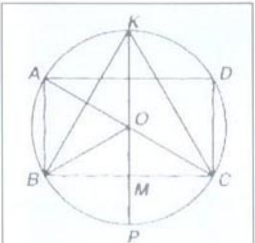
TEMAS SELECTOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES

G. DOROFEIEV
M. POTAPOV
N. ROZOV

$a + bc$



$\operatorname{sen} 2x$

EDITORIAL MIR - MOSCU

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»
МОСКВА

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

G. DOROFÉIEV,
M. POTÁPOV,
N. ROZOV

EDITORIAL MIR · MOSCÚ

CDU 510 (023) = 60

(На испанском языке)

Impreso en la URSS 1973

Д $\frac{0223\text{-}280}{041\ (01)\text{-}73}$

PARTE I

ARITMÉTICA Y ALGEBRA

§ 1. OBSERVACIONES GENERALES SOBRE ARITMÉTICA Y ALGEBRA

No es necesario persuadir a quienes hayan cursado estudios en la escuela de que todos los conceptos usados en las Matemáticas son rigurosamente *definidos* (excepto, claro está, los más *elementales*, tales como número entero positivo, igualdad, punto, recta y plano). En efecto estas definiciones se inculcan a los alumnos durante el curso escolar, pero cuanto más se alejan de estas definiciones y profundizan en la teoría y la solución de los problemas, cuanto más se van acostumbrando a los conceptos utilizados, tanto más son propensos a considerar, a veces sin darse cuenta de ello, que estos conceptos son "comprensibles por sí mismo" y no requieren definición alguna.

Sin embargo, los estudiantes han de estar en posesión de conocimientos exactos y lógicos del curso de Matemáticas elementales y, en particular, estar familiarizados con las definiciones. Por tanto, al estudiar las partes de la materia es útil prestar atención especial a las definiciones y lograr una comprensión clara de sus enunciados [1].

En las Matemáticas, además de la definición de los conceptos, está instituido un símbolo especial sobre la formación de uno u otro objeto o relaciones entre éstos. Es preciso recordar bien estos acuerdos que son de por sí *definiciones del símbolo*. Por ejemplo, la suma de dos números se denota con ayuda del signo $+$, el cuadrado de un número a, o sea, el producto de $a \cdot a$, se conviene asignarlo con el símbolo a^2, el hecho de que el número a es menor que el número b, es decir, que el número $a - b$ es negativo, se han acordado representarlo mediante el signo $<$ en forma $a < b$.

Los estudiantes conocen bien los signos de "desigualdades no rigurosas": $\leqslant$ (menos o igual) y $\geqslant$ (más o igual); su aplicación, al realizar transformaciones formales, no presenta dificultades para nadie. Sin embargo, muchos estudiantes, como demuestra la experiencia, no siempre comprenden el sentido de estos signos.

Por ejemplo, a la pregunta, *¿es válida o no la desigualdad* $2 \leqslant 3$? se da a menudo la respuesta: "No, ya que el número 2 es menor que el número 3", y a la pregunta *¿es válida o no la desigualdad* $3 \leqslant 3$? sigue

[1] Más adelante insistiremos sobre este particular (Parte II, § 1 y Parte III, § 1).

la respuesta: "No, porque 3 es igual a 3". No obstante, todos los que contestan de tal manera a estas preguntas anotan, sin pensar, la solución de cualquier problema en forma de $x \leqslant 3$. Sin embargo, su idea del signo $\leqslant$ entre los números concretos significa que ninguno de éstos, al sustituirlo en lugar de x, en la desigualdad $x \leqslant 3$, no da una igualdad numérica correcta, es decir, con $\leqslant$ no pueden ser ligados, en general, ningunos números.

En realidad, el asunto es así: por *la definición* del signo $\leqslant$ *la desigualdad* $a \leqslant b$ *se considera justa para* $a < b$ *y* $a = b$. De tal modo, la desigualdad $2 \leqslant 3$ es *justa*, porque 2 es *menor* que 3 y la desigualdad $3 \leqslant 3$ es *justa* porque 3 es *igual* a 3.

De esta definición del signo $\leqslant$ resulta que la desigualdad $a \leqslant b$ no es justa en el caso en que $a > b$. Por esta razón el signo $\leqslant$ se debe leer no sólo "menos o igual" sino que "no es más". Los ejemplos de desigualdades $2 \leqslant 3$ y $3 \leqslant 3$ se leen respectivamente como: "2 no es más de 3" y "3 no es más de 3".

Todo lo expuesto se refiere también al signo $\geqslant$, que junto con la expresión "más o igual" se lee como "no es menos". Según *la definición* del signo $\geqslant$ *la desigualdad* $a \geqslant b$ *es válida si* $a > b$ *o bien, si* $a = b$; es incorrecta solamente cuando $a < b$.

Casi todo estudiante sabe que la función $y = 2^x$ está definida para cada x real, dibujando fácilmente su gráfica. No obstante, la pregunta *¿qué es* $2^{\sqrt{3}}$? deja desconcertado frecuentemente al estudiante. Entonces, en el mejor de los casos se dice cómo *calcular* este número aunque sea aproximadamente. Pero, esto contradice a la lógica: no es posible calcularlo aproximadamente sin saber la definición del número.

Para contestar a la pregunta ¿qué es $2^{\sqrt{3}}$? hay que recordar la definición particular de la potencia de exponente irracional. En efecto, conviene recordar las demás definiciones: la potencia con exponente entero positivo, nulo, racional y negativo. Debe tenerse en cuenta, que la definición general de potencia de exponente entero positivo n no es aplicable para $n = 1$, ya que el producto con un solo factor no tiene sentido. Por lo tanto, la igualdad $a^1 = a$ es *la definición* de primera potencia de un número. Por la misma *definición* se introduce la potencia nula: $a^0 = 1$.

Vamos a aclarar una pregunta más: *¿por qué es válida la igualdad*

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a? \tag{1}$$

Muchos estudiantes demuestran esta igualdad realizando transformaciones del primer miembro. Naturalmente este método es admisible, pero las reglas de operaciones con los radicales alejaron de la mente del estudiante la misma definición de radical. ¿Cómo se define la raíz cúbica de un número? *Llámase* raíz cúbica de un número a el número cuyo cubo es igual a a. Se sabe también de que la raíz cúbica del número a se designa con el símbolo $\sqrt[3]{a}$. De tal modo, la igualdad (1) es simplemente un enunciado en fórmula de definición de la raíz cúbica tomando en consideración el acuerdo sobre el sentido del símbolo $\sqrt[3]{\ }$.

El curso de Algebra abarca un número suficiente de diferentes afirmaciones. Está muy difundida la opinión de que la Geometría exige razonamientos estrictos, que contiene teoremas de demostración minuciosa con definiciones requeridas, y que en Algebra existe un solo teorema, que es el de Viete, y todo lo demás son palabras y fórmulas. Esto es un error grave. Hasta la fórmula del cuadrado de suma es un *teorema*. Las propiedades de una función logarítmica constituyen unos cuantos teoremas. Cada teorema de Algebra, al igual que en Geometría, debe acompañarse de una demostración, antes de la cual se ha de dar las definiciones de todos los conceptos que se encuentran en su enunciado.

La experiencia demuestra que cuanto más habitual es la afirmación algebraica, cuanto más frecuente es su aplicación para la resolución de los problemas, tanto más se olvida que no sólo hay que saber enunciar y aplicarla con exactitud sino que también *demostrarla*. Por esta razón es necesario prestar atención especial a la habilidad de fundamentar tales o cuales afirmaciones, sobre todo las que se imaginan "evidentes".

Todos en absoluto conocen bien la fórmula para la resolución de la ecuación de segundo grado; sin embargo, cuando se pide hacer su deducción esto deja desconcertados a algunos estudiantes. Estas dificultades están relacionadas con *los teoremas sobre la resolución de desigualdades de segundo grado*. A pesar de que el estudiante resuelve correctamente tales desigualdades, no siempre puede contestar, con bastantes argumentos, a la pregunta: *¿por qué* el trinomio cuadrático de coeficiente positivo para x^2 es positivo fuera del intervalo entre las raíces, si éstas son reales, y es positivo también si las raíces son imaginarias para cualquier x?

Mientras tanto, las demostraciones exactas de los teoremas sobre el signo del trinomio cuadrático no son difíciles.

Si el trinomio cuadrático ax^2+bx+c, $a\neq 0$ contiene raíces reales x_1 y x_2 (es decir, su discriminante es positivo) este trinomio se desarrolla en factores:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \tag{2}$$

Es evidente que para cualquier x, mayor que la raíz mayor, ambos factores entre paréntesis, o sea, $(x-x_1)$ y $(x-x_2)$, son positivos, y para cualquier x, menor que la raíz menor, son negativos. En consecuencia, en uno u otro caso su producto $(x-x_1)(x-x_2)$ es positivo, ya que el segundo miembro de la fórmula (2) lleva el mismo signo que el número a. Así pues, si x se halla en el intervalo entre las raíces x_1

y x_2, entonces, uno de los paréntesis de (2) es positivo y el otro, negativo; por lo tanto, el signo del producto en el segundo miembro (2) es opuesto al signo de a.

De tal modo, queda demostrado el teorema: *el valor del trinomio cuadrático* ax^2+bx+c *con discriminante positivo* $(b^2-4ac>0)$ *para cualquier* x, *fuera del intervalo entre las raíces del trinomio, tiene un signo que coincide con el del coeficiente* a, *y para cualquier* x *dentro del intervalo entre las raíces es opuesto al signo de* a [1].

También se propone otro teorema: *el valor del trinomio* ax^2+bx+c *con discriminante negativo* $(b^2-4ac<0)$, *para cualquier* x, *tiene el signo que coincide con el signo del coeficiente* a. Para demostrar este teorema vamos a eliminar del trinomio un cuadrado exacto:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]. \qquad (3)$$

Ya que el discriminante $b^2-4ac<0$ (como es sabido, en este caso el trinomio contiene raíces imaginarias), es cierto que la expresión entre corchetes es positiva para cualquier valor de x. Por eso, el producto del miembro derecho (3) y el número a tienen el mismo signo para cualquier valor de x.

Con frecuencia a los estudiantes resulta difícil resolver *ecuaciones bicuadradas*. Parece que en esto no hay dificultad alguna, puesto que *la ecuación bicuadrada* $ax^4+bx^2+c=0$ *se reduce a la cuadrática mediante una sustitución ordinaria* $x^2=y$. Supongamos, no obstante, que la ecuación cuadrática obtenida tiene las raíces imaginarias y_1 e y_2. En este caso, para determinar x es necesario saber extraer la raíz cuadrada de un número complejo. Este problema por sí mismo no es muy difícil y para su resolución existen fórmulas adecuadas. Sin embargo, se puede evitar en absoluto este método: sin recurrir a la sustitución ordinaria se debe descomponer el primer miembro en factores mediante cierta transformación especial.

Esta transformación consiste en eliminar un cuadrado exacto del trinomio ax^4+bx^2+c, lo que conduce a la solución sólo cuando la ecuación cuadrática $ay^2+by+c=0$ tenga raíces *imaginarias*.

En el caso dado, la eliminación del cuadrado exacto se realiza diferenciándose en algo de lo común: es decir, se agrupan el término superior y el término independiente y su suma se adiciona hasta obtener el cuadrado exacto.

Sea $x^4+bx^2+c=0$ una ecuación (consideremos para simplicidad que $a=1$, lo que se logra fácilmente), con esto la ecuación $y^2+by+c=0$ tiene raíces imaginarias. Esta condición significa que el discriminante $D=b^2-4c<0$, o sea, $b^2<4c$. De ahí está claro que

[1] El lector mismo enunciará y demostrará el teorema referente al caso en que el trinomio ax^2+bx+c tiene raíces iguales, o sea, cuando su discriminante es igual a cero: $b^2-4ac=0$.

$c>0$ y $|b|<2\sqrt{c}$, es decir, $b<2\sqrt{c}$. Por esto es posible realizar las siguientes transformaciones:

$$x^4+bx^2+c=(x^4+c)+bx^2=(x^4+2\sqrt{c}x^2+c)-(2\sqrt{c}-b)x^2=$$
$$=(x^2+\sqrt{c})^2-(2\sqrt{c}-b)x^2=(x^2+x\sqrt{2\sqrt{c}-b}+\sqrt{c})(x^2-$$
$$-x\sqrt{2\sqrt{c}-b}+\sqrt{c}).$$

Después de estas transformaciones la resolución de la ecuación bicuadrada se reduce a la resolución de dos ecuaciones cuadráticas con los coeficientes reales.

Naturalmente, no es necesario recordar las fórmulas voluminosas obtenidas; más vale, en cada caso concreto, realizar la eliminación señalada del cuadrado exacto. Resolvamos, por ejemplo, esta ecuación

$$2x^4+2x^2+3=0.$$

Primeramente obtenemos la ecuación reducida $x^4+x^2+3/2=0$. Su discriminante es igual a $1^2-4\cdot 3/2=-5<0$. Por eso, apliquemos el método expuesto:

$$x^4+x^2+3/2=(x^4+2\sqrt{3/2}\,x^2+3/2)-(2\sqrt{3/2}-1)\,x^2=$$
$$=(x^2+\sqrt{3/2})^2-(\sqrt{6}-1)x^2=$$
$$=\left(x^2+x\sqrt{\sqrt{6}-1}+\sqrt{3/2}\right)\times$$
$$\times\left(x^2-x\sqrt{\sqrt{6}-1}+\sqrt{3/2}\right).$$

Ahora vamos a la resolución de las ecuaciones cuadráticas sin que temamos a los radicales complejos. La primera ecuación

$$x^2+x\sqrt{\sqrt{6}-1}+\sqrt{3/2}=0$$

tiene un discriminante negativo $D=(\sqrt{\sqrt{6}-1})^2-4\sqrt{3/2}=-1-\sqrt{6}$ por la razón de que sus raíces

$$x_{1,2}=-\frac{\sqrt{\sqrt{6}-1}}{2}\pm i\frac{\sqrt{\sqrt{6}+1}}{2}.$$

Las raíces de la segunda ecuación se hallan análogamente:

$$x^2-x\sqrt{\sqrt{6}-1}+\sqrt{3/2}=0;$$

estas raíces son:

$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{\sqrt{6}-1}}{2}\pm i\frac{\sqrt{\sqrt{6}+1}}{2}.$$

La resolución de las ecuaciones binomias de sexta potencia que tienen la forma de $x^6+a^6=0$ se reduce a la resolución de las ecuaciones bicuadradas de esta índole (aquí se debe descomponer el primer miembro como suma de cubos y aplicar el método arriba examinado).

Es necesario decir unas palabras a propósito de los enunciados de una serie de definiciones y teoremas. En la mayoría de los casos éstas se expresan por palabras, sin que se utilicen designaciones convencionales de letras. En muchos casos esto está justificado, pero frecuentemente se hace difícil el enunciado. Por ejemplo, en lugar de decir "el cuadrado de la suma de dos números cualesquiera es igual a la suma de los cuadrados de estos números más el doble de su producto", es más fácil expresar así: "para cualesquier números a y b tenemos $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$". Y la definición del logaritmo es más conveniente darla en la forma siguiente: "el número x es logaritmo del número N en la base $a \, (a > 0, \; a \neq 1)$, si $a^x = N$".

Hay que convertir libremente estas afirmaciones en las de las fórmulas y viceversa. Precisamente lo dicho se exige para la demostración de uno u otro teorema. Por ejemplo, para demostrar que "con la base mayor que la unidad, los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos", debemos ante todo introducir las designaciones: sean la base $a > 1$, el número $x > 1$ e $y = \log_a x$ y luego determinar que el número $y > 0$ Esta interpretación está relacionada con la necesidad de utilizar tal o cual definición. Por ejemplo, antes de demostrar la afirmación "la función $y = \log_a x$ que crece con $a > 1$" hay que recordar qué cosa significa la función creciente y entonces la demostración empezará por las palabras: "Sea $a > 1$, sean x_1 y x_2 los números positivos, para $x_1 < x_2$; demostremos que $\log_a x_1 < \log_a x_2$".

Los estudiantes no siempre comprenden que algunas paráfrasis de fórmulas utilizan simultáneamente símbolos adoptados para unos u otros conceptos. Precisamente, por esto se explica que no siempre se ve la definición de la raíz cúbica en la fórmula (1) escrita con ayuda del signo $\sqrt[3]{\;}$, y en la igualdad $a^{\log_a N} = N \, (N > 0, \; a > 0, \; a \neq 1)$, la anotación simbólica de la definición literal "acostumbrada" del logaritmo que se basa en el acuerdo sobre la designación del logaritmo del número N, en la base a, como $\log_a N$.

EJERCICIOS:

1. ¿Qué significa: a) la fracción decimal periodica; b) $a^{2/3}$; c) la ecuación de segundo grado, d) $\sqrt{11}$; e) el módulo del número complejo; f) $a > b$; g) la suma de la progresión geométrica infinitamente decreciente?

2. ¿Es la definición, el axioma o el teorema cada una de las aseveraciones siguientes: a) la igualdad no se altera al multiplicar sus ambos miembros por un mismo número; b) el modulo de cualquier número no es negativo; c) $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$; d) la gráfica de la función $y = -3x$ pasa por el origen de las coordenadas?

3. ¿Es siempre válida la igualdad $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$?

4. Si el discriminante de una ecuación de segundo grado es positivo, esta ecuación tiene dos diferentes raíces reales. Enúnciense los teoremas: el inverso, el contrario y el contrario al inverso. ¿Cuáles de estos teoremas son correctos?

5. Demuéstrese que si las raíces de una ecuación de segundo grado son imaginarias, entonces el discriminante de esta ecuación es negativo.

6. Escríbase en forma de fórmula la condición de que entre los números $a_1, \ldots,$ a_n, uno, por lo menos, es igual al número α.

7. Escríbase en forma de una igualdad la condición de que entre los números a, b, c, dos, por lo menos, son iguales a cero.

8. ¿Qué se puede decir de los números a y b, si $1/a < 1/b$? ¿De cuales propiedades de la función $y = 1/x$ se deduce la respuesta a esta pregunta?

9. Escríbase en el lenguaje de relaciones matemáticas la aseveración: la función $y = 3x - x^2$ crece al variar el argumento dentro del segmento de -1 a $+1$.

10. ¿La condición de que la suma de las cifras de un numero se divide por 3, es una condición necesaria, suficiente o necesaria y suficiente para que el número se divide por 12?

§ 2. NÚMEROS ENTEROS, RACIONALES E IRRACIONALES

Son frecuentes los problemas relacionados con la Aritmética que presentan dificultades ante los estudiantes. Estas dificultades se explican generalmente por el hecho de que la Aritmética se estudia en las clases de primaria, donde muchos resultados se les comunican a los alumnos sin demostraciones. Más tarde, no se vuelve a estos problemas. Sin embargo, esto no aminora, de manera alguna, la importancia de tales partes de la Aritmética como la divisibilidad de los números enteros, las propiedades de las fracciones, la teoría de las proporciones, etc.

El estudiante tiene que saber enunciados de los resultados correspondientes; además de esto, es necesario saber demostrarlos: aquí se puede plantear un problema relacionado, por ejemplo, con la deducción de tal o cual criterio de la divisibilidad. Estas demostraciones presentan de por sí un ejercicio completamente factible para todo aquel que dominó acertadamente el curso de Algebra.

Demostremos, como ejemplo *el criterio de divisibilidad por* 9. Sea el número entero positivo $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$. Aquí el símbolo $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ significa un número de $(n+1)$ cifras [1], donde $a_n,$ $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son las cifras de los dígitos respectivos de este número [2] (o sea, $1 \leqslant a_n \leqslant 9$, $0 \leqslant a_{n-1} \leqslant 9, \ldots, 0 \leqslant a_1 \leqslant 9$, $0 \leqslant a_0 \leqslant$ $\leqslant 9$). Debemos demostrar dos afirmaciones: a) si la suma de las cifras $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ del número N se divide por 9, el mismo número N se divide también por 9; b) si el número N se divide por 9, la suma de sus cifras se divide también por 9.

Siguiendo al principio del sistema numérico decimal de posición

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Ya que $10^k = \underbrace{99 \ldots 9}_{k \text{ veces}} + 1$ para cualquier $k \geqslant 1$ entero positivo,

[1] La línea por arriba se pone para que no se confunda con el producto de los números $a_n, \ldots, a_0$.

[2] Es natural que la cifra del dígito mayor se considera distinto de cero.

obtenemos

$$N=\Big[a_n\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ veces}}+a_{n-1}\underbrace{99\ldots9}_{n-1\text{ veces}}+\ldots+a_2\times$$

$$\times 99+a_1\,9\Big]+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1+a_0). \quad (4)$$

Es evidente que el número entre corchetes se divide por 9, ya que es la suma de n sumandos, cada uno de los cuales se divide por 9. Si la suma $a_n+\ldots+a_1+a_0$ se divide por 9, se deduce de (4) que el número N también se divide por 9 por razón de que la afirmación a) queda demostrada. La afirmación b) también proviene del análisis de la igualdad (4): si su primer miembro (el número N) se divide por 9 y dado que el primer sumando de su segundo miembro (el número entre corchetes) se divide por 9, también el segundo sumando (la suma de cifras del número N) debe dividirse por 9.

Aquí es conveniente recordar que para la resolución de los problemas son útiles diferentes factores aritméticos, que se anotan mediante símbolos literales.

Si tenemos dos números enteros [1] a y b, donde $b>0$, existen entonces un número entero único q y un número entero único r, con que $0\leqslant r<b$ son tales que

$$a=bq+r. \quad (5)$$

La igualdad (5) no es más que *la división del número a por el número b con resto*. En particular, la igualdad (5) pone en claro que cualquier número par tiene una forma $2k$, donde k es un número entero, y cualquier número impar se puede representar en forma de $2n+1$, donde n es un número entero.

Si se tiene un número entero positivo N mayor que 1 y si $N=n_1^{\alpha_1}\ldots n_k^{\alpha_k}$ es una descomposición del mismo número en factores simples (aquí $n_1, \ldots, n_k$ son diferentes divisores simples del número N, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ es el número de sus repeticiones en la descomposición del número N), entonces cualquier divisor del número N tiene la forma $D=n_1^{\beta_1}\ldots n_k^{\beta_k}$, donde $0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1, \ldots, 0\leqslant\beta_k\leqslant\alpha_k$.

Si se tienen los números enteros positivos $a_1, \ldots, a_n$, entonces su *común divisor* se llama número entero positivo por el cual cada uno de los números $a_1, \ldots, a_n$ se divide sin resto. El máximo común divisor de los números $a_1, \ldots, a_n$ se denomina máximo común divisor de éstos. Si el máximo común divisor es igual a 1, los números $a_1, \ldots, a_n$ se denominan *recíprocamente simples*.

Si el número entero positivo N se divide por cada uno de los dos

[1] Recordemos que los números 1, 2, 3, ..., se llaman números *enteros positivos* y los números ..., $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, simplemente *enteros*. El conjunto de números enteros es conveniente anotarlo en forma de $0, \pm1, \pm2, \ldots$

números a_1, a_2, recíprocamente simples, entonces N se divide también por el producto de estos números $a_1 a_2$ [1]. Si el producto NM de los números enteros positivos N y M se divide sin resto por el número entero positivo D y los números M y D son recíprocamente simples, entonces N se divide por D.

En fin, recordemos la propiedad siguiente: uno de los n números enteros sucesivos, como $k+1$, $k+2$, ..., $k+n$, se divide obligatoriamente por n, donde k representa un número entero arbitrario.

Examinemos unos ejemplos sobre la aplicación de las propiedades de los números enteros para la resolución de los problemas referentes a la divisibilidad.

1. *Demostrar que el número* $N = n^3 + 20n$ *se divide por* 48 *en cualquier caso en que* n *sea par.*

Sin duda, por medio de la verificación directa, de que esta afirmación es válida para $n = 2, 4, 6, \ldots$, no conseguiremos resolver este problema porque no podemos sustituir a n por todos los números pares. Por consiguiente, es menester dar tal demostración que sea válida para cualquier número par n.

Cada número par n puede ser representado como $n = 2k$, donde k es un número entero; por lo tanto, $N = 8k(k^2+5)$. Si demostremos que $k(k^2+5)$ se divide por 6, para *cualquier* número entero k, estará claro que N se divide por 48.

Realicemos una conversión:

$$k(k^2+5) = k(k^2-1+6) = (k-1)k(k+1) + 6k. \qquad (6)$$

Vemos que el segundo sumando en el segundo miembro (6) se divide por 6. Y el primer sumando del mismo miembro (6) es un producto de *tres* números enteros sucesivos, debido a que uno de ellos se divide obligatoriamente por 3. Además de esto, de dos números enteros sucesivos (sobre todo, de los tres) uno es obligatoriamente par. Ya que 2 y 3 son recíprocamente simples, $k(k^2+5)$ se divide realmente por 6 para cualquier número k entero.

2. *Demostrar que para cualquier valor del número entero positivo* n, $N = n^2 + 1$ *no se divide por 3.*

Un número entero positivo, al dividirse por 3, puede dar como resto los números 0, 1, 2 (véase (5)). Consecutivamente, a fin de resolver este problema es razonable dividir todos los números enteros positivos en tres clases: $3k$, donde k es un número entero positivo; $3k+1$, donde k es un número entero positivo o cero; $3k+2$, donde k es un número entero positivo o cero [2].

---

[1] Es fácil comprender que si a_1 y a_2 no son recíprocamente simples, el número N no está obligado a dividirse por el producto $a_1 a_2$ (¡ponga un ejemplo!).

[2] Si en la representación $3k$ en calidad de k debemos tomar uno de los números 1, 2, ..., entonces en $3k+1$, $3k+2$ hay que tomar mas $k = 0$, a este último valor de k le corresponden los números enteros positivos 1 y 2, respectivamente.

Para cualquier número entero positivo n, que se divide exactamente por 3, o sea representado en la forma $n = 3k$, donde k es un número entero positivo, obtenemos: $n^2 + 1 = 9k^2 + 1$. En vista de que el primer sumando del segundo miembro se divide por 3 y el segundo no se divide, para estos valores de n el número N no se divide por 3.

Si $n = 3k + 1$ para cualquier número entero positivo k (o bien, $k = 0$), entonces $n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$. Es evidente que en este caso N, al dividirlo por 3, da un resto 2.

De igual modo se considera el caso en que $n = 3k + 2$.

3. *¿Con cuántos ceros termina el producto de todos los números enteros positivos desde* 1 *hasta* 1962, *inclusive?*

A muchos estudiantes este problema les parece muy difícil por su enunciado algo insólito. Entretanto, la idea de su solución es fácil. Si el número $N = 1 \cdot 2 \ldots 1961 \cdot 1962$ descomponemos en simples factores

$$N = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \ldots p^{\alpha_q}, \tag{7}$$

se evidencia que *cada par* de simples factores 2 y 5 engendrará un cero en el número N, ya que $10 = 2 \cdot 5$. Para que sea clara la fórmula (7) es suficiente descomponer, por separado, en simples factores cada uno de los factores del producto N, y luego componer los factores simples iguales. Ahora es preciso aclarar, ya que nos interesan solamente los números α_1 y α_3 en la descomposición (7), cuántos dos y cinco aparecerán durante la descomposición de cada factor del producto N.

Por ejemplo, vamos a determinar el número α_3. Es evidente que cada factor del producto N, que se divide por 5, da como resultado "cinco" al descomponerlo en factores simples; resulta que en el producto N figuran $[1962/5] = 392$ de esos factores [1]. No obstante, entre los factores del producto N resultarán algunos que se dividen por 25; de los cuales, al descomponerse en simples factores darán *complementariamente* un cinco más; la totalidad de estos factores es: $[1962/25] = 78$. Luego, cada uno de todos aquellos factores del producto N que son múltiplos de 125 dará un cinco más; éstos son $[1962/125] = 15$. Por fin, tenemos 3 factores que se dividen por 625; cada uno de los cuales, a su vez, dará un cinco más. De tal modo, en la descomposición del número N en simples factores resulta: $392 + 78 + 15 + 3 = 488$ "cinco", o sea, $\alpha_3 = 488$.

Otro cálculo, absolutamente análogo, indica que en la fórmula (7) el número $\alpha_1 = 1955$. De aquí se observa que existen solamente 488 pares de factores simples 2 y 5, por lo cual el número N termina con 488 ceros.

Muy a menudo, las ideas relacionadas con la divisibilidad de los

[1] El símbolo $[a]$ representa una parte entera del número a.

números se emplean para la resolución de los problemas de otras partes de Algebra.

4. *Hallar los números que son simultáneamente los términos de dos progresiones (o series) aritméticas*

$$3,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ 407 \ \ y\ \ 2,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ 709. \quad (8)$$

Es evidente que el término general de la primera progresión aritmética tiene la forma $a_n = 3 + 4(n-1)$; a los términos dados les corresponden los valores $n = 1, 2, \ldots, 102$. Así mismo, los términos de la segunda progresión resultan según la fórmula: $b_k = 2 + 7(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots, 102$. De tal modo, el problema consiste en hallar todos los números n y k, $1 \leqslant n \leqslant 102$, $1 \leqslant k \leqslant 102$ para los cuales $a_n = b_k$, o sea, $4n + 4 = 7k$.

De la igualdad $4(n+1) = 7k$ se desprende que ésta puede cumplirse sólo en el caso en que k sea múltiplo de 4, es decir, si $k = 4s$; está claro que s puede tener valores de $1, 2, \ldots, 25$ (ya que $1 \leqslant k \leqslant 102$). Pero si $k = 4s$, entonces $4(n+1) = 7 \cdot 4s$, o sea, $n = 7s - 1$; dado que $1 \leqslant n \leqslant 102$, los valores admisibles para s son únicamente $1, 2, \ldots, 14$.

De esta forma, se tienen 14 números que representan a la vez los términos de ambas progresiones (8); es fácil hallar estos números, ya sea mediante la fórmula para a_n siendo $n = 7s - 1$, $s = 1, 2, \ldots, 14$, ya sea mediante la fórmula para b_k siendo $k = 4s$, $s = 1, 2, \ldots, 14$.

Como se sabe, los números *racionales* se denominan números de especie p/q, donde p es un número entero y q es un número entero positivo. Si el número p/q es positivo, $p > 0$, si el número p/q es negativo, $p < 0$. Es evidente que la fracción p/q siempre se puede considerar irreductible, es decir, considerar los números $|p|$ y q como recíprocamente simples. Al número 0 le corresponde la representación p/q para $p = 0$ (y para cualquier q).

La teoría rigurosa y completa de los números *irracionales* (la demostración de sus operaciones y propiedades) se estudia en el curso de Matemáticas superiores.

Uno de los errores más típicos consiste en que los estudiantes consideran a menudo la racionalidad e irracionalidad de algún número, simplemente a base de su "aspecto exterior", suponiendo que una combinación compleja de números irracionales será también un número irracional. No obstante, esto no siempre es correcto. Por ejemplo, el número $[(\sqrt{3} + \sqrt{2})/(\sqrt{3} - \sqrt{2})] - 2\sqrt{6}$ no es irracional: un cálculo simple demuestra que es igual a 5. Así mismo, el número $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$, a pesar de que tiene un aspecto complejo e "irracional", en realidad es racional e igual a 2 (es muy fácil convencerse de esto al observar que las expresiones subradicales son cubos enteros).

Por lo tanto, para esclarecer el porqué uno u otro número es racional o irracional, es menester dar una demostración convincente.

Algunos problemas nos llevan precisamente a la solución de tal tipo de problemas.

5. *Demostrar que* $\log_4 18$ *es un número irracional.*

Debido a que $\log_4 18 = 1/2 + \log_2 3$ es suficiente demostrar que el número $\log_2 3$ es irracional. Supongamos lo contrario: este número es racional. Esto significa que $\log_2 3 = p/q$. Ya que $\log_2 3 > 0$, podemos considerar ambos números p y q como números enteros positivos. Valiéndonos de la definición del logaritmo escribiremos la igualdad $\log_2 3 = p/q$ en forma $2^p = 3^q$. Sin embargo, esta última igualdad es imposible para cualesquiera que sean los números enteros positivos p y q: a la izquierda de esta se encuentra un número *par* (pues $p > 0$) y a la derecha, uno *impar*. La contradicción obtenida concluye la demostración.

6. *Demostrar que los números* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *no pueden ser términos de una sola progresión aritmética.*

Esta afirmación parece a muchos estudiantes casi cierta. Unos dicen en seguida que los números irracionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ no pueden "guardar una misma distancia uno del otro". Otros "fundamentan" esta idea con cálculos: $\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 1{,}732 - 1{,}414 = 0{,}318$, y $\sqrt{5} - \sqrt{3} \approx 2{,}236 - 1{,}732 = 0{,}514$.

Observaremos, ante todo, que *los cálculos aproximados, sin tomar en cuenta su precisión, en las Matemáticas no son razonables*. Pero, aunque se estima la precisión de los cálculos (no es difícil hacerlo), esta demostración resulta incorrecta ya que demuestra que estos números no pueden componer tres términos *sucesivos* de una progresión aritmética. Sin embargo, no está demostrado, que éstos no puedan ser de tres términos no contiguos de una sola progresión aritmética.

Realizaremos una demostración a partir de lo absurdo, que será correcto. En una progresión aritmética con el primer término a_1 y la diferencia d sean

$$\sqrt{2} = a_k = a_1 + (k-1)d, \quad \sqrt{3} = a_m = a_1 + (m-1)d,$$
$$\sqrt{5} = a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Restando la primera de la segunda y la segunda de la tercera de estas igualdades, dividiendo después una de las proporciones obtenidas por otra, llegaremos a la igualdad

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{m-k}{n-m}. \tag{9}$$

El primer miembro de esta igualdad es un número racional, ya que m, k y n son números enteros. Denotemos este número, por abreviarlo, a través de r, y escribiremos la igualdad (9) en forma de $\sqrt{3} - \sqrt{2} = r(\sqrt{5} - \sqrt{3})$, de donde tenemos $r^2 \sqrt{15} - \sqrt{6} = (8r^2 - 5)/2$, al elevarlo previamente al cuadrado. El segundo miembro de esta última igualdad es también un número racional; lo anotaremos por s. Al elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad $r^2\sqrt{15}-\sqrt{6}=s$, obtendremos $\sqrt{10}=(15r^4-s^2+6)/(6r^2)$. Esta igualdad demuestra que $\sqrt{10}$ es un número racional, lo que no es correcto [1]. La contradicción obtenida demuestra que la igualdad (9) es imposible, es decir, los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ no pueden ser términos de una misma progresión aritmética.

7. *Determinar todos números enteros a y b para los cuales una de las raíces de la ecuación $3x^3+ax^2+bx+12=0$ es igual a $1+\sqrt{3}$.*

Según la definición, el número $1+\sqrt{3}$ es la raíz de la ecuación $3x^3+ax^2+bx+12=0$, si está verificada la ecuación

$$3(1+\sqrt{3})^3+a(1+\sqrt{3})^2+b(1+\sqrt{3})+12=0,$$

o sea, después de las simplificaciones y agrupación,

$$(4a+b+42)+(2a+b+18)\sqrt{3}=0.$$

Nos interesan solamente los números enteros a y b; en este caso los números $p=4a+b+42$ y $q=2a+b+18$ también serán enteros.

De tal modo, se debe determinar tales números enteros a y b para los cuales $p+q\sqrt{3}=0$. En este lugar, algunos estudiantes caen en un error lógico: consideran "absolutamente evidente" que la última igualdad es posible sólo en el caso en que $p=q=0$. No obstante, se ve que falta mucho para que los estudiantes puedan argumentar de una forma conveniente este hecho. Precisamente por ello vamos a demostrarlo.

En efecto, supongamos que la igualdad $p+q\sqrt{3}=0$ es válida cuando un número entero $q\neq 0$. Entonces, de aquí resultaría inmediatamente que $\sqrt{3}=-p/q$, lo que contradice a la irracionalidad del número $\sqrt{3}$. De esta manera, $q=0$. Pues, si $q=0$, entonces de la igualdad $p+q\sqrt{3}=0$ se desprende también que $p=0$.

Por consiguiente, el número $1+\sqrt{3}$ es la raíz de la ecuación $3x^3+ax^2+bx+12=0$ cuando, y sólo cuando

$$\begin{cases}4a+b+42=0,\\ 2a+b+18=0.\end{cases}$$

Este sistema tiene una solución única

$$a=-12,\ b=6.$$

[1] El hecho de que el número $\sqrt{10}$ es irracional se demuestra de forma análoga a cómo se demuestra la irracionalidad del número $\sqrt{2}$.

EJERCICIOS:

1. Enunciar y demostrar el criterio de divisibilidad por 11.

2. Demostrar que no hay ningún número entero positivo N con la suma de las cifras igual a 15, que sea cuadrado de un número entero.

3. Sea $p \geqq 5$ un número simple. Demostrar que el número p^2-1 se divide por 24.

4. Es sabido que los números p, $p+2$ y $p+4$ son simples. Hállese p.

5. Demostrar que si un número entero positivo termina con la cifra 7, éste no debe ser cuadrado de un numero entero.

6. ¿Cuántos factores 2 se tiene en el producto de todos los números enteros de 1 a 500 inclusive?

7. Hallar los numeros que sean simultáneamente términos de dos progresiones aritméticas.
2, 5, 8, . . . , 332 y 7, 12, 17, . . . , 157

8. ¿Para cuáles números enteros positivos n la fracción $(3n+4)/5$ es un número entero?

9. ¿Para cuales números enteros positivos n la fracción $(2n+3)/(5n+7)$ es reductible?

10. Hallar un número de cuatro cifras que satisfaga a las siguientes condiciones: la suma de los cuadrados de los términos de los extremos es igual a 13; la suma de los cuadrados de los términos medios es igual a 85; si del número buscado se sustrae 1089, resultará un número escrito con las mismas cifras que el buscado, pero a la inversa.

11. Hallar tal número de tres cifras $\overline{abc}$ que los números de cuatro cifras $\overline{abc1}$ y $\overline{2abc}$ satisfagan la igualdad $\overline{abc1}=3\cdot\overline{2abc}$.

12. Hallar todos los numeros de cinco cifras de la forma $\overline{34x5y}$ (x e y son cifras) que se dividen por 36.

13. Determinar para cuáles números enteros positivos n el número n^4+4 es compuesto.

14. Demostrar que si la suma $k+m+n$ de tres números enteros positivos se divide por 6, entonces $k^3+m^3+n^3$ también se divide por 6.

15. Demostrar que para cualquier número entero positivo n el número $\underbrace{\overline{1\ldots1}}_{2n \text{ veces}}-\underbrace{\overline{2\ldots2}}_{n \text{ veces}}$ es cuadrado de un número entero.

16. Hallar todas las soluciones con números enteros de la ecuación $2x^2-3xy-2y^2=7$.

17. Hallar todas las soluciones con números enteros de la ecuación $2x^2y^2+y^2-6x^2-12=0$.

18. Demostrar que entre cualesquiera dos números racionales no iguales a y b hay siquiera un número racional y un número irracional.

19. ¿Los números 10, 11, 12 pueden ser o no términos de una misma progresión geométrica?

20. Demostrar la irracionalidad del número tg 5°.

§ 3. MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

El método de inducción matemática o completa es un fuerte instrumento para las demostraciones matemáticas. Sin embargo, en la escuela secundaria este método no ha adquirido aún "pleno derecho de ciudadanía" y muchos graduados de la escuela conocen poco o nada del mismo. Mientras tanto, en el primer semestre del instituto los estudiantes se encuentran con demostraciones que se basan en el método de inducción matemática. Por este motivo es razonable aprender este método antes de ingresar en el instituto.

Además de esto, hablando en rigor, muchas demostraciones previstas en el curso escolar, son *deficientes*, puesto que no se aplicó el método de inducción matemática.

Recordemos, por ejemplo, *cómo se deduce la fórmula del término general de una progresión aritmética; anotemos las igualdades:*

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a_1 + d(1-1), \\ a_2 &= a_1 + d = a_1 + d(2-1), \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d = a_1 + d(3-1), \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d = a_1 + d(4-1), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

etc; por consiguiente, para cualquier n es válida la fórmula $a_n = a_1 + d(n-1)$. La deficiencia de esta demostración salta a la vista: hemos establecido una fórmula para algunos valores de n y sacamos inmediatamente la conclusión de que es válida para *cualquier* número entero n. De este razonamiento podemos "demostrar", por ejemplo, la siguiente afirmación: *para cualquier n entero el número $n^2 + n + 41$ es simple.* Efectivamente, para $n = 1, 2, 3, 4$ tenemos 43, 47, 53, 61 que son números simples. "Por consiguiente" la afirmación queda demostrada, aunque está claro que, por ejemplo, para $n = 41$ el número $n^2 + n + 41$ se divide por 41.

Este ejemplo puede sugerir en uno que para la comprobación hay que tomar no sólo los primeros cuatro o cinco valores de n, sino más, o mejor dicho, mucho más. Sin embargo, supongamos, que hayamos comprobado la fórmula para el término general de la progresión aritmética con un millón de términos. ¿Y de ahí se deduce que esta fórmula es válida para todas n? Claro está que no: pues, al dar un millón de pasos, sin mirar al frente, no sabemos qué va a suceder durante el paso siguiente. ¿Dónde está la garantía de que la fórmula no se alterará en este paso millonésimo? [1].

Por lo tanto, la imperfección de todas las demostraciones de semejante índole consiste no en "pocos" casos particulares tomados en consideración sino en "desviar la mirada hacia el futuro", en estar en la incertidumbre de lo que sucederá en el paso siguiente. Esta "mirada hacia el futuro" la prevé el método de inducción matemática.

La esencia de este método consiste en lo siguiente.

Supongamos que la afirmación a demostrar *queda comprobada en un caso particular*, digamos $n = 1$. Imaginémonos que podemos demostrar que de esta afirmación, que es válida para $n = k$, *se deduce siempre que es exacta también para el siguiente valor de n, es decir, cuando*

[1] A propósito, el número $n^2 + n + 41$ resulta simple para todos n, desde 1 hasta 39 incluso, y sólo el cuadragésimo paso nos indica que la afirmación enunciada anteriormente no es correcta.

¿Y dónde está la garantía de que en el caso de la fórmula para el término general de la progresión aritmética no procederá un caso análogo al paso millonésimo?

$n=k+1$. Entonces, podemos razonar así: hemos comprobado nuestra afirmación siendo $n=1$, pero, según lo demostrado, será válida también cuando $n=1+1=2$, y siendo válida para $n=2$ se cumple también para $n=2+1=3$, etc., es decir, *es válida para todos los valores de* n.

Sin embargo, ¿este último "etc." es también tan injusto como lo fue en los ejemplos anteriores? No es así, naturalmente; precisamente aquí estamos seguros de que cada vez podemos dar el paso siguiente por razón de que *es evidente* que la afirmación es justa para cualquiera que sea n, porque *se puede alcanzar a cualquier número entero por una cantidad finita de pasos empezando por* $n=1$ [1].

De esa manera, a fin de demostrar la validez de cierta afirmación, al ser cualquier número entero positivo n [2], es necesario demostrar *dos* cosas: primero, que es válida para $n=1$, y segundo, cada vez que se deduce que es válida para $n=k$, lo es también para $n=k+1$. En esto consiste *el método de inducción matemática*: demostramos que nuestra afirmación es válida cuando $n=1$ (*fundamento* de la inducción) luego supongamos que es válida para cierto $n=k$ (*hipótesis* de la inducción) y demostramos que en tal caso es válida para $n=k+1$ (*paso de la inducción*).

Apliquemos este método para la demostración de la fórmula del término general de la progresión aritmética. Esta afirmación tiene la forma

$$a_n=a_1+d(n-1).$$

Cuando $n=1$ esta afirmación es evidentemente válida, porque en el primer miembro se encuentra a_1 y en el segundo, $a_1+d(1-1)=a_1$. Supongamos que es válida para cualquier $n=k$, o sea, $a_k=a_1+d(k-1)$. Según la definición de la progresión aritmética $a_{k+1}=a_k+d$ y, valiéndose de la hipótesis de la inducción, obtenemos

$$a_{k+1}=a_1+d(k-1)+d=a_1+dk=a_1+d[(k+1)-1],$$

es decir, la afirmación demostrada es válida para $n=k+1$. Por consiguiente, la fórmula del término general es válida para cualquier n.

Vamos a subrayar que el método de inducción matemática es el método de demostración de las afirmaciones ya *asignadas* y no el de deducción de estas afirmaciones. Por ejemplo, de ninguna manera se puede obtener, según este método, la fórmula del término general, pero al hallarla por cualquier otro modo, por ejemplo, mediante una combinación es posible demostrarla aplicando el método de inducción matemática. Es así como hemos procedido anteriormente: las igualdades (1) nos llevaron a la suposición de cuál podría ser la fór-

---

[1] En la teoría rigurosa de los números enteros positivos esta última afirmación se toma por axioma.

[2] Habitualmente, se llaman naturales a los números enteros positivos 1, 2, 3, etc.; el número 0 no pertenece a los números naturales.

mula del término general después de que la hemos demostrado rigurosamente.

Con esto, claro está, el enunciado del método de combinación, método que permite obtener una u otra fórmula, una u otra afirmación, no es un elemento obligatorio para la demostración. Después de que se nos haya ocurrido una suposición, por algunas razones, podemos dejar de pensar en todo, sacar esta afirmación "del aire" y demostrarla recurriendo a la inducción.

Consideremos algunos ejemplos de demostración según la inducción.

1. *Demostrar que la suma de n términos de la progresión geométrica es igual a*

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \tag{2}$$

Para $n = 1$ la igualdad es válida ya que

$$S_1 = a_1 = \frac{a_1(q-1)}{q-1}.$$

Supongamos que la igualdad (2) es válida para $n = k$, es decir,

$$S_k = \frac{a_1(q^k - 1)}{q-1}. \text{ Entonces}$$
$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1(q^k-1)}{q-1} + a_1 q^k = \frac{a_1(q^{k+1}-1)}{q-1},$$

es decir, la igualdad (2) es válida para $n = k + 1$. Por eso, es válida para cualquier n.

2. *Demostrar que si n es un número entero positivo,* $4^n + 15n - 1$ *se divide por* 9.

Si $n = 1$, el número $4^n + 15n - 1$ es igual a 18, es decir, se divide por 9. Supongamos que $4^k + 15k - 1$ se divide por 9 y sea $n = k + 1$. Entonces

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18 =$$
$$= 4(4^k + 15k - 1) - 9(5k - 2).$$

Pero, según la hipótesis de la inducción, $4^k + 15k - 1$ se divide por 9, a causa de que el segundo miembro, y junto con éste el primer miembro de la igualdad se dividen por 9, lo que era necesario demostrar [1].

[1] Esta afirmación puede ser demostrada también sin recurrir al método de la inducción. En efecto, aplicando la fórmula del binomio de Newton, para $n \geqslant 2$ tenemos:

$$4n + 15n - 1 = (3+1)^n + 15n - 1 = 3^n + n\cdot 3^{n-1} + \ldots + C_n^2 \times$$
$$\times 3^2 + n\cdot 3 + 1 + 15n - 1 = 9(3^{n-2} + n\cdot 3^{n-3} + \ldots + C_n^2 + 2n),$$

de donde se deduce que el número dado se divide por 9.

3. *Demostrar que, si a y b son números positivos y $a<b$, para cualquier n natural es válida la desigualdad $a^n<b^n$.*

Para $n=1$, la afirmación es evidente. Supongamos que $a^k<b^k$; al multiplicar esta desigualdad por el número positivo a, obtenemos $a^{k+1}<ab^k$. Pero b es un número positivo debido a que $b^ka<b^kb$, es decir,

$$a^{k+1}<b^{k+1},$$

lo que fue necesario demostrar [1].

4. *Demostrar la fórmula de variaciones para el número*

$$A_m^n=m(m-1)\ \dots\ (m-n+1).$$

Consideremos que m es un número entero fijo; hagamos la demostración por inducción con respecto a n. Para $n=1$ el primer miembro es igual a A_m^1, lo que es igual a m, o sea, la fórmula es válida. Supongamos que

$$A_m^k=m(m-1)\ \dots\ (m-k+1).$$

Para dar un paso de la inducción establezcamos una relación

$$A_m^{k+1}=(m-k)\,A_m^k.$$

Para esto apuntemos todas las variaciones de m elementos según k y a cada una de éstas añadamos al final todos los elementos, uno a uno, los cuales no entraron en esta variación. De tal modo, de cada variación de m elementos, según k, obtenemos $m-k$ variaciones de m elementos según $k+1$. Por consiguiente, en total resultan $(m-k)\,A_m^k$ de tales variaciones. Sin embargo, es fácil ver que entre las variaciones obtenidas de esa manera se encuentran *todas* las variaciones de m elementos según $k+1$ encontrándose ésta una *sola* vez. Por lo tanto, $A_m^{k+1}=(m-k)\,A_m^k$.

Utilizando la relación recién demostrada y la hipótesis de la inducción, obtenemos que

$$\begin{aligned}A_m^{k+1}=A_m^k(m-k)=m(m-1)\dots(m-k+1)(m-k)=\\=m(m-1)\dots(m-k+1)[m-(k+1)+1],\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

Ahora veremos que valiéndonos del método de inducción no siempre es infalible empezar por $n=1$. Se puede, naturalmente, demostrar la afirmación para una tal $n=n_0$, emprender un paso de la inducción y obtener, como resultado, que esta afirmación es válida para todos los números enteros n, mayores o iguales al número inicial n_0. En este caso, naturalmente, la hipótesis de la inducción tiene respectivamente una forma modificada: supongamos precisamente que la afirmación a demostrar es válida para $n=k\geqslant n_0$. Finalmente,

[1] En el ejemplo 10 del § 8 se da otra demostración de este caso.

hay que comprender que para los valores de $n<n_0$ la afirmación puede ser tanto correcta como incorrecta; en todo caso no es posible sacar cualesquier conclusiones sobre su validez para $1\leqslant n<n_0$, al aplicar la demostración realizada mediante el método de inducción matemática.

Ambas etapas de demostración expuestas arriba, la elección del fundamento de la inducción y la argumentación del paso de la inducción, son igualmente importantes y absolutamente independientes. Aclaremos *si es válida o no*, por ejemplo, *la desigualdad* $2^n>n^2$, *donde* n *es un número entero positivo*. Claro está que para $n=1$ es válida. Comprobaremos la posibilidad de hacer un paso de la inducción. Supongamos que para $n=k$ tiene lugar la desigualdad $2^k>k^2$. Entonces, evidentemente, $2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^2$, y para fundamentar la posibilidad de dar un paso de la inducción es suficiente establecer la desigualdad $2k^2\geqslant(k+1)^2$ o bien $k^2-2k-1\geqslant 0$. Ahora bien, esta última desigualdad es sólo correcta cuando $k\geqslant 1+\sqrt{2}$, es decir, cuando $k\geqslant 3$. De tal modo, no hace falta tomar como fundamento de la inducción $n_0=1$: no podemos dar el primer paso de la inducción. Luego, es natural tomar como fundamento $n_0=3$. En este caso se puede dar el paso de la inducción, pero se comprueba inmediatamente que para $n=3$ la desigualdad $2^n>n^2$ es incorrecta, y por eso es imposible empezar la inducción. Solamente para $n=5$ esta desigualdad es válida, por lo que se puede tomar como fundamento de la inducción $n_0=5$; para $n\geqslant n_0$ tiene lugar también el paso de la inducción. Por consiguiente, *la desigualdad* $2^n>n^2$ *es correcta para todos los números enteros* $n\geqslant 5$. Para unos valores de n, menores que 5, esta desigualdad es también correcta ($n=1$), para otros, incorrecta ($n=2, 3, 4$).

5. *Demostrar que para* $n>1$ *es válida la desigualdad*

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)$$

Para $n=2$ obtenemos una desigualdad correcta $2<9/4$. Supongamos que $k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$. Entonces, según la hipótesis de la inducción, $(k+1)!=k!\,(k+1)<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)$. Si ahora demostramos que

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}, \tag{3}$$

entonces el teorema será demostrado, porque

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1},$$

es decir, nuestra desigualdad se cumple para $n=k+1$.

Evidentemente, la desigualdad (3) se puede escribir en la forma

$$2<\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}.$$

No obstante, según la fórmula del binomio de Newton

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}=1+(k+1)\frac{1}{k+1}+\ldots>2,$$

por consiguiente, esta desigualdad (3) es válida y la desigualdad inicial queda demostrada [1].

6. *Demostrar el teorema: si el producto $n\geqslant 2$ de unos números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual a n, es decir, si $x_1x_2\ \ldots\ x_n=1$, $x_1>0$, $x_2>0$, $\ldots$, $x_n>0$,* entonces $x_1+x_2+\ldots+x_n\geqslant n$.

Si $n=2$, hay que demostrar la afirmación: si $x_1x_2=1$, entonces $x_1+x_2\geqslant 2$. Pero, esto es evidente, ya que la media aritmética $\frac{x_1+x_2}{2}$ de dos números positivos es mayor o igual a la media geométrica $\sqrt{x_1x_2}=1$, o sea, $x_1+x_2\geqslant 2$. Además, la igualdad $x_1+x_2=2$ se logra sólo en el caso que $x_1=x_2=1$.

Valiéndose de la hipótesis de la inducción, tomemos cualesquier números positivos $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ que satisfagan la condición $x_1\ldots\ldots x_{k-1}x_kx_{k+1}=1$. Si cada uno de estos números es igual a 1, la suma $x_1+\ \ldots\ +x_k+x_{k+1}=k+1$, debido a que la desigualdad demostrada en este caso es válida.

Si esto no resulta así, entonces entre éstos se encontrará un número menor que 1 y un número mayor que 1. Admitamos que $x_k>1$, $x_{k+1}<1$. En este caso tenemos la igualdad

$$x_1\ldots x_{k-1}(x_kx_{k+1})=1.$$

Este es el producto de k números y por eso es aplicable la hipótesis de la inducción en cuya consecuencia podemos afirmar que

$$x_1+\ldots+x_{k-1}+x_kx_{k+1}\geqslant k.$$

Pero, entonces

$$x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}\geqslant k-x_kx_{k+1}+x_k+x_{k+1}=$$
$$=k+1+(x_k-1)(1-x_{k+1})>k+1,$$

porque $x_k-1>0$ y $1-x_{k+1}>0$, que es lo que se necesitaba demostrar.

Observemos que hemos establecido también el hecho de que el signo de la igualdad en la relación a demostrar es posible en el caso de que todas las $x_i=1$; si no todas las x_i son iguales a 1, en la

[1] Otra demostración de esta desigualdad, sin recurrir al método de inducción matemática, véase en el ejemplo 15 del § 8.

relación demostrada queda puesto el signo de la desigualdad rigurosa.

De este teorema resulta *una desigualdad generalizada entre la media aritmética y la media geométrica para $n \geqslant 2$ de los números positivos:*

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}, \quad x_1 > 0, \ \ldots, \ x_n > 0.$$

Efectivamente, designemos $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ por c, y x_i/c por y. Entonces $y_1 \ldots y_n = \frac{x_1 \ldots x_n}{c^n} = 1$. Según lo demostrado, $y_1 + \ldots + y_n \geqslant n$, es decir, $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{c} \geqslant n$, o sea, $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant c$, que es lo que se necesitaba demostrar.

Esta desigualdad se utiliza ampliamente para la demostración de otras desigualdades. Por ejemplo, si la aplicamos a los números $1, 2, \ldots, n$, obtenemos inmediatamente la desigualdad

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \ldots n} < \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n},$$

o bien, $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$, de donde $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Hemos demostrado esta desigualdad en el ejemplo 5 mediante la inducción. Esta nueva demostración es más fácil.

El método de inducción matemática encuentra aplicación vasta no sólo en Algebra. Se utiliza ampliamente para la demostración de las relaciones trigonométricas y afirmaciones geométricas.

7. *Demostrar que para cualquier número entero positivo n tiene lugar una desigualdad* $|\operatorname{sen} nx| \leqslant n\,|\operatorname{sen} x|$.

Para $n = 1$ la desigualdad es evidentemente válida. Suponiendo que $|\operatorname{sen} kx| \leqslant k \cdot |\operatorname{sen} x|$, demostramos que $|\operatorname{sen}(k+1)x| \leqslant (k+1) \cdot |\operatorname{sen} x|$. En realidad, utilizando la desigualdad $|\cos kx| \leqslant 1$, tenemos que

$$|\operatorname{sen}(k+1)x| = |\operatorname{sen} kx \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos kx| \leqslant |\operatorname{sen} kx| \cdot |\cos x| + |\operatorname{sen} x| \cdot |\cos kx| \leqslant |\operatorname{sen} kx| + |\operatorname{sen} x| \leqslant k \cdot |\operatorname{sen} x| + |\operatorname{sen} x| = (k+1) \cdot |\operatorname{sen} x|.$$

Por consiguiente, la desigualdad requerida es válida.

8. *Demostrar que para cualquier número entero positivo n es válida la igualdad*

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} = 2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6} \sin\frac{n+1}{6}\pi. \tag{4}$$

Cuando $n = 1$ obtenemos la igualdad correcta

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}.$$

Al aplicar la hipótesis de la inducción, consideremos la suma del primer miembro de la igualdad (4) siendo $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}+\ \ldots+\operatorname{sen}\frac{k\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{3}=\\
&\qquad=2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}+\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{3}=\\
&\qquad=2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}+2\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}\cos\frac{(k+1)\pi}{6}=\\
&\qquad=2\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}\left[\operatorname{sen}\frac{k\pi}{6}+\cos\frac{(k+1)\pi}{6}\right]=\\
&\qquad=2\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{(k-1)\pi}{6}=\\
&\qquad=2\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}\cos\frac{(k-1)\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Para finalizar la demostración es suficiente notar que

$$\begin{aligned}
\cos\frac{(k-1)\pi}{6}&=\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{(k-1)\pi}{6}\right]=\operatorname{sen}\frac{(4-k)\pi}{6}=\\
&=\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{(4-k)\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\frac{(k+2)\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la fórmula (4) queda demostrada.

9. *En un plano hay trazadas n rectas de las cuales dos no son paralelas y tres no pasan por un mismo punto. Determinar entre cuántas partes queda dividido el plano con estas rectas.*

Al trazar los dibujos requeridos, podemos anotar la siguiente correlación entre el número n de rectas que reúnen las condiciones del problema y el número a_n de partes en las que estas rectas dividen el plano:

$$\begin{aligned}
n&=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\\
a_n&=2,\ 4,\ 7,\ 11,\ 16,\ \ldots
\end{aligned}$$

Es fácil ver [1] que en calidad del término general de la sucesión a_n conviene emplear la expresión

$$a_n=1+\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (5)$$

La fórmula (5) se comprueba fácilmente para los primeros valores de n, sin embargo, de ahí no se deduce que da respuesta al problema planteado. Esta afirmación requiere una demostración complementaria aplicando el método de inducción matemática.

Al prescindir de "la selección" recién efectuada, demostremos que n rectas (de las cuales dos no son paralelas y tres no pasan por un mismo punto) dividen el plano en a_n partes, donde a_n se calcula según la fórmula (5).

[1] Para esto hay que notar que, a juzgar por los primeros términos, la sucesión a_n es tal que las diferencias a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, ... forman una progresión aritmética; hay que aprovecharse del ejemplo 9 del § 7

Es evidente que cuando $n=1$, la fórmula (5) es válida. Aplicando la hipótesis de la inducción, examinemos $k+1$-ésima recta que satisface la condición del problema. Eliminando de éstas arbitrariamente k rectas, podemos decir que dividen el plano en $1+k(k+1)/2$ partes. Ahora adicionamos $(k+1)$-ésima recta. Dado que no es paralela a ninguna de las rectas precedentes, intersecará, por consiguiente, todas las k rectas. Ya que no pasará por ninguno de los puntos de intersección de las rectas precedentes, pasará entonces por un fragmento $k+1$, en los que ya fue dividido el plano, y dividirá en dos partes cada uno de estos fragmentos, es decir, resultrarán añadidos $k+1$ fragmentos. Por consiguiente, el número total de fragmentos en los cuales se divide el plano por $k+1$ rectas es:

$$1+\frac{k(k+1)}{2}+k+1=1+\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=a_{k+1}.$$

Con esto queda terminada la demostración.

Como se deduce de todo lo expuesto, el método de inducción matemática se aplica a la demostración de las afirmaciones dependientes de un número entero positivo n. Sin embargo, muchas afirmaciones, en cuyo enunciado n no participa en absoluto, pueden sustituirse por afirmaciones equivalentes que con evidencia dependen de n. Demostremos, por ejemplo, que:

10. *En cualquier instante del tiempo la cantidad de hombres en la Tierra que se han dado un número impar de apretones de manos, es par.*

Para hacer la demostración enumeraremos cada apretón de manos en un orden cronológico. Es claro que nuestra afirmación es equivalente a lo siguiente: cualquiera que sea el número n, después de un apretón de manos con el número n, la cantidad de hombres que se han dado un número impar de apretones de manos es par.

Esta afirmación depende de n y la demostraremos por el método de inducción. Por abreviar el asunto llamaremos "malos" a los hombres que se han dado el número impar de apretones de manos, y a los demás, "buenos".

Después de haberse dado el apretón de manos resultaron dos hombres "malos", o sea, un número par. Inmediatamente que se de el apretón de manos con el número k, el número de hombres "malos" será par, y después de eso, el apretón de manos será el número $k+1$. Con esto pueden presentarse tres casos: se dan un apretón de manos a) los dos "buenos", b) los dos "malos", c) un "bueno" y un "malo".

En el primer caso los dos "buenos" suman a su número par de apretones de manos un apretón más, o sea, se hacen "malos"; en el segundo, los dos "malos" llegan a ser "buenos", y en el tercero, el "bueno" se hace "malo" y el "malo" resulta ser "bueno". De esa manera, la cantidad de hombres "malos" aumenta en dos ó disminuye en dos, ó no cambia, es decir, en cualquier caso es par. La aseveración queda demostrada.

Los ejemplos examinados demuestran con qué éxito se emplea el método de inducción matemática en los problemas más diversos. Al mismo tiempo, no se puede exagerar el alcance del método de inducción matemática: hay muchos problemas para cuya resolución parece que se impone el método de inducción, no obstante, la prueba de aplicar este método choca con dificultades insuperables.

Probemos, por ejemplo, valiéndonos de la inducción, demostrar la desigualdad:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Para $n=1$ esta desigualdad tiene la forma $\frac{1}{9}<\frac{1}{4}$, es decir, es válida. Supongamos que la desigualdad a demostrar es válida para $n=k$:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Para $n=k+1$ el primer miembro es igual a

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+3)^2}=\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}\right]+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Según la hipótesis de la inducción, la suma entre los corchetes es menor que $\frac{1}{4}$, por eso

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+3)^2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Es claro, que de la desigualdad obtenida de ninguna manera se puede deducir que su primer miembro es menor que $1/4$. De tal modo, según la inducción, la demostración queda sin solución. Sin embargo, esta desigualdad se demuestra fácilmente por otro método, como fue demostrado en el ejemplo 13 del § 8.

EJERCICIOS:

Demostrar las formulas por el método de inducción matemática:

1. a) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

3. El número de permutaciones P_n de n elementos, donde $n>1$,

$$P_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

4. La fórmula de Moivre

$$[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi).$$

5. a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx = \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{n+1}{2}x \cdot \operatorname{sen}\dfrac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}, \ x \neq 2k\pi.$

b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+h) + \ldots + \operatorname{sen}(x+nh) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{nh}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\dfrac{n+1}{2}h}{\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}},$

$h \neq 2k\pi.$

6. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n}.$

Demostrar las desigualdades:

7. $n! > 2^{n-1}$, si $n > 2$.

8. $2^n \cdot n! < n^n$, si $n > 2$.

9. $(n!)^2 < \left[\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n.$

10. $(2n)! < \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^{2n}.$

11. $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} + \dfrac{a_n}{a_1} \geqslant n$, si $a_1 > 0, \ \ldots, \ a_n > 0$.

12. $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c} > a^a b^b c^c$, si a, b, c, son los números enteros positivos distintos.

13. Demostrar que para cualquier número entero n, el número $n^7 - n$ se divide por 7.

14. Demostrar que para cualquier número entero n, el número $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ se divide por 133.

15. Demostrar la igualdad

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \ldots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2}.$$

16. Demostrar que para cualesquier números positivos a y b y cualquier número natural n es válida la desigualdad $(a+b)^n < 2^n\ (a^n + b^n)$.

17. Demostrar que para cualquier número $a > 0$ es válida la desigualdad

$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}} < \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ (en el primer miembro la cantidad de radicales es arbitraria).

18. Demostrar que para todos los números enteros positivos n y k es válida la igualdad

$$C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - \ldots + (-1)^k C_{n+1}^k = (-1)^k C_n^k.$$

(Según la definición se considera que $C_m^0 = 1$ para cualquier número m y $C_p^q = 0$, si $q > p$).

§ 4. NÚMEROS REALES

En este párrafo nos detendremos solamente en dos problemas: el valor absoluto del número real y la raíz aritmética.

En la mayoría de los casos los estudiantes contestan correctamente a la pregunta: ¿a qué magnitud es igual el valor absoluto de un número real concreto? No obstante, cuando se trata de la *definición* del valor absoluto, entonces surgen a menudo contestas absurdas: el valor absoluto de un número es "el número sin signo", o bien, es "el número con signo positivo", esto es, "el valor positivo del número". Mientras tanto, a los estudiantes se les exige una definición exacta. El valor absoluto de un número a (se designa por $|a|$) se define del modo siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0, \\ 0, & \text{si } a = 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Al valor absoluto de un número se le llama con frecuencia su *módulo*.

Esta definición permite calcular el valor absoluto de cualquier número real. Para esto hay que valerse del primer, segundo o tercer renglón de la definición en dependencia de que el número concreto dado sea positivo, negativo o igual a cero.

Por ejemplo, a la pregunta: *¿a qué iguala el valor absoluto del número* -3?, la respuesta completa debe ser así: $-3<0$; por lo tanto, según el tercer renglón de la definición, el valor absoluto del número -3 es igual $a-(-3)=3$, es decir, $|-3|=3$.

Notando que para $a=0$ es válida la igualdad $|a|=a$, podemos escribir más brevemente la definición de valor absoluto [1]:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

De la definición del módulo se sigue inmediatamente que $|a| \geqslant 0$ para cualquier número a. Esto es un *teorema*, aunque muy sencillo. Para la demostración consideremos dos casos:

a) $a \geqslant 0$. Entonces $|a| = a \geqslant 0$, lo que era necesario demostrar.

b) $a<0$. Entonces $|a| = -a$. Pero, $-a>0$, ya que $a<0$, o sea $|a|>0$, lo que era necesario demostrar.

Conviene comprender bien que la expresión $|a|$ es siempre positiva o igual a cero, pero no es una definición del valor absoluto sino su corolario; en la definición nada se dice del signo de la expresión $|a|$.

El fácil observar que $|a|$ significa distancia en sentido geométrico, es decir, la longitud del segmento en el eje numérico (número positivo o cero) desde el punto a hasta cero. Además, se puede demos-

[1] Véase también el ejercicio 1.

trar, considerando ciertos casos, que $|b-a|$ es la distancia entre los puntos a y b (véase el ejercicio 5).
Estas notaciones geométricas son muy útiles para la resolución de los problemas, y en los casos muy sencillos permiten en seguida dar la solución prescindiendo del método ordinario que consideremos a continuación.

Por ejemplo, la ecuación $|x-1|=2$ se resuelve geométricamente de la manera siguiente: su resolución son los puntos que se encuentran a la distancia 2 desde el punto 1, es decir, $x_1=3$, $x_2=-1$. Es análoga la resolución de la desigualdad $|x+2|\leqslant 5$. Aquí son los puntos que distan del punto -2 a una distancia no mayor que 5, o sea, son los puntos del intervalo [1] $-7\leqslant x\leqslant 3$.

Para la resolución de problemas son muy útiles las siguientes propiedades del valor absoluto:

Para cualesquier números reales a y b

I. $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,

II. $|a-b|\geqslant||a|-|b||$,

III. $|ab|=|a||b|$,

IV. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

Se demuestran más fácilmente las propiedades III y IV. Esto se hace, por ejemplo, por selección ordinaria de todas las combinaciones posibles de los símbolos a y b y se ofrece al lector. Notemos además un corolario importante de la propiedad III: $|a|^2=a^2$ para cualquier número a (en efecto, al tomar $a=b$ obtendremos $|a|^2=$ $=|a^2|$, lo que es igual a a^2, ya que $a^2\geqslant 0$).

Para la demostración de la propiedad I notemos que

$$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

y

$$(|a|+|b|)^2=|a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2=a^2+2|ab|+b^2,$$

pero $ab\leqslant|ab|$, por lo que

$$|a+b|^2\leqslant(|a|+|b|)^2.$$

Pues, de dos números no negativos $|a+b|$ y $|a|+|b|$ el menor es aquel cuyo cuadrado es menor; lo que demuestra la propiedad I. La otra demostración se basa en la selección de los casos posibles.

