# 6 Curvas de segundo grado

**Elipses, hipérbolas, parábolas.**

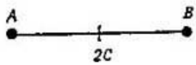
Hasta ahora nos hemos limitado a un pequeño conjunto de líneas, que se estudian en la escuela detalladamente: rectas y circunferencias. A ellas se han reducido todos los puntos del alfabeto, de A a J. En este capítulo vamos a examinar algunas otras curvas: elipses, hipérbolas y parábolas. Todas estas curvas se denominan «secciones cónicas» por cuanto pueden obtenerse en la intersección del plano con la superficie de un cono, como se muestra en la figura de la pag. 124.

En nuestro libro los elipses, las hipérbolas y las parábolas serán definidas al principio geométricamente, como continuación del «alfabeto» del §2. Más adelante intervendrán como envolventes de ciertas familias de rectas. Y, al final, empleando el método de coordenadas, veremos que estas curvas se dan con ecuaciones geométricas de segundo orden. La demostración de la equivalencia de estas definiciones no es simple. Sin embargo, todas ellas son útiles, cada definición nueva permite resolver con menos dificultades un tipo nuevo de problemas.

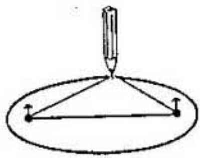
Así pues, continuaremos el alfabeto con nuevas letras K, L, M, algo más tarde, con la N.

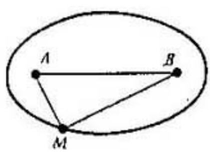
**K. La elipse.** Examinemos *el conjunto de puntos de una curva plana en la que es constante la suma de las distancias de sus puntos $M$ a dos puntos fijos $A$ y $B$.*

Designemos este valor constante (según la costumbre) por $2a$, y la distancia $|AB|$ entre los puntos $A$ y $B$, por $2c$. Observemos que siendo $a \leqslant c$, este conjunto presenta poco interés: para $a < c$, el conjunto buscado es vacío, ya que en el plano no hay ningún punto $M$ para el cual $|AM| + |MB| < |AB|$; y si $a = c$, el conjunto representa en sí el segmento $AB$.

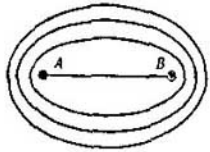



Para ver lo que resulta siendo $a > c$, procederemos de la siguiente manera. En los puntos $A$ y $B$ clavamos dos puntas y pasamos por fuera de éstas un hilo con los extremos anudados cuya longitud sea $2(a + c)$; si hacemos correr un lápiz por dentro del hilo, de forma que siempre se mantenga bien tirante, obtendremos cierta curva cerrada que se llama *elipse.* Los puntos $A$ y $B$ son *los focos* de la elipse. De la definición de la





elipse es evidente que ésta tiene dos ejes de simetría: la recta $AB$ y una recta perpendicular a ella que pasa por el centro $O$ del segmento $AB$. Los segmentos de estas dos rectas situadas dentro de la elipse son sus *ejes*, y el punto $O$, su *centro*.

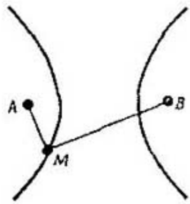



Cambiando la longitud del hilo tracemos toda una familia de elipses con los focos dados; con otras palabras, el mapa de las líneas de nivel de la función

$$f(M) = |MA| + |MB|.$$

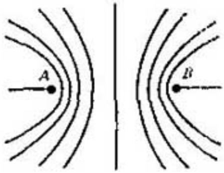
**L. La hipérbola.** Examinemos *el lugar geométrico de una curva en la que la diferencia de las distancias de sus puntos a dos puntos fijos $A$ y $B$ sea igual (por el módulo) a un valor constante* $2a$ $(a > 0)$.

Sea, como antes, que $|AB| = 2c$. Siendo $a > c$, el conjunto L es vacío, ya que en el plano no hay ningún punto $M$ para el cual $|AM| - |MB| > AB$ o $|MB| - |MA| > |AB|$; siendo $a = c$ conjunto L representa dos rayos de la recta $AB$, es decir de la recta $(AB)$ hay que excluir el segmento $[AB]$.




En el caso de que $a < c$, el conjunto L consta de dos líneas (ramas), representadas en la figura (una es el conjunto $\{M: |MA| - |MB| = 2a\}$, y la otra, el conjunto $\{M: |MB| - |MA| = 2a\}$. Este conjunto se denomina *hipérbola*, y los puntos $A$ y $B$ son sus *focos*.

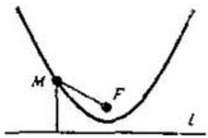
De la definición del conjunto L es evidente que la hipérbola tiene dos ejes de simetría. El punto medio $O$ del segmento $AB$ se llama *centro* de la hipérbola.




Para obtener todo el mapa de las líneas de nivel de la función

$$f(M) = | \, |MA| - |MB| \, |,$$

hay que añadir a la familia de hipérbolas con focos $A$ y $B$ la mediatriz del segmento $AB$ (ésta corresponde al valor $f(M) = 0$).




**M. La parábola.** *El lugar geométrico de la curva cuyos puntos equidistan de un punto $F$ y de una recta $l$ dados, se llama parábola.*

El punto $F$ se llama *foco* de la parábola y la recta $l$, *directriz*.

La parábola tiene un eje de simetría, que pasa por el foco $F$ y es perpendicular a la directriz.

Hagamos el primer resumen. Hemos completado el alfabeto con tales conjuntos

K. $\{M: |MA| + |MB| = 2a\}$,

L. $\{M: | \, |MA| - |MB| \, | = 2a\}$,

M. $\{M: |MF| = \rho(M, l)\}$.

Ahora sabemos que si el problema se reduce a uno de los conjuntos K, L ó M la respuesta será una elipse, una hipérbola o una parábola. Claro está, además de indicar el nombre, en la respuesta hay que determinar las dimensiones de la figura y su disposición; por ejemplo, señalar los focos y el número $a$.

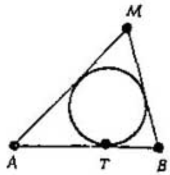
6.1. En el plano están dados los puntos $A$ y $B$. Hallar el conjunto de puntos $M$ para los cuales:

a) el perímetro del triángulo $AMB$ es igual a un valor constante $p$;

b) el perímetro del triángulo $AMB$ no es mayor que $p$;

c) la diferencia $|MA| - |MB|$ no es menor de $d$.

6.2. Sean el segmento $AB$ y el punto $T$ sobre él. Determinar el conjunto de puntos $M$ para los cuales la circunferencia inscrita en el triángulo $AMB$ es tangente al lado $AB$ en el punto $T$.




6.3. Hallar el conjunto de centros de las circunferencias que son tangentes

a) a una recta y pasan por un punto dados;

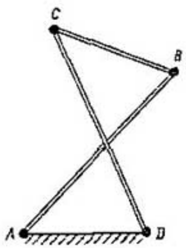
b) a una circunferencia dada y pasan por un punto fijo dentro de ésta;

c) a una circunferencia dada y pasan por un punto fijo fuera de ésta;

d) a una circunferencia y una recta dadas;

e)* a dos circunferencias dadas. ↓

6.4. En una articulación quebrada cerrada $ABCD$, para la cual $|AD| = |BC| = a$ y $|AB| = |CD| = b$ el elemento $AD$ está fijo.

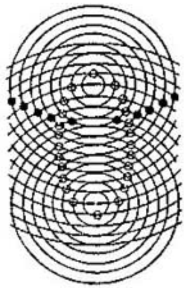


Hallar el conjunto de puntos de intersección de las rectas $AB$ y $CD$

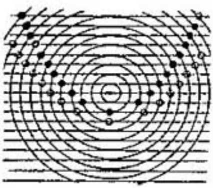
a) siendo $a < b$;

b) siendo $a > b$.

6.5. a) En un plano hay dos puntos $A$ y $B$, la distancia entre los cuales es un número entero $n$ (en la figura $n = 12$). Están trazadas todas las circunferencias de radios de números enteros con los centros $A$ y $B$. En la red obtenida viene señalada la sucesión de los nudos (es decir los puntos de intersección de las circunferencias), en la cual cada dos nudos vecinos son los vértices opuestos de un cuadrilátero curvilíneo. Demostrar que todos los puntos de dicha sucesión se encuentran sobre una elipse o sobre una hipérbola.



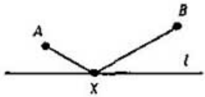
b) En el plano se da una recta $l$, y sobre ella, el punto $F$. Están trazadas todas las circunferencias cuyos radios son números enteros y el centro en $F$, así como también todas las rectas paralelas a $l$ que se hallan a la distancia de un número entero de ésta. Demostrar que todos los puntos de la sucesión de los nudos de la red, construida igualmente que en el problema a), se encuentran sobre una parábola con el foco $F$.



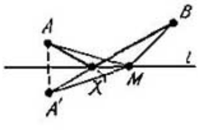
Las superficies que se obtienen girando en el espacio la parábola, la elipse y la hipérbola alrededor de sus ejes de simetría se llaman, respectivamente, *paraboloide, elipsoide* e *hiperboloide de revolución.*

**Focos y tangentes.** Muchos problemas interesantes sobre las elipses, las hipérbolas y las parábolas están relacionados con las propiedades de las tangentes a dichas curvas. La propiedad principal de la tangente a la elipse la obtendremos comparando dos soluciones del siguiente problema de construcción sencillo.

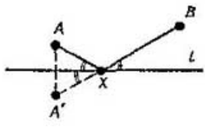
6.6. Sean una recta $l$ y dos puntos $A$ y $B$ a un lado de ésta. Hallar sobre la recta $l$ un punto $X$ tal para el cual la suma de las distancias $|AX| + |XB|$ hasta los puntos $A$ y $B$ sea la mínima.



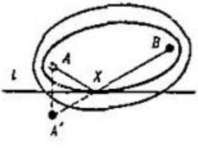

□Examinemos el punto $A'$, simétrico al punto $A$ respecto a la recta $l$. Para todo punto $M$ de dicha recta $|A'M| = |AM|$. Por lo tanto, la suma $|AM| + |MB| = |A'M| + |MB|$ adquiere el valor mínimo de $|A'B|$ en el punto $X$, de intersección del segmento $A'B$ con la recta $l$. □




Observemos que el punto $X$ posee la siguiente propiedad: *los segmentos* $AX$ y $BX$ *forman ángulos iguales con la recta* $l$.



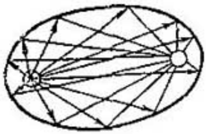

Si hubiéramos resuelto el problema 6.6 según el esquema general descrito en el § 5, es decir con ayuda de las líneas de nivel, tendríamos que haber procedido así: trazar la familia



de elipses $\{M: |AM| + |MB| = c\}$ con los focos $A$ y $B$, dependientes del parámetro $c$, y elegir entre estas elipses aquella que sea tangente a la recta $l$.

De este modo, *el punto $X$ es el punto de tangencia de la elipse* (con los focos $A$ y $B$) *y la recta $l$*. En realidad, todos los demás puntos $M$ de la recta distintos a $X$ están situados fuera de la elipse, o sea, para ellos la suma $|AM| + |MB|$ resulta mayor.

Comparando la primera solución con la segunda obtenemos la llamada propiedad focal de la elipse: *los segmentos que unen el punto $X$ de la elipse con sus focos forman ángulos de igual valor con la tangente trazada a la elipse en el punto $X$.*

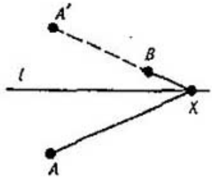


Esta propiedad tiene una palmaria interpretación física. Si la superficie de un reflector (un faro) se hace en forma de un trozo de elipsoide, y la lámpara—manantial puntiforme de luz— se coloca en un foco $A$, entonces, después de reflejados, los rayos convergen en el otro foco $B$.

Análoga a esta propiedad de la elipse es la propiedad focal de la hipérbola: *los segmentos que unen el punto $X$ de la hipérbola con sus focos forman ángulos de igual valor con la tangente en el punto $X$.* Esta propiedad se puede demostrar resolviendo el siguiente problema de dos formas.

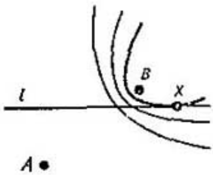
6.7. Sean la recta $l$ y dos puntos $A$ y $B$ a diferentes lados de ésta;

además, el punto $A$ se halla situado más lejos de la recta $l$ que el punto $B$. Hallar sobre la recta un punto $X$ para el cual la diferencia de las distancias $|AX| - |BX|$ sea la máxima.

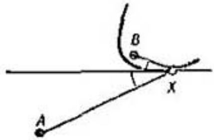



Una solución nos lleva a la siguiente respuesta: si designamos por $A'$ el punto simétrico al punto $A$ respecto a la recta $l$, entonces el punto buscado $X$ será el punto de intersección de la recta $A'B$ con la recta $l$ (?). Es claro, que para este punto $X$ los segmentos $AX$ y $XB$ forman ángulos iguales con la recta $l$.

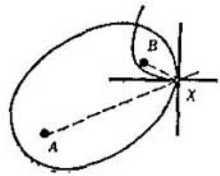
La otra solución (según el esquema general) nos lleva a la siguiente respuesta: $X$ es el punto de tangencia de la recta $l$ con cierta hipérbola (cuyos focos son $A$ y $B$). Comparando estas dos respuestas llegamos a la propiedad focal de la hipérbola.




De las propiedades focales se deduce un corolario interesante que se refiere a la familia de todas las elipses e hipérbolas con las focos dados $A$ y $B$.



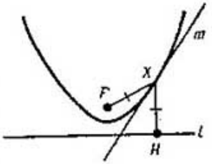

Examinemos una elipse y una hipérbola que pasan por cierto punto $X$. Tracemos por el punto $X$ unas rectas que formen ángulos iguales con las rectas $AX$ y $BX$. Resulta evidente que estas rectas son perpendiculares entre sí.




De las propiedades focales se deduce que una recta es la tangente a la elipse, y la otra, tangente a la hipérbola. De esta forma, las tangentes a la elipse y a la hipérbola son perpendiculares, o sea, las familias de elipses e hipérbolas con los focos $A$ y $B$ son mutuamente ortogonales (véase la pág.102): cada curva de una familia corta a cada curva de la otra en ángulo recto.

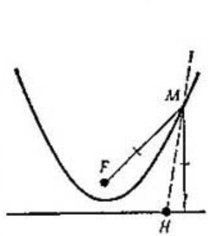
Estas dos familias se verán bien en el gráfico referente al problema 6.5a), al pintar los cuadros en forma escaqueada.

**Propiedad focal de la parábola.** Sea una parábola con el foco $F$, la directriz $l$ y cierto punto $X$ en aquélla. Entonces *la recta $XF$ y la perpendicular bajada desde $X$ a $l$ forman ángulos iguales con la tangente a la parábola en el punto $X$.*




Demostrémoslo. Supongamos que $H$ es la base de la perpendicular bajada desde $X$ a $l$. Según la definición de la parábola, $|XF| = |XH|$. Por consiguiente, el punto $X$ se encuentra sobre la mediatriz $m$ del segmento $FH$.

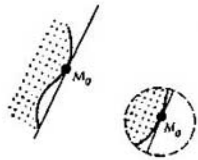
Ahora demostremos que la recta $m$ es tangente a la parábola. Para eso mostraremos que sólo tiene un punto común con la parábola (precisamente el punto $X$) y que toda la parábola está situada a un lado de la recta $m$. Dicha recta divide el plano en dos semiplanos. Uno de ellos está compuesto por los puntos $M$, situados, más cerca de $F$ que de $H$.



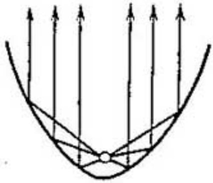

Mostremos que la parábola se halla situada en este semiplano, o sea, que para cualquier punto $M$ de ella (diferente del punto $X$) $|MF| <$

$< |MH|$. En efecto, $|MF| = = \rho(M, l)$ mientras $\rho(M. l) < |MH|$ (la perpendicular es más corta que cualquier línea inclinada).

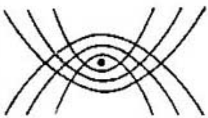
**Observación.** Para todas las curvas que hemos examinado, la tangente se definía así: tangente a una curva $\gamma$ en el punto $M_0$ es la recta $l$ que pasa por dicho punto de modo que la curva (o, por lo menos, parte de ella encerrada en cierto círculo con el centro en $M_0$) está situada a un lado de esta recta.




La propiedad focal de la parábola se puede emplear del modo siguiente. Si se hace un espejo en forma de paraboloide y se coloca una lámpara en el foco $F$, obtendremos un proyector: todos los rayos reflejados serán paralelos al eje del paraboloide.



6.8. Examinemos todas las parábolas con un foco y un eje vertical dados, evidentemente, se dividen en dos familias: en las parábolas de una familia las ramas van hacia arriba, mientras que en las de la otra, hacia abajo. Demostrar que toda parábola de una familia es ortogonal a cualquier parábola de la otra familia.

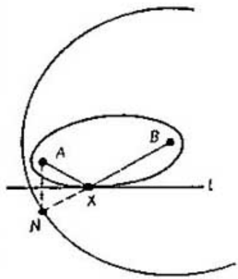


Las dos familias de parábolas de que estamos tratando en este problema se verán, al pintar en el gráfico del problema 6.5, b) los cuadros en forma escaqueada.

Las soluciones de los problemas siguientes se apoyan solamente en las definiciones de las curvas y sus propiedades focales.

6.9. a) Sea dada una elipse con los focos $A$ y $B$. Demostrar que el conjunto de puntos simétricos al foco $A$, con respecto a todas las tangentes a la elipse, es una circunferencia.

b) Demostrar que el conjunto de pies de las perpendiculares bajadas desde el foco $A$ a todas las tangentes a la elipse es una circunferencia.

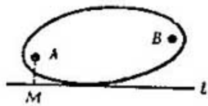



□ a) Supongamos que $l$ es la tangente a la elipse en el punto $X$ y que $N$ es el punto simétrico al foco $A$ con relación a $l$. Entonces, como ya sabemos (véase el problema 6.6), el punto $X$ se halla sobre la recta $NB$ y la distancia

$$|NB| = |AX| + |XB|$$

es constante. Vamos a designarlo, como antes, por $2a$. Así pues, la distancia desde $N$ hasta $B$ es constante, y el conjunto buscado es una circunferencia cuyo centro es $B$ y el radio, $2a$.

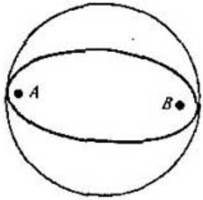
b) Supongamos que $M$ es el pie de la perpendicular bajada desde el punto $A$ sobre $l$. Es claro que



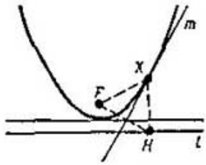

$$|AM| = \frac{1}{2}|AN|.$$

Del problema 6.9. a) sabemos que el conjunto de puntos $N$ es una circunferencia y el problema se reduce al siguiente. Sea una circunferencia con centro en $B$ de radio $2a$ y el punto $A$

dentro de ella. Hallar el conjunto de puntos medios de los segmentos $AN$, donde $N$ es un punto arbitrario de la circunferencia. Este conjunto es una circunferencia de radio $a$ con centro en el punto medio $O$ del segmento $AB$. □




6.10. a), b) Demostrar las afirmaciones de los puntos a) y b) del problema 6.9 para una hipérbola.




