van dos transeúntes: uno a la velocidad u, y el otro a la velocidad v. Cuando el primero cruzaba el camino del segundo, a éste aún le quedaban d kilómetros para llegar a la intersección. ¿Cuál será la distancia mínima que separa los transeúntes? ↓

4.5. Por el pueblo A, rodeado de praderas, pasa un camino recto. Una persona puede ir por el camino a una velocidad de 5 km/h, y por la pradera, a una velocidad de 2 km/h (en cualquier dirección).

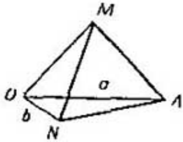


¿Qué ruta tendrá que elegir la persona para llegar cuanto antes del pueblo A a la casita B, que está a 13 km de éste y a 5 km del camino?

4.6. Sean dadas dos circunferencias intersecadas. Trazar por el punto donde se cortan A una recta de modo que la distancia entre los puntos (diferentes a A) de intersección de ésta con las circunferencias sea la mayor. ↓

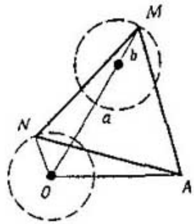


4.7. En el plano hay un punto O. Se exige que un vértice del triángulo equilátero esté a la distancia a del punto O, y otro, a la distancia b. ¿A qué distancia máxima del punto O puede estar el tercer vértice?



□ *Respuesta.* $a + b$. Sea AMN el triángulo equilátero, para el cual $|OA| = a$, $|ON| = b$. Para responder a la pregunta formulada en el problema, se pueden examinar solamente los triángulos con el vértice en un punto fijado A, ya que girando el triángulo, como si fuera un conjunto rígido, alrededor del punto O no cambian ninguna de las distancias. O sea, consideramos que el punto A es un punto fijo situado a la distancia a del punto O, y que N recorre la circunferencia de radio b con centro en O. ¿Qué posición puede ocupar el punto M? La respuesta fue hallada en el problema 1.6: M se encuentra sobre la circunferencia obtenida de la dada, virándola en 60° alrededor del punto A[1]). Está claro que el centro O' de la circunferencia virada dista a

[1]) Se puede tomar cualesquiera circunferencias obtenidas girando en sentido horario y antihorario: ellas estarán a la misma distancia de O.

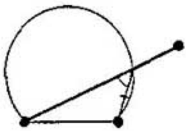


respecto al punto O (ya que $\Delta OO'A$ es equilátero). El radio de la circunferencia virada, lo mismo que el de la dada, es igual a b. Por consiguiente, la mayor distancia desde O hasta el tercer vértice M resulta $a + b$.□

De este problema se deduce un corolario curioso: la distancia desde cualquier punto del plano hasta un vértice de un triángulo equilátero, no es mayor que la suma de las distancias desde dicho punto hasta los otros dos vértices.

4.8. ¿Cuál es la distancia mayor respecto al punto O a la que puede encontrarse el vértice M del cuadrado $AKMN$, si se sabe que

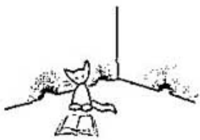
a) $|OA| = |ON| = 1$;
b) $|OA| = a$, $|ON| = b$.



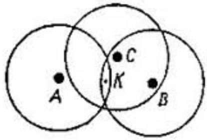
4.9. Entre todos los triángulos para los que se conoce la base y el ángulo del vértice, elegir el triángulo de mayor perímetro. ↓

¿Dónde poner el punto?

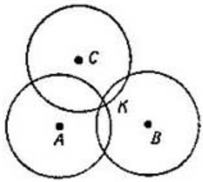
4.10. El ratoncito tiene tres salidas de su ratonera situados en los puntos A, B y C que el gato conoce. ¿Dónde tiene que sentarse el gato para encontrarse a la menor distancia posible de la salida más lejana?



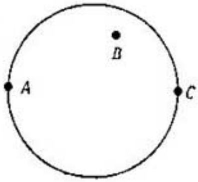
□ Examinemos círculos de un mismo radio r trazados desde los puntos A, B y C. El punto buscado K, es decir la posición del gato, se determina de la manera siguiente. Hay que hallar el radio menor r_0, para el cual en estos círculos aparece un punto común: éste será el punto buscado K. En realidad, si M es otro punto, entonces estará fuera de uno de los círculos, y por eso la distancia hasta uno de los vértices resultará mayor que r_0.



En el caso de un triángulo acutángulo ABC, el punto K es el centro de la circunferencia circunscrita, y en el caso del triángulo rectángulo u obtusángulo, el punto K es el punto medio del lado mayor. □



□ El punto K se puede hallar también del modo siguiente ⟨?⟩. Examinemos el círculo de menor radio que contiene los tres puntos. Entonces el punto K resultará ser su centro. □

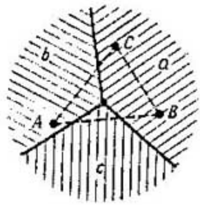


Daremos otro enfoque a la solución del problema 4.10.