Análogamente puede ser demostrada la propiedad II o deducida de la propiedad I. Precisamente, por la propiedad I

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

[1] Aquí y más abajo no usamos términos corrientes como "intervalo abierto" (para el conjunto de números x tales como $a<x<b$), "intervalo cerrado" (para $a\leqslant x\leqslant b$) e "intervalo semiabierto" (para $a\leqslant x<b$ y $a<x\leqslant b$) designando cada uno de tales conjuntos por "intervalo" (a veces, "segmento"). El sentido correspondiente lo tiene el término "intervalo infinito".

de donde $|a|-|b|\leqslant|a-b|$. Así mismo se demuestra que $|b|-|a|\leqslant|a-b|$. Pero, una de las dos expresiones, ya sea $|a|-|b|$, o $|b|-|a|$ no es negativa, y, por consiguiente, coincide con su valor absoluto, así que $||a|-|b||\leqslant|a-b|$, lo que era necesario demostrar.

Como regla general, los problemas relacionados con el valor absoluto se resuelven aplicando el procedimiento ordinario que consiste en "la eliminación del módulo": según la definición, se consideran todos los casos de distribución de los signos entre las expresiones puestas bajo el signo del módulo; en cada uno de estos casos cada módulo "se abre", es decir, se sustituye por la misma expresión o por la expresión que le es contraria por el signo; después de esto resulta un problema en el que falta el signo del módulo [1]. Casi todos los estudiantes conocen este procedimiento. No obstante, durante su aplicación práctica cometen dos errores gravísimos.

El primer error está relacionado con la comprensión incorrecta (o bien, puede ser con la aplicación incorrecta) de la definición del módulo: en los casos en que bajo el signo del módulo queda puesto no x sino alguna otra expresión $f(x)$, como regla se encuentran precisamente tales casos, en lugar de una igualdad correcta

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{si } f(x)\geqslant 0, \\ -f(x), & \text{si } f(x)<0, \end{cases} \tag{2}$$

$f(x)\neq x$

escriben a veces "la igualdad"

$$\boxed{|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{si } x\geqslant 0, \\ -f(x), & \text{si } x<0, \end{cases}}$$

lo que es, obviamente, incorrecto.

El segundo error proviene de la comprensión insuficiente de la esencia lógica del mismo método. Efectivamente, el análisis de algunos casos, digamos, en cuanto a la resolución de una ecuación o una desigualdad, significa que en cada una de éstas buscamos una solución solamente dentro de un campo reducido, a saber: dentro del campo determinado por las condiciones del caso concreto. Después de hallar soluciones en el caso concreto, debemos cada vez tomar sólo áquellas que entran en el campo requerido, o sea, que satisfacen las condiciones de este caso concreto. Al mismo tiempo, es de observar a menudo, cómo los estudiantes eligen acertadamente algunos casos, resuelven ecuaciones en cada caso concreto, mientras que las condiciones de estos casos quedan en suspenso y tienen el aspecto de

[1] Sin embargo, es conveniente comprender, que este procedimiento, por sí mismo, no es la resolución del problema; después de su aplicación pueden tener lugar serias dificultades en cada uno de los casos considerados. La finalidad de este procedimiento consiste en anular las dificultades relacionadas con el módulo, o sea, plantear el problema en que no existe el signo del módulo.

respuesta formal: si es necesario considerar el caso, yo lo hago — piensa uno — pero, para qué, esto no me importa.

Por lo demás, a veces ambos errores arriba mencionados se deben a la falta de atención, a la despreocupación, aunque por estas causas éstos no dejan de ser errores. En lo referente a los problemas donde se requiere analizar numerosos casos, el cuidado de los que resuelven problemas, su reconcentración y atención tienen una importancia trascedental.

Pasamos a considerar los ejemplos.

1. *Resolver la ecuación* $x^2-2|x|-3=0$.

Consideremos dos casos para liberarse del módulo:

a) $x\geqslant 0$ y b) $x<0$.

En el caso a) obtenemos la ecuación $x^2-2x-3=0$ cuyas raíces son $x_1=3$, $x_2=-1$. Pués, según la condición a), sólo son necesarias las $x\geqslant 0$, por la razón de que en la ecuación inicial la raíz será $x=3$.

En el caso b) la ecuación tomará un aspecto $x^2+2x-3=0$; las raíces de esta ecuación serán: $x_1=1$, $x_2=-3$. Pero, en el caso dado, de acuerdo con la condición b), nos interesan solamente las raíces negativas, es decir, $x=-3$.

De tal modo, la ecuación inicial tiene las raíces $x_{1,2}=\pm 3$[1].

2. *Resolver la ecuación* $|x^2-x-6|=x+2$.

Consideremos sucesivamente dos casos:

a) $x^2-x-6<0$. En este caso tenemos una ecuación $-x^2+x+$ $+6=x+2$ cuyas raíces $x_1=2$, $x_2=-2$. Ahora es necesario verificar si x_1 y x_2 satisfacen la condición a). Para esto es suficiente poner estos valores en el primer miembo de la desigualdad $x^2-x-6<0$. Después de esta sustitución obtenemos las desigualdades numéricas $-4<0$ y $0<0$. La primera de ellas es válida, mientras que la segunda, no; por eso solamente 2 es la raiz de la ecuación inicial.

b) $x^2-x-6\geqslant 0$. En este caso tenemos la ecuación $x^2-x-6=$ $=x+2$ cuyas raíces son: $x_1=4$, $x_2=-2$. Ya que ambos valores de x satisfacen la condición b), 4 y -2 son raíces de la ecuación inicial.

De tal manera, la ecuación inicial tiene tres raíces: -2, 2 y 4.

En el análisis atento de esta solución a veces surge la siguiente pregunta: ¿primeramente hemos dejado de lado el valor de $x=-2$ y luego lo hemos hallado de nuevo, de tal modo que al fin y al cabo este valor resultó ser la raíz de la ecuación inicial? ¿Y cómo hay que comprender esto? El asunto radica en lo siguiente: en el primer caso, al omitir el valor de $x=-2$, no hemos afirmado en absoluto que éste no es una raíz de la ecuación inicial. Hemos afirmado solamente que este valor no conviene a las limitaciones impuestas para x en la condición del caso a). Naturalmente, nada impide al mismo

[1] Notemos que por la sustitución $y=|x|$ la ecuación dada puede ser reducida a la ecuación cuadrática.

valor satisfacer la condición de uno u otro caso y ser la raíz de la ecuación inicial.

En el problema siguiente, muchos estudiantes cometen el primero de los errores graves, mencionados arriba.

3. *Resolver la desigualdad*

$$|x^2+3x|+x^2-2\geqslant 0.$$

Según la definición del módulo tengamos que considerar dos casos:

$$\text{a) } x^2+3x\geqslant 0, \quad \text{b) } x^2+3x<0.$$

Mientras tanto, muchos estudiantes consideran los casos $x\geqslant 0$ y $x<0$. En el primero de éstos, como resulta, el signo del módulo se puede quitar; para $x\geqslant 0$ es también válida la desigualdad $x^2+3x\geqslant 0$; pero, para $x<0$, nada se puede decir del signo de x^2+3x lo que no impide a los autores de tal solución anotar, para $x<0$, la igualdad $|x^2+3x|=-x^2-3x$ o hasta $|x^2+3x|=x^2-3x$.

Resolviendo acertadamente el caso a) obtenemos la desigualdad $2x^2+3x-2\geqslant 0$ cuyas soluciones son $x\leqslant -2$ y $x\geqslant 1/2$. La condi-

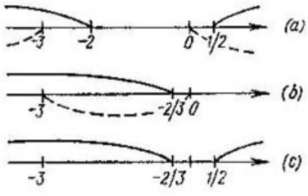


Fig. 1

ción de a) se satisface cuando $x\leqslant -3$ y $x\geqslant 0$. De estas soluciones hay que elegir aquellas que satisfagan la condición a), o sea, tomar sólo $x\leqslant -3$ y $x\geqslant 1/2$. Es más fácil representar en el dibujo (fig. 1, *a*). Como resultado, obtendremos la solución (en el caso a)):

$$x\leqslant -3 \text{ y } x\geqslant 1/2.$$

En el caso b) tenemos la desigualdad $-3x-2\geqslant 0$ o bien $x\leqslant -2/3$. La condición b) se satisface para $-3<x<0$, porque de todos los valores de $x\leqslant -2/3$ quedan sólo los valores de x del intervalo de $-3<x\leqslant -2/3$ (fig. 1, *b*).

Uniendo las soluciones halladas en los casos a) y b) (fig. 1, *c*) obtenemos: $x\leqslant -2/3$ y $x\geqslant 1/2$.

4. *Resolver la desigualdad* $2|3+5x-2x^2|<1-x$. Consideremos dos casos:

a) $3+5x-2x^2\geqslant 0$. En este caso la desigualdad se escribirá así: $2(3+5x-2x^2)<1-x$, o bien, después de una simplificación, $4x^2-11x-5>0$. La última desigualdad es válida para

$x > (11+\sqrt{201})/8$ y para $x < (11-\sqrt{201})/8$. Sin embargo, van a satisfacer la desigualdad inicial solamente aquellos valores de x que satisfacen también la condición del caso considerado, o sea, la desigualdad $3+5x-2x^2 \geqslant 0$. Resolviendo esta desigualdad, obtendremos que ésta se satisface cuando $-1/2 \leqslant x \leqslant 3$.

Ahora tenemos que escoger de los intervalos hallados $x > (11+ +\sqrt{201})/8$ y $x < (11-\sqrt{201})/8$ aquellos valores de x que entran

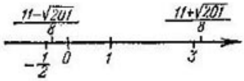


Fig 2

simultáneamente en el intervalo $-1/2 \leqslant x \leqslant 3$. Es más fácil hacerlo valiéndose de un eje numérico. Marquemos en el eje numérico los puntos $(11-\sqrt{201})/8$, $(11+\sqrt{201})/8$, $-1/2$ y 3 (fig. 2). La figura muestra claramente que ninguno de los valores de x que satisface la desigualdad $x > (11+\sqrt{201})/8$ entra en el intervalo $-1/2 \leqslant \leqslant x \leqslant 3$, es decir, entre estos valores de x no existe ninguna solución para la desigualdad inicial. Entre $x < (11-\sqrt{201})/8$ se hallarán valores que entran en este intervalo: éstos serán todos los x del intervalo

$$-1/2 \leqslant x < \frac{11-\sqrt{201}}{8}.$$

Estos valores de x son la solución de la desigualdad inicial en el caso considerado.

b) $3+5x-2x^2 < 0$. En el presente caso tenemos una desigualdad $2(2x^2-5x-3) < 1-x$, o bien, $4x^2-9x-7 < 0$. Resolviendo esta desigualdad obtendremos que

$$\frac{9-\sqrt{193}}{8} < x < \frac{9+\sqrt{193}}{8}.$$

Sin embargo, de estos valores de x hay que escoger sólo aquellos valores que satisfagan simultáneamente la desigualdad $3+5x-2x^2 < < 0$, la solución de la cual son dos expresiones: $x < -1/2$ y $x > 3$. En la figura 3 se ve que la solución de la desigualdad inicial en el caso considerado será el intervalo

$$\frac{9-\sqrt{193}}{8} < x < -\frac{1}{2}.$$

De tal modo, la solución de la desigualdad inicial consta de dos intervalos:

$$\frac{9-\sqrt{193}}{8} < x < -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{11-\sqrt{201}}{8}.$$

Es fácil ver que estos intervalos se unen en uno solo, así que la solución definitiva de esta desigualdad es el intervalo

$$\frac{9-\sqrt{193}}{8}<x<\frac{11-\sqrt{201}}{8}.$$

Hagamos unas observaciones sobre cómo realizar dibujos semejantes a los de las figuras 2 y 3. Lo más esencial radica, al disponer en el eje los puntos correspondientes a los números dados, en la necesidad

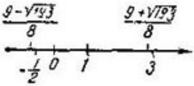


Fig. 3

de observar cuidadosamente que no se altere la sucesión de estos números. Por lo tanto, en particular, si los números considerados se diferencian poco uno de otro, no hace falta aglomerarlos, sino disponerlos de modo que el dibujo resulte lo más claro posible, aunque pierda un poco la correlación con la escala. Para disponer los números en la sucesión requerida, tendremos que recurrir frecuentemente a los cálculos aproximados y, a veces, hasta demostrar especialmente desigualdades numéricas.

Por ejemplo, en la figura 2 el número $(11-\sqrt{201})/8$ se coloca más a la derecha que $-1/2$. Esto se deduce de la desigualdad $-1/2<(11-\sqrt{201})/8$ que se demuestra fácilmente. Así mismo, el número $(11+\sqrt{201})/8$ se encuentra a la derecha del número 3, porque $3<(11+\sqrt{201})/8$ (pues, $\sqrt{201}>14$ y, por consiguiente, el numerador de la fracción del segundo miembro de la desigualdad es mayor que 25).

Consideremos unos ejemplos en los que bajo el signo del módulo figuran unas cuantas expresiones. En tales ejemplos, para liberarse de los módulos se debe examinar, en principio, todas las combinaciones de signos posibles de estas expresiones. En el primero de ellos procederemos así y en los dos siguientes, mostraremos cómo se puede proceder de otro modo.

5. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} |x^2-2x|+y=1, \\ x^2+|y|=1. \end{cases}$$

Aquí son posibles las siguientes cuatro combinaciones de signos de las expresiones que están bajo el signo del módulo:

a) $x^2-2x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$; b) $x^2-2x\geqslant 0,\ y<0$;
c) $x^2-2x<0,\ y\geqslant 0$; d) $x^2-2x<0,\ y<0$.

Vamos a considerarlas consecuentemente.

a) En este caso tenemos un sistema:

$$\begin{cases} x^2-2x+y=1, \\ x^2+y=1, \end{cases}$$

de lo que resulta con facilidad que $x=0$, $y=1$. Este par satisface la condición a) y, por consiguiente, es la solución del sistema inicial.

b) En este caso el sistema tiene una forma:

$$\begin{cases} x^2-2x+y=1, \\ x^2-y=1, \end{cases}$$

de la que, sumando las ecuaciones, obtenemos que $x^2-x=1$, o sea, $x_{1,2}=(1\pm\sqrt{5})/2$. La segunda ecuación permite calcular los valores correspondientes de y, procediendo, sin embargo, más fácilmente; en efecto, x_1 y x_2 satisfacen la igualdad $x^2-x=1$ y, comparándola con la segunda ecuación, obtenemos: $y=x$, es decir, $y_{1,2}=(1\pm\sqrt{5})/2$.

Comprobamos la condición b). Ya que $y_1<0$, el par x_1, y_1 no la satisface, y por eso lo omitimos. Luego, ya que y_2 satisface la condición b) y para x_2 es válida la desigualdad $x^2-2x\geqslant 0$ (porque $x_2<0$), entonces en este caso tenemos la solución: $x=(1-\sqrt{5})/2$, $y=(1-\sqrt{5})/2$.

c) En este caso obtenemos un sistema:

$$\begin{cases} -x^2+2x+y=1, \\ x^2+y=1, \end{cases}$$

en donde, restando la primera ecuación de la segunda, obtendremos que $x^2-x=0$, o sea, $x_1=0$, $x_2=1$, $y_1=1$, $y_2=0$. El par x_1, y_1 no satisface la condición c) y x_2, y_2 la satisface, por consiguiente, el par $x=1$, $y=0$ será la solución del caso que examinamos.

d) En este caso tenemos un sistema:

$$\begin{cases} -x^2+2x+y=1, \\ x^2-y=1, \end{cases}$$

de donde, al sumar las ecuaciones, obtenemos que $x=1$ y, por consiguiente, $y=0$. Con todo, este par no satisface la condición d), y por esa razón ha de ser omitido, aunque en realidad es la solución del sistema inicial. Aquí la situación es la misma que en el ejemplo 2, donde se han dado las explicaciones necesarias.

De tal modo, el sistema tiene tres soluciones:

$$x_1=0,\ y_1=1;\ x_2=(1-\sqrt{5})/2,\ y_2=(1-\sqrt{5})/2;$$
$$x_3=1,\ y_3=0.$$

6. *Resolver la desigualdad*

$$|x-1|-|x|+|2x+3|>2x+4.$$

En este problema, al examinar completamente todas las combinaciones de signos, tendríamos que considerar 8 casos posibles. No obstante, en realidad se puede evitar tanta cantidad de casos y limitarse sólo a cuatro. Esto se consigue mediante un procedimiento especial: "el método de intervalos".

Marquemos en el eje numérico aquellos valores de x para los cuales cada expresión que está bajo el signo del valor absoluto, se convierte en cero: estos puntos son $-3/2$, 0 y 1. De tal modo, todo el eje se divide en cuatro intervalos [1]:

$$x<-3/2,\ -3/2\leqslant x<0,\ 0\leqslant x<1,\ 1\leqslant x.$$

Examinemos por turno cada una de estas expresiones.

a) $x<-3/2$. En este caso $2x+3<0$, $x<0$ y $x-1<0$, es decir, la desigualdad inicial toma un aspecto $-x+1+x-2x-3>2x+4$. Esta se satisface para $x<-3/2$; en combinación con la condición a) obtenemos que $x<-3/2$ es la solución de la desigualdad inicial.

b) $-3/2\leqslant x<0$. En este caso $2x+3\geqslant 0$, $x<0$ y $x-1<0$ con que la desigualdad inicial toma el aspecto $-x+1+x+2x+3>2x+4$, es decir, $0>0$.

Algunos estudiantes perciben con perplejidad esta desigualdad: ¿y cómo solucionarla? En realidad no hace falta resolver nada, porque para cualquier valor de x del intervalo $-3/2\leqslant x<0$ la desigualdad inicial se transforma en una desigualdad incorrecta $0>0$ y por eso en el caso b) no tiene soluciones.

c) $0\leqslant x<1$ En este caso $2x+3\geqslant 0$, $x\geqslant 0$ y $x-1<0$; por consiguiente, la desigualdad inicial se reduce a la desigualdad $-x+1-x+2x+3>2x+4$. Esta se satisface cuando $x<0$, sin embargo, esta relación es incompatible con la condición c): entre los valores de x del intervalo $0\leqslant x<1$ no hay soluciones para la desigualdad inicial.

d) $1\leqslant x$. En este caso la desigualdad toma el aspecto $x-1-x+2x+3>2x+4$ es decir, $2>4$; en otras palabras, entre $x\geqslant 1$ no hay valores que satisfagan la desigualdad inicial.

Pues, la desigualdad presentada es válida para $x<-3/2$.

Según lo expuesto arriba es evidente que la función

$$y=|x-1|-|x|+|2x+3|$$

[1] Notemos que estos intervalos pueden expresarse de otra manera: por ejemplo, $x\leqslant -3/2$, $-3/2<x<0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $1<x$; en la solución nada variará, como lo verá el lector; nuestra elección fue hecha de acuerdo con la definición del valor absoluto, dada en la forma (1).

se puede escribir en la forma que ya no utiliza el símbolo del valor absoluto:

$$y=\begin{cases} -2x-2, & \text{si } x<-3/2, \\ 2x+4, & \text{si } -3/2\leqslant x<0, \\ 4, & \text{si } 0\leqslant x<1, \\ 2x+2, & \text{si } 1\leqslant x. \end{cases}$$

Es muy útil saber expresar las funciones, que contienen el signo del módulo, de esta forma.

El problema siguiente, además de dos módulos, presenta también otras dificultades para su resolución, aunque éstas no son difíciles, pero sí tienen un carácter excepcional. Entre tanto, nos hemos encontrado ya con tales dificultades en el ejemplo 6 (caso b)).

7. *Resolver la ecuación*

$$|x^2-9|+|x^2-4|=5.$$

Siguiendo el método del problema 6, consideremos tres casos [1]:

$$\text{a) } x^2<4; \quad \text{b) } 4\leqslant x^2\leqslant 9; \quad \text{c) } 9<x^2.$$

En el primer caso $|x^2-9|=9-x^2$, $|x^2-4|=4-x^2$, o sea,

$$9-x^2+4-x^2=5,\ x^2=4,\ x_{1,2}=\pm 2.$$

Pero, según la condición del primer caso, x^2 ha de ser menor que 4; por consiguiente, los valores de $x_{1,2}=\pm 2$ no son convenientes y en este caso la ecuación dada no tiene raíces.

En el segundo caso $|x^2-9|=9-x^2$, $|x^2-4|=x^2-4$, o sea, $9-x^2+x^2-4=5$, o bien, $5=5$. Precisamente, esta situación deja perplejos a muchos: "¡la ecuación se dio por perdida!" En realidad no ocurrió nada de extraordinario: a condición de que $4\leqslant x^2\leqslant 9$, la ecuación inicial es simplemente equivalente a la identidad $5=5$, es decir, se satisface con cualquier valor de x. De tal modo, cualquier valor de x que satisfaga la condición $4\leqslant x^2\leqslant 9$, es la solución de la ecuación. Ahora no nos queda otra cosa que resolver esta doble desigualdad. Y como resultado obtenemos: $-3\leqslant x\leqslant -2$; $2\leqslant x\leqslant 3$.

El tercer caso se considera análogamente al primero; aquí no aparecen nuevas soluciones.

En definitiva, las raíces de la ecuación inicial llenan dos intervalos del eje numérico aunque tal situación parece asombrosa en lo que se refiere a las ecuaciones (a diferencia de las desigualdades).

En este aspecto no es menos interesante el ejemplo siguiente, donde las soluciones constituyen un intervalo infinito más un punto.

8. *Resolver la ecuación*

$$2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1.$$

[1] Aquí, las condiciones de los casos pueden también escribirse de otro modo, por ejemplo: $x^2<4$, $4\leqslant x^2<9$, $9\leqslant x^2$; naturalmente, el resultado definitivo será el mismo.

Consideremos dos casos.

a) $x+2\geqslant 0$. En este caso obtenemos la ecuación $2^{x+1}-1=$ $=|2^{x+1}-1|$, ya que $2^{|x+2|}=2^{x+2}$ y $2^{x+2}-2^{x+1}=2^{x+1}$. Esta ecuación se satisface, evidentemente, cuando $2^{x+1}-1\geqslant 0$, o bien, cuando $x+1\geqslant 0$, es decir, $x\geqslant -1$. Estos valores de x satisfacen la condición a) y son las raíces de nuestra ecuación.

b) $x+2<0$. En este caso, después de unas transformaciones fáciles y la sustitución de 2^{x+1} por y obtenemos la ecuación

$$2y^2+2y+2y\,|y-1|=1.$$

Se puede resolver esta ecuación considerando dos casos para liberarse del módulo, al igual que en los ejemplos precedentes. Pero se puede comprender también que para $y\geqslant 1$ el primer miembro es mayor que 1, y por eso tenemos que buscar sólo las raíces de $y<1$; y para $y<1$ obtenemos la ecuación $4y=1$, de donde se deduce que $y=1/4$ por razón de que $x=-3$.

Uniendo las soluciones obtenidas en los casos a) y b) llegamos al resultado: $x=-3$ y $x\geqslant -1$.

Los ejemplos examinados demuestran de manera evidente que el concepto de un valor absoluto no presenta dificultades de principio durante las resoluciones de los problemas, porque un método común, como es la consideración de unos casos, siempre permite liberarse del signo del valor absoluto. Naturalmente, el análisis de diferentes casos es un método único para la resolución de los ejemplos con módulos.

Las particularidades de un problema concreto permiten frecuentemente hallar otras vías de resolución, más cortas y originales. Por lo tanto, al ver en la condición del problema el signo del valor absoluto, no hace falta considerar "de paso" unos casos; esta posibilidad de solución no desaparecerá nunca, pero es muy útil pensar primeramente en el problema planteado, tratar de escoger otros métodos.

De vez en cuando es posible hallar un método muy específico que sirve de origen inmediato para resolver, por ejemplo, el problema siguiente.

9. *Resolver la desigualdad* $x^2+x+|x|+1\leqslant 0$.

Efectivamente, se puede recurrir a un método común. Pero, si escribimos esta desigualdad en la forma de $|x|\leqslant -(x^2+x+1)$, se ve entonces que no puede tener soluciones. En realidad, $|x|\geqslant 0$ para todos los valores de x y el segundo miembro de la última desigualdad siempre es rigurosamente negativo, porque $x^2+x+1=$ $=(x+1/2)^2+3/4>0$.

Y en el problema siguiente la ventaja del método especial es más sorprendiente: el método común exige cálculos fastidiosos con los números irracionales, no obstante, este procedimiento con bastante facilidad permite hallar rápidamente la solución.

10. *Resolver la desigualdad*

$$|x^2-3x-3|>|x^2+7x-13|.$$

Como es sabido, una desigualdad con los miembros no negativos, al elevarlos al cuadrado, se sustituye por una equivalente (véase el § 10). Por lo tanto, nuestra desigualdad es equivalente a la siguiente:

$$|x^2-3x-3|^2>|x^2+7x-13|^2.$$

Pero, $|a|^2=a^2$, y por eso se puede anotar esta desigualdad como

$$(x^2-3x-3)^2>(x^2+7x-13)^2.$$

Ahora, trasladando todo al segundo miembro y utilizando la fórmula de diferencia entre los cuadrados, obtenemos la desigualdad:

$$2(x^2+2x-8)\cdot 10(x-1)<0,$$

o sea, que es lo mismo,

$$(x+4)(x-2)(x-1)<0.$$

La desigualdad obtenida se resuelve fácilmente aplicando el llamado "método de intervalos" (véase el § 10); sus soluciones y, por consiguiente, las soluciones de la desigualdad inicial son:

$$x<-4 \quad \text{y} \quad 1<x<2.$$

Terminando de examinar el concepto sobre el valor absoluto, consideremos un problema cuya complejidad radica en la presencia de un *parámetro*. Sin embargo, como vamos a ver, la presencia de este parámetro hace muy complejo el problema, que exige, además del conocimiento del método y de un buen procedimiento de solución, mucho cuidado en los cálculos.

11. *Para cada número real a resolver la ecuación* $x|x+1|+a=0$.

Consideremos dos casos: $x<-1$ y $x\geqslant -1$. En el primer caso la ecuación toma la forma $x(-x-1)+a=0$, o bien, $x^2+x-a=0$. Aquí resultó una ecuación de segundo grado con el parámetro a. Nos interesan sólo aquellas raíces reales de esta ecuación que satisfagan la condición $x<-1$. Claro está que las raíces de la ecuación dependen del parámetro a: con algunos valores de a las raíces pueden resultar reales, con otros, imaginarias. Por esto, es necesario señalar antes aquellos valores de a, para cada uno de los cuales las raíces de la ecuación $x^2+x-a=0$ son reales. La condición de las raíces reales consiste en que el discriminante no es negativo: $D=1+4a\geqslant 0$. En otras palabras, para $a\geqslant -1/4$ las raíces de la ecuación son reales:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2},$$

y con otros valores de a, o sea, cuando $a<-\frac{1}{4}$ las raíces de esta ecuación son imaginarias. Por consiguiente, para $a<-\frac{1}{4}$ (examinando ahora el primer caso) la ecuación inicial no tiene soluciones.

De tal modo, nos queda por hallar las soluciones de la ecuación inicial, en el caso que consideramos, cuando $a \geqslant -1/4$. Con esto, de los números hallados x_1 y x_2 tendremos que tomar aquellos que satisfagan la condición $x<-1$.

Para esto hay que resolver las desigualdades:

$$\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}<-1 \quad \text{y} \quad \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}<-1.$$

La primera desigualdad se reduce con facilidad a la expresión $1+\sqrt{1+4a}<0$, es decir, que no se cumple para ningún valor de a. La segunda desigualdad se reducie a $1<\sqrt{1+4a}$ y se cumple, como se ve fácilmente cuando $a>0$.

De esta manera, para $a>0$ la ecuación inicial tiene una raíz real $x=(-1-\sqrt{1+4a})/2$ que satisface la condición del caso examinado cuando $x<-1$, y no hay ninguna raíz para $a \leqslant 0$.

En el segundo caso tenemos la ecuación $x^2+x+a=0$. La condición de las raíces reales $D=1-4a \geqslant 0$ demuestra que esta ecuación tiene raíces reales sólo cuado $a \leqslant 1/4$, y para $a>1/4$ (en el segundo caso ahora considerado) la ecuación inicial no tiene soluciones. Nos queda hallar los valores de a para $a \leqslant 1/4$ en los cuales las raíces de la ecuación $x^2+x+a=0$ satisfacen la condición del caso $x \geqslant -1$, es decir, hay que resolver las desigualdades:

$$\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2} \geqslant -1 \quad \text{y} \quad \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2} \geqslant -1.$$

La primera desigualdad se reduce a la forma $1+\sqrt{1-4a} \geqslant 0$ y, por consiguiente, se cumple con todos los valores *posibles* de a, es decir, cuando $a \leqslant 1/4$. La segunda desigualdad se reduce a la expresión $\sqrt{1-4a} \leqslant 1$ y se cumple, como es fácil ver, con todos los valores positivos posibles de a, es decir, cuando $0 \leqslant a \leqslant 1/4$.

De tal modo, para $0 \leqslant a \leqslant 1/4$ la ecuación inicial tiene dos raíces reales en la expresión $x \geqslant -1$:

$$x'=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}, \quad x''=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

(cuando $a=1/4$ estas raíces coinciden) y cuando $a<0$ tiene solamente una sola raíz $x=(-1+\sqrt{1-4a})/2$; cuando $a>1/4$ en la expresión $x \geqslant -1$, la ecuación inicial no tiene raíces.

Haremos el resumen, enunciando los resultados de dos casos en conjunto:

para $a < 0$ $x = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$;

para $0 \leqslant a \leqslant 1/4$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

(para $a=0$ tenemos $x_1 = x_3$; para $a = 1/4$ tenemos $x_2 = x_3$);

$$\text{para } a > 1/4 \qquad x = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

En vez de hacer una observación sobre la coincidencia de las raíces se podría escribir ambos casos, $a=0$ y $a=\frac{1}{4}$, en diferentes líneas:

para $a=0$ $x_1 = -1$, $x_2 = 0$;

para $a = 1/4$ $x_1 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -1/2$.

El concepto de raíz aritmética está relacionado estrechamente con el valor absoluto del número real. Vamos a plantear la pregunta: *¿ a qué es igual* $\sqrt{x^2}$? En otras palabras, ¿cómo se puede escribir esta expresión sin el signo del radical? La contesta más frecuente es la siguiente: $\sqrt{x^2} = x$ para cualquier x. No es difícil convencerse de que la contesta es incorrecta; en realidad, para $x = -2$, por ejemplo, tenemos que

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2.$$

También se contesta frecuentemente que $\sqrt{x^2} = \pm x$. Esto tampoco es correcto, porque $\sqrt{x^2}$, en correspondencia con su definición, representa un número completamente determinado y no dos números: $+x$ y $-x$.

Para comprender esta cuestión, recordemos las definiciones y hechos fundamentales que se refieren al concepto de la raíz.

Definición 1. *El número b se llama raiz cuadrada del número a si* $b^2 = a$.

De conformidad con esta definición se tienen dos afirmaciones: "b es la raíz cuadrada de a" y "$b^3 = a$" que significan lo mismo.

Para subrayar una particularidad esencial de esta definición vamos a compararla, por ejemplo, con la definición del cuadrado de un número: al cuadrado del número b se le llama producto de este número por sí mismo. Esta definición vale mucho porque da una *regla* para hallar el número b^2. En contradicción con esto, la definición de la raíz cuadrada no es tan buena, ya que no da una regla para calcular la raíz cuadrada; tampoco está claro si siempre puede extraerse la raíz cuadrada de un número dado a y cuántas raíces pueden extraerse, es decir, cuántos diferentes números b pueden satisfacer la ecuación $b^2=a$. Por consiguiente, lo primero que hay que hacer es examinar el problema sobre la existencia y la cantidad de raíces cuadradas del número dado a.

La resolución de este problema se realiza mediante tres afirmaciones:

1) *Si el número a es positivo, existen exactamente dos raíces cuadradas de a; con esto, una de éstas es positiva y la otra, negativa.*

2) *Si $a=0$, existe una sola raíz cuadrada de a, la que es igual a cero.*

3) *Si el número a es negativo, no existe ninguna raíz cuadrada de a*[1].

En la escuela secundaria se toma sin demostración la existencia de la raíz positiva del número positivo [2]. Las demás afirmaciones de los puntos 1) — 3) pueden ser demostradas fácilmente [3].

Examinemos ahora el número positivo a. De este número se pueden extraer dos raíces cuadradas. Para diferenciarlas entre ellas se introduce un concepto de la raíz aritmética.

Definición 2. *Llámase raíz cuadrada aritmética de un número a la raíz cuadrada positiva de este número positivo.*

La raíz cuadrada aritmética de a se designa con el símbolo $\sqrt{a}$. Bajo la expresión $\sqrt{0}$ se entiende siempre una raíz única, es decir, cero.

De tal modo, la afirmación de que "b es la raíz cuadrada aritmética de a" es equivalente a un conjunto de dos afirmaciones: "$b^2=a$" y "$b\geqslant 0$"; con esto se supone que a es un número positivo o cero. Si b es una raíz cuadrada aritmética de a, entonces la segunda raíz de a es $-b$.

De tal manera, $\sqrt{x^2}$, de que hemos hablado al principio, no es simplemente un número cualquiera que elevado al cuadrado da x^2, sino que es indispensablemente un *número positivo o cero*.

Entonces, ¿a qué es igual $\sqrt{x^2}$?

Para que la consideración sea más cómoda supongamos que $x\neq 0$, ya que en el caso $x=0$ todo está claro: $\sqrt{0^2}=\sqrt{0}=0$. Según la definición 2 sabemos que $\sqrt{x^2}$ representa un número positivo que elevado al cuadrado da x^2. Es fácil ver que los números x y $-x$ (y solamente ellos) tienen la última propiedad. Pero, el número positivo, está claro, es sólo único y este número positivo es, precisamente, igual a $\sqrt{x^2}$.

---

[1] Recordemos que en este párrafo sólo estamos examinando los números reales.

[2] Con esto se comunica también un método que permite calcular esta raíz con un grado de precisión arbitrario, dado con anterioridad. Es necesario conocer y saber aplicar este método para calcular la raíz de un número concreto dado.

[3] Dejamos que el lector mismo haga demostraciones.

De tal modo, *si x es positiva, entonces* $\sqrt{x^2}=x$, *si* $-x$ *es positiva (es decir, x es negativa), entonces* $\sqrt{x^2}=-x$. En ese caso se puede componer la tabla siguiente:

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, \text{ si } x>0, \\ 0, \text{ si } x=0, \\ -x, \text{ si } x<0. \end{cases}$$

Si aplicamos la designación del valor absoluto, se puede anotar brevemente así:

$$\sqrt{x^2}=|x| \tag{3}$$

para cualquier x (real).

Lo antes dicho tiene gran importancia al realizar transformaciones algebraicas y trigonométricas. El olvido de la propiedad expuesta lleva a veces a errores graves (véase el ejemplo 1, § 1, Parte II).

Si en las expresiones algebraicas que llevan radicales, no todas las letras designan números no negativos, pues cuando se realicen unas transformaciones idénticas es siempre necesario aplicar la fórmula (3).

12. *Simplificar la expresión* $(a>0, a\neq 1)$

$$\frac{a^{-x}}{\sqrt{5}}\left[2a^{2x}-a^x(2a^x-1)\right]\left[1-\left(\frac{\sqrt{5}\,a^x}{2a^x-1}\right)^{-2}\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\sqrt{(a^x-2)^2-5}-(a^{2x}+4)\left[a^{2x}+4(1-a^x)\right]^{-1/2}+$$
$$+4a^x\left[1+(a^x+2)(a^{2x}-4a^x+4)^{-1/2}\right]\times$$
$$\times\left[a^x+2+(a^{2x}-4a^x+4)^{1/2}\right]^{-1}$$

y determinar para cuáles valores de x esta espresión es igual a 1.

Ante todo, vamos a reducir esta expresión a una forma más simple, utilizando las transformaciones idénticas algebraicas. Valiéndose de las definiciones de las potencias fraccionarias y negativas, se puede reducir el primer sumando a la forma a^x, y el tercero, a la siguiente:

$$\frac{4a^x}{\sqrt{a^{2x}-4a^x+4}};$$

claro está, al realizar varios cálculos. Por consiguiente, se puede escribir la expresión propuesta como sigue:

$$a^x-\frac{a^{2x}-4a^x+4}{\sqrt{a^{2x}-4a^x+4}}=a^x-\sqrt{(a^x-2)^2}.$$

El mismo lector tiene la posibilidad de realizar las transformaciones formales necesarias.

Ya sabemos que es imposible escribir la última expresión como $a^x-(a^x-2)=2$; ya que la diferencia a^x-2 no es obligatorio que sea positiva, entonces la solución de que "la expresión propuesta es igual a 2 para todos los valores de x", es gravemente errónea. La solución verdadera tiene la representación siguiente: "la expresión inicial se transforma en la forma $a^x - |a^x - 2|$".

Nos queda hallar aquellos valores de x para los cuales

$$a^x - |a^x - 2| = 1.$$

Si $a^x \geqslant 2$, esta ecuación no tiene, por lo visto, soluciones. Si $a^x < 2$, entonces, para determinar x tenemos la ecuación $a^x - (2 - a^x) = 1$, es decir, $a^x = \frac{3}{2}$. Notemos que con este valor de x se cumple la condición $a^x < 2$, por razón de que hallamos el valor buscado $x = \log_a 3/2$.

EJERCICIOS:

1. Si son válidas o no las siguientes igualdades:

a) $|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0, \\ -a, & \text{si } a \leqslant 0; \end{cases}$

b) $|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{si } a \leqslant 0. \end{cases}$

2. Demostrar que. a) $|x| = |-x|$; b) $x \leqslant |x|$.

3. Demostrar que si $|a| = 0$; entonces $a = 0$.

4. ¿Qué se puede decir de los números $a_1, \ldots, a_n$, si se sabe que $|a_1| + \ldots + |a_n| = 0$?

5. Demostrar que la distancia entre los puntos a y b del eje numérico es igual a $|b - a|$.

6. Resolver las desigualdades: a) $|x - a| < b$; b) $|x - a| \geqslant b$, donde a y $b > 0$ son los números dados; dar una interpretación geométrica de las soluciones.

Resolver las ecuaciones y las desigualdades:

7. $|3x - 4| = 1/2$.
8. $||x + 1| + 2 = 2$.
9. $||x - 1| + 2| = 1$.
10. $|x - 3| > -1$.
11. $|34 + 21x - x^2| \leqslant -1$.
12. $|4 - 3x| \leqslant 1/2$.
13. $|x| + x^3 = 0$
14. $|x^2 - 1| + x + 1 = 0$.
15. $|2x - x^2 - 3| = 1$.
16. $(1 + x)^2 \geqslant |1 - x^2|$.
17. $|x^2 - 6x + 8| \leqslant 4 - x$.
18. $|x^2 + 4x + 3| > x + 3$.
19. $|x - 1 - x^2| \leqslant |x^2 - 3x + 4|$.
20. $|x^3 - 1| \leqslant x^2 + x + 1$.
21. $|x^2 - 4x + 2| = (5x - 4)/3$.
22. $(x + 1)(|x| - 1) = -1/2$.
23. $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0$.
24. $9^{-|x|} = (1/2)^{|x+1| + |x-1|}$
25. $(x + 4)\, 3^{1 - |x-1|} - x = (x + 1)|3^x - 1| + 3^{x+1} + 1$.
26. $|x - 1| \geqslant (x + 1)/2$.
27. $|x - 2| < x/2$
28. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.
29. $x^2 - |3x + 2| + x \geqslant 0$.

30. $x^2+2|x+3|-10\leq 0$.

31. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$$

Resolver las ecuaciones para cada número real a:

32. $x^2+|x|+a=0$.

33. $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0$.

34. $9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0$.

35. Demostrar que si los números x, y son de un mismo signo, entonces

$$\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|$$

36. Simplificar las expresiones: $\sqrt[4]{x^2}$; $\sqrt{x^4}$; $\sqrt[6]{x^6}$; $\sqrt[3]{x^3}$; $\sqrt{x^8 y}$; $\sqrt[5]{x^{15}y^{10}}$.

37. ¿Es siempre correcta la igualdad $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$?

38. Simplificar la expresión

$$\sqrt{9-6a+a^2}+\sqrt{9+6a+a^2}, \text{ si } a<-3.$$

39. Simplificar la expresión para $1<x<2$:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}.$$

40. Simplificar la expresión:

$$\sqrt{(1-\cos\alpha\cos\beta)^2-\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}.$$

§ 5. NÚMEROS COMPLEJOS

La definición lógica de los números complejos y de las reglas para las operaciones con éstos, es una de las dificultades fundamentales de este tema.

Por ejemplo, los números complejos "se definen" a menudo así: "al número complejo se le llama número de la expresión $a+bi$, donde a y b son números reales e $i=\sqrt{-1}$". En realidad, esta definición es incomprensible, porque el signo del radical $\sqrt{\ }$ se utiliza (véase el § 4) para designar la raíz cuadrada aritmética de un número real positivo. ¡Y qué significa $\sqrt{-1}$, no se sabe!

Los estudiantes pueden formular *las definiciones* principales de los números complejos así:

Llámase número complejo a la expresión $a+bi$, donde a y b son números reales e i es un símbolo. Dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ se consideran iguales, según la definición, si $a=c$ y $b=d$.

Partiendo de la definición, las operaciones algebraicas con los números complejos se efectúan según las mismas reglas que sirven para las operaciones con números reales; con todo eso hay que sustituir siempre i^2 por -1.

Luego conviene presentar las fórmulas de adición, sustracción, multiplicación y división que se deducen de esta definición.

Hay que hacer la observación de que la definición citada arriba por nosotros, no es absolutamente exacta. En efecto, sería muy útil si cada estudiante se familiarizara con la teoría de los números complejos, lógicamente rigurosa. Por lo tanto, consideramos útil exponer aquí uno de los conceptos rigurosos posibles de esta teoría.

Para construir los números complejos vamos a considerar las expresiones formales de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales. Denominando *formales* a estas *expresiones*, subrayamos que *no les damos ningún sentido*, no planteamos un problema sobre su significación, no pensamos cómo estas expresiones están relacionadas con algo práctico. Las entendemos como *puramente formales*: para obtener tal expresión hay que tomar dos números reales, diferentes o iguales, a y b y con ayuda de los símbolos auxiliares $+$ e i componer de estos números la expresión de la forma impuesta. Por ejemplo, estas expresiones serán:

$$2+3i,\ 2+(-3i),\ 2+0i,\ 0+1i,\ (-\pi)+\sqrt{3}i.$$

Tampoco hablamos aquí del sentido de los símbolos auxiliares $+$ e i. Aquí el signo $+$ *no es un signo de adición*, como siempre lo habíamos considerado. ¡En efecto, hemos sabido adicionar sólo números reales! Por esto, aquí el signo $+$ es simplemente un signo formal, su sentido único es que con su ayuda se forman expresiones formales que ahora estamos analizando.

En vista de que estas expresiones son objetos absolutamente nuevos, tenemos que, ante todo, ponernos de acuerdo de cómo distinguirlas una de otra, en cuáles casos considerar idénticas e *iguales* dos de estas expresiones. Subrayamos que *nos acordaremos* de esto no deducir de unos axiomas o teoremas precedentes sino dar una *definición*. En cuanto a estas expresiones, no tenemos ningunos teoremas porque los introducimos recientemente y el asunto de cómo hay que distinguirlas es cosa nuestra.

De esa manera, demos la definición siguiente.

Definición 1. *Vamos a considerar que las expresiones* $a+bi$ *y* $c+di$ *son iguales cuando y sólo cuando* $a=c$ *y* $b=d$ *simultáneamente. La igualdad de las expresiones* $a+bi$ *y* $c+di$ *la escribiremos como* $a+bi=c+di$.

Después de esta definición podemos decir que cuando dos expresiones son diferentes: $a+bi$ y $c+di$ son *distintas* si se cumple aunque sea una de las dos desigualdades $a\neq c$, $b\neq d$.

El problema siguiente consiste en aprender a operar con estas expresiones: adicionarlas, multiplicarlas, etc. Somos nosotros mismos los que tenemos que determinar cómo hacerlo.

Vamos a basarnos en la misma idea de la operación aritmética: el adicionar o el multiplicar dos números significa que, según una regla, hay que construir un tercer número, llamado suma o producto, respectivamente. De esa manera, para aprender a adicionar o multiplicar nuestras expresiones, hace falta imponer unas reglas según las cuales es necesario realizarlo.

Definición 2. *A la suma de las expresiones* $a+bi$ *y* $c+di$ *la llamaremos expresión* $(a+c)+(b+d)i$. *Designemos la suma de las expresiones* $a+bi$ *y* $c+di$ *por medio de*

$$(a+bi)+(c+di).$$

Notemos que en la última expresión el signo $+$ entre los paréntesis tiene un nuevo sentido: es el signo de adición de las expresiones formales.

Definición 3. *Al producto de las expresiones* $a+bi$ *y* $c+di$ *vamos a llamar expresión* $(ac-bd)+(ad+bc)i$. *Designemos el producto de las expresiones* $a+bi$ *y* $c+di$ *por*

$$(a+bi)(c+di).$$

Ahora introduzcamos una terminología corriente.

Las expresiones $a+bi$, *que se diferencian según la regla expuesta en la definición 1 que se adicionan según la definición 2 y se multiplican según la definición 3, se denominan números complejos.*

Aquí surge una pregunta natural: ¿por qué hemos introducido el término "números complejos" no al principio, sino ahora mismo, después de tres definiciones precedentes? Sería incorrecto hacerlo antes. El hecho consiste en que en la base de las expresiones $a+bi$ se pueden también elaborarse otras teorías, en nada parecidas a la teoría de los números complejos. Y la teoría que vaya a elaborarse, dependerá precisamente de las reglas con las cuales vamos a operar con estas expresiones. Por lo tanto, cuando hablamos de los números complejos, no se trata simplemente de un conjunto de expresiones del tipo $a+bi$, sino que suponemos siempre que para sumarlas y multiplicarlas se debe proceder de conformidad con las definiciones 2 y 3.

Con esto termina la definición de los números complejos, y ahora estamos en condiciones de poder desarrollar la teoría. Así, por ejemplo, se puede definir *la diferencia* de los números complejos $a+bi$ y $c+di$ como un número complejo, el cual en la suma con $c+di$ da $a+bi$, y demostrar que esta diferencia $(a+bi)-(c+di)$ es igual a $(a-c)+(b-d)i$; luego se puede definir *el cociente* de la división de $a+bi$ entre $c+di$ como un número complejo, cuyo producto por $c+di$ es igual a $a+bi$, y demostrar que para $c+di\neq 0+0i$ este cociente $\dfrac{a+bi}{c+di}$ es igual a

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Se puede dar también una interpretación geométrica de los números complejos, etc.

Pero, queda no aclarada una cuestión de principio: ¿cómo están relacionados los números reales y los complejos? Vamos a considerar las expresiones formales de la forma $a+0i$. Calculemos (según las definiciones 2 y 3) la suma y el producto de los dos números siguientes:

$$(a+0i)+(b+0i)=(a+b)+(0+0)i=(a+b)+0i,$$
$$(a+0i)(b+0i)=(ab-0\cdot 0)+(a\cdot 0+0\cdot b)=ab+0i.$$

Vemos que para hallar la suma de los números complejos $a+0i$ y $b+0i$ se pueden sumar los números reales a y b y luego añadir al resultado $0i$, es decir, formar una expresión $(a+b)+0i$. El caso es análogo cuando se refiere al producto.

De tal modo, las operaciones con los números complejos de la forma $a+0i$ se efectúan esencialmente como si se tratase de números reales. Por eso, cada número complejo $a+0i$ es natural identificarlo con el número real a.

Como resultado de esta identificación obtenemos que el conjunto de números reales forma parte del conjunto de números complejos, ya que cualquier número real es a la vez un número complejo. Por lo tanto, en lo ulterior, los números a y $a+0i$ no se diferencian.

Examinemos aún más el número $0+1i$. Este número juega un papel fundamental en toda la teoría, el cual, para *abreviar* el concepto, se consigna simplemente por i. Después de esto se ve que el número complejo $a+bi$, que se entendía hasta ahora como una expresión formal, se le puede comunicar el sentido siguiente: es la suma del número complejo a (es decir, $a+0i$) y del producto del número complejo b (es decir, $b+0i$) por el número complejo i (es decir, $0+1i$). Efectivamente,

$$(a+0i)+(b+0i)(0+1i)=(a+0i)+[(b\cdot 0-0\cdot 1)+(b\cdot 1+0\cdot 0)i]=$$
$$=(a+0i)+(0+bi)=(a+0)+(0+b)i=a+bi.$$

Por consiguiente, de estos razonamientos hemos dado un sentido al signo $+$ en la expresión formal $a+bi$: se le puede entender como el signo de adición de los números complejos.

Ahora es preciso aclarar la propiedad fundamental del número complejo i. Es fácil comprobar que

$$i^2=i\cdot i=(0+1i)(0+1i)=-1+0i=-1.$$

De tal modo, se puede actuar con los números complejos según las mismas reglas que se aplican para las operaciones con los números reales, en este caso hay que sustituir siempre i^2 por -1.

La igualdad $i^2=-1$ se puede interpretar como sigue: el número i es la raíz de la ecuación $x^2+1=0$. Precisamente este problema consistente en la solución de la ecuación $x^2+1=0$ que no tiene raíces reales, sirvió de motivo para crear la teoría de los números complejos.

A causa de la divergencia existente en la terminología citaremos aquí unas cuantas definiciones.

El número complejo $a+bi$ *se llama real (o material), si* $b=0$.

Ejemplos de números reales: 1; -3; 0.

El número complejo $a+bi$ *se llama imaginario, si* $b\neq 0$.

Ejemplos de números imaginarios: $2i$; $1-i$; $\sqrt{7}-i\sqrt{3}$.

El número complejo $a+bi$ *se llama puramente imaginario, si* $a=0$.

Ejemplos de números puramente imaginarios: $-2i$; πi; 0. Aquí hay que señalar que el número 0 es real y puramente imaginario, pero no es un número imaginario.

A la parte real del número complejo $a+bi$ *se le llama número* a.

A la parte imaginaria del número complejo $a+bi$ *se le llama número* b.

Durante la solución de muchos problemas se utiliza a menudo *la interpretación geométrica* de los números complejos como *puntos* de un plano.

En este caso, juega un papel importante *el concepto de módulo del número complejo* $z=a+bi$, *que se determina por la igualdad*

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{1}$$

Es evidente que el módulo es un número real no negativo que se determina, según esta fórmula, unívocamente para cada número complejo $z=a+bi$. El módulo tiene un simple sentido geométrico: $|z|$ es, evidentemente, la distancia desde el origen de las coordenadas hasta el punto correspondiente al número z. En esta interpretación geométrica se basa una gran cantidad de problemas.

1. *En un plano está dado un punto que representa el número complejo* $z=a+bi$. *¿Dónde se encuentran los puntos*: a) $z+1$; b) $z-2+i$?

a) Ya que el número $z+1=(a+1)+bi$, entonces el punto que presenta el número complejo $z+1$, tendrá las coordenadas $(a+1, b)$, es decir, la ordenada ha quedado la misma y la abscisa ha aumentado en 1. Por lo tanto, el punto $z+1$ resulta del punto z desplazándose a la derecha en 1 (fig. 4).

b) Ya que el número $z-2+i=(a-2)+(b+1)i$, entonces el punto que presenta el número complejo $z-2+i$, tendrá las coordenadas $(a-2, b+1)$, es decir, la abscisa ha disminuido en 2 y la ordenada ha aumentado en 1. Por lo tanto, el punto $z-2+i$ resulta del punto z desplazándose a la izquierda en 2 y hacia arriba en 1 (fig. 4).

2. *¿Dónde se encuentran en el plano los puntos para los cuales* $|z| = 1$?

Según la interpretación geométrica del módulo de un número complejo, todos los puntos que representan los números complejos con $|z| = 1$, se encuentran a una misma distancia, igual a 1, desde el origen de las coordenadas, o sea, se hallan (según la definición) en una circunferencia de radio 1 con el centro en el origen de las coordenadas.

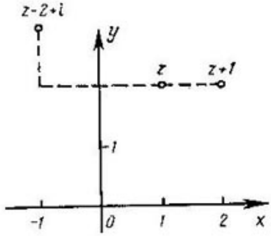


Fig. 4

3. *Sea* $|z| = 2$. *¿Dónde se encuentran los puntos* $3z$?

Los puntos z que satisfacen la condición $|z| = 2$, se hallan en una circunferencia de radio 2 con el centro en el origen de las coordenadas (véase el problema anterior). El punto $3z$ se encuentra en el mismo radio que el punto z, pero dista del origen de las coordenadas a una distancia tres veces mayor que el punto z. (¿Por qué? Hagan el dibujo.) Por eso, los puntos $3z$, donde $|z| = 2$, se encuentran en una circunferencia de radio 6 con el centro en el origen de las coordenadas.

4. *Sea* $|z| = 1$. *¿Dónde se encuentran los puntos* $1 + 2z$?

Los puntos z que satisfacen la condición $|z| = 1$, se encuentran en una circunferencia de radio 1 con el centro en el origen de las coordenadas. Todos los puntos $2z$, donde $|z| = 1$, se encuentran en una circunferencia de radio 2 con el centro en el origen de las coordenadas. El punto $2z + 1$ resulta del punto $2z$ desplazándose a la derecha en 1 (véase el problema 1). Por lo tanto, los puntos $1 + 2z$, donde $|z| = 1$, se hallan en una circunferencia de radio 2 con el centro en el punto $(1, 0)$ (fig. 5).

5. *¿Dónde se encuentran los puntos para los cuales* $2 < |z| < 3$?

Sabemos que los puntos que satisfacen la condición $|z| = 2$, se encuentran en una circunferencia de radio 2 con el centro en el origen de las coordenadas. Y los puntos para los cuales $|z| > 2$ se encuentran más distantes del origen de las coordenadas que los puntos de esta circunferencia, es decir, fuera de la misma. Análogamente, los puntos que satisfacen la condición $|z| < 3$ se encuentran en el interior de una circunferencia de radio 3 con el centro en el origen de las coordenadas. Quiere decir que los puntos que satisfacen la condición $2 < |z| < 3$ se encuentran dentro de un anillo acotado por las circunferencias concéntricas con el centro en el origen de las coordenadas y los radios $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$ (fig. 6).

El número complejo se puede considerar también como un *vector* cuyo origen se encuentra en un plano, en el origen del sistema de coordenadas, y su extremo se halla en el punto que representa este número. Mediante tal interpretación es fácil explicar geométricamente las operaciones de *adición* y *sustracción*.

Si el vector $\overrightarrow{OM_1}$ representa el número $z_1 = a + bi$, y $\overrightarrow{OM_2}$ es el vector que representa el número $z_2 = c + di$, la suma de estos vectores,

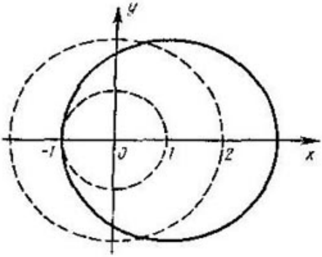


Fig. 5

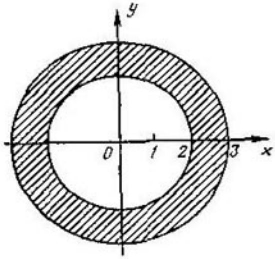


Fig. 6

$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, es la diagonal $\overrightarrow{OM_3}$ del paralelogramo $OM_1M_3M_2$. El extremo de esta diagonal, el punto M_3, tiene, evidentemente, las coordenadas $(a+c,\ b+d)$ (fig. 7). De tal modo, el vector $\overrightarrow{OM_3}$ es

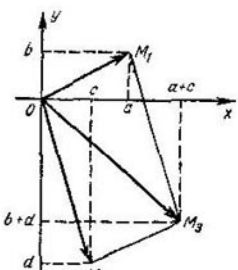


Fig. 7

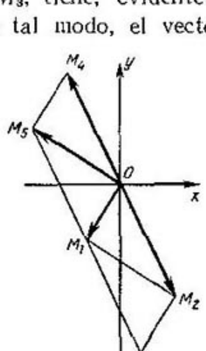


Fig. 8

el que representa el número complejo $z_3 = z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,i$. Si el vector $\overrightarrow{OM}$ representa el número z, entonces el número $-z$ se representará por el vector $\overrightarrow{ON}$ cuyo extremo es un punto simétrico al punto M respecto al origen de las coordenadas. Debido a esto, la operación de sustracción de los números complejos admite también una simple interpretación geométrica. Justamente: ya que $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, entonces, en lugar del vector $\overrightarrow{OM_2}$, que representa el número z_2, vamos a analizar el vector $\overrightarrow{OM_4}$ simétrico al primero respecto al origen de las coordenadas (fig. 8). Sumando, como hicimos arriba, el vector $\overrightarrow{OM_1}$ que representa el número z_1, y el vector $\overrightarrow{OM_4}$, obtendremos el vector $\overrightarrow{OM_5}$ que representa la diferencia $z_1 - z_2$. Está claro que la longitud del vector $\overrightarrow{OM_5}$ es igual a la del vector $\overrightarrow{M_2M_1}$, o sea, a la longitud de la diagonal M_1M_2 del paralelogramo $OM_1M_3M_2$. Porque la longitud del vector $\overrightarrow{OM_5}$ es igual al módulo de la diferencia $z_1 - z_2$, la longitud de la diagonal M_1M_2 es también igual a $|z_1 - z_2|$. Resultó una simple interpretación geométrica del módulo de la diferencia de dos números complejos: $|z_1 - z_2|$ es una distancia entre los puntos M_1 y M_2 que representan los números complejos z_1 y z_2. Esta interpretación se aplica a menudo para la solución de los problemas.

6. *¿Dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales $|z-1|=2$?*

Si el punto z es un punto incógnito, la distancia entre z y 1 es igual a 2. Pero, los puntos que se hallan desde 1 a una distancia de 2, están en la circunferencia. En ese caso, los puntos que representan los números para los cuales $|z-1|=2$, se encuentran en una circunferencia de radio 2 con el centro en el punto (1, 0).

Se puede razonar de otra manera. Designamos $z-1=w$. Entonces obtenemos una igualdad $|w|=2$. Por consiguiente, los puntos w se encuentran en una circunferencia de radio 2 con el centro en el origen de las coordenadas. Pues $z=w+1$, los puntos z resultan de los puntos w desplazándose a la derecha en 1. De tal modo, los puntos incógnitos se hallan en una circunferencia de radio 2 con el centro en el punto (1, 0).

7. *¿Dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales $|z+2i| \leqslant 1$?*

Copiemos esta condición así: $|z-(-2i)| \leqslant 1$. Esto quiere decir que la distancia desde los puntos z hasta el punto $-2i$ no es mayor que 1, o sea, todos los puntos que la satisfacen, se encontrarán en el interior o en el límite del círculo de radio 1 con el centro en el punto (0, —2), que representa el número complejo $-2i$.

8. *Los números complejos z satisfacen la condición $1 < |z+2-3i| < 2$. ¿Dónde se encuentran los puntos que representan estos números?*

Copiemos nuestra condición así: $1 < |z-(-2+3i| < 2$. Todos los puntos que satisfacen esta condición se encuentran dentro de un anillo acotado por las circunferencias concéntricas con el centro en el punto (—2, 3) y los radios $r_1=1$ y $r_2=2$.

9. *Los números complejos z satisfacen la condición*

$$|z-i|=|z+2|.$$

¿Dónde se encuentran los puntos que representan estos números?

El módulo $|z-i|$ es la distancia entre los puntos z y un punto fijo que representa el número i. El módulo $|z+2|=|z-(-2)|$ es la distancia entre los puntos z y un punto fijo que representa el número -2.

La condición del problema exige hallar los puntos para los cuales estas distancias sean iguales. Es decir, la solución del problema

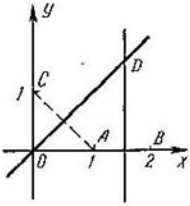


Fig. 9

será el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos fijos del plano: de un punto que representa el número complejo i, o sea, del punto $(0, 1)$, y de un punto que representa el punto -2, o sea, del punto $(-2, 0)$.

Se sabe de la geometría que el lugar geométrico es una recta perpendicular al segmento que une los dos puntos señalados, y que pasa por su centro. Esto quiere decir que los puntos que representan los números complejos z, que satisfacen la condición $|z-i|=|z+2|$, se encuentran en la recta perpendicular al segmento que une los puntos con las coordenadas $(-2, 0)$ y $(0, 1)$, y que pasa por el centro de este segmento.

10. *¿Dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales $|z-1|=|z-2|=|z-i|$?*

El conjunto de puntos que satisfacen la condición $|z-1|=|z-2|$ es una recta que pasa por el centro del segmento AB, donde $A(1, 0)$ y $B(2, 0)$, perpendicularmente a éste. El conjunto de puntos que satisfacen la condición $|z-1|=|z-i|$ es una recta que pasa por el centro del segmento AC, donde $A(1, 0)$ y $C(0, 1)$, perpendicularmente a éste (véase la fig. 9).

Ahora está claro que a la condición

$$|z-1|=|z-2|=|z-i|$$

le satisface solamente un punto D que es el de intersección de estas dos rectas. Es fácil calcular que las coordenadas de este punto serán $x = y = 3/2$. En otras palabras, un solo número complejo $z = 3/2 + 3/2i$ satisface la condición del problema.

A menudo es conveniente escribir los números complejos, distintos de cero, de otra manera, llamada forma *trigonométrica*.

Ante todo, introduzcamos para estos números el concepto de argumento: *argumento de un número $z = a + bi \neq 0$ se llama a cualesquiera de los números φ que son la solución de un sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \operatorname{sen}\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Para el número $z = 0$ el argumento no se determina.

Se sabe de Trigonometría que este sistema de ecuaciones tiene un conjunto infinito de soluciones; además, si φ es una de sus soluciones, todas las demás soluciones se deducen de la primera según la fórmula:

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \ k \text{ es un número entero cualquiera.} \tag{3}$$

De esa manera, cualquier número complejo $z \neq 0$ tiene una cantidad infinita de argumentos y todos ellos pueden ser obtenidos de uno solo, según la fórmula señalada (3).

Notemos que entre los argumentos del número complejo z siempre hay *uno* que satisface las desigualdades $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; a veces, a este valor de φ se le denomina argumento del número z. No obstante, esta limitación resulta a menudo incómoda. Vamos a seguir la definición arriba expuesta aplicando el término "*el valor principal del argumento*" para el valor de φ en el intervalo de 0 a 2π. En correspondencia con esto, a continuación, siempre que sea necesario hallar un argumento de cualquier número complejo z, nos limitamos a buscar uno de sus argumentos (no es obligatorio que sea el principal). Este argumento incógnito se designa frecuentemente por el símbolo $\arg z$.

El argumento de un número complejo z adquiere el siguiente sentido geométrico. Si consideramos al número complejo $z = a + bi \neq 0$ como el vector $\overrightarrow{OM}$, el valor principal del argumento del número z será un ángulo φ, al cual hace falta girar en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj el semieje positivo Ox hasta que coincida con el vector $\overrightarrow{OM}$ (fig. 10). El argumento del número considerado z [1] es una magnitud de cualquier ángulo que difiere de éste en un número entero de ángulos completos.

11. *¿Dónde se encuentran los puntos que satisfacen la condición* $\arg z = \pi/3$?

---

[1] Se ve de esta interpretación geométrica que es imposible introducir, de un modo racional, el argumento del número $z = 0$. Precisamente por eso no lo hacemos.

Todos los puntos que se encuentran en el radio saliente del origen de las coordenadas bajo el ángulo $\pi/3$ respecto al eje Ox, satisfacen esta condición. Conviene subrayar, que no toda la recta sino que un solo rayo, sin su origen, satisface esta condición (¿Por qué?).

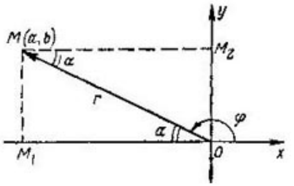


Fig. 10

Ahora, sea $z=a+bi\neq 0$ un número complejo. Designando por r su módulo, calculado según la fórmula (1), y por φ uno de sus argumentos, podremos escribir este número en la forma

$$z=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi). \tag{4}$$

El segundo miembro de esta igualdad es *la forma trigonométrica* del número z. La forma trigonométrica del número $z=0$ no se determina.

La forma trigonométrica de los números complejos está ligada estrechamente con su interpretación geométrica: naturalmente, la fórmula (4) se deduce de las consideraciones geométricas (fig. 10).

Cuando nosotros definimos el módulo y el argumento del número complejo, su forma trigonométrica (4) se dedujo automáticamente. A menudo unos proceden de otro modo. Precisamente, el módulo y el argumento de un número complejo se introducen partiendo de las consideraciones geométricas, y luego se demuestra la fórmula (4). Prestemos atención a que esta fórmula se deduce, en este libro de texto, valiéndose del dibujo en el cual el punto $M(a, b)$ se encuentra en el primer cuadrante. Sin embargo, esta fórmula es válida para cualquier situación del punto M; el estudiante tiene que saber demostrar su validez en cada caso.

Por ejemplo, el punto $M(a, b)$ se encuentra en el segundo cuadrante, según se señala en la fig. 10. En este caso $OM_1=r\cos\alpha$, $OM_2=r\operatorname{sen}\alpha$ y $\alpha=\pi-\varphi$. Ya que para los puntos del segundo cuadrante $a<0$ y $b>0$, entonces $OM_1=-a$, $OM_2=b$ y, por consiguiente,

$$-a=r\cos\alpha=r\cos(\pi-\varphi)=-r\cos\varphi,$$
$$b=r\operatorname{sen}\alpha=r\operatorname{sen}(\pi-\varphi)=r\operatorname{sen}\varphi,$$

es decir,

$$a+bi=r\cos\varphi+ir\operatorname{sen}\varphi=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi);$$

la fórmula es válida si el punto M se encuentra en el segundo cuadrante. Es fácil ver, por lo demás, que no hay necesidad de revisar los cuadrantes: las fórmulas $a = r\cos\varphi$ y $b = r \operatorname{sen}\varphi$ pueden ser deducidas directamente de las definiciones del coseno y del seno del ángulo φ, de donde se deduce inmediatamente la validez de la fórmula (4) en cualquier posición del punto M.

Las fórmulas

$$a = r\cos\varphi,$$
$$b = r \operatorname{sen}\varphi$$

son las fórmulas de transición de la forma trigonométrica de un número complejo a la algebraica, porque sabiendo r y φ, es fácil hallar a y b.

Con más frecuencia se necesita resolver el problema inverso: sabiendo a y b hay que hallar r y φ. El módulo r se determina (véase la fórmula (1)) fácilmente: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sin embargo, al determi-

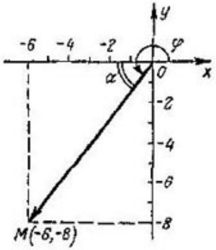


Fig. 11

nar el argumento φ se cometen muchos errores. El más típico de éstos es el siguiente: del sistema (2) es claro que $\operatorname{tg}\varphi = b/a$; de ahí se deduce que $\varphi = \operatorname{arc\,tg} b/a$. En realidad, aunque $\operatorname{tg}\varphi = b/a$, no se deduce de ahí que $\varphi = \operatorname{arc\,tg} b/a$. A fin de determinar correctamente el argumento del número complejo z, es necesario saber en qué cuadrante se encuentra el punto z, para lo cual será mejor valerse cada vez de la interpretación geométrica del número complejo del mismo modo cómo se hace en el ejemplo que sigue.

12. *Hallar la forma trigonométrica del número complejo* $z = -6 - 8i$.

Está claro que $|z| = 10$ y $\operatorname{tg}\varphi = b/a = 4/3$. Como se ve en la fig. 11, $\arg z = \pi + \alpha$, donde α es un ángulo agudo tal que $\operatorname{tg}\alpha = 4/3$. Por eso $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 4/3$, o sea, $\varphi = \pi + \operatorname{arc\,tg} 4/3$, por razón de que la forma trigonométrica tiene un aspecto:

$$z = -6 - 8i = 10(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi), \quad \varphi = \pi + \operatorname{arc\,tg} 4/3.$$

Notemos que el concepto de la forma trigonométrica de un número complejo, distinto de cero, está definido con *absoluta exactitud*:

precisamente, esta es la anotación del número complejo $z \neq 0$ en la forma de

$$z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi),$$

donde r, que es el módulo del número z, es número positivo, y el coseno y el seno se toman del mismo ángulo φ, que es el argumento del número z; entre ellos está obligatoriamente el signo $+$. Por ejemplo, veamos los siguientes números complejos:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right),$$

$$z_3 = \cos\frac{\alpha}{2} - i \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}, \qquad z_4 = \operatorname{sen} 30^\circ + i \cos 30^\circ$$

que no son escritos en forma trigonométrica. La forma trigonométrica de estos números complejos serán formas de su anotación, que a continuación se dan:

$$z_1 = \cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4};$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{4}{3}\pi\right);$$

$$z_3 = \cos\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$z_4 = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ.$$

Las cuestiones expuestas se plantean a menudo en forma de problemas; además de esto, una serie de propiedades esenciales de los números complejos, que son muy útiles, se deducen al analizar las operaciones con números complejos en forma trigonométrica.

