UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

INSTITUTO DE MATEMATICAS

SUCESIONES EN EL CUERPO R

Ing. MARIO RAUL AZOCAR

1969

UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

SUCESIONES EN EL CUERPO R

Ing. MARIO RAUL AZOCAR

1969

SUCESIONES

1. El campo de los reales

Desde los estudios de humanidades nuestros alumnos están familiarizados con el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, de tal modo que conocen y manejan con seguridad las operaciones fundamentales entre ellos.

Por esta razón, el párrafo presente tiene como objetivo principal sistematizar las propiedades del conjunto de los números reales, que posteriormente serán de uso frecuente.

a) Axiomas de adición.

En el conjunto $\mathbb{R}$ se define una operación llamada suma, que asocia a cada par ordenado de números reales: a y b un número real a + b, de tal modo que se cumplen los axiomas siguientes:

A1) Para todo $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se tiene:

$a + b = b + a$ (commutatividad).

A2) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociatividad).

A3) Existe en $\mathbb{R}$ un número: 0, tal que:

$a + 0 = a \quad \forall \ a \in \mathbb{R}$

A4) Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe un elemento $(-a) \in \mathbb{R}$, tal que:

$a + (-a) = 0$.

De acuerdo a la terminología algebraica conviene observar que la pareja $(\mathbb{R}, +)$ constituye un grupo abeliano.

b) Axiomas de Multiplicación.

En el conjunto $\mathbb{R}$ se define una operación llamada producto, que asocia a cada pareja ordenada de números reales: a y b un número real ab, de tal modo que se verifican las axiomas siguientes:

M1) Para todo $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se tiene:

$a \cdot b = b \cdot a$ (commutatividad).

M2) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociatividad).

M3) Existe en $\mathbb{R}$ un elemento: $1 \neq 0$, tal que:

$a \cdot 1 = a \quad \forall \quad a \in \mathbb{R}$

M4) Para cada $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, existe un elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que: $a \cdot a^{-1} = 1$.

Observamos al lector que el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ con la operación producto $(\cdot)$, recién definida, constituye un grupo abeliano.

c) <u>Axioma de Distribución</u>.

D1) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene:

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Este axioma que vincula las operaciones de adición y multiplicación, junto con las axiomas precedentes nos garantiza que la terna $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un campo alge braico.

d) Axiomas de Orden.

En el conjunto $\mathbb{R}$, para cada par de números reales se define una relación binaria: "menor que" expresada por el símbolo, $<$, de tal modo que se verifican los axiomas siguientes:

(O1) Para cada $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se tiene una y sólo una de las expresiones: $a < b$ $a = b$ $b < a$

(O2) Para cada $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene que:
$a < b$ y $b < c$ implica $a < c$

(O3) Para cada $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene que:
$a < b$ implica $a + c < b + c$

(O4) Para cada $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene que:
$a < b$ y $0 < c$ implican $ac < bc$

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, por satisfacer los axiomas (O1), (O2), (O3) y (O4) se dicen que es un campo ordenado.

Desde estos postulados se obtiene

sin dificultad los teoremas usuales sobre desigualdades. Definida la relación ($<$) "menor que" se puede introducir sin dificultad las relaciones ($>$) "mayor que"; ($\leq$) "menor o igual que" y ($\geq$) "mayor o igual que", en efecto, basta tomar la definición siguiente:

DEF 1

$a > b$ significa $b < a$

$a \leq b$ significa (no $a > b$)

$a \geq b$ significa (no $a < b$)

Todos los axiomas precedentes, vale decir, los axiomas de adición, de multiplicación, de distribución y de orden, son indudablemente muy familiares para los jóvenes estudiantes liceanos. Creemos que no ocurre lo mismo con el llamado axioma de completitud o axioma de completividad, que es el que realmente permite diferenciar al campo de los números reales de cualquier otro campo ordenado.

Con el propósito de presentar en forma adecuada este axioma de completitud, debemos introducir previamente algunas nociones de fundamental importancia.

DEF 2

Un conjunto S de números reales de dice acotado superiormente si existe un número real b, tal que:

$$x \leq b \qquad \forall \ x \in S$$

El número b se llama cota superior del conjunto S.

Como ejemplo de conjunto acotado superiormente, podemos mencionar el conjunto $\mathbb{R}^-$, de los reales negativos, que admite como cota superior el número cero.

De acuerdo a la definición anterior tenemos que si un conjunto S de números reales es acotado superiormente, ningún número de S es mayor que la cota superior b. Además si b es cota superior de S, todo número real mayor que b también es cota superior de S.

Finalmente, conviene observar que, hay conjuntos de números reales que no son acotados superiormente. Tal cosa ocurre, por ejemplo, con el conjunto de los enteros positivos.

DEF 3

Un conjunto S de números reales se dice acotado inferiormente si existe un número real a, tal que:

$$x \geq a \qquad \forall \ x \in S$$

El número a se llama cota inferior del conjunto S.

El conjunto $\mathbb{R}^+$ de los reales positivos es acotado inferiormente, ya que admite como cota inferior al cero y también a cualquier número negativo.

DEF 4

Un conjunto S de números reales se dice acotado, si es acotado superior e inferiormente.

Como ejemplos de conjuntos acotados podemos mencionar los intervalos:

$$(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$$
$$[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$$
$$(a, b] = \{ x \mid x < a \leq b \}$$
$$[a, b) = \{ x \mid x \leq a < b \}$$

En todos ellos el número a es cota inferior y el número b es cota superior.

DEF 5

Se llama supremo de un conjunto S de números reales, a todo real M, tal que:

1) $x \leq M \quad \forall x \in S$

2) $\forall M_0 < M \quad \exists x \in S$ tal que $x > M_0$

Para indicar que M es supremo del conjunto S, pondremos: $M = \sup S$

De acuerdo a esta definición tenemos que un número M es supremo de un conjunto S de números reales si y sólo si:

1) M es cota superior de S.

2) M es la menor cota superior de S.

De esta observación se infiere de inmediato que si un conjunto S tiene supremo, éste debe ser único. De todos modos para no dejar ninguna duda al respecto, demostraremos esta afirmación.

<u>TEOREMA</u> 1

Si un conjunto S de números reales tiene un supremo, éste es único.

<u>Dm</u>.

Supongamos que el conjunto S tenga dos supremos M_1, y M_2, entonces puesto que M_1 y M_2 son también cotas superiores de S, tenemos:

$$M_1 \leq M_2 \qquad y \qquad M_2 \leq M_1$$

de donde resulta que $M_1 = M_2$.

La definición de supremo de un conjunto S frecuentemente se da por una formulación equivalente que pasamos a indicar.

TEOREMA 2

Un número real M es supremo de un conjunto S de números reales si y sólo si:

1) $x \leq M \qquad \forall\, x \in S$

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, x \in S$ tal que $x > M - \varepsilon$

Dm.

Sea M el supremo de un conjunto S, entonces por definición de supremo, tenemos que:

1) $x \leq M \qquad \forall\, x \in S$

2) $\forall\, M_o < M \qquad \exists\, x \in S$ tal que $x > M_o$

Tomando $\varepsilon = M - M_o$, resulta $M_o = M - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ y entonces la condición (2) se expresa por:

3) $\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, x \in S$ tal que $x > M - \varepsilon$

Así si M es supremo de S se verifican las dos condiciones indicadas en el teorema.

Recíprocamente sea M un número que verifica las relaciones:

1) $x \leq M \qquad \forall\, x \in S$

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, x \in S \quad$ tal que $\quad x > M - \varepsilon$

Daremos a la condición (2) la forma corriente que tiene en la definición de supremo. En efecto, tomando $M_o = M - \varepsilon$, se tiene $M_o < M$ y entonces (2) se reduce a:

3) $\forall\, M_o < M \qquad \exists\, x \in S \quad$ tal que $\quad x > M_o$

Los intervalos abierto y cerrado que se indican:

$(a,b) = \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

tienen ambos como supremo al número b; pero en el primer conjunto, b no es elemento del intervalo y en el segundo, b es elemento del conjunto.

<u>DEF</u> 6

Se llama ínfimo de un conjunto S de números reales, a un real m, tal que:

1) $x \geq m \qquad \forall x \in S$

2) $\forall m_o > m \qquad \exists x \in S$ tal que $x < m_o$

Para indicar que m es ínfimo del conjunto S, pondremos: $m = \inf S$

La definición precedente expresa que un número m es ínfimo de un conjunto S de números reales, si y sólo si:

1) m es cota inferior de S.

2) m es la mayor cota inferior de S.

De aquí entonces que si un conjunto de números reales tiene ínfimo, éste debe ser único.

Tal como ocurrió con la idea de supremo, la noción de ínfimo puede expresarse también en la forma siguiente:

TEOREMA 3

Un número real m es ínfimo de un conjunto S de números reales si y sólo si:

1) $x \geq m \qquad \forall x \in S$

2) $\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x \in S$ tal que $x < m + \varepsilon$.

Dm.

Análoga a la del teorema 2. Se deja al lector.

Los intervalos semi-abiertos que se indican:

$$(a,b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$$

$$[a,b) = \{ x \mid a \leq x < b \}$$

tienen ambos como ínfimo al número a. En el primero de ellos, $a \notin S$ y en el segundo $a \in S$.

Introducidas las nociones de ínfimo y de supremo estamos en condiciones de dar el llamado axioma de completitud, que como hemos dicho es el que permite diferenciar el campo de los reales de otros campos ordenados.

e) Axioma de Completitud

C1) Todo conjunto S de números reales, no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

TEOREMA 4

Todo conjunto S de números reales, no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.

Dm.