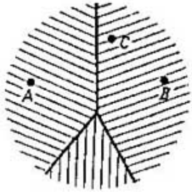
□ Dividamos el plano en tres conjuntos:

a) $\{M: |MA| \geqslant |MB| \text{ y } |MA| \geqslant |MC|\}$,
b) $\{M: |MB| \geqslant |MA| \text{ y } |MB| \geqslant |MC|\}$,
c) $\{M: |MC| \geqslant |MB| \text{ y } |MC| \geqslant |MA|\}$.

Son tres ángulos cuyos lados representarán las mediatrices de los lados del triángulo ABC. Estando el gato M en el ángulo a), el vértice más lejano con respecto a él será el A: estando en el ángulo b), el B; estando en el ángulo c), el C.

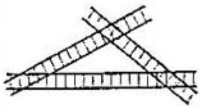


Si el triángulo ABC es acutángulo, en cada uno de los tres casos al gato le conviene estar sentado en el vértice del ángulo correspondiente (a), b) o c) o sea, deberá sentarse en el centro de la circunferencia circunscrita.



Si el triángulo ABC es rectángulo u obtusángulo, entonces es evidente que al gato le convendrá estar sentado en el punto medio del lado mayor del triángulo. □

4.11. En una parte del bosque, limitada por tres ferrocarriles rectos, vive un oso. ¿En qué punto del bosque debe hacerse el oso la guarida para encontrarse a la mayor distancia posible del ferrocarril más cercano?



4.12*. a) En un lago redondo viven tres cocodrilos. ¿Dónde deben situarse para que la mayor de las distancias desde cualquier punto del lago hasta el cocodrilo más cercano sea la menor posible?

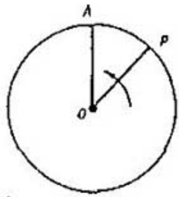
b) El mismo problema para cuatro cocodrilos.

Problema sobre una lancha motora.

4.13*. En una isla pequeña O hay un faro, cuyo haz ilumina un radio de la superficie marítima hasta la distancia $a = 1$ km. El faro gira uniformemente alrededor de un eje vertical y da una vuelta durante $T = 1$ minuto. Una lancha motora que puede desarrollar una velocidad v, tiene que acercarse a la isla sin ser advertida (sin que le alcance el haz

del faro). ¿Cuál es el menor valor posible de v para conseguir eso?

□ Denominaremos el círculo de radio a, el iluminado por el faro, «círculo de detección». Está claro que para la lancha motora lo más conveniente es entrar en dicho círculo en un punto A tal, por el cual acabe de pasar el haz del faro.



Círculo de detección

Si la lancha motora va hacia la isla en línea recta, llegará a ella dentro del tiempo a/v; para que el haz del faro no la alcance en este tiempo es necesario que el haz no tenga tiempo para dar una vuelta entera, o sea, que se cumpla la desigualdad $a/v < T$, de donde

$$v > a/T = 60 \text{ km/h}.$$

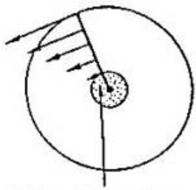
De esta manera hemos demostrado que si $v > 60$ km/h, la lancha motora podrá llegar a la isla sin ser vista. Pero, evidentemente, de aquí no se deduce que 60 km/h sea la menor velocidad que permita conseguir esto, o sea, que la mejor elección del capitán de la lancha motora resulte ser la de ir por el radio AO.

En realidad, la cuestión es otra, como veremos[1]).

Observemos que las velocidades lineales a las que se mueven diferentes

[1]) Antes de seguir leyendo la solución, trate Usted de imaginar algún camino de la lancha por el cual ésta puede penetrar en la isla con menor valor de v.

puntos del haz OP del faro son distintas: cuanto más cerca está el punto del centro O, menor es su velocidad. La velocidad angular del haz es igual a $2\pi/T$. Por la circunferencia de radio $r = vT/2\pi$ la lancha puede avanzar tranquilamente ante el haz, ya que la velocidad de la lancha aquí es igual a la velocidad lineal del punto correspondiente del haz. Fuera del círculo de radio r con centro en O la velocidad del haz es mayor, y dentro de este círculo (lo llamaremos «círculo de seguridad») la velocidad del haz es menor de v.

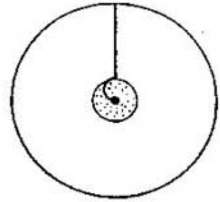


Círculo de seguridad

Si la lancha consigue llegar sin contratiempos hasta algún punto del círculo de seguridad, más adelante podrá llegar a ciencia cierta, a la isla sin ser detectada. Uno de los caminos posibles dentro del círculo de seguridad, es la circunferencia de radio $r/2$: si la lancha K va a desplazarse por esta circunferencia a la velocidad v, entonces el segmento KO girará alrededor de O a la misma velocidad angular a la que se movería la lancha por la circunferencia de radio r, o sea, a la misma que el rayo del proyector (véase el problema 0.3); por lo tanto la lancha no será alcanzada por este haz.

¡Así pues, el objetivo principal de la lancha es llegar al círculo de seguridad!