6.11. Sea una hipérbola con el foco $F$ y la directriz $l$.

a) Hallar el conjunto de puntos simétricos al foco $F$ con relación a todas sus tangentes.

b) Demostrar que el conjunto de pies de las perpendiculares bajadas desde el foco $F$ hacia la tangente a la parábola es una recta paralela a $l$.

6.12.* a) Demostrar que el producto de las distancias desde los focos de la elipse hasta su tangente es un valor constante (que no depende de la tangente). ↓

b) Hallar el conjunto de puntos desde los cuales la elipse se ve en ángulo recto.

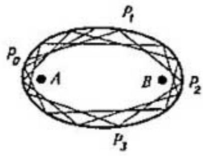
6.13.* Resolver el problema 6.12. a) para una hipérbola.

6.14.* Resolver el punto b) del problema 6.12 para una parábola.

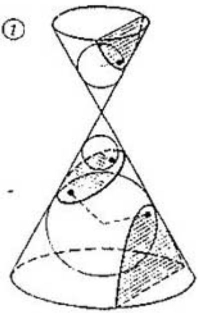
6.15.* Supongamos que la trayectoria $P_0P_1P_2P_3 \ldots$ de un haz luminoso dentro de una elipse especular no pasa por los focos $A$ y $B$ ($P_0$, $P_1$, $P_2$, . . . son puntos en la elipse). Demostrar que:

a) si el segmento $P_0P_1$ no pasa por el segmento $AB$, todos los demás segmentos: $P_1P_2$, $P_2P_3$, $P_3P_4$, . . . no cortarán al segmento $AB$ y serán tangentes a una misma elipse cuyos focos son $A$ y $B$; ↓

b) si el segmento $P_0P_1$ interseca a $AB$, todos los segmentos siguientes $P_1P_2$, $P_2P_3$, $P_3P_4$, . . ., lo intersecarán asimismo; además, las rectas $P_0P_1$, $P_1P_2$, $P_2P_3$, . . . serán tangentes a una misma hipérbola con focos en $A$ y $B$. ↓



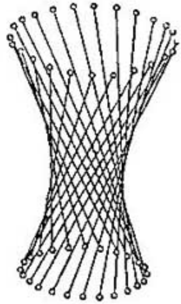

①



La sección de un cono por cualquier plano que no pase por su vértice es una elipse, una hipérbola o una parábola (fig. 1). Si en un cono se inscribe una esfera, que entre en contacto con la superficie secante, el punto de tangencia será el foco de la sección correspondiente, y la directriz será la línea de intersección del plano de corte con el plano de la circunferencia por el cual la esfera es tangente al cono.

La reunión de todas las rectas alejadas de una recta dada $l$ en el espacio a una distancia fija y que forman con $l$ cierto ángulo agudo es una superficie que se llama *hiperboloide de revolución de una hoja* (fig. 2). La misma superficie se puede obtener giran-

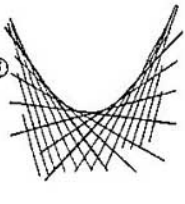
②



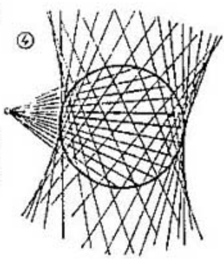
do la hipérbola alrededor de su eje de simetría $l$. La superficie tangente al hiperboloide en cualquier punto, lo corta por dos rectas. Las demás secciones planas de esta superficie, así como las del cono, son elipses, hipérbolas y parábolas.

Si dos puntos $P$ y $N$ avanzan uniformemente por dos rectas que se cortan, todas las rectas $PN$ o bien son paralelas entre sí o (en el caso general) tienen tangencia con la misma parábola (fig. 3). Si los puntos $P$ y $N$ se mueven en el espacio uniformemente por dos rectas que se cruzan, la reunión de todas las rectas $PN$ será la superficie de *un paraboloide hiperbólico* (silla de montar). El plano de corte tangente a la silla la interseca en cualquier punto por dos rectas; las demás secciones planas de la silla resultarán hipérbolas y parábolas. La superficie de la silla se puede obtener también como la reunión de todas las rectas que intersecan a dos dadas rectas cruzadas $l_1$ y $l_2$, permaneciendo paralelas a cierta superficie (que corta a $l_1$ y $l_2$).

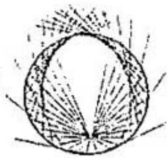
③



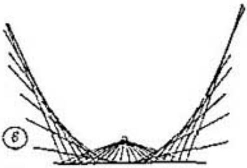
④



Las figuras *4-6* sirven de ilustración a los problemas 6.16 y 6.17. Observe que en nuestras figuras están trazadas solamente




familias de rectas; sin embargo, se crea la impresión de que en ellas vienen trazadas también las envolventes: una hipérbola, una elipse o una parábola.




**Las curvas como envolventes de rectas.** Hasta ahora las curvas que hemos examinado, es decir las circunferencias, elipses, hipérbolas, parábolas, surgían como conjuntos de puntos que satisfacían a ciertas condiciones. En los problemas siguientes estas curvas surgen de otra forma: como envolventes de cierta familia de rectas. La palabra «envolvente» quiere decir, sencillamente, que la curva tiene tangencia con todas las rectas de esta familia.

6.16. Sean una circunferencia con centro en $O$ y un punto $A$. Por cada punto $M$ de la circunferencia hay trazada una recta perpendicular al segmento $MA$. Demostrar que la envolvente de esta familia será:

a) una circunferencia, cuando $A$ coincide con el centro $O$;

b) una elipse, si $A$ está dentro de la circunferencia;

c) una hipérbola, si $A$ está fuera de la circunferencia. ↓

6.17. Sean una recta $l$ y cierto punto $A$. Por cada punto $M$ de dicha recta $l$ tracemos una recta perpendicular al segmento $MA$. Demostrar que la envolvente de esta familia de rectas será una parábola. ↓

Estas familias de rectas vienen representadas en la pág. 125. No es casual que todas ellas tengan envolvente: se puede demostrar que cualquier familia «suficientemente buena» de rectas es un conjunto de rectas paralelas, o bien un conjunto de rectas que pasan por un punto o, en el caso general, un conjunto de tangentes a cierta curva (envolvente de esta familia).

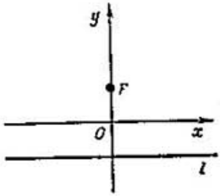
**Ecuaciones de las curvas.** Hemos empezado el presente parágrafo por las definiciones geométricas de la elipse, la hipérbola y la parábola. Mucha información nueva sobre estas curvas se puede obtener empleando el método de coordenadas.

Empecemos por la parábola. Es bien conocida la definición analítica de la parábola como el gráfico de la función

$$y = ax^2 \qquad (1)$$

Mostremos que la definición geométrica de la parábola, dada anteriormente, nos conlleva a esta ecuación.

Supongamos que la distancia del punto $F$ a la recta $l$ es igual a $2h$. Elijamos el sistema de coordenadas $Oxy$ de modo que el eje $Ox$ vaya paralelo a $l$ y equidiste de $F$ y de $l$, mientras que el eje $Oy$ pase por el punto $F$ (es evidente, que $Oy$ será el eje de simetría de la parábola). La ecuación que se obtiene de la definición geométrica de la parábola, se transforma fácilmente en (1):




$$\sqrt{x^2 + (y-h)^2} = |y+h|,$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2yh + h^2 = y^2 + 2yh + h^2,$$

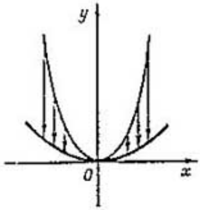
$$\Updownarrow$$

$$y = x^2/(4h)$$

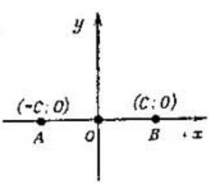
(basta con que $a = 1/(4h)$).

El gráfico de cualquier función $y = ax^2 + bx + c$, también es una parábola. Se obtiene de la parábola $y = ax^2$ mediante el traslado paralelo.

Empleando la homotecia $(x;\ y) \to (ax;\ ay)$ con el coeficiente $a$ la parábola $y = x^2$ se transforma en la parábola $y = ax^2$. Así pues, todas las parábolas son semejantes entre sí. Pero las parábolas con distintos valores de $a$ no son congruentes: cuanto mayor sea $a$, tanto más «agudo será el vértice» de la parábola. Señalemos, que la parábola $y = ax^2$ se puede obtener de la parábola $y = x^2$ mediante la compresión (o extensión) de una de las coordenadas; transformando $(x;\ y) \to (x\sqrt{a};\ y)$ así como también $(x;\ y) \to (x;\ y/a)$.




Examinemos ahora *la elipse* y *la hipérbola* con los focos $A$ y $B$. Dirigiendo sus ejes de simetría por los ejes $Ox$ y $Oy$ del sistema ortogonal de coordenadas, los puntos $A$ y $B$ ten-



drán entonces las coordenadas $A(-c;0)$ y $B$ $(c;\ 0)$, obtendremos la siguiente ecuación de la elipse:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad (\text{donde } a>c). \quad (2')$$

Deshaciéndonos de los radicales, esta ecuación se puede presentar en una forma más cómoda:

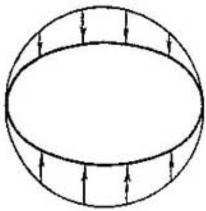
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ donde } b=\sqrt{a^2-c^2}. \quad (2)$$

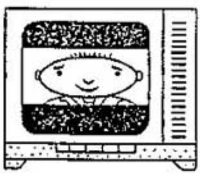
Cómo pasar de (2') a (2) lo veremos sucintamente más adelante.

De la ecuación (2) se deduce que la elipse se puede obtener también de la forma siguiente: tomando una circunferencia de radio $a$

$$x^2+y^2=a^2$$

y reduciendo sus ordenadas en la proporción $a/b$ respecto al eje $Ox$. Durante una compresión semejante el punto $(x;\ y)$ pasará al punto $(x;\ y')$, donde $y'=yb/a$. (Sustituyendo $y=y'a/b$ en la ecuación de la circunferencia obtendremos la ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$). Por consiguiente, si usted tiene televisor puede obtener la elipse sin ayuda de hilos y clavos; sólo es necesario conectar la televisión cuando se está transmitiendo la imagen de sintonización y mover la manilla «desviación horizontal»; entonces, todas las circunferencias se convertirán en elipses. Se puede prescindir del televisor: la sombra que arroja sobre la mesa un plato inclinado también es una elipse.





Dos elipses son semejantes entre sí si tienen igual la relación $b/a$.

Eligiendo el mismo sistema de coordenadas que en el caso de la elipse, obtenemos la ecuación de la hipérbola

$$\left| \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \right| = 2a, \quad \text{donde } a < c, \qquad (3')$$

o, después de simplificarla,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } b = \sqrt{c^2 - a^2}. \quad (3)$$

Para estudiar el comportamiento de la hipérbola en un cuadrante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ trazaremos el gráfico de la función

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

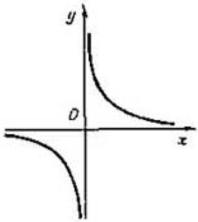
Es evidente que dicha función está definida si $x \geqslant a$ y cre monótonamente. Resulta menos claro que, a aumentar $x$, la hipérbola se va aproximando cada vez más sin llegar a alcanzar la recta $y = \frac{b}{a}x$, o sea, que como suele decirse tiene a esta recta como *asíntota*[1]). En total, la hipérbola tiene dos asíntotas: $y = bx/a$ y $y = -bx/a$.

A menudo se choca con otra ecuación, cuyo conjunto de soluciones se

[1]) Más exactamente estas palabras significan que para toda secuencia $x_n$, que tiende a valores infinitamente grandes, la diferencia de $\left| \frac{b}{a}\sqrt{x_n^2 - a^2} - \frac{b}{a}x_n \right|$ tiende a cero. Este hecho se puede demostrar fácilmente a partir de la igualdad:

$$x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}.$$

llama hipérbola. Tal es la siguiente ecuación:



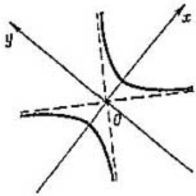

$xy = d$ ($d$ es cierto número, $d \neq 0$). (4)

¿Qué sucede? ¿Es otra curva o es la misma?

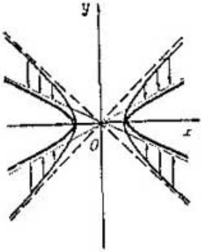
Por supuesto, la curva es la misma. Más exactamente: la ecuación $xy = d$ nos da una hipérbola con asíntotas perpendiculares. La ecuación ordinaria (3) para una hipérbola así tiene el siguiente aspecto:

$$\frac{x^2}{2d} - \frac{y^2}{2d} = 1,$$

pero se obtienen diferentes ecuaciones porque elegimos distintos sistemas de coordenadas: en un caso, por ejes de coordenadas tomamos las asíntotas de la hipérbola, mientras en el otro, sus ejes de simetría (?).




Antes hemos mostrado cómo se puede obtener una elipse comprimiendo una circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. De manera idéntica la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (con cualesquiera $a$ y $b$) puede ser obtenida de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ de asíntotas perpendiculares, mediante la reducción respecto al eje $Ox$ con el coeficiente $a/b$.




Dos hipérbolas son semejantes si tienen una misma proporción $b/a$ o, lo que es el mismo, si es igual el ángulo $2\gamma$ entre la asíntotas ($\operatorname{tg} \gamma = b/a$).

**Liberación de los radicales.** Mostraremos cómo de las ecuaciones (2′) y (3′) se pueden obtener simultáneamente otras más simples (2) y (3) (págs. 129—130). Supongamos que

$$z_1=\left(\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{2}\right)^2,$$

(3″)

$$z_2=\left(\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{2}\right)^2.$$

(2″)

No resulta difícil comprobar que $z_1+ + z_2 = x^2+y^2+c^2$, $z_1z_2=c^2x^2$ y $z_1 \leqslant \leqslant z_2$, o sea, $z_1$ y $z_2$ son correspondientemente las raíces menor y mayor de la ecuación

$$z^2-(x^2+y^2+c^2)\,z+c^2x^2=0 \qquad (5)$$

Las raíces de esta ecuación no son negativas, y siempre $z_1 \leqslant c^2$ mientras $z_2 \geqslant c^2$, ya que el trinomio cuadrado de la parte izquierda es mayor de cero, si $z=0$, y menor de cero, cuando $z=c^2$

Observemos que, siendo $z \neq 0$ y $z \neq c^2$, la ecuación (5) se puede escribir así:

$$\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{z-c^2}=1. \qquad (5')$$

Supongamos que $a^2<c^2$, $a>0$. Entonces $z=a^2$ es la raíz menor de la ecuación (5), $0<z<c^2$; por consiguiente, la igualdad

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (6)$$

(a condición de que $0<a<c$) es equivalente a (3′).

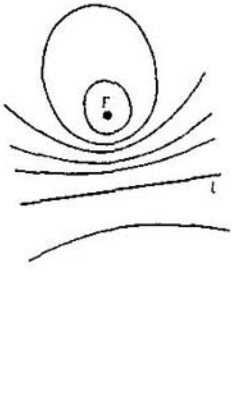
Poniendo que $b=\sqrt{c^2-a^2}$, obtenemos: (3) $\Longleftrightarrow$ (3′)

Supongamos que $a^2>c^2$, $a>0$ .Entonces $z=a^2$ es la raíz mayor de la ecuación

(5), $z > c^2$; luego la igualdad (6), a condición de que $a > c$, es equivalente a (2′). Poniendo $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ obtenemos que (2) $\Longleftrightarrow$ (2′).

Esta demostración muestra el método que permite a menudo deshacerse de los radicales: examinar simultáneamente con esta expresión las «conjugadas», que se diferencian de ella por los signos de los radicales.

**Fin del alfabeto.** Examinemos, por último, otra función más sobre el plano, cuyo mapa de líneas de nivel incluye los tres tipos de curvas que han aparecido en este capítulo. Será la última letra de nuestro alfabeto.




N. *Sean el punto $F$ y la recta $l$ que no contiene a aquél. El conjunto cuyos puntos cumplen la condición de que sus distancias hasta un foco $F$ y una recta $l$ se encuentran en relación constante $k$, es una elipse (siendo $k < 1$), una parábola (siendo $k = 1$), o una hipérbola (siendo $k > 1$).*

Demostremos esto. Apliquemos el mismo sistema de coordenadas que en el punto «parábola». La ecuación del conjunto buscado:

$$\frac{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}}{|y+h|} = k;$$

siendo $k = 1$, como hemos visto, es equivalente a la ecuación de la parábola $y = ax^2$, donde $a = 1/(4h)$. Siendo $0 < k < 1$, puede reducirse al aspecto

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1 \text{ (elipse)} \tag{7}$$

y siendo $k > 1$, al aspecto

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-d)^2}{b^2}=1 \text{ (hipérbola)}, \qquad (8)$$

donde en los dos casos

$a = 2kh/\sqrt{|k^2-1|}$, $b = 2kh/|k^2-1|$,
$d = h(k^2+1)/(k^2-1)$.

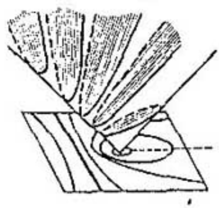
Las ecuaciones (7) y (8) se obtienen de las ordinarias (2) y (3) mediante el traslado paralelo, así como cambiando los papeles de $x$ e $y$. Ahora los focos de las curvas se encuentran sobre el eje $Oy$, y los centros están desplazados hacia un punto $(0; d)$. Se puede comprobar que el punto $F$ es el foco no sólo de la parábola, sino también de todas las elipses e hipérbolas. La recta $l$ es su directriz.

Así pues, hemos aclarado que el conjunto de líneas de nivel de la función

$$f(M) = \rho(M, F)/\rho(M, l)$$

consta de una parábola, de elipses y de hipérbolas.

Podíamos haber adivinado que en la respuesta tenían que resultar estas curvas, «secciones cónicas» (véase las págs. 111 y 124), razonando de la manera siguiente. Examinemos dos funciones sobre el plano: $f_1(M) = \rho(M, F)$ y $f_2(M) = k\rho(M, l)$. El gráfico de la primera (véase la pág. 100) es la superficie de un cono, y el de la segunda consta de dos semiplanos inclinados ($k$ es la tangente del ángulo de inclinación de dichos semiplanos con relación al horizonte). La intersección de estos dos gráficos es una elipse, una hipérbola o una parábola. Las proyecciones de estas curvas, situadas en el



plano inclinado, sobre el plano horizontal dan los conjuntos buscados

$$\{M : f_1(M) = f_2(M)\} = \{M : \rho(M, F) = $$
$$= k\rho(M, l)\}.$$

Al hacer la proyección, el aspecto de la curva cambiará igual que al comprimirla hacia la recta $l$ (en $\sqrt{k^2+1}$ veces). Por esto, las curvas buscadas son también elipses, hipérbolas y parábola.