Sea $A = \{ a \in \mathbb{R} \mid a \text{ es cota inferior de } S \}$

Como S es acotado inferiormente, tenemos que A no es vacío. Además, si $x \in S$ y $a \in A$, por ser a cota inferior de S ocurre que, $a \leq x$, para todo $a \in A$ y entonces A es acotado superiormente.

Aprovechando el axioma de completitud, como A es no vacío y acotado superiormente, concluímos que A tiene un supremo α. Haremos ver que α es ínfimo de S. Por ser α supremo de A tenemos que:

1) $a \leq \alpha \quad \forall\, a \in A.$

y como todo $x \in S$ es cota superior de A ocurre que:

2) $\alpha \leq x \quad \forall\, x \in S.$

La expresión (2) nos muestra que α es cota inferior de S y la expresión (1) muestra que, toda cota inferior a de S, es menor que α, así tenemos que α es la mayor cota inferior de S, o sea que $\alpha = \inf S$.

<u>TEOREMA</u> 5 (Dedekind)

Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, tales que:

1) $A \cup B = \mathbb{R}$

2) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$

3) $a \in A \wedge b \in B \Longrightarrow a < b$

entonces existe un número $w \in \mathbb{R}$, tal que:

$$x < w \Longrightarrow x \in A$$

$$x > w \Longrightarrow x \in B$$

De acuerdo a la hipótesis (2) el conjunto A no es vacío y por (3) el conjunto A es acotado superiormente. Aprovechando el axioma de completitud concluímos que A tiene un supremo. Sea entonces $\sup A = w$.

Por ser w el supremo de A, tenemos:

4) $a \leq w \qquad \forall\, a \in A$

y como todo $b \in B$ es cota superior de A resulta:

5) $w \leq b \qquad \forall\, b \in B.$

Ahora si $x > w$, afirmamos que $x \in B$, pues si suponemos $x \in A$, la expresión (4) obliga que $x \leq w$, expresión que contradice la hipótesis $x > w$.

Análogamente si $x < w$, afirmamos que $x \in A$, pues si suponemos $x \in B$, la expresión (5) obliga que $x \geq w$, expresión que contradice la hipótesis $x < w$.

Observación

En el teorema anterior está implícita la noción de cotadura de Dedekind, que tradicionalmente ha sido considerada para definir la noción de número real, partiendo del conjunto Q de los racionales. Pero el teorema afirma mucho más. En efecto, se sabe que una cotadura en el campo de los racionales define un número real; el teorema de Dedekind asegura que una cotadura en el campo de los reales también define un real y ello indudablemente establece una notoria diferencia entre el conjunto de los racionales y el conjunto de los reales.

DEF 7

Se llama vecindad o entorno de un número real a, todo intervalo de la forma (a - h, a + k) con h y k positivos.

DEF 8

Se dice que un número a, es punto de acumulación de un conjunto S, si en toda vecindad de a existen infinitos números del conjunto S.

Un punto de acumulación de un conjunto no es necesariamente un elemento del conjunto; así en el conjunto:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

el cero es un punto de acumulación y no pertenece al conjunto. El conjunto de los números del intervalo abierto (0, 1) tiene, entre otros, por puntos de acumulación los números cero y uno, números que no pertenecen a dicho conjunto. El conjunto de todos los números enteros no tiene puntos de acumulación. El conjunto de los números contenidos en el intervalo cerrado [0, 1] tiene a todo número de él como punto de acumulación.

<u>TEOREMA</u> 6

Todo conjunto acotado de infinitos números tiene por lo menos un punto de acumulación.

<u>Dm</u>.

Como el conjunto C de números es acotado, existen los números m y M. Indicando con x un número cualquiera de C, podemos distinguir los dos siguientes casos:

1º- Por pequeño que sea el intervalo (m, x) siempre hay en él infinitos números de C.

2º- Hay $x = \bar{x}$, tal que en el intervalo $(m, \bar{x})$ no hay infinitos números de C.

En el primer caso el teorema es inmediato, pues en la hipótesis considerada, m es un punto de acumulación de C, ya que para todo $h > 0$, ocurre que en la vecindad $(m - h, m + h)$ hay infinitos números de C.

En el segundo caso sea X, el supremo de los $\bar{x}$, puede ocurrir entonces que $X = M$ o bien $X < M$.

Cuando $X = M$ se tiene que cada x es un $\bar{x}$, luego para todo número x del conjunto C ocurre que en el intervalo (m, x) no hay infinitos términos de C, pero como en el intervalo (m, M) hay infinitos números de C, resulta que todo intervalo $(\bar{x}, M)$ tiene infinitos elementos del conjunto, lo que asegura que M es punto de acumulación de él.

Veamos finalmente el caso $X < M$, demostraremos que en esta hipótesis, X es un punto de acumulación; en efecto si no lo fuera, existiría por lo menos una vecindad $(X - h, X + h)$ en la cual no habría infinitos números de C, luego lo mismo ocurriría en $(m, X + h)$, de aquí que $X + h$ sería un $\bar{x}$, lo que indudablemente es absurdo por ser X el supremo de los $\bar{x}$.

Este teorema se conoce con el nombre de Teorema de Bolzano-Weierstrass.

DEF. 9

Un conjunto S de números reales se dice cerrado si todo punto de acumulación de S pertenece a S.

DEF. 10

Se llama conjunto derivado de un conjunto S de números reales, al conjunto S' de todos los puntos de acumulación de S.

DEF. 11

Se llama clausura de un conjunto S de números reales al conjunto: $\overline{S} = S \cup S'$.

2.- Sucesiones.

DEF. 12

Si a cada número natural n = 1, 2, 3, ..., se hace corresponder un número a_n, el conjunto:

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_n, \ldots$$

se llama sucesión.

De acuerdo con esta definición, son sucesiones los siguientes conjuntos de números:

$$\{a_n \mid a_n = \frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\}$$

$$\{a_n \mid a_n = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right]\} = \{0, 1, 0, 1, \ldots\ldots\}$$

$$\{a_n \mid a_n = n^{\text{sen } n\pi}\} = \{1, 1, 1, 1, \ldots\ldots\}$$

DEF. 13

Diremos que una sucesión (a_n) tiene al número a como límite, si tomado un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número natural N, tal que:

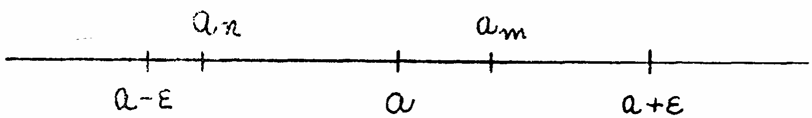
$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall \quad n > N$$

Para indicar que la sucesión (a_n) tiene como límite el número a, emplearemos la notación:

$$\lim a_n = a$$

Conviene observar que de acuerdo con la teoría de las desigualdades la expresión $|a_n - a| < \varepsilon$, puede reemplazarse por:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$



y debido a ésto, emplearemos indistintamente una u otra según lo estimemos conveniente.

De acuerdo con la definición de límite que hemos dado, se tiene:

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

pues tomado arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$, resulta que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad \forall \quad n > N$$

siendo N el mayor entero contenido en $1/\varepsilon$

<u>DEF</u>. 14

Toda sucesión (a_n) que tenga un límite a, se dirá convergente. Toda sucesión no convergente se dirá divergente.

<u>DEF</u>. 15

Una sucesión (a_n) se dirá divergente a ínfinito (∞) si tomado un número arbitrario $G > 0$. existe un número natural N tal que:

$$a_n > G \qquad \forall \quad n > N$$

Para indicar que (a_n) diverge a infinito, emplearemos la notación:

$$\lim a_n = \infty$$

TEOREMA 7

Toda sucesión convergente es acotada.

Dm.

Si (a_n) converge hacia a, tomado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número natural N, tal que:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad \forall \; n > N$$

así entonces a partir del rango N adelante todos los términos de la sucesión (a_n) quedan en el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ y como fuera de dicho intervalo solamente hay un número finito (N) de términos de la sucesión, siempre será posible indicar una cota superior y una cota inferior para el conjunto (a_n).

3.- Teoremas sobre límites de sucesiones.

Los teoremas que veremos a continuación nos muestran algunas de las propiedades más importantes de las sucesiones convergentes.

TEOREMA 8

Si $\lim a_n = a$, entonces $\lim k\, a_n = k \cdot a = k \cdot \lim a_n$

Dm.

En efecto, tomado $\varepsilon > 0$, existe N tal que:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|k|} \qquad \text{para } n > N.$$

de donde

$$|ka_n - ka| < \varepsilon \qquad \text{para } n > N.$$

y esta expresión, de acuerdo a la definición de límite de una sucesión, nos expresa que:

$$\lim ka_n = ka = k \cdot \lim a_n.$$

TEOREMA 9

Si $\lim a'_n = a$, $\lim a''_n = a$ y $a'_n \leq a_n \leq a''_n$

entonces $\lim a_n = a$.

Dm.

Por hipótesis tomado $\varepsilon > 0$, existe N_1 y N_2 tales que:

$$a - \varepsilon < a'_n < a + \varepsilon \qquad \text{para } n > N_1$$

$$a - \varepsilon < a''_n < a + \varepsilon \qquad \text{para } n > N_2$$

y como

$$a'_n < a_n < a''_n$$

resulta

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

o sea

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

siendo N el mayor de los números N_1 y N_2

Las sucesiones (a'_n) y (a''_n) se dicen sucesiones minorante y mayorante respectivamente con respecto a la sucesión (a_n).