Propiamente dicho, no hay dificultades en las reglas de multiplicación y división de los números complejos, escritos en forma trigonométrica; solamente se aplican las fórmulas que son bien sabidas de la Trigonometría. Por eso recomendamos familiarizarse con estas reglas.

De estas reglas se deducen, particularmente, las propiedades de los módulos de los números complejos que siguen:

I. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

II. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Estas propiedades se aplican con bastante frecuencia para resolver muchos problemas. Además, resulta muy útil la fórmula que sigue:

III. $|z^n| = |z|^n$, *donde n es un número entero cualquiera*. Se obtiene para cualquier número entero $n \neq 0$ como resultado de las propiedades I y II con ayuda de la inducción matemática (véase el § 3). Para $n = 0$ la validez de la propiedad III se deduce de la **definición** de uso general: *cada número complejo, distinto de cero, en la potencia cero es igual a* 1.

En definitiva, son válidas dos fórmulas más que expresan las propiedades del módulo de suma y diferencia:

IV. $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

V. $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$.

Para demostrar la propiedad IV supongamos que

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\operatorname{sen}\varphi_1),\quad z_2=r_2\ (\cos\varphi_2+i\operatorname{sen}\varphi_2).$$

Entonces, aplicando la fórmula (1), tenemos:

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|&=|(r_1\cos\varphi_1+r_2\cos\varphi_2)+i(r_1\operatorname{sen}\varphi_1+r_2\operatorname{sen}\varphi_2)|=\\&=\sqrt{(r_1\cos\varphi_1+r_2\cos\varphi_2)^2+(r_1\operatorname{sen}\varphi_1+r_2\operatorname{sen}\varphi_2)^2}=\\&=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}.\end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que $\cos(\varphi_1-\varphi_2)\leqslant 1$, entonces obtendremos

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|&=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\leqslant\\&\leqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2}=r_1+r_2=|z_1|+|z_2|.\end{aligned}$$

La propiedad V se demuestra análogamente [1]:

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|&=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\geqslant\\&\geqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2}=|r_1-r_2|=||z_1|-|z_2||.\end{aligned}$$

Resulta interesante señalar la interpretación geométrica de las propiedades IV y V. Sea el vector $\overrightarrow{OM_1}$ un número z_1 y el vector $\overrightarrow{OM_2}$, un número z_2 (fig. 7). Entonces el vector $\overrightarrow{OM_3}$ representa la suma z_1+z_2. La propiedad IV significa que la longitud de la diagonal OM_3 del paralelogramo $OM_1M_3M_2$ no es mayor que la suma de las longitudes de sus lados OM_1 y OM_2. La propiedad V significa que la longitud de la diagonal M_1M_2 no es menor que el valor absoluto de diferencia de los lados OM_1 y OM_2.

Subrayemos que las propiedades análogas a las fórmulas I — —V ya se han formulado en el párrafo anterior para el valor absoluto de los números reales. Está claro que el módulo de cualquier número real, considerado como un caso particular de los números complejos, coincide con el valor absoluto de este número real. Por lo tanto, las propiedades I — V recién indicadas son una generalización de las propiedades del valor absoluto. Pero sus demostraciones se hacen de una manera absolutamente distinta.

[1] La propiedad V se puede deducir también de la propiedad IV. Efectivamente, la igualdad $z_2=z_1+(z_2-z_1)$ es evidente. De ahí se sigue que $|z_2|=|z_1+(z_2-z_1)|\leqslant\leqslant|z_1|+|z_2-z_1|$, es decir, $|z_2-z_1|\geqslant|z_2|-|z_1|$. De la igualdad $z_1=z_2+(z_1-z_2)$ obtenemos a la vez que $|z_1|=|z_2+(z_1-z_2)|\leqslant|z_2|+|z_1-z_2|$, o sea, $|z_1-z_2|\geqslant\geqslant|z_1|-|z_2|$. La propiedad V resulta como la unión de dos desigualdades obtenidas en una sola fórmula.

Recordemos una definición más referente a la teoría de los números complejos, que es la **definición** del número conjugado. *Al número conjugado con el número complejo* $a+bi$ *se le llama número complejo* $a-bi$. El número conjugado con el número complejo z se disigna por el símbolo $\bar{z}$.

Es del todo evidente que $(\bar{\bar{z}})=z$, es decir, no sólo el número $\bar{z}$ está conjugado con el número z, sino también z está conjugado con $\bar{z}$. Por esta razón los números z y $\bar{z}$ se denominan *conjugados recíprocamente*.

Es útil guardar en la memoria las siguientes dos propiedades de los números conjugados:

I. $z\bar{z}=|z|^2$,

II. $|\bar{z}|=|z|$;

éstas se obtienen directamente de las definiciones.

Ahora pasemos a examinar varios problemas.

13. *¿Dónde se encuentran los números complejos* $z=a+bi$ *para los cuales*

$$\log_{1/2}|z-2|>\log_{1/2}|z|?$$

Hay que señalar, ante todo, que el primer miembro de nuestra desigualdad tiene sentido para todos los números complejos z, excepto $z=2$, y el segundo miembro, para todos los números $z\neq 0$. Por eso, las expresiones que forman nuestra desigualdad tienen sentido simultáneo para todos los números complejos z, excepto $z=0$ y $z=2$. Precisamente entre estos números hay que hallar la solución de la desigualdad.

Según las propiedades de los logaritmos (véase el § 6), para todos estos números nuestra desigualdad es equivalente a la siguiente: $|z-2|<|z|$.

Sabemos (véase el ejemplo 9 dado anteriormente) que a la igualdad $|z-2|=|z|$ le satisfacen todos los números complejos que se hallan en la recta l, paralela al eje Oy, que pasa por el punto $A(1, 0)$, ya que todos los puntos de esta recta son equidistantes de dos puntos $O(0, 0)$ y $B(2, 0)$. Pero, nos hace falta hallar en el plano todos aquellos puntos que están más próximos al punto $B(2, 0)$ que al punto $O(0, 0)$.

Claro es que éstos serán los puntos del plano que se encuentran por el mismo lado de la recta l donde está el punto B. De tal modo, todos los puntos del semiplano situados *a la derecha* de la recta l satisfacen la condición $|z-2|<|z|$ (fig. 12); los puntos de la misma recta l se anulan.

Ahora recordemos que para obtener la solución del problema planteado es necesario eliminar el punto $B(2, 0)$ de este semiplano situado a la derecha de la recta l.

Pues, la condición del problema la satisfacen todos los puntos del plano que se encuentran a la derecha de la recta paralela al eje Oy y la que pasa por el punto (1, 0), excepto el punto (2, 0).

14. *Sea $z \neq -1$ un número complejo. Demostrar que:*

a) *si $|z| = 1$, el número $\frac{z-1}{z+1}$ es puramente imaginario;*

b) *si el número $\frac{z-1}{z+1}$ es puramente imaginario, $|z| = 1$.*

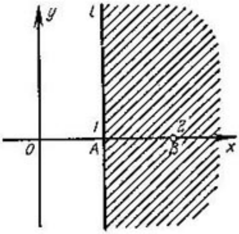


Fig. 12

Sean $z = a + bi$ y $z \neq -1$. Entonces es claro que $z + 1 \neq 0$ y la expresión $\frac{z-1}{z+1}$ tiene sentido.

El número $\frac{z-1}{z+1}$ es el cociente de la división de dos números complejos, por cuya razón su forma algebraica será:

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(a-1)+bi}{(a+1)+bi} = \frac{[(a-1)+bi]\,[(a+1)-bi]}{(a+1)^2+b^2} =$$
$$= \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} + i\,\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}.$$

De aquí se deduce que si $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$, entonces $a^2 + b^2 - 1 = 0$, es decir, el número $\frac{z-1}{z+1}$ es puramente imaginario [1] y con ello la afirmación a) queda demostrada.

Demostremos la afirmación b). Sea $\frac{z-1}{z+1}$ un número puramente imaginario. Entonces $\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} = 0$, de donde $a^2 + b^2 - 1 = 0$, es decir, $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ y con ello la afirmación b) queda demostrada.

15. *Hallar el argumento de un número complejo $z_1 = z^2 - z$,* si $z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$.

---

[1] Presten atención a que para $z = 1$, o sea, para $a = 1$, $b = 0$, el número $\frac{z-1}{z+1}$ es igual a cero. Recordemos que, según la definición expuesta arriba, el número 0 es puramente imaginario.

Unos cálculos sencillos muestran que

$$z_1 = (\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)^2 - (\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) =$$
$$= \cos^2\varphi - \text{sen}^2\varphi + 2i\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi - \cos\varphi - i\,\text{sen}\,\varphi =$$
$$= (\cos 2\varphi - \cos\varphi) + i\,(\text{sen}\,2\varphi - \text{sen}\,\varphi) =$$
$$= 2\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}\left[-\text{sen}\,\frac{3\varphi}{2} + i\cos\frac{3\varphi}{2}\right].$$

De tal manera,

$$|z_1| = \sqrt{4\,\text{sen}^2\frac{\varphi}{2}\left(\text{sen}^2\frac{3\varphi}{2} + \cos^2\frac{3\varphi}{2}\right)} = 2\left|\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}\right|.$$

En correspondencia con la definición del valor absoluto tenemos que considerar tres casos:

a) Si $\text{sen}\,\frac{\varphi}{2} = 0$, es decir, $\varphi = 2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera, entonces $|z_1| = 0$ y por eso también $z_1 = 0$. De esta manera, para $\varphi = 2k\pi$ (k es un número entero cualquiera) el argumento del número z_1 queda indeterminado.

b) Si $\text{sen}\,\frac{\varphi}{2} > 0$, lo que tiene lugar para $2k\pi < \frac{\varphi}{2} < (2k+1)\pi$, o sea, cuando

$$4k\pi < \varphi < (4k+2)\pi, \tag{5}$$

k es un número entero cualquiera, entonces $|z_1| = 2\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}$, de donde se sigue que la forma trigonométrica del número complejo z_1 será la siguiente:

$$z_1 = 2\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}\left[\cos\frac{\pi + 3\varphi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi + 3\varphi}{2}\right].$$

Por consiguiente, si φ satisface la condición (5), entonces

$$\arg z_1 = \frac{\pi + 3\varphi}{2}.$$

c) Si $\text{sen}\,\frac{\varphi}{2} < 0$, es decir,

$$(4k+2)\,\pi < \varphi < (4k+4)\pi, \tag{6}$$

k es un número entero cualquiera, entonces $|z_1| = -2\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}$, de donde se deduce que la forma trigonométrica del número complejo z_1 será la siguiente:

$$z_1 = -2\,\text{sen}\,\frac{\varphi}{2}\left[\cos\frac{3\pi + 3\varphi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi + 3\varphi}{2}\right].$$

Por consiguiente, si φ satisface la condición (6), entonces

$$\arg z_1 = \frac{3\pi + 3\varphi}{3}.$$

Es curioso dar una interpretación geométrica de la solución que presentaremos sólo en el caso de $0<\varphi<\pi$. El número $z_1=z^2-z=$ $=z^2+(-z)$ es una suma de dos números complejos

$$z^2=\cos 2\varphi+i \operatorname{sen} 2\varphi$$

y

$$-z=-\cos\varphi+i \operatorname{sen}\varphi=\cos(\pi+\varphi)+i \operatorname{sen}(\pi+\varphi),$$

cuyos módulos son iguales a 1. Para determinar su suma hay que hallar la diagonal del paralelogramo construido a base de los vectores $\overrightarrow{OM_1}$ y $\overrightarrow{OM_2}$ que representan respectivamente los números

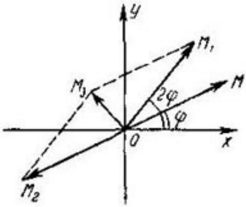


Fig. 13

z^2 y $-z$ (fig. 13). Pues, este paralelogramo es un rombo. Por consiguiente, la diagonal incógnita OM_3 es la bisectriz del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OM_1}$ y $\overrightarrow{OM_2}$ por razón de que el ángulo, que forma el vector $\overrightarrow{OM_3}$ con la dirección positiva del eje Ox, es una semisuma de ángulos formados por los vectores $\overrightarrow{OM_1}$ y $\overrightarrow{OM_2}$ con esta dirección, o sea,

$$\arg z_1=\arg(z^2-z)=\frac{2\varphi+\pi+\varphi}{2}=\frac{\pi+3\varphi}{2}.$$

16. *Hallar la forma trigonométrica del número complejo*

$$z=1+i \operatorname{tg}\alpha,$$

donde $-\pi<\alpha<\pi$, $\alpha\neq\pm\pi/2$.

Es natural escribir el número dado en la forma

$$z=1+i \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i \operatorname{sen}\alpha).$$

Este es el momento cuando muchos estudiantes cometen un error grave al afirmar que esta es precisamente la forma trigonométrica del número dado. Sin embargo, esto es correcto sólo cuando $1/\cos\alpha>0$, es decir, cuando $-\pi/2<\alpha<\pi/2$ (según la condición se analizan los valores de α sólo en el intervalo de $-\pi$ a $+\pi$). Si $1/\cos\alpha<0$, que tiene lugar para $-\pi<\alpha<-\pi/2$ y para $\pi/2<\alpha<\pi$, entonces, presentemos la igualdad escrita anteriormente en la forma:

$$z=-\frac{1}{\cos\alpha}(-\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha)=-\frac{1}{\cos\alpha}[\cos(\pi+\alpha)+i\operatorname{sen}(\pi+\alpha)].$$

La última expresión es precisamente la forma trigonométrica del número z para $-\pi<\alpha<-\pi/2$ y para $\pi/2<\alpha<\pi$.

Este problema se puede resolver también valiéndose de la regla general para hallar la forma trigonométrica; con este fin hay que hallar el módulo y el argumento del número z. El módulo de este número se halla según la fórmula (1):

$$r=|z|=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{|\cos\alpha|},$$

y el argumento es cualquier solución del sistema (véase (2)):

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi=|\cos\alpha|,\\ \operatorname{sen}\varphi=\operatorname{tg}\alpha\cdot|\cos\alpha|.\end{array}\right\}\qquad(7)$$

Para la solución de este sistema necesitamos examinar dos casos:

a) $\cos\alpha>0$, o sea, α se encuentra en el intervalo $-\pi/2<\alpha<<\pi/2$. En este caso $|\cos\alpha|=\cos\alpha$, y el sistema (7) toma un aspecto

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi=\cos\alpha,\\ \operatorname{sen}\varphi=\operatorname{sen}\alpha.\end{array}\right.$$

Es evidente que una de las soluciones de este sistema es $\varphi=\alpha$ y, por consiguiente, para $-\pi/2<\alpha<\pi/2$ la forma trigonométrica será:

$$z=\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha).$$

b) $\cos\alpha<0$, o sea, α se encuentra en el intervalo $-\pi<\alpha<-\pi/2$, o bien, en el intervalo $\pi/2<\alpha<\pi$. En este caso $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$, y el sistema (7) toma la forma

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi=-\cos\alpha,\\ \operatorname{sen}\varphi=-\operatorname{sen}\alpha,\end{array}\right.\quad\text{o bien,}\quad\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi=\cos(\pi+\alpha),\\ \operatorname{sen}\varphi=\operatorname{sen}(\pi+\alpha).\end{array}\right.$$

Su solución será, en particular, $\varphi=\pi+\alpha$. Por consiguiente, para $-\pi<\alpha<-\pi/2$ y para $\pi/2<\alpha<\pi$ la forma trigonométrica será:

$$z=\frac{1}{|\cos\alpha|}[\cos(\pi+\alpha)+i\operatorname{sen}(\pi+\alpha)].$$

17. *Hallar las soluciones completas de la ecuación* $(1-i)^x=2^x$.

Supongamos que un número entero k es la solución de esta ecuación. Entonces, de la igualdad de los números complejos $(1-i)^k==2^k$ se deduce la igualdad de sus módulos, es decir, $|(1-i)^k|=2^k$.

Tomando en consideración que $|1-i|=\sqrt{2}$, según la propiedad del módulo, tenemos

$$|(1-i)^k|=|1-i|^k=(\sqrt{2})^k=2^{\frac{k}{2}}.$$

En efecto, si k es la solución de la ecuación inicial, entonces $2^{k/2}=2^k$, lo que es posible sólo cuando $k=0$.

Ahora vamos a comprobar mediante una sustitución, si el número 0 es la solución de la ecuación inicial. Recordando que el número complejo, distinto de cero, en la potencia cero es igual a 1, según la definición, deducimos que $x=0$ es la raíz de la ecuación inicial.

18. *Hallar todos los números complejos z, para cada número real $a \geqslant 0$, que satisfagan la igualdad*

$$|z|^2-2iz+2a(1+i)=0.$$

Representemos el número z en la forma algebraica: $z=x+iy$. Entonces $|z|^2=x^2+y^2$, y la ecuación tomará la forma

$$x^2+y^2-2ix+2y+2a+2ai=0.$$

Si los términos real e imaginario los igualamos a cero, obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y+2a=0, \\ -2x+2a=0. \end{cases}$$

De ahí se deduce que $x=a$, y para la determinación de y tenemos una ecuación de segundo grado

$$y^2+2y+a^2+2a=0$$

con el parámetro a. Hallemos las raíces *reales* de esta ecuación.

Según se sabe, las raíces de una ecuación de segundo grado son reales si su discriminante no es negativo; por eso nuestra ecuación lleva raíces reales sólo para tales valores de a para los cuales $D=1-a^2-2a \geqslant 0$. Para estos valores de a obtenemos

$$y_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-a^2-2a}.$$

De tal modo, si el número a satisface la desigualdad $1-a^2-2a \geqslant 0$, la ecuación inicial tiene dos soluciones

$$z_{1,2}=a+(-1\pm\sqrt{1-a^2-2a})\,i.$$

(Para $1-a^2-2a=0$ estas dos soluciones coinciden, es decir, hablando en rigor, para los valores correspondientes de a, hay una sola solución.) Para todos los demás valores de a la ecuación inicial no tiene soluciones.

Nos queda por señalar los límites de variación de a para los cuales existen soluciones. Según la condición $a \geqslant 0$; además de esto, hemos obtenido que a ha de satisfacer la condición de la desigualdad

$1-a^2-2a \geqslant 0$, o bien, $a^2+2a-1 \leqslant 0$, que es lo mismo. La solución de la última desigualdad es el intervalo $-1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1+\sqrt{2}$; escogiendo de este intervalo los números $a \geqslant 0$, obtenemos $0 \leqslant a \leqslant -1+\sqrt{2}$.

La solución definitiva puede ser escrita en la forma siguiente:

para $0 \leqslant a < -1+\sqrt{2}$ $\quad z_{1,2} = a + (-1 \pm \sqrt{1-a^2-2a})\,i$,

para $a = -1+\sqrt{2}$ $\quad z = -1+\sqrt{2}-i$,

para $a > -1+\sqrt{2}$ $\quad$ no hay soluciones.

19. *Resolver en números complejos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} z^{13}w^{19} = 1, \\ z^5 w^7 = 1, \\ z^2 + w^2 = -2. \end{cases}$$

No debe ser motivo de asombro el hecho de que en el sistema dado hay tres ecuaciones y solamente dos números incógnitos: pero, no hay nada de particular en lo que *dos* números incógnitos satisfagan *tres* condiciones.

Para resolver este problema vamos a recurrir a un método más natural, que se aplica más frecuentemente: vamos a deducir de este sistema diferentes corolarios y los resultados obtenidos les comprobaremos mediante sustitución, si satisfacen al sistema inicial o son extraños al mismo.

Al elevar al cubo ambos miembros de la segunda ecuación y al dividir el resultado por la primera ecuación, obtenemos que $z^2w^2 = 1$. Pues, de aquí se deduce que $z^6w^6 = 1$ y, al dividir esta igualdad por la segunda ecuación, obtenemos $z = w$. Ahora, de la tercera ecuación se deduce que $w^2 = -1$, de donde $w_1 = i$, $w_2 = -i$, es decir, $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Aún es necesario hacer una comprobación. Esta se efectúa inmediatamente y resulta que ambos pares obtenidos son las soluciones del sistema inicial.

Respecto a esta solución puede, naturalmente, surgir la pregunta: ¿cómo nos ha ocurrido combinar la ecuación precisamente de este modo y cómo hemos llegado con tanta rapidez a la solución? A tal pregunta se puede contestar así. Primero, se puede resolver el sistema propuesto más brevemente (elevando la segunda ecuación a la octava potencia y dividiendo el resultado por la primera ecuación elevada al cuadrado, obtenemos directamente que $z = w$). Segundo, la brevedad no es una condición necesaria para la solución. Se podría solucionar este sistema al recurrir a un procedimiento habitual: eliminando una de las incógnitas.

Por ejemplo, es muy natural la siguiente solución. Elevando la primera ecuación a la quinta potencia y dividiendo el resultado por la segunda ecuación elevada a potencia 13, obtenemos que

$$w^4 = 1.$$

No conviene darse prisa para extraer la raíz o resolver la ecuación $w^4-1=0$: en este caso obtenemos cuatro valores distintos para w y, hallando los valores de z correspondientes a cada valor de w, llegamos a un gran número de pares diferentes de w, z, entre los cuales hay que buscar soluciones mediante la comprobación. Es más fácil elevar la primera ecuación del sistema a la séptima potencia, y la segunda, a potencia 19 dividiendo la segunda por la primera; entonces obtenemos que

$$z^4=1.$$

Después de esto se puede escribir la primera ecuación en la forma $zw^3=1$, de donde $z=1/w^3$, o sea, $z=w$ (tengan en cuenta que ¡$w^4=1$!). Luego la solución va terminando así mismo como la hemos realizado anteriormente.

20. *Resolver en números complejos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} z^3+\overline{w}^7=0, \\ z^5\cdot w^{11}=1. \end{cases}$$

Así, como en el ejemplo anterior, para resolver este sistema vamos a deducir diferentes corolarios. De la primera ecuación tenemos $z^3=-\overline{w}^7$; de la segunda, $z^5=1/w^{11}$. De ambas obtenemos, respectivamente, $z^{15}=-\overline{w}^{35}$ y $z^{15}=1/w^{33}$, por consiguiente, $-\overline{w}^{35}=1/w^{33}$, o sea, $w^{33}\overline{w}^{35}=-1$.

De esta igualdad se desprende que $|w^{33}\overline{w}^{35}|=1$. Basándonos en las propiedades de los módulos y los números conjugados, obtenemos $|w^{33}\overline{w}^{35}|=|w|^{33}\cdot|\overline{w}|^{35}=|w|^{68}=1$, así que $w=1$. Volviendo a la ecuación $w^{33}\overline{w}^{35}=-1$ escribamos su primer miembro: $(w^{33}\overline{w}^{33})\overline{w}^2=(w\overline{w})^{33}\overline{w}^2=(|w|^2)^{33}\overline{w}^2=\overline{w}^2$ (aquí hemos utilizado una propiedad más de los números recíprocamente conjugados). De esta manera, hemos llegado a la ecuación $\overline{w}^2=-1$, es decir, $\overline{w}_1=i$, $\overline{w}_2=-i$, de donde $w_1=-i$, $w_2=i$.

Ahora calculamos los valores correspondientes de z. Si $w=-i$, entonces, al tomar la primera ecuación del sistema inicial, hallamos que

$$z^3=-i^7=i,$$

y tomando la segunda ecuación, obtenemos que

$$z^5=\frac{1}{(-i)^{11}}=\frac{1}{i}=-i.$$

Dividiendo la segunda igualdad obtenida por la primera tenemos $z^2=-1$ y, como $z^3=i$, entonces $z=-i$. En forma análoga hallamos que $z=i$ en el caso de que $w=i$.

Teniendo presente que durante la solución hemos considerado no el sistema inicial sino sus corolarios, es necesario verificar si los valores hallados de las incógnitas satisfacen realmente el sistema mencionado. Esto se verifica por una sustitución directa que nos convence de que el sistema propuesto tiene dos soluciones:

$$z_1 = -i,\ w_1 = -i \quad \text{y} \quad z_2 = i,\ w_2 = i.$$

EJERCICIOS:

1. Sea $|z| = 5$. ¿Dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos: a) $-4z$; b) $2 - z$; c) $-1 + 3z$?

Señalar dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales:

2. $|z| < 1$.
3. $|z| \geqslant 2$.
4. $1 \leqslant |z| < 2$.
5. $|z| < \left|\frac{z}{2}\right| + 1$.
6. $|z + 1| = 3$. **7.** $|i - z| < 1$.
8. $|z + 1 - 2i| = \sqrt{i}$. **9.** $|i - 1 - 2z| > 9$.
10. $2 \leqslant |z + i| \leqslant 3$. **11.** $|z| = |z + \frac{1}{3i}|$.
12. $|z - 1| = |z + 1| = |z - i\sqrt{3}|$.
13. $|z| - 2 = |z - i| - |z + 5i| = 0$.
14. $|z - i\sqrt{2}| - |z + 4| = |z| - 1 = 0$.
15. $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$.
16. $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 5$.

17. Hallar el número complejo z que satisface simultáneamente dos igualdades

$$\left|\frac{z - 12}{z - 8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad \left|\frac{z - 4}{z - 8}\right| = 1.$$

18. Se proponen dos números complejos z_1 y z_2. Hallar el número complejo que corresponde al centro del segmento entre z_1 y z_2.

19. Los vértices de un triángulo son los números complejos z_1, z_2, z_3. Hallar todos los números complejos z que completen este triángulo hasta un paralelogramo.

Representar en la forma trigonométrica los siguientes números:

20. $z = -\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°$. **21.** $z = 1 + \cos 40° + i \operatorname{sen} 40°$.
22. $z = -\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$.
23. $z = \operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha$.
24. $z = \operatorname{tg}\alpha - i$, $0 \leqslant \alpha < \pi$, $\alpha \neq \pi/2$.

Señalar dónde se encuentran los puntos que representan los números complejos z para los cuales:

25. $\arg z = \pi/4$. **26.** $\arg z = -5\pi/6$.
27. $\pi/3 < \arg z \leqslant 3\pi/2$.
28. $\arg z = \pi$, $|z| < 1$.
29. $\begin{cases} |z - i| = 1, \\ \arg z = \pi/2. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 0 < \arg z < \pi/4, \\ |z - 6i| = \sqrt{3}. \end{cases}$

31. Hallar un número que tenga argumento positivo mínimo, entre los números complejos z que satisfacen la condición $|z - 25i| \leqslant 15$.

32. Hallar el argumento del número complejo $z_1 = z^2 + \bar{z}$ si $z = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

33. Si los números complejos z_1 y z_2 son tales que su producto $z_1 \cdot z_2$ es un número real, entonces, ¿son éstos números complejos conjugados?

34. Si los números complejos z_1 y z_2 son tales que su suma $z_1 + z_2$ es un número real, entonces, ¿son éstos números complejos conjugados?

35. Demostrar que z_1 y z_2 son números complejos conjugados, si los números complejos z_1 y z_2, con el miembro imaginario distinto de cero son tales que su producto $z_1 \cdot z_2$ y su suma $z_1 + z_2$ son números reales.

36. Demostrar que se puede representar el número complejo $a + bi$, cuyo módulo es igual a 1 y $b \neq 0$, en la forma que sigue:

$$a + bi = \frac{c+i}{c-i},$$

donde c es un número real.

Resolver las ecuaciones:

37. $\bar{z} = z$. **38.** $\bar{z} = -z$. **39.** $\bar{z} = 2 - z$. **40.** $\bar{z} = -4z$.

41. $z^2 + \bar{z} = 0$. **42.** $z^2 + |z| = 0$.

43. ¿Para cuáles valores reales de x e y los números $-3 + ix^2y$ y $x^2 + y + 4i$ serán complejamente conjugados?

44. ¿Dónde se hallan los números complejos $z = a + bi$ para los cuales:

a) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$;

b) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} < 2$?

45. Para cada número real $a \geqslant 1$ hallar todos los números complejos z que satisfacen la igualdad

$$z + a|z+1| + i = 0.$$

46. Para cada número real $a \geqslant 0$ hallar todos los números complejos z que satisfacen la igualdad

$$2|z| - 4az + 1 + ia = 0.$$

47. Resolver en números complejos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} z^3 + \bar{w}^5 = 0, \\ z^2 \cdot \bar{w}^4 = 1. \end{cases}$$

§ 6. LOGARITMOS

Al estudiar las propiedades de los logaritmos es necesario prestar atención particular a todas sus propiedades que se derivan de las potencias correspondientes; por lo tanto, para conocer bien los logaritmos hay que obrar bien con las potencias. La relación es tan estrecha entre la logaritmación y la elevación de potencias que la definición de logaritmo se da mediante el concepto de la potencia.

Citemos la definición de logaritmo, dada por otro autor: "Llámase logaritmo de un número dado para una base dada al exponente a que debe elevarse esta base para obtener el número dado". De tal modo, el número x es un logaritmo del número N de base a, si $a^x = N$.

En esta definición hay un detalle muy esencial: "la base dada" no lleva impuestas limitaciones algunas, a fuerza de que, si seguimos esta definición estrictamente al pie de la letra (pues, *siempre* hay que seguir literalmente una definición), hemos de considerar, por ejemplo, que 3 es el logaritmo de -8 de base -2 (porque $(-2)^3=-8$), 2 es el logaritmo de 4 de base -2 (porque $(-2)^2=4$), etc. Pero en lo que se refiere a la base 1 la cosa resulta más confusa: cualquier número x es el logaritmo de 1 de base 1; efectivamente, $1^x=1$ para cualquier x [1].

Cualquier persona familiarizada con el curso escolar puede decir que todos los ejemplos citados arriba son absurdos porque tenemos que considerar sólo los logaritmos *de base positiva distinta de* 1. En efecto, tal concepto es aceptado para la escuela secundaria, pero es mucho mejor imponer esta limitación para la base *directamente* en la definición. De tal modo, *la definición* de logaritmo debe darse así:

Sea el número $a>0$ y $a\neq 1$. El número x se denomina logaritmo del número N de base a, si $a^x=N$.

Es probable que algunos lectores hayan advertido que ni una sola vez hemos escrito la igualdad $x=\log_a N$, sino que siempre decíamos: x es el logaritmo de N de base a. Esto se explica fácilmente, ya que hasta que no nos convenzamos de que ningún número tiene dos logaritmos diferentes para base dada, no estamos autorizados a utilizar el signo de igualdad. En realidad, supongamos por un momento que para un número N existen dos logaritmos de la misma base a, entonces, utilizando el signo de igualdad, podríamos escribir que $\alpha=\log_a N$ y $\beta=\log_a N$, de lo que resultaría que $\alpha=\beta$ [2].

Por esta razón, antes de que se introduzca la designación para el logaritmo hay que persuadirse de que *ningún número puede tener dos logaritmos diferentes para una misma base*. Efectivamente, si los números diferentes α y β son logaritmos del número N de base a, entonces, según la definición, se cumplen las igualdades

$$a^\alpha=N \quad \text{y} \quad a^\beta=N, \qquad (*)$$

de donde $a^\alpha=a^\beta$. Por esto, según la propiedad de las potencias de base positiva distinta de 1, llegaríamos a la igualdad $\alpha=\beta$. En consecuencia, *el logaritmo* de un número N de base a es *único* y *se designa con el símbolo* $\log_a N$.

[1] Además, cualquier número positivo es el logaritmo de 0, de base 0, ya que $0^x=0$ para cualquier valor de $x>0$.

[2] Recordemos que una situación muy similar tuvo lugar cuando definimos la raíz cuadrada (§ 4). Allí introducimos también la definición sin el signo de igualdad y sólo más tarde se vio que la definición con la igualdad hubiera sido imposible, porque, al introducir la designación para la raíz cuadrada, tendríamos que demostrar seguidamente "las igualdades" del tipo $2=-2$ (ambos números habrían sido "iguales" a la raíz de 4, o sea, iguales entre sí). Precisamente por eso, la raíz cuadrada nunca tiene signo y existe solamente el radical $\sqrt{\ }$ para la raíz cuadrada positiva de un número positivo.

De tal modo, según la definición,

$$x = \log_a N, \quad \text{si} \quad a^x = N.$$

Por consiguiente, las igualdades $x = \log_a N$ y $a^x = N$ (al cumplir las limitaciones impuestas anteriormente en el número a) expresan con exactitud la misma relación entre los números x, a, N, escrita en el primer caso en "el lenguaje de los logaritmos" y en el segundo, en "el lenguaje de las potencias".

Es fácil demostrar que *los números negativos y cero de ninguna base a (claro está que $a > 0$ y $a \neq 1$) no tienen logaritmos*. En realidad, si $N \leqslant 0$ y $x = \log_a N$, entonces $a^x = N \leqslant 0$, lo que contradice a la propiedad de las potencias de base positiva.

En cuanto a los números positivos, aceptamos *sin demostración* que *cada número positivo para cualquier base tiene un logaritmo*. Esta afirmación en la escuela secundaria es aceptada como cierta, aunque no es fácil establecer su validez (para esto sería necesario aplicar la teoría bien desarrollada de los números reales y la teoría de los límites).

Es natural que cada estudiante ha de saber no sólo las definiciones sino también *las propiedades de los logaritmos* y saber, desde luego, demostrarlas.

Señalemos, ante todo, la llamada *identidad logarítmica fundamental*

$$a^{\log_a N} = N,$$

que es válida para cualesquier N y a, para los cuales $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$. Esta identidad se deduce inmediatamente de las igualdades(*).

Citemos a continuación las fórmulas que se aplican más frecuentemente para la solución de los problemas [1].

I. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad (M > 0, \ N > 0)$.

II. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (M > 0, \ N > 0)$.

III. $\log_a N^\alpha = \alpha \log_a N \quad (N > 0, \ \alpha$ es un número cualquiera).

IV. $\log_{a^\beta} N^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a N \quad (N > 0, \ \alpha \neq 0, \ \beta \neq 0)$.

V. $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \quad (N > 0)$.

VI. $\log_b a \cdot \log_a b = 1$.

Demostremos la igualdad I. Elevemos el número a a potencia con el exponente $\log_a M + \log_a N$. Según la propiedad de las potencias y la identidad logarítmica fundamental tenemos:

$$a^{\log_a M + \log_a N} = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} = MN.$$

[1] Recordemos una vez más que, según la definición del logaritmo, las bases consideradas son siempre positivas y distintas de 1.

La igualdad obtenida

$$a^{\log_a M+\log_a N}=MN$$

podemos escribirla "en el lenguaje de los logaritmos" así (véase (*)): $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$, lo que significa la validez de la fórmula I.

Así mismo se demuestra la fórmula II.

Para demostrar la igualdad III el número a elevémoslo a potencia cuyo exponente sea $\alpha \log_a N$ y utilicemos las propiedades de las potencias:

$$a^{\alpha \log_a N}=(a^{\log_a N})^{\alpha}=N^{\alpha}.$$

De ahí obtenemos, según la definición de los logaritmos, la igualdad que había que demostrar.

La igualdad IV se sigue de los cálculos:

$$(a^{\beta})^{\frac{\alpha}{\beta}\log_a N}=a^{\alpha \log_a N}=(a^{\log_a N})^{\alpha}=N^{\alpha}.$$

Es muy útil mencionar los siguientes dos casos particulares de la fórmula IV:

IVa. $\log_{a^{\beta}} N=\frac{1}{\beta}\log_a N \quad (N>0,\ \beta\neq 0)$.

IVb. $\log_{a^{\alpha}} N^{\alpha}=\log_a N \quad (N>0,\ \alpha\neq 0)$.

Para demostrar la igualdad V la anotaremos primeramente en la forma $\log_a N=\log_a b\cdot\log_b N$. La validez de esta igualdad la demostramos análogamente a la forma anterior:

$$a^{\log_a b\cdot\log_b N}=(a^{\log_a b})^{\log_b N}=b^{\log_b N}=N.$$

Se puede razonar también de otro modo. Al anotar la identidad logarítmica fundamental

$$b^{\log_b N}=N,$$

obtenemos la igualdad

$$\log_a (b^{\log_b N})=\log_a N$$

(¡los números iguales tienen iguales logaritmos!). Ahora, utilizando la propiedad III, nos convencemos de lo justo de la fórmula V.

La fórmula VI es el caso particular de la antecedente, la que resulta para $b=N$. Esta igualdad V se llama habitualmente *regla de transición a una nueva base.* Debido a esta igualdad no hay tablas de logaritmos para todas las bases: es suficiente tener sólo las tablas de logaritmos, por ejemplo, decimales. Efectivamente, sea necesario, por ejemplo, calcular $\log_5 13$. Valiéndose de la propiedad V podemos escribir: $\log_5 13=\frac{\lg 13}{\lg 5}$. Al hallar en las tablas $\lg 13\approx 1,1139$ y $\lg 5\approx 0,6990$ obtenemos que $\log_5 13\approx 1,5937$.

Citemos las propiedades de los logaritmos absolutamente necesarias para la solución de las desigualdades:

VII. *Si* $a>1$, *entonces de* $0<x_1<x_2$ *se deduce que* $\log_a x_1<\log_a x_2$, *y de* $\log_a x_1<\log_a x_2$ *se sigue que* $0<x_1<x_2$. En otras palabras, para $a>1$ las desigualdades $0<x_1<x_2$ y $\log_a x_1<\log_a x_2$ son equivalentes (véase el § 10).

VIII. *Si* $0<a<1$, *entonces de* $0<x_1<x_2$ *se deduce que* $\log_a x_1>$ $>\log_a x_2$, *y de* $\log_a x_1>\log_a x_2$ *se sigue que* $0<x_1<x_2$. Es decir, para $a<1$ las desigualdades $0<x_1<x_2$ y $\log_a x_1>\log_a x_2$ son equivalentes.

Estas dos propiedades se demuestran análogamente y por ello sólo demostremos la propiedad VIII.

Sea a un número positivo y menor que 1. Si se cumple la desigualdad $0<x_1<x_2$, entonces existen los números $\log_a x_1$ y $\log_a x_2$. Utilizando la identidad logarítmica fundamental, copiemos la desigualdad $x_1<x_2$ en la forma

$$a^{\log_a x_1}<a^{\log_a x_2}.$$

De ahí concluimos, en virtud de las propiedades de las potencias para una base menor que 1, que $\log_a x_1>\log_a x_2$.

Al contrario, si se cumple la desigualdad $\log_a x_1>\log_a x_2$, entonces ambos números x_1 y x_2 son positivos. Esto es lo primero. Segundo, elevando el número a, $0<a<1$, a potencia con los exponentes $\log_a x_1$ y $\log_a x_2$ obtenemos (una vez más en vigor de las propiedades de las potencias para una base menor que 1) la desigualdad

$$a^{\log_a x_1}<a^{\log_a x_2},$$

es decir $x_1<x_2$. Ya que, como ya hemos señalado, los números x_1 y x_2 son positivos, entonces $0<x_1<x_2$, lo que fue necesario demostrar.

De las propiedades demostradas en calidad de corolarios resultan las afirmaciones:

VIIa. Si $a>1$, las desigualdades $\log_a x<\alpha$ y $0<x<a^\alpha$ son equivalentes.

VIIb. Si $a>1$, las desigualdades $\log_a x>\alpha$ y $x>a^\alpha$ son equivalentes.

VIIIa. Si $0<a<1$, las desigualdades $\log_a x<\alpha$ y $x>a^\alpha$ son equivalentes.

VIIIb. Si $0<a<1$, las desigualdades $\log_a x>\alpha$ y $0<x<a^\alpha$ son equivalentes.

Para la demostración es suficiente señalar que $\alpha=\log_a a^\alpha$.

Se deduce con facilidad de estas afirmaciones que para una base mayor que 1, los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos, y los logaritmos de los números menores que 1 (¡se entiende, claro está, que sean positivos!) son negativos; para una base menor que 1, resultan ser a la inversa.

Ahora vamos a resolver unos ejemplos referentes a la aplicación de las propiedades fundamentales de los logaritmos.

1. *Calcular* $\log_{3\sqrt{3}} 27$.

A base de la fórmula IV tenemos

$$\log_{3\sqrt{3}} 27 = \log_{3^{3/2}} 3^3 = \frac{3}{3/2} \log_3 3 = 2.$$

2. *Calcular* $2^{\log_{2\sqrt{2}} 15}$.

A base de la fórmula IVa tenemos

$$\log_{2\sqrt{2}} 15 = \log_{2^{3/2}} 15 = \frac{2}{3} \log_2 15.$$

Utilizando ahora la identidad logarítmica fundamental, obtenemos

$$2^{\log_{2\sqrt{2}} 15} = 2^{2/3 \log_2 15} = (2^{\log_2 15})^{2/3} = 15^{2/3} = \sqrt[3]{225}.$$

3. *Calcular* $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$.

A base de la fórmula IV tenemos

$$\log_3 5 \cdot \log_{25} 27 = \log_3 5 \cdot \log_{5^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_3 5 \cdot \log_5 3.$$

Ya que, según la fórmula VI, $\log_3 5 \cdot \log_5 3 = 1$, entonces $\log_3 5 \times$ $\times \log_{25} 27 = 3/2$.

4. *Calcular* $(\sqrt[3]{9})^{\frac{1}{5 \log_5 3}}$.

A base de la fórmula VI tenemos

$$\frac{1}{5 \log_5 3} = \frac{1}{5} \log_3 5.$$

Luego nos queda sólo utilizar la identidad logarítmica fundamental y las propiedades de las potencias:

$$(\sqrt[3]{9})^{\frac{1}{5 \log_5 3}} = (9^{1/3})^{\frac{1}{5} \log_3 5} = (3^{2/3})^{\frac{1}{5} \log_3 5} =$$
$$= (3^{\log_3 5})^{2/3 \cdot 1/5} = 5^{2/15} = \sqrt[15]{25}.$$

5. *Calcular* $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^{2 - \frac{\log_5 13}{2 \log_5 9}}}$.

Utilizando sucesivamente las propiedades de los logaritmos y de las potencias, calculemos el radicando:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right)^{2 - \frac{\log_5 13}{2 \log_5 9}} = \frac{1}{27} \cdot (\sqrt{27})^{\frac{1}{2} \log_9 13} = \frac{1}{27} (3^{\log_3 13})^{3/8} = 3^{-3} \cdot 13^{3/8},$$

de donde resulta bien claro que el número dado es igual a $3^{-3/2} \cdot 13^{3/16}$.

6. *¿Cuál es mayor*: $\log_4 5$ ó $\log_{1/16} \frac{1}{25}$?

A base de la fórmula IVb tenemos

$$\log_{1/16} \frac{1}{25} = \log_{4^{-2}} 5^{-2} = \log_4 5,$$

por lo tanto los dos números propuestos son iguales.

7. *Calcular* $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \ \ldots \ \log_{10} 9 \cdot \log_{11} 10$.

A base de la fórmula V tenemos

$$\log_3 2 = \frac{\log_{11} 2}{\log_{11} 3}; \quad \log_4 3 = \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 4}; \quad \ldots; \quad \log_{10} 9 = \frac{\log_{11} 9}{\log_{11} 10}.$$

De aquí se deduce que

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \ldots \log_{11} 10 = \frac{\log_{11} 2}{\log_{11} 3} \cdot \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 4} \cdots \frac{\log_{11} 9}{\log_{11} 10} \cdot \log_{11} 10 = \log_{11} 2.$$

8. *Demostrar que la relación de los logaritmos de dos números no depende de la base, es decir,*

$$\frac{\log_a N_1}{\log_a N_2} = \frac{\log_b N_1}{\log_b N_2} \quad (N_1 > 0, \ N_2 > 0, \ N_2 \neq 1).$$

A base de la fórmula V tenemos

$$\frac{\log_a N_1}{\log_a N_2} = \log_{N_2} N_1 \quad \text{y} \quad \frac{\log_b N_1}{\log_b N_2} = \log_{N_2} N_1,$$

de donde se ve que nuestra igualdad es justa.

9. *¿Cuál es mayor*: $\log_2 3$ ó $\log_{1/4} 5$?

Ya que $\log_2 3 > 0$ y $\log_{1/4} 5 < 0$, entonces $\log_2 3 > \log_{1/4} 5$.

10. *¿Cuál es mayor*: $\log_5 7$ ó $\log_8 3$?

Ya que $\log_5 7 > 1$ y $\log_8 3 < 1$, entonces $\log_5 7 > \log_8 3$.

11. *Calcular* $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, *si* $\log_{ab} a = 4$.

A base de las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{3} \log_{ab} a - \frac{1}{2} \log_{ab} b = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \log_{ab} b.$$

Nos queda hallar el valor de $\log_{ab} b$. Ya que

$$1 = \log_{ab} ab = \log_{ab} a + \log_{ab} b = 4 + \log_{ab} b,$$

entonces $\log_{ab} b = -3$, por razón de que

$$\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \cdot (-3) = \frac{17}{16}.$$

12. *Calcular* $\log_6 16$, *si* $\log_{12} 27 = a$.

Una cadena de transformaciones

$$\log_6 16 = 4\log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1+\log_2 3}$$

muestra que para calcular $\log_6 16$ es necesario saber a qué es igual $\log_2 3$. Lo hallamos de la condición $\log_{12} 27 = a$:

$$a = \log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1+2\log_3 2} =$$
$$= \frac{3}{1+\frac{2}{\log_2 3}} = \frac{3\log_2 3}{2+\log_2 3}, \text{ es decir, } \log_2 3 = \frac{2a}{3-a}$$

(notemos: es evidente que $a \neq 3$). En definitiva tenemos: $\log_6 16 = = \frac{4(2-a)}{3+a}$.

13. *Calcular* $\log_{25} 24$, *si* $\log_6 15 = \alpha$ y $\log_{12} 18 = \beta$.
Tenemos la siguiente igualdad:

$$\log_{25} 24 = \frac{1}{2}(\log_5 3 + 3\log_5 2) = \frac{3}{2}\log_5 2 + \frac{1}{2}\log_5 3,$$

la cual nos muestra que es necesario determinar $\log_5 2$ y $\log_5 3$. La igualdad $\log_6 15 = \alpha$ presenta:

$$\alpha = \log_6 15 = \log_6 3 + \log_6 5 = \frac{1}{1+\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3}$$

y la igualdad $\log_{12} 18 = \beta$ nos da:

$$\beta = \log_{12} 18 = \log_{12} 2 + 2\log_{12} 3 = \frac{1}{2+\log_2 3} + \frac{2}{1+2\log_3 2}.$$

Pasando a los logaritmos de base 5, según la fórmula V, obtenemos:

$$\alpha = \frac{1}{1+\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1}{1+\frac{\log_5 2}{\log_5 3}} + \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1+\log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3};$$

$$\beta = \frac{1}{2+\log_2 3} + \frac{2}{1+2\log_3 2} = \frac{1}{2+\frac{\log_5 3}{\log_5 2}} + \frac{2}{1+2\frac{\log_5 2}{\log_5 3}} = \frac{\log_5 2 + 2\log_5 3}{\log_5 3 + 2\log_5 2}.$$

Las últimas dos igualdades pueden considerarse como un sistema de ecuaciones para determinar $\log_5 2$ y $\log_5 3$:

$$\begin{cases} \alpha\log_5 2 + (\alpha-1)\log_5 3 = 1, \\ (2\beta-1)\log_5 2 + (\beta-2)\log_5 3 = 0. \end{cases}$$

Si $\alpha(\beta-2) - (\alpha-1)(2\beta-1) = -\alpha - \alpha\beta + 2\beta - 1 \neq 0$ (véase el § 11) entonces este sistema tiene la solución:

$$\log_5 2 = \frac{2-\beta}{\alpha+\alpha\beta-2\beta+1}, \quad \log_5 3 = \frac{2\beta-1}{\alpha+\alpha\beta-2\beta+1}.$$

En definitiva obtenemos:

$$\log_{25} 24 = \frac{5-\beta}{2\alpha+2\alpha\beta-4\beta+2}.$$

Ahora comprobemos que la expresión $\alpha+\alpha\beta-2\beta+1$ es realmente distinta de cero. En efecto, tenemos que

$$\alpha+\alpha\beta-2\beta+1=\log_6 15+\log_6 15\cdot\log_{12}18-2\log_{12}18+1=(\log_6 15-$$
$$-\log_{12}18+1)+\log_{12}18\cdot(\log_6 15-1).$$

Aquí el segundo sumando es positivo porque $\log_{12}18>0$ y $\log_6 15>1$. En lo que se refiere al primer sumando podemos escribir, utilizando las propiedades de los logaritmos:

$\log_6 15>1$, $\log_{12}18<2$ y por eso $\log_6 15-\log_{12}18+1>0$.

Por lo tanto, la expresión $\alpha+\alpha\beta-2\beta+1$ es positiva.

Las propiedades de los logaritmos, en particular las I — VIII expuestas arriba, se usan ampliamente para solución de los problemas más variados, incluso la solución de ecuaciones y sistemas logarítmicos, de desigualdades logarítmicas, etc. Aquí examinemos unos ejemplos más sencillos dejando más complejos para los §§ 9 y 10.

14. *Resolver la ecuación* $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$.

Permutando $x \lg 5$ al primer miembro de la ecuación y utilizando las propiedades de los logaritmos, obtenemos

$$x+\lg(1+2^x)-x\lg 5=x\lg 10-x\lg 5+\lg(1+2^x)=\lg 2^x(1+2^x).$$

Por consiguiente, la ecuación puede ser expresada así: $\lg 2^x(1+$ $+2^x)=\lg 6$, de donde se deduce que

$$(2^x)^2+2^x-6=0.$$

Designando $z=2^x$, llegamos a la ecuación cuadrática $z^2+z-6=$ $=0$, que tiene raíces $z_1=-3$, $z_2=2$. Ya que la igualdad $2^x=-3$ es inadmisible (porque 2^x para cualquier valor de x es positivo) queda para resolver la ecuación $2^x=2$. Esta ecuación tiene la raíz $x=1$ que es única para la ecuación inicial.

15. *Resolver la ecuación*

$$\log_a(ax)\cdot\log_x(ax)=\log_{a^2}\frac{1}{a},\ \text{donde } a>0,\ a\neq 1.$$

Es claro que las raíces han de satisfacer las condiciones $x>0$, $x\neq 1$. A base de las propiedades de los logaritmos transformemos las expresiones que figuran en la ecuación:

$$\log_x(ax)=1+\log_x a=1+\frac{1}{\log_a x}=\frac{\log_a x+1}{\log_a x};$$
$$\log_{a^2}\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}\log_a a=-\frac{1}{2};$$
$$\log_a(ax)=1+\log_a x.$$

Ahora podemos representar nuestra ecuación así:

$$\frac{(\log_a x+1)^2}{\log_a x}=-\frac{1}{2},$$

de donde $(\log_a x)^2+\frac{5}{2}\log_a x+1=0$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$x_1=\frac{1}{a^2};\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

16. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} 5(\log_y x+\log_x y)=26,\\ xy=64.\end{cases}$$

Es evidente que ha de tener lugar: $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$, $y\neq 1$. Designando $z=\log_x y$ y aplicando la fórmula VI, obtenemos que la primera ecuación de nuestro sistema se puede representar así: $5(z+1/z)=26$, de donde $z_1=5$, $z_2=\frac{1}{5}$. Es decir, hace falta hallar las soluciones del sistema inicial tanto entre las solucionse del sistema

$$\begin{cases} \log_x y=5,\\ xy=64,\end{cases}$$

como entre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \log_x y=1/5,\\ xy=64.\end{cases}$$

Resolviendo estos sistemas y eligiendo las soluciones que satisfagan las condiciones $x>0$, $x\neq 1$, $y>0$, $y\neq 1$, obtenemos el resultado: el sistema inicial tiene dos soluciones $x_1=2$, $y_1=32$, $x_2=32$, $y_2=2$.

17. *¿Qué se puede decir del número x si se sabe que para cualquier número real* $a\,(a\neq 0)$

$$\log_x(a^2+1)<0?$$

Para cualquier valor de $a\neq 0$ el número $1+a^2>1$. Pero, a causa de que el logaritmo de un número mayor que 1 es negativo sólo cuando la base es menor que 1, entonces $x<1$. Luego, ya que los logaritmos se consideran sólo cuando su base es positiva, entonces $x>0$. De tal modo, en definitiva obtenemos que el número x, de que se trata en cuestión, se toma del intervalo $0<x<1$.

18. *Hallar todos los x tales que* $\log_{1/2} x>\log_{1/3} x$. Según la fórmula V tenemos que

$$\log_{1/3} x=\frac{\log_{1/2} x}{\log_{1/2}\frac{1}{3}}=\log_{1/3}\frac{1}{2}\cdot\log_{1/2} x.$$

Por eso se puede representar nuestra desigualdad así:

$$\log_{1/2}x\left(1-\log_{1/3}\frac{1}{2}\right)>0.$$

Puesto que $1-\log_{1/3}\frac{1}{2}>0$, obtenemos de la última desigualdad: $\log_{1/2}x>0$, de donde $x<1$. Pero se tiene sentido considerar la desigualdad inicial sólo para $x>0$. Por esta razón, todos los valores de x que satisfacen la desigualdad inicial, se encuentran dentro del intervalo $0<x<1$.

19. *Resolver la desigualdad* $\frac{1}{\log_a x}>1$, $a>1$.

La fracción $1/p$ es mayor que 1 cuando su denominador p está comprendido entre cero y 1. De esa manera nos hace falta hallar tales valores de x que sus logaritmos (de base $a>1$) estén comprendidos entre cero y 1, es decir, que se satisfagan simultáneamente dos condiciones: $0<\log_a x$ y $\log_a x<1$. La primera significa que los valores de x han de ser mayores que 1 y la segunda, menores que a. Por consiguiente, el intervalo $1<x<a$ es la solución de la desigualdad inicial.

Se puede analizar de otro modo. El primer miembro de la desigualdad propuesta tiene sentido sólo para los valores positivos de x, distintos de 1, y por eso se puede representar esta desigualdad en la forma $\log_x a>1$. Dicha desigualdad es válida solamente para los valores de x, mayores que 1 (porque para $0<x<1$ tenemos $\log_x a<0$ para $a>1$), pero menores que a (porque para $x>a>1$, según las propiedades de los logaritmos, tenemos $\log_x a<1$).

En los ejemplos anteriores, las fórmulas I—VI se aplican eficazmente para las transformaciones de diferentes expresiones tanto de números concretos como dados por letras. Tales transformaciones se hacen necesarias, ante todo, para resolver ecuaciones y desigualdades.

Sin embargo, estas fórmulas son insuficientes para la solución de muchas ecuaciones y desigualdades. En primer lugar, esto se explica, porque las letras que figuran en las fórmulas han de satisfacer limitaciones muy grandes. Además, las fórmulas I—IV tienen imperfecciones aún más grandes: sus primeros y segundos miembros tienen sentido con *diferentes* limitaciones para los valores de las letras que entran en aquéllas.

Por ejemplo, la fórmula I, $\log_a MN$ tiene sentido, tanto en el caso cuando los números M y N son positivos, como en el caso en que éstos son negativos. En contraposición a esto, el segundo miembro de dicha fórmula tiene sentido sólo en el primer caso. Pues, esto significa que si, durante las transformaciones de una ecuación, sustituimos el logaritmo del producto de dos expresiones M y N que contienen una incógnita, por la suma de los logaritmos de estas expresiones, entonces, para los valores de las incógnitas que convierten M y N

en números negativos, de la expresión $\log_a MN$ obtendremos una expresión absurda $\log_a M + \log_a N$. Como resultado de tal transformación, según se explica en el § 9, podemos perder algunas raíces de la ecuación que buscamos.

Lo mismo sucede en las fórmulas II y III.

Por estas causas, para la solución de diferentes problemas que contienen valores incógnitos, es necesario aplicar fórmulas más generales:

I*. $\log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N| \, (MN > 0)$.

II*. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N| \quad (MN > 0)$.

III*. $\log_a N^{2k} = 2k \log_a |N| \quad (N \neq 0,$ k es un número entero).

IV*. $\log_{x^{2k}} N = \frac{1}{2} \log_{|x|^k} |N| \quad (N > 0,$ $k \neq 0$ es un número entero, $x \neq 0, \quad |x| \neq 1)$.

Conviene señalar que en las fórmulas I* y II* tenemos los mismos defectos indicados arriba: sus primeros y segundos miembros tienen sentido con *diferentes* limitaciones para los valores de las letras o símbolos que entran en éstas. Precisamente, los segundos miembros tienen sentido para cualesquiera que sean los valores de M y N, distintos de cero, y los primeros miembros, sólo cuando M y N son de signo igual, es decir, están afectadas por las limitaciones más rigurosas. Por lo tanto, al resolver, por ejemplo, ecuaciones, la sustitución de $\log_a MN$ por $\log_a |M| + \log_a |N|$ puede dar lugar a soluciones extrañas; en este caso las soluciones no se pierden como puede ocurrir al aplicar las fórmulas I — IV. Como la obtención de soluciones extrañas de una ecuación es preferible a su pérdida (¡ las soluciones innecesarias pueden omitirse mediante la comprobación, y las perdidas no se hallarán!), para las transformaciones de expresiones de letras deben aplicarse las fórmulas I* — IV*.

A continuación proponemos unos problemas que muestran la importancia que tiene la aplicación acertada de estas propiedades.

20. *Simplificar la expresión*

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 4x^4$$

y calcular, seguidamente, su valor para $x = -2$.

En este ejemplo se observa bien que los cálculos según las fórmulas I y III

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 4x^4 = 2 \log_4 x - \log_4 4 - 2 \log_4 4 - 8 \log_4 x =$$
$$= -3 - 6 \log_4 x$$

son erróneos, porque para $x = -2$ la última expresión no tiene sentido y es igual a -6.

Este resultado paradójico se obtuvo debido a que las fórmulas I y III son sólo utilizables para los valores positivos designados por letras. Así, aplicando las fórmulas I* y III* recién expuestas, en las cuales los valores de las letras pueden ser también negativos, obtenemos

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4 = 2\log_4|x| - 1 - 2 - 8\log_4|x| = -3 - 6\log_4|x|.$$

Es evidente que para $x = -2$ la última expresión es igual a -6.

21. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \log_2 xy = 5, \\ \log_{1/2} \dfrac{x}{y} = 1. \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas I* y II*, representemos este sistema así:

$$\begin{cases} \log_2|x| + \log_2|y| = 5, \\ \log_{1/2}|x| - \log_{1/2}|y| = 1. \end{cases}$$

Designando $z_1 = \log_2|x|$, $z_2 = \log_2|y|$, obtendremos

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 5, \\ z_1 - z_2 = -1, \end{cases}$$

de donde $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, es decir, $|x| = 4$, $|y| = 8$.

Pero este resultado no quiere decir que el sistema inicial tiene cuatro soluciones:

$$x_1 = 4, \quad y_1 = 8; \qquad x_2 = -4, \quad y_2 = -8;$$
$$x_3 = 4, \quad y_3 = -8; \qquad x_4 = -4; \quad y_4 = 8,$$

porque en la condición se requiere que tengan sentido las expresiones $\log_2 xy$ y $\log_{1/2} \frac{x}{y}$. Es claro que éstas tendrán sentido sólo cuando x e y tengan signos iguales. Por consiguiente, nuestro sistema tendrá sólo dos soluciones:

$$x_1 = 4, \; y_1 = 8 \quad \text{y} \quad x_2 = -4, \; y_2 = -8.$$

De tal modo, al aplicar las fórmulas I* y II*, hemos obtenido soluciones de sobra, de las cuales nos hemos librado fácilmente durante la comprobación y si hubiéramos utilizado las fórmulas I y II, es decir, hubiéramos representado este sistema así:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5, \\ \log_{1/2} x - \log_{1/2} y = 1, \end{cases}$$

habríamos perdido la solución $x_2 = -4$, $y_2 = -8$.

Además, notemos que el sistema inicial se puede resolver también de otro modo, reduciéndolo al sistema

$$xy = 32, \; \frac{x}{y} = \frac{1}{2},$$

de donde obtendríamos el resultado adecuado.

En conclusión de este párrafo examinaremos un problema más: la resolución de la desigualdad logarítmica y su interpretación geométrica.

22. *En un plano está dado el sistema de coordenadas cartesianas. Representar el campo de este plano lleno de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad*

$$\log_x \log_y x > 0.$$

Señalemos que x e y, que satisfacen la condición del problema, son tales que $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$ e $y\neq 1$. Dado que las propiedades

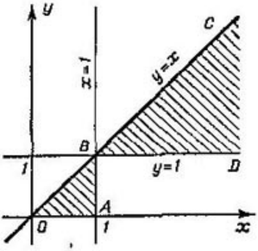


Fig. 14

de los logaritmos son diferentes para bases mayores o menores que la unidad, es natural analizar dos casos:

a) Sea $x>1$. Entonces, en virtud de las propiedades de los logaritmos, la desigualdad inicial será válida si se cumple la desigualdad $\log_y x>1$. Como se sabe, los logaritmos de los números mayores que la unidad, de base menor que la unidad, son negativos. Por eso, la desigualdad $\log_y x>1$ no puede cumplirse para y del intervalo $0<y<1$.

Por consiguiente, la desigualdad $\log_y x>1$ puede ser válida en el caso en que $y>1$. Pero, si $y>1$, la solución de la desigualdad $\log_y x>$ >1 serán todos los valores de $x>y$.

De tal modo, si $x>1$, entonces y debe ser obligatoriamente mayor que la unidad, $y>1$, para que se cumpla la desigualdad inicial. Los puntos del plano, para cuyas coordenadas será cumplida también la condición $x>y$, van a satisfacer la desigualdad inicial.

Si representamos este campo en un dibujo, veremos que éste es la parte interna del ángulo infinito CBD (fig. 14).

b) Ahora sea $0<x<1$. Si razonamos de manera análoga, obtenemos que la condición del problema será satisfecha por aquellos puntos del plano para cuyas coordenadas se cumplen las condiciones $0<x<1$, $0<y<1$ e $y<x$ (en la fig. 14 este campo es la parte interior del triángulo AOB).

El campo que da la solución de nuestro problema, consta de dos partes: la interior del triángulo AOB y la interior del ángulo infinito CBD (fig. 14).

EJERCICIOS:

Calcular:

1. $(a^{\alpha})^{-\beta \log_a sN^{\gamma}}$.

2. $-\log_8 \log_4 \log_2 16$.

3. $\log_{\pi} \operatorname{tg}(0{,}25\pi)$.

4. $\log_9 \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

5. $\log_{0,75} \log_2 \sqrt{\sqrt[-2]{0{,}125}}$.

6. $\sqrt[3]{5^{\frac{1}{\log_7 5}} + \frac{1}{\sqrt{-\lg 0{,}1}}}$.

7. $a^{\frac{\log_b \log_b N}{\log_b a}}$.

8. $\lg \operatorname{tg} 1^{\circ} + \lg \operatorname{tg} 2^{\circ} + \ldots + \lg \operatorname{tg} 89^{\circ}$.

9. $\lg \operatorname{tg} 1^{\circ} \cdot \lg \operatorname{tg} 2^{\circ} \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 89^{\circ}$.

10. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$.

11. $\left(\frac{1}{49}\right)^{1+\log_7 2} + 5^{-\log_{1/5} 7}$.

12. Hallar x, si $1 - \lg 5 = \frac{1}{3}\left(\lg\frac{1}{2} + \lg x + \frac{1}{3}\lg 5\right)$.

¿Cuál es mayor?

13. $\log_3 2$ ó $\log_2 3$.

14. $\log_4 5$ ó $\log_6 5$.

15. $\log_2 3$ ó $\log_3 11$.

16. $\log_2 a$ ó $\log_3 a$.

17. $\log_a 2$ ó $\log_a 3$.

18. $\sqrt[3]{0{,}01}$ ó $\sqrt[5]{0{,}001}$.

19. Demostrar que si $\alpha = \log_{12} 18$ y $\beta = \log_{24} 54$, $\alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1$.

20. Hallar $\log_{54} 168$, si $\log_7 12 = a$ y $\log_{12} 24 = b$.

21. Hallar $\log_{30} 8$, si $\log_{30} 3 = a$ y $\log_{30} 5 = b$.

22. Demostrar la fórmula $\frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$ y mostrar los valores admisibles de los símbolos.

23. Demostrar la identidad

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

24. Calcular la suma

$$\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \frac{1}{\log_4 N} + \ldots + \frac{1}{\log_{1967} N}, \quad \text{donde } N = 1967.$$

25. Demostrar que si a y b son longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuando $c - b \neq 1$ y $c + b \neq 1$, entonces

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

26. Demostrar que $|\log_b a + \log_a b| \geqslant 2$ (a y b son números positivos distintos de 1).

27. Demostrar que $\log_{\log_3 2} \frac{1}{2} > 0$.

28. Demostrar que $\log_2 17 \cdot \log_{1/5} 2 \cdot \log_3 \frac{1}{5} > 2$.

29. ¿Para cuáles valores de a y b tiene lugar la desigualdad

$$\log_a (a^2b) > \log_b \left(\frac{1}{a^5}\right)?$$

30. Demostrar que $\log_2 3$ es un número irracional.

31. Hallar todos los valores reales de x para los cuales la expresión

$$\sqrt{\log_{1/2} \frac{x}{x^2-1}}$$

es un número real.

Resolver las ecuaciones:

32. $\dfrac{\log_8 \left(\dfrac{8}{x^2}\right)}{(\log_8 x)^2} = 3.$

33. $\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \log_4 \sqrt{\dfrac{2}{x}} = 2.$

34. $\lg^2 x^3 - 20 \lg \sqrt{x} + 1 = 0.$

35. $\log_2 x - 8 \log_{x^2} 2 = 3.$

36. $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \log_4 x^2 + 9 = 0.$

37. $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0.$

38. $\log_x (ax) \cdot \log_a x = 1 + \log_x \sqrt{a}.$

39. $\log_3 a - \log_x a = \log_{\frac{x}{3}} a.$

40. $x^{(\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x} = 3^{-3 \log_{2\sqrt{2}} 4 + 6}.$

Resolver los sistemas de ecuaciones:

41. $\begin{cases} 2^{\log_{1/2} (x+y)} = 5^{\log_5 (x-y)}, \\ \log_2 x + \log_2 y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \log_{a^x} y = 2y^2, \\ \log_a \sqrt{xa} + 2 \log_{a^2} \dfrac{y}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_2 \dfrac{x}{y} = -3, \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 5. \end{cases}$

44. $\begin{cases} x^{2/3} y^{1/3} - x^{1/3} y^{2/3} = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \log_a x - \log_{a^2} y = m, \\ \log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n. \end{cases}$

46. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2x^y - x^{-y} = 1, \\ \log_2 y = \sqrt{x}. \end{cases}$

48. $\begin{cases} x^2 = 1 + 6\log_4 y, \\ y^2 = 2^x \cdot y + 2^{2x+1}. \end{cases}$

49. Resolver la desigualdad $\log_{1/2} x + \log_3 x > 1$.

50. Resolver la desigualdad $x^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \lg x < 1$.

51. ¿Para cuáles valores de a las raíces de la ecuación $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ son reales?

§ 7. PROGRESIONES

Si el concepto de progresión aritmética no presenta ningunas dificultades, en la definición de progresión geométrica a veces hay confusión. Por lo tanto, es útil detenerse en ésta más detalladamente.

Algunos estudiantes citan esta definición de la manera siguiente: "Llámase progresión geométrica a una sucesión de términos de la progresión cada uno de los cuales, a partir del segundo, es igual al precedente multiplicado por un número constante para la sucesión dada y *distinto de cero*". Otros, al definir esta sucesión, no estipulan lo destacado con letra cursiva. Desde el punto de vista de la primera definición, la sucesión

$$2,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots; \qquad (1)$$

no es una progresión geométrica, mientras que la segunda definición admite considerarla como una progresión geométrica "con razón nula".

Claro que en la elección de la definición siempre hay cierta libertad. No vale la pena discutir si la definición es correcta o no, porque la definición no se demuestra. Pero, si damos una nueva definición, ésta debe regirse por *la racionalidad*.

Desde este punto de vista analicemos la segunda definición, es decir, admitamos que la razón de la progresión tiene valor nulo.

La introducción del concepto general de progresión geométrica se originó por la aspiración a estudiar las sucesiones de términos positivos que se encontraban en diferentes problemas, en las cuales cada término consecuente es mayor, una cantidad de veces *completamente determinada*, que el precedente. Mientras tanto, para la sucesión (1), el problema de cuántas veces el tercer término es mayor que el segundo, no tiene sentido. Es muy deseable que la progresión geométrica se restablezca *unívocamente* por cualesquier término y razón. Sin embargo, si se sabe que la razón de la progresión es igual a cero y su tercer término es también cero, es imposible determinar unívocamente su primer término. Además, si (para la razón nula) el tercer término es distinto de cero (por ejemplo, es igual a 1), no existe ninguna progresión geométrica que satisfaga estas condiciones [1].

De lo dicho se deduce que las sucesiones de la forma (1) poseen propiedades anómalas en absoluto, debido a que es infructuoso considerar estas sucesiones como progresiones geométricas. Por eso es lógico exigir que la definición de progresión geométrica contenga la razón distinta de cero.

No obstante, esta definición tampoco posee la racionalidad suficiente. En los límites de esta definición nada nos impide considerar la sucesión

$$0, 0, 0, 0, \quad \ldots, 0, \ldots \tag{2}$$

como una progresión geométrica con la razón 2 o la razón 1/3. La posibilidad de que la razón de una progresión dada no sea unívoca constituye un fenómeno indeseable [2].