Si la lancha navega hasta el círculo de seguridad en línea recta, por el radio AO, después marcha frente al haz del proyector, podrá cumplir su tarea si

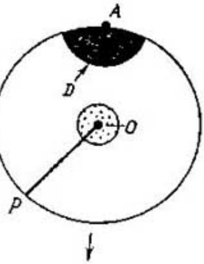


$$v > \frac{1}{1+(1/2\pi)}\frac{a}{T} \approx 0{,}862\frac{a}{T} = $$

$$= 51{,}7 \text{ km/h}.$$

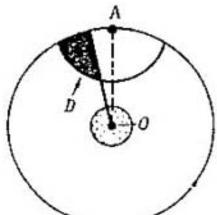
Hemos mejorado un poco nuestra evaluación para la velocidad de la lancha. Pero resulta que tampoco esto es el límite.

Hallemos ahora el valor menor de la velocidad v a la cual la lancha podrá acercarse a la isla sin ser advertida.

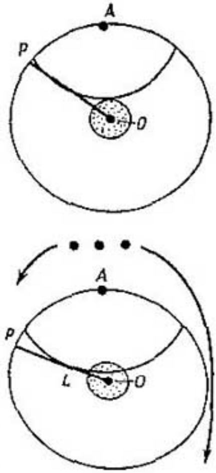


El conjunto de puntos del círculo de detección a los que puede llegar la lancha en el tiempo t, es una zona limitada por un arco de radio vt con centro en el punto A. Entre estos puntos, aquellos a los cuales la lancha puede llegar imperceptiblemente se encuentran a la izquierda del haz OP.

Designemos el conjunto de estos puntos «accesibles» por D. En las figuras se muestra cómo cambia este conjunto con curso del tiempo hasta que ... Aquí son posibles dos casos.

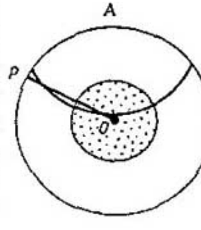


1) Si la velocidad v no es lo suficientemente grande, en cierto momento t el conjunto D, sin llegar hasta el círculo de seguridad, desaparece del todo: esto significará que durante el tiempo t la lancha, por supuesto, será vista, o sea, que a esta velocidad la

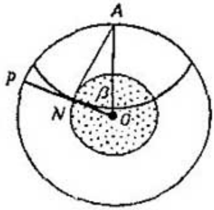


lancha no podrá llegar hasta la isla. Señalemos que en el último momento $t = t_0$, el rayo OP roza el arco cuyo radio es vt_0 con centro en A en cierto punto L. El punto L está situado, sin lugar a dudas, fuera del círculo de seguridad (de lo contrario la lancha podría llegar hasta la isla); además, cuanto mayor es la velocidad v, tanto más tiempo t_0 se necesita para la detección y tanto más cerca de la isla se encuentra el punto L.

2) Si la velocidad v es mayor de cierto valor v_0, el conjunto D en algún momento llega hasta el círculo de seguridad. Esto quiere decir que si $v > v_0$ la lancha podrá llegar hasta la isla.



El valor mínimo de la velocidad v_0 corresponde, como es fácil de ver, al caso en que el haz OP tiene tiempo para rozar el arco de radio vt_0 justamente en el punto N, que está sobre la circunferencia del círculo de seguridad. Para hallar el valor v_0 designaremos el valor del ángulo NOA por β y emplearemos las siguientes igualdades:



$$|NO| = r = \frac{v_0 T}{2\pi}, \quad |AN| = v_0 t_0,$$

$$\frac{|AN|}{|NO|} = \operatorname{tg} \beta,$$

$$\frac{2\pi + \beta}{t_0} = \frac{2\pi}{T}, \quad |NO| = a \cos \beta.$$

De la primera y la última igualdades hallamos que

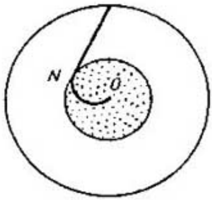
$v_0 = (2\pi a \cos\beta)/T$,

y de las primeras cuatro igualdades obtenemos la ecuación para β:

$2\pi + \beta = \operatorname{tg}\beta$.

Esta ecuación se puede resolver sólo de manera aproximada, por ejemplo, con ayuda de tablas; β resulta aproximadamente igual a $0{,}92\pi/2$, de donde

$v_0 \approx 0{,}8a/T \approx 48$ km/h.



Cuando el valor de la velocidad es mayor de v_0, la lancha podrá llegar hasta el círculo de seguridad. □

4.14*. a) Un niño está nadando en el centro de una piscina circular. Su padre, que se encuentra en el borde de la piscina, no sabe nadar, pero corre cuatro veces más rápido de lo que nada el niño. El hijo corre más rápido que el padre. El hijo desea escaparse. ¿Podrá hacerlo?

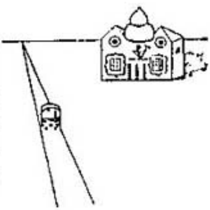
b) ¿Cuál deberá ser la relación de las velocidades v y u (v es la velocidad a la que nada el hijo; u, la velocidad a la que corre el padre) para que el hijo no pueda escaparse?

5 Líneas de nivel

En el presente parágrafo se examinan problemas y teoremas de los parágrafos anteriores, sólo que empleando terminología nueva. Las nociones que vamos a dar a conocer —*funciones sobre el plano* y *sus líneas de nivel*— son útiles, particularmente, al resolver problemas del mínimo y máximo.