Como ya nos hemos convencido reiteradamente, las curvas a las que está dedicado el presente capítulo —elipses, hipérbolas y parábolas— tienen muchas propiedades comunes o muy parecidas. La afinidad entre estas curvas tiene una sencilla explicación algebraica: todas ellas se dan por ecuaciones de segundo grado. Por supuesto, las ecuaciones características para estas curvas (1), (2), (3), (4), o sea

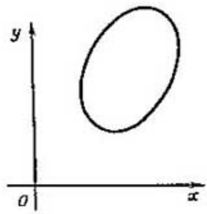
$$y = ax^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad xy = d,$$

solamente se obtienen en sistemas de coordenadas referidas al centro. Si se elige otro sistema de coordenadas, puede obtenerse una ecuación más complicada. Sin embargo, no es difícil demostrar que en cualquier sistema de coordenadas las ecuaciones de estas curvas tienen el aspecto

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + \\ + f = 0 \qquad (9)$$

(aquí $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, son ciertos números, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$).



Resulta notable que sea cierto también a la inversa: cualquier ecuación de segundo grado $p(x, t) = 0$, o sea, la ecuación de tipo (9) determina una de las curvas conocidas. Vamos a formular un teorema más exacto.

*La ecuación* (9) *determina una elipse, una hipérbola o una parábola solamente, si la parte izquierda no se descompone en factores* (entonces se obtendría un par de rectas) *y toma los valores con distintos signos* (de otra forma se obtendría un punto, una recta o un conjunto vacío).

De ahí es claro el origen del nombre común de las elipses, hipérbolas y parábolas: «curvas de segundo grado».

El importante teorema algebraico sobre las ecuaciones de segundo grado que hemos formulado, es muy cómodo para encontrar los conjuntos de puntos que satisfacen a una condición geométrica: si vemos que en cierto sistema de coordenadas esta condición se expresa con una ecuación de segundo grado, significa que el conjunto buscado es una elipse, una hipérbola o una parábola. (Claro está, en un caso degenerado puede obtenerse un par de rectas, una circunferencia —caso particular de una elipse—, un punto, etc.) Queda por hallar sus dimensiones y su situación en el plano (los focos, el centro, las asíntotas, etc.).

6.18. Hallar el conjunto de puntos, la suma de cuyas distancias hasta dos rectas dadas mutuamente perpendiculares es $c$ veces mayor que la distancia hasta su punto de intersección.

6.19. En el plano hay dadas la recta $l$ y el punto $A$. Determinar el conjunto de puntos:

a) la suma de las distancias desde los cuales hasta $A$ y $l$ es igual a $c$;

b) la diferencia de las distancias desde los cuales hasta $A$ y $l$ (según el módulo) es igual a $c$;

c) la relación de las distancias desde los cuales hasta $A$ y $l$ es menor de $c$, donde $c$ es una constante mayor de 0.

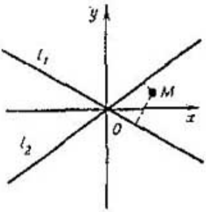
6.20. Hallar el conjunto de puntos

a) la suma

b) la diferencia

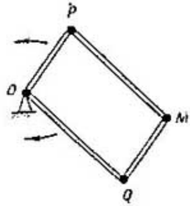
de los cuadrados de las distancias desde los cuales hasta dos dadas rectas que se cortan $l_1$, $l_2$ es igual a un valor fijo $d$. Trazar el mapa de las líneas de nivel de las funciones correspondientes:

a) $f(M) = \rho^2(M, l_1) + \rho^2(M, l_2)$,



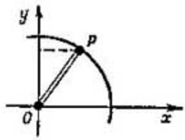
b) $f(M) = \rho^2(M, l_1) -$
$- \rho^2(M, l_2)$.

6.21. Sobre el plano hay dados el punto $F$ y la recta $l$. Trazar el mapa de las líneas de nivel de las funciones:
a) $f(M) = \rho^2(M, F) + \rho^2(M, l)$,
b) $f(M) = \rho^2(M, F) - \rho^2(M, l)$.

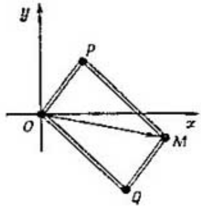



6.22. El vértice $O$ de un paralelogramo articulado $OPMQ$ está fijado, y los lados $OP$ y $OQ$ giran a una misma velocidad angular en distintas direcciones. ¿Por qué línea se mueve el vértice $M$?

□Sea que $|OP| = p$, $|OQ| = q$. Como las rectas $OP$ y $OQ$ giran en diferentes direcciones, en cierto momento coinciden. Tomemos este momento por el comienzo de cálculo: $t = 0$, y las rectas coincidentes, por el eje $Ox$ (el origen de las coordenadas lo situaremos en el punto 0). Supongamos que los lados $OP$ y $OQ$ giran a velocidad angular $\omega$. Entonces las coordenadas de los puntos $P$ y $Q$ en el momento de tiempo $t$ serán iguales, correspondientemente a




$(p \cos \omega t;\ p \operatorname{sen} \omega t)$,
$(q \cos \omega t;\ -q \operatorname{sen} \omega t)$.

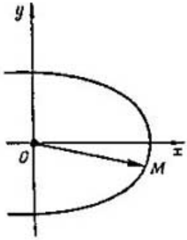



Por consiguiente, las coordenadas del punto $M(x;\ y)$ serán

$x = (p + q) \cos \omega t$,
$y = (p - q) \operatorname{sen} \omega t$

(ya que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$). Por lo tanto el punto $M$ recorre una elipse

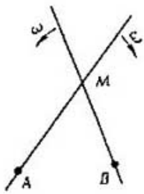
$$\frac{x^2}{(p+q)^2}+\frac{y^2}{(p-q)^2}=1. \quad \square$$




En la resolución de este problema hemos obtenido una elipse como un conjunto de puntos $(x, y)$ del aspecto

$x = a \cos \omega t, \quad y = b \operatorname{sen} \omega t$ (10)

($t$ es cualquier número real). Las ecuaciones de este tipo, que expresan las coordenadas $(x, y)$ a través de un parámetro complementario $t$, se llaman *paramétricas*. En el caso dado, como parámetro variable figura el tiempo.




6.23*. Sobre el plano, alrededor de dos puntos fijos $A$ y $B$ giran a una misma velocidad angular dos rectas que pasan por dichos puntos. ¿Qué línea describe el punto $M$ de su intersección, si las rectas giran en sentidos opuestos? ↓

6.24*. Hallar sobre el plano el conjunto de puntos $M$ para los cuales $\widehat{MBA} = 2\widehat{MAB}$, donde $AB$ es un segmento dado en el plano. ↓

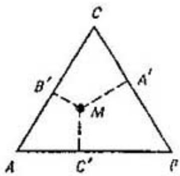
6.25*. a) Examinemos todos segmentos que de un ángulo dado cortan un triángulo de cierta área $S$. Demostrar que los puntos medios de estos segmentos se hallan sobre una misma hipérbola $G$ cuyas asíntotas son los lados del ángulo. ↓

b) Demostrar que todos estos segmentos tienen tangencia con la hipérbola $G$. ↓

c) Demostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola situado entre las asíntotas se divide por el punto de tangencia por la mitad. ↓

6.26*. a) Sea un triángulo isósceles $ABC$ ($|AC| = |BC|$).

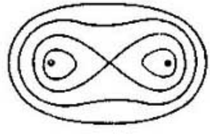
Hallar el conjunto de puntos $M$ del plano cuya distancia hasta la recta $AB$ es igual a la media geométrica de las distancias hasta las rectas $AC$ y $BC$.




b) Tres rectas, intersecándose, forman un triángulo isósceles. Hallar el conjunto de puntos $M$ cuya distancia hasta una de estas rectas es igual a la media geométrica de las distancias hasta las otras dos.

6.27. Sea dado en el plano un rectángulo $ABCD$. Hallar el conjunto de puntos $M$ para los cuales se cumple la condición $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$.

Curvas algebraicas. Resulta evidente que los conjuntos de puntos con que se puede chocar en los problemas geométricos no se limitan a las rectas y curvas de segundo orden. Expondremos dos ejemplos.

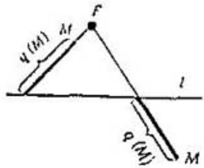


El conjunto de puntos para los cuales el producto de sus distancias hasta dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ es igual a cierto valor positivo $p$, se llama óvalo de Cassini. En la figura viene mostrada toda una familia de estas curvas, es decir, la familia de líneas de nivel de la función

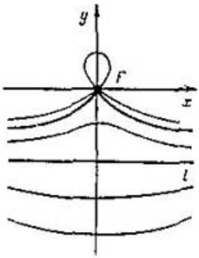
$$f(M) = \rho(M, F_1) \cdot \rho(M, F_2).$$

Las ecuaciones de dichas curvas se pueden escribir además así:
$[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2+y^2] = p^2$.
Particularmente es interesante el óvalo de Cassini en forma de «ocho» que resulta siendo $p = c^2$. Para $p < c^2$, la curva consta de dos pedazos separados que rodean los puntos $F_1$ y $F_2$.

Otro ejemplo. Sean el punto $F$ y la recta $l$. Designemos por $q(M)$ la distancia desde el punto $M$ hasta el punto de intersección de las rectas $FM$ y $l$. El conjunto de puntos $\{M: q(M) = d\}$ se llama *concoide de Nicomedes*. Su ecuación en el sistema de coordenadas, donde $F$ es el origen de las coordenadas y $l$ se da con la ecuación $y + a = 0$, se escribe de la siguiente forma:




$$(x^2 + y^2)(y + a)^2 - d^2y^2 = 0.$$



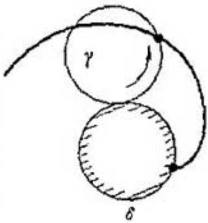

En general, la recta que se da según la ecuación $P(x, y) = 0$, donde $P(x, y)$ es un polinomio de $x$ e $y$, se llama *curva algebraica*. El grado del polinomio $P$ (a condición de que no se descomponga en factores) se llama *grado* de dicha curva. Por lo tanto, el óvalo de Cassini y la concoide son curvas de cuarto grado. Ya de estos dos ejemplos se ve que las curvas algebraicas (de grado mayor de 2) pueden poseer formas caprichosas, tener puntos singulares (puntos de pico, como la concoide cuando $a = d$, puntos de retroceso, dobles, etc.); el aspecto de estas curvas varía notablemente al cambiar los parámetros. En el siguiente parágrafo chocaremos todavía con algunas curvas nuevas.

# 7 Rodaduras y trayectorias

En este parágrafo conclusivo presentaremos al lector curvas notables, las cuales quedan definidas de modo natural como la trayectoria de puntos de una circunferencia que rueda sobre una recta o sobre otra circunferencia. Sus propiedades más interesantes están relacionadas con las tangentes. Al comienzo del libro hemos dicho que la envolvente de la familia de segmentos del problema 0.1, relativo al gato, es una curva con cuatro puntos de retroceso: la astroide. Aquí el lector encontrará la explicación de este hecho y verá también por qué una mancha luminosa en una taza, formada por los rayos reflejados, tiene una particularidad característica: un punto de pico. El aficionado a la geometría clásica se enterará de cómo están relacionadas entre sí la circunferencia de los nueve puntos del triángulo, las rectas del mismo de Simpson y la envolvente de ellas: curva cicloidal con tres puntos de retroceso.

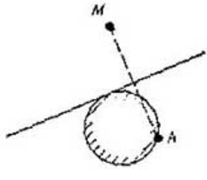
Al principio estudiaremos detalladamente una de las curvas cicloidales más sencillas.

**La cardioide.** Por lo general, esta curva se define como la trayectoria de un punto que realiza el siguiente movimiento complejo: una circunferencia rueda exteriormente sin deslizamiento por otra circunferencia inmóvil de igual radio; la trayectoria de un punto de la circunferencia móvil se llama *cardioide*. Se pueden dar también otras definiciones geométricas de la cardioide. Formularemos dos de ellas en forma de problema.



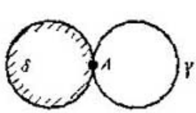

7.1. Demostrar que:

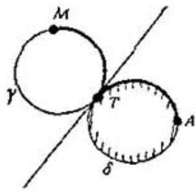
a) el conjunto de puntos simétricos a cierto punto $A$ de una circunferencia dada con relación a todas las tangentes posibles a la circunferencia es una cardioide;




b) el conjunto de pies de las perpendiculares trazadas desde un punto $A$ de dada circunferencia a todas las tangentes posibles a ella es una cardioide.

☐ a) Examinemos una circunferencia móvil $\gamma$ que se encuentra en contacto con otra fija $\delta$ de igual radio en el punto $A$. Rodemos la circunferencia $\gamma$ por la circunferencia $\delta$ y sigamos la trayectoria del punto $M$ de la circunferencia móvil que en el momento inicial coincide con el punto $A$.






Suponemos que la rodadura se realiza sin deslizamiento. Esto quiere decir que en cada momento de tiempo las longitudes de los arcos $AT$ y $MT$ son iguales ($T$ es el punto de tangencia variable de las circunferencias). Por consiguiente, el punto $M$ es simétrico al punto $A$ respecto a la tangente trazada en el punto $T$.

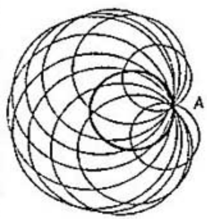
Durante una vuelta completa el punto $T$ recorre toda la circunferencia, y el punto $M$, toda la cardioide.

b) Está claro que este conjunto se obtiene de aquél, acerca del cual se habla en el punto a), por homotecia con el coeficiente 1/2 y cuyo centro es $A$. Así pues, este conjunto es también una cardioide, pero de la mitad de tamaño. □

Aplicando el problema 7.1 se puede trazar el número que se quiera de puntos de la cardioide y, así dibujarla con bastante exactitud. La cardioide es una curva cerrada que tiene una particularidad característica en el punto $A$: un «punto cuspidal». Por la forma se parece al corte de una manzana o, algo menos, al contorno del corazón. De ahí su nombre (kardia significa corazón).

La siguiente y bella definición de la cardioide, en que ella aparece como la «envolvente de circunferencias» emana también del problema 7.1.

7.2. Sean una circunferencia y en ella el punto $A$. Demostrar que la




reunión de todas las circunferencias que pasan por el punto $A$, cuyos centros están sobre dada circunferencia, es una zona limitada por la cardioide. ↓

**Suma de rotaciones.** Más adelante demostraremos ciertos métodos que permiten establecer las propiedades geométricas de las curvas mediante la cinemática y como ejemplo recurriremos reiteradamente a la cardioide. Pero antes de continuar analicemos la última frase del problema 7.1, a).

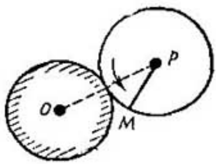
Hemos dicho que el punto $T$ vuelve a la posición inicial $A$ *después de una revolución entera*. Como tenemos que vérnoslas simultáneamente con varios giros, esta frase hay que precisarla: ¿de qué «revolución», o sea, de que giro estamos hablando? Se tenía en cuenta que **el centro** P de la circunferencia móvil $\gamma$ (así como también el punto de tangencia $T$) daba una vuelta completa. La misma circunferencia $\gamma$ (tal vez aquí sería mejor decir «círculos $\gamma$», imaginándolo en forma de disco) durante eso gira alrededor de su centro $P$ con bastante rapidez. Vamos a aclarar la siguiente pregunta.




7.3. Supongamos que el centro $P$ del círculo móvil $\gamma$, que rueda por el círculo inmóvil del mismo radio, da una vuelta. ¿Cuántas veces durante este tiempo girará el círculo $\gamma$

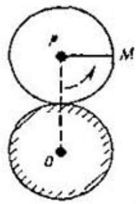
(cuántas revolucionas hará alrededor de su centro $P$)?

□ Para seguir el giro del círculo $\gamma$ trazaremos sobre él cierto radio $PM$; fijemos en algún lugar del plano un punto $E$ y examinemos un segmento $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{PM}$. La pregunta formulada en el problema 7.3 consiste en lo siguiente: ¿cuántas vueltas dará el segmento $EN$ alrededor de su extremo $E$ mientras el segmento $OP$ gire en 360°? Con otras palabras, ¿cuál es la relación de las velocidades angulares de estos segmentos?





Para responder a esta pregunta basta con examinar dos posiciones del círculo móvil. De la figura se ve que cuando el radio $OP$ ha girado en 90°, el segmento $EN$ lo ha hecho en 180°. Lo mismo tendrá lugar y en adelante. Al final, cuando el radio $OP$ haya girado en 360°, el segmento $EN$ lo habrá hecho en 720°, o sea, habrá dado dos vueltas completas. (La relación de las velocidades angulares es igual a 2.) Tal es la respuesta al problema 7.3. □





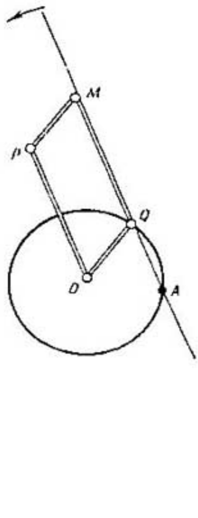
Si como punto $E$ de la solución del problema 7.3 se toma el centro $O$ del círculo inmóvil y desde él marcamos el segmento $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PM}$, obtendremos el paralelogramo $OPMQ$. Durante la rodadura uniforme del círculo $\gamma$ por el $\delta$, el vértice $O$ está inmóvil, mientras que los lados $OP$ y $OQ$

giran a las velocidades angulares $\omega$ y $2\omega$, correspondientemente (en la misma dirección). De esta forma, obtenemos una definición más de la cardioide, utilizando el modelo cómodo de un paralelogramo articulado:

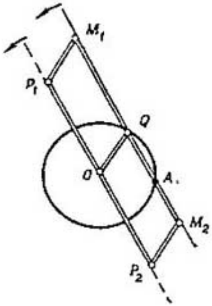
*si los lados OP y OQ* ($|OP| = 2|OQ|$) *giran alrededor del punto O a velocidades angulares* $\omega$ *y* $2\omega$, *la trayectoria del cuarto vértice M del paralelogramo OPMQ es una cardioide.*

Ahora es fácil fundamentar otro método de trazamiento de los puntos de la cardioide y obtener algunas otras propiedades interesantes de ésta.

7.4. Si en cada recta $l$ que pasa por el punto $A$ de la circunferencia $\delta$ de radio $r$, desde el punto $Q$ de intersección de $l$ y $\delta$ ($A \neq Q$) se marca el segmento $QM$ de $2r$ de longitud, el conjunto de todos los puntos $M$ obtenidos así será una cardioide.