Para eliminar esta posibilidad es mejor formular la definición de progresión geométrica del modo siguiente: "*llámase progresión geométrica a una sucesión de números en la cual el primer término es distinto de cero y cada uno de los consecuentes es igual a su precedente multiplicado por cierto número, distinto de cero, que es constante para la sucesión dada.* Según se deduce de esta definición, entre los términos de una progresión geométrica no puede haber ceros.

De esta manera, si en un problema a resolver, el primer término b_1 de una progresión geométrica es una expresión de una magnitud incógnita, para la incógnita resulta un valor que convierte b_1 en cero, y según la definición recién aceptada, omitimos este valor de la incógnita porque no satisface la condición del problema.

Para la comprensión de la definición de las progresiones se plantea también la siguiente pregunta que a veces presenta dificultades: *¿es una progresión aritmética o la geométrica la sucesión* 1, 1, 1, ..., 1, ...? En realidad, esta sucesión puede considerarse como progresión aritmética (con diferencia de 0) y como geométrica (con razón de 1), simultáneamente.

Es útil prestar atención al hecho de que las definiciones de las progresiones y las fórmulas conocidas del término general y de la suma de n términos son válidas hasta en el caso cuando los términos de la progresión son números *complejos*.

---

[1] Puede citarse también otros "efectos indeseables" que se deducirán de la segunda definición mencionada arriba. Notemos que todos estos efectos no tienen similares en la teoría de la progresión aritmética. Mientras tanto, es razonable que las teorías de las progresiones aritmética y geométrica sean análogas.

[2] Notemos también que de la misma definición de la suma S de una sucesión infinita es fácil hallar la magnitud de la suma de los términos de la sucesión (2) : $S = 0$. Por lo tanto, si consideramos (2) como una progresión geométrica cuya razón es 2, obtendríamos un ejemplo de progresión geométrica que tiene una suma, pero que no es una progresión infinitamente decreciente.

Los conceptos de progresiones aritmética y geométrica se asimilan bien y sus ejemplos se resuelven con bastante seguridad[1]. No obstante, a menudo se proponen problemas que requieren aplicar, junto con las progresiones, otros conocimientos del curso algebraico. Es razonable detenerse más detalladamente en tales problemas "combinados".

1. *¿Para cuáles* x *los tres números:* $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$ *y* $\lg(2^x+3)$, *considerados en la sucesión indicada, van a presentar una progresión aritmética?*

Para resolver este problema, aparte de las progresiones, es necesario saber propiedades de los logaritmos.

Valiéndose de la definición de la progresión aritmética, podemos reducir este problema a una ecuación $2\lg(2^x-1)=\lg 2+\lg(2^x+3)$, la que debemos solucionar. Vamos a representarla así: $(2^x-1)^2=2(2^x+3)$, o bien, designando $2^x-1=z$, obtenemos $z^2-2z-8=0$, de donde $z_1=4$, $z_2=-2$. La raíz z_2 es extraña ya que se ha de cumplir la desigualdad $2^x-1>0$ (la desigualdad $2^x+3>0$ queda cumplida por sí misma para cualquier x). La raíz z_1 reduce a la ecuación $2^x-1=4$ de la que hallamos: $x=\log_2 5$.

2. *Dadas las progresiones aritmética y geométrica de términos positivos. Los primeros términos de estas progresiones coinciden, así como los segundos. Demostrar que cualquier otro término de la progresión aritmética no es mayor que un término respectivo de la progresión geométrica.*

Este problema es muy interesante porque denuncia una relación curiosa entre la progresión aritmética y la geométrica.

Así tenemos dos progresiones: $\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ y $\div\!\!\div b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, donde $a_1=b_1$, $a_2=b_2$. Todos los términos de la progresión aritmética son positivos, entonces $a_1>0$ y la diferencia $d\geqslant 0$. La igualdad $a_2=b_2$ en este caso muestra que la diferencia $q=\frac{d}{a_1}+1\geqslant 1$.

Hay que demostrar que $b_{n+1}\geqslant a_{n+1}$, $n=2, 3, \ldots$, o sea, que $a_1q^n-a_1-nd\geqslant 0$. No es difícil obtener esta desigualdad si utilizamos la fórmula del binomio de Newton

$$a_1q^n-a_1-nd=a_1\left(1+\frac{d}{a_1}\right)^n-a_1-nd=$$
$$=a_1\left(1+n\frac{d}{a_1}+C_n^2\frac{d^2}{a_1^2}+\ldots+\frac{d^n}{a_1^n}\right)-a_1-nd=C_n^2\frac{d^2}{a_1}+\ldots\geqslant 0,$$

donde los puntos suspensivos sustituyen los términos positivos no escritos. De aquí se comprende que la igualdad $a_n=b_n$ para todos

---

[1] Préstese atención especial al hecho de que todas las fórmulas y definiciones que se demuestran en la teoría de las progresiones son válidas hasta en los casos en que los términos de las progresiones son números complejos. Sin embargo, en todos los problemas referentes a las progresiones se entiende (si no se especifica lo contrario) que los términos de éstas son números reales.

los valores de n es sólo posible cuando $d=0$, es decir, cuando todos los términos de la progresión aritmética son iguales entre sí.

Se puede ofrecer otra solución sin recurrir a la fórmula del binomio de Newton. Según lo hallado anteriormente, $q \geqslant 1$ y está relacionada con la diferencia d mediante relación $d=a_1q-a_1$. Por lo tanto,

$$a_1q^n-a_1-nd=a_1q^n-a_1-a_1nq+a_1n=a_1(q^n-1)-a_1n\times \\ \times(q-1)=a_1(q-1)\ [q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1-n]\geqslant 0,$$

porque $a_1>0$, $q\geqslant 1$ y la expresión entre los corchetes tampoco es negativa, ya que de $q\geqslant 1$ se desprende que $q^2\geqslant 1$, $q^3\geqslant 1$, ..., $q^{n-1}\geqslant 1$, es decir, $q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q^2+q+1\geqslant n$. La igualdad $a_n=b_n$ para todos los valores de n es posible sólo cuando $q=1$, o sea, si todos los términos de la progresión geométrica son iguales entre sí.

3. *Demostrar que los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ no pueden ser términos de una progresión aritmética.*

En este problema hay que utilizar el concepto de los números racionales e irracionales. Pero, al principio citaremos una demostración que frecuentemente se propone a partir de la afirmación enunciada: "Dado que $\sqrt{3}-\sqrt{2}\approx 1{,}732-1{,}414=0{,}318$ y $\sqrt{5}-\sqrt{3}\approx$ $\approx 2{,}236-1{,}732=0{,}514$, los números propuestos, por consiguiente, no forman una progresión aritmética." Notemos que los cálculos aproximados, sin tener en cuenta su exactitud, no son probatorios en las Matemáticas. Pero, si verificamos la exactitud de los cálculos (lo que no presenta dificultades), esta demostración es incorrecta, ya que muestra que los números dados no pueden ser tres términos *sucesivos* de una progresión aritmética. Sin embargo, no se ha demostrado que éstos no puedan ser tres términos no contiguos de la misma progresión aritmética.

Aquí será correcta la demostración de lo absurdo. Supongamos que en una progresión aritmética, con el primer término a_1 y la diferencia d, tenemos

$$\sqrt{2}=a_k=a_1+(k-1)\,d,\ \ \sqrt{3}=a_m=a_1+(m-1)\,d, \\ \sqrt{5}=a_n=a_1+(n-1)\,d.$$

Restando la primera de la segunda de estas igualdades y luego la segunda de la tercera, obtenemos

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=(m-k)\,d,\ \ \sqrt{5}-\sqrt{3}=(n-m)d;$$

dividiendo la primera entre la segunda de las relaciones obtenidas, tenemos la igualdad

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{m-k}{n-m}. \qquad (3)$$

Parece evidente para algunos estudiantes que esta igualdad es imposible, porque "a la izquierda se encuentra el número irracional y a la derecha, el racional" [1]. Sin embargo, para que este caso sea más riguroso, es necesario demostrarlo, lo que exigirá ciertas consideraciones complementarias que analizaremos a continuación.

Examinemos la igualdad obtenida (3). Su segundo miembro es un número racional, ya que m, k, n son números enteros (recordemos que se llaman *racionales* a todos los números reales de la forma p/q, donde p y q son números enteros, $q \neq 0$). Designemos este número, para abreviar, por r y escribamos la igualdad (3) en forma de $\sqrt{3}-\sqrt{2}=r(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, de donde, al elevar ambos miembros al cuadrado, obtenemos

$$r^2\sqrt{15}-\sqrt{6}=\frac{8r^2-5}{2}.$$

El segundo miembro de esta última igualdad es también un número racional; desígnémoslo por s. Elevemos al cuadrado ambos miembros de la igualdad $r^2\sqrt{15}-\sqrt{6}=s$; obtenemos $\sqrt{10}=\frac{15r^4-s^2+6}{6r^2}$.

Esta igualdad demuestra que $\sqrt{10}$ es un número racional, pero esto es incorrecto [2]. La contradicción obtenida demuestra que la igualdad (3) es imposible, o sea, los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ no pueden ser términos de una progresión aritmética.

Antes de pasar a considerar algunos problemas de progresión geométrica nos detendremos en un problema teórico. Sucede con frecuencia que para la resolución de los problemas es necesario escribir la condición a que los números dados presenten una progresión geométrica. Por lo común, esta condición se inscribe así: los números b_1, b_2, b_3 presentarán una progresión geométrica en el caso, en que

$$b_2:b_1=b_3:b_2,$$

o bien

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}. \tag{4}$$

[1] En este caso los estudiantes parten simplemente del aspecto exterior del número, considerando que una combinación compleja de números irracionales será obligatoriamente un número irracional. Es fácil convencerse que esto no siempre es correcto. Por ejemplo, el número $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$ no es el número irracional, porque un cálculo sencillo muestra que es igual a 5. He aquí un ejemplo más complejo: el número $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$, a pesar de su aspecto "irracional" complejo, en realidad es racional e igual a 2. Puede convencerse en esto, al notar que los radicandos son cubos exactos.

[2] El hecho de que $\sqrt{10}$ es un número irracional se demuestra asimismo como la irracionalidad del número $\sqrt{2}$.

Es fácil darse cuenta de que la última igualdad no es equivalente a la definición de la progresión geométrica $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_2 q$. En realidad, los valores de tres cifras 2, 0, 0 y 0, 0, 0 son progresiones geométricas (en el primer caso la razón es igual a cero, en el segundo, es un número arbitrario), sin embargo, para cada una de éstas la igualdad (4) pierde su sentido. Por eso, la utilización de la igualdad (4), como criterio de la progresión geométrica, es incorrecta, especialmente en los casos, en que b_1 y b_2 son expresiones de una magnitud incógnita, por razón de que no se sabe de antemano si siempre son o no distintos de cero.

Es más correcto presentar la condición requerida no en la forma (4), sino en la forma $b_2^2 = b_1 b_3$ que tiene sentido para todos los valores de b_1, b_2, b_3 (incluso los valores nulos). Se puede enunciar esta condición en una forma más generalizada. Como se sabe es válida la siguiente propiedad: *en la progresión geométrica, el cuadrado de cualquier término (exceptuando, naturalmente, el primero y el último) es igual al producto de sus términos contiguos.* Es fácil comprobar que es correcta también la afirmación inversa: *si n números situados en un orden determinado son tales que el cuadrado de cada uno de ellos (exceptuando el primero y el último) es igual al producto de los números contiguos con éste, entonces estos números presentan una progresión geométrica.* Valiéndose de esa afirmación podríamos seguidamente escribir esta condición (n constituye dos igualdades) con el cumplimiento de la cual los n números dados presentan una progresión geométrica.

Esta propiedad de la progresión geométrica los estudiantes la interpretan a veces así: cualquier término (exceptuando los extremos) de la progresión geométrica es una media geométrica de los términos contiguos. No obstante, está claro que la afirmación en tal forma es válida sólo para las progresiones con términos *positivos* reales. Si la representamos, por ejemplo, para la progresión geométrica $1, -3, 9$, entonces resultará una igualdad incorrecta: $-3 = \sqrt{1 \cdot 9}$.

4. *Demostrar que los tres números* $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{6}$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ *tomados en la sucesión dada, presentan una progresión geométrica solamente para* $\alpha = \pm \pi/3 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Aunque el problema está formulado en forma trigonométrica, su solución se reduce al análisis de las raíces de un polinomio de tercer grado.

Los números dados presentan una progresión geométrica si se cumple la igualdad

$$\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\alpha}{6}. \tag{5}$$

De tal modo, los tres números señalados en la condición del problema presentan una progresión geométrica sólo en el caso cuando α

satisface la ecuación (5) que se puede escribir así:

$$6\cos^3\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 0. \tag{6}$$

Comprobemos si los números dados para $\alpha = \pm\pi/3 + 2\pi k$ presentan realmente una progresión geométrica. Con este valor de α tenemos: $\cos\alpha = 1/2$ y por medio de una sustitución nos convencemos de que esto constituye la raíz de la ecuación (6).

Algunos estudiantes reducen su solución precisamente a tal razonamiento. Sin embargo, este razonamiento no ofrece una demostración completa de la afirmación dada en la condición del problema. Hemos comprobado que para los valores mencionados de α los números dados forman una progresión geométrica; nos queda por demostrar que para ningunos otros valores de α esto resulta cierto. Designemos $\cos\alpha = z$ y consideremos el polinomio $6z^3 + z^2 - 1$. Sabemos que $z = 1/2$ es una raíz suya, y debemos descomponer en factores este polinomio [1]:

$$6z^3 + z^2 - 1 = (2z - 1)(3z^2 + 2z + 1).$$

Como el discriminante del trinomio cuadrático obtenido es negativo, la ecuación (6) no tiene otras raíces reales, excepto $\cos\alpha = 1/2$. Por consiguiente, la igualdad (5), equivalente a la definición de la progresión geométrica, se satisface sólo con los valores de α expuestos en la condición del problema.

5. *Hallar todos los números complejos x e y tales que los números x, $x + 2y$, $2x + y$ formen una progresión aritmética, y los números $(y + 1)^2$, $xy + 5$, $(x + 1)^2$ presenten la progresión geométrica.*

Según se expresa en la condición ahora debemos considerar las progresiones con números complejos.

Dado que los números x, $x + 2y$, $2x + y$ forman una progresión aritmética, tenemos la igualdad $(x + 2y) - x = (2x + y) - (x + 2y)$, de donde se deduce que: $x = 3y$. Ya que los números $(y + 1)^2$, $xy + 5$, $(x + 1)^2$ han de presentar una progresión geométrica, debe cumplirse la igualdad

$$(xy + 5)^2 = (x + 1)^2 (y + 1)^2.$$

En esta igualdad sustituimos $x = 3y$ y aplicamos la fórmula de diferencia de cuadrados, entonces obtendremos una ecuación para determinar y

$$(y - 1)(3y^2 + 2y + 3) = 0,$$

la cual tiene tres raíces: una real y dos imaginarias. De esa manera, la condición del problema la satisfacen tres pares de números:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1 + 2\sqrt{2}\, i, \quad x_3 = -1 - 2\sqrt{2}\, i,$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{-1 + 2\sqrt{2}\, i}{3}, \quad y_3 = \frac{-1 - 2\sqrt{2}\, i}{3}.$$

[1] Por ejemplo, al dividir el polinomio $6z^3 + z^2 - 1$ por $z - 1/2$ se puede conseguir que sean enteros todos los coeficientes en la descomposición resultante.

Por ejemplo, en el primero de estos casos la progresión aritmética tiene la forma 3, 5, 7 y la geométrica 4, 8, 16; en el segundo caso la progresión aritmética tiene la forma

$$-1+2\sqrt{2}\,i,\ \frac{-5+10\sqrt{2}\,i}{3},\ \frac{-7+14\sqrt{2}\,i}{3}$$

$\left(\text{la diferencia es igual a } \frac{-2+4\sqrt{2}\,i}{3}\right)$ y la geométrica

$$\frac{-4+8\sqrt{2}}{9},\ \frac{8-4\sqrt{2}\,i}{3},\ -8,$$

(aquí la razón es igual a $-2-\sqrt{2}\,i$). Análogamente, pueden calcularse las progresiones en el tercer caso.

6. *Hallar una progresión geométrica real si se sabe que la suma de sus primeros cuatro términos es igual a 15 y la suma de sus cuadrados es igual a 85.*

Este problema no presenta dificultades en lo que se refiere a las progresiones; sin embargo, merece un análisis especial la ecuación que resulta de este problema.

Designemos el primer término de la progresión que se busca por a, y su razón, por q. Entonces, los otros tres términos son iguales a aq, aq^2 y aq^3. Según la condición expuesta tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a(1+q+q^2+q^3)=15, \\ a^2(1+q^2+q^4+q^6)=85. \end{cases}$$

Elevando la primera ecuación al cuadrado y dividiendo el resultado entre la segunda, obtenemos una ecuación para q:

$$\frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{45}{17}.$$

Si simplificamos esta ecuación, resultará una ecuación de sexto grado. Pero podemos proceder de otro modo. Transformemos el primer miembro:

$$\frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{\left(\frac{q^4-1}{q-1}\right)^2}{\frac{q^8-1}{q^2-1}}=\frac{(q^4-1)^2}{(q-1)^2}\cdot\frac{q^2-1}{q^8-1}=\frac{q^4-1}{q-1}\cdot\frac{q+1}{q^4+1}=$$

$$=\frac{(q^3+q^2+q+1)(q+1)}{q^4+1}=\frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^4+1}.$$

De tal manera obtenemos la ecuación

$$\frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^4+1}=\frac{45}{17},$$

que puede ser reducida a una ecuación de cuarto grado

$$14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0. \qquad (7)$$

La ecuación obtenida tiene una forma especial, la llamada ecuación *recíproca* de cuarto grado: sus coeficientes equidistantes de los extremos son iguales. La forma general de la ecuación recíproca de cuarto grado se representa así:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0;$$

mediante un procedimiento artificial, se puede resolver cualquier ecuación de esta forma. Señalemos cómo actúa este método en nuestro caso concreto [1], aunque su generalización será evidente en seguida.

Está claro que $q = 0$ no es una raíz de la ecuación (7). Por consiguiente, ambos miembros de esta ecuación se puede dividir entre q^2 y transformar luego el primer miembro del modo siguiente:

$$14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 14\left[\left(q + \frac{1}{q}\right)^2 - 2\right] -$$
$$- 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 14\left(q + \frac{1}{q}\right)^2 - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 45.$$

Designando ahora a $q + 1/q$ por t, obtendremos la ecuación $14t^2 - 17t - 45 = 0$ cuyas raíces son $t_1 = 5/2$, $t_2 = -9/7$. Quedan por resolver dos ecuaciones:

$$q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2}; \quad q + \frac{1}{q} = -\frac{9}{7}.$$

Las raíces de la primera ecuación se hallan sin dificultades: $q_1 = 2$, $q_2 = 1/2$; la segunda ecuación no tiene raíces reales. Sustituyendo sucesivamente los valores hallados de q en la primera ecuación del sistema inicial, obtenemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 8$.

De tal modo, las dos progresiones geométricas siguientes satisfacen la condición del problema [2]:

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots \quad y \quad 8, 4, 2, 1, 1/2, \ldots$$

A veces con el concepto de la progresión se relaciona un caso de Geometría. Así sucede, por ejemplo, en los problemas siguientes.

---

[1] En nuestro caso resultó, además, que $B = C$; en el caso general los coeficientes B y C son distintos.

[2] No es casual el hecho de que resultó recíproca la ecuación (7) durante la resolución del problema. El asunto es que las ecuaciones recíprocas poseen la siguiente propiedad: *si el número a es una raíz, entonces* $1/a$ *también lo es*; esto se demuestra mediante la comprobación directa. La ecuación (7) determina la razón de la progresión. Sin embargo, en la condición del problema el orden de números incógnitos no tiene importancia; por esto, si cualquier número q es la razón de la progresión que satisface la condición, entonces $1/q$ será también la razón de la progresión que satisface la condición (esta progresión está compuesta de los mismos números que la progresión correspondiente a la razón q, pero escritos en el orden contrario). Por consiguiente, es de esperar que la ecuación para q ha de ser recíproca.

7. *¿Para qué valores de la razón, tres términos contiguos de una progresión geométrica pueden hacerse de longitudes de los lados de un triángulo?*

Es absolutamente evidente que, con la razón igual a 1, cualesquiera tres términos de la progresión geométrica (siendo positivo el primero) pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo equilátero.

Supongamos que nos han propuesto tres números positivos desiguales a, aq, aq^2; ¿para qué valores de q estos números pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo?

Se sabe que tres segmentos forman un triángulo cuando, y sólo cuando, cada uno de éstos es menor que la suma de los otros dos. En realidad, para aclarar si los tres segmentos dados forman un triángulo, es suficiente comprobar si el segmento mayor es menor que la suma de los otros dos.

Utilizando esta propiedad vamos a resolver este problema. Necesitamos aclarar para cuáles valores de q, el mayor de los tres números a, aq, aq^2 es menor que la suma de los otros dos. Claro está que para $q>1$ el número mayor será aq^2, y para $q<1$, el mayor número será a. Por eso examinemos dos casos:

a) Sea $q>1$. En este caso debe cumplirse la desigualdad

$$aq^2<aq+a.$$

Ya que a es un número positivo, de ahí obtenemos que la razón q satisface la desigualdad $q^2-q-1<0$. La solución de esta desigualdad serán todos los valores de q que se tienen en el intervalo

$$\frac{-\sqrt{5}+1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Tomando en consideración que en el caso $q>1$ obtenemos que q puede variar en el intervalo

$$1<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

para cualquier valor de q de este intervalo los tres números a, aq, aq^2 pueden ser las longitudes de los lados del triángulo.

b) Sea $0<q<1$. Puede hallarse un intervalo dentro del cual debe variar la razón q. Sin embargo, procederemos de un modo diferente.

Escribamos la progresión a, aq, aq^2 a la inversa: aq^2, aq, a y designemos su razón, igual a $1/q$, por q'. Ya que $q<1$, entonces $q'=1/q>1$. Por eso llegamos al caso anterior y obtenemos que q' ha de variar dentro del intervalo $1<q'<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, es decir, $1/q$ está comprendido dentro del intervalo $1<\frac{1}{q}\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. De ahí demostramos que en el caso que se examina q puede variar dentro del intervalo

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < 1.$$

Reuniendo todos los casos considerados más arriba, obtenemos que la razón q de la progresión puede variar solamente dentro del intervalo

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

8. *Una recta pasa por el centro del cuadrado $ABCD$ y interseca el lado AB en el punto N, $AN:NB=1:2$. En esta recta tomamos un punto arbitrario M que se encuentra dentro del cuadrado. Demostrar que*

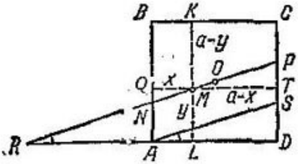


Fig. 15

las distancias desde el punto M hasta los lados del cuadrado AB, AD, BC, CD, tomados en la sucesión indicada, forman una progresión aritmética.

Designemos por x (fig. 15) la distancia desde el punto M hasta el lado AB y por y hasta el lado AD; entonces, las distancias hasta los lados BC y CD serán respectivamente iguales: $a-y$ y $a-x$, donde a es el lado del cuadrado.

Si a través del punto A trazamos $AS \parallel NP$, será fácil comprender que $\operatorname{tg}\angle SAD = 1/3$. Prolonguemos NP hasta la intersección con la prolongación de AD en el punto R y analicemos ΔRML. Ya que $PD=2SD$, según la propiedad conocida de las paralelas, concluimos que $RD=2AD=2a$, por lo cual $RL=2a-(a-x)=a+x$. Seguidamente tenemos: $\frac{ML}{LR}=\operatorname{tg}\angle MRL$, de donde $y=\frac{a+x}{3}$.

Ahora nos queda por comprobar que para cualquier $0<x<a$ los cuatro números: x, $\frac{a+x}{3}$, $a-\frac{a+x}{3}=\frac{2a-x}{3}$, $a-x$ forman la progresión aritmética. Esta comprobación procede directamente de la definición de la progresión aritmética:

$$\frac{a+x}{3}-x=\frac{2a-x}{3}-\frac{a+x}{3}=a-x-\frac{2a-x}{3}.$$

Durante la resolución de este problema algunos estudiantes cometen un error grave. Afirman que los cuatro números MQ, ML, MK, MT forman la progresión aritmética simplemente ya que la suma de los términos extremos, $MQ+MT=a$, es igual a la suma de los términos medios $ML+MK=a$. Es evidente la falta de argumentos de esta afirmación. Efectivamente, si los cuatro números forman una progresión aritmética, la suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos medios. No obstante, aunque esta propiedad resulta satisfecha para los cuatro números éstos *no están obligados* a formar una progresión aritmética (por ejemplo: 1, 6, 5, 10).

Notemos que en algunos problemas la aplicación de ciertas fórmulas para las progresiones aritmética o geométrica es posible sólo después de algunas transformaciones especiales.

9. *Hallar el término general de la sucesión* 2, 4, 7, 11, ..., *cuya propiedad es que las diferencias entre los términos contiguos forman una progresión aritmética.*

Examinemos un procedimiento para hallar el término general de cualquiera que sea la sucesión, en la cual las diferencias entre los términos contiguos formen una progresión aritmética.

Designemos la sucesión dada por $a_1, a_2, a_3, \ldots$; entonces,

$$\begin{aligned} a_2-a_1&=r_1,\\ a_3-a_2&=r_2,\\ a_4-a_3&=r_3,\\ &\cdots\cdots\\ a_n-a_{n-1}&=r_{n-1} \end{aligned}$$

y según la condición, los números $r_1, r_2, r_3, \ldots$ forman una progresión aritmética. Sumando todas las igualdades escritas y reduciendo todos los términos semejantes obtenemos que

$$a_n=a_1+r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}.$$

En nuestro caso el primer término de la sucesión es igual a 2 y la suma de la progresión aritmética (su primer término es 2, la diferencia es igual a 1) se halla fácilmente:

$$r_1+\ldots+r_{n-1}=\frac{2r_1+d(n-2)}{2}(n-1)=\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Por eso

$$a_n=2+\frac{(n-1)(n+2)}{2}=1+\frac{n(n+1)}{2}.$$

10. *Hallar la suma*

$$1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+5\cdot2^4+\ldots+100\cdot2^{99}.$$

La suma propuesta no es una suma de progresión geométrica. Sin embargo, si se manifiesta cierta "maestría", la solución se logra sin mucho esfuerzo partiendo de las fórmulas ya conocidas.

Vamos a escribir la suma propuesta, designándola por S, en la forma

$$\begin{aligned} S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ + 2^3 + \ldots + 2^{98} + 2^{99} + \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + 2^{98} + 2^{99} + \\ + 2^{99}. \end{aligned}$$

Es evidente que en cada uno de los renglones hay una suma de cierta progresión geométrica; aplicando la fórmula adecuada, obtenemos que

$$\begin{aligned} S = \frac{1(2^{100}-1)}{2-1} + \frac{2(2^{99}-1)}{2-1} + \frac{2^2(2^{98}-1)}{2-1} + \frac{2^3(2^{97}-1)}{2-1} + \ldots \\ \ldots + \frac{2^{98}(2^2-1)}{2-1} + \frac{2^{99}(2-1)}{2-1} = (2^{100}-1) + (2^{100}-2) + \\ + (2^{100}-2^2) + (2^{100}-2^3) + \ldots + (2^{100}-2^{98}) + (2^{100}-2^{99}) = \\ = 100 \cdot 2^{100} - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) = 100 \cdot 2^{100} - \\ - \frac{1(2^{100}-1)}{2-1} = 99 \cdot 2^{100} + 1. \end{aligned}$$

11. *Hallar el coeficiente para todos los valores de x^n en la descomposición* $(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n)^2$.

Lo primero es comprender de qué modo pueden aparecer en la descomposición los términos con x^n. Según la fórmula del cuadrado del polinomio, la descomposición incógnita va a contener: primero, los cuadrados de todos los términos de la suma propuesta por la condición; segundo, todos los productos de pares duplicados de estos términos. Es fácil observar: si el número n es impar, los términos con x^n de la descomposición pueden ser obtenidos sólo de los productos dobles; si el número n es par, los términos con x^n de la descomposición también pueden ser obtenidos de los productos dobles; pero, el mismo término puede obtenerse, además, como resultado de la elevación al cuadrado del sumando $\frac{n}{2} x^{\frac{n}{2}}$.

Por consiguiente, para resolver este problema es natural considerar por separado dos casos: cuando n es par y cuando n es impar.

Examinemos al principio el caso en que n es par. Entonces la suma propuesta tiene $n + 1$ términos, es decir, su número es impar y la expresión dada puede anotarse en la siguiente forma, eliminando el término medio:

$$\left[1 + x + 2x^2 + \ldots + \left(\frac{n}{2} - 1\right) x^{\frac{n}{2}-1} + \frac{n}{2} x^{\frac{n}{2}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{n}{2} + 1\right) x^{\frac{n}{2}+1} + \ldots + (n-1) x^{n-1} + nx^n\right]^2 .$$

Es evidente que entre los cuadrados de los términos de nuestra suma sólo el cuadrado del término medio nos proporciona el término con x^n, y a partir de los productos dobles la potencia desconocida la darán solamente los productos de los términos equidistantes de los extremos. Por consiguiente, el coeficiente incógnito será igual a:

$$S=\left(\frac{n}{2}\right)^2+2\cdot 1\cdot n+2\cdot 1\cdot (n-1)+2\cdot 2\cdot (n-2)+\ldots$$

$$\ldots+2\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^2+2n+2\cdot 1\cdot n+$$

$$+2\cdot 2\cdot n+2\cdot 3\cdot n+\ldots+2\left(\frac{n}{2}-1\right)n-$$

$$-2\cdot 1\cdot 1-2\cdot 2\cdot 2-2\cdot 3\cdot 3-\ldots-2\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)=$$

$$=\frac{n^2}{4}+2n+2n\left[1+2+3+\ldots+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]-$$

$$-2\left[1^2+2^2+3^2+\ldots+\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right].$$

La suma entre los primeros corchetes se calcula como una suma de progresión aritmética; la suma entre los segundos corchetes se determina por la fórmula de la suma de cuadrados de números enteros:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Es muy útil saber y poder demostrar esta fórmula. Un cálculo simple muestra que cuando n es par el coeficiente de x^n es igual a:

$$S=\frac{n(n^2+11)}{6}.$$

Ahora tenemos que n es un número impar. En este caso la suma propuesta tiene $n+1$ términos, es decir su número es par, y en la expresión dada hay dos términos medios:

$$\left[1+x+2x^2+\ldots+\frac{n-1}{2}x^{\frac{n-1}{2}}+\frac{n+1}{2}x^{\frac{n+1}{2}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(n-1)x^{n-1}+nx^n\right]^2.$$

Es fácil comprender que los términos con x^n pueden aparecer ahora sólo como resultado de los productos dobles de los términos equidistantes de los extremos. Por consiguiente, el coeficiente buscado es igual a:

$$S=2\cdot 1\cdot n+2\cdot 1\cdot (n-1)+2\cdot 2\cdot (n-2)+\ldots+2\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=$$

$$=2n+2\cdot 1\cdot n+2\cdot 2\cdot n+2\cdot 3\cdot n+\ldots+2\cdot\frac{n-1}{2}\cdot n-$$

$$-2\cdot 1\cdot 1-2\cdot 2\cdot 2-2\cdot 3\cdot 3-\ldots-2\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}=$$
$$=2n+2n\left[1+2+3+\ldots+\frac{n-1}{2}\right]-$$
$$-2\left[1^2+2^2+3^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]=\frac{n(n^2+11)}{6}.$$

De este modo se ve que la fórmula definitiva no depende de la paridad o imparidad del número n.

Son muchos los problemas referentes a la composición de las ecuaciones que están relacionados con las progresiones, mas la mayoría de éstos sólo utilizan las definiciones de las progresiones. Consideremos aquí un solo problema con respecto a la composición de las ecuaciones del tipo de "problemas de soluciones químicas". Los problemas de tal tipo, en los cuales la progresión geométrica está presente con poca evidencia, se encuentran con bastante frecuencia y presentan dificultades.

12. *De un depósito que contiene* 729 l *de un ácido puro, se ha extraído* a l *y se ha rellenado con agua. Después del mezclado total (hasta que se obtenga una solución homogénea), del déposito se ha extraído de nuevo* a l *de la solución y se ha rellenado con agua revolviendo la mezcla escrupulosamente. Después de repetir* 6 *veces tales operaciones, el liquido de depósito contenía* 64 l *de ácido puro. Determinar el valor de* a.

Después de que del depósito se haya extraido por vez primera a l de ácido puro y se haya repuesto con agua, en éste quedó, naturalmente, $729-a$ l de ácido puro. Es evidente que un litro de la solución ahora contiene $\frac{729-a}{729}$ l de ácido puro. Por segunda vez del depósito se extrae $a\cdot\frac{729-a}{729}$ l de ácido y en éste queda

$$729-a-a\cdot\frac{729-a}{729}=\frac{(729-a)^2}{729}\text{ l}$$

de ácido. Por consiguiente, al reponer el depósito con agua por segunda vez, un litro de la solución contiene $\frac{729-a}{729}:729=\frac{(729-a)^2}{729^2}$ l de ácido. Por lo tanto, la tercera sustracción disminuye la cantidad de ácido en el depósito más en $a\cdot\frac{(729-a)^2}{729^2}$ l, es decir, después de la tercera operación en el depósito quedan

$$\frac{(729-a)^2}{729}-a\cdot\frac{(729-a)^2}{729^2}=\frac{(729-a)^3}{729^2}\text{ l}$$

de ácido.

No es difícil notar que la cantidad de ácido en el depósito, después de la sexta operación, ha de ser igual a

$$\frac{(729-a)^6}{729^5}\ 1.$$

Pero, esta suposición no sustituye, como es natural, la demostración. Para que la rigurosidad sea más completa, convendría repetir seis veces los razonamientos expuestos arriba, y convencerse de que, después de la sexta operación, en el depósito quedará precisamente tal cantidad de ácido puro[1]. Ia ecuación

$$\frac{(729-a)^6}{729^5}=64,$$

si anotamos que $2^6=64$ y $3^6=729$, se determina inmediatamente que $a=243$. De tal modo, en cada operación se extraían 243 litros del líquido.

Sacando la conclusión de este párrafo es necesario decir algunas palabras respecto a la progresión geométrica infinitamente decreciente. Aquí se debe, sobre todo, tener una idea clara de la diferencia de principio entre *la definición del concepto* de la suma de tal progresión y *el cálculo de la cantidad* de esta suma.

Si tenemos una cantidad *finita* de números, entonces *la suma* u_1+ $+u_2+u_3+\ldots+u_n$ de estos números tiene un sentido determinado por completo, de acuerdo con los conceptos aritméticos. Tenemos que hallar el número $S_2=u_1+u_2$, adicionar al número obtenido S_2 el tercer número dado y obtener $S_3=S_2+u_3 u_1+u_2+u_3$, a éste adicionarle el cuarto número dado y obtener $S_4=S_3+u_4$, etc., hasta que queden agotados todos los números dados.

Sin embargo, si la cantidad de números es *infinita* es evidente que la determinación de la suma recién dada, es inaplicable, porque nunca podemos agotar todos los números dados. Por esta causa, la anotación $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ hasta ahora no tiene sentido: en efecto, no sabemos qué significa adicionar una cantidad infinita de números.

En este caso procedemos del modo siguiente. Calculemos las lla-

---

[1] Es fácil demostrar también que las cantidades de ácido en el depósito después de cada operación:

$$729-a,\quad \frac{(729-a)^2}{729},\quad \frac{(729-a)^3}{729^2},\ \ldots$$

representan una progresión geométrica con la razón $\frac{729-a}{729}=1-\frac{a}{729}$. En realidad, si después de n-ésima operación en el depósito queda k_n l de ácido puro, entonces 1 l de la solución tendrá $\frac{k_n}{729}$ l de ácido y, como resultado de la $n+1$ operación, la cantidad de ácido disminuye en $\frac{ak_n}{729}$ l y será igual a $k_{n+1}=k_n-\frac{ak_n}{729}=k_n\left(1-\frac{a}{729}\right)l.$

madas *sumas parciales*, o sea, las sumas de un número finito de sumandos:

$$S_1 = u_1;$$
$$S_2 = u_1 + u_2;$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

puede calcularse (de un modo habitual) para cualquier valor de k. Para la sucesión numérica obtenida de este modo

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots,\ S_k,\ \ldots$$

hay dos posibidilades: una, que tenga límite, otra que no lo tenga. Si esta sucesión de las sumas parciales no tiene límite cuando $k \to \infty$, entonces la suma de los números $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots\ ,\ u_n, \ldots$ no se determina. *Si el límite existe, entonces ésta, según la definición, se denomina suma de los números dados*; si este límite es igual a S:

$$\lim_{k \to \infty} S_k = S,$$

entonces se escribe que

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S.$$

De tal manera, la suma de un conjunto infinito de números es un concepto absolutamente nuevo, distinto por su esencia de la noción de la suma que existe en las Aritméticas.

Si ahora consideramos *una progresión geométrica infinitamente decreciente* [1]

$$a,\ aq,\ aq^2, \ldots,\ aq^n,\ \ldots |q| < 1,$$

entonces la sucesión de las sumas parciales en este caso tiene evidentemente un límite que es igual a: $S = \frac{a}{1-q}$. De tal modo, *la progresión geométrica infinitamente decreciente tiene una suma que es igual a*:

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Conviene tener muy presente que antes de *calcular* la suma de sucesión infinita de los números, hay que convencerse de su *existencia.* Esto se ve claramente en el ejemplo que a continuación se

[1] *La progresión geométrica* con un número infinito de términos y una razón menor que 1 por su valor absoluto, se denomina *infinitamente decreciente*. Sin embargo, esta denominación no es del todo exacta: la progresión infinitamente decreciente puede no ser decreciente y será en realidad decreciente solamente en el caso cuando su primer término sea positivo y la razón satisfaga la desigualdad $0 < q < 1$. Por ejemplo, la progresión geométrica infinitamente decreciente $1, -1/2, 1/4, -1/8, \ldots$ no es decreciente según la terminología admitida.

menciona. Tratemos de hallar la suma de la siguiente progresión geométrica infinita: 2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ... Si planteamos el problema, designando la suma por S:

$$S = 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n + \ldots,$$

entonces, multiplicando por 2 ambos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$4 + 8 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} + \ldots = 2S,$$

de donde se desprende que $2 + 2S = S$ y, por consiguiente, $S = -2$. El resultado extraño obtenido,— la suma de una cantidad infinita de números positivos es negativa —, se puede explicar muy fácilmente: la sucesión inicial no tiene suma debido a que nuestros cálculos son absurdos. En realidad, la sucesión de sumas parciales

$$S_1 = 2, \ \ S_2 = 2 + 4 = 6, \ \ S_3 = 2 + 4 + 8 = 14, \ \ \ldots, \ \ S_k = 2^{k+1} - 2, \ \ldots$$

para $k \to \infty$ no tiene límite.

13. *Hallar una progresión geométrica infinitamente decreciente cuya suma es dos veces más que la suma k de sus primeros términos.*

Este problema es interesante ya que por ello nosotros no llegamos a una solución *única*. Tal situación resulta a veces durante la resolución de los problemas con progresiones.

Designemos el primer término de la progresión por a, y la razón, por q; entonces, según la condición, podemos representar la igualdad

$$\frac{a}{1-q} = \frac{2a(1-q^k)}{q-1},$$

donde k es el número propuesto por condición del problema. De esto obtenemos que

$$1 = 2(1 - q^k), \ \ q^k = \frac{1}{2}.$$

Si k es impar, esta ecuación tiene la raíz única (nos limitamos a hallar progresiones solamente con términos reales)

$$q = \sqrt[k]{1/2},$$

la que en este caso es precisamente la razón de la progresión; en caso de que k es par, entonces resultan dos raíces

$$q = \pm\sqrt[k]{1/2};$$

estas raíces pueden ser razones de la progresión desconocida. De tal modo, para k par la razón de la progresión no se determina unívocamente.

En lo que se refiere al primer término de la progresión, es imposible hallarlo porque nos faltan condiciones. Esto significa que *cualquier* progresión geométrica, infinitamente decreciente, con uno de los valores indicados en la razón y con el primer término arbitrario, dispone de la propiedad enunciada en el problema.

EJERCICIOS:

1. El primer término de una progresión geométrica es igual a $x-2$, el tercer término es igual a $x+6$, y la media aritmética de los términos primero y tercero se refiere al segundo como $5:3$. Determinar x.

2. Sea $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$ y $\frac{1}{c+a}$ tres términos sucesivos de una progresión aritmética. Demostrar que b^2, a^2 y c^2 son también términos sucesivos de una progresión aritmética.

3. Tres números reales distintos de cero forman una progresión aritmética y los cuadrados de estos números tomados en la misma sucesión, forman una progresión geométrica. Hallar todas las razones posibles de esta última progresión.

4. Los lados de un triángulo rectángulo forman una progresión geométrica. Hallar las tangentes de sus ángulos agudos.

5. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2-3x+A=0$, y x_3 y x_4, las raíces de la ecuación $x^2-12x+B=0$. Se sabe que los números x_1, x_2, x_3, x_4 (en la sucesión dada) forman una progresión geométrica creciente. Hallar A y B.

6. A lo largo de un camino se encontraba un número impar de piedras, a 10 m una de la otra. Había que recoger estas piedras en el lugar donde se encontraba la piedra media. El hombre puede llevar una sola piedra; las trasladaba sucesivamente empezando por uno de los extremos. Al recoger todas las piedras, el hombre caminó 3 km. ¿Cuántas piedras había en el camino?

7. Tres hermanos, cuyas edades forman una progresión geométrica, reparten entre sí una suma del dinero directamente proporcional a su edad. Si lo hacen dentro de tres años, cuando el menor será dos veces más joven que el mayor, entonces el menor habrá recibido 105 rublos y el mediano 15 rublos más que ahora. ¿Cuántos años tiene cada uno de los hermanos?

8. Sean b_1, b_2, b_3, tres términos sucesivos de una progresión geométrica con la razón q. Hallar todas aquellas q para las cuales es válida la desigualdad $b_3>4b_2-3b_1$.

9. Las cosechadoras de cereales de que dispone una granja son capaces de recolectar la cosecha durante un día (24 horas). Pero, según el plan de trabajo, durante la primera hora de recolección funcionaba solamente una cosechadora, durante la segunda hora, dos, durante la tercera, tres, etc., hasta que no se pongan en acción todas las cosechadoras; todas las máquinas trabajaban solamente unas horas antes de finalizar la recolección. El tiempo de trabajo previsto por el plan se habría reducido en 6 horas si al principio hubiesen trabajado permanentemente todas las cosechadoras menos cinco.

¿Cuántas máquinas tenía la granja?

10. Un depósito se llenaba de gasolina durante un número entero de horas con lo que la relación de la cantidad de gasolina depositada en cada hora consecutiva a la cantidad de la misma, vertida en la hora precedente, es una magnitud constante. Antes de una hora del llenado en el depósito había 372 l. Si se extrae del depósito completo aquella cantidad de gasolina que fue depositada durante la primera hora, quedaría 186 l; si más tarde se extrae aquella cantidad de gasolina que fue depositada durante la segunda, la última y la penúltima horas a la vez, en el depósito quedaría 72 l. ¿Qué cantidad de gasolina fue echada en el depósito durante la primera hora?

11. En un recipiente con agua pura se ha llenado 6 l de una solución al 64% de alcohol, después de revolverla totalmente se ha extraído una cantidad determinada (es decir, 6 l) de la solución obtenida.

¿Qué cantidad de agua había al principio, si después de esta triple operación en el recipiente hay una solución de alcohol cuya concentración es del 37%?

12. Se sabe que los números 3, $3\log_y x$, $3\log_z y$, $7\log_x z$ forman una progresión aritmética. Demuéstrese que $x^{18}=y^{21}=z^{28}$.

13. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x^4 = y^4 + z^4, \\ xyz = 8, \end{cases}$$

sabiendo que los logaritmos $\log_y x$, $\log_z y$, $\log_x z$ forman una progresión geométrica.

14. Se sabe que para la progresión aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ tiene lugar una igualdad $s_m/s_n = m^2/n^2$ (s_k es la suma de los primeros k términos de la progresión).

Demostrar que $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

15. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los números que forman una progresión geométrica. Sabiendo las sumas

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{y} \quad T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n},$$

hallar el producto $P = a_1 a_2 \ldots a_n$.

16. ¿Para cuáles valores de x los números $2x^2$, x^4, 24, tomados en la sucesión indicada, forman una progresión aritmética?

17. ¿Para cuáles valores de x los números 1, x^2, $6-x^2$, tomados en la sucesión indicada, forman una progresión geométrica?

§ 8. DEMOSTRACIÓN DE LAS DESIGUALDADES

Este párrafo está dedicado al análisis de demostración de las desigualdades tanto algebraicas como numéricas. Desde luego, sería bueno señalar un método único de demostración de todas las desigualdades. Lamentablemente, no existe tal método. Sin embargo, a continuación serán expuestos algunos procedimientos con ayuda de los cuales se logra demostrar un gran número de desigualdades.

Señalemos unas cuantas desigualdades que son de uso frecuente para la solución de muchos problemas. Se puede considerar como tales desigualdades la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, su corolario de la suma de cantidades recíprocamente inversas, así como la siguiente desigualdad trigonométrica:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a \operatorname{sen} x + b \cos x \leqslant \sqrt{a^2+b^2}. \tag{1}$$

A continuación nos aprovecharemos de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica para dos números por razón de que la citamos.

Para cualesquier números no negativos a y b es válida la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \tag{2}$$

con esto el signo de igualdad tiene lugar sólo en el caso en que $a=b$.

Un caso particular de la desigualdad (2) lo representa la desigualdad

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2,$$

la que es válida para $x>0$. El signo de igualdad se logra en esta desigualdad solamente para $x=1$. Es útil retener el enunciado de esta desigualdad:

La suma de dos números positivos recíprocamente inversos no es menor que dos, siendo igual a dos sólo en el caso cuando ambos números son iguales a la unidad.

Notemos también que para cualquier $x \neq 0$ es válida la desigualdad

$$\left|x+\frac{1}{x}\right| \geqslant 2,$$

o bien,

$$\left|\frac{1+x^2}{2x}\right| \geqslant 1. \tag{3}$$

1. *Demostrar la desigualdad* $\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}>2.$

Fundamentándonos en las propiedades de los logaritmos $1/\log_\pi 2 = \log_2\pi > 0$, es decir que, en el primer miembro de nuestra desigualdad se halla la suma de dos números positivos recíprocamente inversos, distintos de 1 ($\log_2 \pi \neq 1$). Y ésta suma es mayor que dos. Por consiguiente, la desigualdad inicial es válida.

2. *Demostrar que si* $a>0$, $b>0$, $c>0$, *entonces*

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geqslant a+b+c.$$

Utilicemos las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right) \geqslant c, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right) \geqslant a, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right) \geqslant b$$

(estas desigualdades son válidas, porque a la izquierda de cada una de éstas se encuentran las medias aritméticas y a la derecha, las medias geométricas de los números positivos). Sumando estas desigualdades, término a término, obtenemos la desigualdad que fue necesario demostrar.

3. *Demostrar que si* $a>0$, $b>0$, $c>0$, *entonces*

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc.$$

Al tomar las siguientes desigualdades (véase la fórmula (2)):

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geqslant 2\sqrt{bc}, \quad a+c \geqslant 2\sqrt{ac}$$

y multiplicándolas, término a término, obtenemos la incógnita.

Es posible demostrar esta desigualdad de otro modo, utilizando la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica para 8 números positivos (véase fórmula (5) pág. 114). Efectivamente, eliminando los paréntesis del primer miembro de nuestra desigualdad conseguimos representarla así:

$$\frac{a^2b+b^2c+c^2b+a^2c+b^2a+c^2a+abc+abc}{8} \geqslant abc.$$

En esta desigualdad, a la izquierda se encuentra la media aritmética de 8 números positivos y a la derecha, su media geométrica lo que es fácil comprobar; con esto queda demostrada la desigualdad inicial.

Antes de pasar a los ejemplos ulteriores hagamos una observación general. El error típico que se comete a menudo durante la demostración de las desigualdades consiste en lo siguiente. El estudiante escribe la desigualdad que ha de ser demostrada, luego hace algunas transformaciones (¡absolutamente legítimas!) y llega, al fin y al cabo, a una desigualdad evidentemente justa (por ejemplo, $1<2$ ó $(a-b)^2\geqslant 0$) después de lo cual llega a la conclusión: "por consiguiente, la desigualdad queda demostrada". En esto consiste el error lógico: ¡de esta desigualdad correcta obtenida no se deduce aún que la desigualdad inicial sea correcta! Hablando más precisamente, hemos demostrado lo siguiente: si suponemos que la desigualdad propuesta para la demostración es justa, la desigualdad obtenida por transformaciones también es justa. Pero, que esta desigualdad final es justa, lo sabemos sin estas conclusiones y en nada nos hemos enterado de la desigualdad que habría de ser demostrada.

Sería lógicamente justo razonar en sentido contrario. Es necesario tomar una desigualdad, evidentemente válida, y realizar con ésta tales transformaciones (legítimas, claro está, desde el punto de vista de las reglas del Algebra y Trigonometría) que nos conduzcan a la desigualdad que tenía que ser demostrada. Este razonamiento ya es de pleno valor: hemos partido de la desigualdad justa y por medio de unas transformaciones legítimas hemos llegado a una nueva desigualdad que por eso también es justa.

Desde luego, nos queda una pregunta fundamental: ¿de cuál desigualdad hay que partir y cómo debe transformarse para llegar a la desigualdad requerida? Para responder a esta pregunta puede realizarse la transformación de la desigualdad propuesta que nos conduce a una desigualdad evidentemente justa. Sin embargo, esta etapa de la solución del problema ha de considerarse no como la demostración sino como *la búsqueda* de la demostración, como el intento de encontrar una vía correcta. Si como resultas de esta búsqueda, es decir, de estas transformaciones, hemos logrado llegar a una desigualdad evidentemente válida, puede iniciase la demostración verdadera: hay que tomar esta desigualdad y realizar con ella todas las transformaciones que se hacían durante la búsqueda, pero en sucesión inversa, por así decirlo: "invertir" el curso de los cálculos. Si este curso de cálculos inverso va siendo legítimo todo el tiempo, entonces la desigualdad a demostrar es realmente válida.

Por lo demás, a menudo se procede de otra manera. Si en el transcurso de la búsqueda de la demostración, en el proceso de reducción de nuestra desigualdad a la evidente, hemos sustituido cada vez la desigualdad por otra, equivalente (véase § 10, Parte I), entonces la última desigualdad es igual a la inicial y por razón de su validez se deduce inmediatamente que la desigualdad inicial es válida. Por consiguiente, no se requiere ningún "curso de cálculos inverso", si en cada etapa de la transformación hemos comprobado y subrayado especialmente la equivalencia de las desigualdades respectivas.

Precisamente, aprovechemos estos razonamientos para la demostración de las siguientes desigualdades.

4. *Demostrar la desigualdad*

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3, \quad \textit{donde } a>0,\ b>0.$$

Sustituyamos esta desigualdad por una equivalente:

$$\frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \geqslant 0.$$

Sacándola del paréntesis y reagrupándola puede escribirse en una forma equivalente:

$$\frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Ya que $a>0$ y $b>0$, esta desigualdad es evidente con lo que queda demostrada la validez de la desigualdad inicial equivalente a la primera.

5. *Demostrar que si* $a>0$, $b>0$, *entonces para cualesquier* x *e* y *es justa la desigualdad*

$$a\cdot 2^x + b\cdot 3^y + 1 \leqslant \sqrt{4^x+9^y+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2+1}.$$

Según la condición del problema, ambos miembros de esta desigualdad son positivos, por lo cual es equivalente a la siguiente (véase § 10, Parte I):

$$(a\cdot 2^x + b\cdot 3^y + 1)^2 \leqslant (4^x+9^y+1)\,(a^2+b^2+1),$$

o bien, a la siguiente:

$$a^2\cdot 4^x + b^2\cdot 9^y + 1 + 2ab2^x3^y + 2a2^x + 2b3^y \leqslant 4^xa^2 + 4^xb^2 + 4^x + \\ + 9^ya^2 + 9^yb^2 + 9^y + a^2 + b^2 + 1.$$

Permutando todos los términos de esta desigualdad al primer miembro, reduciendo en él los términos semejantes y reagrupándolos, la escribiremos en una forma equivalente:

$$(a^29^y - 2ab2^x3^y + 4^xb^2) + (4^x - 2a2^x + a^2) + (9^y - 2b\cdot 3^y + b^2) \geqslant 0.$$

En vista de que cada paréntesis es un cuadrado exacto, obtenemos entonces que la desigualdad inicial es equivalente a la siguiente desigualdad evidente:

$$(a3^y - b2^x)^2 + (2^x - a)^2 + (3^y - b)^2 \geqslant 0.$$

De tal modo, la desigualdad inicial es válida.

Notemos que esta desigualdad es también válida para cualesquier a y b (al lector se le deja la demostración de este caso).

6. *Demostrar que para cualesquier x es válida la desigualdad*

$$-1 \leqslant \frac{\sqrt{3}\,\operatorname{sen} x}{2+\cos x} \leqslant 1.$$

Esta desigualdad es equivalente (véase § 4, Parte I) a la desigualdad $|(\sqrt{3}\,\operatorname{sen} x)/(2+\cos x)| \leqslant 1$. Como ambos miembros de esta desigualdad no son negativos, entonces, al elevarla al cuadrado y multiplicarla por la expresión positiva $(2+\cos x)^2$, obtenemos la desigualdad equivalente $3\,\operatorname{sen}^2 x \leqslant (2+\cos x)^2$. Sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ por $1-\cos^2 x$ y haciendo la agrupación pertinente, obtenemos que $(2\cos x+1)^2 \geqslant 0$. Esta desigualdad es válida para todas x y por tanto, que es equivalente a la desigualdad inicial, esta última es también válida; lo que era necesario demostrar.

La desigualdad inicial se puede demostrar también de otro modo, al utilizar la desigualdad (1). En realidad, ya que $2+\cos x>0$ para toda x, entonces, al multiplicarla por $2+\cos x$, obtenemos la siguiente doble desigualdad, equivalente a la inicial:

$$-2-\cos x \leqslant \sqrt{3}\,\operatorname{sen} x \leqslant 2+\cos x.$$

La primera de estas desigualdades se puede anotar en la forma

$$-2 \leqslant \sqrt{3}\,\operatorname{sen} x + 1\cdot\cos x.$$

Ahora se ve que esto es un caso particular de la desigualdad (1), es decir, es una desigualdad válida. Análogamente se demuestra la validez de la segunda desigualdad.

7. *Demostrar que para cualquier α es válida la desigualdad* $4\,\operatorname{sen}\times\times 3\alpha+5 \geqslant 4\cos 2\alpha+5\operatorname{sen}\alpha$.

Durante la demostración de esta desigualdad resultó uno de los errores más graves: "la demostración" se realizó por sustitución de algunos valores.

Algunos estudiantes razonaban más o menos así: "Para $\alpha=0°$ esta desigualdad es válida, porque $5>4$; para $\alpha=30°$ esta desigualdad es válida, porque $4+5>4\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{2}$, para $\alpha=45°$, $60°$, $90°$ es evidentemente válida. Por lo tanto, esta desigualdad es válida también para todas α".

En realidad, el estudiante ha demostrado la desigualdad sólo teniendo presente algunos valores particulares de α y nada ha demostrado para las demás α. Y la demostración correcta se la puede realizar, por ejemplo, así.

Como se sabe, $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$, $\cos 2\alpha = 1-2\operatorname{sen}^2\alpha$. Por esto, la desigualdad inicial se puede anotar del modo siguiente:

$$4(3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha)+5 \geqslant 4(1-2\operatorname{sen}^2\alpha)+5\operatorname{sen}\alpha,$$

o bien,

$$16\operatorname{sen}^3\alpha - 8\operatorname{sen}^2\alpha - 7\operatorname{sen}\alpha - 1 \leqslant 0.$$

La última desigualdad tiene que ser satisfecha para cualquier α. Al designar $\operatorname{sen}\alpha$ por x, la anotaremos en la forma

$$16x^3 - 8x^2 - 7x - 1 \leqslant 0.$$

Nos hace falta demostrar que esta desigualdad es justa para cualquier x en el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Apliquemos a esta desigualdad el método de agrupación ya utilizado anteriormente. La última desigualdad puede representarse así:

$$8x^2(x-1) + 7x(x^2-1) + (x^3-1) \leqslant 0,$$

o bien, de esta otra forma: $(x-1)(4x+1)^2 \leqslant 0$. Esta desigualdad es evidentemente válida, quedando demostrada la desigualdad inicial.

Para la demostración de unas desigualdades es preciso utilizar con habilidad las propiedades de las funciones que forman parte de una desigualdad a demostrar.

8. *Demostrar que para todas x es justa la desigualdad*

$$\cos(\cos x) > 0.$$

Para todas x tenemos $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Designemos $\alpha = \cos x$. Entonces obtenemos que $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Ya que $-\pi/2 < -1$ y $1 < \pi/2$, es mucho más que α satisface la condición $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. De la propiedad de la función $y = \cos x$ se desprende que $\cos\alpha$ es positivo para todas estas α, lo que era necesario demostrar.

9. *Demostrar la desigualdad* $\cos(\operatorname{sen} x) > \operatorname{sen} x(\cos x)$.

La desigualdad a demostrar se puede representar en la forma

$$\cos(\operatorname{sen} x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) > 0,$$

o bien,

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}\right) > 0.$$

Mostremos que los factores del primer miembro de esta desigualdad son positivos.

Ya que

$$|\operatorname{sen} x - \cos x| = |\sqrt{2}\operatorname{sen}(x - \pi/4)| \leqslant \sqrt{2} < \pi/2,$$

entonces

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2} < \frac{\pi}{4},$$

y por eso,

$$0 < \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2}\right) > 0$$

para todas x. Así mismo se demuestra que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{2}\right)>0.$$

En los siguientes ejemplos la aplicación de las propiedades de una función exponencial $y=a^x$ es decisiva: *si* $a>1$, *entonces al mayor valor del argumento le corresponde el mayor valor de la función y, por consiguiente, al mayor valor de la función le corresponde el mayor valor del argumento; si* $a<1$, *entonces al mayor valor del argumento le corresponde el menor valor de la función y, por consiguiente, al mayor valor de la función le corresponde el menor valor del argumento.*

10. *Demostrar que para los números positivos c y d y para cualquier* $\alpha>0$, *las desigualdades* $c<d$ *y* $c^\alpha<d^\alpha$ *son equivalentes.*

Sean c y d números positivos y $\alpha>0$. Consideremos la función $y=(c/d)^x$.

Si $c<d$, entonces $0<c/d<1$. Según la propiedad de la función exponencial en la base menor que 1, obtenemos

$$\left(\frac{c}{d}\right)^\alpha<\left(\frac{c}{d}\right)^0,$$

de donde se deduce que $c^\alpha/d^\alpha<1$, es decir, $c^\alpha<d^\alpha$.

Al contrario, si $c^\alpha<d^\alpha$, entonces $c^\alpha/d^\alpha<1$, o sea,

$$\left(\frac{c}{d}\right)^\alpha<\left(\frac{c}{d}\right)^0.$$

Esto significa que al mayor valor del argumento ($\alpha>0$) de nuestra función le corresponde el menor valor de la función. Pero, así resulta sólo en el caso en que su base es menor que 1, es decir, cuando $c/d<1$, de donde $c<d$.

La afirmación demostrada se enuncia corrientemente del modo siguiente: la desigualdad entre los números positivos se puede elevar a cualquier potencia positiva; en particular, se puede extraer la raíz de cualquier potencia.

11. *Demostrar la desigualdad*

$$(a^\alpha+b^\alpha)^{1/\alpha}\leqslant(a^\beta+b^\beta)^{1/\beta}$$

para $a\geqslant0,\ b\geqslant0,\ \alpha>\beta>0$.

Si $a=0$ ó $b=0$, entonces la afirmación a demostrar es evidente. Ahora bien, sean $a>0$ y $b>0$. Está claro que uno de estos números no supera al otro. Por ejemplo, sea $0<a\leqslant b$. En este caso $0<a/b\leqslant\leqslant1$, y ya que $\alpha>\beta$, entonces

$$0<(a/b)^\alpha\leqslant(a/b)^\beta \quad \text{y} \quad 1+(a/b)^\alpha\leqslant1+(a/b)^\beta.$$

De la última desigualdad se deduce (véase el ejemplo 10) que

$$[1+(a/b)^\alpha]^{1/\beta}\leqslant[1+(a/b)^\beta]^{1/\beta}.$$

Luego, ya que
$$1+(a/b)^{\alpha}\geqslant 1 \quad \text{y} \quad 0<1/\alpha<1/\beta,$$
obtenemos que
$$[1+(a/b)^{\alpha}]^{1/\alpha}\leqslant[1+(a/b)^{\alpha}]^{1/\beta}.$$

Ahora se puede escribir que
$$[1+(a/b)^{\alpha}]^{1/\alpha}\leqslant[1+(a/b)^{\alpha}]^{1/\beta}\leqslant[1+(a/b)^{\beta}]^{1/\beta},$$
de donde se deduce que
$$\left(\frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{b^{\alpha}}\right)^{1/\alpha}\leqslant\left(\frac{a^{\beta}+b^{\beta}}{b^{\beta}}\right)^{1/\beta}.$$

Ya que $b>0$, de la última desigualdad se deriva la desigualdad que fue propuesta para la demostración.

12. *Demostrar la desigualdad* $0<\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x\leqslant 1$.

Absolutamente claro que $\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x\geqslant 0$. Sin embargo, la igualdad $\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x=0$ puede cumplirse solamente cuando simultáneamente $\operatorname{sen}^8 x=0$ y $\cos^{14} x=0$, lo que es imposible, sin duda. Por esto es justa la desigualdad rigurosa $\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x>0$.

De las propiedades de las funciones trigonométricas se desprende que $\operatorname{sen}^2 x\leqslant 1$ y $\cos^2 x\leqslant 1$ para cualesquier x-reales. Pues, ya que $8>2$ y $14>2$, se deduce de aquí que
$$\operatorname{sen}^8 x\leqslant\operatorname{sen}^2 x \quad \text{y} \quad \cos^{14} x\leqslant\cos^2 x.$$

Sumando, miembro a miembro, estas desigualdades y tomando en consideración que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, obtendremos
$$\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x\leqslant 1.$$

Es evidente que para $x=\pi/2$, por ejemplo, en esta desigualdad se logra una igualdad, es decir, es imposible sustituir una desigualdad no estricta por una estricta $\operatorname{sen}^8 x+\cos^{14} x<1$.

Uno de los procedimientos de demostración de la desigualdad consiste en lo siguiente. Por ejemplo, es necesario demostrar que la desigualdad $A<B$, donde A y B son ciertas expresiones. Si logramos *hallar* la expresión C cuando $A<C$ y $C\leqslant B$ simultáneamente, entonces quedará demostrada la desigualdad $A<B$.

13. *Demostrar que para cualquier número entero positivo n es válida la desigualdad*
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Al deducir que
$$\frac{2}{(2k+1)^2}<\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2},$$
sustituimos la suma del primer miembro de la desigualdad a demos-

trar por una expresión *mayor*,

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)\right].$$

No obstante, esta última expresión es igual a

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4n+4}$$

y es, evidentemente, menor que 1/4. Por consiguiente, la suma

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

será mucho menos de 1/4.

14. *Demostrar que para cualquier número natural $n>1$* es válida *la desigualdad*

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1).$$

Para la demostración vamos a reducir cada sumando de la suma del primer miembro:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

Por eso, el primer miembro de la desigualdad a demostrar puede ser reducido:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+$$
$$+\ldots+2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Ya que el segundo miembro de la última desigualdad es precisamente igual a $2\sqrt{n+1}-2$, entonces la desigualdad a demostrar es justa.

En el siguiente ejemplo, nos lleva a la solución una combinación acertada de los factores.

15. *Demostrar que* $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, *donde n es un número entero mayor que* 1.

Lo justo de esta desigualdad va a deducirse de la validez de la desigualdad siguiente, que es igual a la primera:

$$(n!)^2<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}.$$

Multipliquemos el número $n!=1\cdot 2\ldots k\ldots(n-1)\,n$ por el número $n!=n\,(n-1)\ldots(n-k+1)\ldots 2\cdot 1$ disponiéndolos uno debajo del otro:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2\ldots & k & \ldots & (n-1)\,n \\ n(n-1)\ldots & & (n-k+1) & \ldots & 2\quad 1. \end{array}$$

Al multiplicar los números de cada columna, obtendremos que

$$(1\cdot n)\quad [2\,(n-1)]\ldots[k\,(n-k+1)]\ldots[(n-1)\cdot 2]\cdot(n\cdot 1).$$

Para obtener $(n!)^2$ es necesario multiplicar los miembros de este renglón. Aplicando a cada miembro de este renglón la desigualdad (2), obtenemos

$$\sqrt{k\,(n-k+1)}\leqslant\frac{k+n-k+1}{2}=\frac{n+1}{2},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

con la cual el signo de desigualdad se logra aquí sólo cuando $k=n-k+1$, es decir, para $k=(n+1)/2$. En otras palabras, solamente para los n impares, y sólo para un miembro de nuestro renglón de esta desigualdad es posible el signo de igualdad. Por esto, para todos los paréntesis y corchetes, con excepción de uno, son válidas las desigualdades

$$[k\,(n-k+1)]<\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Puesto que en el renglón hay n miembros, obtenemos que

$$(n!)^2<\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right]^n.$$

Por el método de inducción matemática se puede demostrar una gran cantidad de desigualdades.

16. *Demostrar que para cualquier número real* $\alpha\geqslant-1$ y cualquier *número entero positivo* n *es válida la desigualdad*

$$(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha. \tag{4}$$

La desigualdad para $n=1$ es, evidentemente, válida. Supongamos que es válida la desigualdad $(1+\alpha)^k\geqslant 1+k\alpha$ y demostremos que lo es también la desigualdad $(1+\alpha)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)\alpha$. Efectivamente, $(1+\alpha)^{k+1}=(1+\alpha)^k\cdot(1+\alpha)\geqslant(1+k\alpha)(1+\alpha)=1+(k+1)\alpha+k\alpha^2\geqslant 1+(k+1)\alpha$. De tal modo, la desigualdad inicial es justa.

17. *Demostrar que para cualquier número entero positivo* n *tiene lugar la desigualdad* $|\operatorname{sen} nx|\leqslant n\,|\operatorname{sen} x|$.

La desigualdad para $n=1$ es, evidentemente, justa. Suponiendo que $|\operatorname{sen} kx|\leqslant k\cdot|\operatorname{sen} x|$, demostremos que $|\operatorname{sen}(k+1)\,x|\leqslant(k+$

$+1)\cdot|\operatorname{sen} x|$. Efectivamente, utilizando la desigualdad $|\cos kx|\leqslant \leqslant 1$, tenemos

$|\operatorname{sen}(k+1)x|=|\operatorname{sen}\ kx\cdot\cos x+\operatorname{sen} x\cdot\cos kx|\leqslant|\operatorname{sen} kx|\cdot|\cos x|+$
$+|\operatorname{sen} x|\cdot|\cos kx|\leqslant|\operatorname{sen}\ kx|+|\operatorname{sen} x|\leqslant k|\operatorname{sen} x|+|\operatorname{sen} x|=$
$=(k+1)\cdot|\operatorname{sen} x|$.

Por consiguiente, la desigualdad requerida es justa.

18. *Demostrar el teorema: si el producto* $n\geqslant 2$ *de los números positivos es igual a* 1, *su suma es mayor o igual a* n, *es decir, si* $x_1x_2\ldots x_n=1$, $x_1>0$, $x_2>0$, $\ldots$, $x_n>0$, *entonces* $x_1+x_2+\ldots+x_n\geqslant n$.

Si $n=2$, entonces hay que demostrar la afirmación: si $x_1x_2=1$, entonces $x_1+x_2\geqslant 2$. Pero, esto es evidente ya que la media aritmética $(x_1+x_2)/2$ de dos números positivos es mayor o igual a la media geométrica $\sqrt{x_1x_2}=1$, es decir $x_1+x_2\geqslant 2$. Además de esto, la igualdad $x_1+x_2=2$ resulta sólo en el caso en que $x_1=x_2=1$.

Tomemos la hipótesis de la inducción y cualesquier números positivos $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$, que satisfacen la condición $x_1 \ldots \ldots x_{k-1}\, x_kx_{k+1}=1$. Si cada uno de estos números es igual a 1, entonces la suma $x_1+\ldots+x_k+x_{k+1}=k+1$, por razón de que la desigualdad demostrada es válida.