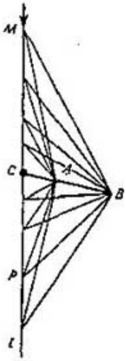
Problema acerca del autobús.

5.1. Por una carretera recta marcha un autobús con excursionistas. A un lado de la carretera, en ángulo a ella, está situado un palacio. ¿En qué punto de la carretera tiene que pararse el autocar para que desde éste los excursionistas puedan contemplar lo mejor posible el palacio?



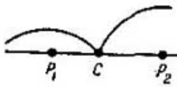
En lenguaje matemático este problema suena así.

Sean dados una recta l y un segmento AB que no la interseca. Hallar en la recta un punto P para el cual el ángulo APB tenga el mayor valor posible.



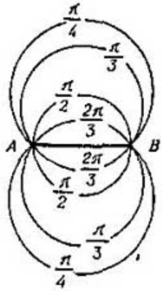
Primero veamos cómo aproximadamente cambia el ángulo AMB cuando el punto M avanza por la recta l. Con otras palabras: cómo se comporta la función f, la cual a cada punto M de la recta l pone en correspondencia el valor del ángulo AMB.

Es fácil de construir el gráfico aproximado de esta función. (Recordemos que el gráfico se traza de la siguiente manera: sobre cada punto M de nuestra recta se toma un punto a una distancia igual a $f(M) = \widehat{AMB}$).



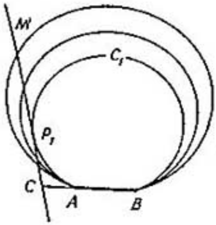
Se puede resolver el problema analíticamente: introducir las coordenadas para la recta l, expresar el valor del ángulo AMB mediante x —la coordenada del punto M— y hallar para qué valor de x la función obtenida llegará al máximo. Sin embargo, la fórmula para $f(x)$ resulta bastante complicada.

Mostraremos una solución más elemental y aleccionadora. Pero para esto es necesario estudiar la dependencia entre el valor del ángulo AMB y la posición del punto M en todo el plano (y no sólo en la recta l).

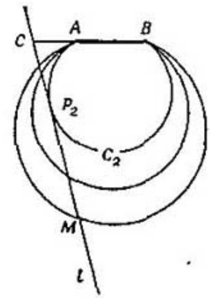


□ El conjunto de puntos M del plano para los cuales el ángulo AMB tiene un valor dado φ es un par de arcos simétricos con los extremos en los puntos A y B (véase el § 2 E). Si se trazan estos arcos para distintos valores φ $(0 < \varphi < \pi)$, entonces obtenemos la familia de arcos que tapan todo el plano, a excepción de la recta AB. En la figura están dibujados unos cuantos arcos semejantes, y en cada uno está escrito a qué valor φ corresponde. Por ejemplo, al valor de $\varphi = \pi/2$ le corresponde una circunferencia de diámetro AB.

Ahora examinaremos solamente los puntos M que se encuentran sobre la recta l. Entre ellos tenemos que elegir aquél, para el cual el ángulo AMB tiene el mayor valor. Por cada punto pasa un arco de nuestra familia: siendo $\widehat{AMB} = \varphi$, el punto M está sobre el arco que corresponde a este valor de φ. De esta manera, el problema se reduce a que entre todos los arcos que tocan la recta l hay que elegir el que corresponde al mayor valor de $\widehat{AMB} = \varphi$.

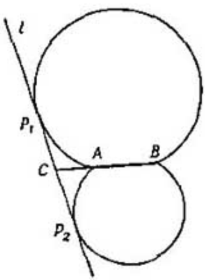


Examinemos la parte de la recta l. situada a un lado del punto de intersección C de las rectas AB y l. (No vamos a examinar el caso cuando el segmento AB es paralelo a la recta l. Examínelo Usted mismo). Tracemos el arco c_1, tangente a esta parte de la recta, y demostremos que desde el punto de intersección P_1 el segmento se ve con el ángulo mayor posible. En realidad, para cualquier punto M de la recta l, que se encuentre fuera de la circunferencia c_1, $\widehat{AMB} < \widehat{AP_1B}$.



Es evidente que al otro lado del punto C todo sucederá de la misma forma: el punto P_2, desde el cual el segmento AB se ve con el ángulo mayor posible, también es el punto de tangencia de la recta y uno de los arcos de nuestra familia.

Así pues, hemos demostrado que el punto P buscado en el problema coincide con uno de los puntos P_1 y P_2, en los cuales las circunferencias que pasan por los puntos A y B, tienen tangencia con la recta l. En calidad de P deberá escogerse el punto para el cual el angulo PCA sea agudo. Cuando el segmento AB es perpendicular a la recta l, de los razonamientos de simetría se deduce enseguida que los puntos P_1 y P_2 son completamente equitativos. O sea, los puntos de los que trata el problema en este caso son dos. (Sin embargo, los excursionistas en todo caso elegirán aquel punto P_1 o P_2 desde el cual se vea la fachada del palacio.)



Funciones sobre el plano. La idea principal de la resolución del problema 5.1 es investigar en todo el plano la función f que a cada punto le pone en correspondencia el valor del ángulo $\widehat{AMB}$, o sea $f(M) = \widehat{AMB}$.