Corolario

Si $0 < q < 1$, se tiene: $\lim q^n = 0$

En efecto, si p es un número positivo tal que $q = \frac{1}{1+p}$ resulta:

$$0 < q^n = \frac{1}{(1+p)^n} = \frac{1}{1 + np + \ldots + p^n} < \frac{1}{np} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}$$

y como la sucesión $(\frac{1}{n})$ tiende a 0, igual cosa ocurre con q^n.

TEOREMA 10

Si $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$, entonces

$$\lim (a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n$$

Dm.

Por hipótesis, tomado $\varepsilon > 0$, existen N_1 y N_2 tales que:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } n > N_1$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } n > N_2$$

Pero por otra parte se tiene que:

$$(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b)$$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

de donde

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

siendo N el mayor de los números N_1 y N_2

Así tenemos:

$$\lim (a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n$$

<u>Corolario</u> 1

Si $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$, entonces

$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$

En efecto:

$$\begin{aligned} \lim (a_n - b_n) &= \lim [a_n + (-b_n)] \\ &= \lim a_n + \lim (-b_n) \\ &= \lim a_n - \lim b_n \end{aligned}$$

Corolario 2

Si $q > 1$, se tiene: $\lim q^n = \infty$

En efecto sea p un número positivo tal que: $q = 1 + p$, entonces:

$$q^n = (1 + p)^n > 1 + np$$

luego

$$\lim q^n \geq \lim (1 + np) = 1 + p \lim (n) = \infty$$

TEOREMA 11

Si $\lim a_n = 0$ y b_n es acotada, entonces $\lim a_n b_n = 0$

Dm.

Como por hipótesis b_n es acotada existe un número $\beta > 0$ tal que $|b_n| < \beta$; además como a_n tiende a cero, tomado ε arbitrario hay N de modo que:

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{\beta} \qquad \text{para } n > N$$

luego

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| \; |b_n| < \frac{\varepsilon}{\beta} \cdot \beta = \varepsilon$$

para $n > N$, lo que demuestra el teorema.

TEOREMA 12

Si $\lim a_n = a$, y $\lim b_n = b$, entonces

$$\lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n$$

Dm.

Se tiene que:

$$a_n \cdot b_n = a_n \cdot b_n - ab_n + ab_n = (a_n - a) \cdot b_n + ab_n$$

luego

$$\lim a_n \cdot b_n = \lim (a_n - a) \cdot b_n + \lim ab_n$$

pero como la sucesión $(a_n - a)$ converge a 0 y la sucesión b_n es acotada, resulta:

$$\lim a_n \cdot b_n = a \cdot \lim b_n = a \cdot b = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

TEOREMA 13

Si $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b \neq 0$, entonces

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \qquad \text{con } b \neq 0$$

Dm.

Como (b_n) tiende hacia b, existirá N tal que para $n > N$ se tendrá:

$$|b_n| > \frac{|b|}{2} \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$$

lo que nos indica que la sucesión $(\frac{1}{b_n})$ es acotada. Por otra parte tenemos que:

$$\lim \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right) = \lim \frac{b - b_n}{b \cdot b_n}$$

$$= \frac{1}{b} \lim \frac{1}{b_n} \quad (b - b_n) = 0$$

o sea:

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

Finalmente se tiene:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim a_n \cdot \lim \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

o sea:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

TEOREMA 14

Si $\lim a_n = a$, con a y $a_n > 0$, entonces

$$\lim \ {}^{b}\log a_n) = {}^{b}\log(\lim a_n)$$

Dm.

Tomando arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$ y suponiendo primero $b > 1$ se tendrá $b^{\varepsilon} > 1$ y $b^{-\varepsilon} < 1$ y como $\lim a_n/a = 1$, existirá N tal que:

$$b^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{a} < b^{\varepsilon} \qquad \text{para } n > N$$

de donde

$$-\varepsilon < {}^{b}\log \frac{a_n}{a} < +\varepsilon$$

o sea

$${}^{b}\log a - \varepsilon < {}^{b}\log a_n < {}^{b}\log a + \varepsilon$$

o bien

$$|{}^{b}\log a_n - {}^{b}\log a| < \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

Finalmente si $0 < b < 1$, se tiene:

$$\lim {}^{b}\log a_n = \lim \left(- {}^{\frac{1}{b}}\log a_n\right) =$$

$$= - \lim {}^{\frac{1}{b}}\log a_n = - {}^{\frac{1}{b}}\log(\lim a_n) = {}^{b}\log (\lim a_n)$$

<u>Corolario</u>

Si $\lim b_n = b$ con b_n y $b > 0$ entonces $\lim b_n^a = b^a$

<u>TEOREMA</u> 15

Si $\lim a_n = a$ y $b > 0$ entonces $\lim b^{a_n} = b^a$

<u>Dm</u>.

Para fijar ideas supongamos $b > 1$. Cualquiera que sea el número positivo h existe un número natural p tal que:

$1 + ph > b$ y como $(1 + h)^p > 1 + ph$ queda: $(1 + h)^p > b$

de donde $$1 + h > b^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

entonces:

$$\frac{1}{1 + h} < b^{-\frac{1}{p}}$$ y como $1 - h^2 < 1$

se tiene también

$$1 - h < b^{-\frac{1}{p}} \qquad (2)$$

Por último tomemos un número positivo arbitrario ε y determinemos h de modo que $h = \varepsilon\, b^{-a}$.

Como por hipótesis $\lim a_n = a$, tomado el número natural p tal que $1 + ph > b$, hay un número entero positivo N de modo que:

$$|a_n - a| < \frac{1}{p} \qquad \text{para } n > N$$

o sea

$$-\frac{1}{p} < a_n - a < \frac{1}{p} \qquad \text{para } n > N$$

Como hemos supuesto que $b > 1$, resulta

$$b^{-\frac{1}{p}} < b^{a_n - a} < b^{+\frac{1}{p}} \qquad \text{para } n > N$$

de aquí, considerando las relaciones (1) y (2) se tiene:

$$1 - h < b^{a_n - a} < 1 + h \qquad \text{para } n > N$$

o sea

$$1 - \varepsilon b^{-a} < b^{a_n - a} < 1 + \varepsilon b^{-a} \qquad \text{para } n > N$$

Finalmente multiplicando por b^a, queda:

$$b^a - \varepsilon < b^{a_n} < b^a + \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

es decir

$$|b^{a_n} - b^a| < \varepsilon \qquad \forall \qquad \text{para } n > N$$

Si $0 < b < 1$, haciendo $\beta = \frac{1}{b}$ resulta $\beta > 1$ y luego

$$\lim b^{a_n} = \lim \left(\frac{1}{\beta}\right)^{a_n} = \lim \frac{1}{\beta^{a_n}} = \frac{1}{\lim \beta^{a_n}} = \frac{1}{\beta^a} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^a = b^a$$

TEOREMA 16

Si $\lim b_n = b > 0$, con $b_n > 0$ y $\lim a_n = a$, entonces $\lim b_n^{a_n} = b^a$

Dm.

Tenemos

$$b_n^{a_n} = b^{a_n} \left(\frac{b_n}{b}\right)^{a_n}$$

Como (a_n) es convergente, ella es acotada, luego se puede determinar dos números h y k para los cuales se tenga $h < a_n < k$ para todo $n \in N$, entonces:

$$\left(\frac{b_n}{b}\right)^h \leq \left(\frac{b_n}{b}\right)^{a_n} \leq \left(\frac{b_n}{b}\right)^k \qquad \text{si } \frac{b_n}{b} \geq 1$$

$$\left(\frac{b_n}{b}\right)^h \geq \left(\frac{b_n}{b}\right)^{a_n} \geq \left(\frac{b_n}{b}\right)^k \qquad \text{si } \frac{b_n}{b} \leq 1$$

pero como

$$\lim \left(\frac{b_n}{b}\right)^h = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim \left(\frac{b_n}{b}\right)^k = 1$$

se tiene

$$\lim \left(\frac{b_n}{b}\right)^{a_n} = 1$$

y por lo tanto

$$\lim b_n^{a_n} = \lim b^{a_n} \cdot \lim \left(\frac{b_n}{b}\right)^{a_n} = b^a \cdot 1 = b^a$$

<u>DEF</u> 16

Una sucesión (a_n) se dice creciente si:

$$a_n < a_{n+1} \qquad \forall\, n \in N$$

<u>DEF</u> 17

Una sucesión (a_n) se dice decreciente si:

$$a_n > a_{n+1} \qquad \forall\, n \in N$$

<u>TEOREMA</u> 17 (Stolz)

Si de las sucesiones u_n y v_n la segunda tiende a infinito y es creciente, se tiene que:

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}$$

siempre que el límite del segundo miembro exista o sea infinito.

Dm.

Supongamos primeramente que $(u_{n+1} - u_n) / (v_{n+1} - v_n)$ tienda a un límite finito L; en este caso existirá N tal que, para $n > N$ se tendrá

$$L - \varepsilon < \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} < L + \varepsilon$$

y como $v_{n+1} - v_n > 0$, resulta:

$$(L - \varepsilon)\ (v_{n+1} - v_n) < u_{n+1} - u_n < (v_{n+1} - v_n)\ (L + \varepsilon)$$

Reemplazando en esta desigualdad n por n + 1, n + 2, .., n + (p-1) se obtiene:

$$(L - \varepsilon)\ (v_{n+2} - v_{n+1}) < u_{n+2} - u_{n+1} < (v_{n+2} - v_{n+1})(L+\varepsilon)$$

$$(L - \varepsilon)\ (v_{n+3} - v_{n+2}) < u_{n+3} - u_{n+2} < (v_{n+3} - v_{n+1})(L+\varepsilon)$$

$$(L - \varepsilon)\ (v_{n+p} - v_{n+p-1}) < u_{n+p} - u_{n+p-1} < (v_{n+p} - v_{n+p-1})(L+\varepsilon$$

y sumando queda:

$$(L - \varepsilon)\ (v_{n+p} - v_n) < u_{n+p} - u_n < (v_{n+p} - v_n)\ (L + \varepsilon)$$

de donde, suponiendo $v_{n+q} > 0$ (lo que ocurre para n + p grande), resulta:

$$(L-\varepsilon)\left(1 - \frac{v_n}{v_{n+p}}\right) + \frac{u_n}{v_{n+p}} < \frac{u_{n+p}}{v_{n+p}} < \frac{u_n}{v_{n+p}} + \left(1 - \frac{v_n}{v_{n+p}}\right)(L+\varepsilon)$$

dejando ahora n fijo y haciendo crecer $n + p = m$ se tendrá:

$$L - 2\varepsilon < \frac{u_m}{v_m} < L + 2\varepsilon$$

para $n > N_1$ siendo $N_1 > N$.