Si resulta que esto no es así, entonces entre ellos se encontrará un número mayor que 1 y un número menor que 1. Supongamos que $x_k>1$ y $x_{k+1}<1$. Entonces tenemos la igualdad

$$x_1\ldots x_{k-1}(x_kx_{k+1})=1.$$

Esto es el producto de k números, a causa de que es aplicable la hipótesis de la inducción y, podemos afirmar que

$$x_1+\ldots+x_{k-1}+x_kx_{k+1}\geqslant k.$$

Pues, entonces

$$x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}\geqslant k-x_kx_{k+1}+x_k+x_{k+1}=$$
$$=k+1+(x_k-1)(1-x_{k+1})>k+1,$$

porque $x_k-1>0$ y $1-x_{k+1}>0$, lo que era necesario demostrar.

Notemos que hemos establecido el hecho de que el signo de igualdad de la relación a demostrar es posible sólo en el caso cuando todas $x_i=1$; si todos x_i no son iguales a 1, entonces en la relación a demostrar está el signo de desigualdad rigurosa.

De este teorema resulta *una desigualdad generalizada entre la media aritmética y la media geométrica de los números positivos para* $n\geqslant 2$:

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\ldots x_n},\quad x_1>0,\ \ldots,x_n>0. \tag{5}$$

Efectivamente, designemos $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$ por c y x_i/c por y_i. Entonces $y_1\ldots y_n=(x_1\ldots x_n)/c^n=1$. Según lo demostrado, $y_1+\ldots+y_n\geqslant \geqslant n$, de donde $(x_1+\ldots+x_n)/n\geqslant c$; esto es lo que era necesario demostrar.

Esta desigualdad se aplica ampliamente para la demostración de otras desigualdades. Por ejemplo, si la aplicamos a los números 1, 2, ..., n, obtenemos inmediatamente la desigualdad

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\ldots n}<\frac{1+2+\ldots+n}{n},$$

o bien, $\sqrt[n]{n!}<(n+1)/2$, de donde $n!<[(n+1)/2]^n$. Esta desigualdad la hemos demostrado en el ejemplo 15 por un procedimiento especial. La nueva demostración es evidentemente más fácil.

Los ejemplos examinados muestran que el método de inducción matemática se aplica con éxito para la demostración de diferentes desigualdades. Al mismo tiempo, no hay que exagerar el poder del método de inducción matemática: hay muchos problemas para cuya resolución el método de inducción parece muy conveniente, pero los intentos de aplicarlo tropiezan con dificultades insuperables.

Por ejemplo, tratemos de demostrar una desigualdad valiéndonos del método de inducción matemática:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Para $n=1$ esta desigualdad tiene la forma $1/9<1/4$, o sea, es justa. Supongamos que la desigualdad a demostrar es válida para $n=k$:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

Para $n=k+1$ el primer miembro es igual a

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+3)^2}=\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}\right]+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Según la tesis de la inducción, la suma entre corchetes es menor que 1/4, por lo que

$$\frac{1}{9}-\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2k+3)^2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Está claro, que es absolutamente imposible deducir de la desigualdad que su primer miembro es menor que 1/4. De tal modo, la demostración según la inducción entró en un callejón sin salida. Al mismo tiempo, esta desigualdad se demuestra muy fácilmente de otro modo, como fue hecho en el ejemplo 13.

En resumen, proporcionemos dos desigualdades para cuya demostración se utilizan tanto los procedimientos mencionados como algunos otros; estas desigualdades pueden ser resueltas por procedimientos que se basan en Algebra, Trigonometría y hasta en Geometría.

19. *Demostrar que si el número* $x^2+y^2=1$, *entonces* $-\sqrt{2}\leqslant x+$ $+y\leqslant\sqrt{2}$.

Resolución algebraica. Anotemos una desigualdad evidente: $(x-y)^2 \geqslant 0$, o bien, $x^2+y^2 \geqslant 2xy$. De aquí se deduce: $2(x^2+y^2) \geqslant x^2+2xy+y^2$. Por cuanto $x^2+y^2=1$, entonces de la última desigualdad tenemos $(x+y)^2 \leqslant 2$, de donde (véase fórmula 3, § 4, Parte I) $|x+y| \leqslant \sqrt{2}$, es decir, $-\sqrt{2} \leqslant x+y \leqslant \sqrt{2}$.

Resolución trigonométrica. Si x e y satisfacen la condición $x^2+y^2=1$, entonces se puede hallar tal ángulo α que $x=\cos\alpha$, $y=\operatorname{sen}\alpha$. En este caso nos hace falta demostrar que para cualquier α

$$-\sqrt{2} \leqslant \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \leqslant \sqrt{2}.$$

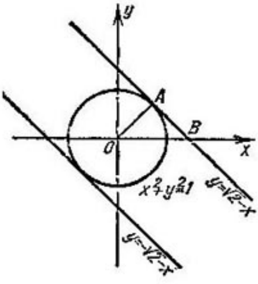


Fig. 16

Ya que $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\alpha+\pi/4)$ y $-1 \leqslant \operatorname{sen}\cdot(\alpha+\pi/4) \leqslant 1$, entonces $-\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}\operatorname{sen}(\alpha+\pi/4) \leqslant \sqrt{2}$ para cualquier α, lo que demuestra la desigualdad requerida.

Resolución geométrica. Examinemos x e y como las coordenadas de los puntos en un plano con el sistema de coordenadas dado. Entonces, a la condición $x^2+y^2=1$ le satisfacen los puntos (x, y) que se encuentran en la circunferencia de radio 1 con el centro en el origen de las coordenadas (fig. 16). Los puntos que satisfacen la desigualdad $x+y \leqslant \sqrt{2}$, se encuentran en la recta $y=\sqrt{2}-x$ y por debajo de esta recta (compárese el ejemplo 27, § 13, Parte I).

Sean B un punto de intersección de esta recta con el eje de abscisas, y OA una perpendicular bajada del origen de las coordenadas a la recta. Resulta entonces que $OB=\sqrt{2}$, $\angle ABO=45°$ por razón de que $OA=1$. Por consiguiente, el punto A se encuentra sobre la circunferencia, y la recta $y=\sqrt{2}-x$ es perpendicular al radio OA en su extremo, es decir, es tangente a la circunferencia.

Análogamente, a la desigualdad $-\sqrt{2} \leqslant x+y$ le satisfacen los puntos que se encuentran en la recta $y=-\sqrt{2}-x$ y por encima de ésta; esta recta es también tangente a la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Por lo tanto, a la desigualdad doble que se demuestra, le satisfacen los puntos situados en la faja entre las rectas paralelas $y=\sqrt{2}-x$ e $y=-\sqrt{2}-x$ (incluyendo a estas rectas). Sin embargo, la circunferencia $x^2+y^2=1$ se halla por completo en esta faja, y, por consiguiente, las coordenadas de cualquier punto suyo satisfacen la desigualdad $-\sqrt{2} \leqslant x+y \leqslant \sqrt{2}$, lo que era necesario demostrar.

20. *Sea $a+b=2$, donde a y b son los números reales. Demuéstrese que $a^4+b^4 \geqslant 2$.*

Notemos que si uno de los números a y b es negativo entonces la desigualdad es casi evidente. Por ejemplo, sea $b<0$. En este caso $a>2$ y la desigualdad $a^4+b^4\geqslant 2$ es correcta, porque $b^4>0$ y $a^4>16$. Por lo tanto, consideremos en lo ulterior que $a\geqslant 0$ y $b\geqslant 0$.

Primera resolución. Ya que $a+b=2$, entonces $(a+b)^2=4$. Valiéndose de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica $ab\leqslant(a^2+b^2)/2$, tenemos $4=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant \leqslant 2(a^2+b^2)$, es decir, $2\leqslant a^2+b^2$. Al elevar al cuadrado esta desigualdad (cosa que es justa porque en ambos miembros se hallan números positivos) obtendremos:

$$4\leqslant(a^2+b^2)^2.$$

Sobre la base de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica $a^2b^2\leqslant(a^4+b^4)/2$. Por eso tenemos $4\leqslant(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+ +2a^2b^2\leqslant 2(a^4+b^4)$, de donde $2\leqslant a^4+b^4$, lo que era necesario demostrar.

Segunda resolución. Consideremos de nuevo que $a\geqslant 0$ y $b\geqslant 0$. Ya que $a+b=2$, entonces $(a+b)^4=16$, o bien,

$$(a+b)^4=(a^2+2ab+b^2)\ (a^2+2ab+b^2)=a^4+b^4+4ab(a^2+ +b^2)+6a^2b^2=16.$$

Puesto que $a^2+b^2=4-2ab$, puede expresarse la última desigualdad así:

$$a^4+b^4=16-16ab+2a^2b^2.$$

Si podemos demostrar que $16-16ab+2a^2b^2\geqslant 2$, entonces nuestra desigualdad quedará demostrada.

En las condiciones del problema tenemos $ab\leqslant 1$. Efectivamente, $\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$. Ya que $a+b=2$, entonces $\sqrt{ab}\leqslant 1$, de donde $ab\leqslant 1$.

De esa manera, nos hace falta demostrar la desigualdad $16-16ab+ +2a^2b^2\geqslant 2$ a condición de que $ab\leqslant 1$.

Designemos $x=ab$. En este caso es necesario demostrar la desigualdad $x^2-8x+7\geqslant 0$ a condición de que $x\leqslant 1$. Las raíces del trinomio de segundo grado x^2-8x+7 son: $x_1=1$, $x_2=7$. Por lo tanto, la última desigualdad puede escribirse así: $(x-1)\ (x-7)\geqslant 0$.

Pero, para $x\leqslant 1$ esta desigualdad es evidente. Por esto hemos obtenido $16-16ab+2a^2b^2\geqslant 2$, lo que era necesario demostrar.

Tercera resolución. Sean $a=1+c$, $b=1-c$. Ya que hemos supuesto más arriba que $a\geqslant 0$ y $b\geqslant 0$, se deduce que $-1\leqslant c\leqslant 1$. Por esto podemos aprovecharnos de la desigualdad (4) (véase el ejemplo 16):

$$(1+c)^4\geqslant 1+4c,\quad (1-c)^4\geqslant 1-4c.$$

De tal modo,

$$a^4+b^4=(1+c)^4+(1-c)^4\geqslant(1+4c)+(1-4c)=2.$$

En conclusión, señalemos que tiene lugar una afirmación más general: *si* $a+b=2$, *entonces* $a^n+b^n\geqslant 2$ *para cualquier número entero positivo* n. Es fácil demostrar esto, por ejemplo, por el método expuesto anteriormente.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que para cualesquiera números reales a, b y c

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

2. Demostrar que si a, b, c son números positivos y no iguales entre sí, entonces

a) $(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})>9$;

b) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9abc$.

3. Demostrar que $a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(a+b+c)$.

4. Demostrar que para todas x del intervalo $0<x<\pi/2$ es válida la desigualdad $\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x\geqslant 2$.

5. Demostrar que si a y b son números positivos distintos de 1, entonces $|\log_a b+\log_b a|\geqslant 2$.

6. Demostrar que $(1/\log_2\pi)+(1/\log_{4.5}\pi)<2$.

7. Demostrar que para cualesquier x e y reales se satisface la desigualdad x^2+ $+2xy+3y^2+2x+6y+3\geqslant 0$.

8. Demostrar que $\operatorname{sen}^4 x-6\operatorname{sen}^2 x+5\geqslant 0$ para todas x.

9. Demostrar que el polinomio $x^8-x^5+x^2-x+1$ es positivo para todos los valores reales de x.

10. Demostrar qui si $a+b=c$, $a>0$, $b>0$, entonces $a^{2/3}+b^{2/3}>c^{2/3}$.

11. Sea n un número positivo. Demostrar la desigualdad

$$(1+1/n)^n<(1+1/2n)^{2n}.$$

12. Demostrar que qara cualquier número entero positivo n es válida la desigualdad

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+2}>1.$$

13. Demostrar que $(n!)^2>n^n$, donde $n>2$ es un número entero positivo.

14. Demostrar que $n!>2^{n-1}$, donde $n>2$ es un número entero positivo.

15. Demostrar que es válida la desigualdad $(a+b)^n<2^n\cdot(a^n+b^n)$ para cualesquier a y b positivas y cualquier número entero positivo n.

16. Demostrar que la suma de los catetos de un triángulo rectángulo no es mayor que la diagonal de un cuadrado construido sobre la base de la hipotenusa.

17. Demostrar que la suma de cubos de los catetos de un triángulo rectángulo es menor que el cubo de la hipotenusa.

18. Demostrar que el cuadrado tiene mayor área que cualquier rectángulo del mismo perímetro.

19. Demostrar que el área de un triángulo arbitrario no supera un cuarto del cuadrado de su medio perímetro.

Hallar los valores máximo y mínimo de las funciones:

20. $y = 5\cos 2x - 4\,\mathrm{sen}\, 2x$.

21. $y = 3^{x-1} + 3^{-x-1}$.

22. $y = \dfrac{x^2}{x^4+1}$.

23. $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

24. Demostrar que $2^{\mathrm{sen}\, x} + 2^{\cos x} \geqslant 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ para todas x. ¿Con cuáles valores de x se logra la igualdad?

25. Demostrar que es válida la desigualdad $\mathrm{cotg}\,(x/2) > 1 + \mathrm{cotg}\, x$ para todas x del intervalo $0 < x < \pi/2$.

§ 9. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Los problemas de ecuaciones no se consideran, por lo común, difíciles: de esto testimonia el hecho de que la mayoría de los estudiantes (según su opinión) cumplen esta tarea. Al mismo tiempo, muchos problemas encierran en sí dificultades y los estudiantes cometen graves errores.

Tal situación parece extraña, aunque sólo a primera vista. Para muchos graduados de la escuela secundaria hay una distancia enorme entre los hábitos de cálculo práctico obtenidos y la comprensión consciente de los fundamentos teóricos lógicos, sin los cuales es imposible resolver acertadamente una ecuación (quizás por casualidad, pero contar con esto sería, desde luego, absurdo).

Esto se manifiesta durante las resoluciones: la mayoría de los estudiantes pueden simplificar una ecuación con ayuda de cálculos infalibles, pero no cada uno puede percibir cómo y por qué estos cálculos conducen a la pérdida o la adquisición de las raíces, y muchos hasta no reflexionan en esto. Otros, aunque conocen bien las tesis teóricas respectivas, empero las conocen formalmente, como una instrucción, expresan una incapacidad absoluta en una situación un poco variada.

Digamos que los escolares saben bien que al elevar ambos miembros de una ecuación irracional al cuadrado pueden aparecer raíces extrañas. ¡Pero, cuántas veces se puede ver cuando la elevación al cuadrado se aplica a una ecuación trigonométrica sin omisión siguiente de las raíces extrañas! Aunque no es difícil evitar este error sabiendo por qué la elevación al cuadrado da origen a la aparición de raíces extrañas. Veamos el problema referente a la comprobación. Entre los estudiantes existen dos opiniones del todo opuestas. Unos consideran que la comprobación es un capricho de los profesores a que debe obedecerse a la fuerza, otros piensan que la comprobación es siempre obligatoria y comprueban todo, incluso las raíces de la ecuación de segundo grado. Estas opiniones se basan en la incomprensión absoluta de la comprobación, del lugar que ésta debe ocupar durante la resolución.

En pocas palabras, cada cual tiene que poseer aquel mínimo de conocimientos teóricos que se requieren para la resolución de ecuaciones. Nos detendremos brevemente en este mínimo.

Expongamos las definiciones:

1. *Llámase recinto de valores admisibles* (RVA) *de una ecuación al conjunto de valores de una incógnita para los cuales tienen sentido (son definidos) sus primero y segundo miembros.* Todo número x del RVA de una ecuación se considera *admisible* para la ecuación dada.

2. *Llámase número a la solución o la raíz de una ecuación si sustituimos por éste la incógnita y la ecuación se transforma en una igualdad numérica correcta.*

De acuerdo con esta definición, la solución de una ecuación entra obligatoriamente en su RVA; de otra manera, durante la sustitución resultaría no una igualdad numérica correcta sino un absurdo.

3. *La resolución de una ecuación consiste en hallar todas sus raíces o demostrar que no tiene raíces.*

4. *Si todas las raíces de una ecuación son también raíces de otra ecuación, entonces la segunda ecuación se denomina corolario de la primera.*

5. *Dícese que dos ecuaciones son equivalentes si cada una de éstas es el corolario de otra.* De esta definición se deduce que las ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones.

6. *Dos ecuaciones en un conjunto de valores de la incógnita son equivalentes si tienen las mismas soluciones pertenecientes a este conjunto.*

Para ilustrar estas nociones daremos dos ejemplos.

El recinto de valores admisibles de la ecuación $x-3=\sqrt{x}$, según la definición consta de los valores de x para los cuales tiene sentido su primer miembro $x-3$ y el segundo miembro $\sqrt{x}$. Es evidente que el primer miembro está definido para cualquier x, y el segundo miembro, cuando $x\geqslant 0$. Por lo tanto, el RVA de la ecuación consta de $x\geqslant 0$.

Mientras tanto, muchos estudiantes afirman incorrectamente que el RVA consta de $x\geqslant 3$, porque "para $x<3$ el primer miembro es negativo y el segundo miembro no puede ser negativo". La afirmación entre comillas es justa y, en el curso de la resolución de la ecuación dada, se emplea: la afirmación muestra que *las raíces* de la ecuación no son menores que 3. Pero, de ninguna manera se deduce de aquí que todos *los valores admisibles* son menores que 3: ¡porque no todos los valores admisibles son raíces!

Consideremos dos ecuaciones

$$\log_6(x-2)+\log_6(x+3)=2 \quad \text{y} \quad \log_6(x-2)(x+3)=2.$$

Es cierto que toda raíz de la primera ecuación es raíz de la segunda, por lo tanto, la segunda ecuación es un corolario de la primera. La segunda ecuación se resuelve con facilidad; sus raíces son: $x_1=6$ y $x_2=-7$. La raíz x_2 no satisface la primera ecuación ni siquiera entra en su RVA. De tal modo, las dos ecuaciones en cuestión *no son equivalentes*, pero si *lo son en* el RVA de *la primera ecuación* (en este RVA tienen una sola raíz $x=6$).

Es fácil comprender por qué esto es así. El RVA de la primera ecuación consta de $x>2$ y el RVA de la segunda ecuación es más amplio: en éste entra, además de estas x, también $x<-3$. Es natural que al pasar de la primera ecuación a la segunda ya ha aparecido la raíz extraña $x=-7$ que no pertenece al RVA de la primera ecuación.

¿Y cómo se aplican los conceptos introducidos durante la resolución de las ecuaciones? El hecho es que en la mayoría aplastante de los casos la solución resulta sólo después de una serie de transformaciones y pasos de una ecuación a otra. De tal modo, durante la resolución, cada ecuación se sustituye una por otra nueva, y la nueva ecuación puede tener, naturalmente, nuevas raíces. El problema de la resolución correcta de las ecuaciones consiste precisamente en seguir esta variación de las raíces, no perdarlas y saber omitir las extrañas.

Está claro que el mejor procedimiento es el de sustituir cada vez la ecuación siguiente por una equivalente a ésta; entonces, las raíces de la última ecuación serán raíces de la inicial. Sin embargo, esta vía ideal es irrealizable habitualmente en la práctica. Como regla, la ecuación se sustituye por su corolario, diciendo en general, que no es equivalente; en este caso, según la definición del corolario, todas las raíces de la primera ecuación son las de la segunda, es decir, *no tiene lugar una pérdida de raíces sino que pueden aparecer raíces extrañas* (aunque pueden no aparecer). Y en el caso cuando la ecuación, durante las transformaciones, se sustituye, aunque una sola vez, por el corolario que no es equivalente, es obligatoria la investigación de las raíces obtenidas, siendo ésta la comprobación. Notemos en seguida que esta investigación, como lo veremos a continuacion, no exige obligatoriamente la sustitución directa de las raíces obtenidas en la ecuación inicial.

De tal modo, si la resolución se efectuaba sin análisis de la equivalencia y fuentes de aparición de las raíces extrañas, entonces la comprobación es parte integrante de la resolución, sin la cual aquélla no puede ser considerada como válida, aunque no hayan aparecido, en realidad, las raíces extrañas. Si éstas han aparecido y permanecen no omitidas, la solución es realmente incorrecta. Por otra parte, si en cada oportunidad la ecuación se sustituye por una equivalente (como ya hemos dicho, esto sucede muy raramente), entonces no hace falta realizar la comprobación; con todo eso, de este hecho ya se habló especialmente en el curso de la resolución. De tal modo, la comprobación durante la resolución de ecuaciones juega un papel muy esencial, y de ningún modo se reduce a un control simple de los cálculos. En lo que se refiere al control de los cálculos, eso es un asunto particular de los que resuelven la ecuación; que se realice o no este control depende del procedimiento del cálculo, de la seguridad en sí mismo.

Vamos a subrayar que no se puede sustituir una ecuación por otra que no sea su corolario, porque en este caso *hay una raíz de la primera ecuación que no es de la segunda*, por lo cual, al resolver esta segunda ecuación, no hallaremos todas las raíces de la primera. Y como resultado, tendrá lugar *la pérdida de una raíz*, la que será *irreparable*. En esto consiste la diferencia esencial entre la pérdida de raíces y la adquisición de raíces extrañas.

Estas son las tesis teóricas. Pero, en la práctica hay que saber precisa y concretamente cuáles son las fuentes de adquisición y de pérdida de raíces. Estas fuentes son, por lo común, de dos tipos: las así llamadas "transformaciones idénticas" y la toma de ambos miembros de la ecuación de ciertas funciones (elevación a potencia, logaritmación, potenciación, etc.).

"Las transformaciones idénticas" parecen a primera vista inofensivas, aunque en realidad conducen frecuentemente a las ecuaciones no equivalentes, por cuanto aquéllas cambian el RVA. En efecto, al sustituir $\sqrt{(2x+1)^2}$ por $2x+1$ en la resolución de una ecuación irracional extendemos el RVA, porque $2x+1$ tiene sentido para todas las x, y $(\sqrt{2x+1})^2$ sólo para $x \geqslant -1/2$. Así se procedió en el ejemplo considerado por nosotros anteriormente: la aplicación de la fórmula del logaritmo de un producto nos condujo a la extensión del RVA y, como resultado de esto, a la aparición de una raíz estraña.

No hay nada de particular en esto, porque la mayoría de las fórmulas que nosotros aplicamos para las transformaciones son tales que sus primero y segundo miembros tienen sentido para los diferentes valores de las letras que los integran. Por ejemplo, así sucede con las fórmulas que siguen:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b},\quad (\sqrt{x})^2=x,\quad \lg_a xy=\lg_a x+\lg_a y,\quad \log_a x^n=n\log_a x,$$

$$a^{\log_a b}=b,\quad \operatorname{cotg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x},\quad \operatorname{sen} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$$

Por lo tanto, la sustitución de una parte de la fórmula por la otra origina una extensión o reducción del RVA. Está claro que, debido a la extensión del RVA, es posible adquirir raíces extrañas y, como consecuencia de la reducción, es posible perderlas; por eso es inadmisible la reducción del RVA. En lo que se refiere a las raíces extrañas, en el caso cuando éstas se han adquirido a cuenta de la extensión del RVA, no es necesario sustituirlas directamente en la ecuación inicial para la separación de las raíces de esta última, sino que es suficiente comprobar si entran o no en su RVA; si resulta que no entran, se han de omitir y si entran, hay que dejarlas.

Este hecho tiene importancia excepcional para la práctica de la resolución de ecuaciones por lo que merece destacarlo especialmente.

A. *Si en el curso de las transformaciones de una ecuación pueden surgir raíces extrañas solamente a costa de la extensión del RVA, entonces en calidad de raíces de la ecuación inicial van a ser aquéllas, y sólo aquéllas que entran en el RVA.*

La utilización de esta afirmación nos libera de la sustitución directa de las raíces obtenidas en una ecuación, y de la comprobación técnica de las igualdades numéricas correspondientes, la que resulta a veces muy difícil o bien imposible debido a una cantidad infinita de números a comprobar.

De esta manera, en lugar de *la sustitución directa* se puede utilizar *la comprobación de si entran o no en el RVA* las raíces extrañas, aunque esto sólo se hace en el caso cuando la fuente de su aparición es única: la extensión del RVA. Por consiguiente, para utilizar tal comprobación es obligatorio señalar, en el curso de la resolución, dónde y por cuenta de qué pueden aparecer las raíces extrañas.

En cuanto a la toma de las funciones de ambos miembros de las ecuaciones, consideremos solamente dos ejemplos de los más importantes: *la elevación al cuadrado* y *la potenciación*.

Con frecuencia sucede pasar (muy en particular durante la resolución de ecuaciones irracionales) de una ecuación $f(x)=g(x)$ a la ecuación $[f(x)]^2=[g(x)]^2$. ¿Y qué ocurre con las raíces durante este paso? Es evidente que la segunda ecuación es un corolario de la primera: si el número a es una raíz de la primera ecuación, es decir, $f(a)=g(a)$, entonces $[f(a)]^2=[g(a)]^2$, o sea, a es una raíz de la segunda ecuación. Pero, hablando en general, lo contrario no es correcto: a la segunda ecuación le satisfacen también las raíces de la ecuación "extraña" $f(x)=-g(x)$. De tal modo, con la elevación al cuadrado, las raíces no se pierden, pero pueden aparecer las raíces extrañas.

En la práctica es muy útil la afirmación que se deduce de lo expuesto.

B. *Si los dos miembros de una ecuación no son negativos en un conjunto de valores del argumento, entonces, al elevarlos al cuadrado, resulta una ecuación equivalente a la inicial en el mismo conjunto.*

Efectivamente, en este caso la ecuación "extraña" no tiene, evidentemente, raíces, a no ser aquellas para las cuales ambos miembros se convierten en cero, pues tales raíces no son extrañas para nuestra ecuación. Mostremos con los ejemplos concretos que siguen, cómo se emplea esta afirmación en la práctica.

Análogamente se considera la potenciación de la ecuación, es decir, el paso de la ecuación $\log_c f(x) = \log_c g(x)$ a la ecuación $f(x) = g(x)$. Sea a una raíz de la ecuación inicial, es decir, $\log_c f(a) = \log_c g(a)$. Entonces, $c^{\log_c f(a)} = c^{\log_c g(a)}$, o sea, $f(a) = g(a)$. Por consiguiente, toda raíz de una ecuación inicial es también raíz de la segunda. Por otra parte, el RVA de la segunda ecuación es más extenso que el de la primera debido a que es de esperar que surjan raíces extrañas, pero precisamente a cuenta de la extensión del RVA. Vale decir que para la solución es suficiente hallar las raíces de la segunda ecuación y comprobar si éstas entran o no en el RVA de la primera ecuación.

Tal es el "caudal" teórico de que debe disponer cada estudiante. Al mismo tiempo conviene subrayar que no siempre es rasonable la aplicación de esta teoría y durante la resolución de los problemas no hay que pasar el límite de lo necesario, aspirando siempre a una resolución más sencilla. Supongamos que durante la resolución se ha esclarecido que la comprobación ordinaria de las raíces obtenidas no presenta dificultades, entonces no hay que enterarse de las fuentes de adquisición de las raíces ni interesarse por la variación del RVA en el curso de la resolución, ni suquiera hallar el RVA; si esta comprobación presenta dificultades, nos ayudan precisamente razonamientos teóricos: en un lugar adecuado hay que analizar la transformación que podría dar origen a las raíces extrañas.

Al mismo tiempo, durante la resolución cualquiera se debe estar seguro de que las raíces no van perdiéndose. Es útil señalar esto especialmente en los casos cuando la transformación es bastante complicada.

A continuación, mostramos con ejemplos concretos algunos de los casos más típicos, así como los orígenes más insidiosos (no todos, claro está) de adquisición de raíces extrañas, entre las cuales podrían citarse fórmulas para la transformación de los radicales, identidad logarítmica fundamental y fórmulas para la logaritmación del producto y de la potencia, omisión del denominador, eliminación recíproca de los términos semejantes, sustitución de la ecuación por un conjunto de ecuaciones más simples, ciertas consideraciones "verbales". Luego examinemos las fuentes de pérdida de las raíces, y ciertos ejemplos ulteriores, los más difíciles, se estudian teniendo por objetivo señalar algunas dificultades de otra índole, no relacionadas con la pérdida y adquisición de las raíces.

1. *Resolver la ecuación* $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$.

Al elevar ambos miembros de la ecuación al cuadrado y aplicar las fórmulas de transformación de los radicales, obtenemos la ecuación

$$2x-6+2\sqrt{(2x-6)(x+4)}+x+4=25,$$

o bien,

$$2\sqrt{2x^2+2x-24}=27-3x. \quad (1)$$

Al elevar de nuevo al cuadrado ambos miembros de la ecuación y al librarnos de radical, llegamos a la ecuación $x^2-170x+825=0$, cuyas raíces son $x_1=5$ y $x_2=165$. La sustitución directa de estos valores en la ecuación inicial denota que x_1 es su raíz y x_2 no lo es.

En lo que se concierne a esta ecuación no hay necesidad de insistir en determinada teoría, digamos, en la que explique de dónde surgió la raíz extraña; es necesario señalar simplemente que en el curso de las transformaciones, las raíces no podían perderse, y al fin de la resolución debe realizarse la comprobación por sustitución directa. En esto consiste la resolución completa.

Notemos, pues, que la raíz extraña apareció al elevar al cuadrado la ecuación (1), apareció como la raíz de "la ecuación extraña".

El siguiente ejemplo es tan simple como el anterior, pero durante la comprobación de una "buena" raíz surgen inesperadamente ciertas dificultades de carácter de principio.

2. *Resolver la ecuación*

$$\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}.$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y realizar las transformaciones necesarias, obtenemos

$$2\sqrt{(5x+7)\ (3x+1)}=7x+5.$$

Después de la segunda elevación al cuadrado obtenemos la ecuación cuadrática $11x^2+34x+3=0$, cuyas raíces son $x_1=-1/11$, $x_2=-3$. La comprobación directa demuestra que $x=-1/11$ es la raíz de la ecuación inicial.

Algunos estudiantes, al comprobar el valor de $x=-3$, llegan a la igualdad $\sqrt{-8}-\sqrt{-8}=0$. Considerando que esta igualdad es justa porque en su primer miembro "de lo igual se resta lo igual". De este modo, el valor de $x=-3$ les parece una raíz de la ecuación inicial. Pero, este argumento es infundado, ya que la expresión $\sqrt{-8}$ no tiene sentido: como se sabe, las ecuaciones irracionales se consideran sólo dentro del recinto de los números enteros positivos y el símbolo $\sqrt{a}$ se emplea en cuanto a los números enteros positivos a sólo para la designación de la raíz aritmética de un número a no negativo. Por lo tanto, el valor de $x=-3$ no entra en el RVA y, por consiguiente, no es una raíz de la ecuación inicial.

Otras circunstancias tienen lugar en el ejemplo siguiente, en el cual la comprobación de las raíces "malas" obtenidas es una tarea muy difícil. El método más simple de su resolución está relacionado precisamente con la aplicación de la teoría considerada, cuando en el mismo curso de la resolución se toman en cuenta las fuentes de aparición de las raíces extrañas.

3. *Resolver la ecuación* $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=4$.

Ambos miembros de la ecuación dada no son negativos en el RVA, por lo cual, una vez que ésta ha sido elevada al cuadrado, obtendremos una ecuación equivalente a la ecuación inicial en su RVA [1], lo que se deduce de la afirmación B:

$$(\sqrt{x+3})^2+2\sqrt{x+3}\sqrt{2x-1}+(\sqrt{2x-1})^2=16.$$

Utilizando las fórmulas de transformación de los radicales que extienden, evidentemente, el RVA llegaremos a la ecuación

$$2\sqrt{2x^2+5x-3}=14-3x. \qquad (2)$$

Con tales transformaciones, las raíces extrañas pueden surgir solamente a cuenta de la extensión del RVA.

Luego razonamos del modo siguiente. El primer miembro de la ecuación (2) no es negativo para cualquier (admisible) valor de x, mientras que el segundo miembro es negativo para $x>14/3$. Está claro que este valor de x no puede ser una solución de la ecuación. Por eso, examinemos la ecuación (2) sólo dentro del recinto $x\leqslant 14/3$. Pues, ambos miembros de la ecuación (2) en este recinto no son negativos (claro está que para los valores de x de la ecuación (2)), y según la afirmación B, al elevarlos al cuadrado, obtendremos una ecuación equivalente a (2) en el conjunto $x\leqslant 14/3$:

$$(2\sqrt{2x^2+5x-3})^2=(14-3x)^2.$$

De aquí, al extender una vez más el RVA, llegamos a la ecuación cuadrática $x^2-104x+208=0$, cuyas raíces son: $x_{1,2}=52\pm 8\sqrt{39}$. Como se ve, estas raíces entran en el RVA de la ecuación inicial; por esto hay que sólo comprobar si éstas satisfacen o no la condición $x\leqslant 14/3$. No es difícil verificar que $x_1>14/3$ y $x_2<14/3$, de donde se deduce que x_2 es la raíz única de la ecuación (2) y, por consiguiente, de la ecuación inicial.

Subrayemos una vez más que debe recurrirse a tal resolución detallada y "teórica" sólo en el caso cuando estemos convencidos de que las raíces son "malas", o sea, que su sustitución directa en la ecuación conduce a una tarea bastante complicada: a la demostración o la refutación de las igualdades

$$\sqrt{55+8\sqrt{39}}+\sqrt{103+16\sqrt{39}}=4,$$
$$\sqrt{55-8\sqrt{39}}+\sqrt{103-16\sqrt{39}}=4.$$

[1] En realidad, estas ecuaciones son equivalentes, por cuanto sus RVA coinciden, pero esto no tiene importancia para nosotros; en lo ulterior extendemos el RVA, ya que la comprobación de que si entra o no en el RVA es inevitable.

Es claro que la primera de estas igualdades es incorrecta. En cuanto a la segunda igualdad, se puede demostrar fácilmente conociendo la fórmula de transformación de las expresiones de tipo $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. El otro método, que es la elevación al cuadrado, está relacionado con cálculos bastante difíciles. Es evidente que estos dos métodos son más complicados que el expuesto por nosotros, donde sólo se requería comprobar las raíces x_1 y x_2 en cuanto a la satisfacción de la condición $x \leqslant 14/3$. Sin embargo, en este ejemplo se puede, a pesar de todo, superar las dificultades de una comprobación directa y evitar la aplicación de la teoría.

No obstante, en las ecuaciones que contienen un parámetro, la comprobación directa es más difícil, debido a que la aplicación de la teoría expuesta es un camino de resolución único.

4. *Resolver la ecuación* $x-1=\sqrt{a-x^2}$.

El segundo miembro de la ecuación no es negativo para cualquier (admisible) x y el primer miembro no es negativo cuando $x \geqslant 1$. Por lo tanto, la ecuación dada dentro del recinto de $x \geqslant 1$ es equivalente a la ecuación $(x-1)^2=(\sqrt{a-x^2})^2$ que se reduce a la forma

$$2x^2-2x+1-a=0 \tag{3}$$

(con esto el RVA se ha extendido y, al final, han de comprobarse las raíces obtenidas en cuanto a su pertenencia al RVA). De tal modo, hay que resolver la ecuación (3) y escoger de sus raíces aquellas para las cuales $x \geqslant 1$ y $a-x^2 \geqslant 0$. El discriminante de esta ecuación es igual a $2a-1$, de que se deduce que para $a<1/2$ ésta no tiene raíces reales, es más, la ecuación inicial no tiene raíces para estos valores de a.

Seguimos considerando que $a \geqslant 1/2$; las raíces de la ecuación (3) $x_{1,2}=(1 \pm \sqrt{2a-1})/2$. La raiz x_2 no satisface, evidentemente, la condición $x \geqslant 1$ y por eso no es la raíz de la ecuación inicial. Para aclarar la situación de x_1, es necesario resolver la desigualdad $(1+\sqrt{2a-1})/2 \geqslant 1$, o bien, $\sqrt{2a-1} \geqslant 1$; evidentemente, ésta es válida para $a \geqslant 1$. Por ello, para $a<1$ la ecuación inicial no tiene raíces y para $a \geqslant 1$ se debe comprobar si es válida la desigualdad $a-x_1^2 \geqslant 0$, lo que es equivalente a la desigualdad $a \geqslant \sqrt{2a-1}$. Ambos miembros de esta desigualdad no son negativos (estamos considerando que $a \geqslant 1$) (véase el § 10), lo que nos da la posibilidad de elevarlos al cuadrado; en este caso obtendremos $a^2 \geqslant 2a-1$ ó $a^2-2a+1 \geqslant 0$, que es válido para cualquier a.

De tal modo, para $a<1$ la ecuación inicial carece de raíces, y para $a \geqslant 1$, tiene la raiz $x=(1+\sqrt{2a-1})/2$.

Notemos que la comprobación de la última condición, $a-x^2 \geqslant 0$, absolutamente obligatoria por su lógica, puede ser realizada sin cálculos cualesquiera. En efecto, x_1 y x_2 son obtenidos como las raíces de la ecuación $(x-1)^2 = a - x^2$ y, por consiguiente, su segundo miembro no es negativo para $x = x_1$ y $x = x_2$.

Subrayemos una vez más que la sustitución directa durante la comprobación de las raíces se reduciría a las ecuaciones respecto de a:

$$\frac{a \pm \sqrt{2a-1}}{2} - \sqrt{\frac{a \mp \sqrt{2a-1}}{2}} = 1,$$

cuyo aspecto exterior nos infiere cierta confusión. De esa manera, los problemas similares van a presentar siempre grandes dificultades, sin haber dominado conscientemente el modo de resolver las ecuaciones.

La aplicación de diferentes fórmulas logarítmicas, en particular *las del logaritmo del producto*, son las que constituyen una de las fuentes más difundidas de aparición de las raíces extrañas. En realidad, sustituyendo $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ por $\log_a f(x)\ g(x)$, extendemos el RVA de la ecuación, admitiendo tales valores de x para los cuales $f(x) < 0$ y $g(x) < 0$ simultáneamente. Por lo tanto, las raíces extrañas pueden aparecer, pero *sólo a consecuencia de la extensión* del RVA, así que para dejarlas de lado, sobre la base de la afirmación A, es suficiente comprobar sólo el hecho de que éstas entran o no en el RVA. Notemos, además, que la sustitución inversa del logaritmo del producto por la suma de los logaritmos, puede inferir una reducción del RVA, lo que es inadmisible.

5. *Resolver la ecuación* $\log_2(x+2) + \log_2(3x-4) = 4$.

Al logaritmar el producto, obtenemos $\log_2(x+2)(3x-4) = 4$, de donde $(x+2)(3x-4) = 16$. Las raíces de esta ecuación son: $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{73})/3$. Es fácil observar que de éstas sólo x_1 entra en el RVA de la ecuación inicial, que es su raíz según la afirmación A.

La sustitución directa de la raíz "mala" x_1 exigería los cálculos "irracional-logarítmicos", no muy complicados, pero desagradables, mientras que la utilización de la afirmación A ha facilitado de inmediato la respuesta.

La aparición de raíces extrañas, como resultado de la aplicación de la identidad logarítmica fundamental, suscita habitualmente una sorpresa entre los estudiantes, aunque no hay nada extraño en ello: esto sucede a cuenta de la extensión del RVA sustituyendo la expresión $a^{\log_a b}$ por b, si a ó b contienen una incógnita.

6. *Resolver la ecuación* $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$.

Suitituyendo $\log_{\sqrt{x}} 2x$ por $\log_x(2x)^2$ (véase el § 1) obtenemos la ecuación

$$x^{\log_x (2x)^2} = 4.$$

Utilizando ahora la identidad fundamental, obtenemos $(2x)^2 = 4$, es decir, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Sin embargo, ni x_1 ni x_2 entran en el

RVA de la ecuación inicial: $x_1<0$, y $\sqrt{x_2}=1$ no puede ser base de los logaritmos. Por consiguiente, la ecuación dada no tiene raíces.

Las raíces extrañas pueden aparecer con menos evidencia que en los ejemplos arriba examinados.

Por lo general, esto está relacionado con lo que los razonamientos y cálculos empleados durante la resolución conducen a la extensión del RVA. En el ejemplo que sigue *las raíces extrañas surgen al eliminar recíprocamente los términos semejantes.* Mientras tanto, no hay nada extraño en esto: al efectuar tal eliminación, nosotros quitamos la limitación de que los sumandos eliminados han de tener sentido, extendiendo así el RVA.

7. *Resolver la ecuación*

$$\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2.$$

Transformemos $\lg\sqrt{1-x^2}$:

$$\lg\sqrt{1-x^2}=\lg\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x}+\lg\sqrt{1+x}.$$

Es fácil observar que con esta transformación el RVA de la ecuación dada no ha variado, y la ecuación obtenida

$$\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x}+\lg\sqrt{1+x}+2$$

es equivalente a la dada. Eliminando $\lg\sqrt{1+x}$ de ambos miembros, obtenemos la ecuación

$$2\lg\sqrt{1-x}=2,$$

cuyo RVA consta de los números $x<1$, o sea, como es fácil observar, es más extenso que el de la ecuación inicial. De tal modo, es de esperar que aparezcan raíces extrañas. Resolviendo la última ecuación, obtenemos la raíz $x=-99$ que no entra en el RVA de la ecuación inicial y por eso la raíz no le pertenece. Por lo tanto, la ecuación dada no tiene raíces.

Una de las causas de los errores radica en la omisión, explícita o implícita, del denominador. Pero, *al hacer omisión del denominador sucede una extensión* del RVA: se añaden aquellos valores de x para los cuales el denominador es igual a 0.

8. *Resolver la ecuación*

$$\frac{1}{\log_6(3+x)}+\frac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1.$$

Tomando la base 2 en todos los logaritmos, obtendremos, después de las transformaciones, una ecuación equivalente a la dada

$$\frac{\log_2 6-\log_2(4-x)}{\log_2(3+x)}=1. \tag{4}$$

De ahí, $\log_2 6 - \log_2 (4-x) = \log_2 (3+x)$, y, seguidamente,

$$\frac{6}{4-x} = 3 + x. \tag{5}$$

La última ecuación se reduce a la cuadrática; sus raíces son: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

En el curso de la resolución pueden surgir raíces extrañas, sólo a cuenta de la extensión del RVA, debido a la omisión del denominador en las ecuaciones (4) y (5). Por lo tanto, es suficiente comprobar las raíces obtenidas si éstas entran o no en el RVA de la ecuación inicial. Como resultado, obtenemos que x_2 no entra en el RVA, y x_1 entra en éste, y por eso constituye la raíz de la ecuación inicial.

La despreciación del RVA explica los errores que se cometen durante la resolución de las ecuaciones en el primer miembro de las cuales se halla una fracción, y en el segundo, cero. Durante la resolución de las ecuaciones de tal tipo, a menudo se omite el denominador y el numerador se iguala a cero. Pues, para lograr una solución correcta de tal ecuación conviene igualar a cero el numerador, hallar las raíces de la ecuación obtenida y omitir aquellas que convierten el denominador en cero.

9. *Resolver la ecuación* $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$.

Escribamos la ecuación dada en la forma

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} - \frac{\operatorname{sen} 5x}{\cos 5x} = 0,$$

de donde, una vez realizadas las transformaciones elementales, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0.$$

Ahora, resolviendo la ecuación $\operatorname{sen} 2x = 0$, obtenemos que $x = k\pi/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ De esta serie de soluciones nos queda por omitir las extrañas, o sea, aquellas para las cuales el denominador $\cos 3x \cos 5x$ se convierte en cero, lo que ocurre, evidentemente, cuando los valores de k son impares y, por consiguiente, las soluciones de la ecuación inicial serán los ángulos $x = k\pi/2$, donde k es un número *par*: $k = 2n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, a saber:

$$x = n\pi, \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

Está claro que sería un error grave considerar como solución la serie de valores de $x = k\pi/2$.

Por tal falta de atención al RVA se explican también los errores que se cometen en el curso de las resoluciones de las ecuaciones, cuyo primer miembro está descompuesto en factores, mientras que el segundo tiene cero. Para la resolución de tal ecuación, como regla, se igualan sucesivamente todos los factores a cero, y las soluciones obtenidas se reúnen. No obstante, durante tal resolución no se toma en consideración que para algunos valores de x, los cuales convierten un factor en cero, puede resultar que otro factor no tenga sentido, y en este caso estos valores de x no serán raíces de la ecuación examinada. Por lo tanto, para resolver correctamente la ecuación es indispensable comprobar complementariamente si todos los valores de x entran en el RVA. De vez en cuando, esto puede presentar grandes dificultades.

10. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{sen} 2x \cos^2 2x \operatorname{sen}^2 6x \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} 3x = 0.$$

Para lograr la solución, igualamos, sucesivamente, todos los factores a cero, de lo que resultan cinco series de raíces:

$$x=\frac{k\pi}{2},\quad x=(2k+1)\frac{\pi}{4},\quad x=\frac{k\pi}{6},$$

$$x=k\pi,\quad x=(2k+1)\frac{\pi}{6},$$

donde k es cualquier número entero.

Pero esto todavía no sirve de solución porque $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{cotg} 3x$ quedan determinados no para todos los valores de x, debido a que muchos valores de x de estas series pueden resultar extraños. Vamos a considerar por turno todas estas series.

1) $x=\frac{k\pi}{2}$. Si k es par, $k=2l$, entonces $x=l\pi$ y cotg $3x$ no tiene sentido; si k es impar, $k=2l+1$, entonces $x=l\pi+\pi/2$ y tg x no tiene sentido.

De tal modo, ningún ángulo x de la primera serie presenta, en realidad, la solución de la ecuación.

2) $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$. Como se puede ver tg x tiene sentido. Además, $3x=(6k+3)\pi/4$, de que resulta que cotg $3x$ también tiene sentido.

De esta manera, todos los ángulos x de la segunda serie son soluciones de la ecuación.

3) $x=k\pi/6$. Según el círculo trigonométrico es fácil convencerse de que el ángulo x cae en el diámetro vertical cuando $k=6l+3$, y, por consiguiente, tg x tiene sentido para $k\neq 6l+3$. Seguidamente, $3x=k\pi/2$ y cotg$3x$ tiene sentido solamente para los valores impares de k. De este modo, nos sirven sólo los valores impares de k, no iguales a $6l+3$, o sea, los números k de la forma $k=6l+1$, $k=6l+5$.

De esta manera, entre los ángulos de la tercera serie sirven de soluciones sólo los ángulos

$$x=l\pi+\pi/6,\quad x=l\pi+5\pi/6,$$

donde l es cualquier número entero.

4) $x=k\pi$. En este caso cotg $3x$ no tiene sentido y esta serie no tiene soluciones.

5) $x=(2k+1)\pi/6$. Valiéndose del círculo trigonométrico es fácil convencerse de que el ángulo x cae en el diámetro vertical cuando $k=3l+1$ y, por consiguiente, $\operatorname{tg} x$ tendrá sentido para $k=3l$, $k=3l+2$.

De esta manera, de la quinta serie de ángulos quedan solamente

$$x=l\pi+\pi/6, \quad x=l\pi+5\pi/6,$$

donde l es cualquier número entero, o sea, son los mismos ángulos que los de la tercera serie.

La solución definitiva se puede anotar así:

$$x=(2n+1)\pi/4; \quad x=n\pi+\pi/6; \quad x=n\pi+5\pi/6,$$

donde n es cualquier número entero, o más breve,

$$x=(2n+1)\pi/4; \quad x=n\pi\pm\pi/6,$$

donde n es cualquier número entero.

La adquisición de raíces extrañas no siempre sucede tan explícitamente como esto ocurrió en los dos últimos ejemplos. A veces, la causa de esto consiste en razonamientos muy simples a primera vista.

Por ejemplo, la ecuación $\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 5x$ antes examinada, se resuelve frecuentemente del modo siguiente: "Las tangentes de dos ángulos son iguales cuando y sólo cuando la diferencia de estos ángulos es igual a un múltiple entero π. Por consiguiente, $2x=k\pi$, $x=k\pi/2$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$". Sin embargo, como ya sabemos, la solución es incorrecta.

¿Y en qué estriba el error?

La causa se explica sencillamente: no es correcta la afirmación en que se basa esta resolución, aunque está muy difundida entre los estudiantes. Efectivamente, si $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$, entonces $\alpha-\beta=k\pi$, donde k es un número entero, no obstante la afirmación contraria es incorrecta: si $\alpha-\beta=k\pi$, entonces la igualdad $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$ no puede tener sentido (por ejemplo, si $\alpha=\pi/2$, $\beta=-\pi/2$). Por lo tanto, la sustitución de la ecuación $\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 5x$ por $2x=k\pi$ no infiere pérdidas de raíces, pero hace aparecer las extrañas.

Ahora vamos a examinar algunas fuentes de *pérdida de raíces* y los procedimientos necesarios para evitar esta pérdida. Los estudiantes pierden frecuentemente raíces al sustituir la ecuación dada por una nueva de un RVA más estrecho. Tal estrechamiento se origina, como lo veremos a continuación, tanto por las fórmulas logarítmicas y trigonométricas como por algunos razonamientos "verbales", muy populares.

Según ya hemos notado, la sustitución del logaritmo del producto por la suma de los logaritmos (regla I del § 6, Logaritmos) conduce al estrechamiento del RVA, así como lo estrecha la regla III, en que se trata de la logaritmación de la potencia. Para que no ocurra estrechamiento, no se utilizan las reglas I y III, sino las reglas I* y III*, cuya aplicación puede, por lo menos, extender el RVA, o sea, provocar la aparición de las raíces extrañas. Ya hemos visto anteriormente cómo proceder con las raíces extrañas.

Precisamente así procederemos al resolver el siguiente ejemplo.

11. *Resolver la ecuación*

$$\frac{3}{2}\log_{1/4}(x+2)^2-3=\log_{1/4}(4-x)^3+\log_{1/4}(x+6)^3.$$

Por cuanto

$$\log_{1/4}(x+2)^2=2\log_{1/4}|x+2|,$$

$$\log_{1/4}(4-x)^3=3\log_{1/4}(4-x),\quad \log_{1/4}(x+6)^3=3\log_{1/4}(x+6),$$

entonces la ecuación toma la forma

$$\log_{1/4}|x+2|-1=\log_{1/4}(4-x)+\log_{1/4}(x+6).$$

De aquí se deduce que

$$\log_{1/4}4\,|x+2|=\log_{1/4}(4-x)\,(x+6),$$

por lo cual

$$4\,|x+2|=(4-x)\,(x+6)$$

(como resultado de las dos últimas transformaciones tiene lugar una extensión del RVA, y por esto es de esperar que aparezcan raíces extrañas). Esta ecuación se resuelve muy sencillamente (véase el § 4), sus raíces son: $x_1=2$, $x_2=1-\sqrt{33}$.

En el curso de la resolución, las raíces extrañas pueden aparacer solamente a expensas de la extensión del RVA; por lo tanto, basándose en la afirmación A, los valores hallados de x_1 y x_2 es suficiente comprobarlos si entran o no en el RVA. Es fácil ver que todas las expresiones que se encuentran en la ecuación dada bajo el signo del logaritmo son positivas para $x=x_1$ y para $x=x_2$, así que ambos números entran en su RVA y son sus raíces.

La reducción del RVA y, por consiguiente, *la pérdida de raíces pueden suceder al pasar a una nueva base de los logaritmos.*

12. *Resolver la ecuación*

$$\log_{0,5x}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0.$$

Vamos a exponer una resolución. Nos aprovecharemos de la regla de transición tomando x en calidad de nueva base de los logaritmos:

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0,5x}-\frac{14\log_x x^3}{\log_x 16x}+\frac{40\log_x\sqrt{x}}{\log_x 4x}=0.$$

Sin embargo, según se ve fácilmente, la nueva ecuación no tiene sentido para $x=1$, mientras que la inicial tiene sentido no sólo para $x=1$, también tiene unidad como su raíz. Precisamente, en este paso muchos pierden la raíz $x=1$.

Por consiguiente, hay que razonar así: queremos pasar a la base x; para hacer esto hay que estar seguro de que $x>0$ y $x\neq1$. Ya que todas las x del RVA de nuestra ecuación son positivas, entonces la primera condición $x>0$ se satisface; por otra parte, la unidad entra en el RVA y la sustitución muestra que $x=1$ es la raíz. De tal modo, una raíz de la ecuación inicial queda hallada: $x=1$. Hallemos raíces distintas de 1. Entonces, podemos pasar a la base x sin perder raíces.

La solución ulterior no presenta dificultades: utilizando las propiedades de los logaritmos y designando $\log_x 2$ por y, tendremos

$$\frac{2}{1-y}-\frac{42}{1+4y}+\frac{20}{1+2y}=0.$$

Esta ecuación se reduce a la cuadrática $2y^2+3y-2=0$, cuyas raíces $y_1=1/2$, $y_2=-2$. Entonces obtendremos $\log_x 2=1/2$, de donde $x=4$, y $\log_x 2=-2$, de donde $x=1/\sqrt{2}$. Estos valores, 4 y $1/\sqrt{2}$, son raíces de la ecuación inicial. Por consiguiente, la ecuación inicial tiene tres raíces.

Un error muy grave y bastante difundido que conduce a la pérdida de raíces es *la reducción de ambos miembros de una ecuación por un factor común*. Está claro que en este caso pueden ser perdidas raíces que convierten este factor común en cero.

En estos casos más vale trasladar todo al primer miembro, sacar el factor común fuera de paréntesis y examinar dos casos: 1) el factor común es igual a cero; 2) el factor común no es igual a cero, y entonces la expresión entre paréntesis es obligatoriamente igual a cero. Se puede también examinar al principio un caso en que el factor común es igual a cero y luego hacer reducción por éste.

13. *Hallar todas las soluciones de la ecuación*

$$x^2 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}.$$

Examinemos dos casos.

a) Sea $x\geqslant3$. En este caso tenemos la ecuación

$$x^2 2^{x+1}+2^{x-1}=x^2 2^{x+1}+2^{x-1},$$

que se satisface, evidentemente, para cualquier x. Por eso, en el caso examinado las soluciones de la ecuación dada serán $x\geqslant3$.

b) Sea $x<3$. En este caso la ecuación tiene la forma

$$x^2 2^{x+1}+2^{5-x}=x^2 2^{7-x}+2^{x-1},$$

de donde

$$2^{x-1}(4x^2-1)=2^{5-x}(4x^2-1).$$

Este lugar es precisamente donde muchos estudiantes, dejándose arrastrar por las expresiones exponenciales "fundamentales", desprecian las potenciales "insignificantes", reduciendo, lisa y llanamente, por éstas y obteniendo una ecuación $2^{x-1}=2^{5-x}$. Después de esto se obtiene la raíz $x=3$, aunque ésta no satisface la condición b).

Es claro que antes de la reducción por $4x^2-1$ había que examinar la expresión $4x^2-1=0$. En este caso hubieran sido halladas las raíces $x_{1,2}=\pm 1/2$ que satisfarían la condición b).

De tal modo, las soluciones de la ecuación dada son: cualquier $x\geqslant 3$, $x_1=1/2$, $x_2=-1/2$.

Durante las resoluciones, los estudiantes a menudo utilizan incorrectamente la siguiente afirmación: "Si dos potencias son iguales, sus bases son iguales y *distintas* de 0 y 1, entonces los exponentes son también iguales. Como regla general, aquí se olvida la limitación destacada con cursiva. Y como resultado, se pierden aquellas raíces para las cuales la base es igual a 0, o bien, a 1.

14. *Resolver la ecuación* $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$.

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$x^{\sqrt{x}}=x^{x/2}.$$

De esta manera, los exponentes son iguales y las bases también son iguales. Para que no se pierdan las raíces, vamos a determinar si la base puede ser igual a 0 ó a 1. Ya que la expresión 0^0 no tiene sentido, entonces el número 0 no entra en el RVA, debido a que $x=0$ no sirve de raíz de la ecuación. Al contrario $x=1$ es, evidentemente, una raíz. Ahora vamos a hallar raíces distintas de 0 y 1. Aplicando la regla señalada, obtendremos $\sqrt{x}=x/2$, de donde hallamos la segunda raíz de la ecuación $x=4$.

A veces se oye decir una afirmación errónea: "Si la potencia de un número es igual a 1, entonces el exponente es igual a cero". Esto es válido sólo a condición de que la base difiera de 1. Y si la base es igual a 1, entonces, para cualquier exponente la base será igual a 1.

15. *Resolver la ecuación* $|\cos x|^{\operatorname{sen}^2 x-\frac{3}{2}\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}}=1$.

Razonemos así: si $|\cos x|=1$, entonces la potencia será igual a 1 para cualquier exponente. Si $|\cos x|\neq 1$, el exponente ha de ser indispensablemente igual a cero. De tal modo, nuestra ecuación se descompone en dos:

$$|\cos x|=1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x-\frac{3}{2}\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}=0.$$

Resolviendo la primera ecuación, obtenemos que $x_1=k\pi$, donde k es cualquier número entero, mientras que de la segunda se deduce:

$$\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}, \text{ de donde } \quad x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,$$

$$\operatorname{sen} x=1, \text{ de donde } \quad x_3=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

La comprobación muestra que los ángulos de la segunda serie no entran en el RVA (en el primer miembro resulta 0^0, lo que no tiene sentido), y las demás raíces satisfacen la condición.

En definitiva, las soluciones de la ecuación se presentan así: $x_1 = k\pi$, $x_2 = (-1)^k \pi/6 + k\pi$ (k es un número entero).

De tal modo, al utilizar la regla de transición de la igualdad de potencias a la igualdad de exponentes hay que analizar tres casos: la base de la potencia es igual a 0; la base de la potencia es igual a 1; los exponentes son iguales. Este método de razonamientos permite evitar la pérdida de raíces.

No obstante, con tal solución pueden aparecer raíces extrañas. En efecto, en cada uno de estos casos se debe, hablando en términos generales, resolver una ecuación; y por cuanto estas tres ecuaciones se resuelven por separado, puede ocurrir que algunas soluciones suyas no entren en el RVA de la ecuación inicial. Precisamente así ocurrió en el último ejemplo, donde una parte de las soluciones de la segunda ecuación no entraron en el RVA de la ecuación inicial, y por eso fueron omitidas.

Por consiguiente, una vez utilizadas las reglas de transición de la igualdad de potencias a la igualdad de exponentes y después de la resolución de ecuaciones respectivas, hay que comprobarlas obligatoriamente. Con esto es suficente determinar que la raíz a comprobar entra en el RVA de la ecuación inicial; en este caso esta raíz va a satisfacerla.

A menudo, la causa de la pérdida de raíces radica en la aplicación de las fórmulas trigonométricas. Como se sabe, los ambos miembros de la fórmula trigonométrica pueden tener distintos recintos de valores admisibles. Tales son, por ejemplo, las fórmulas de la llamada "sustitución universal", que expresan el seno y el coseno por la tangente de un semiángulo. En estas fórmulas, el primer miembro tiene un recinto más extenso de valores admisibles, por eso, al sustituir el primer miembro de la fórmula por el segundo, estrechamos su RVA, es decir, nos arriesgamos a perder raíces.

16. *Resolver la ecuación* $\operatorname{sen} x - 2\cos x = 2$.

Pasando a la tangente del semiángulo, obtenemos

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{2\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 2,$$

de donde

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 \quad \text{y} \quad x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2n\pi,\ n = 0, \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Sin embargo, esta fórmula no contiene todas las soluciones: como es fácil comprobar, todos los ángulos $x = (2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, son también su solución. Estos ángulos se han perdido, precisamente, al introducir la tangente del semiángulo. La ecuación inicial tiene sentido para cualquier x, y la segunda, sólo cuando $\operatorname{tg}(x/2)$ tiene sentido, es decir, para $x \neq (2n+1)\pi$.

Las observaciones más detalladas, relacionadas con las fórmulas trigonométricas, se exponen en el § 1, Parte II.

El problema acerca de la pérdida de raíces va relacionado estrechamente con la así llamada "*resolución por selección*". Ilustremos este método con algunos ejemplos.

17. *Resolver la ecuación* $3^x + 4^x = 5^x$.

Es evidente que $x = 2$ es la raíz de la ecuación.

¿Y la ecuación ya está resuelta? Claro está que no. ¿Y si no hemos notado una raíz más? Por eso detenerse en este paso durante la resolución es cometer un error grave. Luego procederemos así: dividamos ambos miembros por 5^x y representemos la ecuación en la forma

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

De ahí se desprende: si $x < 2$, entonces, según la función exponencial con una base menor que 1, $(3/5)^x > (3/5)^2$, $(4/5)^x > (4/5)^2$, así que $(3/5)^x + (4/5)^x > (3/5)^2 + (4/5)^2 = 1$; por consiguiente, $x < 2$ no puede ser una raíz de la ecuación. Análogamente, para $x > 2$ tendremos siempre la desigualdad $(3/5)^x + (4/5)^x < 1$.

De tal modo, la raíz obtenida por selección $x = 2$ es única. Y con esto la ecuación está resuelta. Hemos hallado (no importa de qué modo) la raíz y demostrado que no hay otras raíces.

De este ejemplo se ve que la "*resolución por selección es un procedimiento legal si, después de la adivinación de algunas raíces, podremos demostrar rigurosamente que otras raíces no existen*. A propósito, de este modo es muy fácil resolver el ejemplo 1, examinado anteriormente:

$$\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5.$$

Es fácil escoger la raíz $x = 5$. Pero, si $x > 5$, entonces $\sqrt{2x-6} > \sqrt{10-6} = 2$, $\sqrt{x+4} > 3$, es decir, para $x > 5$, el primer miembro es mayor que 5. Análogamente, para $x < 5$, el primer miembro es menor que 5. Consecutivamente, $x = 5$ es la raíz única.

Si nos limitamos solamente a adivinar las raíces y no demostraremos que no hay otras raíces, a menudo tal "resolución" puede conducir a la pérdida de raíces. Precisamente, el siguiente ejemplo entraña este peligro.

18. *Resolver la ecuación* $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$.

Algunos estudiantes resuelven esta ecuación así.

Al escribirla en la forma

$$3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} = 3^1 \cdot 2^1,$$

eligieron la raíz x de modo que los exponentes, de bases correspondientes, resultan iguales:

$$x = 1, \quad \frac{3x}{x+2} = 1,$$

de donde resulta "una solución": $x = 1$.

Sin embargo, esta "solución" no es correcta; dicho de otro modo, con tales consideraciones se ha hallado solamente una raíz de la ecuación y nada se ha hablado de otras raíces. En efecto, si los exponentes de bases adecuadas son iguales, entonces los productos de estas potencias también son iguales; no obstante, lo contrario no sale de nada y es absolutamente incorrecto. Por ejemplo, la igualdad

$$3^1 \cdot 2^1 = 3^2 \cdot 2^{\log_2 (2/3)}$$

es válida, pero $1 \neq 2$ y $1 \neq \log_2 (2/3)$. Por lo tanto, el razonamiento, citado anteriormente, puede dar origen a la pérdida de raíces, cosa que ocurre en la ecuación considerada.

Logaritmando ambos miembros de la ecuación inicial por la base 10, obtendremos que

$$x \lg 3 + \frac{3x}{x+2} \lg 2 = \lg 6,$$

o bien,

$$x^2 \lg 3 + x(3\lg 2 + 2\lg 3 - \lg 6) - 2\lg 6 = 0.$$

Ahora hay que resolver esta ecuación cuadrática. Esto se puede hacer aplicando la formula conocida; pero, para simplificar la resolución obremos con cautela: ya estamos convencidos, por medio de la selección, de que $x_1 = 1$ es la raíz de la ecuación inicial y, por consiguiente, satisface la ecuación cuadrática equivalente a la inicial. Por eso, según el teorema de Viete, la segunda raíz de la ecuación cuadrática será $x_2 = (-2\lg 6)/\lg 3 = -2\lg_3 6$, es decir, la ecuación inicial tiene dos raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = 2\lg_3 6$.

De tal manera, vemos que la adivinación de la raíz puede ser de utilidad. Sin embargo, no hace falta considerarla como una solución completa.

Frecuentemente, la dificultad principal consiste no en la pérdida y la adquisición de raíces de una ecuación, sino en otras cosas, no menos complejas. Consideremos algunos ejemplos.

19. *Resolver la ecuación*

$$\log_{1/(8\cos^2 x)} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Por la definición del logaritmo, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{8\cos^2 x}}.$$

Esta ecuación es un corolario de la inicial, pero tiene, evidentemente, un RVA más extenso: efectivamente, su RVA consta de todos los valores de x para los cuales $\cos x \neq 0$, mientras que para la ecuación inicial han de ser, además de esto, satisfechas dos condiciones más: $1/\sqrt{8\cos^2 x} \neq 1$ y $\operatorname{sen} x > 0$. No obstante, estas ecua-

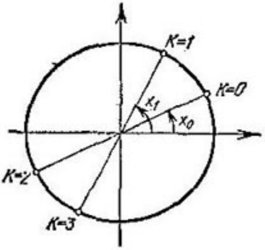


Fig. 17

ciones son equivalentes, dado que cualquier raíz de la segunda ecuación entra en el RVA de la inicial; en realidad, si $\operatorname{sen} x_0 = 1/\sqrt{8\cos^2 x_0}$, entonces, primero, $\operatorname{sen} x_0 > 0$ y, segundo, $1/8\cos^2 x_0 \neq 1$; de otra manera, tendríamos $\cos^2 x_0 = 1/8$ y $\operatorname{sen} x_0 = 1$, lo que es imposible.

Luego tenemos $\operatorname{sen} x\,|\cos x| = 1/(2\sqrt{2})$ (véase el § 4). Para resolver la ecuación es conveniente examinar dos casos siguientes.

a) $\cos x > 0$. Entonces tenemos una ecuación $\operatorname{sen} x \cos x = 1/(2\sqrt{2})$, o bien, $\operatorname{sen} 2x = 1/\sqrt{2}$. Sus soluciones se dan por la fórmula $x = (-1)^k \pi/8 + k\pi/2$, donde k es cualquier número entero. Pero, de estos valores hay que escoger sólo aquellos que satisfacen la condición $\cos x > 0$. Con este fin conviene determinar los valores de k para los cuales el valor correspondiente de x se halla en los cuadrantes I y IV, lo que es muy fácil demostrar, al representar las soluciones en el círculo trigonométrico. Para los valores de $k = 0, 1, 2, 3$, los ángulos respectivos están señalados en la fig. 17 (para otros valores de k los ángulos empiezan a repetirse a cada cuatro unidades). Nos convienen solamente los ángulos $x_0 = \pi/8$ y $x_1 = (-\pi/8) + (\pi/2) = 3\pi/8$, y las series obtenidas de éstos (para $k=4n$ y $k=1+4n$), o sea, los ángulos

$$x=\frac{\pi}{8}+2n\pi, \quad x=\frac{3\pi}{8}+2n\pi,$$

donde n es cualquier número entero.

b) $\cos x<0$. Este caso se considera de un modo análogo.

Como resultado de esto obtenemos cuatro series de soluciones:

$$x=\frac{\pi}{8}+2n\pi, \quad x=\frac{3\pi}{8}+2n\pi, \quad x=\frac{5\pi}{8}+2n\pi, \quad x=\frac{7\pi}{8}+2n\pi,$$

donde n es cualquier número entero.

Estas series pueden ser reunidas en dos:

$$x_1=(-1)^n\frac{\pi}{8}+n\pi, \quad x_2=(-1)^n\frac{3\pi}{8}+n\pi.$$

20. *Resolver la ecuación* $\operatorname{tg}(\pi\cos x)=\operatorname{cotg}(\pi\cos 2x)$.

Transformemos el segundo miembro:

$$\operatorname{cotg}(\pi\cos 2x)=\operatorname{cotg}[\pi(2\cos^2 x-1)]=\operatorname{cotg}(2\pi\cos^2 x)=\operatorname{tg}(\pi/2-2\pi\cos^2 x).$$

De tal modo tenemos la ecuación

$$\operatorname{tg}(\pi\cos x)=\operatorname{tg}(\pi/2-2\pi\cos^2 x).$$

De aquí se deduce que

$$\pi\cos x-\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\cos^2 x\right)=k\pi,$$

donde k es cualquier número entero. Notemos seguidamente que, al pasar a esta ecuación, hemos extendido el RVA: en la ecuación inicial el RVA se determina por la condición

$$\pi\cos x\neq(\pi/2)+k\pi, \quad (\pi/2)-2\pi\cos^2 x\neq(\pi/2)+l\pi,$$

es decir, $\cos x\neq(1/2)+k$, $\cos^2 x\neq-l/2$ (k, l son números enteros), y en la nueva ecuación el RVA consta de todos los valores de x.

A continuación tenemos una ecuación $2\cos^2 x+\cos x-1/2=k$, o bien, $4\cos^2 x+2\cos x-(2k+1)=0$. De ahí

$$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{8k+5}}{4}.$$

Ahora se debe aclarar para cuáles k las ecuaciones que siguen tienen soluciones

$$\cos x=\frac{-1-\sqrt{8k+5}}{4}$$

y

$$\cos x=\frac{-1+\sqrt{8k+5}}{4}.$$

Está claro que $k\geqslant 0$ (de otro modo, $8k+5<0$).

La primera ecuación tiene solución cuando

$$-1 \leqslant \frac{-1-\sqrt{8k+5}}{4} \leqslant 1.$$

La desigualdad de la derecha se cumple automáticamente y de la izquierda tenemos $\sqrt{8k+5} \leqslant 3$, esto es, $8k+5 \leqslant 9$, de donde se deduce que $k \leqslant 1/2 < 1$. Por consiguiente, la primera ecuación tiene solución sólo para $k=0$, y sus soluciones serán

$$x = \pm \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + 2n\pi \tag{6}$$

donde n es cualquier número entero.