En los parágrafos anteriores ya hemos chocado, de hecho, con diferentes funciones. Además de las funciones más simples, relativas al plano, tales como $f(M) = |OM|$, $f(M) = \rho(l, M)$,

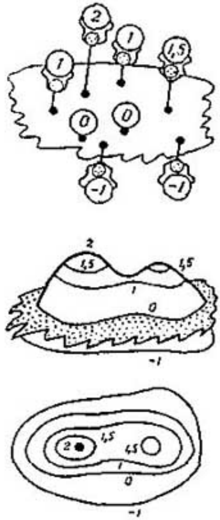
$f(M) = \widehat{ABM}$ (donde O, A, B son los puntos dados y l, la recta dada), hemos estudiado las sumas, restas, relaciones de dichas funciones y otras de sus combinaciones.

Líneas de nivel. La mayor parte de las condiciones que determinan los conjuntos de puntos, se pueden presentar así. Sobre el plano (o sobre alguna de sus partes) está dada una función f, y es necesario determinar el conjunto de puntos M, en los cuales esta función toma el valor dado h, o sea $\{M: f(M) = |h|\}$.

Por regla general, para cada cifra fijada de h este conjunto es cierta línea; de este modo, el plano se descompone en líneas llamadas *líneas de nivel* de la función f. Así, al resolver el problema 5.1 hemos trazado las líneas de nivel de la función $f(M) =$

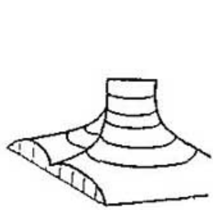
$= \widehat{AMB}$.

Gráfico de la función. Expliquemos ahora de donde procede el término «línea de nivel». La cosa es que para las funciones dadas sobre el plano, se pueden trazar los gráficos de la misma forma que se hace para las funciones $y = f(x)$, dadas sobre una recta; sólo que ahora el gráfico se va a trazar en el espacio. Consideraremos que el plano en el que está dada nuestra función f es horizontal, entonces para cada punto M de dicho plano vamos a señalar un punto situado sobre M a una distancia de $|f(M)|$, si $f(M) > 0$ y debajo del mismo a la distancia $|f(M)|$, si $f(M) < 0$; todos los puntos señalados de esta forma componen, por lo general, cierto plano, llamado *gráfico de la función* f. Con otras palabras, si en el plano horizontal introducimos el sistema de coordenadas Oxy y dirigimos el eje Oz verticalmente hacia arriba, el gráfico de la función resultará el conjunto de puntos con coordenadas $(x; y; z)$, donde $z = f(M)$, mientras $(x; y)$ son las coordenadas del punto M en el plano. (Si la función está definida no en todos los puntos del plano, sino solamente en cierto dominio, el gráfico estará situado sobre los puntos de este recinto de definición.)



Así pues, la línea de nivel $\{M: f(M) = h\}$ representa en sí aquellos puntos M sobre los cuales los puntos del gráfico están situados «a un mismo nivel», a la altura h.

En las páginas 100—102 vienen trazados los gráficos de las funciones cuyas líneas de nivel son conjuntos del alfabeto. Así, vemos que el gráfico



de la función $f(M) = \widehat{AMB}$ representa una «cadena de montañas» de altura π sobre el segmento AB, desde el cual el gráfico suavemente desciende hasta cero. (Recordemos que al comienzo de la solución del problema 5.1 hemos trazado el gráfico de esta función, sólo que para cierta recta l.)

Una función f de tipo

$$f(M) = \lambda_1\rho(M, l_1) + \lambda_2\rho(M, l_2) + \ldots + \lambda_n\rho(M, l_n),$$

como hemos dicho en el § 2 (teorema de distancias hasta las rectas), en cada uno de los pedazos Q, en que dividen el plano las rectas $l_1, l_2, \ldots, l_n$, se escribe mediante una expresión lineal

$$f(x, y) = ax + by + c.$$

De esta manera, su gráfico estará compuesto de pedazos inclinados del plano, o bien (siendo $a = b = 0$) horizontales. Esto se ve en los ejemplos de los conjuntos para los puntos C, I, J del alfabeto.

Las líneas de nivel de semejante función constan de pedazos de rectas; y si el gráfico tiene una plazoleta horizontal, cierta línea de nivel contiene un pedazo entero Q del plano.

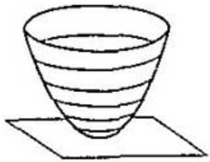
Una función f tipo

$$f(M) = \lambda_1 |MA_1|^2 + \lambda_2 |MA_2|^2 + \ldots + \lambda_n |MA_n|^2$$

cuando $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$, también se reduce a una función lineal sobre todo el plano (por ejemplo F), y en el caso general, cuando $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \neq 0$, a una función tipo

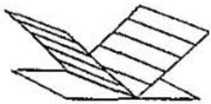
$$f(M) = d \mid MA \mid^2,$$

donde A es cierto punto del plano. Las líneas de su nivel son circunferencias (teorema sobre los cuadrados de distancias del § 2), y su gráfico es la superficie de *un paraboloide de revolución*.