Suponiendo finalmente que $(u_{n+1} - u_n) / (v_{n+1} - v_n)$ tiende a infinito, tomado $G > 0$ arbitrario, se tendrá:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} > G \qquad \text{para } n > N_2$$

o sea

$$u_{n+1} - u_n > (v_{n+1} - v_n)\, G$$

y dando a n los valores: $n + 1$, $n + 2$ ...... $n + p - 1$ resulta:

$$u_{n+2} - u_{n+1} > G(v_{n+2} - v_{n+1})$$

$$u_{n+3} - u_{n+2} > G(v_{n+3} - v_{n+2})$$

$$u_{n+p} - u_{n+p-1} > G(v_{n+p} - v_{n+p-1})$$

y luego sumando se obtiene:

$$u_{n+p} - u_n > G(v_{n+p} - v_n)$$

$$\frac{u_{n+p}}{v_{n+p}} > \frac{u_n}{v_{n+p}} + G\left(1 - \frac{v_n}{v_{n+p}}\right)$$

finalmente dejando fijo n y haciendo crecer $n + p = m$ resulta:

$$\frac{u_m}{v_m} > G \qquad \text{para } m > N_2$$

lo que demuestra el teorema, que en la literatura matemática se conoce con el nombre de Criterio de Stolz.

TEOREMA 18

Si $\lim a_n = a$, con a finito o infinito, se tiene:

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = a = \lim a_n$$

Dm.

Tomando las sucesiones auxiliares:

$$u_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n \quad \text{y} \quad v_n = n$$

y aplicando el criterio de Stolz queda:

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = \lim \frac{u_n}{v_n} =$$

$$\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim a_{n+1} = a = \lim a_n$$

TEOREMA 19

Si $\lim a_n = a$, con a_n y a positivos y a finito o infinito, se tiene:

$$\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_n} = \lim a_n$$

Dm.

Es inmediato que:

$$\log \lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_n} = \lim \log \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}$$

$$= \lim \frac{\log a_1 + \log a_2 + \ldots\ldots + \log a_n}{n}$$

$$= \lim \log a_n = \log \lim a_n$$

de donde pasando al antilogaritmo queda:

$$\lim \sqrt[n]{a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n} = \lim a_n$$

Corolario 1

Si $\lim \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = L$, siendo a_n positivo y L finito o no, se tiene:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

En efecto:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \ldots\ldots \frac{a_{1-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

luego:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Corolario 2

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1; \qquad \lim \sqrt[n]{a} = 1; \qquad \lim \sqrt[n]{n} = \infty$$

En efecto, para la primera sucesión tenemos:

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{n}{n-1} = \lim \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1$$

Para el segundo caso, suponiendo primero, $a > 1$ se tiene:

$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \qquad \text{para } n > a$$

y como $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ resulta que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$. Considerando ahora el caso $0 < a < 1$, poniendo $b = 1/a$ se tiene $b > 1$ y luego:

$$1 = \lim \sqrt[n]{b} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a}}$$

Así:

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1$$

Finalmente:

$$\lim \sqrt[n]{n!} = \lim \frac{n!}{(n-1)!} = \lim n = \infty$$

4.- Criterios de convergencia.

Entenderemos por criterio de convergencia todo teorema que nos asegure la convergencia de una sucesión.

Recordamos que una sucesión (a_n) se dice creciente si:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots\ldots < a_n < a_{n+1} \ldots\ldots$$

La sucesión (a_n) se dice decreciente si:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots > a_n > a_{n+1} \ldots\ldots$$

TEOREMA 20

Si (a_n) es creciente y acotada superiormente, tiene límite.

Dm.

Puesto que (a_n) es acotada superiormente, tiene un supremo M y por lo tanto hay un elemento $a_n > M - \varepsilon$ siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario y como (a_n) es creciente se tiene que

$$M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon \qquad \forall \quad n > N$$

o sea:

$$|M - a_n| < \varepsilon \qquad \forall \quad n > N$$

que nos indica que M es el límite de la sucesión (a_n).

Corolario

Si (a_n) es decreciente y acotada inferiormente, tiene límite.

En efecto, si (a_n) es una tal sucesión, se tendrá que la sucesión $(-a_n)$ será creciente y acotada superiormente y la existencia del límite de $(-a_n)$ implica la existencia del límite de $a_n = -(-a_n)$.

Finalmente veremos un teorema debido a Cauchy y que corrientemente se conoce con el nombre de criterio general de convergencia.

TEOREMA 21

Condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión (a_n) es que tomado $\varepsilon > 0$ arbitrario exista un entero positivo N tal que:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{para } n > m > N$$

Dm.

La condición es necesaria:

En la hipótesis que (a_n) converge hacia un límite a, tomado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe N tal que:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } n > N$$

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } m > N$$

Por otra parte:

$$(a_n - a_m) = (a_n - a) + (a - a_m)$$

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m|$$

luego:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{para } n > N,\ m > N$$

La condición es suficiente:

Tomando $\delta > 0$ arbitrario, por hipótesis existe un número natural p tal que:

$$|a_n - a_{p+1}| < \delta \qquad \text{para } n > p$$

o bien

$$a_{p+1} - \delta < a_n < a_{p+1} + \delta$$

lo que nos indica que todos los términos de rango superior a p quedan en el intervalo $(a_{p+1} - \delta, a_{p+1} + \delta)$ y como fuera de él hay sólo un número finito de elementos de ella, la sucesión es acotada y por lo tanto tiene a lo menos un punto de acumulación en dicho intervalo. Ahora resulta inmediato que no puede haber más de uno, pues la amplitud δ del intervalo $(a_{p+1} - \delta, a_{p+1} + \delta)$ es arbitraria y puede hacerse tan pequeña como se desee.

Llamando, a, este punto de acumulación, consideremos la vecindad $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; ella contiene infinitos términos de la sucesión (a_n) y fuera de ella hay a lo más un número finito de números a_n, de aquí que llamando N al mayor de los índices de los a_n situados fuera de $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, se tendrá:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

lo que demuestra el teorema propuesto.

DEF. 18

Sea $I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots I_n$ una sucesión de intervalos tales que cada uno de ellos está contenido en el anterior y tales que la sucesión de sus longitudes $l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots l_n$ converge a cero. Un conjunto (I) de intervalos de esta naturaleza lo llamaremos encaje de intervalos.

TEOREMA 22

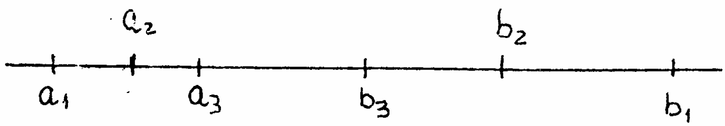
Todo encaje de intervalos determina un número real y sólo uno.

Dm.

Sea I_n el intervalo (a_n, b_n), puesto que I_n contiene I_{n+1} se tiene que: $a_{n+1} \geq a_n$ y $b_{n+1} \leq b_n$, luego:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq a_n \leq \ldots\ldots \leq b_1$$

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots\ldots\ldots\ldots \geq b_n \geq \ldots\ldots \geq a_1$$



Así entonces la sucesión (a_n) es monótona creciente y como todos sus términos son menores que b_1, resulta que (a_n) converge hacia un número $\alpha < b_1$. Análogamente, siendo (b_n) monótona decreciente y teniendo todos sus términos mayores que a_1, resulta que (b_n) converge a un número $\beta > a_1$. Haremos ver ahora que $\alpha = \beta$

Tenemos que:

$$\beta - \alpha = \lim b_n - \lim a_n = \lim (b_n - a_n) = 0$$

ya que la longitud $l_n = b_n - a_n$ tiende a cero.

5.- El número e.

Para definir este importante número haremos un estudio de la sucesión:

$$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

<u>TEOREMA</u> 23

La sucesión $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ es creciente.

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)\ (n-2)}{3!n^3} + \ldots (n+1 \text{ términos})$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \ldots (n+1 \text{ términos})$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}$$

pero como para $n > 2$ se tiene $2^{n-1} < n!$ resulta:

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots\ldots$$

o sea:

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

lo que demuestra que la sucesión considerada es acotada superiormente.

Corolario

La sucesión $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ converge a un número positivo no mayor que 3.

En efecto sabemos que la sucesión e_n es creciente y acotada superiormente y además $e_n < 3$.

DEF. 19

Se llama número e al límite de la sucesión (e_n), o sea:

$$\lim (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Este número e lo emplearemos en lo sucesivo como base de logaritmos, que llamaremos logaritmos naturales y que para distinguirlos de los logaritmos ordinarios los designaremos con la letra L. Así entonces la notación La significará logaritmo con base e del número a.