Claro está que todas estas x entran en el RVA de la ecuación inicial, porque

$$\cos x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \neq \frac{1}{2} + k, \quad \cos^2 x = \frac{3+\sqrt{5}}{8} \neq -\frac{l}{2},$$

siendo sus soluciones.

La segunda ecuación tiene solución cuando

$$-1 \leqslant \frac{-1+\sqrt{8k+5}}{4} \leqslant 1,$$

o bien, $-3 \leqslant \sqrt{8k+5} \leqslant 5$, de donde $k \leqslant 5/2$. Por consiguiente, la segunda ecuación tiene solución para $k=0, 1, 2$ y sus soluciones van a ser representadas en la forma

$$x = \pm \arccos \frac{-1+\sqrt{8k+5}}{4} + 2n\pi, \tag{7}$$

$k=0, 1, 2$; n es cualquier número entero.

Todas estas x entran en el RVA de la ecuación inicial, siendo, de tal modo, sus soluciones.

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación inicial se determinan por las fórmulas (6) y (7).

EJERCICIOS:

Resolver las ecuaciones:

1. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.
2. $\sqrt{4x-1} - \sqrt{x-2} = 3$.
3. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+2} = 4$.
4. $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x-3} = -3$.
5. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{34+x} - \sqrt{7+x}$.
6. $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$.
7. $\sqrt{14-x} = \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1}$.
8. $(2x+1)^{3/2} - (13x/2) = 1$.

9. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

10. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[3]{(x-2)(x-3)}$.

11. $a\sqrt[4]{1+x}+\frac{a}{x}\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{x}$.

12. $2^{2x+2}-6^{x}-2\cdot 3^{2x+2}=0$.

13. $8^{x}-3\cdot 4^{x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$.

14. $4^{x}=2\cdot 14^{x}+3\cdot 49^{x}$.

15. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{101}{10(2-\sqrt{3})}$.

16. $\log_3(4^{x}+15\cdot 2^{x}+27)-2\log_3(4\cdot 2^{x}-3)=0$.

17. $(1+x/2)\log_2 3-\log_2(3^{x}-13)=3\log_{\sqrt{5}/25}5+4$.

18. $\log_3(3^{x}-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6$.

19. $\log_5\left[(2+\sqrt{5})^{x}-(\sqrt{5}-2)^{x}\right]=\frac{1}{2}-3\log_{1/5}2$.

20. $\frac{\log_8(8/x^2)}{(\log_8 x)^2}=3$.

21. $\frac{1}{2}\left(2^{\sqrt[3]{6x}}-10\cdot 2^{-\sqrt[3]{6x}}+1\right)=3\left(\log_{7\sqrt{7}}49-1\right)$.

22. $\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}+1=0$.

23. $\log_x 3\cdot\log_{x/3}3+\log_{x/81}3=0$.

24. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=2/\log_4 x$.

25. $x^{x+1}=x$.

26. $x^{\log_3(x+3)^2}=16$.

27. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$.

28. $x^{(\log_3 x)^2-3\log_3 x}=3^{-3\log_{\sqrt{2}}4}+8$.

29. $x^{\log_2^2 x^2-\log_2(2x)-2}+(x+2)^{\log_{(x+2)^2}4}=3$.

30. $x^{\frac{3}{(\log_3 x^2)^2}}=(\sqrt{x})^{-\log_3 x+\frac{1}{\log_3\sqrt{x}}}$.

31. $3^{\log_a x}+3\cdot x^{\log_a 3}=2$.

32. $\sqrt{\lg x}+\lg\sqrt{x}=-1/2$.

33. $\log_a(1-\sqrt{1+x})=\log_{a^2}(3-\sqrt{1+x})$.

34. $\log_{\sqrt{2x-1}}(2x-3)=2\log_8 4+\log_2\left(1/\sqrt[3]{2}\right)$.

35. $1/2\log_3(-x-16)-\log_3(\sqrt{-x}-4)=1$.

36. $\frac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}=1$.

37. $\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{4\log_4 x-2}=4$.

38. $\sqrt{1+\log_x\sqrt{27}}\,\log_3 x+1=0$.

39. $\log_{1/2}(x-1)+\log_{1/2}(x+1)-\log_{1/\sqrt{2}}(7-x)=1$.

40. $\log_{1/\sqrt{1+x}} 10 \cdot \log_{10}(x^2-3x+2) = -2 + \log_{1/\sqrt{1+x}} 10 \cdot \log_{10}(x-3)$.
41. $\log_3(-x^2-8x-14) \cdot \log_{x^2+4+4x} 9 = 1$.
42. $2\log_8(2x) + \log_8(x^2+1-2x) = 4/3$.
43. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 = 4$.
44. $\log_3(\sqrt{x} + |\sqrt{x}-1|) = \log_9(4\sqrt{x} - 3 + |4\sqrt{x}-1|)$.
45. $2\log_2 x - \log_{1/2}(13-x) = \log_2(x-10)^2 = 2\log_4(8-x)$.
46. $2^{1+2\cos 5x} + 16^{\operatorname{sen}^2(5x/2)} = 9$.
47. $3^{\operatorname{sen} 2x + 2\cos^2 x} + 3^{1-\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen}^2 x} = 28$.
48. $\dfrac{1}{2} + 16^{\operatorname{sen} x} = \dfrac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$.
49. $3(\log_2 \operatorname{sen} x)^2 + \log_2(1-\cos 2x) = 2$.
50. $(\log_{\operatorname{sen} x} \cos x)^2 = 1$.
51. $\sqrt{\log_{\operatorname{sen} x} \cos x} = 1$.
52. $\log_{\sqrt{2}\operatorname{sen} x}(1+\cos x) = 2$.
53. $\lg \operatorname{sen} 2x - \lg \operatorname{sen} x = \lg \cos 2x - \lg \cos x + 2\lg 2$.
54. $\log_2 \cos 2x - \log_2 \operatorname{sen} x - \log_2 \cos x = 1$.
55. $\lg \operatorname{sen}(x/2) = \lg(\cos x - \operatorname{sen} x) + \lg(\cos x + \operatorname{sen} x)$.
56. $\log_2 \operatorname{sen} x - \log_2 \cos x - \log_2(1-\operatorname{tg} x) - \log_2(1+\operatorname{tg} x) = 1$.
57. $(\operatorname{sen} x)^{-\operatorname{sen} x} - 1 = \operatorname{cotg}^3 x$.
58. $(\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x} = (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$.
59. $\left|\cos\dfrac{x}{2} + 2 - \dfrac{3}{4\cos\dfrac{x}{2}}\right|^{\sqrt{x^2+3x-10}} = 1$.
60. $(\cos 2x - \cos^4 x)\operatorname{cotg} 3x + \dfrac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x}{8\operatorname{sen} 3x} = 0$.
61. $\cos^2 x \operatorname{sen} 6x + 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 3x + \left(\dfrac{\cos^2 x}{\cos 3x} - \operatorname{sen}^2 x\right)\operatorname{sen} 6x = 0$.
62. $\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\operatorname{sen} 2x \cos 2x \operatorname{cotg} 3x = 0$.
63. $\sqrt{\operatorname{sen} x} + \cos x = 0$.
64. $\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x = 1/2\cos 3x + (1+\cos x)^{1/2}$.
65. $(\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x)^{1/2} + (\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)^{1/2} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos x$.
66. $5^x + 12^x = 13^x$.
67. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

§ 10 RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES

Los errores, en su mayoría, están relacionados, con la resolución de desigualdades. En muchos casos la resolución de desigualdades que se proponen a los estudiantes no requiere ingeniosidad alguna, procedimientos artificiales, dado que los estudiantes, como regla general, perciben de inmediato qué cálculos han de hacerse para resolver la desigualdad. Sin embargo, muchos de ellos al verificar estos cálculos cometen errores graves, porque ignoran los conceptos teóricos fundamentales relacionados con la resolución de desigualdades.

Mientras tanto, la resolución de desigualdades no exige prácticamente nada, a no ser el conocimiento de reducir correctamente una desigualdad a la resolución de desigualdades más sencillas (sin perder soluciones ni adquirir soluciones extrañas) y de resolver estas últimas.

Para realizar la segunda parte de nuestra premisa es preciso conocer las propiedades elementales de las funciones que se estudian en la escuela secundaria: algebraicas, exponencial y logarítmica, y trigonométricas; para efectuar la primera parte hay que poseer conocimientos básicos relacionados con la equivalencia de las desigualdades y con las fuentes de pérdida de soluciones y adquisición de soluciones extrañas.

Las definiciones fundamentales necesarias para la resolución de las desigualdades repiten, casi palabra por palabra, las definiciones correspondientes a las ecuaciones (el § 9, Parte I). Mencionemos sólo dos diferencias en cuanto a la terminología: el término "raíz" no se utiliza para las desigualdades y siempre se dice "solución"; además de esto, para abreviar razonamientos, se dice a veces que la solución es un conjunto de valores de x, por ejemplo, el intervalo, $a<x<b$, mientras que en realidad se sobrentiende que la solución es cualquier valor de x de este conjunto.

La semejanza entre las ecuaciones y desigualdades no se limita, naturalmente, por la de las definiciones fundamentales. Está claro que todo lo dicho, por ejemplo, de las transformaciones de ecuaciones, que amplían o reducen el RVA, es válido también para las desigualdades.

Sin embargo, es indispensable subrayar que la resolución de desigualdades tiene sus particularidades relacionadas con el hecho de que las mismas transformaciones, aplicadas a las ecuaciones y desigualdades, originan diferentes resultados. Por ejemplo, al multiplicar ambos miembros de una ecuación por un factor distinto de cero (que tiene sentido en el RVA), la ecuación se sustituirá por una equivalente, y en cuanto a las desigualdades, los requerimientos dados respecto al factor son insuficientes, es necesario que éste no sea negativo en el RVA. Así mismo, al elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación, las raíces no se pierden y la misma transformación de la desigualdad puede originar adquisición y pérdida de soluciones. Lamentablemente, a veces los estudiantes olvidan estas particularidades, debido a que cometen tales errores durante la resolución de las desigualdades, mientras que los evitan al resolver las ecuaciones.

Por extraño que sea, los estudiantes cometen muchos errores al resolver las desigualdades elementales. Esto proviene, por lo visto, de la analogía formalmente comprensible entre las ecuaciones y desigualdades. El razonamiento es, más o menos, así: "Por cuanto la solución de la ecuación $\log_{1/2} x = 1$ es $x = 1/2$, resulta que la solución de la desigualdad $\log_{1/2} x > 1$ son los valores de $x > 1/2$". Análogamente, las soluciones de desigualdades $(1/5)^x < 2$ se presentan en forma de $x < \log_{1/5} 2$, etc. Mientras tanto, las soluciones de las dos desigualdades citadas son otras: de la primera, $0 < x < 1/2$, de la segunda, $x > \log_{1/5} 2$; de tal modo que "la analogía" así comprendida, entre las ecuaciones y las desigualdades, condujo a soluciones incorrectas.

En realidad, resolviendo las desigualdades elementales es necesario utilizar conscientemente las propiedades de las funciones que intervienen en estas desigualdades.

Ahora analicemos ejemplos con la resolución de las desigualdades elementales.

Notemos, ante todo, que la resolución de las desigualdades algebraicas de primero y segundo grado se explica en muchos libros

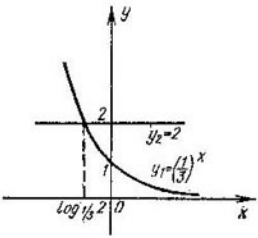


Fig. 18

de texto y, como regla, no presenta dificultades. El problema relacionado con la resolución de las desigualdades que contienen un valor absoluto, se examina en el § 4, Parte I.

Aquí nos detendremos en las desigualdades exponenciales, logarítmicas y trigonométricas elementales.

La desigualdad exponencial elemental será la desigualdad $a^x > a^b$ $(a^x < a^b)$. Al resolver tales desigualdades hay que recordar que las propiedades de una función exponencial son diferentes en las bases mayores o menores que 1.

1. *Resolver la desigualdad* $-1 \leqslant (1/3)^x < 2$.

Resolver la desigualdad doble significa hallar todos aquellos valores de x que satisfacen *simultáneamente* dos desigualdades:

$$(1/3)^x \geqslant -1 \quad \text{y} \quad (1/3)^x < 2.$$

Ya que la función exponencial es siempre positiva, entonces la primera de estas desigualdades se satisface con cualesquier valores de x.

Escribiendo la segunda desigualdad en forma de $(1/3)^x < (1/3)^{\log_{1/3} 2}$ utilizaremos la siguiente propiedad de la función exponencial: de la base menor que 1, el menor valor del argumento corresponde al mayor valor de la función y al contrario, al menor valor de la función le corresponde el mayor valor del argumento. Por lo tanto, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad $x > \log_{1/3} 2$.

Esta solución se ilustra bien mediante una gráfica (fig. 18). Precisamente, las soluciones son aquellos valores de x con los cuales la gráfica de la función $y = (1/3)^x$ se encuentra *por debajo* de la recta $y = 2$, es decir, todas las x *a la derecha* de la abscisa del punto de intersección de estas gráficas (esta abscisa es la solución de la ecuación $(1/3)^x = 2$). De tal modo, la solución de nuestra desigualdad está en el intervalo $x > \log_{1/3} 2$.

Al resolver las desigualdades que contienen la incógnita bajo el signo del logaritmo hay que tener en cuenta que las propiedades de la función logarítmica son diferentes cuando las bases son menores o mayores que 1. Sin embargo, para la resolución de estas desigualdades tiene también importancia que la función logarítmica está definida no para todos los valores de x. Al olvidar este hecho, algunos estudiantes resuelven la desigualdad $\log_2 x < 1$ del modo siguiente: "Expongamos nuestra desigualdad así: $\log_2 x < \log_2 2$. Con la base mayor que 1, el número mayor tiene el mayor logaritmo; por esto, la desigualdad se cumple para $x < 2$".

Parece que no hay nada erróneo en esta consideración aunque la solución es incorrecta, porque aparecieron soluciones extrañas. Efectivamente, cualquier número negativo es menor que dos, no obstante, con las x negativas, la desigualdad inicial no tiene sentido (ya que los números negativos no tienen logaritmos).

¿Y por qué aparecieron soluciones extrañas? Durante "la resolución" de la desigualdad pasamos de la desigualdad $\log_2 x < \log_2 2$ a la desigualdad $x < 2$. La última desigualdad tiene sentido para todos los valores de x, y la desigualdad inicial, sólo para aquellas x para los cuales tiene sentido $\log_2 x$, es decir, para $x > 0$. Por consiguiente, las soluciones extrañas resultaron por falta de consideración de que la función logarítmica está definida solamente para x positivas.

Para obtener la solución correcta, de las soluciones de la última desigualdad es necesario escoger los valores de $x > 0$, o sea, la solución de nuestra desigualdad es el intervalo $0 < x < 2$.

Este ejemplo sencillo muestra que, al aplicar tal procedimiento de solución de las desigualdades logarítmicas, hay que recordar siempre que la función logarítmica está definida sólo para las x positivas. Mientras tanto, en el curso de la resolución de estas desigualdades se puede proceder de otra manera: en lugar de utilizar el recinto de definición de la función logarítmica y la propiedad de su monotonía ha de valerse inmediatamente de las propiedades VII y VIII de los logaritmos (el § 6, Parte I).

De este modo, la aplicación de la propiedad VII al ejemplo precedente permite en seguida sustituir la desigualdad $\log_2 x < \log_2 2$ por la desigualdad equivalente $0 < x < 2$, la cual favorece la solución de este ejemplo.

Tomando en consideración la sencillez de resolución de las desigualdades logarítmicas con ayuda de las propiedades VII y VIII, vamos a resolverlas en lo ulterior, valiéndonos de estas propiedades.

2. *Resolver la desigualdad* $\log_{1/2} x > \log_{1/3} x$.

Pasando al logaritmo de la base 1/2 del primer miembro (regla V de los logaritmos del § 6, Parte I), obtenemos la desigualdad equivalente

$$\log_{1/2} x\,(1-\log_{1/3} 1/2) > 0.$$

Por cuanto $1/2 > 1/3$, resulta que $\log_{1/3} 1/2 < \log_{1/3} 1/3$, es decir, $1-\log_{1/3} 1/2 > 0$.

Teniendo en cuenta que $0=\log_{1/2} 1$, obtenemos que la desigualdad inicial es equivalente a la desigualdad $\log_{1/2} x > \log_{1/2} 1$.

Aplicando a esta desigualdad la propiedad VIII de los logaritmos, obtenemos que la desigualdad inicial tiene soluciones $0 < x < 1$.

Pasemos a *las desigualdades trigonométricas*. A pesar de que la resolución de las desigualdades trigonométricas elementales está bien interpretada en los libros de texto para escuela secundaria, muchos estudiantes cometen errores imperdonables al resolver precisamente las desigualdades elementales. Señalemos los más típicos de estos errores.

a) Sabiendo que las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} x = a$ $(|a| \leqslant 1)$ se escriben como la fórmula $x=(-1)^k \operatorname{arc\,sen} a + k\pi$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, muchos escriben que "la solución de la desigualdad $\operatorname{sen} x < a$ son todos los valores de $x < (-1)^k \operatorname{arc\,sen} a + k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$".

A veces resulta difícil persuadir a uno que tal "solución" es absurda.

b) Un gran número de errores quedan relacionadas con la utilización formal de los símbolos arc sen a, arc cos a y otros. Precisamente estos símbolos se emplean a menudo sin la investigación preliminar requerida si tienen o no el sentido. Por ejemplo, la solución de la desigualdad $\operatorname{sen} x \leqslant \log_4 5$ se anota por medio del símbolo $\operatorname{arc\,sen} (\log_4 5)$ que no tiene sentido, porque $\log_4 5 > 1$.

Mientras tanto, esta desigualdad es válida para cualesquier x; esto se puede observar de inmediato, debido, precisamente, a que $\log_4 5 > 1$.

c) Los errores surgen a veces a causa de la aplicación incorrecta del círculo trigonométrico. Por ejemplo, resolviendo la desigualdad $\operatorname{sen} x \leqslant -\sqrt{2}/2$, los estudiantes indican correctamente aquellos ángulos en el círculo que dan soluciones de esta desigualdad (fig. 18a), no obstante, caen en error exponiendo su expresión analítica en forma de

$$\frac{5\pi}{4}+2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{4}+2k\pi, \quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

¡Está claro que esta expresión carece de sentido porque para cualquier k el primer miembro de la desigualdad es mayor que el segundo!

Para resolver las desigualdades trigonométricas elementales será mejor utilizar las gráficas de las funciones trigonométricas. Este método garantiza prácticamente de los errores, permitiendo repre-

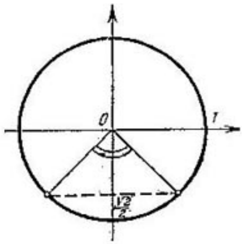


Fig. 18a

sentar con evidencia recintos dentro de los cuales se cumple la desigualdad. Para su representación analítica es conveniente utilizar el siguiente hecho: si $f(a)$ es una función periódica, entonces, para resolver la desigualdad $f(x) > a$ es suficiente hallar su solución en

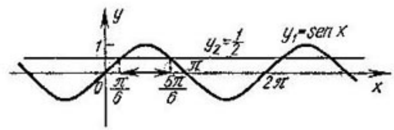


Fig. 19

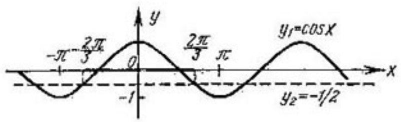


Fig. 20

cualquier segmento, cuya longitud es igual al período de la función $f(x)$; entonces la solución de nuestra desigualdad serán todas las x halladas, así como todas las x distintas de las halladas en cualquier número entero de períodos de la función $f(x)$.

3. *Resolver la desigualdad* sen $x > 1/2$.

Se construye la gráfica de funciones $y_1 = \operatorname{sen} x$ e $y_2 = 1/2$ (fig. 19). La desigualdad en cuestión se satisface para todas aquellas x donde la primera gráfica se halla por encima de la segunda. Ya que el período de la función sen x es igual a 2π es bastante resolver la desigualdad propuesta sólo en algún segmento de la longitud 2π. Es fácil ver que en calidad de tal segmento será mucho más conveniente tomar el segmento desde 0 hasta 2π, porque en éste las soluciones se escriben con mayor facilidad: $\pi/6 < x < 5\pi/6$.

De esa manera, la solución completa de esta desigualdad es la siguiente:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Así debe entenderse esta anotación: con cada k entera resulta un intervalo y el conjunto de todos estos intervalos es la solución de la desigualdad.

4. *Resolver la desigualdad* cos $x \geqslant -1/2$.

Construimos las gráficas de funciones $y_1 = \cos x$ e $y_2 = -1/2$ (fig. 20). El período de la función cos x es también igual a 2π, pero, por el dibujo se puede apreciar que ahora no es conveniente tomar el segmento desde 0 hasta 2π como el "principal": la resolución de la desigualdad se compondrá de dos "trozos". Por eso, es más conveniente hallar la solución de la desigualdad propuesta en el segmento desde $-\pi$ hasta π: en éste se halla el intervalo $-2\pi/3 \leqslant x \leqslant 2\pi/3$. Por consiguiente, la solución completa será:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

5. *Resolver la desigualdad* $|\operatorname{tg} x| < 1/7$.

El período de la función $|\operatorname{tg} x|$ es igual a π. Examinemos esta desigualdad en el segmento desde $-\pi/2$ hasta $\pi/2$. Construimos las gráficas de las funciones $y_1 = |\operatorname{tg} x|$ e $y_2 = 1/7$ (fig. 21). Está claro que la solución serán todas las x del intervalo $-x_0 < x < x_0$, donde x_0 es una abscisa del punto de intersección de las gráficas consideradas, la que se halla entre 0 y $\pi/2$, es decir, la raíz de la ecuación $\operatorname{tg} x = 1/7$ que se halla en el intervalo $0 < x < \pi/2$; pues así, $x_0 = \operatorname{arc\,tg}(1/7)$. Teniendo en cuentra el período de la función $y = |\operatorname{tg} x|$, obtenemos que la solución de nuestra desigualdad serán todas las x de los intervalos

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + k\pi < x < \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + k\pi,$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Notemos que la desigualdad inicial se puede considerarla como doble: $-1/7 < \operatorname{tg} x < 1/7$ y resolverla utilizando la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$.

6. *Resolver la desigualdad* sen $x - \cos x > 0$.

Aplicando la fórmula del ángulo auxiliar, obtendremos una desigualdad $\sqrt{2}$ sen $[x-(\pi/4)] > 0$. Pues, se puede resolver esta desigualdad considerando la gráfica de la función $y = \text{sen}[x-(\pi/4)]$. Sin embargo, es mucho mejor proceder de otro modo. Designando $x-(\pi/4)$ por z, examinemos la desigualdad sen $z > 0$. Su solución, $2\pi k < z < \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, resulta inmediatamente de la gráfica de la función $y = \text{sen}\, z$. Ahora, sustituyendo z por $x-(\pi/4)$, hallamos los intervalos correspondientes de la variación de x:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Este procedimiento, la sustitución de $x-(\pi/4)$ por z, nos permitió evitar la construcción de la gráfica de la función $y = \text{sen}[x-(\pi/4)]$. Su comodidad es aún más perceptible al resolver las desigualdades trigonométricas elementales con un argumento complejo. Por ejemplo, este procedimiento permite evitar una construcción deficiente de la gráfica al resolver las desigualdades parecidas a: sen $(\sqrt{2}x + 7) > -1/2$. Aquí es más fácil designar $\sqrt{2}x + 7$ por z y resolver la desigualdad sen $z > -1/2$ rigiéndose por la gráfica de la función $y = \text{sen}\, z$ y pasando luego a x.

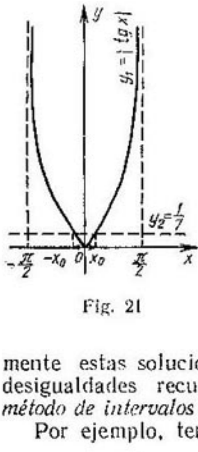


Fig. 21

A las desigualdades elementales se puede llamar también *desigualdades algebraicas de altas potencias*. Algunos estudiantes las resuelven considerando diferentes casos, o sea, pasando a la resolución de unos cuantos sistemas de desigualdades. Resolviéndolas de tal modo, muchos de los estudiantes se confunden sin saber dónde hay que tomar la parte general de soluciones y dónde se debe reunir simplemente estas soluciones. Al mismo tiempo, se puede resolver estas desigualdades recurriendo a un método único standard, llamado *método de intervalos* que vamos a exponer a continuación.

Por ejemplo, tenemos que resolver la desigualdad

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n) < 0,$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son *diferentes números reales*. Supongamos que

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Marquemos estos números en la recta numérica (fig. 22) y examinemos el polinomio

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n). \tag{1}$$

Se ve que para todos los valores de $x > x_n$ todos los paréntesis de la expresión (1) son positivos, a saber: para $x > x_n$ tenemos $P(x) > 0$. Ya que para $x_{n-1} < x < x_n$ el último paréntesis de la expresión $P(x)$ es negativo y todos los demás paréntesis son positivos, entonces para $x_{n-1} < x < x_n$ tenemos que $P(x) < 0$. Análogamente obtenemos que $P(x) > 0$ si $x_{n-2} < x < x_{n-1}$, etc.

En esto se basa el método de intervalos. Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ han de ordenarse en una recta numérica en sucesión creciente. Lue-

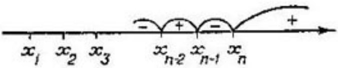


Fig. 22

go, en el intervalo, a la derecha del máximo de ellos, hay que poner el signo "más". En el siguiente intervalo, de derecha a izquierda, hay que poner el signo "menos", luego el signo "más" a que sigue el signo "menos", etc. De esa manera, los intervalos de signo "menos" serán la solución de la desigualdad $P(x) < 0$.

7. *Resolver la desigualdad*

$$x(x+1)\ (-x+\sqrt{2})\ (x^2-x+1)\ (3x+1)^2\ (x+\sqrt{17})^3\cdot(1-x)\times \\ \times(2x-\pi^2)(-x+\pi)\ (x-\operatorname{sen}^2 1) < 0.$$

Es evidente que al reducir esta desigualdad a los sistemas de desigualdades nos hace falta examinar una enorme cantidad de casos.

Resolvamos esta desigualdad por el método de intervalos. Pero, se debe reducirla antes a una forma adecuada. Notemos con este fin que $x^2-x+1>0$ para cualquier x, a causa de que se puede simplificar ambos miembros de la desigualdad por este factor. Seguidamente notemos que $(3x+1)^2>0$ para $x\neq-1/3$ y por eso se puede simplificar también los dos miembros por este factor, guardando en la memoria, sin embargo, que $x=-1/3$ no es una solución de la desigualdad. Además de esto es evidente que el signo $(x+\sqrt{17})^3$ coincide con el signo $x+\sqrt{17}$; debido a lo cual se puede sustituir $(x+\sqrt{17})^3$ por $x+\sqrt{17}$, sin alterar la desigualdad. Por fin, conviene presentar cada factor en forma de $x-a$, donde a es cierto número.

Después de estas transformaciones llegaremos a la desigualdad

$$(x-0)\ [x-(-1)]\,(x-\sqrt{2})\,[x-(-\sqrt{17})]\,(x-1)\times \\ \times\left(x-\frac{\pi^2}{2}\right)(x-\pi)\,(x-\operatorname{sen}^2 1)>0,$$

la cual es equivalente a la inicial para todas $x\neq-1/3$ (ya que los tres paréntesis los hemos multiplicado por -1, entonces el signo de la desigualdad ha cambiado por el contrario).

Marquemos los números 0, -1, $-\sqrt{17}$, 1, $\pi^2/2$, π, $\sqrt{2}$ y $\operatorname{sen}^2 1$ en el eje numérico (fig. 23). En este caso la última desigualdad se cumple para x de los intervalos

$$x < -\sqrt{17}, \quad -1 < x < 0, \quad \operatorname{sen}^2 1 < x < 1, \quad \sqrt{2} < x < \pi, \quad \frac{\pi^2}{2} < x,$$

y los mismos valores de x serán soluciones de la desigualdad inicial, menos $x = -1/3$, o sea,

$$x < -\sqrt{17}, \ -1 < x < -\frac{1}{3}, \ -\frac{1}{3} < x < 0,$$
$$\operatorname{sen}^2 1 < x < 1, \ \sqrt{2} < x < \pi, \ \frac{\pi^2}{2} < x.$$

Notemos también que la desigualdad no estricta

$$(x - x_1)\ (x - x_2) \ldots \ (x - x_n) \leqslant 0$$

se resuelve por el método de intervalos, a diferencia de que la solución se escribe en forma de intervalos $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ con extremos incluidos.

Se proponen frecuentemente desigualdades que se reducen a desigualdades elementales con ayuda de transformaciones algebraicas simples y de introducción de una nueva incógnita.

8. *Resolver la desigualdad*

$$9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0.$$

Designando 3^x por y escribamos la desigualdad así: $y^2 - 10y + 9 \leqslant 0$. Esta desigualdad cuadrática es válida para todas las y

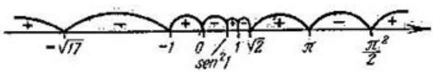


Fig. 23

del intervalo $1 \leqslant y \leqslant 9$. Sustituyendo aquí y por 3^x, obtenemos que la desigualdad inicial será válida para todas las x que satisfacen la desigualdad doble $1 \leqslant 3^x \leqslant 9$.

Resolviendo esta desigualdad exponencial elemental hallamos la solución: $0 \leqslant x \leqslant 2$.

9. *Resolver la desigualdad*

$$\log_2^2 x + 3 \log_2 x \geqslant \frac{5}{2} \log_{4\sqrt{2}} 16.$$

Designando $y = \log_2 x$ y teniendo en cuenta que $5/2 \log_{4\sqrt{2}} 16 = 4$, escribamos nuestra desigualdad así: $y^2 + 3y - 4 \geqslant 0$. La solución de esta desigualdad cuadrática serán todas las $y \geqslant 1$, así como todas las $y \leqslant -4$. Por consiguiente, la desigualdad inicial será válida para aquellos valores de x para los cuales $\log_2 x \geqslant 1$, así como para aquellas x para las cuales $\log_2 x \leqslant -4$. Resolviendo estas desigualdades logarítmicas elementales mediante la propiedad VIII de los logaritmos, obtenemos la solución: $x \geqslant 2$, $0 < x \leqslant 2^{-4}$.

10. *Resolver la desigualdad*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^6-2x^3+1)^{\frac{1}{2}}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}.$$

Si se desprecian los exponentes, se puede decir que esta es una desigualdad exponencial elemental $(1/2)^a < (1/2)^b$. Al resolver esta desigualdad de una base menor que 1, obtendremos que nuestra desigualdad es equivalente a la desigualdad $(x^6-2x^3+1)^{\frac{1}{2}} > 1-x$.

Por cuanto $(x^6-2x^3+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^3-1)^2} = |x^3-1|$ (véase § 4, Parte I), cabe resolver la desigualdad

$$|x^3-1| > 1-x.$$

En tanto que el primer miembro de esta desigualdad no es negativo, entonces para $1-x<0$, es decir, para $x>1$, se satisface automáticamente.

A continuación examinemos $x \leqslant 1$. En este caso $x^3 \leqslant 1$, de donde se desprende que $|x^3-1| = 1-x^3$ y tenemos la desigualdad $1-x^3 > > 1-x$, o bien,

$$x(x-1)(x+1) < 0.$$

Resolviendo esta desigualdad por el método de intervalos, obtenemos que es válida para $x<-1$ y para x del intervalo $0<x<1$. Todas estas x se encuentran dentro del recinto considerado $x \leqslant 1$, por eso son las soluciones de la desigualdad inicial.

De tal modo, la desigualdad inicial es válida para $x<-1$,

$$0<x<1, \quad x>1.$$

11. *Resolver la desigualdad*

$$5+2\cos 2x \leqslant 3\,|2\operatorname{sen} x - 1|.$$

Aprovechándonos de la fórmula del coseno del ángulo doble y designando $\operatorname{sen} x$ por y, escribamos nuestra desigualdad en forma $7-$ $-4y^2 \leqslant 3\,|2y-1|$. Para despejar el signo del valor absoluto consideremos dos casos: $y \geqslant 1/2$ e $y < 1/2$.

a) Sea $y \geqslant 1/2$; entonces nuestra desigualdad va a presentarse así: $7-4y^2 \leqslant 3(2y-1)$, o bien, $2y^2+3y-5 \geqslant 0$. La solución de la última desigualdad serán $y \geqslant 1$ e $y \leqslant -5/2$. Teniendo en cuenta sólo la consideración de $y \geqslant 1/2$, obtenemos que a esta condición la satisfacen solamente los valores de $y \geqslant 1$.

b) Sea $y < 1/2$. En este caso la desigualdad inicial tendrá la siguiente forma: $7-4y^2 \leqslant -3(2y-1)$, o bien, $2y^2-3y-2 \geqslant 0$.

La solución de última desigualdad serán los valores de $y \geqslant 2$ e $y \leqslant -1/2$. Pero, a la condición b) la satisfacen sólo los valores de $y \leqslant -1/2$.

Así pues, las soluciones de la desigualdad respecto a y son $y \leqslant -1/2$ e $y \geqslant 1$.

Sustituyendo y por sen x en estas desigualdades resulta que las soluciones de la desigualdad inicial serán todas las x que satisfacen la desigualdad trigonométrica elemental sen $x \leqslant -1/2$, y todas las x que satisfacen la desigualdad sen $x \geqslant 1$.

La solución de la primera desigualdad serán todas las x de los intervalos

$$-\frac{5\pi}{6}+2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6}+2k\pi, \quad k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

La segunda desigualdad va a cumplirse sólo para aquellas x para las cuales sen $x=1$, o sea, para

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

En definitiva, obtenemos de tal modo, que la solución de la desigualdad inicial serán las $x=\pi/2+2k\pi$ y todas las x de los intervalos

$$-\frac{5\pi}{6}+2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6}+2k\pi, \quad k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

12. *Resolver la desigualdad*

$$\log_5 \operatorname{sen} x > \log_{125}(3 \operatorname{sen} x - 2).$$

Al notar que $\log_5$ sen $x=\log_{125}$ sen$^3 x$ representemos nuestra desigualdad así:

$$\log_{125} \operatorname{sen}^3 x > \log_{125}(3 \operatorname{sen} x - 2).$$

Aplicando ahora la propiedad VIII de los logaritmos (véase § 6, Parte I), obtenemos que nuestra desigualdad es equivalente a la desigualdad sen$^3 x > 3$ sen $x - 2 > 0$.

Designando $y=$ sen x, llegamos al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} y^3-3y+2>0, \\ \quad\ \ 3y-2>0. \end{cases}$$

Por medio de una agrupación, el primer miembro de la primera desigualdad puede ser representado como

$$y^3-3y+2=y(y^2-1)-2(y-1)=(y-1)(y^2+y-2)= \\ =(y-1)^2(y+2).$$

De aquí se deduce que esta desigualdad es válida para todos los valores de $y>-2$, excepto $y=1$.

La segunda desigualdad de este sistema es válida para $y>2/3$. Por eso, la solución del sistema serán todos los valores de $y>2/3$, excepto $y=1$.

Volviendo a examinar x, obtenemos que la desigualdad inicial será equivalente a la siguiente desigualdad doble: $2/3<\operatorname{sen} x<1$.

Las soluciones de esta desigualdad trigonométrica elemental se dan por los intervalos:

$$\begin{gathered}\operatorname{arc\,sen} 2/3+2k\pi<x<\pi/2+2k\pi,\\ \pi/2+2k\pi<x<\pi-\operatorname{arc\,sen} 2/3+2k\pi,\\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\end{gathered}$$

13. *Resolver la desigualdad*

$$\cos[\pi(x^2-10x)]-\sqrt{3}\operatorname{sen}[\pi(x^2-10x)]>1.$$

Designando $y=\pi(x^2-10x)$ escribamos nuestra desigualdad así:

$$\frac{1}{2}\cos y-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} y>\frac{1}{2}.$$

Aplicando la fórmula del ángulo auxiliar obtenemos que $\cos[y+ +(\pi/3)]>1/2$. La solución de esta desigualdad elemental se encuentra en los intervalos:

$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi<y+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Al volver a examinar x, obtenemos que para cada k entera se ha de resolver el sistema de desigualdades de segundo grado

$$\begin{cases} x^2-10x-2k<0,\\ x^2-10x-2k+2/3>0.\end{cases}$$

La primera desigualdad tiene soluciones sólo cuando el discriminante del trinomio de segundo grado $x^2-10x-2k$ sea positivo, es decir, cuando $25+2k>0$ ó $k\geqslant -12$ (donde k es un número entero). Por esta razón, consideremos la segunda desigualdad solamente para $k\geqslant -12$.

Notemos que para estas k el discriminante de la segunda desigualdad es también positivo. Con cualquier $k\geqslant -12$ fijo la solución de la primera desigualdad cuadrática es el intervalo $5-\sqrt{25+2k}< <x<5+\sqrt{5+2k}$, y la solución de la segunda la forman dos intervalos infinitos: $x>5+\sqrt{25+2k-2/3}$ y $x<5-\sqrt{25+2k-2/3}$. Las partes generales de las soluciones de estas dos desigualdades serán la solución del sistema y, por coniguiente, de la desigualdad inicial. Es bien claro que $\sqrt{25+2k-2/3}<\sqrt{25+2k}$ son válidas para cualquier $k\geqslant -12$.

Tomando en consideración esta observación obtenemos con facilidad la solución:

$$5-\sqrt{25+2k} < x < 5-\sqrt{25+2k-2/3},$$
$$5+\sqrt{25+2k-2/3} < x < 5+\sqrt{25+2k},$$

donde k es un número entero y $k \geqslant -12$.

Junto con las desigualdades que son combinaciones de las elementales, existen también desigualdades para cuya resolución se deben utilzar diferentes transformaciones de éstas, valiéndose de conceptos adecuados.

Al principio mostremos algunos ejemplos sencillos de cómo se aplica el concepto del RVA.

14. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{x} > -1$.

Por cuanto la expresión del primer miembro no es negativa, la desigualdad es válida para todas las x para las cuales tiene sentido, o sea, se encuentra en el RVA. Pues, el RVA de esta desigualdad es un conjunto de $x \geqslant 0$; precisamente, esta es la solución de la desigualdad.

15. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{\lg x} > 0$.

Por esta vez la expresión del primer miembro tampoco es negativa, por eso la desigualdad es válida para todas las x del RVA, excepto las que convierten el primer miembro en cero. El RVA se determina por la condición de que $\lg x \geqslant 0$, es decir, representa en sí un conjunto de $x \geqslant 1$. Pero, para $x=1$ el primer miembro se convierte en cero, a causa de que este valor de la incógnita no puede ser la solución de la desigualdad: la solución de la desigualdad inicial es el intervalo $x > 1$.

16. *Resolver la desigualdad* $\log_{2-x}(x-3) \geqslant -5$.

El RVA de esta desigualdad se determina por las condiciones cuando $x-3 > 0$, $2-x > 0$, $2-x \neq 1$. Pero las desigualdades $x-3 > 0$ y $2-x > 0$ no tienen soluciones comunes. Por lo tanto, el RVA de nuestra desigualdad no contiene ningún número, y por eso la desigualdad no tiene soluciones.

17. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5} \geqslant \sqrt{5-x}$.

El RVA se determina por las desigualdades $x+2 \geqslant 0$, $x-5 \geqslant 0$, $5-x \geqslant 0$. Pero este sistema de desigualdades tiene una solución única, $x=5$. Por eso, el RVA de la desigualdad inicial está compuesto de un solo valor: $x=5$. Por lo tanto, para resolver esta desigualdad no se requieren ningunas transformaciones: es suficiente comprobar si ésta cumple o no para $x=5$. La verificación directa demuestra que $x=5$ es la solución.

18. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$.

El RVA de esta desigualdad es el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 2$. De tal modo, el primer miembro de la desigualdad inicial toma valores reales, y no negativos, para $-1 \leqslant x \leqslant 2$; para los demás valores de x aquella no tiene sentido. Sin embargo, es evidente que el segundo miembro de la desigualdad es *negativo* para todas las $x<4$ y, en particular, para todas las x del intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 2$, es decir, la desigualdad propuesta tiene lugar. Por consiguiente, el intervalo $-1 \leqslant x \leqslant 2$ es la solución de la desigualdad.

19. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x} < -1$.

El primer miembro de esta desigualdad no es negativo para cualquier x admisible y, por esta razón la desigualdad no puede ser cumplida para ninguno de los valores de x, es decir, no tiene soluciones.

En los ejemplos citados se ve que es imposible recomendar un método general para conceptuar bien del RVA en cada caso concreto. Efectivamente, en los dos primeros ejemplos, sin su cálculo, no podríamos hallar soluciones; en el tercero, cuarto y quinto casos, la búsqueda preliminar del RVA permitió hallar de inmediato la solución. Al contrario, en el sexto ejemplo sería muy difícil hallar el RVA, cosa desprovista de sentido, que es muy esencial, por cuanto entre las x admisibles no hay ningunas soluciones.

Por lo tanto, durante la resolución de los ejemplos más complicados a veces es útil calcular el RVA y a veces no tiene sentido hacerlo de inmediato, porque en lo ulterior resulta que en el ejemplo en cuestión esto será innecesario. Se puede dar un consejo útil: si el cálculo del RVA no es complicado, es mejor hacerlo (porque esto no impedirá el intento) y si lo es, mejor diferir el cálculo del RVA hasta el momento cuando se necesite el RVA.

A veces se proponen desigualdades que al resolverlas deben hacerse *transformaciones* que pueden conducir a la pérdida o adquisición de soluciones. Por eso, al resolver las desigualdades, así como las ecuaciones, el concepto de *equivalencia* juega el papel principal. En el § 9, Parte I, ya se ha examinado el concepto de equivalencia de las ecuaciones y se ha demostrado por qué es necesario observar atentamente la equivalencia de las ecuaciones iniciales y obtenidas de nuevo. Esto es también válido para las desigualdades; además, estas referencias son más esenciales para las desigualdades que para las ecuaciones.

En realidad, en lo que se refiere a las ecuaciones es suficiente señalar que con cierta transformación puede aparecer una raíz extraña, después de lo cual hay que comprobar las raíces. Comprobar las soluciones de las desigualdades por medio de una sustitución resulta imposible porque existe un conjunto infinito de soluciones. Por lo tanto, al resolver las desigualdades se debe observar meticulosamente la equivalencia de las desigualdades derivadas e iniciales.

Notemos que las transformaciones que conducían a la no equivalencia de ecuaciones (véase el § 9, Parte I) conducen, naturalmente, a las desigualdades no equivalentes.

Con esto algunas transformaciones sólo ensanchan o estrechan el RVA de desigualdades. Para tales transformaciones podemos señalar una receta general: no pueden hacerse transformaciones que estrechen el RVA porque puede ocurrir una pérdida de soluciones; y cuando se hagan transformaciones que ensanchen el RVA hay que hacer primeramente estas transformaciones, eligiendo, luego, de las soluciones de la desigualdad definitiva aquellos valores que forman parte del RVA de la desigualdad inicial; precisamente éstos serán soluciones.

Las transformaciones más difundidas que hacen variar el RVA son "las transformaciones idénticas", mencionadas en el § 9, Parte I. Además de esto, al resolver las desigualdades es necesario recurrir frecuentemente a otras transformaciones: despejar el denominador y tomar algunas funciones de ambos miembros de las desigualdades, a saber, elevación a potencia, logaritmación, potenciación, etc. A continuación nos detendremos en estas transformaciones.

Empecemos por tal transformación "inofensiva" como es *la eliminación del denominador*. Cuando se trata de una ecuación, al despejar el denominador, como es sabido, es imposible perder sus soluciones, pero se puede adquirir las extrañas sólo a expensas del ensanchamiento del RVA de la ecuación, es decir, a expensas de la adición al RVA de la ecuación inicial de aquellos valores de la incógnita que convierten el denominador en cero.

Muchos piensan que así mismo ocurre con las desigualdades y por eso "resuelven" la desigualdad, por ejemplo, $1/x<1$, así: "al eliminar el denominador llegamos a la desigualdad $1<x$; todas estas x dan las soluciones de la desigualdad inicial, ya que ninguna de éstas convierte en cero el denominador de la desigualdad inicial".

Sin embargo, se ve que la desigualdad inicial es válida también para todas las x negativas. Y todas estas soluciones se perdieron porque la eliminación del denominador de una desigualdad no tiene analogía a la eliminación del denominador de una ecuación.

En realidad, la eliminación del denominador de una ecuación (o una desigualdad) consiste en multiplicar ambos miembros de éstas por una expresión que es el mismo denominador. En este caso las ecuaciones quedan equivalentes, siempre y cuando sean multiplicadas por una expresión no igual a cero, mientras que la propiedad análoga respecto de las desigualdades se enuncia de una manera más complicada: al multiplicar ambos miembros de la disigualdad por una expresión positiva, no cambia el signo de la desigualdad, y al multiplicarlar por una expresión negativa, el signo de la desigualdad se cambia por el inverso.

De tal modo, siempre que queremos multiplicar ambos miembros de la desigualdad por una expresión dependiente de x y que toma valores tanto positivos como negativos, conviene considerar dos casos respectivos. No obstante, muchos estudiantes olvidan esta regla.

20. *Resolver la desigualdad*

$$(x-2)/(x+2) \geqslant (2x-3)/(4x-1).$$

El RVA de esta desigualdad son todos los valores de x excepto $x=-2$ y $x=1/4$. Vamos a aceptar que a continuación las x pertenecen sólo al RVA. Al resolver esta desigualdad, algunos estudiantes escriben, al despejarse del denominador, que se la puede sustituir por la siguiente:

$$(x-2)(4x-1) \geqslant (2x-3)(x+2). \qquad (2)$$

Está claro que esta afirmación es incorrecta ya que tal transformación es, en realidad, una multiplicación de ambos miembros de la desigualdad inicial por la expresión $(x+2)(4x-1)$, que puede ser negativa. La desigualdad inicial puede ser sustituida por la desigualdad (2) sólo cuando la expresión $(x+2)(4x-1)$ sea positiva, debido a esto hay que considerar el caso cuando ésta sea negativa. De esa manera, la solución de la desigualdad inicial se reduce a la solución de los sistemas de desigualdades.

No obstante, es mucho más fácil proceder del modo siguiente. Permutamos todos los miembros de la desigualdad inicial al primer miembro y lo reducimos a un común denominador:

$$\frac{2(x^2-5x+4)}{(x+2)(4x-1)} \geqslant 0.$$

Las raíces del trinomio x^2-5x+4, es decir, $x_1=1$ y $x_2=4$, son las soluciones de nuestra desigualdad.

Al seguir considerando que $x \neq 4$ y $x \neq 1$, resolvamos la desigualdad

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-1/4)} > 0. \qquad (3)$$

En este lugar la desigualdad se reduce frecuentemente a dos sistemas de desigualdades: el denominador y el numerador, ambos son mayores que cero, o bien, menores que cero. No obstante, esta desigualdad se resuelve más fácilmente por el método de intervalos.

Multipliquemos ambos miembros de la última desigualdad por la expresión $(x+2)^2\ (x-1/4)^2$ *positiva* para los valores de x considerados. Entonces, nuestra desigualdad para todas estas x será equivalente a la siguiente:

$$(x+2)\ (x-1/4)\ (x-1)\ (x-4) > 0. \qquad (4)$$

Esta desigualdad tiene una forma para la cual conviene el método de intervalos. La figura 24 muestra que todos los valores de x de

Examinemos ahora *la elevación a potencia*. A continuación vamos a emplear frecuentemente la siguiente afirmación.

Teorema. *Si* $f(x) \geqslant 0$ y $\varphi(x) \geqslant 0$ *en un conjunto de valores de* x, *entonces las desigualdades* $f(x) > \varphi(x)$ *y* $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$ son equivalentes en el mismo conjunto.

Demostración. Sea x_0 una solución arbitraria de la primera desigualdad del conjunto de valores de x propuesto a considerar. Si $\varphi(x_0) > 0$, entonces de la validez de la desigualdad $f(x_0) > \varphi(x_0)$, a base del teorema de la elevación a potencia de las desigualdades numéricas, se deduce la validez de la desigualdad $[f(x_0)]^2 > [\varphi(x_0)]^2$. Si $\varphi(x_0) = 0$, es evidente que de la validez de la desigualdad $f(x_0) > 0$ se deduce que $[f(x_0)]^2 > 0$. Con esto queda demostrado que cualquier solución de la desigualdad $f(x) > \varphi(x)$ es la solución de la desigualdad $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$.

Análogamente se demuestra también lo contrario: cualquier solución de la desigualdad $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$ es la solución de la desigualdad $f(x) > \varphi(x)$.

Así queda demostrado el teorema.

Notemos que en el enunciado del teorema las desigualdades estrictas $f(x) > \varphi(x)$ y $[f(x)]^2 > [\varphi(x)]^2$ pueden ser sustituidas por las no estrictas: $f(x) \geqslant \varphi(x)$ y $[f(x)]^2 \geqslant [\varphi(x)]^2$. La demostración de ello se efectúa igualmente que la del teorema.

Al elevar a potencia una ecuación, como se indica en el § 9, Parte I, se puede adquirir solamente soluciones extrañas que se obtienen tanto a expensas de la ampliación del RVA, como cuando no se toman en consideración los signos de ambos miembros de la ecuación. Análogamente, durante la resolución de las desigualdades pueden también obtenerse soluciones extrañas que resultan tanto a cuenta de la ampliación del RVA, como cuando se desprecian los signos de ambos miembros de la desigualdad. Señalemos a continuación con ejemplos, cómo se puede adquirir soluciones en uno y en otro caso.

Sin embargo, a diferencia de las ecuaciones, al elevar a potencia las desigualdades se puede *perder* sus soluciones. Los estudiantes recuerdan habitualmente que no se puede perder soluciones al elevar a potencia una ecuación, considerando por analogía que la elevación a potencia de una desigualdad tampoco puede llevar a la pérdida de sus soluciones. Mostremos a continuación con ejemplos, cómo pueden perderse soluciones al elevar a potencia una desigualdad.

Empecemos por un ejemplo cuando, al elevar a potencia una desigualdad, pueden obtenerse soluciones extrañas a expensas de la ampliación del RVA.

23. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{(x-3)(2-x)} > \sqrt{4x^2+12+11}$.

Algunos estudiantes dan tal solución: "Por cuanto el primer y el segundo miembros de esta desigualdad no son negativos (porque a la derecha y a la izquierda se encuentran raíces aritméticas), se puede entonces elevar al cuadrado la desigualdad y obtener la desigualdad equivalente $5x^2+7x+17>0$. El trinomio de segundo grado que se halla en el primer miembro de esta desigualdad no tiene raíces reales, por eso esta desigualdad es válida para todas las x reales. Se deduce de la equivalencia de las desigualdades que la desigualdad inicial también es válida para todas las x". Este razonamiento parece correcto, no obstante tiene un defecto esencial. Será correcto sólo cuando entre en el RVA de la desigualdad inicial.

La solución correcta debe ser así: en el RVA ambos miembros de la desigualdad inicial no son negativos y por eso en su RVA es equivalente a la desigualdad $5x^2+7x+17>0$, de donde se deduce que es válida para todas las x del RVA. Ahora es fácil hallar el RVA de la desigualdad inicial obteniendo de tal modo la solución $2\leqslant x\leqslant 3$.

En el siguiente ejemplo las soluciones extrañas resultan no por la ampliación del RVA, sino por la elevación a potencia de ambos miembros de la disigualdad, sin investigar sus signos.

24. *Resolver la desigualdad* $x+1>\sqrt{x+3}$.

He aquí un ejemplo del razonamiento cuando resultan soluciones extrañas: "El RVA de nuestra desigualdad es: $x\geqslant -3$. Para cualquier x del RVA el segundo miembro es un número no negativo la raíz aritmética) y por eso en el primero se halla un número positivo. Por lo tanto, después de haber elevado al cuadrado la desigualdad, obtenemos la desigualdad equivalente $x^2+x-2>0$, cuyas soluciones son $x>1$ y también $x<-2$. Tomando en consideración el RVA de la desigualdad inicial obtenemos la respuesta: la solución de la desigualdad inicial serán todas las $x>1$ así como todas las x del intervalo $-3\leqslant x<-2$".

En realidad, todas las x del intervalo $-3\leqslant x<-2$ no son soluciones de la desigualdad inicial. Es que para x del RVA el segundo miembro de la desigualdad no es negativo, pero el primero para ciertos valores de x del RVA es negativo y para otros valores, no es negativo. Resulta que para las x del RVA que hacen negativo el primer miembro, la desigualdad no se cumple, lo que significa que entre éstas no hay soluciones para nuestra desigualdad. Por eso, las soluciones de la desigualdad inicial es necesario hallarlas entre aquellas x del RVA para los cuales el miembro primero de la desigualdad no es negativo, es decir, entre las $x\geqslant -1$.

Precisamente para estas x ambos miembros de la desigualdad no son negativos: se puede elevarla al cuadrado y obtener la desigualdad $x^2+x-2>0$, la que es equivalente a la inicial en el conjunto $x\geqslant -1$. Ahora, hace falta elegir de las soluciones de la desigualdad $x^2+x-2>0$ aquellas que satisfagan la condición $x\geqslant -1$. Estas serán precisamente las soluciones de la desigual dad inicial. Estas serán las $x>1$.

El error en la consideración antes citada resulta de la sustitución de conceptos que ocurre imperceptiblemente para los estudiantes. En efecto, para cualquier x que sea *la solución* de la desigualdad inicial, a la derecha se encuentra un número no negativo (raíz aritmética), y a la izquierda, un número positivo. Sin embargo, es evidente que no todas las x del RVA serán soluciones de la desigualdad inicial, a causa de que no para todas las x del RVA, el primer miembro será positivo. El estudiante cambió las palabras "para cualquier x que sea la solución" por las palabras "para cualquier x del RVA", que fue lo que provocó el error.

25. *Resolver la desigualdad*

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0.$$

Las dificultades de este ejemplo empiezan por el cálculo del RVA. El RVA de esta desigualdad se determina según las condiciones: $2-x\geqslant 0$, $1-x\geqslant 0$, $4\geqslant\sqrt{1-x}$. Las dos primeras desigualdades son válidas para $x\leqslant 1$. Pero, para estas x ambos miembros de la tercera desigualdad no son negativos y pueden elevarse al cuadrado obteniendo una desigualdad equivalente $x\geqslant -15$. De tal modo, el RVA de la desigualdad inicial es: $-15\leqslant x\leqslant 1$. Escribamos nuestra desigualdad así: $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}>\sqrt{2-x}$. Dentro del RVA, ambos miembros de esta desigualdad no son negativos, por eso, al elevarlos al cuadrado, obtendremos dentro del RVA una desigualdad equivalente $2+x>\sqrt{1-x}$. Para $x<-2$ que entren en el RVA, el primer miembro de esta desigualdad es negativo y el segundo no negativo; por lo tanto, entre estas x no hay soluciones para la desigualdad inicial. Nos queda por examinar las x del intervalo $-2\leqslant x\leqslant 1$. Para estas x ambos miembros de la desigualdad $2+x>\sqrt{1-x}$ no son negativos, debido a que, al elevarla al cuadrado, obtendremos una desigualdad cuadrática $x^2+5x+3>0$, que es equivalente a la inicial en el conjunto $-2\leqslant x\leqslant 1$. Esta última desigualdad es válida para $x>(-5+\sqrt{13})/2$ y para $x<(-5-\sqrt{13})/2$. Ahora, para obtener el resultado, de todas estas soluciones hay que elegir aquellas que se hallan en el intervalo $-2\leqslant x\leqslant 1$. Serán todas las x del intervalo $(-5+\sqrt{13})/2<x\leqslant 1$; precisamente éstas serán la solución de este problema.

Notemos que si no tomásemos en consideración el RVA, obtendríamos soluciones extrañas, por ejemplo, todas las $x>1$, y si no tomásemos en consideración que la desigualdad $2+x>\sqrt{1-x}$ tiene soluciones sólo para $-2\leqslant x\leqslant 1$, obtendríamos también soluciones extrañas, por ejemplo, todas las $x<(-5-\sqrt{13})/2$.

Ahora citemos ejemplos de cuándo pueden perderse soluciones al elevar una desigualdad a potencia.

26. *Resolver la desigualdad* $\sqrt{x+2}>x$.

Si esta desigualdad se eleva al cuadrado, entonces, teniendo en cuenta el RVA, perderemos soluciones. En efecto, el RVA de esta desigualdad es $x \geqslant -2$. Después de elevar ésta al cuadrado obtendremos la desigualdad $x+2>x^2$, cuya solución serán todas las x del intervalo $-1<x<2$. Todas estas x entran en el RVA, debido a que algunos estudiantes escriben que precisamente ellas dan la solución a este ejemplo. En realidad, razonando así resultan perdidas las soluciones: $-2 \leqslant x \leqslant -1$, pues es fácil convencerse de que para cualquier número de este intervalo el primer miembro de la desigualdad no es negativo y el segundo sí lo es. Para no perder soluciones se han de observar siempre los signos de ambos miembros. La resolución correcta de esta desigualdad es así.

El RVA de esta desigualdad consta de todas las $x \geqslant -2$. El primer miembro de la desigualdad propuesta no es negativo en el RVA, y el segundo puede ser tanto positivo como negativo. Es obvio que para las x del RVA, para las cuales el segundo miembro es negativo, la desigualdad inicial será válida. Por eso, todas las x del intervalo $0>x \geqslant -2$ son las soluciones de la desigualdad inicial.

Examinemos ahora los valores restantes de x, o sea, los valores de $x \geqslant 0$. Para todas estas x los dos miembros de la desigualdad inicial no son negativos por lo cual se puede elevar al cuadrado la desigualdad y obtener la desigualdad equivalente $x+2>x^2$ para todas las $x \geqslant 0$.

La solución de la última desigualdad serán todas las x del intervalo $-1<x<2$. La solución de la desigualdad inicial en este caso serán todas las x del intervalo $0 \leqslant x<2$.

Reuniendo estos dos casos obtenemos que la solución de la desigualdad inicial serán todos los valores de x del intervalo $-2 \leqslant x<2$.

En el siguiente ejemplo pueden perderse soluciones si ignoramos los signos de ambos miembros de la desigualdad intermedia.

27. *Resolver la desigualdad*

$$\sqrt{x^2+3x+2}<1+\sqrt{x^2-x+1}.$$

El RVA de esta desigualdad consta de dos intervalos : $x \leqslant -2$ y $x \geqslant -1$. En el RVA, ambos miembros de nuestra desigualdad no son negativos; por eso, después de elevarlos al cuadrado, obtenemos la desigualdad equivalente $2x<\sqrt{x^2-x+1}$ dentro del RVA.

a) Para $x \leqslant -2$ y $-1 \leqslant x<0$ esta desigualdad es válida, ya que para cada una de estas x el primer miembro es negativo, y el segundo, positivo. Por lo tanto, todas estas x son las soluciones de la desigualdad inicial.

b) Para $x \geqslant 0$ ambos miembros de la desigualdad $2x<\sqrt{x^2-x+1}$ no son negativos, a causa de que, al elevarlos al cuadrado, obtenemos la desigualdad equivalente $3x^2+x-1<0$ para estas x.

La solución de esta desigualdad serán las x del intervalo $(-1-\sqrt{13})/6<x<(-1+\sqrt{13})/6$.

Tomando en consideración b), obtenemos que en el segundo caso la solución de la desigualdad inicial serán todas las x del intervalo $0\leqslant x<(-1+\sqrt{13})/6$.

Reuniendo ambos casos, obtenemos la solución: $x\leqslant -2$ y también $-1\leqslant x<(1+\sqrt{13})/6$.

Hacemos la observación de que los estudiantes que no han considerado los casos a) y b) sino que han elevado, de inmediato, al cuadrado la desigualdad $2x<\sqrt{x^2-x+1}$, perdían, naturalmente, una parte de soluciones. Por lo visto, la causa consiste en lo siguiente: por cuanto, al principio de la resolución de la desigualdad, los signos de ambos miembros ya fueron investigados, y, al elevarlos por segunda vez al cuadrado, se pierde "la atención".

28. *Resolver la desigualdad*

$$\sqrt{3+2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x}\geqslant \frac{1+3\operatorname{tg} x}{2}.$$

Designando $\operatorname{tg} x$ por y escribamos esta desigualdad así:

$$2\sqrt{3+2y-y^2}\geqslant 1+3y. \tag{5}$$

El RVA de la desigualdad (5) es el intervalo $-1\leqslant y\leqslant 3$. Para las y del RVA, para las cuales $1+3y<0$, nuestra desigualdad es evidentemente válida, es decir, todas las y del intervalo $-1\leqslant y<-1/3$ son soluciones de la desigualdad (5).

Estamos por examinar el caso b): $-1/3\leqslant y\leqslant 3$. En este caso ambos miembros de la desigualdad (5) no son negativos; por eso, al elevarlos al cuadrado, obtendremos la desigualdad equivalente $13y^2-2y-11\leqslant 0$.

La solución de la última desigualdad serán todas las y del intervalo $-11/13\leqslant y\leqslant 1$. Teniendo en cuenta la condición b), resulta que en el caso considerado la solución de la desigualdad (5) serán todas las y del intervalo $-1/3\leqslant y\leqslant 1$.

Reuniendo los dos casos, obtenemos que la solución de la desigualdad (5) serán todas las y del intervalo $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Al tomar de nuevo x, obtenemos que la solución de la desigualdad inicial serán todas las x que satisfacen la desigualdad $-1\leqslant \operatorname{tg} x\leqslant 1$. Resolviendo esta desigualdad trigonométrica elemental, obtenemos la solución:

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi, \text{ donde } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Habitualmente se recurre a *la potenciación* de las desigualdades cuando éstas contienen una incógnita bajo el signo del logaritmo. Ya hemos examinado la resolución de desigualdades logarítmicas elementales y nos hemos convencido de que éstas se resuelven con facilidad aplicando las propiedades VII y VIII de los logaritmos (§ 6, Parte I). Por esto, con ayuda de estas propiedades ha de resolverse las desigualdades logarítmicas más complejas, lo que permitirá evitar muchos errores.

Una observación más: a pesar de que la resolución de desigualdades logarítmicas siempre se acompaña de la potenciación (sea teniendo en cuenta el campo de determinación de la función logarítmica, sea las propiedades VII y VIII), este término de "la potenciación", no es de uso común, sino que se escribe simplemente: "sobre la base de las propiedades de los logaritmos (o de las funciones logarítmicas) tenemos..."

Resolvamos algunos ejemplos de "potenciación" de desigualdades.

29. *Resolver la desigualdad*

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1.$$

Es natural que se tiene que "potenciar" esta desigualdad. Ya que la base del logaritmo contiene x y que las propiedades de la función logarítmica son distintas en la base, mayor o menor que 1, resulta que no podemos potenciar inmediatamente, y por eso debemos examinar dos casos.

a) Sea $\frac{25-x^2}{16}>1$, es decir, $x^2<9$. En este caso la desigualdad dada es equivalente a la siguiente:

$$\frac{24-2x-x^2}{14} > \frac{25-x^2}{16}.$$

La última desigualdad se puede expresar así: $x^2+16x-17<0$. Las soluciones de esta desigualdad serán todas las x del intervalo $-17<x<1$. Pero, la condición de este caso, o sea, la condición $-3<x<3$ es satisfecha sólo por las x del intervalo $-3<x<1$. Todas estas x son soluciones de la desigualdad inicial en el caso considerado.

b) Ahora, sea $0<(25-x^2)/16<1$. En este caso la desigualdad inicial es equivalente a la doble:

$$0<\frac{24-2x-x^2}{14}<\frac{25-x^2}{16}.$$

De tal modo, en el caso considerado hay que resolver el sistema de desigualdades dobles siguiente:

$$\begin{cases} 0<\frac{25-x^2}{16}<1, \\ 0<\frac{24-2x-x^2}{14}<\frac{25-x^2}{16}. \end{cases}$$

La primera de estas desigualdades se reduce fácilmente a la forma $9<x^2<25$ y su solución consta de dos intervalos: $-5<x<-3$ y $3<x<5$. La segunda desigualdad doble es equivalente al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} x^2+2x-24<0, \\ x^2+16x-17>0. \end{cases}$$

La primera desigualdad de este sistema tiene la solución $-6<x<4$, la solución de la segunda consta de dos intervalos infinitos $x>1$ y $x<-17$, de donde proviene que la solución del último sistema es el intervalo $1<x<4$.

Ahora, de estos valores de x conviene elegir tales que satisfagan la primera desigualdad doble; serán las x del intervalo $3<x<4$.

Si reunimos los dos casos, obtenemos que la solución de la desigualdad inicial se halla en dos intervalos:
$-3<x<1$ y $3<x<4$.

30. *Resolver la desigualdad*

$$\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}}\sqrt{1+2\cos 2x}<1.$$

Si designamos $\cos x$ por y y aplicamos la fórmula del coseno de ángulo doble, escribiremos la desigualdad en forma

$$\log_{2y/\sqrt{3}}\sqrt{4y^2-1}<1. \qquad (6)$$

El RVA de esta desigualdad se determina por las condiciones $y^2>1/4$, $y>0$, $y\neq\sqrt{3}/2$, es decir, $y>1/2$ e $y\neq\sqrt{3}/2$.

Por cuanto, al ser diferentes los valores de y, la base del logaritmo puede ser menor que 1 ó mayor que 1, tenemos que examinar dos casos.

a) Sea $1/2<y<\sqrt{3}/2$. Aquí la base del logaritmo es menor que 1, de donde se obtiene la desigualdad equivalente $\sqrt{4y^2-1}>2y/\sqrt{3}$, o bien, $4y^2-1>4y^2/3$, porque ambos miembros son positivos. Esta desigualdad se cumple para $y^2>3/8$, es decir, $y>\sqrt{6}/4$. Tomando en consideración la condición del caso considerado, obtenemos la solución de la desigualdad (6) que es el intervalo $\sqrt{6}/4<y<\sqrt{3/2}$.

b) Sea $y>\sqrt{3}/2$. En este caso obtenemos la desigualdad equivalente $\sqrt{4y^2-1}<2y/\sqrt{3}$, de donde, después de elevarla al cuadrado, se deduce que $y^2<3/8$. Pero, en la condición de nuestro caso $y^2>3/4$, lo que dice que no obtenemos nuevas soluciones de la desigualdad (6).

De esa manera nos queda por resolver la desigualdad trigonométrica elemental $\sqrt{6}/4<\cos x<\sqrt{3}/2$. A ésta le satisfacen todas las x de los intervalos

$$-\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{6}+2k\pi,$$

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}+2k\pi,$$

donde k es cualquier número entero (fig. 27).

En lo que se refiere a *la logaritmación* de las desigualdades, es fácil comprender en cuáles casos esta acción conduce a la desigualdad equivalente. No obstante, hay que recordar que una logaritmación mal pensada de las desigualdades puede reducir el RVA y llevar a las pérdidas de soluciones. Por lo tanto, antes de emprender la logarit-

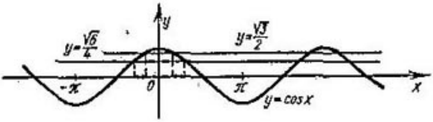


Fig. 27

mación se debe comprobar siempre que sean positivos ambos miembros de la desigualdad; sólo en este caso (teniendo en cuenta, naturalmente la base del logaritmo) podremos obtener la desigualdad equivalente.

Antes (véase el problema 1) ya hemos resuelto una desigualdad elemental $(1/3)^x<2$, aplicando las propiedades de la función exponencial. Ahora vamos a resolver esta desigualdad por medio de la logaritmación. Por cuanto los dos miembros de la desigualdad $(1/3)^x<$ <2 son positivos, nos aprovecharemos de la propiedad VIII de los logaritmos (§ 6, Parte I) logaritmando la misma en la base 1/3; obtendremos entonces $\log_{1/3}(1/3)^x>\log_{1/3}2$ (¡presten atención al cambio de signo de la desigualdad!), de donde $x>\log_{1/3}2$.

De tal modo, la solución de la desigualdad es un conjunto $x>$ $>\log_{1/3}2$.

Notemos que se podría resolver por logaritmación todas las desigualdades exponenciales elementales, examinadas por arriba.

Ahora resolveremos unos ejemplos por logaritmación.

31. *Resolver la desigualdad*

$$x^4\cdot 7^{\log_7 1/3^5}\leqslant 5^{-\log_{1/x}5}.$$

El RVA de esta desigualdad son todas las $x>0$, excepto $x=1$.