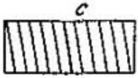


Aquí vienen mostrados los gráficos de las funciones correspondientes a los puntos del alfabeto, y debajo de cada uno de ellos, el mapa de líneas de nivel.

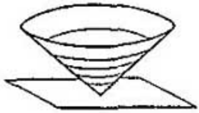
C. $f(M) = \rho(M, l)$. El gráfico es un ángulo diedro, mientras las líneas de nivel representan pares de líneas rectas.



C

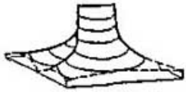


D. $f(M) = \mid MO \mid$. El gráfico es un cono, y las líneas de nivel, circunferencias concéntricas.

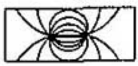


D

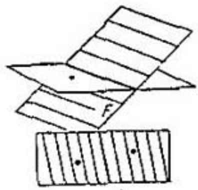
E. $f(M) = \widehat{AMB}$. El gráfico es una montaña con la cima en forma de un segmento horizontal, en los extremos del cual hay precipicios.



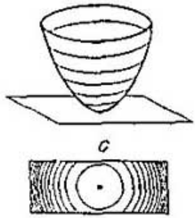
E



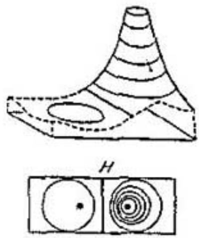
F. $f(M) = |MA|^2 - |MB|^2$. El gráfico es un plano, y las líneas de nivel, rectas paralelas.



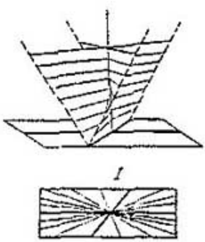
G. $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$. El gráfico es un paraboloide de revolución, y las líneas de nivel, circunferencias concéntricas.



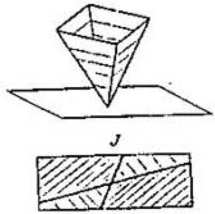
H. $f(M) = |MA|/|MB|$. El gráfico tiene una cavidad al lado del punto A, y al lado del punto B sube indefinidamente. Las líneas de nivel son circunferencias que no se cortan, cuyos centros están sobre la recta AB; además, cada dos de ellas tienen como eje radical la misma recta: la mediatriz del segmento AB.



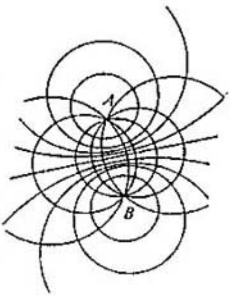
I. $f(M) = \rho(M, l_1)/\rho(M, l_2)$. El gráfico se obtiene de la manera siguiente; se examina una superficie en forma ensillada —paraboloide hiperbólico—, que pasa por la recta l_1, y una recta vertical, que pasa por el punto de intersección O de l_1 y l_2; la parte de esta superficie, que está situada por debajo del plano dado, se refleja simétricamente con respecto a ella. Las líneas de nivel son pares de rectas que pasan por el punto O.



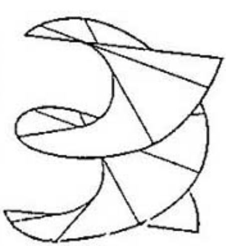
J. $f(M) = \rho(M, l_1) + \rho(M, l_2)$. El gráfico es un ángulo tetraédrico. Las líneas de nivel son rectángulos cuyas diagonales pertenecen a l_1 y l_2.



Probablemente, los gráficos más complejos en nuestro alfabeto los tengan las funciones $f(M) = \widehat{AMB}$ y $f(M) = |AM|/|BM|$. Observemos, que entre los mapas de las líneas de nivel de dichas funciones hay una relación interesante: si éstas se trazan sobre un mismo dibujo, se obtienen dos familias de circunferencias, además, cualquier circunferencia de una familia corta a cualquier circunferencia de la otra en ángulo recto (?). Como suele decirse, estas familias son mutuamente *ortogonales.*



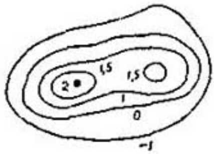
Ofreceremos otro ejemplo más de una función simple, cuyas líneas de nivel son radios vectores que salen de un punto, mientras el gráfico, resulta una superficie bastante compleja. Esta función $f(M) = \widehat{MAB}$ (A y B son puntos dados del plano). Sus gráficos sobre cada semiplano, en los que la recta AB divide el plano, es *una superficie helicoidal*, o *helicoide.*



Mapa de la función. Como vemos, para muchas funciones es bastante difícil dibujar sus gráficos espaciales. Como regla, un método más cómodo para mostrar el comportamiento de la función en el plano es dibujar el mapa de sus líneas de nivel.

Los mapas geográficos físicos se hacen de la forma siguiente. Supongamos, que $f(M)$ es la altura de la superficie en el punto M, sobre el nivel del mar. Entonces se trazan las líneas de nivel $\{M: f(M) = 200 \text{ m}\}$, $\{M: f(M) = 400 \text{ m}\}$, etc. Las zonas entre estas líneas de nivel se pintan de diferentes colores: la zona $\{M: 0 < f(M) < 200 \text{ m}\}$, de verde; las zonas $\{M: f(M) > 200 \text{ m}\}$, de marrón, y las zonas $\{M: f(M) < 0\}$, de azul de diferentes matices.