TEOREMA 25

Si (a_n) es una sucesión divergente a infinito, privada de términos nulos y tal que $1 + 1/a_n > 0$, entonces:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Dm.

Supongamos primero $a_n > 0$, entonces llamando p el mayor entero contenido en a_n, se tendrá:

$$p \leq a_n < p + 1$$

luego

$$1 + \frac{1}{p} \geq 1 + \frac{1}{a_n} > 1 + \frac{1}{p+1}$$

de donde

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1} > \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} > \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p}$$

o sea

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p} \left(1 + \frac{1}{p}\right) > \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} > \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p+1} \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{-1}$$

Haciendo tender n a infinito, igual cosa ocurre con p y como en tal caso las dos expresiones extremas de la desigualdad precedente, convergen cada una al número e, se tendrá que:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Suponiendo ahora que a_n tiende hacia infinito por valores negativos, tomando $b_n = - a_n \neq 1$, resulta:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim \left(1 - \frac{1}{b_n}\right)^{-b_n} = \lim \left(\frac{b^n - 1}{b_n}\right)^{-b_n}$$

$$= \lim \left(\frac{b_n}{b_n - 1}\right)^{b_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n}$$

$$= \lim \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n - 1} . \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right) = e$$

TEOREMA 26

$$\lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

Dm.

Sea $E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}$

Como E_n es sucesión creciente acotada superiormente, se desprende que ella es convergente, haremos ver que su límite es el número e.

En efecto se tiene:

$$E_n - (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!} -$$

$$- \left[1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 2 \cdot 1}{n!\, n^n} \right]$$

$$E_n - (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{1}{2!} - \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{1}{3!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!} - \frac{n(n-1)\ldots\ldots 2 \cdot 1}{n!\, n^n}$$

$$E_n - (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)}{k!\, n^k} \right)$$

$$E_n - (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{n^k - n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!\, n^k}$$

$$E_n - (1 + \frac{1}{n})^n < \sum_{k=2}^{k=n} \frac{n^k - (n-k+1)^k}{k!\, n^k}$$

$$E_n - (1 + \frac{1}{n})^n < \sum_{k=2}^{k=n} \frac{\left[n^{k-1} + n^{k-2}(n-k+1) + \ldots + n(n-k+1)^{k-2} + (n-k+1)^{k-1} \right](k-1)}{k!\, n^k}$$

$$E_n - (1 + \frac{1}{n})^n < \sum_{k=2}^{k=n} \frac{kn^{k-1}(k-1)}{k!\, n^k} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{n(k-2)!}$$

$$E_n - (1 + \frac{1}{n})^n < \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{(k-2)!} < \frac{3}{n}$$

de aquí entonces que:

$$\lim \left[E_n - (1 + \frac{1}{n})^n \right] \leq 0$$

pero como $E_n > (1 + \frac{1}{n})^n$, (véase Teorema 24) resulta:

$$\lim E_n - \lim (1 + \frac{1}{n})^n = 0$$

o sea:

$$\lim (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}) = e$$

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \text{arc tg}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\frac{1}{8} + \ldots\ldots + \text{arc tg}\,\frac{1}{2n^2}$$

Sol:

Puesto que:

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{2k^2} = \text{arc tg}\,\frac{1}{2k-1} - \text{arc tg}\,\frac{1}{2k+1}$$

resulta:

$$a_n = \text{arc tg}\,1 - \text{arc tg}\,\frac{1}{2n+1}$$

luego

$$\lim a_n = \text{arc tg}\,1 = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 2.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \text{arc tg}\,\frac{1}{3} + \text{arc tg}\,\frac{1}{7} + \ldots\ldots\ldots + \text{arc tg}\,\frac{1}{n^2+n+1}$$

Sol:

Teniendo presente que:

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{k^2+k+1} = \text{arc tg}\,\frac{1}{k} - \text{arc tg}\,\frac{1}{k+1}$$

resulta:

$$a_n = \text{arc tg } 1 - \text{arc tg } \frac{1}{n+1}$$

luego

$$\lim a_n = \text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 3.-

Establecer la divergencia de la sucesión:

$$a_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} (n+2)^{\frac{1}{n+2}} \ldots (n+n)^{\frac{1}{n+n}}$$

Sol:

$$a_n > (n+1)^{\frac{1}{n+1}} (n+1)^{\frac{1}{n+2}} \ldots\ldots (n+1)^{\frac{1}{n+n}}$$

$$a_n > (n+1)^{\frac{1}{n+n}} (n+1)^{\frac{1}{n+n}} \ldots\ldots (n+1)^{\frac{1}{n+n}}$$

$$a_n > (n+1)^{\frac{n}{2n}} = \sqrt{n+1} \longrightarrow \infty$$

Ejercicio 4.-

Establecer la divergencia de la sucesión:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

Sol:

Sabemos que $(1 + \frac{1}{n})^n < e$, pues la sucesión es creciente y tiende hacia e, luego tomando logaritmo, se tiene:

$$n\, L\, \frac{n+1}{n} < 1 \quad \text{o sea} \quad L(n+1) - Ln < \frac{1}{n}$$

dando a n los valores: 1, 2, 3 ..... n y sumando las n desigualdades así obtenidas, resulta:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} > L(n+1)$$

o sea: $a_n > L(n+1)$, así $\lim a_n = \infty$

Ejercicio 5.-

Establecer la divergencia de la sucesión:

$$u_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots\ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots\ldots 2n}$$

Sol:

Conviene recordar que si $a > b > 0$, entonces $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$

Aprovechando esta desigualdad resulta:

$$\frac{3}{2} > \frac{4}{3}, \quad \frac{5}{4} > \frac{6}{5}, \quad \frac{7}{6} > \frac{8}{7}, \ \ldots\ldots, \ \frac{2n+1}{2n} > \frac{2n+1}{2n+1}$$

multiplicando miembro a miembro se obtiene:

$$u_n > \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots\ldots\ldots 2n(2n+2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots\ldots (2n-1)(2n+1)}$$

y como

$$u_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots\ldots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots\ldots (2n-2)\ \ (2n)}$$

resulta:

$$u_n^2 > \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \,..........\, 2n(2n+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \,..........\, 2n} = \frac{2n+2}{2}$$

de donde

$$u_n > \sqrt{n+1} \longrightarrow \infty$$

resultado que establece la divergencia de la sucesión.

Ejercicio 6.-

Establecer la divergencia de la sucesión:

$$a_n = 1 + \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \,......\, + \frac{1}{\log n}$$

Sol:

Para todo número natural n se tiene $10^n > n$, luego

$$n > \log n \qquad y \qquad \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$$

así entonces, dando a n los valores 2, 3, ... n y sumando queda:

$$a_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \,..........\, + \frac{1}{n}$$

de donde: $\lim a_n = \infty$

Ejercicio 7.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}}$$

Sol:

$$\frac{1}{2}\, a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

$$a_n - \frac{1}{2}\, a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

$$a_n = 4 + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{n}{2^{n-1}}$$

luego: $\lim a_n = 4$, ya que de acuerdo con el criterio de Stolz, tenemos:

$$\lim \frac{n}{2^{n-1}} = \lim \frac{(n+1) - n}{2^n - 2^{n-1}} = \lim \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

Ejercicio 8.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots\cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$

$$a_n = \sum_1^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_1^n \frac{k+1-1}{(k+1)!}$$

$$a_n = \sum_1^n \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right]$$

$$a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{implica} \quad \lim a_n = 1$$

Ejercicio 9.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots\cdots \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$$

Sol:

$$\lim a_n = \lim \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

$$= \lim \sum_{1}^{n} \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2}$$

$$= \lim \sum_{1}^{n} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right]$$

$$= \lim \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = 1$$

Ejercicio 10.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \log(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}) + \log(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}) + \cdots\cdots + \log(1 + \frac{1}{n(n+2)})$$

Sol:

$$a_n = \sum_{k=1}^{k=n} \log\ (1 + \frac{1}{k(k+2)}) = \sum_{k=1}^{k=n} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

$$a_n = \sum_{1}^{n} 2\log(k+1) - \sum_{1}^{n} \log k - \sum_{1}^{n} \log\ (k+2)$$

$$a_n = \log 2 + \log(n + 1) - \log(n + 2)$$

luego:

$$\lim a_n = \lim \left[\log 2 + \log \frac{n + 1}{n + 2}\right] = \log 2$$

Ejercicio 11.-

Si una sucesión (a_n) de términos no negativos tiene límite a, se tiene $a \geq 0$.

Sol:

Supongamos $a < 0$, entonces $- a > 0$ y como por hipótesis hay N tal que:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall \quad n > N$$

tomando $\varepsilon = -a/2$, se tiene para algun $k > N$:

$$|a_k - a| < -\frac{a}{2} \qquad y \qquad a_k - a < -\frac{a}{2}$$

de donde:

$$a_k < \frac{a}{2}$$

afirmación contraria a la hipótesis, pues (a_n) no tiene términos negativos, así entonces: $\lim a_n = a \geq 0$.