□ Para cada situación de la recta $l$ se puede trazar un paralelogramo $OPMQ$ en el cual $Q$ y $M$ son los mismos que en el enunciado del problema. Entonces, durante el giro de la recta $l$ alrededor del punto $A$ a la velocidad angular $\omega$, los lados $OP$ y $OQ$ del paralelogramo girarán justamente a las velocidades necesarias $\omega$ y $2\omega$ (según el teorema del «anillo en la circunferencia» del § 1); por esto el punto $M$ recorrerá una cardioide. □

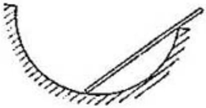



Pruebe a trazar en una hoja grande una cardioide utilizando los problemas 7.1 y 7.4, y convénzase de que se obtiene la misma curva. Quizás el segundo método sea más cómodo. Señalemos que, en el problema 7.4, el segmento $QM$ de $2r$ de longitud podemos marcarlo desde el punto $Q$ hacia ambos lados. Así obtendremos dos puntos $M_1$ y $M_2$ de la cardioide; éstos corresponden a dos posiciones opuestas del paralelogramo articulado (si el punto $Q$ da una vuelta completa y vuelve a la situación inicial, el lado $OM$ girará en 180°, y $M_1$ pasará a $M_2$). Esta circunstancia conlleva a la propiedad siguiente.

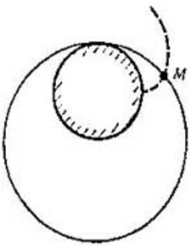
7.5. Demostrar que cualquier cuerda $M_1M_2$ de la cardioide que pasa por el punto de retroceso $A$ de ésta tiene $4r$ de longitud y su punto medio se halla sobre la circunferencia inmóvil (de radio $r$), correspondiente a la cardioide.

He aquí dos problemas más en los que se emplea el segundo método de trazamiento de la cardioide.

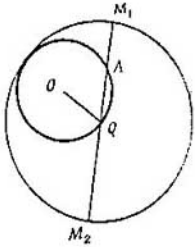
7.6. Un palo de longitud $2r$ se mueve en el plano vertical de tal modo que su extremo inferior se apoya sobre el fondo de un hoyo semicircular (en su sección vertical) de radio $r$ y, además, tiene tangencia con un borde



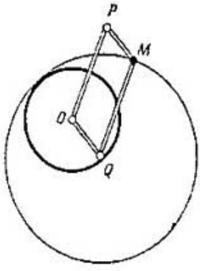
del hoyo. Demostrar que el extremo del palo se mueve por una cardioide.




7.7. Por un círculo inmóvil de radio $r$ rueda sin deslizamiento, abarcándolo, un aro de radio $2r$. Demostrar que la trayectoria de un punto del aro es una cardioide.

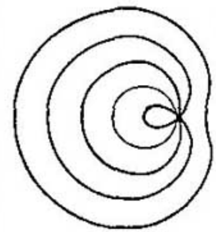



□Una de las soluciones de dicho problema se puede obtener si éste se compara con el teorema de Copérnico 0.3, pues aquí se trata de las mismas dos circunferencias, pero con la única diferencia de que el círculo interior de radio $r$ es inmóvil y por él rueda una circunferencia exterior de radio $2r$. En estas circunstancias el teorema de Copérnico muestra que si en el aro colocamos un palo, que cumpla el papel de diámetro $M_1M_2$, durante la rodadura éste pasará por el punto $A$ fijado de la circunferencia inmóvil. El punto medio $Q$ del palo $M_1M_2$ se moverá por la circunferencia inmóvil $\delta$, y $|M_1Q| = |QM_2| = 2r$. Así, retornamos al problema 7.4 y vemos que los puntos $M_1$ y $M_2$ se mueven por una misma cardioide.

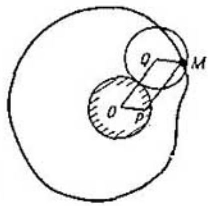



Se puede razonar de una forma un poco distinta, reduciendo todo al paralelogramo articulado. Supongamos que $M$ es un punto del aro al que examinamos, y $Q$, su centro (variable). Tracemos el paralelogramo $OPMQ$. Si giramos el elemento $OQ$ a la velocidad angular $2\omega$, el aro, y con éste el elemento $QM$, girará a la velocidad angular $\omega$. □

La curva que hemos examinado bastante detalladamente —cardioide— se incluye, naturalmente, en la familia de curvas que se llaman *concoides del círculo* o *caracoles de Pascal*: si en los enunciados del problema 7.4 en la recta $l$, que pasa por el punto $A$, se marca el segmento $QM$ de cierta longitud constante $h$ (hacia uno y otro lados), para cada $h > 0$ obtendremos una de estas curvas; siendo $h = 2r$, será una cardioide. (Compare la definición de estas curvas con la definición de la concoide en el § 6, pág. 141). Resulta que al caracol de Pascal, teniendo en cuenta cada $h$, se le puede dar una definición cinemática. Esto se hace en el problema siguiente.



7.8. a) Demostrar que el vértice $M$ de un paralelogramo articulado en el cual el vértice $O$ está fijo y los lados $OP$ y $OQ$ giran a las velocidades angulares $2\omega$ y $\omega$, describe el caracol de Pascal.




b) En el plano se halla fija una circunferencia de radio $r$. Por ella gira otra de igual radio, a la que está sujeto rígidamente un plano (móvil). Demostrar que cualquier punto de éste describe el caracol de Pascal.

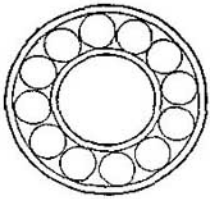
c) El mismo problema, pero en vez de una circunferencia móvil de radio $r$ figura un aro de radio $2r$ que abarca la inmóvil.

Ahora plantearemos problemas en los cuales es menester comprender la suma de rotaciones con otra relación de las velocidades que en la cardioide y se mencionan algunas curvas cicloidales presentadas en la figura de las págs. 154-155.

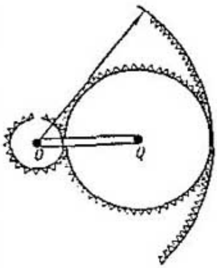
7.9. Sobre una circunferencia inmóvil de radio $R$ rueda (por fuera) un círculo cuyo radio es: a) $R/2$, b) $R/3$, c) $2R/3$. ¿Cuántas vueltas dará éste mientras su centro describa una vuelta alrededor del centro de la circunferencia inmóvil? ↓

7.10. El mismo problema, pero tomando en consideración que el círculo rueda por el interior.

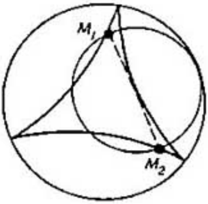
7.11. Entre el eje de un rodamiento cuyo diámetro es 6 mm y su collar inmóvil de diámetro 10 mm están situadas unas bolas de 2 mm de diámetro. Considerando que, cuando el eje gira, las bolas ruedan por éste y por el collar inmóvil sin deslizamiento, determinar a qué velocidad angular: a) giran las bolas; b) corren sus centros alrededor del centro del rodamiento, si el eje realiza 100 revoluciones por segundo.



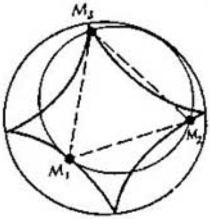
7.12. El engranaje que hace girar a la piedra de afilar tiene la estructura mostrada en el dibujo. Determinar la relación entre los radios de las ruedas móviles que permiten a la rueda pequeña (la afiladora) girar 12 veces más rápidamente que a la manilla $OQ$ de accionamiento.




Examinemos dos puntos de la circunferencia que rueda por un círculo. Es evidente que ellos describen trayectorias congruentes. En particular, puede suceder también que las trayectorias coincidan: los dos puntos se mueven por una línea, uno tras otro. Así, en la solución del problema 7.7 aclaramos que los puntos diametralmente opuestos del aro describen la misma cardioide. De esto podíamos habernos convencido observando que sus trayectorias tienen el punto de retroceso en el mismo lugar de la circunferencia inmóvil. En los problemas siguientes se puede emplear observaciones análogas.




7.13. a) Demostrar que los puntos diametralmente opuestos $M_1M_2$ de una circunferencia de radio $2R/3$ que rueda por el interior de una circunferencia de radio $R$, describen una misma *curva de Steiner.* ↓

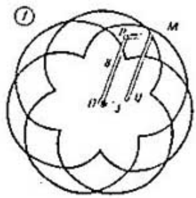



b) Demostrar que tres puntos $M_1$, $M_2$ y $M_3$ de una circunferencia de radio $3R/4$ situados en los vértices de un triángulo equilátero engendrarán una misma curva *—astroide—*, si la circunferencia rueda (por el interior) de una circunferencia de radio $R$.

c) El mismo problema, pero en el que, en vez de $3R/4$, tenemos $3R/2$, y en vez de una astroide, resultará *una nefroide* (y la circunferencia-aro móvil abarca a la inmóvil).

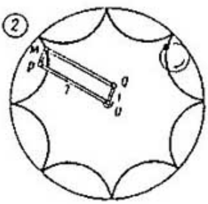
Las tres curvas con cuyos nombres hemos chocado *—la curva de Steiner* (también llamada *deltoide*), *la astroide* (de astro: «estrella») y *la nefroide* (de nephros: «riñón») se obtienen aquí de un modo un poco distinto que en su definición, ofrecida en las págs. 154—155.

Vamos a llamar *k-cicloide* la curva que describe el vértice $M$ de un paralelogramo articulado $OPMQ$, en el cual el vértice $O$ está fijo, mientras los elementos $OP$ y $OQ$ giran alrededor de éste; además, la relación de las velocidades angulares $\omega_{OP}/\omega_{OQ}$ es igual a $k$, y la relación $|OP|/|OQ|$ entre las longitudes de dichos elementos, es igual a $1/|k|$ ($k \neq 0, +1, -1$).

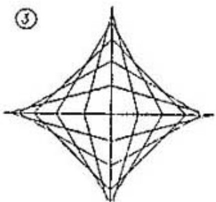


Si dos puntos $P$ y $Q$ avanzan uniformemente por una circunferencia de modo que la relación $\omega_P/\omega_Q$ entre sus velocidades angulares es igual a $k$, la envolvente de las rectas $PQ$ será una $k$-cicloide (7.19).

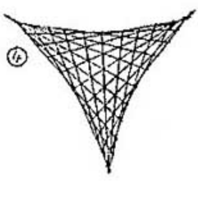
Las formas de la $k$-cicloide y de la $(1/k)$-cicloide coinciden (7.14).



La $k$-cicloide también se puede definir como la trayectoria engendrada por un punto de una circunferencia de radio $r$ que rueda sin deslizamiento por otra de radio $|k-1|r$, además, siendo $k > 1$, la tangencia de las circunferencias es externa, mientras que siendo $k < 1$, interna.

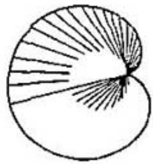


Corrientemente, las $k$-cicloides se llaman *epicicloides*, siendo $k > 0$, e *hipocicloides*, siendo $k < 0$.



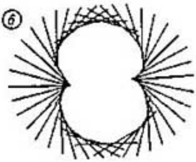
En las figs. 1—6 vienen mostrados las $k$-cicloides para $k = 3/8, -1/7, -3, -2, 2$ y 3. Las cuatro últimas curvas tienen nombres especiales: *astroide*, *curva de Steiner*, *cardioide* y *nefroide*. En las figs. 3—6 están mostradas algunas propiedades de la familia de segmento relacionados con estas cur-

5



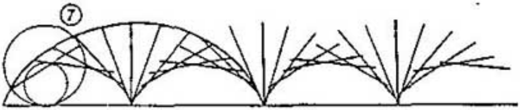
vas; todos los segmentos en cada una de las figuras tienen la misma longitud (7.4, teorema sobre los dos círculos en la pág. 156, 7.21).

6



En la última fig. 7 está representada la trayectoria de un punto de la circunferencia que rueda por una recta. Esta curva se llama *cicloide*. La envolvente de los diámetros

7



de la circunferencia rodante es una cicloide dos veces menor (teorema sobre los dos círculos).

En el ejemplo de la cardioide ya hemos visto que una misma curva puede ser obtenida como la trayectoria de los puntos de dos circunferencias distintas que ruedan sobre una misma circunferencia inmóvil (compárese la primera definición de la cardioide y el problema 7.7: en un caso, el centro de la circunferencia móvil es el vértice $P$ de un paralelogramo articulado

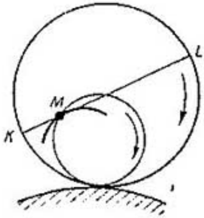
*OPQM*; y en el otro, su vértice $Q$). El siguiente problema indica qué relaciones tiene que haber, en el caso general, entre los radios de las circunferencias para que las trayectorias resulten congruentes.

7.14. a) Demostrar que un punto de un círculo de radio $r$, que rueda por el exterior de otro inmóvil de radio $R$, y un punto de un aro de radio $R + r$, que abarca el círculo, describen trayectorias congruentes.

b) Demostrar que un punto del círculo de radio $r$, que rueda por el interior de una circunferencia de radio $R$, y un punto del círculo cuyo radio sea $R - r$, engendran trayectorias congruentes.

Para resolver estos dos problemas hay que aprender a calcular las relaciones entre las velocidades de rotaciones complejas. Más adelante hablaremos de cómo hacerlo; pasaremos a las propiedades más interesantes de las curvas cicloidales, a saber, a las propiedades de sus tangentes.

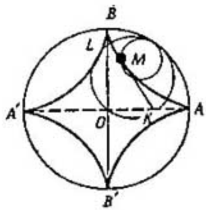
**Teorema sobre dos círculos.** Formularemos una regla curiosa, la cual permite describir de un modo palpable la familia de tangentes a la trayectoria del punto $M$ de una circunferencia de radio $r$ que rueda sin deslizamiento por cierta línea $\gamma$. Sobre esta misma línea rueda otra circunferencia de radio $2r$ junto con su diámetro $KL$



(sujeto rígidamente a ésta). Además el diámetro lo eligiremos de modo que en cierto momento su extremo $K$ y el punto $M$ coincidan en el mismo punto $A$ de la línea $\gamma$. Resulta que, entonces, en todo momento de tiempo *el diámetro $KL$ tiene tangencia con la trayectoria del punto $M$*. Con otras palabras, esta *trayectoria sirve de envolvente para todas las posiciones del diámetro $KL$.*

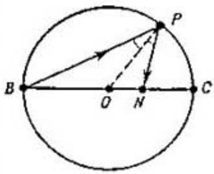
A esta cómoda regla es a la que hemos denominado *teorema sobre dos círculos.* De su demostración hablaremos más tarde. Ahora nos limitaremos a la siguiente precisión. Si dos circunferencias, de las cuales se habla en el teorema, ruedan simultáneamente de modo que sus puntos de contacto con la curva $\gamma$ coinciden todo el tiempo, la circunferencia menor rodará por la mayor sin deslizamiento. Entonces, según el teorema de Copérnico, el punto $M$ se desplazará por el diámetro fijo $KL$ de la circunferencia mayor. Y nuestro teorema sobre dos círculos afirma que la recta $KL$ será la tangente trazada en el punto $M$ a la trayectoria del mismo.

Pasemos a ejemplos. Empezaremos por la familia de rectas acerca de la cual hemos hablado en la introducción al libro. Supongamos que una circunferencia de radio $r$, en la cual está señalado el punto $M$, rueda por el interior de una circunferencia de radio




$R = 4r$. Simultáneamente con la primera rodemos otra circunferencia de radio $2r$ junto con su diámetro $KL$ (además en el momento inicial los puntos $K$ y $M$ coinciden con el punto $A$ de la circunferencia inmóvil). Según el teorema de Copérnico, los extremos del diámetro $KL$ se deslizan por dos diámetros mutuamente perpendiculares $AA'$ y $BB'$ de la circunferencia inmóvil. Al mismo tiempo, de acuerdo con el teorema sobre dos círculos, el diámetro $KL$ durante su movimiento tiene tangencia con la trayectoria del punto $M$, o sea, *que como envolvente de las rectas* $KL$ *resultará la astroide con puntos de retroceso en* $A$, $B$, $A'$, $B'$.

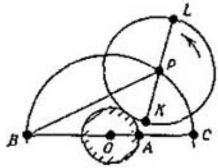
El siguiente problema trata de la cardioide.



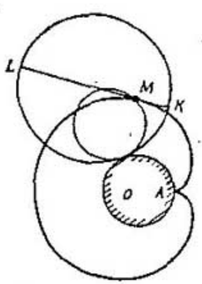

7.15*. Sobre una circunferencia tenemos cierto punto $B$. De éste a un punto arbitrario de la circunferencia incide un rayo de luz, reflejándose de la misma (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión). Demostrar que la envolvente de los rayos reflejados es una cardioide.

□ Designemos por $O$ el centro de la circunferencia «especular» dada y por $C$, su punto diametralmente opuesto $B$. Supongamos que el rayo $BP$, después de reflejarse en el punto $P$, incide en el punto $N$ del segmento $BC$ (por ahora consideramos que $\widehat{PBC} \leqslant$

$\leqslant 45°$). Entonces, $\widehat{PNC} = \widehat{BPN} + \widehat{PBN} = 3\widehat{PBC}$. O sea, si giramos el rayo $BP$ a una velocidad angular $\omega$, el rayo reflejado girará a la velocidad angular $3\omega$; además, el punto de reflexión $P$ se moverá por la circunferencia «especular» a la velocidad angular $2\omega$ («teorema sobre el anillo» del § 1). Es evidente, que esta relación se conservará también siendo $\widehat{PBC} > 45°$.



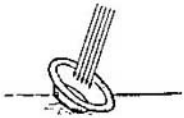

La familia de rectas $PN$ que nos interesa se puede obtener de la manera siguiente. Vamos a rodar exteriormente sobre una circunferencia inmóvil de radio $r = |OB|/3$ con el centro $O$ otra de radio $2r$ junto con su diámetro $KL$ que en el momento inicial se encontraba en la recta $BC$. Si el centro $P$ de esta última se desplaza (por la primera de radio $3r$ con el centro $O$) a la velocidad angular $2\omega$, el diámetro $KL$ girará a la velocidad angular $3\omega$ (?), lo mismo que el rayo reflejado.

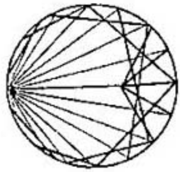



Según el teorema sobre dos círculos, la envolvente de la familia de las rectas $KL$ será la trayectoria del punto $M$ en una circunferencia de radio $r$ que rueda exteriormente sobre otra del mismo radio $r$ y con el centro $O$, o sea, una cardioide; en el momento inicial el punto $M$ coincide con el punto $A$, que divide el segmento $BC$

en la relación de 2 : 1, este punto será justamente el punto de retroceso de la cardioide. □

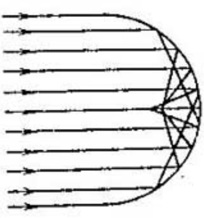
Este «punto de retroceso» en forma de una mancha clara, constituida por los rayos reflejados, podemos verlo a menudo en el fondo de una taza o una cazuela inclinada con relación a los rayos que inciden de una lámpara o del sol. Claro está que en este experimento el haz incidente de rayos sería natural considerarlo paralelo, y no proveniente del punto de una circunferencia. Entonces, en la respuesta obtendremos no precisamente una cardioide, sino otra curva con el punto de retroceso parecido, por cierto que también conocemos.