Por cuanto $7^{\log_7 1/3^5}=5^3$ y $\log_{1/x}5=-\log_x 5$, nuestra desigualdad se puede escribir así:

$$x^4\cdot 5^3\leqslant 5^{\log_x 5}.$$

En el RVA, ambos miembros de esta desigualdad son positivos, debido a que se puede logaritmarla en la base 5 (mayor que 1) y obtener una desigualdad $4\log_5 x+3\leqslant \log_x 5$ equivalente en el RVA. Designando $\log_5 x$ por y, permutando todo al primer miembro, escribamos esta desigualdad así: $4y+3-1/y\leqslant 0$; o bien, al reducirla a un común denominador, la expresemos así: $(y+1)(y-1/4)/y\leqslant 0$.

Si aplicamos ahora el método de intervalos, obtenemos que la solución de esta desigualdad serán $y\leqslant -1$ e y del intervalo $0<y\leqslant 1/4$.

Al volver a x, obtenemos que la desigualdad inicial será válida para los valores de x, para los cuales $\log_5 x\leqslant -1$, así como para aquellas x, para las cuales $0<\log_5 x\leqslant 1/4$. Al resolver ahora estas desigualdades logarítmicas elementales, obtenemos la solución: $0<x\leqslant \leqslant 1/5$, $1<x\leqslant \sqrt[4]{5}$.

32. *Resolver la desigualdad*

$$(x^2+x+1)^x<1.$$

El trinomio de segundo grado x^2+x+1 es positivo para cualesquier x reales, de lo cual se deduce que el RVA de esta desigualdad consta de todas las x reales.

Ya que ambos miembros de la desigualdad inicial son positivos para todas las x, entonces, al logaritmarla por la base 10, obtenemos que es equivalente a la siguiente: $x\lg(x^2+x+1)<0$. Esta desigualdad será válida en dos casos: cuando x satisface el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} x>0, \\ \lg(x^2+x+1)<0 \end{cases}$$

y cuando x satisface el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} x<0, \\ \lg(x^2+x+1)>0. \end{cases}$$

Resolvamos el primer sistema de desigualdades. A base de las propiedades de los logaritmos obtenemos que este es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2+x+1<1. \end{cases}$$

Por cuanto la solución de la segunda desigualdad del sistema es $-1< <x<0$ y la solución de la primera es $x>0$, resulta que este sistema es incompatible. De tal modo, la desigualdad inicial no tiene soluciones.

El segundo sistema es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x<0, \\ x^2+x+1>1. \end{cases}$$

La solución de este serán todas las $x<-1$. De aquí obtenemos que la solución de la desigualdad inicial serán todas las $x<-1$.

Se puede proponer también otra resolución de esta desigualdad. Ya que las propiedades de la potencia dependen de su base, menor o mayor que 1, es natural examinar dos casos.

a) Supongamos que $x^2+x+1<1$, es decir, $-1<x<0$. Para todas estas x el trinomio x^2+x+1 se eleva a potencia negativa x. Ya que para estas x el trinomio $x^2+x+1<1$, entonces para las mismas $(x^2+x+1)^x>1$, lo que contradice a la condición. Pues así, estas x no pueden ser soluciones de nuestra desigualdad.

b) Supongamos que $x^2+x+1>1$. Está claro que ésta es válida para $x>0$ y para $x<-1$. Por eso aquí se deben examinar dos casos.

Sea $x>0$. Entonces $x^2+x+1>1$, y luego de elevarla x a potencia positiva, el signo de la desigualdad se conserva, o sea, para estas x obtendremos que $(x^2+x+1)^x>1$. Por lo tanto, estas x tampoco pueden ser soluciones de nuestra desigualdad.

Sea $x<-1$. Entonces $x^2+x+1>1$. Si ahora el trinomio x^2+x+1 se eleva a potencia negativa x, se obtendrá un resultado mayor que 1, es decir, para todos los valores de $x<-1$ tendremos $(x^2+x+1)^x<1$.

Así la solución de la desigualdad inicial serán todos los valores de $x<-1$.

Anteriormente hemos utilizado con frecuencia el concepto de RVA. Sin embargo, no hemos centrado nuestra atención, excepto algunos ejemplos elementales, al papel que jugaba el RVA: si éste ayudaba o no a la resolución de la desigualdad. Por lo tanto, examinemos a continuación dos desigualdades; al resolverlas prestaremos atención especial si es necesario o no calcular previamente el RVA de la desigualdad.

En el ejemplo siguiente, su resolución se facilita considerablemente si se busca de antemano el RVA.

33. *Resolver la desigualdad*

$$\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right)\geqslant\frac{1}{2}.$$

El RVA de esta desigualdad se determina partiendo de las condiciones $(4x-5)/|x-2|>0$, $x^2>0$, $x^2\neq1$, de donde $x>5/4$ y $x\neq2$. Pero, para todas estas x tenemos $x^2>1$, por eso la desigualdad, según las propiedades de los logaritmos con la base mayor que 1 dentro del RVA es equivalente a la siguiente:

$$\frac{4x-5}{|x-2|}\geqslant x.$$

Ya que $x\neq2$, la expresión $|x-2|$ es positiva y por eso la desigualdad inicial es equivalente, en el RVA, a la desigualdad

$$4x-5\geqslant x\,|x-2|.$$

Ahora examinemos dos casos.

a) Sea $x>2$. En este caso nuestra desigualdad tendrá la forma siguiente: $4x-5\geqslant x^2-2x$, o bien, $x^2-6x+5\leqslant 0$. La solución de la última desigualdad serán todas las x del intervalo $1\leqslant x\leqslant 5$, y la de la desigualdad inicial en este caso serán todas las x del intervalo $2<x\leqslant 5$.

b) Ahora sea $5/4\leqslant x<2$. Entonces, nuestra desigualdad toma la forma de $4x-5\geqslant -x^2+2x$, o bien, $x^2+2x-5\geqslant 0$. Su solución serán todas las x de los intervalos $x\geqslant\sqrt{6}-1$ y $x\leqslant -\sqrt{6}-1$. La solución de la desigualdad inicial en este caso serán todos los valores de x del intervalo $\sqrt{6}-1\leqslant x<2$.

Si reunimos ambos casos, obtenemos que la solución de la desigualdad inicial serán todos los valores de x de los intervalos $\sqrt{6}-1\leqslant$ $\leqslant x<2$ y $2<x\leqslant 5$.

En el ejemplo siguiente el cálculo previo del RVA no es razonable, porque no facilita la resolución y representa un problema bastante difícil.

34. *Resolver la desigualdad*

$$\log_x 2x\leqslant\sqrt{\log_x(2x^3)}.$$

Sin hallar el RVA, señalemos solamente que dentro del RVA $x>0$ y $x\neq 1$.

Designamos $\log_x 2$ por y; en este caso la desigualdad tendrá la forma

$$y+1\leqslant\sqrt{y+3}. \qquad (7)$$

El RVA de esta desigualdad consta de $y\geqslant -3$. Pero, para y del intervalo $-3\leqslant y<-1$ la desigualdad es evidente; por lo tanto, todas estas y son sus soluciones.

Ahora sea $y\geqslant -1$. En este caso ambos miembros de la desigualdad (7) no son negativos; esta desigualdad puede elevarse al cuadrado y obtener (para $y\geqslant -1$) una desigualdad equivalente $(y+1)^2\leqslant y+3$, cuya solución son todas las y del intervalo $-2\leqslant y\leqslant 1$. La solución de la desigualdad (7) serán, en este caso, todas las y del intervalo $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Al reunir ambos casos obtenemos que la desigualdad (7) se satisface para $-3\leqslant y\leqslant 1$.

Al tomar x, obtenemos que la desigualdad inicial tendrá soluciones para las x que satisfacen la desigualdad doble $-3\leqslant\log_x 2\leqslant 1$.

Se puede resover esta desigualdad aplicando dos procedimientos.

Primera resolución. Ya que las propiedades de los logaritmos son distintas en las bases, mayores o menores que la unidad, examinemos dos casos: $x>1$ y $0<x<1$.

a) Sea $x>1$. En este caso $\log_x 2>0$; es mucho más que $\log_x 2\geqslant$ $\geqslant -3$. Nos queda por resolver la desigualdad $\log_x 2\leqslant 1$, de donde

$2 \leqslant x$. De tal modo, en este caso la solución de la desigualdad inicial serán todos los valores de $x \geqslant 2$.

b) Sea $0 < x < 1$. Entonces $\log_x 2 < 0$; es más que $\log_x 2 \leqslant 1$. Nos queda por resolver la desigualdad $-3 \leqslant \log_x 2$, de donde $x^{-3} \geqslant 2$, o sea, $x \leqslant 2^{-1/3}$. De esa manera, en este caso la solución de la desigualdad inicial serán todos los valores de x del intervalo $0 \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{1/2}$.

Al reunir los dos casos obtenemos que la solución de la desigualdad inicial serán $0 < x \leqslant \sqrt[3]{1/2}$ y $x \geqslant 2$.

Segunda resolución. Si $\log_x 2 = 1/\log_2 x$ entonces, al designar $\log_2 x$ por z, llegamos a un sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \dfrac{1-z}{z} \leqslant 0, \\ \dfrac{1+3z}{z} \geqslant 0. \end{cases}$$

Al resolver cada una de estas desigualdades por el método de intervalos, obtenemos que este sistema será válido para $z \geqslant 1$, así como para $z \leqslant -1/3$.

Para obtener la solución queda por resolver las desigualdades logarítmicas elementales $\log_2 x \geqslant 1$ y $\log_2 x \leqslant -1/3$, de donde hallamos $x \geqslant 2$ y $0 < x \leqslant \sqrt{1/2}$.

En conclusión, examinemos un ejemplo que entraña a la vez ambos peligros: adquisición y pérdida de soluciones.

35. *Resolver la desigualdad*

$$\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 x - 1} \log_{\operatorname{sen} x} \frac{x-5}{2x-1} \geqslant 0.$$

Al principio de la resolución de este ejemplo, algunos estudiantes cometen un error: omiten de inmediato el primer factor. Por lo visto, se basan en el razonamiento siguiente: si $\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 x - 1} \geqslant 0$ entónces para que se cumpla la desigualdad es necesario que el segundo factor sea también no negativo. Con este razonamiento se cometen a la vez dos errores: primero, al omitir el radical se amplía el RVA; segundo, en caso de que el primer factor sea igual a cero, la desigualdad dada se verifica también cuando el segundo factor es negativo. El primer error da origen a la adquisición de soluciones extrañas y el segundo conduce a la pérdida de soluciones.

La resolución correcta ha de tomar en consideración estos dos momentos y debe realizarse de un modo siguiente. La desigualdad en cuestión se cumple en dos casos: cuando el segundo factor es mayor o igual a cero y cuando el primer factor es igual a cero. En este caso, de las soluciones de la desigualdad y de la ecuación obtenidas de esa manera, es necesario tomar sólo aquellas que entran en el RVA de la desigualdad inicial.

Este RVA se determina por el sistema de desigualdades

$$4\,\mathrm{sen}^2 x - 1 \geqslant 0, \quad 0 < \mathrm{sen}\, x < 1, \ \frac{x-5}{2x-1} > 0.$$

De las primeras dos desigualdades se deduce que $1/2 \leqslant \mathrm{sen}\, x < 1$ y la tercera se satisface para $x < 1/2$ y $x > 5$.

Empecemos por la desigualdad $\log_{\mathrm{sen}\, x} [(x-5)/(2x-1)] \geqslant 0$. Si $\mathrm{sen}\, x < 1$, entonces esta desigualdad es equivalente, dentro del RVA, a la desigualdad $(x-5)/(2x-1) \leqslant 1$, cuyas soluciones son $x \leqslant -4$

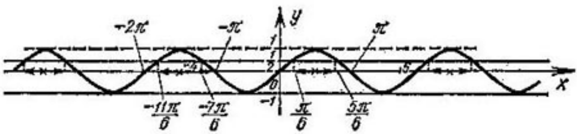


Fig. 28

y $x \geqslant 1/2$. De estos valores de x en el RVA sólo entran $x \leqslant -4$ y $x > 5$. Queda por tomar en consideración la desigualdad $1/2 \leqslant \mathrm{sen}\ x < 1$.

En la gráfica (fig. 28) se ve que la solución de esta doble desigualdad son intervalos

$$\frac{\pi}{6} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad n = 0;\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,$$

de las cuales son excluidos los puntos $x = \pi/2 + 2n\pi$. Si sólo necesitamos $x \leqslant -4$ y $x > 5$, entonces (y esto lo determinamos de nuevo mediante la gráfica) los valores $n = 0$ y $n = -1$ no nos satisfacen; con todo, del intervalo correspondiente a $n = -1$ queda una parte:

$$-(11\pi)/6 \leqslant x \leqslant -4, \quad \text{excepto} \quad x = -3\pi/2.$$

Ahora examinemos la ecuación $4\,\mathrm{sen}^2 x - 1 = 0$, de la cual, teniendo en cuenta que dentro del RVA $\mathrm{sen}\, x > 0$, obtenemos $\mathrm{sen}\, x = 1/2$. Sin embargo, hemos resuelto recientemente la desigualdad a que satisfacen evidentemente las soluciones de la ecuación $\mathrm{sen}\, x = 1/2$. Por tanto, todas las soluciones de la ecuación ya están obtenidas y no habría que incluirlas si — y esto es un escollo en el ejemplo en cuestión — las soluciones de la doble desigualdad $1/2 \leqslant \mathrm{sen}\, x < 1$ no se hubieran omitido parcialmente debido a las condiciones $x \leqslant -4$ y $x > 5$. En este caso quedan excluidos los valores $-7\pi/6$ $\pi/6$ y $5\pi/6$, de los cuales los dos últimos no entran el el RVA de la desigualdad inicial, y el primero, es decir, $x = -7\pi/6$, debe unirse a los intervalos obtenidos anteriormente.

Como resultado, obtenemos la solución:

$$\frac{\pi}{6}+2n\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2n\pi,\quad x\neq\pi/2+2n\pi,$$

donde n es cualquier número entero, menos 0 y 1, $-11\pi/6\leqslant x\leqslant-4$, así como también $x=-7\pi/6$.

EJERCICIOS:

Resolver las desigualdades

1. $\log_x\frac{x+3}{x-1}>1$.
2. $\log_{0,1}(x^2+1)<\log_{0,1}(2x-5)$.
3. $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^x-\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^{-x}<3$.
4. $\frac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x}>1,\ 0<a<1$.
5. $\frac{x^2+2}{x^2-1}<-2$.
6. $\cos^2 x(\operatorname{tg}x+1)>1$.
7. $(1,25)^{1-(\log_2 x)^2}<(0,64)^{2+\log_{\sqrt{2}}x}$.
8. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{1/2}\frac{x^5}{4}\right)^2-20\log_2 x+148<0$.
9. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\log_{1/5}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)}<1$.
10. $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{1/2}(2^{x+1}-2)>-2$.
11. $1-\sqrt{1-8(\log_{1/4}x)^2}<3\log_{1/4}x$.
12. $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot3^{\sqrt{x}}<2x^2\cdot3^{\sqrt{x}}+2x+6$.
13. $\log_{x^2}(2+x)<1$.
14. $4\log_{16}\cos 2x+2\log_4\operatorname{sen}x+\log_2\cos x+3<0\quad(0<x<\pi/4)$.
15. $|x|^{x^2-x-2}<1$.
16. $\log_{1/3}\sqrt{x+1}<\log_{1/3}\sqrt{4-x^2}+1$.
17. $\left[\frac{3(\operatorname{sen}x+\cos x)-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\operatorname{sen}x-\cos x}\right]^{1/2}>1$.
18. $x+4<-\frac{2}{x+1}$.
19. $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$.
20. $\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}\geqslant1$.
21. $\frac{5}{4}\operatorname{sen}^2x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x>\cos 2x$.

22. $\cos^2 x < 1/2$.

23. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{\operatorname{sen} x - 2\cos x}{\operatorname{sen} x + 2\cos x} \quad (0 < x < \pi)$.

24. $4^x < 2^{x+1} + 3$.

25. $\sqrt{1-x} \leqslant \sqrt[4]{5+x}$.

26. $\frac{1}{\log_2 x} \leqslant \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}}$.

27. $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1$.

28. $(\log_{|x+6|} 2)\cdot\log_2(x^2-x-2) \geqslant 1$.

29. $\log_3 \frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 0$.

30. $3\operatorname{sen} 2x > \operatorname{sen} x + \cos x + 1$.

31. $\log_{1/2}(x+1) > \log_2(2-x)$.

32. $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 1/2$.

33. $\sqrt{\log_a \frac{3-2x}{1-x}} < 1$.

34. $\log_{1/4}\sqrt{x^2-2x} > \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$.

35. $\log_4 \frac{2x-1}{x+1} < \cos\frac{2\pi}{3}$.

36. $\log_{x+\frac{5}{2}}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0$.

37. $\log_a(\sqrt{25-x^2}-1) \geqslant \log_a(|x|+1)$.

38. $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geqslant 1$.

39. $\log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{\operatorname{sen}^2 x - \frac{5}{12}} < -1$.

40. $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0$.

41. $2\cos 2x + \operatorname{sen} 2x > \operatorname{tg} x$.

42. $|3^{\operatorname{tg}\pi x} - 3^{1-\operatorname{tg}\pi x}| \geqslant 2$.

43. $(\log_{\operatorname{sen} x} 2)^2 < \log_{\operatorname{sen} x}(4\operatorname{sen}^3 x)$.

44. $\log_4(2x^2+x+1) - \log_2(2x-1) \leqslant -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$.

45. $\log_{\frac{2x+1}{x^2-4}} 2 \leqslant \frac{1}{2}\log_{\operatorname{sen}(\pi/3)}\frac{4}{3}$.

46. $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}\,[\lg_{\operatorname{tg} x}(2+4\cos^2 x) - 2] \geqslant 0$.

47. $\log_{(3x^2+1)} 2 < 1/2$.

48. $x^{\lg|\operatorname{sen} x|} \geqslant 1 \quad (x > 0)$.

49. $\log_{5/8}(2x^2-x-3/8) \geqslant 1$.

50. $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geqslant 0$.

51. $\log_{\operatorname{sen} x - \cos x}(\operatorname{sen} x - 5\cos x) \geqslant 1$.

52. $\operatorname{cotg}(5+3x)\cdot(\operatorname{cotg} 5 + \operatorname{cotg} 3x) \geqslant \sqrt{\operatorname{cotg} 3x} - 1$.

53. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$.

54. $x^2 - |3x+2| + x \geqslant 0$.

55. $25^x - 2^{2\log_5 6 - 1} < 10\cdot 5^{x-1}$.

56. $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$.

57. $\log_{|\operatorname{sen} x|}(x^2-8x+23) > \dfrac{3}{\log_2|\operatorname{sen} x|}$.

58. $\log_{x/2} 8 + \log_{x/4} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$

59. $2\operatorname{tg} 2x \leqslant 3\operatorname{tg} x$.

60. $\sqrt{5-2\operatorname{sen} x} \geqslant 6\operatorname{sen} x - 1$

§ 11. SISTEMAS DE ECUACIONES

Haremos algunas observaciones sobre los métodos de resolución de *los sistemas de ecuaciones*. Al resolver los sistemas, así como las ecuaciones "unitarias", tienen importancia esencial el concepto de equivalencia y otros conceptos próximos a éste, que se consideran detalladamente en el § 9, Parte I. Este párrafo está dedicado a los problemas relacionados con las ecuaciones "unitarias". A pesar de la semejanza lógica de los razonamientos teóricos, referentes a la equivalencia de ecuaciones y a la de sistemas, la aplicación del concepto de equivalencia para la resolución de los sistemas encierre mucho más dificultades que las resoluciones de ecuaciones y por esta razón, como regla, este concepto no se utiliza.

Las dificultades de un género especial, que surgen al resolver los sistemas, sólo están relacionadas con aquellas transformaciones del sistema que afectan a unas cuantas ecuaciones de éste (en lo que se refiere a una ecuación, pueden utilizarse totalmente los conceptos y recomendaciones del § 9, Parte I). Pero existen muchas transformaciones de tal tipo: todos saben que procedimientos más ingeniosos se aplican a veces para la resolución de los sistemas.

Por lo tanto, en el curso de la resolución de los sistemas sólo se emplea uno de dos métodos señalados en el § 9, Parte I, referentes a la resolución de ecuaciones: *la deducción de los corolarios no obligatoriamente equivalentes al sistema dado y omisión posterior de las raíces extrañas*. Con esto pasamos no a los sistemas que son los corolarios, sino a las ecuaciones independientes, cada una de las cuales es el corolario del sistema inicial, o sea, que es satisfecha por cualquier solución del sistema. Combinando estas ecuaciones, obtenemos sistemas que se derivan del sistema inicial, y logramos, por fin, cierto número de incógnitas. Finalmente, por medio de la comprobación (como regla general, mediante una sustitución directa), omitimos las soluciones extrañas.

Para seguir este camino, es necesario saber no admitir aquellas transformaciones que hagan perder soluciones; por ejemplo, la división de ambos miembros de una ecuación entre los dos miembros de otra ecuación provocará pérdidas de aquellas soluciones del sistema, en que ambos miembros de la segunda ecuación se convierten en cero. Por otra parte, la mayoría de transformaciones que se aplican con más frecuencia: adición, sustracción, multiplicación de las ecuaciones, sustitución de la incógnita de una ecuación por la de la otra, etc., no pueden conducir a la pérdida de soluciones, y por ello son admisibles. Por lo común, en cada caso concreto hay que reflexionar sobre la cuestión de si una transformación concreta, más o menos compleja, puede o no conducir a la pérdida de soluciones.

Sin duda alguna, la comprobación inmediata de las soluciones obtenidas, puede a veces presentar ciertas dificultades, y para evitarlas se pueden usar las recomendaciones dadas para la resolución de ecuaciones. Explicaremos todo lo dicho con un ejemplo.

1. *Hallar todas las soluciones complejas del sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2}=y, \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2}=x. \end{cases} \tag{1}$$

Puede observarse que "al dar la vuelta" a las fracciones de los primeros miembros de ambas ecuaciones y al sustituir, respectivamente, los segundos miembros por $1/y$ y $1/x$, obtendremos un sistema simple respecto de $u=1/x$ y $v=1/y$:

$$\begin{cases} \dfrac{u^2}{2}+\dfrac{1}{2}=v, \\ \dfrac{v^2}{2}+\dfrac{1}{2}=u. \end{cases} \tag{2}$$

Pero, ¿es posible "dar la vuelta" a una ecuación? ¿Qué ocurre en este caso con las ecuaciones? No es difícil comprender que esta transformación no originará soluciones extrañas, pero puede inferir la pérdida de soluciones, precisamente habrá pérdidas de soluciones cuando ambos miembros de la ecuación sean iguales a cero. Por lo tanto, antes de pasar al sistema (2), conviene, para evitar pérdidas, considerar la posibilidad señalada.

El primer miembro de la primera ecuación se convierte en cero para $x=0$, y el segundo, para $y=0$. Por eso, en la ecuación puede haber perdida (y se pierde en realidad) solamente la solución para $x=0$, $y=0$. Por esta razón, después de haber hallado la solución $x=0$, $y=0$, podremos buscar las demás soluciones del sistema (2).

Al sustraer la segunda ecuación de la primera del sistema (2) obtenemos la ecuación $u^2-v^2=2(v-u)$, de donde se deduce que $u-v=0$ ó $u+v=-2$.

En el primer caso tenemos $u=1$, al poner $v=u$ en la primera ecuación del sistema (2). La sustitución directa nos convence de que el par $u_1=1$, $v_1=1$ satisface también la segunda ecuación y, por consiguiente, el sistema (2).

En el segundo caso, al poner $v=-u-2$ en la primera ecuación obtenemos que $u^2+2u+5=0$, de donde $u_{2,3}=-1\pm 2i$, y $v_{2,3}=-1\pm 2i$. La sustitución directa de los valores $u_{2,3}$ y $v_{2,3}$ en la segunda ecuación da dos igualdades

$$(-1-2i)^2+1=-2+4i,\quad (-1+2i)^2+1=-2-4i,$$

para cuya demostración se debe solamente abrir los paréntesis.

De tal modo, el sistema (2) tiene soluciones:

$$u_1=1,\ v_1=1;\ u_2=-1+2i;\ v_2=-1-2i;$$
$$u_3=-1-2i,\ v_3=-1+2i.$$

Recordándonos de que $x=1/u$ e $y=1/v$, obtenemos la solución del sistema inicial (1):

$$x_1=1,\quad y_1=1;\quad x_2=\frac{1}{-1+2i},\quad y_2=-\frac{1}{1+2i};$$
$$x_3=-\frac{1}{1+2i},\quad y_3=\frac{1}{-1+2i};$$

además de esto, no hay que olvidar la solución hallada anteriormente respecto de $x_4=0$, $y_4=0$[1].

El problema de investigar el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas presenta serias dificultades lógicas. Y como siempre, las primeras dificultades consisten en las definiciones. *¿Qué se llama el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas? ¿Qué se entiende por la solución del sistema de ecuaciones? ¿En qué caso tal sistema se denomina determinado (indeterminado, compatible, incompatible)?* He ahí las interrogaciones que a veces son insuperables para muchos estudiantes. Con frecuencia ocurre que el estudiante, al enunciar correctamente la definición general, empieza a confundirse en caso de que se le proponga contestar, por ejemplo, *si los sistemas*

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=1; \end{cases}\quad \begin{cases} 2x-y=1, \\ 2x-y=2; \end{cases}\quad \begin{cases} x=0, \\ y=1; \end{cases}\quad \begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=0, \\ 0\cdot x+0\cdot y=0 \end{cases}$$

son los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Todos estos sistemas convienen a la definición general y las dificultades consisten aquí en que éstos son "demasiado simples". Está claro que el primer sistema es indeterminado; el segundo, incompatible, el tercero tiene

[1] Los números complejos x_2, y_2, x_3 e y_3 obtenidos en el resultado se recomienda reducirlos a la forma algebraica: $x_2=(1+2i)/3$, etc.

evidentemente una sola solución $x=0$, $y=1$, y la solución del cuarto sistema es cualquier par de números x, y.

Al examinar este tema debe comprenderse ante todo: ¿con cuáles restricciones de coeficientes se realiza la investigación del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas? Lo más importante consiste en lo siguiente: una vez realizadas las transformaciones del sistema inicial

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

hay que prestar atención especial al sistema obtenido

$$\left.\begin{aligned} (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x &= c_1 b_2 - c_2 b_1 \; (= \Delta_1), \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y &= a_1 c_2 - a_2 c_1 \; (= \Delta_2), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

que es un *corolario* del sistema inicial, aunque en el caso general no es obligatoriamente equivalente a éste; de tal modo, al pasar al segundo sistema, no perdemos soluciones aunque podemos *adquirir* las extrañas.

Si $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, este sistema es determinado, es decir, tiene una sola solución: $x = \Delta_1/\Delta$, $y = \Delta_2/\Delta$. Por medio de *la sustitución* (comprobación) *directa* uno puede convencerse de que esta solución es también la del sistema inicial.

Si $\Delta = 0$, mientras que $\Delta_1 \neq 0$ ó $\Delta_2 \neq 0$, este sistema es incompatible, es decir, no tiene soluciones. Por consiguiente, el sistema inicial tampoco tiene soluciones.

En fin, si $\Delta = 0$ y $\Delta_1 = 0$, entonces también $\Delta_2 = 0$, asi que el sistema (3) tiene la forma

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0, \\ 0 \cdot y = 0, \end{cases}$$

y, por consiguiente, la solución del sistema (3) es, evidentemente, cualquier par de números x, y. Pero, esto no significa todavía que el sistema inicial se cumple con cualquier par de números, porque podríamos obtener soluciones extrañas. En realidad, así van las cosas: en el caso en que $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, es fácil demostrar que para el sistema inicial se cumple la igualdad

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2};$$

por razón de que la primera y la segunda ecuaciones del sistema inicial se deferencian solamente por el coeficiente, y por eso el sistema inicial es equivalente a una sola ecuación. Entonces es claro que éste es indeterminado, o sea, que tiene un número infinito de soluciones; al tomar los valores arbitrarios de una incógnita, con ayuda de esta ecuación se puede obtener el valor adecuado de la otra.

Sin embargo, tal investigación puede ser insuficiente para las escuelas de enseñanza superior, donde se reclaman exigencias más elevadas a las Matemáticas. Por lo tanto, ahora pasamos a exponer las definiciones requeridas e investiguemos el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, con coeficientes arbitrarios.

Definición 1. *Llámase sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas al sistema de dos ecuaciones de la forma*

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, son números reales arbitrarios [1].

Definición 2. *Llámase solución del sistema al par de números reales* [2] *x_0, y_0 que satisfacen cada una de las ecuaciones del sistema dado.*

En otras palabras, la solución es un conjunto de tales dos números x_0, y_0 con que la sustitución, en el sistema inicial (2), de los números incógnitos x e y, por los números x_0 e y_0, respectivamente, conduce a dos igualdades numéricas correctas

$$\left\{\begin{aligned} a_1 x_0 + b_1 y_0 = c_1, \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 = c_2. \end{aligned}\right.$$

Conviene diferenciar de tal modo dos sentidos que se dan a la expresión "*resolución del sistema*": bajo la resolución del sistema se entiende *el proceso* de búsqueda de los valores de las incógnitas, y la solución del sistema es un *conjunto* de los valores de incógnitas que convierten las ecuaciones del sistema en igualdades numéricas correctas. *Resolver un sistema de ecuaciones es hallar todas sus soluciones* [3].

Sólo por la incomprensión de los términos de "resolución y solución del sistema" se pueden explicar respuestas absurdas parecidas a la que sigue: "El sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y = 13, \\ -x + \ \ y = 1 \ \ \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

tiene dos soluciones: $x = 2$ e $y = 3$". Precisamente, el conjunto de estos dos números $x = 2$ e $y = 3$ forma la solución única de este sistema. A estos valores de las incógnitas se les llama a veces "raíces del sistema (5)", lo que tampoco es correcto, porque el término "raíz" es aplicable sólo a *una* ecuación con una sola incógnita y no se utiliza

---

[1] Nada obstaculiza considerar también los sistemas lineales que tengan coeficientes complejos. Toda la investigación consiguiente (menos la interpretación geométrica) es válida también en este caso más general.

[2] O complejos si los coeficientes son complejos.

[3] Subrayemos que la definición 2 tiene lugar para los sistemas de ecuaciones arbitrarios; es fácil comprender que las observaciones aquí expuestas sobre las soluciones del sistema se deben tomar en consideración al resolver cualquier sistema de ecuaciones.

para el análisis de los sistemas. Finalmente, es imposible reconocer como correcta la expresión "los números 2 y 3 son la solución del sistema (5)", ya que la solución es un par de valores de las incógnitas y es esencial señalar, cuál de las incógnitas (x o bien y) es igual a 2 y cuál, a 3. La respuesta correcta del problema sobre la búsqueda de las soluciones del sistema (5) ha de tener el siguiente aspecto: "El sistema (5) tiene una solución única: $x=2$, $y=3$".

Definición 3. *El sistema de ecuaciones se llama*

— *compatible si éste tiene siquiera una sola solución;*

— *incompatible, en el caso contrario, o sea, cuando éste no tiene soluciones;*

— *determinado, si éste tiene una solución única;*

— *indeterminado, si éste tiene más de una solución.*

En otras palabras, los sistemas son compatibles e incompatibles; los sistemas compatibles se subdividen a su vez en determinados e indeterminados. Señalemos ahora unos ejemplos de cada sistema.

El sistema

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=1, \\ \quad x+y=2 \end{cases}$$

es incompatible, porque la primera ecuación no puede convertirse en igualdad numérica correcta para cualesquiera que sean los valores de x e y.

El sistema

$$\begin{cases} 2x-y=1, \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

es incompatible: aunque existen unos pares de números (por ejemplo, $x=0$, $y=-1$, etc.) que convierten la primera ecuación en igualdad numérica correcta, y otros pares (por ejemplo, $x=1$, $y=0$, etc.) que convierten la segunda ecuación en igualdad numérica correcta; pero no hay ningún par con que ambas ecuaciones sean simultáneamente igualdades numéricas correctas.

El sistema

$$\begin{cases} x=0, \\ x=2, \end{cases} \quad \text{o bien,} \quad \begin{cases} x+0\cdot y=0, \\ x+0\cdot y=2 \end{cases}$$

es también incompatible.

El sistema

$$\begin{cases} x=0, \\ y=1, \end{cases} \quad \text{o bien,} \quad \begin{cases} x+0\cdot y=0, \\ 0\cdot x+y=1 \end{cases}$$

es compatible, o más exactamente, determinado, ya que existe solamente un par $x=0$, $y=1$ que convierte cada una de las ecuaciones en igualdad numérica correcta.

El sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ -x+\ \ y=1 \end{cases}$$

es compatible, ya que tiene la solución $x=2$, $y=3$, o más precisamente, determinado (lo que exige argumentaciones complementarias no evidentes).

El sistema

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+y=1 \end{cases}$$

es compatible, ya que tiene la solución, por ejemplo, $x_1=0$, $y_1=1$, y además es indeterminado, porque $x_2=1$, $y_2=0$, por ejemplo, es su otra solución.

El sistema

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=0, \\ 0\cdot x+0\cdot y=0 \end{cases}$$

es también indeterminado, ya que cualquier par de números x, y convierte ambas ecuaciones en igualdades numéricas correctas.

Ahora pasamos a *investigar* el sistema (4). *Investigar el sistema lineal es determinar si este es incompatible, determinado o indeterminado. En los dos últimos casos es indispensable hallar su solución.* Ahora demostremos un teorema que representa en sí un contenido de investigación de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Vamos a enunciar este teorema de un modo extraordinario, en forma de esquema.

Teorema. *Sea dado un sistema* (4). *Introduzcamos las designaciones*

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1;\quad \Delta_1=c_1b_2-c_2b_1;\quad \Delta_2=a_1c_2-a_2c_1.$$

Entonces:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\Delta=0} \arrow[r, "\text{sí}"] \arrow[d, "\text{no}"] & \boxed{\Delta_1=\Delta_2=0} \arrow[r, "\text{sí}"] \arrow[d, "\text{no}"] & \boxed{a_1=b_1=a_2=b_2=0} \arrow[r, "\text{sí}"] \arrow[d, "\text{no}"] & {} \\
\text{determinado (punto)} & \text{incompatible} & \text{indeterminado (recta)} & \\
{} \arrow[r, "\text{sí}"] & \boxed{c_1=c_2=0} \arrow[r, "\text{sí}"] \arrow[d, "\text{no}"] & \text{indeterminado (plano)} & \\
& \text{incompatible} & &
\end{tikzcd}$$

Se debe comprender este esquema del modo siguiente. Ante todo se plantea la pregunta de si se cumple la condición $\Delta=0$. Si no se cumple, la flecha respectiva indica que el sistema es determinado. Si se cumple, la flecha correspondiente ordena preguntar si se cumple la condición $\Delta_1=\Delta_2=0$. Si no se cumple, la flecha respectiva indica que el sistema es incompatible. En el caso contrario la flecha correspondiente impone hacer la pregunta siguiente, etc. El significado de las palabras „recta" y „plano" entre paréntesis será aclarado en lo ulterior.

Claro está, se puede dar un enunciado corriente de este teorema, sin embargo, en el esquema resulta más ilustrativo. He aquí el enunciado habitual:

Si $\Delta \neq 0$, *el sistema es determinado; en este caso la solución es la siguiente:* $x = \Delta_1/\Delta$, $y = \Delta_2/\Delta$. *Si* $\Delta = 0$, *y uno de los números* Δ_1, Δ_2 *se diferencia de cero, el sistema es incompatible. Si* $\Delta = 0$ *y* $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ *y uno de los números* a_1, b_1, a_2, b_2 *difiere de cero, el sistema es indeterminado. Cuando* $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ *y todos los números* a_1, b_1, a_2, b_2 son iguales a cero [1], *si bien uno de los números* c_1, c_2 *se diferencia de cero, el sistema es incompatible. En fin, si todos los coeficientes del sistema son iguales a cero, el sistema es indeterminado.* La comparación no dice nada a favor de esta enunciación.

Demostración. Examinemos el sistema (4). Si multiplicamos por b_2 la primera ecuación de este sistema y restamos del resultado la segunda ecuación, multiplicada previamente por b_1, obtendremos una ecuación

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1;$$

análogamente, si multiplicamos por a_1 la segunda ecuación y restamos del resultado la primera ecuación, multiplicada previamente por a_2, obtendremos la ecuación

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

De tal modo, obtenemos así que el sistema (3) ha de cumplirse; con ayuda de las designaciones aceptadas lo escribiremos en forma

$$\left.\begin{aligned} \Delta \cdot x &= \Delta_1, \\ \Delta \cdot y &= \Delta_2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

El sistema (6) es un *corolario* del sistema inicial (4), es decir, *cualquier solución del sistema* (4) *es la solución del sistema* (6); no afirmamos, sin embargo, que estos sistemas son equivalentes.

Supongamos que $\Delta \neq 0$. Entonces el sistema (6) tiene una sola solución: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Mediante la sustitución *(comprobación)* directa debemos convencernos además de que este par de números x, y es también la solución del sistema inicial (4). De esta manera, en el caso examinado el sistema inicial tiene una solución única. Esto demuestra la primera flecha vertical.

Damos un paso hacia la derecha, o sea, consideramos el caso $\Delta = 0$. Supongamos que la condición $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ no está cumplida, es decir,

---

[1] Es fácil ver que la condición $a_1 = b_1 = a_2 = b_2$ da origen a la igualdad $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

cuando uno de los números Δ_1, Δ_2 no es igual a cero. Entonces el sistema (6) es incompatible de lo que resulta que el sistema (4) es tampoco compatible. Esto demuestra la segunda flecha vertical.

Damos un paso más hacia la derecha, o sea, consideramos el caso $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Supongamos que la condición $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ no está cumplida, es decir, uno de los números a_1, b_1, a_2, b_2 es distinto de cero. Para mayor precisión consideraremos que $a_1 \neq 0$. Entonces, de la primera ecuación del sistema (4) tenemos $x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$. Al sustituir x en la segunda ecuación del sistema por este valor tendremos que

$$a_2 x + b_2 y = \frac{a_2 c_1 - a_2 b_1 y}{a_1} + b_2 y = \frac{a_2 c_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) y}{a_1} = \frac{a_2 c_1}{a_1} = c_2.$$

(Aquí hemos utilizado las igualdades $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta = 0$ y $a_2 c_1 = a_1 c_2$; la última se deduce de la condición $\Delta_2 = 0$). De tal modo, toda solución de la primera ecuación es la solución de la segunda y, por consiguiente, el sistema (4) se reduce a la primera ecuación. No obstante, la primera ecuación se satisface, si a la incógnita y se le da un valor arbitrario y el valor correspondiente de x se halla por la fórmula $x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$. De esa manera, en el caso considerado, el sistema (4) tiene una cantidad infinita de soluciones, y todas éstas se describen por la fórmula

$$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}, \ y \text{ es un número arbitrario.}$$

Por lo tanto, el sistema (4) es indeterminado. Esto demuestra la tercera flecha vertical.

Damos el paso siguiente hacia la derecha, es decir, consideramos el caso en que todos los números a_1, b_1, a_2, b_2 son iguales a cero (entonces $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$). En este caso el sistema (4) tiene un aspecto muy "extraño":

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_2. \end{cases}$$

Está claro que cuando $c_1 = c_2 = 0$, le satisface cualquier par de números x, y, es decir, en este caso el sistema es indeterminado, y si uno de los números c_1, c_2 es distinto de cero, el sistema es incompatible. Esto demuestran dos últimas flechas.

El teorema queda demostrado.

Consideremos *la interpretación geométrica* de los sistemas examinados. Es sabido que un conjunto de puntos de un plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación de la forma

$$ax + by = c,$$

donde a, ó b (o ambas a la vez) no son iguales a cero, es una recta. Por esta razón, la resolución del sistema (4), en el cual cada una de las ecuaciones tiene aunque una de las incógnitas, consiste en hallar un punto común de dos rectas. De la Geometría se saben todos los casos posibles de la disposición recíproca de dos rectas en un plano. Con esto tiene lugar la correlación que sigue:

En Geometría	*En Algebra:*
las rectas se intersecan	el sistema es determinado (la primera flecha vertical)
las rectas son paralelas	el sistema es incompatible (la segunda flecha vertical)
las rectas coinciden	el sistema es indeterminado (la tercera flecha vertical)

Las otras dos flechas no pueden ser interpretadas de modo análogo, ya que en los casos correspondientes el sistema no tiene sentido geométrico. No obstante, en el último caso, cuando cualquier par de números es la solución del sistema, puede decirse que el conjunto de soluciones del sistema es un plano.

Por ejemplo, *investiguemos un sistema*

$$\begin{cases} ax+\ \ y=a, \\ x+ay=1. \end{cases}$$

Calculamos, ante todo, Δ, Δ_1, Δ_2:

$$\Delta=a^2-1, \quad \Delta_1=a^2-1, \quad \Delta_2=0.$$

Ahora comprobemos la condición de entrada: $\Delta=0$. Si $\Delta=a^2-1\neq$ $\neq 0$, es decir, si $a\neq 1$, y $a\neq -1$, entonces el sistema es determinado (la primera flecha vertical). Si $\Delta=0$ (o sea, $a=1$, o bien, $a=-1$), entonces llegamos, siguiendo la primera flecha horizontal, a la condición $\Delta_1=\Delta_2=0$. Esta condición queda satisfecha y por esto podemos seguir la segunda flecha horizontal. Por cuanto no todos los coeficientes de las incognitas son iguales a cero, entonces para $a=1$ y para $a=-1$, el sistema es indeterminado y se reduce a una sola ecuación.

De esta forma, si $a\neq 1$ y $a\neq -1$, el sistema es determinado; con esto su solución es: $x=1$, $y=0$; cuando $a=1$ y $a=-1$, el sistema es indeterminado; en estos casos sus soluciones se dan por las fórmulas:

para $a=\ \ 1$ $\quad y=1-x$, $\quad x$ es un número cualquiera,
para $a=-1$ $\quad y=x-1$, $\quad x$ es un número cualquiera.

Demos un ejemplo más: *investiguemos el sistema*

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} 2\alpha + y(1+\cos 2\alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha, \\ x(1+\cos 2\alpha) - y \operatorname{sen} 2\alpha = 0. \end{cases}$$

Tenemos $\Delta = -\operatorname{sen}^2 2\alpha - (1+\cos 2\alpha)^2 = -2(1+\cos 2\alpha)$,

$$\Delta_1 = -\operatorname{sen}^2 2\alpha, \quad \Delta_2 = -\operatorname{sen} 2\alpha\,(1+\cos 2\alpha).$$

Si $\Delta \neq 0$, o sea, $\cos 2\alpha \neq -1$, el sistema es determinado. Si $\Delta = 0$, o sea, $\cos 2\alpha = -1$, entonces $\operatorname{sen} 2\alpha = 0$ y, por consiguiente, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Además, en este caso, son iguales a cero los seis coeficientes del sistema y, por eso, su solución será cualquier par de números x e y.

De tal modo, si $\cos 2\alpha \neq -1$, es decir, $\alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, para ningún valor de k entero el sistema en cuestión es determinado; su solución en este caso es

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Cuando $\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, donde k es un número entero, el sistema es indeterminado y su solución será cualquier par de números x e y.

2. *¿Cuáles son los números complejos $a+bi$ que pueden ser representados en la forma $(c+di)/(c-di)$, donde c y d son números reales?*

Este problema se puede interpretar de otro modo:

¿para cuáles a y b tiene solución la ecuación $a+bi = (c+di)/(c-di)$ cuando c y d son incógnitas, o bien, para cuáles a y b la ecuación $(a+bi)\cdot(c-di) = c+di$ tiene la solución distinta de cero?

Al hacer las transformaciones necesarias, obtendremos, a base de la definición de la igualdad de los números complejos, el sistema de dos ecuaciones lineales que sigue:

$$\begin{cases} (a-1)c + bd = 0, \\ bc - (a+1)d = 0 \end{cases} \tag{7}$$

con dos incógnitas c y d y con dos parámetros a y b. Es difícil resolver este sistema mediante los métodos habituales: deben considerarse muchos casos. Para presentar, digamos, una incógnita por la otra es necesario examinar independientemente los casos en que un coeficiente sea igual o no a cero.

Entre tanto, no hay necesidad de resolver el sistema (7) porque nos interesa solamente; si tiene una solución distinta de cero. Pero es evidente que tiene la solución $c = 0$, $d = 0$, por lo que necesitamos que tenga más de una solución, es decir, que sea *indeterminado*.

Según el teorema, esto se logra cuando, y solo cuando $\Delta = -(a^2-1) - b^2 = 0$; valiéndonos del esquema, nos situamos en la tercera flecha vertical ($\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ y todos los coeficientes de las incógnitas no pueden ser iguales a cero, ya que $a-1$ y $-(a+1)$ no se convierten a la vez en cero).

De tal modo, en la forma señalada pueden representarse los números $a+bi$ que tienen $a^2+b^2=1$, o sea, los números complejos con un módulo igual a 1.

EJERCICIOS:

Resuélvanse los sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+4y}=\sqrt{2}+4, \\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{2x+2y}=2\sqrt{2}-2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}, \\ (x+y)\,2^{y-x}=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=x^{8/3}, \\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=x^{2/3}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2, \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2, \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^{y^2-15y+56}=1, \\ y-x=5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2=1+6\log_4 y, \\ y^2=y\cdot 2^x+2^{2x+1}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+4y^2=96, \\ \log_{y^2} 2=\log_{xy} 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (2^x+1)\,2^{y+1}=9, \\ \sqrt{x+y^2}=x+y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \log_9(x^2+2)+\log_{81}(y^2+9)=2, \\ 2\log_4(x+y)-\log_2(x-y)=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \log_9(x^2+1)-\log_3(y-2)=0, \\ \log_2(x^2-2y^2+10y-7)=2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{1+x^2+xy}{x+y}=2-y, \\ \log_{2^{1-y}} 2^{x^2}=1+y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=\dfrac{\sqrt{52-2x}}{\sqrt[4]{x-y}}, \\ \dfrac{3}{2}\log_8(x-y)-\log_{1/\sqrt{2}}(x-y)=5. \end{cases}$

13. ¿El sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener exactamente dos soluciones?

14. Hállese para cuáles valores de k existe una solución del sistema

$$\begin{cases} x+ky=3, \\ kx+4y=6, \end{cases}$$

la que satisface a las desigualdades $x>1$, $y>0$.

15. ¿Para cuáles valores de m el sistema

$$\begin{cases} x+my=1, \\ mx-3my=2m+3 \end{cases}$$

no tiene soluciones?

16. ¿Para cuáles valores de α cualquier par de números x, y, que es la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x\operatorname{sen}2\alpha+y(1+\cos 2\alpha)=\operatorname{sen}2\alpha, \\ x(1+\cos 2\alpha)-y\operatorname{sen}2\alpha=0, \end{cases}$$

es a la vez la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha=\operatorname{sen}\alpha, \\ x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha=0? \end{cases}$$

§ 12. PROBLEMAS «DE TEXTO»

Llamamos problemas "de texto" los problemas que tradicionalmente figuran como los de composición de las ecuaciones. El hecho es que en últimos tiempos a los estudiantes se proponen con mucha frecuencia problemas para cuyas resoluciones, o sea búsquedas de los valores incógnitos requeridos, es necesario aprovecharse no sólo de las ecuaciones, sino de las desigualdades [1] y, de vez en cuando, de otras condiciones que no se escriben en forma de ecuaciones y desigualdades. Por tanto, lo principal que reúne los problemas de tal tipo es que la condición de un problema se enuncia solamente en la forma de un texto, sin fórmulas ni designaciones algebraicas de las incógnitas. Además, la costumbre de la mayoría de los estudiantes de considerar todo problema de texto como una tarea de componer ecuaciones, presta a veces un mal servicio: se ven sin preparación sicológica ante el hecho de que unas ecuaciones son insuficientes para resolver el problema.

Los problemas del tipo habitual, en los cuales todas las condiciones se escriben en forma de ecuaciones, no presentan, como regla general,

---

[1] Notemos que las desigualdades están presentes casi en todos los problemas de tal índole: si, por ejemplo s es una distancia, entonces $s>0$, etc. Sin embargo, no las escriben explícitamente, sino que utilizan durante la resolución de las ecuaciones y la omisión de las soluciones extrañas.

grandes dificultades, aunque ciertos elementos de estos problemas causan a veces situaciones embarazosas. En lo que se refiere a los problemas más complicados, su dificultad se explica, por lo común, por el carácter no habitual, y necesita no sólo resolver ciertos sistemas de ecuaciones o desigualdades sino saber de razonar.

En este caso resulta a menudo que los razonamientos sencillos, sin componer ecuaciones y desigualdades, aunque sea posible componerlas, hacen llegar más fácil y rápidamente a la meta. Además, a veces se puede resolver un problema por simples razonamientos y hasta más rápido que por los métodos matemáticos corrientes. Sin embargo, la resolución por razonamientos simples no siempre es rigurosa y debe completarse con cálculos matemáticos rigurosos.

Empecemos por *los problemas de mezclas*. La composición de un sistema de ecuaciones en estos problemas presenta dificultades para muchos estudiantes.

1. *Se tienen tres mezclas compuestas de tres elementos A, B y C. La primera mezcla consta sólo de los elementos A y B en proporción de peso de* $3:5$, *la segunda mezcla contiene solamente los elementos B y C en proporción de peso de* $1:2$, *en la tercera mezcla entran sólo los elementos A y C en proporción de peso de* $2:3$. *¿En qué proporción se han de tomar estas mezclas para que la mezcla obtenida contenga los ingredientes A, B y C en proporción de peso de* $3:5:2$?

Algunos estudiantes comprenden incorrectamente la expresión "proporción de peso", otros se asustan a la palabra "mezclas".

En realidad, este problema no es difícil.

Ya que los elementos A y B componen la primera mezcla en proporción de $3:5$, entonces cada gramo de la primera mezcla contiene $3/8$ g del elemento A y $5/8$ g del elemento B. Análogamente, 1 g de la segunda mezcla contiene $1/3$ g del elemento B y $2/3$ g del elemento C; 1 g de la tercera mezcla contiene $2/5$ g del elemento A y $3/5$ g del elemento C.

Si tomamos x g de la primera mezcla, y g de la segunda y z g de la tercera y las mezclamos, obtendremos $(x+y+z)$ g de la nueva mezcla, con lo que ésta contendrá $\left(\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z\right)$ g del elemento A, $\left(\frac{5}{8}x+\frac{1}{3}y\right)$ g del elemento B y $\left(\frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z\right)$ g del elemento C. Tenemos que tomar la primera, segunda y tercera mezclas en tales cantidades que la mezcla obtenida contenga los elementos A, B y C en proporción de $3:5:2$, es decir, que 1 g de la mezcla nueva comprenda $3/10$ g del elemento A, $5/10$ g del elemento B y $2/10$ g del elemento C. Pues, en $x+y+z$ g de la mezcla nueva habrá $\frac{3(x+y+z)}{10}$ g del elemento A, $\frac{5(x+y+z)}{10}$ g del elemento B y $\frac{2(x+y+z)}{10}$ g del elemento C. Si igualamos diferentes expresiones para la misma cantidad de gramos de los elementos A, B y C, obtendremos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{3}{8}x + \frac{2}{5}z = \frac{3}{10}(x+y+z), \\ \frac{5}{8}x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{10}(x+y+z), \\ \frac{2}{3}y + \frac{3}{5}z = \frac{2}{10}(x+y+z). \end{cases} \qquad (1)$$

Notemos que aunque se hayan obtenido tres ecuaciones con tres variables, el sistema tiene solamente dos ecuaciones independientes. Esto es fácil demostrar, por ejemplo, así: sustrayendo de la igualdad $x+y+z=x+y+z$ la suma de las dos primeras ecuaciones, obtendremos la tercera ecuación. Por lo tanto, del sistema (1) hallaremos no las x, y, z, sino la proporción $x:y:z$. Eliminando x, por ejemplo, de las dos primeras ecuaciones del sistema (1), hallamos que $y=2z$. Si colocamos este valor de y en cualquier ecuación del sistema, obtendremos que $x=(20/3)z$. Por consiguiente, $x:y:z=20:6:3$, o sea, hay que tomar la mezcla en proporción de peso de $20:6:3$.

No menos dificultades presentan *los problemas de tanto por ciento.* Mientras tanto, no hay nada difícil en el concepto de "tanto por ciento": sin demoras podemos eliminar el por ciento, examinando una cantidad correspondiente de partes centésimas de un número. El siguiente problema contiene tanto "mezclas" como "tanto por ciento".

2. *El por ciento (por el peso) de alcohol en tres soluciones forma una progresión geométrica. Si se mezclan la primera, segunda y tercera soluciones en proporción de peso de $2:3:4$, se obtendrá una solución de un 32% de alcohol. Si estas se mezclan en proporción de peso de $3:2:1$, se obtendrá una solución de un 22% de alcohol. ¿Qué por ciento de alcohol contiene cada solución?*

En la primera solución hay x %, en la segunda y % y en la tercera, z % de alcohol. Esto significa que 1 g de la primera solución contiene $x/100$ g de alcohol, 1 g de la segunda solución, $y/100$ g de alcohol y 1 g de la tercera solución, $z/100$ g de alcohol. Si tomamos 2 g de la primera solución, 3 g de la segunda y 4 g de la tercera, obtendremos 9 g de una mezcla que contiene $\left(2\cdot\frac{x}{100}+3\cdot\frac{y}{100}+4\cdot\frac{z}{100}\right)$ g de alcohol. Según la condición del problema, la mezcla obtenida contiene un 32% de alcohol, es decir, en 9 g de la mezcla hay $9.\ \frac{32}{100}$ g de alcohol. De esta condición obtendremos una ecuación

$$\frac{2x+3y+4z}{100}=\frac{9\cdot 32}{100}.$$

Por analogía obtendremos una ecuación más:

$$\frac{3x+2y+z}{100}=\frac{6\cdot 22}{100}.$$

En fin, según la condición del problema, los números x, y, z forman una progresión geométrica por razón de que $y^2 = xz$.

Ahora nos queda resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 288, \\ 3x + 2y + z = 132, \\ \qquad\qquad y^2 = xz. \end{cases}$$

Al resolver las dos primeras ecuaciones con relación a y y z y al poner las expresiones obtenidas en la tercera ecuación, obtenemos la ecuación $x^2 - 76x + 768 = 0$, cuyas raíces son: $x_1 = 64$, $x_2 = 12$.

Pero, el valor $x_1 = 64$ no satisface las condiciones del problema, porque el valor respectivo de $y = 48 - 2x$ es negativo. Por eso, queda sólo $x = 12$. En este caso se halla fácilmente: $y = 24$ y $z = 48$. De tal modo, la primera solución contiene el 12% de alcohol, la segunda, 24% y la tercera, 48%.

En muchos casos surgen dificultades durante las resoluciones de los sistemas obtenidos, sobre todo en los casos en que para hallar la incógnita necesaria se requiere cierta perspicacia o método artificial. Tal método facilita frecuente y esencialmente los cálculos o señala en general el único método posible para la solución del problema.

3. *Un afluente desemboca en un río. A cierta distancia de la desembocadura del afluente está situado el punto A. En el río, a la misma distancia de la desembocadura del afluente se encuentra el punto B. El tiempo necesario para que una lancha a motor navegue, de ida y vuelta, del punto A a la desembocadura del afluente, y el tiempo requerido para que ésta cubra la distancia de ida y vuelta del punto B hasta la desembocadura del afluente, se refieren como* 32 : 35. *Si la velocidad de la lancha a motor fuera en* 2 km/h *mayor, esta relación sería igual a* 15 : 16, *y si la velocidad de la lancha a motor fuera en* 2 km/h *menor, esta relación sería igual a* 7 : 8. *Hállese la velocidad de la corriente del río. (Las distancias se miden a lo largo del afluente y del río, respectivamente).*

Sea u km/h la velocidad de la corriente del río, v km/h, la velocidad de la lancha en el agua muerta y w km/h, la velocidad de la corriente del afluente. Luego, la distancia desde el punto A hasta la desembocadura del afluente es igual a s km. Entonces, para superar la vía de ida y vuelta desde el punto A hasta la desembocadura del afluente la lancha necesita $t_1 = s/(v+w) + s/(v-w) = 2sv/(v^2 - w^2)$ (horas). Ya que la distancia desde el punto B hasta la desembocadura del afluente es también igual a s km, la lancha, en su novegación de ida y vuelta desde B hasta la desembocadura del afluente, invierte $t_2 = s/(v+u) + s/(v-u) = 2sv/(v^2 - u^2)$ (horas). De la condición $t_1 : t_2 = 32 : 35$ obtenemos la primera ecuación

$$\frac{v^2 - u^2}{v^2 - w^2} = \frac{32}{35}.$$

De modo análogo se componen las otras dos ecuaciones

$$\frac{(v+2)^2-u^2}{(v+2)^2-w^2}=\frac{15}{16},$$

$$\frac{(v-2)^2-u^2}{(v-2)^2-w^2}=\frac{7}{8}.$$

Después de simplificarlo, este sistema de ecuaciones puede escribirse así:

$$\left\{\begin{aligned} 3v^2&=35u^2-32w^2,\\ (v+2)^2&=16u^2-15w^2,\\ (v-2)^2&=8u^2-7w^2.\end{aligned}\right.$$

De este sistema debemos hallar u. Este sistema se resuelve con facilidad si primero se elimina u, es decir, aquella incógnita que se busca. Al eliminar u, obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{aligned} 2(v-2)^2-(v+2)^2&=w^2,\\ 35(v-2)^2-24v^2&=11w^2\end{aligned}\right.$$

Si de este sistema eliminamos w, obtenemos la ecuación $13(v-2)^2+ 11(v+2)^2-24v^2=0$ de donde $v=12$. Ahora se deduce que $w=2$ y que $u=4$. De tal modo hemos obtenido la solución: la velocidad de la corriente del río es de 4 km/h.

En el problema que sigue se presenta un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Parece que es fácil de resolver. Sin embargo, algunos estudiantes no cumplen esta tarea, enredándose en los cálculos de *los coeficientes de letras*. Conviene subrayar que los problemas con datos de letras (y no los de números) se encuentran con bastante frecuencia.

4. *Dos ríos desembocan en un lago. Un barco sale del puerto M situado en el primer río, navega agua abajo hasta el lago atravesándolo y donde no hay ninguna corriente, y por el segundo río, agua arriba, contra la corriente, hasta el puerto N. Seguidamente el barco regresa. La velocidad del barco, sin tomar en cuenta la corriente es igual a v, la velocidad de la corriente del primer río es v_1; la del segundo río es v_2; el tiempo de movimiento del buque desde M hasta N es igual a t, y la distancia desde M hasta N es igual a S. El tiempo de navegación de regreso desde N hasta M, por la misma ruta, es también igual a t. ¿Qué distancia recorre el buque por el lago en una dirección?*

Designamos por s_1 y s_2 las distancias desde los puertos M y N hasta el lago, y por s, la vía que pasa por el lago. Por la condición del problema tenemos: $s_1+s+s_2=S$. Es evidente que el tiempo empleado por el buque para superar la ruta de M a N, es igual a

$$\frac{s_1}{v+v_1}+\frac{s}{v}+\frac{s_2}{v-v_2}=t;$$

análogamente, calculamos el tiempo necesario para superar la ruta de regreso. De este modo obtenemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas s_1, s_2, s:

$$\begin{cases} s_1+s+s_2=S, \\ \dfrac{s_1}{v+v_1}+\dfrac{s}{v}+\dfrac{s_2}{v-v_2}=t, \\ \dfrac{s_1}{v-v_1}+\dfrac{s}{v}+\dfrac{s_2}{v+v_2}=t; \end{cases} \tag{2}$$

de estas incógnitas nos interesa la magnitud s.

Esta sistema parece bastante complejo, aunque en principio no hay nada de eso: en realidad, si recordamos que v, v_1, v_2, S, t son constantes dadas, resulta claro que el sistema (2) es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Y tal sistema siempre puede ser resuelto si eliminamos, sucesivamente, las incógnitas.

No obstante, ocurre con frecuencia que lo simple en la teoría resulta muy complejo en la práctica. El método indicado para resolver nuestro problema es muy engorroso y presenta cálculos voluminosos porque los coeficientes del sistema (2) son bastante complejos.

Por esta razón, vamos a resolver el sistema (2) valiéndonos de un método un poco artificial, pero breve. La segunda ecuación de este sistema puede presentarse en forma

$$v^2 s_1 - vv_2 s_1 + v^2 s + (v_1 - v_2) vs - v_1 v_2 s + v^2 s_2 + vv_1 s_2 = \\ = tv (v^2 + vv_1 - vv_2 - v_1 v_2).$$

Al sustituir la suma del primer miembro $v^2 s_1 + v^2 s + v^2 s_2$ por $v^2 S$, hay que referirse a la primera ecuación, y al agrupar los términos obtenemos la ecuación

$$v^2 S + v [v_1 s_2 - v_2 s_1 + (v_1 - v_2) s] - v_1 v_2 s = \\ = tv (v^2 + vv_1 - vv_2 - v_1 v_2). \tag{3}$$

Así mismo puede transformarse también la tercera ecuación de nuestro sistema. Pero los cálculos pueden "economizarse" si notamos que la tercera ecuación es muy "parecida" a la segunda: si sustituimos s_1 y v_1 de aquélla por s_2 y v_2 y a la inversa, obtendremos la segunda ecuación. Por lo tanto, al sustituir s_1 y v_1 por s_2 y v_2 de la segunda ecuación (3) ya transformada, y a la inversa, obtendremos la tercera ecuación transformada

$$v^2 S + v [v_2 s_1 - v_1 s_2 + (v_2 - v_1) s] - v_2 v_1 s = \\ = tv (v^2 + vv_2 - vv_1 - v_2 v_1). \tag{4}$$

Sumando ahora las igualdades obtenidas (3) y (4) tendremos $2v^2 S - 2v_1 v_2 s = tv (2v^2 - 2v_1 v_2)$, de donde se deduce que la ruta buscada, que pasa por el lago, es:

$$s = v \frac{vS - v^2 t + v_1 v_2 t}{v_1 v_2} = vt + v^2 \frac{S - vt}{v_1 v_2}. \tag{5}$$

El problema queda completamente resuelto. Sin embargo, algunos estudiantes, al obtener la solución del problema con los datos algebraicos (por ejemplo, la fórmula (5)), consideran necesario aclarar con cuáles relaciones entre los datos esta solución tiene "un sentido real" (se superponen requerimientos de que las velocidades, las rutas, etc., son positivas, se introducen condiciones con las cuales los denominadores son distintos de cero, etc.). Claro está que una investigación correcta no empeora la resolución del problema, pero esta investigación no es un elemento lógicamente necesario de la resolución, porque en la condición del problema se sobreentiende que todos los procesos reales descritos tenían lugar y, por consiguiente, los datos algebraicos ya satisfacen las relaciones adecuadas. Sin duda, se debe recurrir a tal investigación si lo exige la condición del problema.

En el transcurso de la resolución de los problemas relacionados con la composición de las ecuaciones, en el sistema obtenido resultan a menudo ecuaciones *homogéneas* de segundo grado con dos incógnitas [1]. Estas ecuaciones homogéneas aportan mucho a la resolución del sistema de ecuaciones. Efectivamente, de la ecuación homogénea de segundo grado con dos incógnitas se determina directamente la relación de éstas, lo que simplifica los cálculos subsiguientes. Por ahora examinemos un problema en cuya resolución se aplica este hecho.

5. *Un automóvil sale del punto A hacia el punto B. En ese mismo instante del punto B hacia el punto A sale una motocicleta, pero a menor velocidad. Pasado cierto tiempo se encuentran; en este momento, del punto B hacia el punto A sale una segunda motocicleta que se encuentra con el automóvil en un punto que dista del punto de encuentro de ésta con la primera motocicleta* 2/9 *del camino desde A hasta B. Si la velocidad del automóvil fuera de* 20 km/h *menos, la distancia entre los puntos de encuentro sería igual a* 72 km *y el primer encuentro tendría lugar a las* 3 *horas después de la partida del automóvil desde el punto A. Hállese la distancia entre A y B. (Las velocidades de las motocicletas son iguales.)*

Sea u km/h la velocidad del automóvil y la de la motocicleta, v km/h; sea s km la distancia AB; el automóvil y la primera motocicleta se encuentren después de t horas.

El sistema de ecuaciones se compone fácilmente:

$$\left\{\begin{aligned} & tu+tv=s, \\ & 3(u-20)+3v=s, \\ & \frac{\frac{2}{9}s}{u}=\frac{vt-\frac{2}{9}s}{v}, \\ & \frac{72}{u-20}=\frac{3v-72}{v}. \end{aligned}\right.$$

[1] *Llámase ecuación homogénea de segundo grado con dos incógnitas a la ecuación de la forma* $ax^2+bxy+cy^2=0$, donde a, b y c son ciertos números.

Si de este sistema eliminamos la incógnita complementaria t y lo simplificamos, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} s = 3(u + v - 20), \\ 9uv = 2(u + v)^2, \\ v(u - 20) = 24(u + v - 20). \end{cases}$$

Para hallar s hace falta buscar u y v que figuran en las dos últimas ecuaciones. Al notar que la segunda ecuación es la ecuación homogénea de segundo grado respecto a dos variables, hallaremos con facilidad la relación $u : v$.

Ya que nos interesan u y v, distintos de cero, obtendremos, al dividir la segunda ecuación entre v^2, una ecuación cuadrática respecto a la nueva variable $z = u/v$:

$$2z^2 - 5z + 2 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $z_1 = 2$ y $z_2 = 1/2$, y por eso $u = 2v$ o bien $u = v/2$.

Pero, según la condición del problema, $u > v$. Por lo tanto, sólo nos conviene $u = 2v$.

Poniendo este valor de u en la tercera ecuación hallamos que $v = 40$ ó $v = 6$. Pero, si $v = 6$, entonces $u = 12$, mientras que la condición del problema se satisfacen sólo cuando $v = 40$, de lo que se deduce que $u = 80$ y $s = 300$. De tal modo, la distancia AB queda hallada: $s = 300$ km.

Hay unos problemas que presentan dificultades insuperables para los estudiantes cuando, una vez escritas las condiciones en forma de un sistema de ecuaciones, resulta, que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. Así ocurre, por ejemplo, con el problema siguiente.

6. *Dos compañeros, al tener una sola bicicleta, partieron en el mismo instante del punto A hacia el punto B; el primero de ellos se fue en bicicleta y el segundo, a pie. A cierta distancia de A el primero dejó la bicicleta en el camino y llegó caminando a B. El segundo, al llegar donde estaba la bicicleta, siguió en ésta. Ambos amigos llegaron juntos a B. En el camino de regreso del punto B al punto A procedieron de igual forma, pero el primer compañero recorrió en bicicleta un kilómetro más que la vez primera. Por esto, el segundo amigo llegó al punto A 21 minutos más tarde que el primero. Determínese la velocidad de marcha de cada uno de los amigos si en bicicleta van a una velocidad de* 20 km/h *y caminando, la velocidad del primero en* 3 *minutos por* km *es mayor que la del segundo.*

Introduzcamos las siguientes designaciones:

s km, la distancia entre los puntos A y B;

v km/h, velocidad de marcha del primer compañero;

w km/h, velocidad de marcha del segundo compañero;

a km, distancia recorrida en bicicleta por el primer compañero desde A hasta B (de tal modo, éste dejó la bicicleta en un punto que dista a km de A y siguió caminando hasta B).

Es evidente que para recorrer todo el camino de A a B, el primer amigo gastó $a/20+(s-a)/v$ horas y el segundo, $a/w+(s-a)/20$ horas. Las condiciones de simultaneidad de partida y simultaneidad de llegada al punto B dan la primera ecuación

$$\frac{a}{20}+\frac{s-a}{v}=\frac{a}{w}+\frac{s-a}{20}.$$

Los datos sobre la marcha de los amigos desde B hasta A permiten componer, en forma análoga, la segunda ecuación

$$\frac{a+1}{20}+\frac{s-a-1}{v}=\frac{a+1}{w}+\frac{s-a-1}{20}-\frac{7}{20}$$

(21 minutos $=7/20$ de una hora)[1].

Por cuanto el primer compañero emplea $1/v$ horas y el segundo, $1/w$ para 1 km, respectivamente, entonces de la condición del problema obtenemos de inmediato la tercera ecuación

$$\frac{1}{w}-\frac{1}{v}=\frac{1}{20}.$$

Así resultó un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Es imposible determinar todos los valores de las incógnitas s, a, v y w de este sistema; en este sentido el sistema es indeterminado. ¿Y significa esto que no podemos resolver nuestro problema? No. Pues, lo único que necesitamos, es hallar dos magnitudes incógnitas: las velocidades v y w. En este sistema ellas pueden hallarse unívocamente. Con este fin, restamos la primera ecuación de la segunda y el resultado obtenido

$$\frac{1}{w}+\frac{1}{v}=\frac{9}{20}$$

lo analizaremos junto con la tercera ecuación. Después de un cálculo hallamos que $v=5$ km/h y $w=4$ km/h.

En el problema recién examinado hemos logrado hallar las incógnitas requeridas en este sistema a pesar de que la cantidad de ecuaciones era menor que la de las incógnitas; en el problema siguiente obtendremos un sistema de ecuaciones donde no se determina ninguna de las incógnitas. Al mismo tiempo es posible aclarar cúal de las incógnitas es mayor, lo que se exige demostrar en el problema.