Ejercicio 12.-

Sabiendo que $|a| < 1$, calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \ldots\ldots\ldots (1 + a^{2^{n-1}})$$

Sol:

Tenemos: $\dfrac{1 - a^{2^k}}{1 - a^{2^{k-1}}} = 1 + a^{2^{k-1}}$, luego:

$$a_n = \frac{1 - a^2}{1 - a} \cdot \frac{1 - a^{2^2}}{1 - a^2} \cdot \frac{1 - a^{2^3}}{1 - a^{2^2}} \cdots\cdots \frac{1 - a^{2^n}}{1 - a^{2^{n-1}}} = \frac{1 - a^{2^n}}{1 - a}$$

de donde

$$\lim a_n = \lim \frac{1 - a^{2^n}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}$$

Ejercicio 13.-

Si $0 < a < \frac{\pi}{2}$, demostrar que:

$$\lim \operatorname{sen} \frac{a}{n} = 0 \qquad \lim \cos \frac{a}{n} = 1$$

Sol:

Para establecer el primer límite basta observar que:

$$0 < \operatorname{sen} \frac{a}{n} < \frac{a}{n}$$

para mostrar la segunda tesis tenemos:

$$0 < 1 - \cos \frac{a}{n} = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2n} < 2 \left(\frac{a}{2n}\right)^2 = \frac{a^2}{2n}$$

o sea

$$0 < 1 - \cos \frac{a}{n} < \frac{a^2}{2n}$$

de aquí haciendo tender n a infinito, queda:

$$\lim(1 - \cos \frac{a}{n}) = 0 \qquad \lim \cos \frac{a}{n} = 1$$

Ejercicio 14.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots\cdots + \frac{n}{n^2 + n}$$

Sol:

Tomando la minorante a'_n y la mayorante a''_n

$$a'_n = \frac{n}{n^2 + n} + \frac{n}{n^2 + n} + \cdots\cdots + \frac{n}{n^2 + n} = \frac{n^2}{n^2 + n}$$

$$a''_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 1} + \cdots\cdots + \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

se tiene:

$$\frac{n^2}{n^2 + n} < a_n < \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

o sea

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} < a_n < \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

luego como a'_n y a''_n tiende hacia 1, resulta: $\lim a_n = 1$

Ejercicio 15.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$$

Sol:

Tomemos las sucesiones auxiliares

$$a'_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}$$

$$a''_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

ellas son respectivamente minorante y mayorante de la sucesión dada, luego:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

así: $\lim a_n = 1$.

Ejercicio 16.-

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}}$$

Tomando las sucesiones auxiliares

$$a'_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}}$$

$$a'_n = \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}}$$

$$a''_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

resulta:

$$\frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} < a_n < \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

de donde: $\lim a_n = 2$

Ejercicio 17.-

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \cos^n\left(\frac{a}{n}\right)$$

Sol:

$$1 - \cos\frac{a}{n} = 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{a}{2n}\right) < 2\left(\frac{a}{2n}\right)^2 = \frac{a^2}{2n^2} < \left(\frac{a}{n}\right)^2$$

multiplicando por $\cos\frac{a}{n} > 0$, resulta:

$$\cos\left(\frac{a}{n}\right) - \cos^2\left(\frac{a}{n}\right) < \left(\frac{a}{n}\right)^2 \cdot \cos\frac{a}{n} < \left(\frac{a}{n}\right)^2$$

$$\cos^2\left(\frac{a}{n}\right) - \cos^3\left(\frac{a}{n}\right) < \left(\frac{a}{n}\right)^2 \cdot \cos^2\frac{a}{n} < \left(\frac{a}{n}\right)^2$$

$$\cos^3\left(\frac{a}{n}\right) - \cos^4\left(\frac{a}{n}\right) < \left(\frac{a}{n}\right)^2 \cos^3\frac{a}{n} < \left(\frac{a}{n}\right)^2$$

$$\cos^{n-1}\left(\frac{a}{2}\right) - \cos^n\left(\frac{a}{n}\right) < \left(\frac{a}{n}\right)^2 \cos^{n-1}\left(\frac{a}{n}\right) < \left(\frac{a}{n}\right)^2$$

Sumando miembro a miembro las n desigualdades establecidas, queda:

$$1 - \cos^n\left(\frac{a}{n}\right) < n\left(\frac{a}{n}\right)^2 = \frac{a^2}{n}$$

o bien

$$0 < 1 - \cos^n\left(\frac{a}{n}\right) < \frac{a^2}{n}$$

de donde haciendo tender n a infinito se obtiene:

$$\lim\left(1 - \cos^n\frac{a}{n}\right) = 0 \qquad \lim \cos^n\left(\frac{a}{n}\right) = 1$$

Ejercicio 18.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{3}{1\cdot 2} - \frac{3}{2\cdot 3} + \frac{7}{3\cdot 4} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Sol:

Para el sumando de orden k se encuentra fácilmente que:

$$\frac{2k+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

luego:

$$a_{2n} = 1 - \frac{1}{2n + 1} \qquad y \qquad a_{2n + 1} = 1 + \frac{1}{2n + 2}$$

de donde:

$$\lim a_{2n} = \lim a_{2n + 1} = 1$$

lo que garantiza que: $\lim a_n = 1$

Ejercicio 19.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n - 1)} + \frac{1}{3(n - 2)} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 1}$$

Sol:

El sumando de orden k es $\frac{1}{k(n - k + 1)}$ y para él, descomponiendo en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{1}{k(n - k + 1)} = \frac{1}{n + 1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n - k + 1}\right)$$

luego:

$$a_n = \frac{2}{n + 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n - 1} + \frac{1}{n}\right)$$

Así:

$$\lim a_n = 2\lim \frac{n}{n + 1} \; \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}}{n}$$

$$\lim a_n = 2 \cdot 1 \cdot \lim \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 = 0$$

Ejercicio 20.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{Ln}{n}$$

Sol:

$$\lim a_n = \lim \frac{Ln}{n} = \lim L \sqrt[n]{n}$$

$$= L \lim \sqrt[n]{n} = L\ 1 = 0$$

Ejercicio 21.-

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}$$

Sol: (Teorema 19)

$$\lim a_n = \lim \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}}$$

$$= \lim \sqrt[n]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdots\cdots \frac{(n+1)^n}{n^n}}$$

$$= \lim \sqrt[n]{\left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \ldots\ldots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ejercicio 22.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

Sol: (corolario del Teorema 19)

$$\lim a_n = \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= \lim \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e}$$

Ejercicio 23.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \sqrt[n]{Ln} \qquad \text{con } n > 2$$

Sol: (Corolario teorema 19)

$$\lim a_n = \lim \sqrt[n]{Ln} = \lim \frac{Ln}{L(n-1)}$$

y por criterio de Stolz, tenemos:

$$\lim a_n = \frac{L(n+1) - Ln}{Ln - L(n-1)}$$

$$\lim \frac{nL\,\frac{n+1}{n}}{nL\,\frac{n}{n-1}} = \lim \frac{L(1+\frac{1}{n})^{n}}{L(1+\frac{1}{n-1})^{n-1} + L(1+\frac{1}{n-1})} = 1$$

Ejercicio 24.-

Si p es número positivo, calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(p+1)(p+2)(p+3)\ldots.(p+n)}$$

Sol:

De acuerdo con el corolario al teorema 19: tenemos:

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_n}{u_{n-1}} \qquad \text{con } u_n > 0$$

luego:

$$\lim a_n = \lim \frac{p+n}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}$$

Ejercicio 25.-

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots.(n+n)}$$

Sol:

Usando nuevamente la igualdad

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

se obtiene sin dificultad:

$$\lim a_n = \lim \frac{(n + n)(n + n - 1)}{n^2} \left(\frac{n - 1}{n}\right)^{n - 1}$$

$$\lim a_n = 2 \lim \frac{2n - 1}{n} \lim \left(\frac{n - 1}{n}\right)^{n - 1} = \frac{4}{e}$$

Ejercicio 26.-

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{L(n!)}{n\ L\ n} \qquad \text{con } n > 1$$

Sol:

Tomando las sucesiones auxiliares:

$$u_n = L(n!) \qquad v_n = n\ L\ n$$

el criterio de Stolz nos dá:

$$\lim a_n = \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}$$

$$= \lim \frac{L(n + 1)! - L\ n!}{(n + 1)\ L(n + 1) - n\ L\ n}$$

$$= \lim \frac{L(n + 1)}{L\left(\frac{n + 1}{n}\right)^n + L(n + 1)} = 1$$

Ejercicio 27.-

Si $n > 1$, calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{L\,1 + L\,2 + L\,3 + \ldots\ldots + L\,n}{n\,L\,n}$$

Tomando las sucesiones auxiliares:

$u_n = L\,1 + L\,2 + \ldots\ldots + L\,n$ $\qquad$ $v_n = n\,L\,n$

puesto que v_n es creciente y divergente a infinito, tenemos:

$$\lim \frac{L\,1 + L\,2 + L\,3 + \ldots\ldots + L\,n}{n\,L\,n} = \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}$$

$$\lim a_n = \lim \frac{L(n+1)}{(n+1)\,L(n+1) - nLn}$$

$$= \lim \frac{L(n+1)}{L\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + L(n+1)} = 1$$

Ejercicio 28.-

Si p es un entero positivo, calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots\ldots + n^p}{n^{p+1}}$$

Sol:

Tomando las sucesiones auxiliares:

$u_n = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots\ldots + n^p$ $\qquad$ $v_n = n^{p+1}$

puesto que v_n es creciente y divergente a infinito, el criterio de Stolz nos dá:

$$\lim \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots\ldots + n^p}{n^{p+1}} = \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}$$

o sea

$$\lim a_n = \lim \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}$$

$$= \lim \frac{(n+1)^p}{\binom{p+1}{1} n^p + \binom{p+1}{2} n^{p-1} + \ldots\ldots + \binom{p+1}{p+1}}$$

$$= \lim \frac{(1 + \frac{1}{n})^p}{\binom{p+1}{1} + \binom{p+1}{2}\frac{1}{n} + \ldots\ldots + \binom{p+1}{p+1}\frac{1}{n^p}} = \frac{1}{p+1}$$