7.16. Demostrar que si sobre un espejo semicircular incide un haz paralelo de rayos (como se muestra en la figura), los rayos reflejados tienen tangencia con la mitad de la nefroide.

Si el espejo fuese parabólico, entonces, como ya sabemos del § 6, los rayos, después de reflejarse, se reunirían en un mismo punto; en el foco de la parábola. Esta comparación explica por qué la nefroide tiene también otro nombre: *línea focal del círculo.*

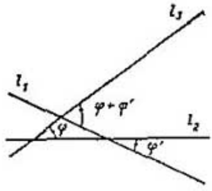


7.17. Hallar el conjunto de puntos que cubre el diámetro fijo de un círculo de radio $r$ que rueda:

a) por el exterior de una circunferencia de radio $r$;
b) por el interior de una circunferencia de radio $3r/2$.

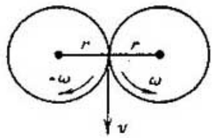
Algunos otros problemas interesantes relativos a las familias de tangentes aparecerán posteriormente después de que discutamos los razonamientos cinemáticos que se emplean en las soluciones de los últimos problemas y en la argumentación del teorema sobre dos círculos.

**Velocidades y tangentes.** Para determinar las relaciones entre las velocidades angulares en las rotaciones complejas con que hemos chocado, existen métodos más cómodos que aquél, bastante artesano, que hemos empleado en la solución del problema 7.4. Ante todo, tal es la regla de la suma de las velocidades angulares, análoga a la regla de la suma de las velocidades (lineales) cuando se pasa a un nuevo sistema de coordenadas.



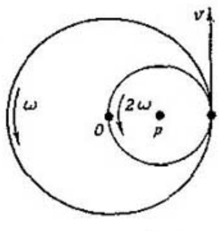

Vamos a convenir que los ángulos (y las velocidades angulares) que corresponden a la rotación en sentido antihorario los consideraremos positivos, mientras los que giran en sentido horario, como negativos. En este caso, si la recta $l_2$ está virada en un ángulo $\varphi'$ con relación a la recta $l_1$, y la recta $l_3$ en un ángulo $\varphi$ respecto a la recta $l_2$, entonces $l_3$ forma el ángulo $\varphi + \varphi'$ con la recta $l_1$. Por esto, *si la figura $\gamma_2$ gira con relación a una figura* *«inmóvil» $\gamma_1$ a la velocidad angular $\omega'$, y $\gamma_3$ respecto a $\gamma_2$ a la velocidad $\omega$, entonces resultará que $\gamma_3$ gira con relación a $\gamma_1$ a la velocidad $\omega + \omega'$.* (Como estamos tratando fundamentalmente de rotaciones de círculos, consideraremos que en cada uno de ellos está señalado cierto radio, para que sea más cómodo seguir su giro).

Mostraremos cómo se emplea esta regla. Examinemos primero dos círculos de radio $r$, cuyos centros están fijados a la distancia de $2r$ el uno del otro. Si los círculos giran sin resbalar, sus velocidades angulares son de igual valor, pero llevan signos opuestos: la del primero será, digamos, $-\omega$, y la del segundo, $\omega$. En realidad, las velocidades lineales de los puntos en contacto de uno y de otro círculo son iguales (precisamente aquí se emplea el hecho de que los círculos no resbalan). Puesto que el valor $v$ de la velocidad lineal del punto $M$, situado a la distancia $r$ del centro del círculo que gira a la velocidad angular $\omega$, es igual a $v = \omega r$, entonces de la igualdad de las velocidades lineales en nuestro caso se obtiene la igualdad de las velocidades angulares (según su magnitud absoluta). Ahora pasaremos al sistema de referencia relacionado con el primer círculo. Entonces, a todas las velocidades angulares hay que añadir $\omega$: la velocidad del primero será 0, mientras la del segundo resul-

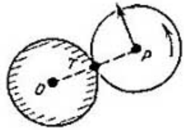


tará igual a $2\omega$. Esto lo hemos visto ya en el problema 7.4.

Otro ejemplo. Supongamos que la distancia entre los centros $O$ y $P$ (por ahora inmóviles) de dos circunferencias tangentes de radios $R = 2r$ y $r$ es igual a $r$. Sus velocidades angulares serán correspondientemente igual a $\omega$ y $2\omega$ (la relación entre sus magnitudes es inversamente proporcional a la relación entre los radios). En el sistema de referencia relacionado con la circunferencia mayor, sus velocidades angulares son $-\omega$ y 0 (este es el movimiento del que se habla en el teorema de Copérnico 0.3). En el sistema de referencia relacionado con la circunferencia menor, sus velocidades angulares son 0 y $\omega$ (el problema 7.7).

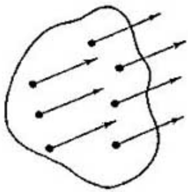


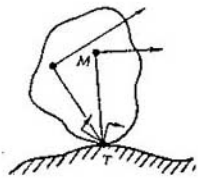

Sin embargo, al determinar las velocidades angulares se puede prescindir de la introducción de un sistema giratorio de referencia. Pero para esto tendremos que aclarar cómo determinar las velocidades (lineales) de los puntos de la rueda móvil. Esta cuestión será muy importante para nosotros en el punto siguiente, donde hablaremos de las tangentes a las curvas cicloidales. Así pues, volvamos al primer ejemplo: examinemos cierta posición del círculo de radio $r$ que rueda sobre otro círculo del mismo radio; designemos por $T$ el punto del círculo móvil que en el instante que estamos examinando coincide con el

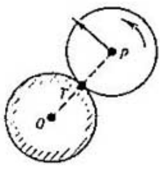


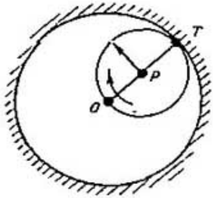
punto de tangencia de los círculos. Su velocidad es igual a cero (ya que el rodamiento transcurre sin deslizamiento). ¿Cómo hallar las velocidades de los demás puntos?

Para esto aplicaremos el siguiente teorema de Mozzi: en todo momento *las velocidades de los distintos puntos de una placa rígida, que se desplaza por un plano, o son como en el movimiento de avance de un cuerpo*, es decir, todas iguales en magnitud y dirección, *o son como en el cuerpo que gira*, es decir, la velocidad de cierto punto $T$ es igual a cero, y la de cualquier otro punto es igual a la magnitud $|MT|\,\omega$ (donde $\omega$ es la velocidad angular de la placa) y está dirigida perpendicularmente al segmento $MT$. Precisamente este último caso tiene lugar para el disco rodante; además, el papel de punto $T$ —«centro instantáneo de giro»—, lo hace el punto de tangencia. (Esto será justo incluso para una rueda oblicua que ande por un camino con baches). Aplicando esto, hallaremos la relación entre la velocidad angular $\omega_1$ de la rueda rodante y la velocidad angular $\omega_2$ a la que gira su centro $P$ alrededor del centro $O$ del círculo inmóvil. Para ello expresemos de dos formas la velocidad lineal del punto $P$: por una parte, su valor es igual a $2r\omega_2$; por otra, como $T$ es el centro instantáneo, resulta igual a $r\omega_1$. Así, $2r\omega_2 = r\omega_1$, de donde $\omega_1 = 2\omega_2$.





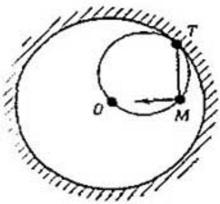





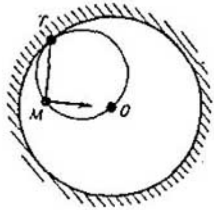

El mismo razonamiento para un círculo de radio $r$ que rueda por el interior de una circunferencia de radio $2r$ de modo que su centro se mueve (por la circunferencia de radio $r$) a la velocidad angular $\omega_2 > 0$, da el siguiente resultado. Designemos la velocidad angular del círculo por $\omega_1$ y observemos que $\omega_1 < 0$. Expresando la velocidad del punto $P$ de dos formas, obtenemos: $|\omega_1 r| = |\omega_2 r|$, de donde $\omega_1 = -\omega_2$.

Razonamientos análogos ayudan a estudiar otras rotaciones complejas.

Mas para nosotros es especialmente importante que el teorema de Mozzi permite determinar la dirección de la velocidad en cada punto de la figura: la velocidad del punto $M$ está dirigida perpendicularmente al segmento $MT$, que lo une con el centro instantáneo de giro $T$.

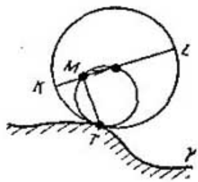



Expondremos otra demostración más del teorema de Copérnico. Sea $M$ un punto de la circunferencia de radio $r$ que rueda por el interior de otra de radio $2r$ con centro en $O$. En todo momento, la velocidad del punto $M$ está dirigida perpendicularmente al segmento $TM$, donde $T$ es el punto de contacto de las circunferencias (el centro instantáneo de giro de la circunferencia menor). De esta forma, las velocidades del punto siempre están dirigidas por la recta $MO$ (pues $T$ y $O$

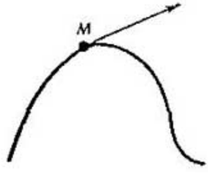


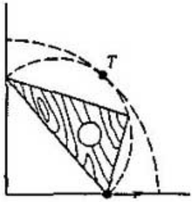

son los puntos diametralmente opuestos de la circunferencia menor). Consiguientemente, $M$ se mueve por el diámetro de la circunferencia mayor, y en esto consiste precisamente el teorema de Copérnico.

Ofrecemos la demostración del teorema sobre dos círculos. Por una curva (o una recta) $\gamma$ ruedan simultáneamente dos circunferencias de radio $r$ y $2r$. Designemos por $M$ y $K$ sus puntos que coinciden en el momento inicial con el punto $A$ de la línea $\gamma$, y por $T$, el centro común instantáneo de las dos circunferencias (punto de contacto de éstas con $\gamma$). La velocidad del punto está dirigida perpendicularmente al segmento $MT$. Así pues, *la velocidad del punto $M$ está dirigida por el diámetro de la circunferencia mayor*, lo significa que $M$ pertenece a un determinado diámetro $KL$ de dicha circunferencia y durante su movimiento la recta $KL$ en cada momento tiene contacto con la trayectoria del punto $M$. En esto consiste justamente el teorema sobre dos círculos.

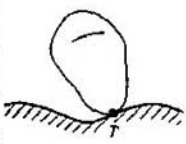



Observemos que aquí hemos empleado un nuevo punto de vista en cuanto a la definición de la tangente a una curva: *la tangente, a la trayectoria de un punto en movimiento, es una recta que pasa por el punto $M$ de la trayectoria y cuya dirección coincide con la de la velocidad en el punto dado $M$.*






No vamos a exponer la demostración del teorema de Mozzi, pero indicaremos su análogo geométrico: todo traslado de un plano que se puede realizar sin darle la vuelta al otro lado (moviéndolo de cualquier forma por el mismo) es o un traslado paralelo o una rotación alrededor de cierto punto $T$ (teorema de Chasles). En relación con el teorema de Mozzi subrayamos una circunstancia más. Para el movimiento más común de la placa por una superficie, el centro instantáneo durante el movimiento cambia su posición tanto en la superficie inmóvil como en la móvil (placa). Y allí y aquí traza cierta curva: una se llama *centroide inmóvil*, y la otra, *centroide móvil*. Por ejemplo, durante la rodadura de una rueda por un camino, la centroide inmóvil será el camino, y la móvil, la llanta de la rueda. En cinemática se demuestra un teorema que dice que, para todo movimiento de un plano, suficientemente «bueno» (sin «tirones»), *la centroide móvil rueda por la inmóvil sin deslizamiento* y, además, el punto de tangencia sirve en cada momento como centro instantáneo de giro. Así pues, el movimiento más común de la placa por una superficie se reduce a la rodadura de una rueda (oblicua) por un camino (con baches). Desde este punto de vista, el tema de nuestro capítulo se puede formular así: estudio de movimientos en los cuales las dos centroides son circunferencias.



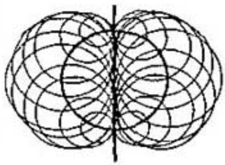

Con esto vamos a dar fin a la digresión que hemos hecho para tratar de la cinemática[1]): ahora estamos sufi-

[1]) Explicaciones más detalladas y exactas se pueden encontrar en cualquier manual de mecánica teórica, por ejemplo, en las magníficas «Conferencias de mecánica teórica» del matemático belga Ch.-J. Vallée Poussin.

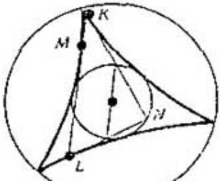
cientemente pertrechados para empezar a revelar las propiedades más notables de las curvas cicloidales relacionadas con las familias de tangentes a las mismas.

7.18. Demostrar que las tangentes a la cardioide trazadas en los extremos de una cuerda que pasa por el punto cuspidal de la misma, son mutuamente perpendiculares y su punto de intersección dista $3r$ del centro de la circunferencia inmóvil, donde $r$ es el radio de ésta. ↓

7.19*. Por una circunferencia se mueven uniformemente dos transeúntes $P$ y $Q$, la relación de las velocidades angulares entre los cuales es igual a $k$ ($k$ es diferente de 0,1 y $-1$). Hallar la envolvente de todas las rectas $PQ$. ↓



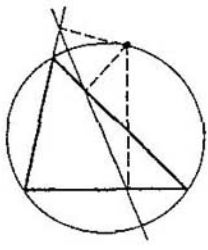
7.20*. Sean una circunferencia y una recta que pasa por su centro. Demostrar que la reunión de todas las circunferencias con centros en la circunferencia dada y tangentes a la recta, es un dominio limitado por una nefroide.




7.21*. Examinemos la curva de Steiner circunscrita alrededor de una circunferencia de radio $2r$. Demostrar que toda tangente a esta curva (en cierto punto $M$) corta a ésta en dos puntos $K$ y $L$ tales, que el segmento $KL$ tiene una longitud constante $4r$; su punto medio se halla sobre la circunferencia inscrita dada; las tangentes en los puntos $K$ y $L$ a la curva son mutuamente perpendiculares y se intersecan en cierto punto $N$ de dicha circunferencia, además los segmentos $KN$ y $LN$ se cortan en los puntos medios por la misma. ↓

7.22*. Examinemos una astroide circunscrita alrededor de una circunferencia de radio $2r$. Demostrar que desde cualquier punto $P$ de la circunferencia inscrita se pueden trazar tres rectas $PT_1$, $PT_2$, $PT_3$, tangentes a la astroide, que éstas forman entre sí ángulos iguales (de 60°), y que los tres puntos de tangencia $T_1$, $T_2$, $T_3$ son los vértices de un triángulo regular inscrito en una circunferencia de radio $3r$, tangente a la circunferencia circunscrita alrededor de la astroide.

El siguiente problema —último de esta serie— que también permite dar la solución en el lenguaje del movimiento, revela una relación inesperada entre la geometría elemental del triángulo y la curva cicloidal que lleva el nombre del geómetra que descubrió esta relación.



7.23*. Sea el triángulo $ABC$. Demostrar que:

a) los pies de las tres perpendiculares, trazadas desde cierto punto de la circunferencia circunscrita a este triángulo, a las rectas $AB$, $BC$ y $AC$

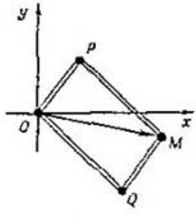
están sobre una recta (*«recta de Simpson»*);

b) los puntos medios de los lados del triángulo y los pies de sus alturas, así como los puntos medios de los segmentos de las alturas que unen el ortocentro con los vértices, están sobre una circunferencia *«la circunferencia de nueve puntos»*);

c) todas las rectas de Simpson del triángulo $ABC$ son tangentes a *una curva de Steiner*, circunscrita alrededor de la circunferencia de los nueve puntos. ↓

**Ecuaciones paramétricas.** Todas las propiedades de las curvas cicloidales podrían demostrarse también analíticamente. Lo más cómodo de todo sería escribir sus ecuaciones en forma paramétrica, expresando las coordenadas $(x; y)$ del punto $M$ a través del parámetro $t$ (tiempo). Con dichas ecuaciones hemos chocado ya en el problema 6.22.

Examinemos la trayectoria del movimiento del cuarto vértice $M$ del paralelogramo articulado $OPMQ$, en el cual el vértice $O$ está en el origen del sistema de coordenadas. (Señalemos que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$). Si el punto $P$ se mueve por una circunferencia de radio $r_1$ con el centro en el origen de las coordenadas $O$ a la velocidad angular $\omega_1$, y el punto $Q$ se traslada por una circunferencia de radio $r_2$



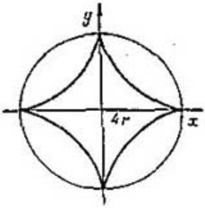
con el centro $O$ a la velocidad angular $\omega_2$, entonces, en el momento de tiempo $t$, las coordenadas de $P$ serán $(r_1 \cos \omega_1 t;\ r_1 \operatorname{sen} \omega_1 t)$; las de $Q$, $(r_2 \cos \omega_2 t; r_2 \operatorname{sen} \omega_2 t)$, y las del cuarto vértice del paralelogramo $OPMQ$:

$$x = r_1 \cos \omega_1 t + r_2 \cos \omega_2 t,$$
$$y = r_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + r_2 \operatorname{sen} \omega_2 t$$

(en el momento incial $t = 0$, los dos lados $OP$ y $OQ$ del paralelogramo articulado estarán dirigidos por el eje $Ox$). En el problema 6.22 hemos aclarado que siendo $\omega_2 = -\omega_1$, el punto $M$ describe una elipse. En el caso general, si se cumplen las correlaciones

$$\omega_1/\omega_2 = k,\ r_2/r_1 = |\, k \,|,$$

el punto $M$ recorre una curva cicloidal (la que hemos llamado $k$-cicloide en la pág. 154).