Para componer el mapa de la función, hay que trazar varias de sus líneas de nivel, pero en número suficiente para que por ellas se pueda juzgar cómo están situadas las demás, y escribir sobre cada una de ellas a qué valor de la función (a qué h) corresponde.



Si nos ponemos de acuerdo en trazar las líneas de nivel a intervalos iguales según el valor de la función 0, $\pm d$, $\pm 2d$, . . ., entonces conforme sea la densidad de dichas líneas se podrá juzgar sobre la pendiente del gráfico: las líneas serán tanto más frecuentes cuanto mayor sea la inclinación del gráfico hacia el plano horizontal.

Líneas de separación. Al resolver el problema 3.23 (sobre el queso) examinamos una función bastante complicada

$$f(M) = \text{mín}\,\{|MC_1|, |MC_2|, \ldots, |MC_n|\},$$

la cual yuxtapone a cada punto M del plano la menor de las distancias desde dicho punto hasta los puntos dados $C_1, C_2, \ldots, C_n$. En la resolución del problema 3.23, en realidad nos hacía falta no tanto esta función como las líneas de división del plano en polígonos vinculadas con la misma. Imaginémonos el mapa y el gráfico de esta función. Empezaremos por los casos más simples $n = 2$ y $n = 3$.

5.2. a) En el plano hay dos puntos C_1 y C_2. Trazar el mapa de las líneas de nivel de la función $f(M) = \text{mín}\,\{|MC_1|, |MC_2|\}$.

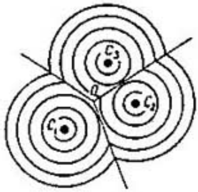
b) En el plano se dan tres puntos: C_1, C_2 y C_3. Trazar el mapa de las líneas de nivel de la función $f(M) = \text{mín}\{|MC_1|, |MC_2|, |MC_3|\}$.

□ a) Examinemos el conjnto de puntos M, pa,a los cuales $|MC_1| = |MC_2|$. Como ya sabemos, resulta rá ser la mediatriz del segmento C_1C_2. Esta divide el plano en dos semiplanos; los puntos de uno de ellos están más cerca de C_1, mientras los del otro, más cerca de C_2.

Así pues, en un semiplano $f(M) =$

$= |MC_1|$, y en el otro, $f(M) = |MC_2|$. Por consiguiente, en el primer semiplano hay que trazar las líneas de nivel de la función $f(M) = |MC_1|$ que representan una serie de circunferencias, y reflejar este mapa simétricamente con relación a la mediatriz.

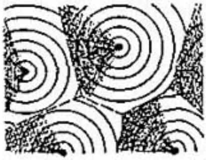
b) Examinemos los conjuntos de puntos donde $|MC_1| = |MC_2|$; $|MC_2| = |MC_3|$ y $|MC_1| = |MC_3|$. Los hemos examinado en el problema 3.1: son las tres mediatrices del triángulo $C_1C_2C_3$, que se encuentran en un mismo punto. Tres rayos de estas mediatrices, que comienzan en el punto O, dividen el plano en tres dominios. Está claro que en el dominio del punto C_1, $f(M) = |MC_1|$; en el de C_2, $f(M) = |MC_2|$; y en el de C_3, $f(M) = |MC_3|$. De este modo, el mapa de la función $f(M) = \text{mín}\{|MC_1|, |MC_2|, |MC_3|\}$ representa la unión de tres mapas, pegados por la línea de separación, por los tres rayos. □



El gráfico de la función

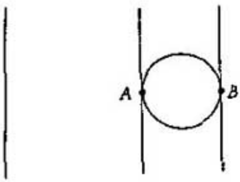
$$f(M) = \text{mín}\{|MC_1|, |MC_2|, \ldots, |MC_n|\}$$

uno puede imaginárselo del siguiente modo. Si en un cajón se echa una gruesa capa llena de arena y en el fondo del mismo, en los puntos C_1, C_2, C_3, se abren tres orificios, la arena, al ir saliendo, formará su respectivo «embudo» en torno a cada uno de ellos, entonces la superficie de todos los embudos constituirá justamente el gráfico de la función f. (Claro está, que la arena deberá elegirse de una calidad que proporcione al embudo declive natural de 45°.)



Recurriremos ahora a los problemas 3.11 y 3.12.. En sus condiciones también se pueden ver algunas funciones en el plano.

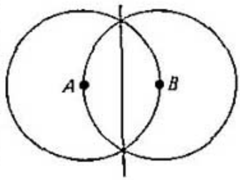
5.3. Sean dos puntos A y B en el plano. Trazar el mapa de las líneas de nivel de las funciones:



a) $f(M)=\text{máx}\{\widehat{AMB}, \widehat{BAM}, \widehat{MBA}\}$

b) $f(M)=\text{mín}\{|AM|, |MB|, |AB|\}$,

y describir sus gráficos.