Ejercicio 29.-

Determinar el límite de la sucesión:

$$a_n = (\frac{n \cdot a + b}{n \cdot a + c})^n$$

Sol: (Teorema 25)

$$a_n = (1 + \frac{n \cdot a + b}{n \cdot a + c} - 1)^n = (1 + \frac{b - c}{n \cdot a + c})^n$$

$$a_n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n a + c}{b - c}}\right)^{\frac{na + c}{b - c}} \right]^{\frac{(b - c)n}{na + c}}$$

ahora como.

$$b_n = \frac{n\ a + c}{b - c} \longrightarrow \infty$$

resulta:

$$\lim a_n = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \right]^{\frac{b-c}{a+\frac{c}{n}}} = e^{\frac{b-c}{a}}$$

Ejercicio 30.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \left(1 + \frac{5n}{2n^2 - n + 2}\right)^{6n - 7}$$

Sol: (Teorema 25)

$$\lim \left(1 + \frac{5n}{2n^2 - n + 2}\right)^{6n-7} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n^2-n+2}{5n}}\right)^{\frac{2n^2-n+2}{5n}} \right]^{\frac{5n(6n-7)}{2n^2-n+2}}$$

Como además

$$b_n = \frac{2n^2 - n + 2}{5n} = \frac{2}{5}n - \frac{1}{5} + \frac{2}{5n} \longrightarrow \infty$$

resulta

$$\lim a_n = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \right]^{\frac{30n^2 - 35n}{2n^2 - n + 2}} = e^{15}$$

Ejercicio 31.-

Demostrar la existencia y calcular el límite de la sucesión:

$$u_n = n(\sqrt[n]{a} - 1) \qquad \text{con } a > 0$$

Sol:

Tomando primero $a > 1$, resulta:

$$0 < u_n = \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \qquad y \qquad 0 < u_{n+1} = \frac{a^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}}$$

y como

$$\frac{a^p - 1}{p} > \frac{a^q - 1}{q} \qquad \text{con } p > q \quad y \quad a > 1$$

resulta que u_n es sucesión decreciente acotada inferiormente y por lo tanto tiene un límite que llamaremos x. Por otra parte de $u_n = n\ (\sqrt{a} - 1)$ se obtiene:

$$a = (1 + \frac{u_n}{n})^n = \left[(1 + \frac{1}{n/u_n})^{n/u_n} \right]^{u_n}$$

de donde pasando al límite $n \longrightarrow \infty$ resulta:

$$a = e^x \qquad y \qquad x = L\ a$$

Si $0 < a < 1$, basta tomar $a = 1/A$.

Ejercicio 32.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = (\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2})^n \qquad \text{con } a \text{ y } b > 0$$

Sol:

$$a_n = \left(\frac{n\sqrt[n]{a} - n + n\sqrt[n]{b} - n + 2n}{2n}\right)^n$$

$$a_n = \left(1 + \frac{n(\sqrt[n]{a} - 1) + n(\sqrt[n]{b} - 1)}{2n}\right)^n$$

Poniendo: $b_n = n(\sqrt[n]{a} - 1) + n(\sqrt[n]{b} - 1)$ queda:

$$a_n = \left(1 + \frac{b_n}{2n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{2n/b_n}\right)^{2n/b_n}\right]^{b_n/2}$$

y como $\frac{2n}{b_n}$ diverge a infinito se tiene:

$$\lim a_n = e^{1/2 \log ab} = e^{\log \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

Ejercicio 33.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \ldots\ldots + \frac{n^2}{n!}$$

Sol:

Calculando A y B de modo que $k^2 = Ak(k - 1) + Bk$ se encuentra A = B = 1, luego

$$a_n = \sum_{1}^{n} \frac{k^2}{k!} = \frac{1^2}{1!} + \sum_{2}^{n} \frac{k^2}{k!}$$

$$a_n = 1 + \sum_{2}^{n} \frac{k(k-1)+k}{k!}$$

$$a_n = 1 + \sum_{2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{2}^{n} \frac{1}{(k-1)!}$$

de donde resulta: $\lim a_n = 2e$

<u>Ejercicio</u> 34.-

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2 - 5k + 2}{k!}$$

<u>Sol</u>:

Hagamos: $k^2 - 5K + 2 = Ak(k-1) + Bk + C$

Calculando los valores de A, B y C se encuentra $A = 1$, $C = 2$, luego:

$$a_n = \sum_{2}^{n} \frac{k^2 - 5k + 2}{k!} + \sum_{2}^{n} \frac{k(k-1) - 4k + 2}{k!}$$

$$a_n = \sum_{2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} - 4 \sum_{2}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + 2 \sum_{2}^{n} \frac{1}{k!}$$

de donde:

$$\lim a_n = e - 4(e-1) + 2(e-2) = -e$$

Ejercicio 35.-

Demostrar que:

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

Sol:

La primera parte de la desigualdad es inmediata, pues la sucesión $(1 + 1/n)^n$ es creciente y tiende hacia e. Para establecer la segunda parte, como la secesión $(1 + 1/n)^{n+1}$ tiende hacia e, bastará probar que ella es decreciente.

Para ello tenemos:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n-1})^n} = \frac{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^n}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{(\frac{n}{n-1})^n (\frac{n}{n+1})^n}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{(\frac{n^2}{n^2 - 1})^n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n^2 - 1})^n}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{n^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{n^2}} = 1$$

o sea: $a_n < a_{n-1}$

<u>Ejercicio</u> 36.-

Demostrar que:

$$\frac{1}{n + 1} < L(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

<u>Sol</u>:

De la desigualdad ya demostrada:

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n + 1}$$

tomando logaritmo de base e, resulta:

$$n\ L(1 + \frac{1}{n}) < 1 < (n + 1)\ L(1 + \frac{1}{n})$$

de donde

$$L(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n} \qquad y \qquad L(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n + 1}$$

luego:

$$\frac{1}{n + 1} < L(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

Ejercicio 37.-

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = (2 - \sqrt[2]{e})(2 - \sqrt[3]{e}) \ldots\ldots (2 - \sqrt[n]{e})$$

Sol:

De la conocida desigualdad $(1 + 1/n)^n < e$ se deduce fácilmente que:

$$0 < 2 - \sqrt[n]{e} < 1 - \frac{1}{n}$$

dando a n los valores 2,3, ... n, y multiplicando miembro a miembro las desigualdades obtenidas, resulta:

$$0 < (2 - \sqrt{e})(2 - \sqrt[3]{e}) \ldots. (2 - \sqrt[n]{e}) < \frac{1}{n}$$

luego: $\lim a_n = 0$

Ejercicio 38.-

Establecer la convergencia de la sucesión:

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - L\,n$$

Sol:

Haremos ver que c_n es una sucesión decreciente y acotada inferiormente. Fácilmente se encuentra que:

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - L(1 + \frac{1}{n}) < 0$$

Por otra parte dando a n los valores 1, 2, 3, ... n en la desigualdad

$$\frac{1}{n} > L(1 + \frac{1}{n}) = L(n + 1) - Ln$$

y sumando se obtiene

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} > L(n + 1) > 0$$

luego $c_n > 0$. Así entonces siendo c_n decreciente y acotada inferiormente, tendrá un límite. Este límite se llama corrientemente la constante de Euler o de Mascheroni y se designa con la letra γ , siendo aproximadamente: $\gamma = 0,577$.

En la resolución de algunos ejercicios es muy conveniente el empleo de la relación

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - L\,n = \gamma + E_n$$

donde E_n es una sucesión que tiende a cero.

<u>Ejercicio</u> 39.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n}$$

<u>Sol</u>:

Tenemos:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} - L2n - E_{2n}$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - Ln - E_n$$

de donde restando, se obtiene:

$$0 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} - L2n + Ln - E_{2n} + E_n$$

o sea

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n} = L2 - E_n + E_{2n}$$

y luego

$$\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}\right) = L2$$

<u>Ejercicio</u> 40.-

Determinar el límite de la sucesión:

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

<u>Sol</u>:

$$a_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - L2n\right) + L2n +$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - Ln\right) - Ln$$

$$a_{2n} = (\gamma + E_{2n}) - (\gamma + E_n) + L2$$

luego

$$\lim a_{2n} = L2$$

Como además:

$$\lim a_{2n+1} = \lim(a_{2n} + \frac{1}{2n+1}) = L2$$

resulta: $\lim a_n = L2$

Ejercicio 41.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{n(2n-1)}$$

Sol:

Para el sumando de orden k, se encuentra fácilmente que:

$$\frac{1}{k(2k-1)} = \frac{2}{2k-1} - \frac{1}{k}$$

luego:

$$a_n = 2(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots. + \frac{1}{2n-1}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n})$$

$$a_n = 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}) - 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n})$$

$$a_n = 2(\gamma + E_{2n}) - 2(\gamma + E_n) + 2L2$$

de donde: $\lim a_n = 2L2$

Ejercicio 42.-

Calcular el límite de la sucesión

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{n(2n+1)}$$

Sol:

Teniendo presente que $\frac{1}{k(2k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}$, resulta:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$a_n = 2 + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$a_n = 2 + 2(\gamma + E_n + Ln) - 2(\gamma + E_{2n+1} + L\,\overline{2n+1})$$

luego: $\lim a_n = 2 - L4$

Ejercicio 43.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 15} + \frac{1}{3 \cdot 35} + \ldots + \frac{1}{n(4n^2-1)}$$

Sol:

Puesto que:

$$\frac{1}{k(4k^2-1)} = \frac{-1}{k} + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1}$$

resulta:

$$a_n = -2(\gamma + E_n + Ln) + 2(\gamma + E_{2}\text{[illegible]} + \text{[illegible]}\frac{1}{\text{[illegible]}n + 1} - 1$$

luego

$$\lim a_n = 2L2 - 1$$

<u>Ejercicio</u> 44.-

Determinar el límite de la sucesión:

$$a_n = n\left(\sqrt[3]{8 + \frac{2}{n}} - 2\right)$$

<u>Sol</u>:

Teniendo presente la igualdad algebraica:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

tomemos

$$x = \sqrt[3]{8 + \frac{2}{n}} \qquad\qquad y = 2$$

entonces:

$$a_n = n(x - y) = n\,\frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2}$$

$$a_n = n\,\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$$

$$a_n = n\,\frac{8 + 2/n - 8}{\sqrt[3]{(8 + 2/n)^2} + 2\sqrt[3]{8 + 2/n} + 4}$$

luego: $\lim a_n = \frac{1}{6}$

Ejercicio 45.-

Si (a_n) es una sucesión de términos positivos tal que:

$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = a < 1$$

demostrar que $\lim a_n = 0$

Sol:

Por hipótesis se tiene que:

$$a - \varepsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < a + \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

tomando ε, de modo que $a + \varepsilon = k < 1$, queda:

$$0 < a_n < k\ a_{n-1} \qquad \text{para } n > N$$

dando a n los valores $n + 1$, $n + 2$, ..., $n + p - 1$, y multiplicando las desigualdades obtenidas, resulta

$$0 < a_{n+p} < k^p\ a_n$$

y dejando n fijo y haciendo tender p a infinito, se obtiene:
$\lim a_{n+p} = 0.$

Ejercicio 46.-

Calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = \frac{a^n}{n!}$$

Sol:

Si $|a| < 1$, se tiene:

$$\lim a_n = \lim \frac{a^n}{n!} = \lim a^n \cdot \lim \frac{1}{n!} = 0 \cdot 0 = 0$$

Si $|a| > 1$, sea N el mayor entero contenido en $|a|$, entonces para $n > N$, tenemos:

$$\frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|^{n-N}}{(N+1)(N+2)\ \ldots\ n}$$

$$\frac{|a|^n}{n!} < \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|^{n-N}}{(N+1)(N+1)\ \ldots\ (N+1)}$$

$$\frac{|a|^n}{n!} < \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{|a|}{N+1}\right)^{n-N}$$

$$\frac{|a|^n}{n!} \leqslant \frac{|a|^N}{N!} \cdot \left(\frac{N+1}{|a|}\right)^N \cdot \left(\frac{|a|}{N+1}\right)^n = \frac{(N+1)^N}{N!} \left(\frac{|a|}{N+1}\right)^n$$

luego

$$0 \leqslant \lim \frac{|a|^n}{n!} \leqslant \frac{(N+1)^N}{N!} \lim \left(\frac{|a|}{N+1}\right)^n = 0$$

y como $a/(N+1)$ es un valor absoluto menor que uno queda:

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

Ejercicio 47.-

Si $|a| > 1$ y $\theta < 0$ calcular el límite de la sucesión

$$a_n = n^{\theta} a^n$$

Sol:

Pongamos $\xi = -\theta$ y sea p el mayor entero positivo contenido en $\xi + 1$. Además tomemos $h > 0$ de modo que $a = 1 + h$, entonces:

$$|n^{\theta} a^n| = \frac{(1 + h)^n}{n^{\xi}} > \frac{(1 + h)^n}{n^p}$$

de donde

$$|n^{\theta} a^n| > \binom{n}{p+1} h^{p+1} \cdot \frac{1}{n^p}$$

$$|n^{\theta} a^n| > \frac{h^{p+1}}{n^p} \frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-p)}{(p+1)!}$$

$$|n^{\theta} a^n| > \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{p}{n}\right) n$$

y luego

$$\lim n^{\theta} a^n = \infty$$

Ejercicio 48.-

Si $|a| < 1$ y $\theta > 0$ calcular el límite de la sucesión:

$$a_n = n^\theta a^n$$

Sol:

Sean p el mayor entero positivo contenido en $\theta + 1$; elijamos h de modo que $|a| = \frac{1}{1 + h}$

Tendremos:

$$|n^\theta a^n| \leqslant \frac{n^p}{(1 + h)^n} \qquad \text{para } n > p + 1$$

$$|n^\theta a^n| \leqslant \frac{n^p}{1 + \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + \dots + \binom{n}{p+1}h^{p+1} + \dots + \binom{n}{n}h^n}$$

$$|n^\theta a^n| < \frac{n^p}{\frac{n(n-1)(n-2)\,\dots\,(n-p)}{1\ 2\ 3\ \dots\ (p+1)}\, h^{p+1}}$$

$$|n^\theta a^n| < \frac{(p+1)!\ h^{-(p+1)}}{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\ \dots\ (1 - \frac{p}{n})}\ \frac{1}{n}$$

luego

$$\lim n^\theta a^n = 0$$

Ejercicio 49.-

Si las sucesiones a_n y b_n convergen respectivamente hacia a y b, demostrar que la sucesión:

$$c_n = \frac{a_1\,b_n + a_2\,b_{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\,b_2 + a_n\,b_1}{n}$$

converge hacia ab.

<u>Sol</u>:

Hagamos $a_K = a + \theta_K$, con $\lim \theta_K = 0$, entonces:

$$\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1}{n} = \frac{(a + \theta_1)b_n + (a + \theta_2)b_{n-1} + (a+\theta_n)b_1}{n}$$

$$= a\,\frac{b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n}{n} + \frac{\theta_1b_n + \theta_2b_{n-1} + \ldots + \theta_nb_1}{n}$$

El límite del primer sumando evidentemente es ab, bastará entonces demostrar que el límite de la segunda fracción es cero.

Como la sucesión b_n es convergente por hipótesis, ella será acotada, es decir hay un número $B > 0$ tal que $|b_n| < B$, entonces:

$$\left|\frac{\theta_1b_n + \theta_2b_{n-1} + \ldots\ldots + \theta_nb_1}{n}\right| < B\,\left|\frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots\ldots + \theta_n}{n}\right|$$

y como $\lim \theta_n = 0$, queda establecida la tesis.

<u>Ejercicio</u> 50.-

Dadas las sucesiones a_n y b_n por las fórmulas de concurrencia:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}}$$

con

$a_1 = \frac{a + b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$ y $a > b > 0$, se pide demostrar que son convergentes a un mismo límite.

<u>Sol</u>:

Operando algebraicamente es fácil establecer que:

$$a_{n-1} - a_n = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

$$b_n - b_{n-1} = \sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}^2} = (\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})\sqrt{b_{n-1}}$$

Ahora como del enunciado se desprende que $a_1 > b_1$, haciendo $n = 2$, resulta:

$$a_1 - a_2 = \frac{a_1 - b_1}{2} > 0 \qquad b_2 - b_1 = (\sqrt{a_1} - \sqrt{b_1})\sqrt{b_1} > 0$$

así entonces:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \;\ldots\ldots\; > b$$

$$b_1 < b_2 < b_3 < \;\ldots\ldots\; < a$$

es decir a_n es decreciente y acotada inferiormente y b_n es creciente y acotada superiormente, luego ambas tienen límite. Suponiendo que estos límites son α y β, haciendo tender n a infinito, la igualdad:

$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ se convierte en $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$

de donde resulta $\alpha = \beta$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

(A) Determinar el límite de las sucesiones siguientes:

1.- $a_n = (\sqrt{n^2 + an + b} - n)$ Rep: $a/2$

2.- $a_n = \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 4n}\right)^{(n^2 - 1)/n}$ Rep: e^{-4}

3.- $a_n = \left(\sqrt[5]{\frac{2n - 3}{3n + 4}}\right)^{\left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)n^2 + 1}$ Rep: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5e}}$

4.- $a_n = n\left(\sqrt[3]{1 + \frac{a}{n}} - 1\right)$ Rep: $\frac{a}{3}$

5.- $a_n = \left(\frac{n^2 + 3n - 2}{n^2 + n}\right)^{(n^3 + 2)/(2n^2-1)}$ Rep: e

6.- $a_n = \left(\frac{n + 2}{2n^2 - 5}\right)^{(n-2)/(n^2 + 6)}$ Rep: 1

7.- $a_n = \frac{n!}{n^n}$ Rep: 0

8.- $a_n = (n + \sqrt{n})\, L\left(1 + \frac{3}{2n - 1}\right)$ Rep: $\frac{3}{2}$

9.- $a_n = n\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n-1]{a}\right)$ Rep: 0

10.- $a_n = \sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\cdots\binom{n}{n}}$ Rep: ∞

11.- $a_n = \sqrt[n^2]{2.4.6\ \cdots\cdots\ (2n)}$ Rep: 1

12.- $a_n = \sqrt[n^2]{\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\cdots\binom{n}{n}}$ Rep: e

(B) Si a es positivo: Demostrar que la sucesión:

$$a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots\cdots + \sqrt{a}}}} \qquad \text{(n raices)}$$

tiene límite. Calcular su límite.

(C) Si (a_n) es una sucesión de términos positivos, demostrar que:

$$\lim_{n}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{n}} + a_2^{\frac{1}{n}} + \cdots + a_k^{\frac{1}{n}}}{k}\right)^{n} = \sqrt[k]{a_1\ a_2 \cdots a_k}$$

(D) Si (a_n) es una sucesión de términos positivos, demostrar que:

$$\lim\left(\frac{a_1^{\frac{1}{n}} + 2a_2^{\frac{1}{n}} + 3a_3^{\frac{1}{n}} + \cdots + ka_k^{\frac{1}{n}}}{\frac{k(k+1)}{2}}\right)^{n} =$$

$$= \left(a_1^{1}.a_2^{2}\ \cdots\ a_k^{k}\right)^{\frac{2}{k(k+1)}}$$