De las ecuaciones paramétricas, excluyendo $t$, obtendremos en algunos casos ecuaciones simples que enlazan las coordenadas $x$ e $y$. Examinemos como ejemplo la astroide. Para ésta $r_1 = 3r_2$, $\omega_2 = -3\omega_1$: podemos tomar $\omega_1 = 1$; entonces $\omega_2 = -3$ y las ecuaciones paramétricas de la astroide se escribirán así ($r_2 = r$):

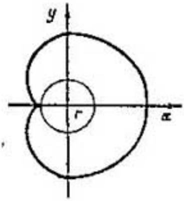
$$x = 3r \cos t + r \cos 3t,$$
$$y = 3r \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} 3t,$$

o aún más sencillamente (?):

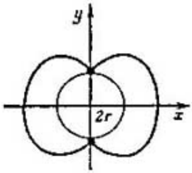
$$x = 4r \cos^3 t, \quad y = 4r \operatorname{sen}^3 t.$$

De aquí emana la siguiente ecuación breve de la astroide:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=(4r)^{2/3}.$$




La astroide y otras curvas que hemos estudiado antes pueden representarse con ecuaciones algebraicas. Pruebe a comprobar que los puntos $(x;\ y)$ de estas curvas satisfacen a las siguientes ecuaciones:

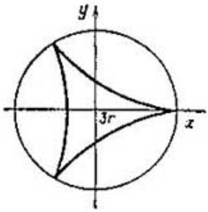



$$(x^2+y^2-4r^2)^3+108r^2x^2y^2=0 \quad \text{(astroide)},$$

$$(x^2+y^2-2rx)^2-4r^2(x^2+y^2)=0 \quad \text{(cardioide)},$$

$$(x^2+y^2-4r^2)^3-108x^2r^4=0 \quad \text{(nefroide)},$$

$$(x^2+y^2+9r^2)^2+8rx(3y^2-x^2)-108r^4=0 \quad \text{(curva de Steiner)}.$$

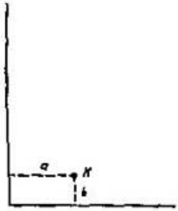



De este modo la astroide y la nefroide son curvas de sexto grado, y la cardioide y la curva de Steiner, de cuarto grado.

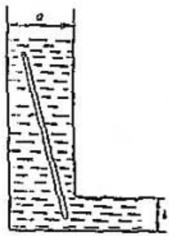
Se puede demostrar que, siendo $\omega_1/\omega_2=k$ racional, las curvas cicloidales son algebraicas (y siendo $k$ irracional, no; una curva semejante puede pasar tan cerca como se quiera de cualquier punto de un anillo con el centro $O$, limitado por las circunferencias de radios $r_1+r_2$ y $|r_1-r_2|$, y, como suele decirse «en todo lugar llenan densamente» el anillo).

Comparando las ecuaciones de las curvas con sus propiedades geométricas, se puede obtener nuevos corolarios interesantes. He aquí un ejemplo en el que se emplea la propiedad de la astroide.

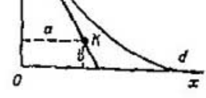
*7.24.* a) Sean un ángulo recto, y dentro de éste, el punto $K$, que de sus lados dista $a$ y $b$. ¿Se podrá trazar por el punto $K$ un segmento de longitud $d$ con los extremos sobre los lados del ángulo?



b) Un canal, cuyas orillas son dos rectas paralelas, vira en ángulo recto; antes de virar su anchura es $a$, y después, $b$. ¿Cuál deberá ser el valor de $d$ para que por este recodo pueda pasar un tronco delgado de longitud $d$?

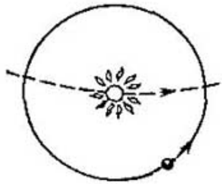


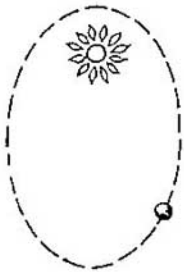
□ a) Tomemos los lados del ángulo por los ejes del sistema de coordenadas. Un segmento de longitud $d$ tiene que tener contacto con la astroide, cuyos puntos de retroceso están alejados del centro a la distancia $d$. La ecuación de esta astroide es: $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$. Si el punto $K$ está dentro del dominio limitado por una astroide y por los lados del ángulo, el segmento necesario existe (será el segmento de la tangente a la astroide trazada desde el punto $K$), y si el punto $K$ está fuera de este dominio, entonces no existe. De esta forma, el segmento necesario existe solamente en el caso de que $a^{2/3} + b^{2/3} \leqslant d^{2/3}$.



Señalemos que, aunque hemos explicado cómo «trazar» el segmento necesario con ayuda de la astroide, si se cumple la condición $a^{2/3} + b^{2/3} \leqslant \leqslant d^{2/3}$, este problema no se puede resolver con ayuda del círculo y la regla.

Las curvas notables que hemos examinado en los dos últimos parágrafos, se conocen desde hace ya más de 20 siglos. Las principales propiedades de las elipses, de las hipérbolas y de las parábolas fueron descritas en el trabajo «Las secciones cónicas» por el matemático griego Apolonio de Perga, quien vivió casi en la misma época que Euclides (III siglo antes de nuestra era). Ya en la antigüedad, al estudio de las trayectorias de movimientos circulares complejos se dedicaron los astrónomos, y esto no nos debe sorprender: pues al considerar muy convencionalmente que los planetas giran alrededor del Sol sobre circunferencias en un mismo plano, entonces, visto desde la Tierra, el movimiento de otro planeta será precisamente un movimiento circular complejo. A medida que se acumulaban observaciones astronómicas, en la descripción de los movimientos planetarios con ayuda de curvas cicloidales complejas se iba introduciendo creciente cantidad de correcciones, hasta que J. Kepler estableció con gran exactitud que las trayectorias de los planetas son elipses, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.





Diversos problemas de física, mecánica y matemática relacionados con curvas concretas sirvieron de piedra de toque para notables métodos analíticos fundados en el siglo XVII por Descartes, Leibnitz, Newton, Fermat y otros científicos. Estos métodos dieron la posibilidad de pasar de casos particulares, relacionados con las curvas notables, a regularidades comunes, inherentes a clases enteras de curvas. Es claro, que, al calcular mecanismos y estructuras complejas, no se puede prescindir de los métodos analíticos. Sin embargo, las ideas palmarias a las que está dedicado este libro, suelen ser útiles incluso en los problemas que no están relacionados de manera alguna con la geometría: no en vano los resultados de las investigaciones o de los cálculos son presentados a menudo en forma de gráficos o de familia de líneas.

# Respuestas, indicaciones, resoluciones.

1.13. Señalemos que el vértice $M$ de los triángulos rectángulos $AMB$ con la hipotenusa $AB$ pertenecen a la circunferencia de diámetro AB.

1.14 Por el punto de contacto $M$ de las circunferencias tracemos una tangente común. Supongamos que $M$ *corta* la recta $AB$ en el punto O. Entonces $|AO| = |OB| = |OM|$ (las longitudes de las tangentes trazadas desde el punto $O$ a las circunferencias son iguales).

1.15. *Respuesta:* La reunión de tres circunferencias. Sean $A$, $B$, $C$ y $D$ los puntos dados. Tracemos por el punto $A$ una recta $l$; por el punto $C$ otra paralela a $l$, y por los puntos $B$ y $D$ rectas perpendiculares a $l$. Como resultado construiremos un rectángulo.

Sean $L$ el centro del segmento $AC$, y $K$, el centro del segmento $BD$; entonces es fácil ver que $LMK = 90°$, donde $M$ es el centro del rectángulo. Girando la recta $l$ alrededor del punto $A$ y, correspondientemente, las demás rectas, obtenemos que el conjunto de centros $M$ de los rectángulos trazados es una circunferencia con el diámetro $KL$.

Por cuanto los cuatro puntos $A$, $B$, $C$, $D$ se pueden dividir en dos pares de tres maneras: $(A, C)$ y $(B, D)$ ; $(A, B)$ y $(C, D)$; $(A, D)$ y $(B, C)$, todo el conjunto buscado consta de tres circunferencias.

1.25. *Respuesta:* Una recta, Si los transeúntes $P$ y $Q$ avanzan por rectas paralelas, es claro, que el centro del segmento $PQ$ se traslada también por una recta paralela.

Supongamos que las rectas se intersecan en el punto $O$. Designemos el punto $O$ como comienzo de cálculo. Entonces las velocidades $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ de los transeúntes son vectores dirigidos respectivamente a lo largo de las rectas, y sus valores son iguales a la longitud del camino que recorre el transeúnte en unidad de tiempo $t$. Supongamos que el primer transeúnte en el momento de tiempo $t$ se encuentre en el punto $P$, y el segundo, en el punto $Q$; entonces $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + t\vec{v}_1$ y $\overrightarrow{OQ} = \vec{b} + t\vec{v}_2$ (los vectores $a$ y $b$ determinan las posiciones iniciales de los transeúntes para $t = 0$).

El punto medio $M$ del segmento $PQ$ se halla, naturalmente, $OD$ en un punto $M$ tal que

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + t\,\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}.$$

Vemos que éste se desplaza asimismo por cierta recta uniformemente a la velocidad $\dfrac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$. Para hallar esta recta es suficiente marcar el punto medio de las posiciones iniciales de los transeúntes y de sus posiciones, digamos, dentro de una unidad de tiempo.

Los cálculos con los vectores se pueden sustituir por este razonamiento geométrico.

Si $P_0P_1$ y $Q_0Q_1$ son dos segmentos cualesquiera (no paralelos), entonces $M_0M_1$, en el que $M_0$ y $M_1$ representan los puntos medios de los

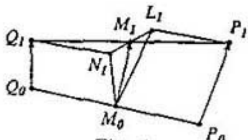


Fig. 1.

segmentos $P_0Q_0$ y $P_1Q_1$ es la mediana del triángulo $L_1M_0N_1$, donde $L_1$ y $N_1$ representan los cuartos vértices de los parale-logramos $P_1P_0M_0L_1$ y $Q_1Q_0M_0N_1$ (véase la fig. 1; en la construcción descrita, $P_1L_1Q_1N_1$ es un paralelogramo, y $P_1Q_1$ y $N_1L_1$, sus diagonales).

Ahora está claro, que si en lugar de y $P_1$ y $Q_1$ en las rectas $Q_0Q_1$ y $P_0P_1$ se toman los puntos $P$ y $Q$, para los cuales $P_0P = tP_0P_1$ y $Q_0Q = tQ_0Q_1$ y, al igual que antes, se construye el triángulo $LM_0N$ (con la mediana $M_0M$), entonces éste se obtendrá por simple homotecia con el coeficiente $t$ y el centro $M_0$ del triángulo $N_1M_1L_1$ (con la mediana $M_0M_1$), o sea, el punto $M$ estará sobre la recta $M_0M_1$, y además $\overline{M_0M} = t\overline{M_0M_1}$).

1.28. Vamos a. aprovechar la fig. 1 de la solución de 1.25. Si los segmentos $P_0P_1$ y $Q_0Q_1$ giran uniformemente alrededor de los puntos $P_0$ y $Q_0$ a igual velocidad angular (una revolución por hora), entonces el triángulo $N_1M_0L_1$, junto con su mediana $M_0$, girará como un conjunto rígido alrededor del punto $M_0$ a la misma velocidad angular.

1.29. *Respuesta*: Una circunferencia. Vamos a traducir este problema al lenguaje del movimiento. Tracemos los radios $O_1K$ y $O_2L$. Supongamos que la recta gira uniformemente a la velocidad angular ω. Entonces, según el teorema «sobre el anillo», los radios $O_1K$ y $O_2L$ girarán uniformemente a la misma velocidad angular 2ω, o sea, el valor del ángulo formado por los radios $O_1K$ y $O_2L$, se mantendrá constante. Así pues, el problema se reduce al anterior.

2.11. b). Aproveche F.

2.19. *Respuesta*: Si $h$ es la longitud de la altura del triángulo $ABC$, el conjunto buscado, siendo $\mu < h$, es vacío; siendo $\mu = h$, todo el triángulo (fig. 2), y siendo $\mu > h$ el contorno de un sexángulo (fig. 3).

2.20. b) Véase la fig. 4.

3.5, b) Este problema se reduce al 3.5, a), y también se resuelve fácilmente «saliendo al espacio»: si sobre las circunferencias dadas

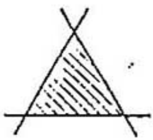


Fig. 2.

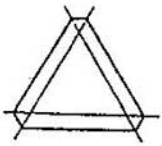


Fig. 3.

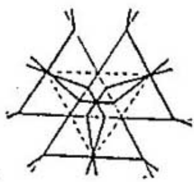


Fig. 4.

(en el plano horizontal $\alpha$) se trazan tres esferas con los centros en este último y se miran desde arriba, veremos tres circunferencias, por las que se cortan las esferas (sus proyecciones sobre el plano horizontal son nuestras tres cuerdas), y el punto de su intersección (su proyección es el punto buscado de intersección de las cuerdas).

3.7, b). Observemos que $\widehat{AMB} = 90° + \frac{\varphi}{2}$, donde $M$ es centro de la circunferencia inscrita al triángulo. De acuerdo con $E$, el conjunto de puntos $M$ es un par de arcos con extremos en $A$ y $B$.

3.7, c). *Respuesta*: El conjunto de puntos buscado es un par de arcos (véanse las figs. 5, *a*, *b*, *c*, correspondientes a los casos: a) $\varphi < 90°$, b) $\varphi = 90°$, c) $\varphi > 90°$).

Supongamos que $l_A$ y $l_B$ son dos rectas que se cortan y pasan correspondientemente por los puntos $A$ y $B$, que $k_A$ y $k_B$, son rectas que pasan también por los puntos $A$ y $B$; además, $k_A \perp l_B$, y $k_B \perp l_A$. Si las rectas $l_A$ y $l_B$, giran alrededor de sus puntos $A$ y $B$, también uniformemente lo harán las rectas $k_A$ y $k_B$ a la misma velocidad angular. De acuerdo con $E°$, el punto de intersección de las rectas $k_A$ y $k_B$ se mueve por una circunferencia.

Observemos que cuando el punto de intersección de las rectas $l_A$ y $l_B$ recorre el arco de la circunferencia $\gamma$, el punto de intersección de las

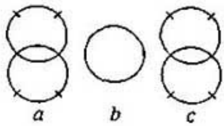



Fig. 5

rectas $k_A$ y $k_B$ recorre asimismo el arco de la circunferencia simétrica a la circunferencia $\gamma$ respecto a la recta $AB$.

3.8, a) Sean $a$, $b$, $c$ rectas que pasan por los puntos $A$, $B$, $C$ correspondientemente; y $K$, $L$ y $M$, respectivamente, los puntos de intersección de $a$ y $b$, $b$ y $c$, $c$ y $a$. De acuerdo con el concepto $E°$ del alfabeto, el punto $K$ recorre la circunferencia con la cuerda $AB$ y el punto $L$, la circunferencia con la cuerda $BC$. Sea $H$ el punto de intersección de estas circunferencias, diferente a $B$.

Cuando durante su rotación la recta $b$, (recta $KL$) pasa por el puntó $H$, los puntos $K$ y $L$ coinciden con $M$; por esto las rectas $a$ y $c$ pasarán también por el punto $H$. Los casos especiales, en que estas dos circunferencias son tangentes en el punto $B$ o coinciden, hay que estudiarlos separadamente. En el primero de ellos el punto $M$ coincide con $B$, y en el segundo, los puntos $K$, $L$ y $M$ coinciden todo el tiempo: «en todas las rectas $a$, $b$ y $c$ se puede insertar un anillo»).

Observemos, a propósito sea dicho, que durante esta rotación el triángulo $KLM$ se mantiene semejante a sí mismo; cuando todas las rectas se cortan en el punto $H$, éste degenera a un punto, su tamaño mayor se logra cuando $a$, $b$, $c$ son, respectivamente, perpendiculares a las rectas $AH$, $BH$ y $CH$: en este momento sus vértices ocupan posiciones diametralmente opuestas al punto $H$ en sus trayectorias (circunferencias).

3.8, b). Supongamos que las rectas $AH$, $BH$ y $CH$ han empezado a girar a una misma velocidad angular ($H$ es el ortocentro del triángulo $ABC$) alrededor de los puntos $A$, $B$ y $C$. Entonces, el punto de intersección de cada par de rectas describe una de las circunferencias acerca de las cuales se habla en el requisito.

3.9. Examinemos tres conjuntos de puntos $M$ que están dentro del triángulo

$$\left\{M = \frac{S_{AMB}}{S_{BMC}} = k_1\right\},\ \left\{M = \frac{S_{BMC}}{S_{AMC}} = k_2\right\},\ \left\{M = \frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = k_3\right\}.$$

Estos tres segmentos (véase I) se cortan en un mismo punto solamente en caso de que $k_1k_2k_3 = 1$.

3.10. Examine tres conjuntos:

$$\{M: |MA|^2 - |MB|^2 = h_1\},\ \{M: |MB|^2 - |MC|^2 = h_2\},$$
$$\{M: |MC|^2 - |MA|^2 = h_3\}.$$

Estas tres rectas (véase F) se cortan en un punto solamente en caso, de que $h_1 + h_2 + h_3 = 0$.

3.21. Trace el conjunto de extremos $M$ de todos los vectores posibles

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} + \ldots + \overrightarrow{OE_n}$$

(donde $\overrightarrow{OE_i}$ son vectores unidades sobre los que se habla en el requisito), primero para $n = 1$, y luego, para $n = 2$, etc. (fig. 6).

4.4. *Respuesta*. La distancia menor entre los transeúntes es $du/\sqrt{u^2+v^2}$.

Supongamos que el primer transeúnte $P$ marcha a la velocidad $u$, y el segundo, a la velocidad $v$ (las longitudes de $u$ y $v$ de dichos vectores

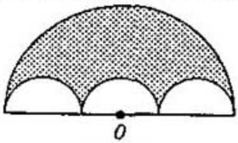


Fig. 6.

se conocen). Examinemos el movimiento relativo $P$ en el sistema de cálculo relacionado con $Q$: será un movimiento uniforme a la velocidad constante $u - v$ (véase 1.3).

En la posición «inicial», cuando $P$ se halla en el punto $P_0$ de intersección de los caminos, $Q_0$ se encuentra respecto a $P$ a la distancia $|Q_0P_0| = d$ en dirección del vector $-\vec{v}$. De esta forma, para hallar la respuesta es suficiente trazar por el punto $P_0$, una recta $l$, paralela al vector $\vec{u} - \vec{v}$ (ésta será la trayectoria de $P$ en el movimiento relativo en el sistema de cálculo relacionado con $Q$) y determinar la distancia $|Q_0H|$ desde el punto $Q_0$ hasta la recta $l$ ($H$ es la proyección de $Q_0$ sobre $l$). Por cuanto el triángulo $Q_0P_0H$ es semejante al triángulo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ ($(Q_0P_0) \perp \vec{u}$, $(Q_0H) \perp (\vec{u} - \vec{v})$), entonces

$$|Q_0H|/|Q_0P_0| = |\vec{u}|/|\vec{u} - \vec{v}| = u/\sqrt{u^2 + v^2}$$

4.6. Del centro $O_1$ de una de las circunferencias tracemos la perpendicular $O_1N$ a la secante $l$, que pasa por el punto $A$, y del centro $O_2$, de la segunda, otra perpendicular $O_2M$ a la recta $O_1N$. Entonces, la longitud $O_2M$ es la mitad de la distancia entre los puntos de intersección de la secante $l$ con las circunferencias (diferentes de $A$).