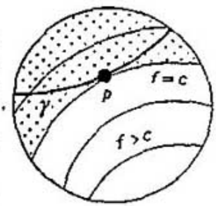


Valores extremos de las funciones. Sea f una función dada en el plano. Representemos su gráfico como una región de colinas. Los valores máximos de $f(M)$ corresponden a la altura de la cumbre de las montañas de su gráfico, mientras los mínimos, a la profundidad de las cavidades.

En el mapa de las líneas de nivel de la función, como regla, las cumbres de las montañas y las cavidades están rodeadas por líneas de nivel. Por ejemplo, para la función $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$, el valor mínimo de M_0 es el punto medio del segmento AB, y las líneas de nivel son circunferencias concéntricas cuyo centro es el pnuto M_0.

Para la función $f(M) = \widehat{AMB}$ tenemos un cuadro más complicado. Esta función alcanza su valor máximo igual a π solamente en todos los puntos del segmento AB, y su valor mínimo O en los demás puntos de la recta que pasa por AB. El paso del valor máximo al mínimo en los puntos A y B no es suave (en ellos f no está definida): aquí el gráfico tiene precipicios verticales.

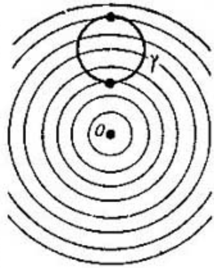
Al principio del capítulo hemos utilizado el mapa de las líneas de nivel para resolver el problema 5.1. Este también resulta un problema en el que es necesario determinar el máximo, pero de otro tipo. En su aspecto general el problema se formula así: *hallar qué valor máximo o mínimo adquiere la función f, dada en el plano, sobre cierta curva γ* (en el problema examinado γ es una recta). La observación que hemos hecho en el problema 5.1 se refiere también a otros problemas semejantes: por regla general, *el mayor (y el menor) valor se alcanzará en aquellos puntos, donde γ sea tangente a las líneas de nivel de la función f*[1]).



Supongamos que el valor máximo de la función f en la curva γ se alcanza en el punto P y es igual a $f(P) = c$.

[1]) O bien en el punto, donde la propia función f adquiere su máximo, si la curva γ pasa por dicho punto.

Entonces la curva γ no puede entrar en el dominio $\{M: f(M) > c\}$, debe pertenecer por entero al dominio complementario $\{M: f(M) \leqslant c\}$, además, el punto P está en la línea de separación entre estos dominios: en la línea de nivel $\{M: f(M) = c\}$. De esta manera, la curva γ no puede pasar a través de la línea de nivel $\{M: f(M) = c\}$, o sea, tendrá que ser tangente a la misma en el punto P.



Hemos visto como este principio de «tangencia» se manifiesta en los problemas del § 4 para hallar el extremo. En estos problemas buscábamos el máximo y el mínimo de funciones simples:

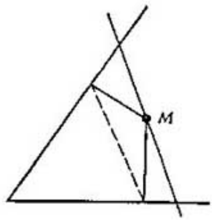
$$f(M) = \rho(M, l),$$

$$f(M) = \widehat{MOA}, \quad f(M) = |MA|$$

en la curva dada γ. Las líneas de nivel que corresponden al valor extremal resultaban tangentes a γ. Como regla, esta curva γ representaba una circunferencia. Algunos de los siguientes problemas se reducen asimismo a que es necesario determinar el máximo (o el mínimo) de la función en dada circunferencia o recta.

5.4. a) En la hipotenusa del triángulo rectángulo dado, hallar el punto para el cual la distancia entre sus proyecciones sobre los catetos es la mínima.

b)* En dada recta hallar el punto M de modo que la distancia entre sus proyecciones sobre los lados de dado ángulo sea la mínima. ↓



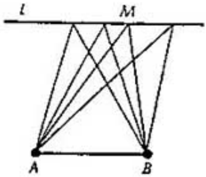
5.5. Sea dada una circunferencia con el centro O y el punto A dentro de ella. Hallar en la circunferencia el punto M para el cual el valor del ángulo AMO sea el máximo.

5.6. A y B son dos puntos dados. Hallar sobre dada circunferencia γ el punto M, desde el cual

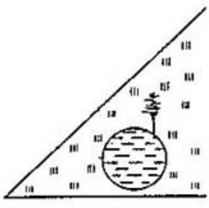
a) la suma de los cuadrados de las distancias,

b) la diferencia de los cuadrados de las distancias

hasta los puntos A y B sea la mínima.



5.7. Sean una recta l y un segmento AB paralelo a ella. Determinar las posiciones del punto M sobre la recta l en las cuales el valor de $|AM|/|MB|$ tome los valores máximo y mínimo. ↓



5.8. Entre dos caminos rectos está situado un lago. ¿En qué lugar de la orilla de éste hay que construir un sanatorio para que la suma de las distancias desde el mismo hasta los dos caminos sea el mínimo? Examine el caso cuando el lago tiene forma de a) círculo, b) rectángulo.

Señalemos que para hallar el máximo de la función $y=f(x)$ de una variable nos guiamos por el «principio de tangencia». Supongamos que en un plano está trazado el gráfico de la función f: cierta curva. Determinar el máximo de la función significa encontrar el punto más alto del gráfico. Es evidente que para esto es necesario trazar una recta tangente al gráfico y paralela al eje Ox; además trazarla de modo que todo el gráfico quede debajo de dicha recta.