4.9. *Respuesta*: Un triángulo isósceles. Aproveche 2.8a.

5.4. b). Demuestre que si un segmento $KL$, de longitud constante, se desliza con los extremos por los lados de cierto ángulo $A$, entonces el punto $M$ de intersección de las perpendiculares elevadas desde los puntos $K$ y $L$ a los lados $KA$ y $LA$ del ángulo se mueve por la circunferencia con centro en $A$ (recuerde el examen del teorema de Copérnico 0.3. en la introducción).

5.7. A construir estos puntos ayuda el hecho de que las líneas de nivel de la función $f\ (M)=|AM|/|MB|$ son ortogonales a las circunferencias que pasan por los puntos $A$ y $B$. (pág. 102).

6.3. e). *Respuesta*: Una hipérbola, si las circunferencias están situadas una fuera de otra (pueden estar en contacto); la reunión de una hipérbola y una elipse si las circunferencias se cortan; una elipse si una circunferencia está situada dentro de la otra (pueden tocarse). Los focos de las curvas se hallan en los centros de las circunferencias dadas.

A aliviar el análisis de las posibles posiciones que ocupa la tercera circunferencia con relación a las dos primeras nos ayuda la siguiente regla general: dos circunferencias de radio $r$ y $R$, cuyos centros distan $d$, tienen tangencia, siendo $r + R = d$ ó $|R - r| = d$.

6.12. a). Trazar una tangente simétrica a la dada respecto al centro de la elipse y las correspondientes perpendiculares a las dos desde los focos.

Aproveche 6.9, b) y el teorema que dice que el producto de los segmentos de la cuerda trazada por un punto dado dentro de la circunferencia no depende de la dirección de la cuerda.

6.15. Construya en el caso a) una elipse, en el caso b), una hipérbola con focos en $A$ y $B$, que tenga tangencia con el primer elemento $P_0P_1$, y demuestre que el segundo elemento tendrá también tangencia. Para esto aproveche que $\Delta A'P_1B \cong \Delta AP_1B'$, donde $A'$ es el punto simétrico a $A$ con relación a $P_0P_1$, y $B'$ es el punto simétrico a $B$ respecto a $P_1P_2$. Las tangentes serán las mediatrices de los segmentos $AA'$ y $BB'$ [(6.9,a), (6.10, a)].

6.16, c). Tracemos un conjunto de puntos $N$ para los cuales el punto medio del segmento $AN$ se halla sobre la circunferencia dada: el resultado es una circunferencia. Designemos su centro por $B$, y el radio, por $R$. El conjunto de puntos que están situados mas cerca del punto $A$ que de cualquier punto $N$ de la circunferencia trazada se puede representar como la intersección de semiplanos limitados por las mediatrices del segmento $AN$ que contienen $A$. El mismo conjunto se puede escribir así:

$$\{M : |MA| - |MB| < R\},$$

o sea, que la curva que lo limita es una rama de la hipérbola.

6.17. Compare las indicaciones para 6.16 con la demostración de la propiedad focal de la parábola.

6.23. El origen de las coordenadas escójalo en el punto medio del segmento $AB$, y la dirección del eje $Ox$, de modo que en ciertos momentos de tiempo las dos rectas en rotación sean paralelas a $Ox$. Si se escriben las ecuaciones de las rectas en el momento $t$, se hallan las coordenadas de su punto de intersección y después se excluye el tiempo (como en la resolución 6.22), resulta la ecuación de la hipérbola de tipo (4) (pág. 131).

6.24. Imagínese dos rectas que giran alrededor de los puntos $A$ y $B$ en direcciones contrarias, de modo que la segunda tenga doble velocidad angular. No resulta difícil adivinar que el punto de su intersección se mueve por una curva parecida a la hipérbola, y que sus asíntotas forman ángulos de 60° con la recta $AB$, mientras que el punto de intersección $C$ divide el segmento $AB$ en la relación $|AC|/|BC| = 2$. En efecto, la respuesta a este problema es una rama de la hipérbola. La demostración geométrica lo más sencillo es darla reduciendo el problema al punto $N$ del alfabeto. Para esto hay que trazar el punto $M'$ simétrico a $M$ con relación a la mediatriz $l$ del segmento $AB$ y observar que el rayo $BM'$ es la bisectriz del ángulo $ABM$ y $|MM'| = |MB|$. Por lo tanto $|MB|/p(M, l) = 2$.

6.25, a). Si escogemos el sistema de coordenadas de manera que los lados del ángulo se escriban con las ecuaciones $y = kx$ e $y = -kx$, $x > 0$, entonces el área del triángulo $OPQ$, donde $P$ y $Q$ están sobre los lados del ángulo y el punto medio del segmento $PQ$ tiene las coordenadas $(x; y)$, es igual a $kx^2 - y^2/k$. b) Utilice el resultado del problema 1.7, b). c) Se deduce de a) y b).

7.2. Esta reunión se puede representar como el conjunto de puntos $M$ para cada uno de los cuales se hallará un punto $P$ de la circunferencia, tal que $|MP| < |PA|$, o como un conjunto de puntos $M$ para los cuales la mediatriz del segmento $MA$ tiene un punto común con la circunferencia dada. Compare este problema con 6.16 y 6.17.

7.9. *Respuesta*: a) 3; b) 4; c) 2,5. La relación entre las velocidades angulares puede hallarse como en los ejemplos de las págs. 161...165).

7.13, a) El arco de una circunferencia de radio $R$, con extremos en dos puntos de retroceso de la curva de Steiner (120°), tiene la misma longitud que la semicircunferencia de radio $2R/3$.

7.14, b) Ambas curvas pueden obtenerse como las trayectorias del vértice $M$ de un paralelogramo articulado, las longitudes de cuyos lados son $R - r$ y $r$, mientras que la relación entre las velocidades angulares resulta $\omega_1/\omega_2 = -r/(R - r)$, (las velocidades angulares tienen signos opuestos, véase la pág. 161).

7.18. Aplique 7.7 y el teorema de Mozzi.

7.19. *Respuesta*: una $k$-cicloide (véase la pág. 154).

7.21. Haga uso de 7.13, a) y teoremas de Mozzi y de dos círculos.

7.23. Supongamos que $M$ es un punto en la circunferencia inscrita que avanza sobre ésta a la velocidad angular $\omega$. Entonces:

(1) los puntos $M_1$, $M_2$, y $M_3$, simétricos al punto $M$ respecto a las rectas $BC$, $CA$ y $AB$, se mueven por sus respectivas circunferencias (a velocidad angular $-\omega$).

(2) estas tres circunferencias se cortan en un mismo punto $H$, ortocentro) del triángulo $ABC$ (3.8, b);

(3) cada recta $M_iM$ ($i = 1, 2$ ó $3$) gira a la velocidad angular $(-\omega/2)$ alrededor de $H$;

(4) los tres puntos $M_1$, $M_2$, $M_3$ están sobre una recta $l_M$ que pasa por $H$ (o sea, las tres rectas $M_iM$ son, en realidad, una misma recta $l_M$);

(5) los puntos medios de los segmentos $M_iM$ ($i = 1, 2 . 3$) y el punto medio $K$ del segmento $MH$ están sobre una recta, la de Simpson;

(6) el punto $K$ se mueve por la circunferencia homotética a la circunscrita con el coeficiente 1/2, y cuyo centro de homotecia es $H$;

(7) la circunferencia $\gamma$ pasa por nueve puntos sobre los cuales se habla en el punto b) del problema 7.23.

(8) la envolvente de las rectas $l_M$ es la curva de Steiner tangente a la circunferencia.

# Apéndice I

# Método de coordenadas (fórmulas fundamentales)

En cuanto en el plano se ha elegido el sistema de coordenadas $Oxy$, a cada punto del plano se le pone en correspondencia un par de números: sus coordenadas. La correspondencia entre los puntos del plano y los pares de números es unívoca (a cada punto del plano le corresponde un par de números, y viceversa).

1. La distancia entre dos puntos $A\ (x_1;\ y_1)$ y $B\ (x_2;\ y_2)$ se determina según la fórmula

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_1 - y_2)^2}$$

2. El conjunto de puntos $(x;\ y)$, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (donde a, $b$ y $r$ son números dados, $r > 0$) es una circunferencia de radio $r$ con centro en el punto $(a;\ b)$. En particular, $x^2 + y^2 = r^2$ es la ecuación de una circunferencia de radio $r$ y cuyo centro es el origen del sistema de coordenadas.

3. El punto medio del segmento entre los puntos $A\ (x;\ y)$ y $B\ (x_2;\ y_2)$ tiene las coordenadas $\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}$. En general, el punto que divide el segmento $A\,B$ en la relación $p : q$ ($p$ y $q$ son números positivos dados) tiene las coordenadas $\frac{qx_1 + px_2}{q + p},\ \frac{qy_1 + py_2}{q + p}$. Estas fórmulas adquieren el aspecto más simple si $p$ y $q$ se eligen de modo que $q + p = 1$.

4. El conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $ax + by + c = 0$ ($a$, $b$, $c$ son ciertos números; además $a$ y $b$ no son iguales a cero simultáneamente, o sea, $a^2 + b^2 \neq 0$), es una recta. A la inversa, cada recta se da según una ecuación de tipo $ax + by + c = 0$.

Los números $a$, $b$ y $c$ se determinan unívocamente para cada recta concreta con exactitud hasta la proporcionalidad: si se multiplican por el mismo número $k$ ($k \neq 0$), entonces la ecuación obtenida $kax + kby + kc = 0$ determinará la misma recta.

Una recta divide el plano en dos semiplanos: el conjunto de puntos $(x; y)$, para los cuales $ax + by + c > 0$, y el conjunto de puntos $(x; y)$, para los cuales $ax + by + c < 0$.

5. La distancia $p(M, l)$ desde el punto $M(x_0; y_0)$ hasta la recta $l$, que se da mediante la ecuación $ax + by + c = 0$, se halla por la fórmula

$$p(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esta fórmula adquiere un aspecto particularmente simple siendo $a^2 + b^2 = 1$. Cualquier ecuación $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$ de una recta se puede reducir a esa fórmula, multiplicándola por uno de los números

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad ó \quad -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

# Apéndice II

# Algunos datos de la planimetría escolar

**I. Segmentos proporcionales**

1. *Teorema sobre los segmentos proporcionales*. Si en una recta $l_1$ marcamos varios segmentos y por sus extremos trazamos rectas paralelas que corten otra recta $l_2$, aquéllas cortarán en la segunda segmentos proporcionales a los primeros.

2. Una recta paralela a un lado del triángulo y que corta los otros dos, conformará un triángulo semejante al dado.

3. *Teorema sobre la bisectriz del triángulo*. La bisectriz del ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales a los lados contiguos.

4. *Teorema sobre los segmentos proporcionales en el círculo*. Si dos cuerdas $AB$ y $CD$ de la circunferencia se cortan en el punto interior $E$, quedan divididas por dicho punto en dos segmentos cuyo producto es constante.

$|AE| \cdot |BE| = |DE| \cdot |CE|$

5. *Teorema sobre la tangente y la secante*. Si por un punto $A$, tomado fuera de la circunferencia, se traza la tangente $AT$ y una secante que corte la circunferencia en los puntos $C$ y $B$, entonces

$|AT|^2 = |AC| \cdot |AB|$

*Observaciones:*

1. El teorema sobre los segmentos proporcionales está formulado en el lenguaje del movimiento (pág. 27-28) como «teorema sobre el anillo en la recta». Una afirmación más general, deducida del teorema sobre el anillo, es el lema en la pág. 56.

3. El teorema sobre la bisectriz del triángulo está demostrado en el problema 2.5 (pág. 40) en forma mas general; para «la cruz de bisectrices» definida en el punto B del alfabeto (pág. 38).

5. El teorema sobre la tangente y la secante no figura directamente en el libro, pero está estrechamente relacionado con los problemas sobre el eje radical (pág. 46).

**II. Distancias. Perpendiculares**

1. La distancia desde el punto $A$ hasta el pie de la perpendicular trazada por éste a una recta $l$, es menor que la distancia desde $A$ hasta cualquier otro punto de la recta $l$.

2. La tangente a la circunferencia es perpendicular al radio trazado en el punto de tangencia.

3. De dos rectas oblicuas trazadas de cierto punto a una recta $l$, es mayor aquélla cuya proyección sobre dicha recta $l$ resulta mayor.

4. a) Si un punto se halla sobre la mediatriz (perpendicular al punto medio) de un segmento, entonces equidista de sus extremos.

b) Si un punto equidista de los extremos de un segmento, entonces se halla sobre la mediatriz a éste.

Estos dos teoremas pueden ser formulados en una oración: el conjunto de todos los puntos, cada uno de los cuales equidista de los extremos de un segmento, es la mediatriz a este segmento.

5. a) Si un punto está sobre la bisectriz del ángulo, equidista de los lados de éste.

b) Si un punto de un ángulo, menor del desarrollado, equidista de sus lados, entonces se halla sobre la bisectriz de dicho ángulo.

De a) y b) se deduce que: el conjunto de todos los puntos de un ángulo, menor del desarrollado, equidistantes de sus lados, es la bisectriz de este ángulo.

6. En cualquier triángulo se puede inscribir una, y sólo una circunferencia.

7. Alrededor de un triángulo se puede circunscribir una, y sólo una circunferencia.

*Observaciones:*

1–2. Estas afirmaciones pueden servir de ilustración mas sencilla para el principio de tangencia, formulado en el § 5 (pág. 107). Sean la recta $\gamma$ y el punto $A$. Tracemos la familia de circunferencias concéntricas: las líneas de nivel de la función $f(M) = |AM|$. El punto de la recta $\gamma$ en el que se logra el mínimo de la función $f$, es el punto de tangencia de una de las circunferencias de nuestra familia con la recta $\gamma$.

3–4. La oración general (4) es el punto A del alfabeto (pág. 38). La afirmación 3 figura, de hecho, en el texto del punto A sobre la partición en semiplanos.

5. Una afirmación más general se formula en el punto B del alfabeto, donde fue introducido el término «cruz de bisectrices» (pág. 38).

6. El centro de la circunferencia inscrita está definido en el problema 3.3 (pág. 65).

7. El centro de la circunferencia circunscrita está definido en el problema 3.1 (pág. 62).

*III. Circunferencia*

1. El radio perpendicular a la cuerda la divide en partes iguales.

2. *Teorema sobre las tangentes*. Si desde el punto $A$ hay trazadas dos tangentes $AT_1$ y $AT_2$ a una circunferencia ($T_1$ y $T_2$ son los puntos de tangencia), entonces $|AT_1| = |AT_2|$

3. *Teorema sobre el cuadrilátero circunscrito*. En un cuadrilátero convexo se puede inscribir una circunferencia únicamente cuando la suma de las longitudes de dos de sus lados opuestos es igual a la de los otros dos.

4. El conjunto de todos los vértices de los triángulos rectángulos con la hipotenusa dada $AB$ es una circunferencia de diámetro $AB$ (sin los puntos $A$ y $B$).

5. *Teorema del ángulo inscrito*. El valor en grados del ángulo inscrito es igual a la mitad del valor en grados del arco sobre el cual se apoya.

6. El ángulo formado por la tangente a una circunferencia y la cuerda que sale del punto de tangencia mide la mitad del valor en grados del arco situado dentro de este ángulo.

7. La medida de un ángulo cuyo vértice se encuentra dentro de un círculo es igual a la semisuma de los valores de los arcos, de los cuales uno está situado entre los lados de este ángulo, y el otro, entre las prolongaciones de los lados.

La medida de un ángulo formado por dos secantes que se cortan fuera del círculo es igual a la media de la diferencia de los arcos mayor y menor situados dentro del ángulo.

8. *Teorema sobre el cuadrilátero inscrito.* Alrededor de un cuadrilátero se puede circunscribir una circunferencia únicamente cuando la suma de los valores (en grados) de sus ángulos opuestos sea igual a 180°.

*Observaciones:*

4. Esta afirmación se examina en la pág. 14 en relación con el problema sobre el gato.

5. El teorema sobre el ángulo inscrito está formulado en el lenguaje del movimiento (pág. 27) como «teorema sobre el anillo en la circunferencia».

6–7. Con estos teoremas linda el problema 2.6.

*IV. Triángulos*

1. *Teorema sobre el ángulo externo.* Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.

2. *Teorema sobre las medianas.* Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto que las divide en la relación 2:1, contando desde el vértice.

3. *Teorema sobre las alturas del triángulo.* Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

4. *Teorema de Pitágoras.* La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.

5. Los lados del triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

6. El área del triángulo es igual a la mitad del producto:

a) de su base por su altura;

b) de dos de sus lados por el seno del ángulo entre éstos.

*Observaciones:*

2–3. Las demostraciones de estos teoremas están dadas en las págs. 63–66, en las resoluciones de los problemas 3.2 y 3.4 (el hecho de que una mediana divide a la otra en la relación 2 : 1 se puede deducir de la solución de 3.4).

# Apéndice III

# Una docena de tareas

Este apéndice está destinado a los lectores que, habiendo leído de corrida el libro y tratado de resolver los problemas que les han gustado, no han podido dilucidar algunos de estos, pero siguen deseando comprenderlos y están dispuestos a estudiar detalladamente el libro «con el lápiz en la mano».

Las doce tareas planteadas más abajo abarcan en sus diversos aspectos todo el contenido del libro y ponen de manifiesto los vínculos, ocultos a primera vista, entre los distintos problemas.

Las tareas se señalan como se acostumbra en la Escuela de Matemática por Correspondencia adjunta a la Universidad de Moscú. Al principio se explica el tema de la tarea y se enumeran las páginas del libro, los teoremas y los problemas que hay que examinar detalladamente; luego se ofrece la lista de los problemas de control. Los problemas «obligatorios» están separados con el signo ‖ de los suplementarios. Ciertos problemas vienen con sus explicaciones. En lo que se refiere a las soluciones, aconsejamos tratar de apuntarlas sucintamente, sin detalles excesivos, formulando claramente las principales etapas de la resolución y las referencias a los teoremas del curso de geometría. No hay que olvidar los casos particulares: a veces deben estudiarse aparte (como en el problema 1.1 el caso del punto $M$ situado sobre la recta $AC$, o en el problema 1.3 el caso del cuadrado); aunque no instamos a los lectores a que sean excesivamente meticulosos en la revelación y el estudio detallado de todos los casos degenerados, les aconsejamos que cuiden de que los resultados se formulen, como acostumbran los matemáticos, exacta y ampliamente.

**1. Nombre las letras**

El objetivo de esta tarea es familiarizarse con el alfabeto y con los teoremas sobre los conjuntos de puntos, que más adelante resultarán útiles al resolver los problemas.

Revise el § 2 y escriba en una hoja aparte la lista de los puntos del alfabeto, desde A hasta J; al lado de cada letra escriba la fórmula (véase la pág. 60) y dibuje la figura correspondiente.

2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 1.16a), b), 5.4a), 1.11, 1.12‖2.13, 2.15, 2.16, 3.6

*Explicaciones*

En los primeros cinco problemas se exige sencillamente dar las respuestas: nombrar la letra adecuada.

A resolver sin cálculos el problema 5.4a) ayudará el problema 1.16a).

En los problemas de «construcción» la tarea se reduce al trazamiento de cierto punto: el centro de la circunferencia, etc. El punto buscado se obtiene como la intersección de dos conjuntos del alfabeto (véase 1.4) Hay que nombrar estos conjuntos (puntos del alfabeto) y señalar cuántas respuestas tiene el problema.

La resolución breve de 2.13 está basada en el resultado de 2.12.

**2. Transformaciones y construcciones**

En las resoluciones de los problemas que constituyen esta tarea se emplean distintas transformaciones geométricas de la circunferencia y de la recta, acerca de las cuales se habla en las Págs. 29–32 y con las que hemos chocado más de una vez en el libro [6.9a), b), 7.1a), b)]

1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24a), b)‖3.7a), 4.8a)

*Explicaciones:*

1.22. Véase la resolución del problema 1.7a).

1.23. Véase la resolución del problema 1.6.

1.24a) Indique todas las respuestas.

3.7a) Emplee el hecho de que el centro de gravedad divide la mediana en la relación 2:1, contando desde el vértice.

4.8. Lea la resolución del problema 4.7.

En todos estos problemas aconsejamos hacer todas las construcciones necesarias. La resolución hay que escribirla sucintamente, fijándose en qué conjuntos y transformaciones se emplean. Señale cuántas resoluciones tiene el problema,

*3. Rectas que giran*

Esta tarea está relacionada, por lo general, con diferentes variantes del teorema sobre el ángulo inscrito y sus corolarios.

Revise algunas páginas del libro en el siguiente orden: el problema 0.1 (sobre el gato), el problema 1.1, el teorema sobre el anillo en la circunferencia (págs. 26–27), los puntos E° y E del alfabeto (págs. 41–42). Observe que el teorema sobre el anillo (al igual que el teorema sobre el gato) no hay que interpretarlo al pie de la letra: el «anillo» imaginario es simplemente el punto de intersección de una recta y una circunferencia; si hacemos un modelo de alambre, entonces, después de dar una vuelta (a uno u otro lado), el anillo se estancará.

1.8, 1.9, 1.10, 1.13, 1.18, 2.6a), b) 1.27, 2.7, 2.8b), 4.6, 7.5, 7.6.

*Explicaciones*

1 9. Trace los dibujos para distintas posiciones del punto $A$.

1.10 Trace una recta por el punto $B$, construya el punto $A'$, simétrico al punto $A$ respecto a esta recta, y después trace el segmento $BA'$.

Represente los conjuntos, de puntos - las respuestas a los problemas 1.8 y 1.10 - en un dibujo. ¿Mediante qué transformación se puede obtener el conjunto 1.10 de 1.8?

1.13. Indique cuántas soluciones tiene el problema.

1.27. Haga un experimento con una escuadra común. Indicaciones para la posible resolución: describa alrededor de un triángulo de madera una circunferencia, una los vértices de los ángulos rectos y aplique el teorema del ángulo inscrito.

2.6. Imagínese que la cuerda móvil se mueve uniformemente por la circunferencia.

2.8b) La resolución es análoga a 2.8a). Reflexione sobre la segunda variante de la resolución de este problema, que se ofrece al final de la pág. 43.

*4. Correlaciones directas y lineales*

Esta tarea está relacionada con problemas en los cuales no figuran curvas, sino solamente rectas.

Revise algunas páginas del libro en el siguiente orden: los problemas 1.2 y 1.3 sobre «la bicicleta» y sobre el rectángulo (págs. 22–24); el teorema sobre el anillo en la recta (págs. 27 y 28) y el lema importante que le sigue (pág. 56); los puntos F, I, J del alfabeto, y los teoremas generales sobre las distancias hasta las rectas y los cuadrados de las distancias (págs; 44-58).

1.24a), b), 2.18, 2.19b), 3.9, 3.14, 3.15, 3.16 ‖ 1.26, 1.27, 2.14, 2.20a), 3.18.

*Explicaciones*

2.18. Véase las resoluciones 2.5 y 2.17.

2.19b). Hay que investigar cómo depende la respuesta de las dimensiones del rectángulo $a \times b$ y del parámetro (véase la respuesta al problema 2.19a)).

3.14–3.16. Véase el punto C del alfabeto.

1.27 Sean $a$ y $b$ las longitudes de los catetos del triángulo de madera. Determine la relación entre las distancias desde su vértice libre hasta los lados del ángulo recto dado.

2.20. Es suficiente dar la respuesta y el dibujo.

3.18. Lea la resolución 3.17.

*5. El principio de tangencia (extremo convencional)*

La tarea consta de problemas en los que es necesario hallar el máximo y el mínimo. En cada problema el asunto se puede reducir a que en cierta linea (como regla, uno de los conjuntos del alfabeto) hay que hallar el punto en el cual se alcanza el máximo y el mínimo de cierta función. Lea las resoluciones de los problemas 4.1, 4.2 y 4.7 (págs. 81–85), la resolución del problema 5.1, el texto restante del § 5, especialmente las págs. 106–109, y examine (o copie) los mapas de las lineas de nivel en las págs. 100–102.

4.3, 4.9, 5.4a), 5.5., 5.6a), b), 5.8 ‖ 4.8, 5.4b), 5.7.

*Explicaciones*

5.4a) Véase el problema 1.16a).

*6. Particiones*

En esta tarea se choca con diferentes conjuntos de puntos que satisfacen a condiciones en forma de desigualdades, así como con diferentes operaciones sobre los conjuntos (intersecciones, reuniones) que corresponden a combinaciones lógicas de los requisitos. Muchos puntos del alfabeto § 2 tienen complementos de este tipo. Una línea que consta de los puntos $M$, donde $f(M) = a$, parte el plano en dos dominios: en uno $f(M) < a$, y en el otro $f(M) > a$. (aquí $f$ es cierta función en el plano, véase la pág. 96). De idéntica manera, si $f$ y $g$ son dos funciones en el plano, el conjunto de puntos $M$, donde $f(M) = g(M)$, divide el plano en dominios: en unos, $f(M) > g(M)$, y en otros $f(M) < g(M)$. Analice el texto del § 3 (págs. 69-70) y la resolución de los problemas 3.11, 3.23 (sobre el queso) 1.19, 3.12, 3.14, 5.3a), b), 3.15, 3.16‖3.18, 3.19, 4.11, 4.12a), b).

*Explicaciones*

1.19. Trace el segmento BC y señale el conjunto de puntos de los vértices A del triángulo ABC, para los cuales se cumple cada una de las condiciones a), b), c); utilizando los segundos párrafos de los puntos D y E del alfabeto.

3.14. Lea la resolución 3.13.

3.15–3.16. Haga uso de C, y en el problema 3.16 acuérdese de 2.4.

3.18. En cada lado del polígono trace un rectángulo de altura $S/p$, dirigido hacia dentro. ¿Pueden tapar estos rectángulos todo el polígono?

4.11–4.12. Lea las resoluciones de 4.10.

*7. Elipses, hipérbolas y parábolas*

El objetivo de esta tarea es dar a conocer nuestras primeras definiciones de las curvas enumeradas en el título: los puntos del alfabeto K, L, M. Lea el § 6 y haga la lista del alfabeto: al lado de cada letra escriba la fórmula y trace el dibujo correspondiente (en esto le ayudarán los problemas 6.5a), b) de esta tarea.

6.1a), b), c), 6.2, 6.3a), b), c), d), 6.4a), b), 6.5a), b), 6.10a), b), 6.11a), b), ‖6.8, 6.12a), b), 6.13a), 6.14, 6.24.

*Explicaciones*

6.1a), b), c). Indique cómo la respuesta depende del parámetro (ponga $|AB| = 2c$).

6.2. Emplee el teorema referente a los segmentos de las tangentes a la circunferencia.

6.4b). Examine las posiciones de la quebrada $ABCD$, tales que el elemento $BC$ corte a $AD$.

Los siguientes problemas se refieren a la propiedad focal de las curvas.

6.10a). La demostración se da empleando el esquema de la resolución 6.9a) y además se basa en el problema 6.7.

6.11a). El problema consiste en que hay que comparar la definición de la parábola (el punto M del alfabeto) y su propiedad focal.

6.8. La demostración es análoga a la demostración de la ortogonalidad de las elipses y de las hipérbolas confocales (pág. 119).

### *8. Envolventes. Reuniones Infinitas*

En esta tarea todos los problemas son bastante difíciles. En cada uno se examina toda una familia de rectas o de circunferencias. Si tomamos una reunión de líneas de dicha familia, tendremos un dominio entero en el plano. A menudo ocurre que la frontera de este dominio es la envolvente de la familia: una curva (o recta) que tiene tangencia con todas las líneas de la misma. (Por ejemplo, en la resolución del problema 1.5, en la pág. 29, hemos utilizado el hecho de que la envolvente de una familia de cuerdas de igual longitud trazadas a la circunferencia dada, es otra circunferencia concéntrica a ésta). Le aconsejamos encarecidamente que para cada problema confeccione su dibujo. Pero no hace falta trazar las envolventes; si se traza suficientes líneas de la familia, las envolventes aparecen por sí mismas (lo mismo que en el dibujo en la pág. 125).

Lea las págs. 124–125. la pág. 18, las resoluciones 3.20b), 6.6, 6.7. y la demostración de la propiedad focal de la parábola (págs. 120–121).

3.20a), 3.22, 4.5, 6.16a), b), 6.17||6.15a), 6.25a). b), 7.2, 7.20.

### *Explicaciones*

3.20. Represente esta reunión como un conjunto de vértices $M$ de un paralelogramo articulado $OPMQ$ con los lados 3 cm y 5 cm; compare este procedimiento con el del § 7 (págs. 143–156).

3.22. Si los primeros $t$ minutos una persona iba por el camino, mientras que después, por el prado, ¿a dónde podía llegar? Ahora hay que tomar la reunión de los conjuntos obtenidos para todos los $t$, de 0 a 60.

4.5. ¿Qué conjunto será la respuesta al problema 3.22, si 1 hora la cambiamos por $T$ horas? Aclare, con qué valor de $T$ este conjunto contiene el punto $B$.

7.20. La familia de tangentes a la nefroide se ha examinado en el problema 7.16. Es necesario recordar también los problemas sobre la cardioide 7.1a), 7.2 y el teorema sobre los dos círculos (págs. 156–158).

*9. Tangentes a las cicloides*

Esta tarea incluye una serie de problemas en los cuales con respecto a cierta familia de rectas hay que demostrar que su envolvente es una curva cicloidal. Las resoluciones de la mayoría de ellos están basadas en el teorema sobre dos círculos. Lea la formulación y los ejemplos del empleo de dicho teorema en las págs. 156–159, y examine también su demostración (págs. 160–168).

7.17a), b), 7.16, 7.18, 7.19‖7.21, 7.22, 7.23.

*Explicaciones*

7.17. Aclare por qué curvas se mueven los extremos de los diámetros, y que curva les sirve de envolvente. (Compare el resultado con el último dibujo en la pág. 155).

7.16. Aplicando el teorema sobre los dos círculos, describa la familia de las tangentes a la nefroide. Lea la resolución del problema 7.15.

*10. Ecuaciones de las curvas*

El método de coordenadas permite formular los teoremas que en forma natural sintetizan una serie de observaciones geométricas particulares (revise los teoremas generales en el § 2, págs. 47–50, 57–58, § 6, págs. 127–136). La representación de las curvas en forma de ecuaciones permite resolver problemas geométricos en el lenguaje del álgebra. En esta tarea están reunidos los ejercicios relacionados con el método de coordenadas y los problemas en los que es muy natural emplearlo. La mayoría de los problemas se refieren a las curvas de segundo grado. En algunos es necesario pasar de las ecuaciones paramétricas a las algebraicas (véase la resolución del problema 0.2, págs. 14–15).

1.16c), 6.18, 6.19a), b), c), 6.20a), b), 7.24b) ‖ 6.21a), b), 6.23, 6.25a), 6.26a)', b), 6.27.

*Explicaciones*

En los problemas sobre las distancias hasta los puntos y las rectas se deberá examinar atentamente cómo el resultado depende del parámetro. Para cada uno de estos problemas hay que trazar el mapa correspondiente de la familia de curvas. Resulta cómodo trazar la elipse según la ecuación dada, imaginándosela como una circunferencia comprimida (pág. 129), mientras que la hipérbola, trazando sus asíntotas y marcando sus vértices (los puntos de la hipérbola más cercanos a su centro).

En el problema 6.26, si nos limitamos a los puntos $M$ adentro del triángulo, se puede conseguir una bonita resolución geométrica, empleando la semejanza de los triángulos y los teoremas sobre el ángulo inscrito y el ángulo entre una tangente y una cuerda.

*11. Prácticas de geometría*

Esta tarea consiste en confeccionar dibujos que ilustren las propiedades y las definiciones más interesantes de las curvas. Esto permitirá revisar el libro desde un punto de vista nuevo.

Se pueden examinar los problemas en el espíritu del dicho conocido: «la geometría, es el arte de razonar correctamente sobre un dibujo incorrecto». Pero a veces tiene sentido enfocar la geometría con concepciones físicas: un dibujo exacto es un experimento geométrico que permite llegar a comprender cierta afirmación que se refiere a toda una familia de líneas o a una configuración embrollada, al advertir alguna regularidad nueva.

En general, aconsejamos repetir (a veces de modo más completo) aquellos dibujos que representan interesantes familias de rectas y circunferencias. El trazado de estas ilustraciones relativamente no es difícil, pero, de todas formas, para que resulten bonitas, hay que ser exacto e incluso revelar inventiva. En hojas grandes de papel, estos dibujos resultan más expresivos que nuestros pequeños planos en el margen de las páginas.

1. *La astroide* (pág. 18). Trate de que los puntos medios de los segmentos estén regularmente distribuidos por la circunferencia sobre la cual están situados. Cuando mayor sea la cantidad de segmentos dibujados, tanto mejor resultará su envolvente: la astroide.

2. *Familias ortogonales de circunferencias*, (pág. 102). La primera familia son todas las circunferencias posibles que pasan por los puntos $A$

y $B$ (véase 2.1), y la segunda familia, las circunferencias cuyos centros están sobre la recta $AB$; si $M$ es el centro de una de ellas, entonces su radio es el segmento de la tangente trazada desde el punto $M$ a la circunferencia de diámetro $AB$.

3. *Elipses, hipérbolas y parábolas* (pág. 116). El método de construcción viene indicado en los problemas 6.5a), b). Pinte, de dos colores, de modo escaqueado, los cuadros obtenidos (véase la gallarda en la pág. 119 y la conclusión del problema (6.8). Haga un ejemplar mas de dibujos para los problemas 6.5a), b) y trace en ellos, con tinta, las familias de elipses, hipérbolas y parábolas.

4. *Curvas de segundo grado como envolventes de rectas* (págs. 125–126). El método de construcción se deduce de 6.16 y 6.17.

5. *Curvas que giran*. Haga independientemente el dibujo que ilustra el punto E° del alfabeto (el dibujo en la pág. 41). Construya una circunferencia y divídala en 12 partes iguales. Por los puntos de división trace rectas y por el punto $A$ (uno de los puntos de división) una tangente a la circunferencia (obtendrá un haz de 12 rectas que dividen el plano en 24 ángulos iguales). Moviendo el lápiz por la circunferencia se puede convencer de que, cuando se pasa del punto $M$ de división al siguiente, la recta $AM$, gira en un mismo ángulo. Escoja otro punto de división $B$ (digamos, el cuarto desde $A$) y trace para él otro haz de rectas, como para el punto $A$. Marque para cada punto de división $M$ el ángulo agudo entre las rectas $AM$ y $BM$ (todos estos ángulos son iguales).

Del teorema E° se deduce que si seguimos las 23 rectas hasta que se corten, entonces los 110 puntos de intersección obtenidos (sin contar los puntos $A$ y $B$) están en 11 circunferencias, 10 en cada una (?).

Pinte en forma escaqueada los cuadros de la red obtenida. Entonces verá la familia de circunferencias que pasan por los puntos $A$ y $B$ y la familia de hipérbolas (conviene tomar haces no de 12 sino que de 24 rectas). En realidad, si las rectas que pasan por los puntos $A$ y $B$ giran en direcciones opuestas a igual velocidad angular, su punto de intersección se mueve por una hipérbola (6.23).

6. *La concoide de Nicomedes y los caracoles de Pascal* (págs. 141 y 151). La concoide de Nicomedes se obtiene de la manera siguiente. Sean una recta y un punto. Sobre las rectas que pasan por el punto dado se trazan, desde los puntos de su intersección con la recta dada, segmentos de longitud constante $d$ en ambas direcciones. Dibuje la familia de semejantes concoides (con diferentes $d$).

Los caracoles de Pascal se obtienen de la misma forma. Sean una circunferencia y un punto sobre ésta. Sobre las rectas que pasan por el punto dado se trazan, desde los puntos de su intersección con la circunferencia, segmentos de longitud constante en ambas direcciones.

7. *La cardioide y la nefroide como envolventes de circunferencias* (pág. 146, 7.2 y pág. 168, 7.20).

8. *La cardioide y la nefroide como envolventes de rayos reflejados* (pág. 160). Estos dibujos es cómodo trazarlos aplicando el hecho de que la cuerda del rayo incidente tiene la misma longitud que la cuerda del rayo reflejado.

9. *Los transeúntes en rectas y en una circunferencia*. Repita el dibujo 3 de la pág. 125. Trace los dibujos de las curvas cicloidales (3–6 de la pág. 154–155), utilizando el problema 7.19, siendo $k = -3, -2, 2, 3$.

Explicaremos esto para el caso en que $k = -2$. Dividamos la circunferencia, digamos, en 24 partes iguales. Supongamos que el punto $A$ de división es la situación inicial de los transeúntes $P$ y $Q$ y que ambos se mueven uniformemente por la circunferencia. Como $k = -2$, ellos van en distintas direcciones, y la velocidad de $Q$ es dos veces mayor que la de $P$. Marcamos sus posiciones a iguales plazos de tiempo (cuando el punto $P$ pasa el punto de división de turno) y las unimos con rectas $PQ$ (cuando los transeúntes se sitúan en el mismo punto de división, trazamos la tangente a la circunferencia). La envolvente de estas rectas resulta la curva de Steiner.

### *12. Pequeñas investigaciones*

Casi cada problema de geometría sirve de objeto para una pequeña investigación independiente, que exige imaginación y una manera de pensar original. En esta tarea hemos destacado cuatro problemas difíciles, para resolver los cuales se necesita emplear todo un complejo de diferentes consideraciones.

4.12a), 4.14a), b), 6.15a), b), 7.23a), b), c).

La solución del problema 4.14b) es bastante similar a la de la lancha motora. Para los dos últimos problemas hay indicaciones al final del libro. Para el último problema se pueden hacer bonitos dibujos, representando la familia de rectas de Simpson, de cierto triángulo (la envolvente es la curva de Steiner).