7. *Un escolar gastó cierta suma de dinero para comprar una cartera, una estilográfica y un libro. Si la cartera, la estilográfica y el libro*

[1] Hemos reducido los minutos a horas porque todos los valores a examinar han de ser medidos en unidades concordadas. Por ejemplo, si el camino está medido en kilómetros y el tiempo en horas, la velocidad se mide en km/h. Sólo con tal concordancia de unidades de medición serán válidas las fórmulas de física que se utilizan para la resolución, por ejemplo, $s=vt$, etc.

costaran 5, 2 y 2,5 veces más baratos respectivamente, la compra costaría 8 rublos. Y si, en comparación con el precio original, la cartera costara 2 veces más barata, la estilográfica 4 veces y el libro 3 veces más baratos, por la misma compra el escolar pagaría 12 rublos. ¿Cuánto vale la compra y por qué cosa se pagó más: por la cartera o por la estilográfica?
Sea x el precio de la cartera; el precio de la estilográfica y y z, el precio, del libro. Hay que aclarar cuántos rublos pagó el escolar por la cartera la estilográfica y el libro en conjunto, es decir, hallar la suma $x+y+z$.

La primera ecuación se compone partiendo de la suposición de que la compra costaría 8 rublos:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2,5}=8.$$

Análogamente se compone la segunda ecuación:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=12.$$

Es claro que no podremos determinar todas las incógnitas de este sistema obtenido de dos ecuaciones con tres incógnitas, pero podemos hallar su suma, que es lo que se exige en el problema. Para esto escribamos nuestras ecuaciones así:

$$\begin{cases} 2x+5y+4z=80, \\ 6x+3y+4z=144. \end{cases} \tag{6}$$

Si se suman estas dos ecuaciones, se hallará la suma de las incógnitas: $x+y+z=28$. De esta manera se obtiene la respuesta a la primera pregunta del problema: toda la compra cuesta 28 rublos.

Ahora vamos a tratar de esclarecer qué es más costoso: la cartera o la estilográfica; en otras palabras, tenemos que esclarecer cuál de las desigualdades tiene lugar: $x>y$ o $y>x$.

Si de la segunda ecuación del sistema (6) restamos la primera, obtendremos que

$$2x-y=32. \tag{7}$$

Es evidente que $x>y/2$, porque en caso contrario tendríamos $32=2x-y<0$. Sin embargo, la desigualdad $x>y/2$ todavía no facilita la resolución del problema. Y no la facilita porque hemos usado mal la ecuación (7). A saber: hemos utilizado solamente que la diferencia $2x-y$ es positiva. Ahora trataremos de hacer uso del hecho de que ésta es igual a 32, tomando en consideración a la vez que $x+y+z=28$ y que todas las incógnitas son números positivos por su sentido real.

Escribamos la ecuación (7) así: $x+(x-y)=32$. Ya que toda la compra cuesta 28 rublos, entonces es notorio que $x<28$, y de la última ecuación se deduce que $x-y>0$, o sea, la cartera es más cara que la estilográfica.

En casi todos los problemas examinados con anterioridad participaron implícitamente las desigualdades; por ejemplo, en el problema 6 se utilizaron hasta dos desigualdades: $u > v$ y $u > 20$. La participación de las desigualdades en tales problemas no presenta en la práctica dificultades. Es mucho peor lo que ocurre con la solución de aquellos problemas en los que una parte de las condiciones debe anotarse explícitamente en forma de desigualdades. Muchos estudiantes, al escribir correctamente el sistema de ecuaciones y desigualdades, ni siquiera comienzan su resolución. Esto se explica, por lo visto, sólo por el hecho de que los estudiantes no están preparados sicológicamente para la resolución de estos sistemas. Así ocurrió, por ejemplo, durante la resolución del problema siguiente.

8. A las 9 a. m., *del punto A hacia el punto C parte un tren rápido. En ese mismo instante, del punto B, situado entre los puntos A y C, salen dos trenes de pasajeros, el primero de éstos va al punto A y el segundo, al punto C; las velocidades de los trenes son iguales. El tren rápido encuentra al primer tren de pasajeros a no más tardar de las 3 horas después de su partida, luego pasa por el punto B a no más tardar de las 14 horas del mismo día, llegando por fin al punto C simultáneamente con el tren de pasajeros, 12 horas después del encuentro con el primer tren de pasajeros. Hallar la hora de llegada del primer tren de pasajeros al punto A.*

Sea v_1 km/h, la velocidad del tren rápido, v_2 km/h, la del de pasajeros, la distancia AB es igual a s km. De la condición de que el tren rápido encuentra al primer tren de pasajeros *no más tardar* de las tres horas después de su partida, obtenemos que

$$\frac{s}{v_1+v_2} \leqslant 3.$$

De la condición de que el tren rápido pasó el punto B antes de las 5 horas después de su partida, tenemos

$$\frac{s}{v_1} \geqslant 5.$$

Ya que hasta el primer encuentro pasaron $s/(v_1+v_2)$ horas, entonces, durante el tiempo de $12+[s/(v_1+v_2)]$ horas el tren rápido alcanzará al segundo tren de pasajeros, por cuya razón resulta que

$$\left(12+\frac{s}{v_1+v_2}\right)(v_1-v_2)=s.$$

Nos hace falta hallar $x=s/v_2$. De ahí $s=xv_2$; sustituyendo esta expresión en lugar de s en las igualdades y desigualdades precedentes y designando v_1/v_2 por α, llegamos al sistema

$$\begin{cases} x \leqslant 3(\alpha+1), \\ x \geqslant 5\alpha, \\ x = 6(\alpha^2-1). \end{cases}$$

Muchos estudiantes no dominan este problema.

En realidad, la resolución no es tan difícil: en este sistema hay que despejar sea x ó α y pasar al sistema de dos desigualdades respecto a una incógnita. Por cuanto es más fácil, a primera vista, eliminar x, emprendemos precisamente este camino. Sustituyendo x por $6(\alpha^2 - 1)$ en dos primeras desigualdades, obtenemos el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2\alpha^2 - \alpha - 3 \leqslant 0, \\ 6\alpha^2 - 5\alpha - 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

Las soluciones de la primera desigualdad son: $-1 \leqslant \alpha \leqslant 3/2$; las soluciones de la segunda: $\alpha \geqslant 3/2$ y $\alpha \leqslant -2/3$. De tal modo, la solución del sistema será: $\alpha = 3/2$ y, además, todas las α dentro del intervalo $-1 \leqslant \alpha \leqslant -2/3$. Como estamos interesados por las α positivas, a la condición del problema le satisface el valor único $\alpha = 3/2$. Ahora hallamos con facilidad que $x = 15/2$ y obtenemos la solución: el primer tren de pasajeros llega al punto A a las 16 horas 30 minutos.

Este problema, así como otros de este tipo, admite una solución en la que todos los datos se escriben en forma de ecuaciones. Esto se hace introduciendo incógnitas complementarias y obteniendo un sistema de ecuaciones, en las cuales el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. Sin embargo, la solución de tal sistema de ecuaciones es más difícil que la del sistema de desigualdades.

Resolvamos este problema recurriendo al segundo procedimiento. Conservemos las mismas designaciones. Que el tren rápido encuentre al primer tren de pasajeros después de $(3 - t_1)$ horas $(t_1 \geqslant 0)$, recorre el punto B después de $(5 + t_2)$ horas $(t_2 \geqslant 0)$ y alcanza al segundo tren de pasajeros después de $[(3 - t_1) + 12]$ horas. En este caso, las ecuaciones se componen fácilmente

$$\begin{cases} (v_1 + v_2)(3 - t_1) = s, \\ v_1 (5 + t_2) = s, \\ (15 - t_1)(v_1 - v_2) = s, \\ xv_2 = s. \end{cases}$$

Si eliminamos s de este sistema y designamos v_1/v_2 por α obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (\alpha + 1)(3 - t_1) = x, \\ \alpha(5 + t_2) = x, \\ (\alpha - 1)(15 - t_1) = x. \end{cases} \tag{8}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas de las cuales hay que hallar sólo x. Vamos a proceder así como lo hicimos antes: eliminemos x obteniendo un sistema

$$\begin{cases} \alpha t_2 + (\alpha + 1)\, t_1 = 3 - 2\alpha, \\ (1 - \alpha)\, t_1 - \alpha t_2 = 15 - 10\alpha \end{cases} \qquad (9)$$

Al notar ahora que el segundo miembro de la segunda ecuación es 5 veces mayor que el segundo miembro de la primera, miltiplicamos la primera por 5 y, al restar de ésta la segunda, obtendremos

$$6\alpha t_2 + (6\alpha + 4)\, t_1 = 0. \qquad (10)$$

Por cuanto $\alpha > 0$, $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$, esta igualdad sólo es posible cuando $t_1 = 0$ y $t_2 = 0$. Pero, entonces de (9) se halla fácilmente que $\alpha = 3/2$, y de (8), $x = 15/2$ resultando la misma solución. Muchos estudiantes no captan la posibilidad de obtener el corolario (10) del sistema (9) y por eso no pueden deducir del sistema (9) que $t_1 = t_2 = 0$ y por eso no pueden resolver este problema.

De lo expuesto resulta evidente que el primer método de resolución es más fácil que el segundo.

9. *A las* 9 *a. m., de la ciudad A partió un ciclista a una velocidad constante de* 12 km/h. *Dos horas después, siguiendo al primero, partió de la misma ciudad un motociclista que iba desplazándose con un movimiento uniformemente retardado a una velocidad inicial de* 22 km/h, *de modo que su velocidad disminuia en* 2 km/h. *Un automovilista que iba al encuentro a ellos, a la ciudad A, con una velocidad constante de* 50 km/h, *encontró primeramente al motociclista y luego, al ciclista. ¿Llegará el automovilista a las* 19 *horas de este día a la ciudad A*?

Este problema puede ser resuelto también mediante la composición de ecuaciones y desigualdades. No obstante, la composición de tal sistema exigiría largos razonamientos. Por esto, es mejor resolverlo no por composición formal del sistema de ecuaciones y desigualdades, sino por un simple razonamiento. Por ejemplo, así:

De la condición del problema se infiere que al principio el motociclista alcanza al ciclista, y luego el ciclista alcanzará al motociclista. Supongamos que el ciclista demore, hasta el encuentro (no importa, el primero o el segundo), t horas, mientras que el motociclista demore $(t-2)$ horas para el mismo camino. Ya que hasta el encuentro ambos pasarán un camino igual, entonces, igualando sus caminos hasta el encuentro, obtendremos que

$$12t = 22\,(t-2) - 2\,\frac{(t-2)^2}{2}\,.$$

Una vez resuelta esta ecuación, obtenemos que hasta el primer encuentro el ciclista demoró 6 horas, es decir, recorrió 72 km, y hasta el segundo pasó 96 km en 8 horas. Según la condición del problema, el automovilista encontró al ciclista antes de haber pasado éste 96 km. Por eso, el automovilista ha de ir hasta el punto A menos de 96 km. Demorará menos de 96/50 horas para recorrer este camino. Ya que el ciclista demorará menos de 8 horas para encontrarse con el automovilista, entonces el encuentro tendrá lugar antes de las 17 horas. Es decir, después del encuentro con el ciclista quedan más de 2 horas para que el automovilista llegue al punto para las 19 horas. Pero, para superar este camino se necesita menos de 96/50 horas, o sea, menos de 2 horas. Por lo tanto, el automovilista llegará al punto A antes de 19 horas.

Con frecuencia se proponen problemas en los cuales se exige hallar una solución óptima relacionada, por ejemplo, con una suma de dinero que se entrega para la compra de una cantidad mayor de piezas, o de unas cuantas variantes posibles de transporte de cargas escoger aquélla que sea más barata que las demás, etc.

Las resoluciones de los problemas de esta índole pueden consistir en componer sistemas de ecuaciones y desigualdades y en resolverlos. Sin embargo, los elementos más necesarios para resolver estos problemas son los razonamientos que ayudan mucho para elegir la mejor variante.

10. *Se requiere edificar cierto número de casas de vivienda iguales de un área útil de 40* mil m². *Los gastos para la construcción de una casa de N* m² *de área habitable se componen del costo de la superestructura, proporcional a $N\sqrt{N}$, y del costo de los cimientos, proporcional a $\sqrt{N}$. La edificación de una casa* de 1600 m² *cuesta* 176,8 mil rublos *con que, en este caso el costo de la superestructura constituye un* 36% *del costo de los cimientos. Determinar qué cantidad de casas hay que construir para que la suma de gastos sea mínima y hallar esta suma.*

Supongamos que se decidió construir n casas iguales, cada una de las cuales tiene y m² de área habitable. Entonces es válida la igualdad $yn = 40\,000$. Sea z mil rublos el costo de una casa de y m² de área habitable; entonces el costo x de toda la obra se calcula por la igualdad $x = zn$.

El costo de la casa se integra por el costo v de la superestructura de la casa y por el costo w de los cimientos, es decir, $z = v + w$. Según la condición del problema, el costo de la superestructura de la casa de y m² es proporcional a $y\sqrt{y}$, o sea, $v = \alpha y\sqrt{y}$, donde α es un coeficiente. Análogamente $w = \beta\sqrt{y}$, donde β es también un coeficiente adecuado.

En particular, al construir la casa de 1600 m², teniendo en cuenta que el costo de la superestructura constituye el 36% del costo de los cimientos, obtenemos que

$$\alpha\cdot 1600\cdot\sqrt{1600} = \frac{36}{100}\cdot(\beta\cdot 1600),$$

y tomando en consideración que la edificación de la casa de 1600 m² cuesta 176,8 mil rublos, tenemos que

$$176{,}8 = \alpha\cdot 1600\sqrt{1600} + \beta\sqrt{1600}.$$

Tenemos escritos todos los datos del problema; ahora hay que determinar x, como función de n, de las ecuaciones obtenidas y luego hallar para cuál valor de n será mínima la x.

Partiendo de las dos últimas igualdades se hallan fácilmente α y β : $\alpha = 117/160\ 000$, $\beta = 13/4$. Poniendo v y w en la expresión para z, obtenemos que $z = (117/160\ 000)\ y\sqrt{y} + (13/4)\ \sqrt{y}$. Ahora, al permutar este valor de z y el valor de $y = 40\ 000/n$ de la primera igualdad a la segunda, obtenemos que

$$x = 650\left(\frac{9}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right).$$

De tal manera hemos llegado a la conclusión de que x es el costo de la construcción y la función n recién escrita es la cantidad de casas. Ahora tenemos que determinar el valor mínimo de x. Si aplicamos al segundo miembro de esta igualdad la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, obtenemos que

$$x \geqslant 2\cdot 650\sqrt{9} = 3900,$$

donde el signo de igualdad se logra sólo cuando $8/\sqrt{n} = \sqrt{n}$, es decir, para $n = 9$. En otras palabras, el costo de la obra completa será siempre no menor que 3,9 millones de rublos y exactamente igual a este número si $n = 9$.

Por eso, al construir las casas, la suma mínima de gastos será cuando se construyan 9 casas; la construcción de estas 9 casas costará 3,9 millones de rublos.

11. *Se decidió comprar por* 100 *rublos una cantidad de juguetes para el árbol de Navidad. Estos adornos se venden por surtidos. El surtido de* 20 *juguetes cuesta* 4 *rublos, el de* 35 *juguetes,* 6 *rublos; y el surtido compuesto por* 50 *juguetes,* 9 *rublos.*

¿Cuántos y cuáles surtidos hay que comprar para que resulte la cantidad máxima de juguetes?

Sean x, y, z el número de surtidos de la primera, segunda y tercera especie, respectivamente, para que la compra de éstos asegure la máxima cantidad de juguetes (tal resolución del problema se considera, por lo común, como óptima). Entonces,

$$4x + 6y + 9z = 100.$$

Esta es la única ecuación que puede ser compuesta según la condición del problema. Sin embargo, es conocido, además de esto, que x, y y z son números enteros no negativos y que la cantidad de juguetes de esta compra es mayor que la de cualquier otra. Resulta que estas condiciones son totalmente suficientes para la determinación unívoca de todas las incógnitas.

La primera idea que puede ocurrirse, o sea, resolver la ecuación dada "atacando de frente" por selección de todos los valores posibles de incógnitas, no tiene, evidentemente, perspectivas por razón de una enorme cantidad de casos.

Sin embargo, esta selección puede reducirse considerablemente con ayuda de razonamientos "económicos". En efecto, por 12 rublos pueden comprarse 3 surtidos de la primera especie ó 2 surtidos de la segunda especie; en el primer caso adquirimos 60 juguetes, y en el segundo, 70. Por lo tanto, es evidente que el número de surtidos de la primera especie, en cuanto a la solución óptima, no debe superar a 2. Comparando análogamente los surtidos de la segunda y tercera especies, obtenemos que en la resolución óptima no debe ser más que un solo surtido de la tercera especie. De tal modo, hemos obtenido las desigualdades $x \leqslant 2$, $z \leqslant 1$.

Ahora la selección no presenta dificultades. Con $x=0$ obtenemos, para determinar y y z, una ecuación $6y+9z=100$ que no tiene soluciones, porque su primer miembro se divide entre 3 y el segundo no se divide. Luego, para $x=1$, obtenemos una ecuación $2y+3z=32$ la que (teniendo en cuenta la desigualdad $z \leqslant 1$) tiene la solución única $y=16$, $z=0$. En fin, para $x=2$, así como para $x=0$, la ecuación tampoco tiene soluciones.

De esa forma, para adquirir la máxima cantidad de juguetes hay que comprar 1 surtido de 20 juguetes y 16 surtidos de 35 juguetes.

En esta resolución se podrían evitar las selecciones si se emplearan detalladamente los razonamientos de divisibilidad. En efecto, de la ecuación dada se deriva que, al dividir el número x entre 3, proporciona un resto de 1, y el número z es par. Por lo tanto, de las desigualdades $x \leqslant 2$ y $z \leqslant 1$ se deduce que $x=1$, $z=0$ y de esta ecuación obtenemos que $y=16$.

En conclusión, notemos que las consideraciones expuestas anteriormente, significaban que la condición de resolución óptima puede ser escrita en forma de un sistema de ecuaciones y desigualdades:

$$\begin{gathered} 4x+6y+9z=100, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y,\ 0 \leqslant z \leqslant 1, \end{gathered} \tag{11}$$

con la condición complementaria de que x, y y z son números enteros. La condición de que x, y, y z son números enteros significa también que $z=2n$ y $x=1+3k$ donde n y k son también números enteros. Permutando estos valores de z y x a las desigualdades correspondientes obtenemos que $n=k=0$, es decir, $x=1$ y $z=0$. Por esto hallamos fácilmente $y=16$ de la ecuación (11).

12. *De una economía forestal a una ciudad es necesario llevar* 1590 *árboles. Para el transporte de los árboles hay camiones de una tonelada y media, de tres toneladas y de cinco. En cada uno de éstos puede transportarse por una vez,* 26, 45 *y* 75 *árboles, respectivamente. El costo de recorrido del camión de una tonelada y media es igual a* 9 *rublos, el de tres toneladas,* 15 *rublos y para el camión de cinco toneladas,* 24 *rublos.*

¿Cómo la economía forestal debe distribuir el transporte para que su costo total sea mínimo? No se admite un cargamento incompleto.

Sean x, y, z los números correspondientes a los camiones de una tonelada y media, de tres y de cinco toneladas respectivamente con la distribución óptima. Como no se admite el cargamento incompleto, entonces la cantidad de árboles transportados con tal repartimiento es igual a $26x+45y+75z$, de donde se obtiene la ecuación $26x+45y+75z=1590$.

Hemos llegado precisamente a una situación similar a la del problema anterior. No obstante, el intento de reducir la cantidad de selecciones, que salió bien en el caso precedente, aquí no ofrece simplificaciones perceptibles. En efecto, de esta ecuación puede deducirse que x se divide por 15 y, prácticamente, nada más. Es evidente también que el recorrido de 45 camiones de una tonelada y media costará 405 rublos y el recorrido de 26 camiones de tres toneladas que transporten la misma cantidad de árboles costará sólo 390 rublos, porque el número de camiones de una tonelada y media utilizados en la variante óptima no es mayor que 44. Por consiguiente, en cuanto a x obtenemos tres posibilidades: $x=0$, $x=15$, $x=30$. Cada uno de estos valores impone resolver la ecuación para y y z que tendrán también muchas soluciones.

De esa forma, el método indicado para la resolución parece muy largo aunque totalmente aplicable cuando lo exija un caso necesario y no haya otras ideas.

Señalemos aquí una idea atractiva que, sin embargo, no se lleva a la práctica. Valiéndose de los datos del problema es fácil calcular que por 45 rublos, en 5 camiones de una tonelada y media pueden transportarse 130 árboles y en 3 camiones de tres toneladas, 135 árboles. Por eso, al parecer, el número de camiones de una tonelada y media no debería ser mayor que 4: en otro caso, estos árboles pueden transportarse más barato. De ahí y de las consideraciones expuestas arriba se desprende que $x=0$ y las selecciones consecutivas vienen disminuyendo considerablemente.

En realidad, de este razonamiento "económico" sólo se deduce que con tal redistribución , por una suma determinada de dinero, podemos transportar un mayor número de árboles, mientras que se requiere asegurar un mínimo de costo, teniendo la cantidad dada de árboles. Con todo esto pueden evitarse selecciones en este problema si se aplican ... razonamientos corrientes, "cotidianos".

En efecto, elaborando un plan más económico cada hombre que razone, primero apreciaría cuál de los tipos de camiones disponibles es más ventajoso. Está claro que la ventaja de cada uno de éstos se determina por el costo de transportación de un árbol, que constituye para los camiones de una tonelada y media, de tres toneladas y de cinco toneladas 9/26, 1/3 y 8/25 rublos, respectivamente. Por cuanto $9/26>1/3>8/25$, resulta que más ventajoso es emplear los camiones de cinco toneladas, luego, según sea necesario, los de tres toneladas y por último, los de una tonelada y media.

Es fácil ver que el mayor número de árboles que pueden transportarse en los camiones de cinco toneladas, constituye 1575. No obstante, teniendo en cuenta que no se admite una carga incompleta de los camiones, obtenemos que los camiones de cinco toneladas pueden transportar sólo 1500 árboles, y los demás 90 árboles pueden transportarse en camiones de tres toneladas, de lo cual es natural suponer cómo resulta la distribución óptima: 20 camiones de cinco toneladas y 2 de tres toneladas.

No es difícil demostrar que este plan es realmente óptimo: si disminuimos la cantidad de camiones de cinco toneladas, entonces será necesario transportar los árboles no trasladados por éstos, utilizando los camiones de una tonelada y media o los de tres toneladas; pero, ya que el transporte de cada árbol en camiones de una tonelada y media o de tres toneladas es más caro en comparación con los camiones de cinco toneladas, el costo total del transporte va creciendo.

Pues así, la distribución óptima — 20 camiones de cinco toneladas y 2 de tres toneladas — queda hallada. ¡ Y todas las incógnitas y la ecuación única compuesta no fueron utilizadas! De tal manera, al principio hemos emprendido un camino habitual, pero en el curso de la resolución hemos encontrado un método de resolución para el cual todas las consideraciones iniciales fueron inútiles. Está claro que durante la resolución es suficiente aplicar este último método.

EJERCICIOS:

1. Tres ciclistas, al arrancar simultáneamente de un punto y en la misma dirección, van por un velódromo circular de 1 km de longitud. Un tiempo después el segundo alcanza al primero al recorrer un círculo más que éste. Pasados 4 minutos, al mismo punto llega el tercero, al recorrer una distancia igual a la superada por el primero para el momento de encuentro con el segundo. Las velocidades de los ciclistas forman en cierta sucesión una progresión aritmética con una diferencia de 5 km/h. Hallar estas velocidades.

2. Tres hermanos cuyas edades forman una progresión geométrica, reparten entre sí cierta suma de dinero directamente proporcional a sus edades. Si lo hicieran dentro de tres años, cuando el menor sea dos veces más joven que el mayor, entonces el menor obtendría en 105 y el mediano en 15 rublos más que ahora. ¿Cuántos años tiene cada uno de los hermanos?

3. Dos grupos de turistas partieron a la vez del punto A hacia el punto B. El primer grupo salió en un autobús a una velocidad de 20 km/h y llegó en éste hasta el punto C que se encuentra en el centro entre los puntos A y B, y siguió a pie. El segundo grupo al principio iba caminando pero después de una hora subió a un vehículo de paso que iba a una velocidad de 30 km/h, y llegó en éste al punto B. El primer grupo atravesó el punto C 35 minutos antes que el segundo grupo, y llegó al punto B en 1 hora 25 minutos más tarde que el segundo. ¿Qué distancia hay desde el punto A hasta el punto B, si la velocidad (caminando) del primer grupo es en 1 km/h mayor que la velocidad del segundo grupo?

4. Dos recipientes iguales están llenos de alcohol. Del primer recipiente se extrayeron a l de alcohol y se llenó la misma cantidad de litros de agua. Seguidamente, de la mezcla obtenida de alcohol y agua se extrayeron a l y se repuso la misma cantidad de litros de agua. Del segundo recipiente se vertieron $2a$l de alcohol y se llenó con la misma cantidad de litros de agua. Luego, de la mezcla obtenida de alcohol y agua se extrajeron $2a$l y se repuso la misma cantidad de litros de agua. Determinar qué parte del volumen del recipiente constituyen a l si la fuerza de la mezcla definitiva en el primer recipiente es 25/16 veces mayor que la fuerza de la mezcla definitiva en el segundo recipiente. (Llámase fuerza de la mezcla la relación del volumen del alcohol puro en la mezcla a todo el volumen de la mezcla. Se supone que el volumen de la mezcla es igual a la suma de volúmenes de sus partes componentes).

5. Dos cuerpos están en movimiento uniforme por una circunferencia en el mismo sentido. Uno de ellos alcanza al otro cada 46 s. Si estos cuerpos se mueven a las mismas velocidades en direcciones contrarias, se encuentran entonces cada 8 s. Determínense las velocidades de movimiento de los cuerpos por la circunferencia sabiendo que su radio es igual a 184 cm.

6. Las ciudades A y B están situadas a orillas de un río; la ciudad B se halla aguas abajo. A las 9 a.m., de la ciudad A hacia la ciudad B zarpó una balsa con la velocidad de la corriente del río con respecto a las orillas. Al mismo tiempo, de la ciudad B hacia la ciudad A parte un bote que se encuentra con la balsa después de 5 horas. Al llegar a la ciudad A, el bote retornó de instante y arribó a la ciudad B simultáneamente con la balsa. ¿Si el bote y la balsa tenían tiempo de llegar a la ciudad B a las 9 p. m. (del mismo día)?

7. Cada uno de tres obreros necesita un tiempo para realizar cierto trabajo; el tercer obrero lo realiza en una hora más rápido que el primero. Obrando juntos, realizarán el trabajo en una hora. Y si el primer obrero trabaja durante una hora y después va a trabajar las 4 horas el segundo obrero, los dos realizarán todo el trabajo. ¿En cuántas horas puede cumplir todo el trabajo cada uno de los obreros?

8. Hay dos soluciones de una misma sal en agua. Para obtener una mezcla que contenga 10 g de sal y 90 g de agua, se toman dos partes de la primera solución y una de la segunda. Después de una semana, de cada kilogramo de la primera y la segunda soluciones se evaporó 200 g de agua y para que resulte la misma mezcla se necesitan cuatro partes de la primera solución y una de la segunda.

¿Cuántos gramos de sal contenían en inicio 100 g de cada solución?

9. Un tren de carga que salió de A hacia B llegó a la estación C simultáneamente con un tren de pasajeros que iba desde B hacia A a una velocidad m veces mayor que la del tren de carga. Ambos trenes, después de permanecer t horas en la estación C, siguieron su camino aumentando cada uno de ellos su velocidad en un 25% en comparación con su velocidad inicial (o sea, con la velocidad que tenían antes de la llegada a C). En estas condiciones el tren de carga llegó a B en t_1 horas más tarde y el de pasajeros llegó a A en t_2 horas más tarde, en caso de que ellos se movieran sin parar y a velocidades iniciales. ¿Con cuántas horas de anterioridad salió el tren de carga de A respecto del de pasajeros que partió de B?

10. A, B y C son tres puntos unidos por caminos rectilíneos. Con el segmento del camino AB linda un campo cuadrado que tiene un lado igual a $1/2\ AB$; el segmento del camino BC es contiguo a un lote cuadrado de un lado igual a BC; al segmento de camino CA es adyacente un bosque de forma rectangular cuya longitud es igual a AC y anchura de 4 km. El área del bosque es en 20 km^2 mayor que la suma de las áreas de los campos cuadrados. Hallar el área del bosque.

11. Un grupo de estudiantes compuesto de 30 personas en un examen recibió calificaciones de 2, 3, 4 y 5. La suma de las calificaciones obtenidas es igual a 93; las notas de tres fueron más que las de cinco y menos que las de cuatro. Por lo demás, el número de las de cuatro se dividía por 10 y el número de las de cinco fue par. Determinar cuántas y cuáles calificaciones recibió el grupo.

12. Una motocicleta y un coche "Volga" salen simultáneamente del punto A hacia el punto B y en ese mismo instante del punto B hacia el punto A parte un coche "Moskvich" que 5 horas 50 minutos después llega al punto A. Los automóviles se encontraron 2 horas 30 minutos después de la salida, y la motocicleta y el "Moskvich", a la distancia de 140 km del punto A. Si la velocidad de la motocicleta fuera dos veces mayor, se encontraría con el "Moskvich" a 200 km del punto A. Hallar las velocidades de la motocicleta, el "Moskvich" y el "Volga".

13. El agua pura y un ácido de concentración constante empiezan a llegar simultáneamente por dos tubos a un recipiente. Una vez que el recipiente estuvo lleno, resultó una solución de ácido al 5%. Y si se dejara de hacer llegar el agua en el momento cuando el recipiente está por la mitad, resultaría una solución al 10%. Determinar cuál de los tubos proporciona el líquido más rápidamente y en cuántas veces.

14. Un coche salió del punto A hacia el punto B. Simultáneamente, al encuentro de éste, del punto B partió un ciclista. Tres minutos después del encuentro, el coche regresa al instante, sigue al ciclista y, al alcanzarlo, de nuevo vuelve al instante para llegar al punto B. Si el coche regresara al instante un minuto después del encuentro y el ciclista aumentara 15/7 veces la velocidad después del encuentro, aquél demoraría el mismo tiempo para recorrer todo el camino. Hallar la relación entre las velocidades del ciclista y del coche.

15. Desde el punto A hacia el punto B que distan uno de otro a 100 km, al mismo instante salieron un ciclista y un transeúnte. Simultáneamente, del punto B partió un automovilista al encuentro de éstos. Una hora después de la carrera el automovilista encontró al ciclista y luego, al pasar más unos $14\frac{2}{17}$ km, encontró al transeúnte y lo subió al coche; después de esto echaron a correr detrás del ciclista y lo alcanzaron. Calcular las velocidades con las cuales se movían el ciclista y el automovilista si es sabido que la velocidad del transeúnte era igual a 5 km/h. El tiempo necesario para la subida del transeúnte y el viraje del automóvil se considera igual a cero.

16. Un laboratorio necesita encargar una cantidad de matraces esféricos iguales de una capacidad total de 100 l. El valor de un matraz lo componen el costo del trabajo del obrero, proporcional al cuadrado de la superficie del matraz, y el costo del material, proporcional a su superficie. En estas condiciones, el matraz de 1 l cuesta 1 rublo 25 kopeks y el valor del trabajo constituye un 20% del costo del matraz (el espesor de las paredes del matraz se considera despreciativamente pequeño). ¿Son suficientes 100 rublos para realizar el trabajo?

17. El autobús N° 1, en el que un estudiante puede llegar de su casa al instituto, sin transbordos, demora 2 horas 1 minuto. En cualesquiera de los autobuses N° 2, N° 3, . . . , N° K se puede llegar también al instituto; sin embargo, el estudiante puede hacer transbordo al autobús N° P solamente del autobús N° (P — 1). Las rutas de estos autobuses son tales que el estudiante, al llegar al instituto en uno de ellos, demorará un tiempo (sin contar los transbordos) inversamente proporcional al número de autobuses utilizados. Además de esto, en cada transbordo invertirá 4 minutos. ¿Es cierto que hay un camino que necesita en total menos de 40,1 minutos?

18. Entre el poblado A y la ciudad D se encuentran la gasolinera B y la torre de agua C que dividen la distancia AD en tres partes iguales ($AB = BC = CD$). De A hacia D salieron un coche "Volga" y un ciclista, y de D hacia A, simultáneamente con éstos, salió un camión que se cruzó con el "Volga" cerca de la torre de agua, y con el ciclista, cerca de la gasolinera. El ciclista aumentó su velocidad en 5 km/h cerca de la gasolinera. El "Volga", al llegar al punto D, regresó al instante con una velocidad de 8 km/h menos de la que tenía antes. Como resultado, en el momento cuando el camión llegó al punto A, al ciclista le quedaba por recorrer 7,5 km para llegar a C, y el "Volga", se encontraba entre B y A a 14 km de B. Hallar la distancia entre el poblado y la ciudad y las velocidades de los vehículos y el ciclista.

19. Un lote rectangular con un área de 900 m^2 hay que vallar de cerca cuyos lados adyacentes deben ser de piedra y los otros dos, de madera. Un metro de la cerca de madera cuesta 10 rublos y el de piedra, 25 rublos. Para la construcción se han asignado 2000 rublos. ¿Alcanzará esta suma?

20. El recipiente de una torre de agua se llena por varias bombas. Al principio se pusieron en acción tres bombas de igual rendimiento y después de 2,5 horas de trabajo empezaron a funcionar dos bombas más de rendimiento distinto de las tres primeras pero igual entre sí. Como resultado, una hora después de la conexión de las bombas al recipiente le faltaban 15 m^3 para llenarse; después de una hora más el recipiente estaba lleno. Una de las bombas puestas en acción más tarde podría llenar el recipiente en 40 horas. Hallar la capacidad del recipiente.

21. En las competiciones de esquís a la distancia de 10 000 metros arrancó el primer esquiador y un tiempo después salió el segundo con una velocidad en 1 m/seg mayor que la del primero. En el instante cuando el segundo alcanzó al primero éste aumentó su velocidad en 2 m/seg, mientras que la velocidad del segundo esquiador no varió. Como resultado de esto el segundo esquiador cruzó la meta 7 minutos 8 segundos después del primero. Si la distancia fuera 500 metros más larga, el segundo esquiador llegaría a la meta 7 minutos 33 segundos más tarde que el primero. Hallar qué tiempo pasó entre la salida del primero y segundo esquiadores.

22. Tres patinadores, cuyas velocidades en sucesión forman una progresión geométrica, parten simultáneamente de carrera por un círculo. Después de un tiempo el segundo patinador adelanta al primero, recorriendo 400 metros más que éste. El tercer patinador recorre una distancia igual a la recorrida por el primero hasta el momento cuando fue adelantado por el segundo, en espacio de tiempo de 2/3 de un minuto mayor que el primero. Hallar la velocidad del primer patinador.

23. Un sovjós dispone de cuatro marcas de tractores: A, B, C y D. Cuatro tractores (2 tractores de la marca B, un tractor de la marca C y un de la D) realizan la arada de un campo en dos días. Dos tractores de la marca A y un tractor de la marca C invierten tres días para el mismo trabajo, y los tres tractores de las marcas respectivas A, B y C, demoran cuatro días. ¿En qué tiempo realizarán el trabajo cuatro tractores de distintas marcas?

24. En tres campos se segaba la hierba durante tres días. En el primer día toda la hierba del primer campo se segó en 16 horas. En el segundo campo toda la hierba se segó, en el segundo día, en 11 horas. En el tercer día toda la hierba del tercer campo se segó en 5 horas: 4 horas la segaban a mano y una hora trabajaba una sola segadora. Durante el segundo y el tercer días la hierba se segó 4 veces más que en el primero.

¿Cuántas horas trabajó la segadora si por una hora ésta segaba 5 veces más hierba que la que daba la siega a mano? Se sobreentiende que la segadora no trabajaba, mientras se realizaba la siega a mano y no había pausas en el trabajo.

25. Una fábrica tiene que mandar a su cliente 1100 piezas. Para el envío las piezas se embalan en cajones. Los cajones de que se disponen son de tres tipos. En el cajón del primer tipo caben 70 piezas, en el de segundo tipo, 40 piezas, y en el de tercer tipo, 25 piezas. El costo de envío de un cajón de primer tipo es de 20 rublos, el costo de envío de un cajón de segundo tipo es de 10 rublos, el envío de un cajón de tercer tipo es de 7 rublos. ¿Cuáles cajones debe utilizar la fábrica para que el costo de envío sea el mínimo? Los cajones deben estar completos.

26. Un escolar encola de nuevo todos sus sellos en otro álbum. Si pega 20 sellos en cada hoja, entonces no le alcanzará el álbum; si pega 23 sellos, le sobrará, por lo menos, una hoja vacía. Y si al escolar se le regala igual álbum con 21 sellos, en cada hoja el escolar tendrá 500 sellos. ¿Cuántas hojas tiene el álbum?

27. Dos tubos funcionando simultáneamente durante una hora llenan de agua 3/4 de un depósito. Si al principio el primer tubo llena un 1/4 del depósito y luego el segundo, estando desconectado el primero, complete el volumen de agua hasta los 3/4 del depósito, se necesitarán para esto 2,5 horas. Si se pone en funcionamiento el primer tubo durante una hora, y el segundo, media hora, el depósito se llenará más allá de la mitad. ¿En qué tiempo cada uno de los tubos llenará el depósito?

28. Los puntos A y B se encuentran en un río de modo que la balsa que va desde A hacia B a la velocidad de la corriente del río, recorre el trayecto AB en 24 horas. La lancha a motor recorre todo el trayecto AB, en ida y regreso, en no menos de 10 horas. Si la velocidad propia de la lancha (es decir, la velocidad en agua muerta) aumentara en un 40%, entonces el trayecto (o sea, el espacio AB) sería recorrido por ésta en no más de 7 horas. Hallar el tiempo durante el cual la lancha a motor pasa el trayecto AB en caso de que su velocidad propia no aumente.

29. Desde el punto A hacia el punto B, a las 8 a. m. sale un tren rápido. En ese mismo instante, desde el punto B hacia el punto A salen dos trenes, uno de pasajeros y otro expreso; la velocidad del tren de pasajeros es dos veces menor que la del expreso.

El tren rápido encuentra al tren expreso no antes de las 10. 30 a. m., y llega al punto B a las 13.50 p. m. del mismo día. Hallar la hora de llegada del tren de pasajeros al punto A si se sabe que pasa no menos de una hora entre los encuentros del tren rápido con el expreso y del tren rápido con el de pasajeros.

30. A las 9 a. m., desde el punto A parte un ciclista que se dirige al punto B. Dos horas después de la salida del ciclista, desde A hacia B parte un automovilista que alcanza al ciclista a no más tardar las 12 del día. Siguiendo la marcha, el automovilista llega al punto B y vuelve al instante desde B hacia A. En este camino el automovilista encuentra al ciclista y llega al punto A a las 5 p. m. de ese mismo día. Hallar el tiempo de llegada del ciclista al punto B si se sabe que entre los dos encuentros del automovilista y del ciclista transcurrieron no más de 3 horas.

§ 13. GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES

Es muy importante para el estudio del curso de las Matemáticas superiores saber representar geométricamente las dependencias funcionales dadas en fórmulas. Por lo tanto, a veces se proponen problemas de la construccion de las gráficas de las funciones.

La experiencia enseña que muchos estudiantes experimentan tales o cuales dificultades al construir las gráficas. Por eso, en la práctica hay que ejercitarse en la construcción de gráficas, recordar la imagen de las curvas fundamentales.

Como se sabe, *se denomina dependencia funcional la ley o la regla, según la cual a cada valor de x (variable independiente o argumento) de algún conjunto de números, llamado campo de definición de una función, se le pone en correspondencia con el valor de la magnitud y completamente determinado (variable dependiente o función); se llama campo de variación de una función al conjunto de valores que toma la variable dependiente y.*

Es importante subrayar que los argumentos de las dependencias funcionales, que se examinan en la escuela secundaria, *se suponen siempre como las que toman valores reales, y en calidad de valores de la variable dependiente se admiten solamente los números reales.*

Si la dependencia funcional (función) se propone como la fórmula $y=f(x)$, entonces la búsqueda de su campo de definición se reduce a la búsqueda de todos los valores reales del argumento, para los cuales la expresión $f(x)$ que determina la función tiene el sentido, es decir, toma los valores reales. Examinemos unos ejemplos.

1. *Hallar el campo de definición de la función* $y=\log_x \cos x$. El campo de definición de esta función abarca sólo aquellos valores de x para los cuales se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: a) $x>0$, $x\neq 1$ (porque la base de los logaritmos tiene que ser positiva y no igual a 1); b) $\cos x>0$ (ya que los números negativos y el cero no tienen logaritmos).

Al resolver este sistema de desigualdades, obtenemos que el recinto de definición de la función considerada lo presenta el conjunto de números siguiente:

$$0<x<1,\ 1<x<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

donde $k=1, 2, 3, \ldots$ (represéntelo en el eje numérico).

2. *Hallar el campo de definición de la función*

$$y=\frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{\operatorname{sen} x-\cos x}}. \tag{1}$$

Esta función es indefinida para aquellos valores de x para los cuales $\operatorname{sen} x-\cos x=0$ (el denominador de la fracción debe ser distinto de cero), y además, para aquellas x, para las cuales $\operatorname{sen} x-\cos x<0$ (porque para estos valores de x, el denominador toma valores imaginarios). Por consiguiente, el recinto de definición de la función (1) consta solamente de aquellos valores de x para los cuales se cumple la desigualdad $\operatorname{sen} x-\cos x>0$; resolviendo esta desigualdad (véase el problema 6 del § 10, Parte I), hallamos que

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2}$$

Sin embargo, hay que notar que $\operatorname{cotg} x$ es indefinido para $x=n\pi$, donde n es un número entero cualquiera. Por eso, todos los valores de $x=n\pi$, $n=0, \pm 1, \ldots$, tampoco pertenecen al recinto de definición de la función considerada y deben ser excluidos del sistema de intervalos obtenido (2). De tal modo, en calidad de recinto de definición de la función (1) obtenemos definitivamente el siguiente conjunto de números reales:

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\pi+2k\pi, \quad \pi+2k\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3. *Hallar el recinto de definición de la función*

$$y=\sqrt{\cos(\cos x)}+\operatorname{arc\,sen}\frac{1+x^2}{2x}. \tag{3}$$

Examinemos por separado cada uno de los sumandos. Al recinto de definición de esta función pueden pertenecer sólo aquellos valores del argumento para los cuales el primer sumando toma los valores reales, es decir, aquellos valores de x para los cuales la expresión subradical $\cos(\cos x)$ no es negativa: $\cos(\cos x)\geqslant 0$. Es fácil convencerse (véase el problema 8 del § 8, Parte I) de que esta desigualdad es válida para todos los valores reales de x.

Vamos a referirnos al segundo sumando. Según la definición, la expresión $\operatorname{arcsen} a$ tiene sentido sólo para $|a|\leqslant 1$ (véase § 5, Parte II); es decir, al recinto de definición de la función (3) pertenecen solamente aquellos valores de x para los cuales $(1+x^2)/2x\,|\leqslant 1$. Sin embargo, se demuestra directamente (véase la fórmula (3) del § 8, Parte I) que para todos los valores reales no nulos de x es válida la desigualdad $|(1+x^2)/2x|\geqslant 1$, con la cual el signo de igualdad se obtiene sólo para $x=1$ y $x=-1$.

Por consiguiente, el recinto de definición de la función (3) consta de dos puntos: $x=-1$ y $x=1$.

De los ejemplos citados se desprende que el modo de hallar el campo de definición de las funciones obliga a "trabajar" a la vez diferentes partes de Algebra y Trigonometría. El dominio de todas estas partes hacen posible resolver fácilmente los problemas similares.

Es necesario conocer bien las definiciones y saber aclarar tales propiedades generales de las funciones como son la acotación, monotonía (sectores de crecimiento y de decrecimiento de las funciones), paridad e imparidad, periodicidad [1], saber hallar el campo de variación de la función, sus ceros, valores extremos, etc.

Vamos a subrayar que no siempre se requiere analizar las propiedades de las funciones aplicando el concepto de la derivada.

El estudiante debe tener una idea clara del sistema de coordenadas en un plano y saber dibujar las gráficas de las funciones elementales: $y=kx+b$ (la recta); $y=ax^2+bx+c$ (la parábola); $y=k/x$ (la hipérbola); $y=|x-a|$; $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$; $y=1/x^2$; $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$, $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq 1)$; $y=\text{sen } x$ (la sinusoide); $y=\cos x$, $y=\text{tg } x$; $y=\text{cotg } x$. Las gráficas de estas funciones deben representarse aproximadamente en cada caso concreto dándole una vista general y las particularidades características del comportamiento de la curva y no restablecerla cada vez calculando la tabla de valores y construyendo la curva por los puntos.

Es preciso saber ilustrar geométricamente las propiedades de la función en la gráfica. A veces con esto se comete un error. Contando de alguna propiedad (por ejemplo, de la imparidad del seno), un estudiante dibuja la gráfica correspondiente (la sinusoide) y dice: "Esta propiedad es propia del dibujo". Este razonamiento carece de fundamentos, porque, al utilizar propiamente las propiedades de la función, se puede con precisión, más o menos, dibujar su gráfica. Por lo tanto, todas las propiedades de las funciones han de ser demostradas rigurosamente de un modo analítico.

Con frecuencia se propone construir las gráficas de las funciones que representan en sí combinaciones de funciones elementales. En este caso se exige también expresar el comportamiento *aproximado* de la curva y en calidad de un medio auxiliar utilizar la construcción por los puntos. No se requieren investigaciones detalladas de las gráficas las que se realicen con utilización de una derivada.

Examinemos algunos problemas en los cuales la construcción de las gráficas se realiza por medio de una transferencia o una deformación determinada de las gráficas de las funciones elementales.

4. *Construir la gráfica de la función* $y=2-1/x$.

---

[1] Si se desea que el teorema de la función periódica sea válido, la definición de la función periódica se debe enunciar así: *llámase periódica a la función* $f(x)$ *si existe tal número* $T\neq 0$ *que para cualquier* x *del recinto de determinación de esta función los números* $x+T$ *y* $x-T$ *también entran en su campo de definición y para todos los valores de* x *del campo de definición* $f(x+T)=f(x)$. Esta definición de la función periódica es universalmente admitida en las Matemáticas.

El campo de definición de esta función son todos los valores reales de x, excepto $x = 0$. Si se examina la función $y_1 = -1/x$ (ésta es una hipérbola cuyas ramas se encuentran en el segundo y cuarto cuadrantes, entonces es evidente que para cada valor de $x = x_0$, la magnitud de la función y resulta en 2 unidades mayor que la magnitud de la función y_1 con el mismo valor x del argumento. Por eso, es suficiente desplazar la gráfica de la función y_1, como un cuerpo sólido, dos unidades hacia arriba y a lo largo del eje de ordenadas, lo que nos prestará la gráfica incógnita de la función y (fig. 29).

Es fácil ver que el método indicado permite *construir* inmediatamente *la gráfica de la función $y = a + f(x)$, donde a es un número dado si ya está construida la gráfica de la función $y_1 = f(x)$*: es suficiente desplazar, como un cuerpo sólido, la gráfica de la función y_1 en a unidades hacia arriba si $a > 0$, y en $|a|$ unidades hacia abajo si $a < 0$.

5. *Construir la gráfica de la función* $y = \frac{3}{x+4}$.

Es evidente que x puede tomar cualesquier valores, excepto -4. Comparemos esta función con la función $y_1 = 3/x$. Está claro que la magnitud de función y que satisface algún valor de $x = x_0$, coin-

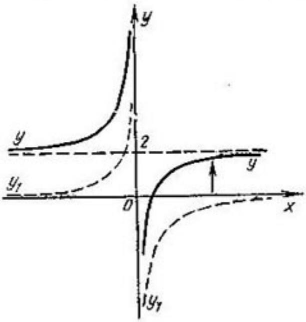


Fig. 29

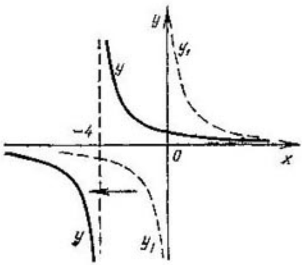


Fig. 30

cide con aquel valor de la función y_1, que corresponde al valor de su argumento que es igual a $x_0 + 4$. Por ejemplo, la función $y = 3/(x+4)$ para $x = 1$ toma el valor de $y = 3/5$, y la funcion $y_1 = 3/x$ toma el mismo valor cuando el valor de su argumento sea igual a $5 = x_0 + 4$. Por esta razón, si desplazamos la gráfica de la funcion y_1, como un cuerpo sólido, en 4 unidades a la izquierda y a lo largo del eje de abscisas, obtenemos entonces la gráfica de la función y que nos interesa (fig. 30).

No es difícil comprender que por el mismo método puede *construirse a gráfica de la función $y = f(x + b)$, donde b es un número dado,* *siempre y cuando ya esté trazada la gráfica de la función $y_1=f(x)$*; es suficiente desplazar la gráfica de la función y_1, como un cuerpo sólido, en b unidades a la izquierda, si $b>0$, o bien, en $|b|$ unidades a la derecha, si $b<0$.

6. *Construir la gráfica de la función* $y=\frac{x-+5}{3x-2}$.

Para construir esta gráfica transformaremos primeramente la fracción y representaremos nuestra función en la forma que sigue:

$$y=-\frac{1}{3}+\frac{13/9}{x-(2/3)}.$$

Si razonamos así mismo como en los problemas precedentes 4 y 5, nos convenceremos de que la gráfica de la función propuesta está representada por una hipérbola "corriente" $y=(13/9)/x$, desplazada, como un todo, en 2/3 a la derecha a lo largo del eje de abscisas y en 1/3 hacia abajo a lo largo del eje de ordenadas (¡Hágase por sí mismo el dibujo!).

Un método análogo facilita la construcción de las gráficas de cualquier función

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},$$

(la así llamada *función fraccionaria lineal*); en efecto, una simple transformación permite escribir esta función en la forma de[1]

$$y=\frac{a}{c}+\frac{\frac{ad-bc}{c^2}}{x+\frac{d}{c}},$$

después de que conviene valerse de los razonamientos expuestos por arriba, durante la resolución de los problemas 4 y 5.

Notemos que combinando los razonamientos expresados después de las resoluciones de los problemas 4 y 5, podemos del mismo modo, sin ningunas dificultades *representar la gráfica de la función $y=a+f(x+b)$, donde a y b son los números dados, si la gráfica de la función $y_1=f(x)$ ya queda construida.*

7. *Construir la gráfica de la función* $y=\log_4(-x)$.

A veces se oye la contesta que sigue: "No existe ninguna gráfica de esta función, ya que los números negativos no tienen logaritmos".

[1] En este caso se supone que $c\neq 0$ (en el caso contrario la función analizada es simplemente lineal) y que $ad-bc+0$. Si no se cumple la última condición, la función inicial tiene el aspecto $y=k$ para todos los valores de x admisibles, donde k es constante. Por ejemplo, la función $y=(2x+2)/(x+1)$ está en el recinto de su determinación, es decir, para $x\neq-1$, ésta puede ser escrita en forma de $y=2$. Por consiguiente, la gráfica de esta función es la recta $y=2$ sin el punto $(-1, 2)$ (ni mucho menos que toda la recta $y=2$, como lo consideran a menudo los estudiantes; compárela con el problema 11).

Esta contesta acusa una incomprension de aquel hecho elemental de que la expresión — x no siempre es un número negativo.

El campo de definición de la función considerada y es un conjunto $x<0$. De inmediato se comprende que la magnitud de esta función, para $x=-x_0$, $x_0>0$, coincide con la de la función $y_1=\log_4 x$, cuando su argumento tiene el valor de x_0. Por consiguiente, para obtener la gráfica de la función y es suficiente representar en forma especular la gráfica de la función y_1 respecto al eje de ordenadas (fig. 31).

Figúrense que este metodo presenta la posibilidad de *construir la gráfica de la función $y=f(-x)$, teniendo la gráfica de la función*

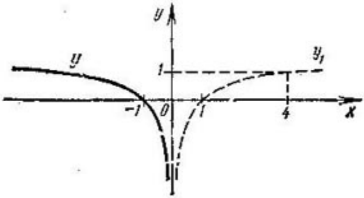


Fig. 31

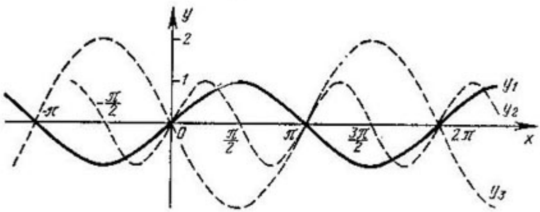


Fig. 32

$y_1=f(x)$: es suficiente representar de forma especular la gráfica de la función y_1 respecto al eje de ordenadas.

8. *Construir en un solo dibujo las gráficas de las funciones*

$$y_1=\text{sen } x,\ y_2=\text{sen } 2x,\ y_3=-2 \text{ sen } x.$$

Los estudiantes no siempre pueden trazar todas las tres curvas en un solo dibujo, reproduciendo correctamente su disposición recíproca (fig. 32); señalar rasgos característicos de cada una de estas sinusoides y explicar de qué modo éstas resultan una de la otra.

En particular es útil recordar que el mínimo período positivo de la función $y=A$ sen ωx, donde $\omega\neq 0$ y $A\neq 0$ son números dados [1], es igual a $2\pi/|\omega|$ (por ejemplo, el número $2\pi/\pi=2$ sirve de mínimo

[1] Es evidente que en el caso $\omega<0$, esta función puede presentarse como $y=-A$ sen $|\omega|x$.

período positivo para la función $y=-3$ sen πx, y el número $2\pi/|-1/3|=6\pi$, para la función $y=1/4$ sen $(-x/3)$) y su "amplitud" es igual a $|A|$ (así, la "amplitud" de la función $y=-1/2$ sen $3x$ es $1/2$).

Todo lo dicho se refiere, claro está, a las demás funciones trigonométricas.

Vale subrayar que dichos razonamientos hacen posible *construir la gráfica de la función* $y=Af(\omega x)$, *donde* $\omega\neq 0$ *y* $A\neq 0$ *son números dados, si se conoce la gráfica de la función* $y_1=f(x)$. Al principio, se debe realizar "una compresión", ω veces, de la gráfica de la función y_1 a lo largo del eje de abscisas, si $\omega>0$; y si $\omega<0$ es indispensable realizar "la compresión" de la gráfica de la función y_1 a lo largo del eje de abscisas, $|\omega|$ veces, y hacer el reflejo especular respecto del eje de ordenadas (véase la solución del problema 7). Luego, conviene "extender" A veces, a lo largo del eje de ordenadas, la curva obtenida si $A>0$; y si $A<0$, se hacen $|A|$ veces "la extensión" a lo largo del

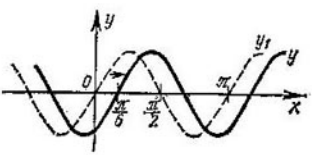


Fig. 33

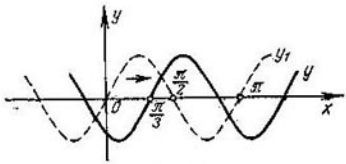


Fig. 34

eje de ordenadas y el reflejo especular respecto al eje de abscisas. En efecto, si $|\omega|<1$, "la compresión" a lo largo del eje de abscisas es realmente la extensión ; asimismo "la extensión" a lo largo del eje de ordenadas $|A|$ veces, para $|A|<1$, es la compresión.

Notemos especilamente un caso de importancia particular: si está dibujada la gráfica de la función $y_1=f(x)$, la gráfica de la función $y=-f(x)$ resulta de la primera por el reflejo especular respecto al eje de abscisas.

9. *Construir la gráfica de la función* $y=$ sen $[2x-(\pi/3)]$.

Si representamos la función propuesta en la forma $y=$ sen $2[x-(\pi/6)]$ podemos observar fácilmente que para cada valor de $x=x_0$, la magnitud de la función y coincide con la de la función $y_1=$ sen $2x$ que corresponde al valor de $x_0-(\pi/6)$ de su argumento. Por lo tanto, para construir la gráfica de la función y hay que construir la de la función y_1, desplazándola luego, como un cuerpo sólido, en $\pi/6$ a la derecha y a lo largo del eje de abscisas (fig. 33).

Un error muy difundido proviene del siguiente método de construcción de la gráfica de la función y examinada: se construye la gráfica de la función y_1, luego ésta, como un cuerpo sólido, se desplaza en $\pi/3$ a la derecha, a lo largo del eje de abscisas (fig. 34). No es difícil convencerse de que esta construcción no es correcta. Efectivamente, la gráfica construida de esta manera interseca el eje de abscisas en el punto $\pi/3$ (¡Porque la gráfica de la función y_1 corta este eje en el origen de las coordenadas desplazándose después a la derecha en $\pi/3$!). Mientras tanto, la magnitud de la función y examinada es, evidentemente, diferente de cero para el valor del argumento $x=\pi/3$.

El método señalado para el ejemplo en cuestión, permite construir las gráficas de cualquier función de la forma $y=A\ \mathrm{sen}(\omega x+\varphi)$, $y=A\cos(\omega x+\varphi)$, $y=A\ \mathrm{tg}(\omega x+\varphi)$, etc., así como también $y=a\times\times\ \mathrm{sen}\ \omega x+b\cos\omega x$. Este método lleva un carácter general permitiendo *obtener la gráfica de la función $y=f(\omega x+\varphi)$, donde $\omega\neq 0$ y φ son*

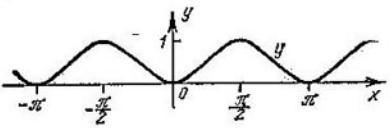


Fig. 35

números dados, si la gráfica de la función $y_1=f(x)$ ya está dibujada: es suficiente representar la gráfica de la función $y_2=f(\omega x)$ (ésta puede obtenerse por el método señalado para la solución del problema 8), desplazándola luego, como un cuerpo sólido, en $|\varphi/\omega|$ a la derecha, a lo largo del eje de abscisas, si $\varphi/\omega<0$, o bien en φ/ω a la izquierda, si $\varphi/\omega>0$ (véase el problema 5).

A veces es muy útil transformar primeramente la fórmula que determina la dependencia funcional en otra forma, después de que se hace posible dibujar con facilidad la gráfica. En particular, es siempre deseable representar la dependencia funcional compleja que se examina como una combinación de funciones elementales, cuya gráfica se obtiene por los métodos conocidos, (por ejemplo, así como se construyó la gráfica en el problema 6).

10. *Construir la gráfica de la función $y=\mathrm{sen}^2 x$.*

Ya que esta función puede escribirse en forma de $y=1/2-$ $-1/2\cos 2x$, la obtención de la gráfica de la función y procede según los métodos ya conocidos: es necesario desplazar en 1/2 de unidad hacia arriba la cosinusoide $y_1=-1/2\cos 2x$, que se construye por el método expuesto para la resolución del problema 8 (fig. 35).

11. *Construir la gráfica de la función*

$$y=x^{\frac{1}{\lg x}}. \qquad (4)$$

La aplicación de las fórmulas conocidas para los logaritmos muestra que $x^{1/\lg x}=x^{\log_x 10}=10$. Muchos, de ahí sacan inmediatamente la conclusión de que la recta $y=10$ es la gráfica de la función (4).

Sin embargo, esta conclusión no es correcta: es necesario tener presente el campo de definición de la función que se examina y las condiciones con las cuales son válidas las transformaciones realizadas.

El campo de definición de la función (4) consta de aquellos números reales que satisfacen las condiciones: $x>0$, $x\neq 1$. En estas condiciones la transformación realizada es justa. Por lo tanto, la gráfica de la función (4) ésta representa por la semirrecta $y=10$, $x>0$, de la cual está excluido el punto (1, 10) (fig. 36; la flecha adyacente a cierto punto significa que éste no pertenece a la gráfica).

12. *Construir la gráfica de la función*

$$y=\log_{1/2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}. \tag{5}$$

Antes que nada, realicemos una transformación idéntica del segundo sumando (véase el § 4, Parte I):

$$\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}=\log_2\sqrt{(2x-1)^2}=\log_2|2x-1|=1+\log_2\left|x-\frac{1}{2}\right|.$$

Ahora está claro que el recinto de determinación de la función y es un conjunto $x>1/2$ (porque el segundo sumando de la fórmula que determina esta función tiene sentido para todos los valores de $x\neq 1/2$,

Fig. 36

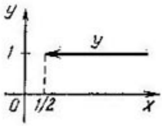


Fig. 37

y el primero sólo lo tiene para $x>1/2$). No obstante, para $x>1/2$ es válida la igualdad $\log_{1/2}(x-1/2)=-\log_2(x-1/2)$ y, por consiguiente, en su recinto de determinación (o sea, para $x>1/2$) la función (5) puede ser escrita en forma de $y=1$.

De tal modo, la gráfica de la función y está representada por un rayo $y=1$, $x>1/2$ (fig. 37; la flecha cerca del punto (1/2, 1) significa que éste no pertenece a la gráfica de la función (5)).

Los estudiantes tienen ciertas dificultades en la construcción de gráficas de aquellas dependencias funcionales cuya expresión analítica contiene un signo del valor absoluto. Con unos ejemplos demostremos cómo se construyen las gráficas de tales funciones.

13. *Construir la gráfica de la función* $y=|2-2^x|$.

Notemos que la función propuesta puede ser escrita, evidentemente, en la forma de $y=|2^x-2|$.

Examinemos la función auxiliar $y_1=2^x-2$; su gráfica se construye sin dificultades (por el método expuesto para la resolución del problema 4). ¿Y cómo se diferencia ésta de la gráfica de la función y?

Para aclarar esto recordemos la definición (véase la fórmula (2) del § 4, Parte I) se deduce que

$$y=\begin{cases} 2^x-2 \text{ para tales } x, \text{ para las cuales } 2^x-2\geqslant 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{o sea, para } x\geqslant 1; \\ -(2^x-2) \text{ para tales } x, \text{ para las cuales } 2^x-2<0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{o sea, para } x<1. \end{cases}$$

Ahora está claro que la gráfica de la función y para $x\geqslant 1$ coincide con la gráfica de la función y_1, y para $x<1$ aquella representa en sí una curva simétrica a la gráfica de la función y_1 respecto al eje de abscisas (fig. 38).

Asimismo, no se puede *obtener la gráfica de la función* $y=|f(x)|$, *si la gráfica de la función* $y_1=f(x)$ *ya queda dibujada*: es suficiente sustituir todos los segmentos de la gráfica de la función y_1, que se encuentran por debajo del eje de abscisas, por los simétricos respecto de este eje (para hallar tales segmentos hay que resolver la desigualdad $f(x)<0$).

14. *Construir la gráfica de la función* $y=||x+1|-2|$.

Aquí no hay que despejar los signos del módulo sino realizar una construcción mediante los métodos expuestos para la resolución de los problemas 6 y 13. En realidad, tomamos la gráfica de la función $y_1=|x|$ (fig. 39) y la desplazaremos, como un cuerpo sólido, en una

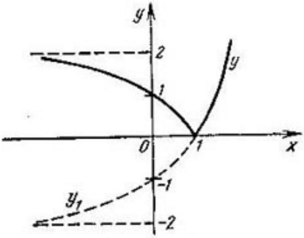


Fig. 38

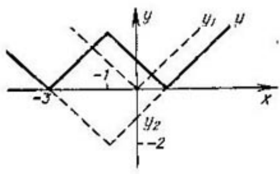


Fig. 39

unidad a la izquierda, a lo largo del eje de abscisas, y en dos unidades hacia abajo, a lo largo del eje de ordenadas. Como resultado, se obtiene la gráfica de la función $y_2=|x+1|-2$. En lo ulterior, sustituimos el segmento de esta gráfica que se encuentra por debajo del eje de abscisas y que corresponde al segmento $-3\leqslant x\leqslant 1$, por uno simétrico respecto al eje x: la línea quebrada obtenida es precisamente la gráfica de la función y.

El método general para la construcción de una función, cuya expresión analítica tiene el signo del módulo, consiste en escribir esta expresión para la dependencia funcional despejando el signo del módulo (véase el § 4, Parte I). Con esto, como regla, la dependencia funcional considerada se describe por diferentes fórmulas en distintos segmentos de la variación del argumento. Es natural que en cada uno de estos segmentos, la construcción de una gráfica hay que realizarla mediante una fórmula adecuada.

15. *Construir la gráfica de la función* $y=x^2-2|x|-3$.

Para que podamos eliminar el signo del módulo hay que examinar por separado dos casos: $x \geqslant 0$ y $x<0$ (véase el problema 1 del § 4, Parte I). Si $x \geqslant 0$, entonces $y=x^2-2x-3$. Es fácil construir esta

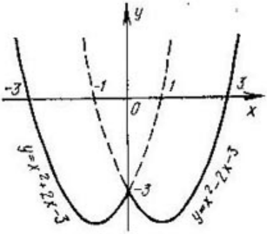


Fig. 40

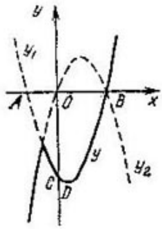


Fig. 41

parábola tomando luego sólo aquella parte suya que corresponda a los valores no negativos de x. Y cuando $x<0$, entonces $y=x^2+2x-3$. Esta parábola debe construirse también y tomar solamente aquella parte suya que corresponda a los valores negativos de x. Los dos segmentos tomados de las parábolas en conjunto forman precisamente lo que nos interesa (fig. 40).

16. *Construir la gráfica de la función*

$$y=(|x+1|+1)(x-3). \qquad (6)$$

Según la definición del valor absoluto podemos representar esta función en la forma:

$$y=\begin{cases} [(x+1)+1](x-3)=(x+2)(x-3), & \text{si } x \geqslant -1; \\ [-(x+1)+1](x-3)=-x(x-3), & \text{si } x<-1. \end{cases}$$

Ahora nos queda solamente por construir su propia curva para cada uno de los segmentos señalados ($x \geqslant -1$ y $x<-1$), valiéndonos de la fórmula correspondiente; el conjunto de estas curvas ofrecerá la gráfica de la función (6).

Consideremos al principio la función $y_1=(x+2)(x-3)$. Los estudiantes, por lo general, abren los paréntesis y realizan una eliminación, bastante larga, del cuadrado exacto. Mientras tanto, no vale la pena abrir los paréntesis para construir la gráfica de la función y_1: de inmediato es evidente que esto es una parábola, una gráfica del trinomio cuadrático; ésta interseca el eje de abscisas en los puntos $A=(-2,\ 0)$ y $B=(3,\ 0)$ (porque -2 y 3 son las raíces de este trinomio) y sus ramas están dirigidas hacia arriba (ya que el coeficiente mayor es positivo). En la fórmula para la función y_1 sustituimos la x por 0, hallamos las coordenadas del punto de intersección C de esta parábola con el eje de ordenadas: $C=(0,\ -6)$. No es difícil hallar también las coordenadas del vértice D de esta parábola. Puesto que la parábola es simétrica respecto a la recta vertical que pasa por su vértice, su eje de simetría divide en dos partes iguales el segmento AB. Por eso, es claro que la abscisa del vértice es igual a $1/2$; la ordenada se calcula directamente: $D=(1/2,\ -25/4)$.

Al construir la parábola que representa la gráfica de la función y_1, debemos separar aquel segmento suyo que corresponde a los valores de $x \geqslant -1$ del argumento (fig. 41).

En forma análoga se construye la gráfica de la función $y_2 = -x(x-3)$; es necesario tomar sólo aquella parte de esta parábola

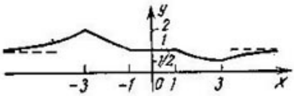


Fig. 42

que corresponde a los valores del argumento $x<-1$. En la figura 41 la gráfica de la función (6) está dibujada con una línea gruesa.

17. *Construir la gráfica de la función*

$$y=\frac{|x-3|+|x+1|}{|x+3|+|x-1|}. \tag{7}$$

En primer lugar hallemos aquellos valores de x para los cuales cada una de las expresiones que están por debajo del signo del módulo, se convierte en cero: estas son $-3,\ -1,\ 1,\ 3$.

Al examinar la función (7) en cada uno de los cinco intervalos, en los cuales estos valores dividen el eje numérico, puede obtenerse la forma de anotación siguiente:

$$y=\begin{cases} 1-\dfrac{2}{x+1}, & \text{si} \quad x<-3, \\ -\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}, & \text{si} \quad -3\leqslant x<-1, \\ 1, & \text{si} \quad -1\leqslant x<1, \\ \dfrac{2}{x+1}, & \text{si} \quad 1\leqslant x<3, \\ 1-\dfrac{2}{x+1}, & \text{si} \quad 3\leqslant x. \end{cases}$$

La construcción posterior procede según los métodos ya conocidos (fig. 42).

Notemos que de haber crecido infinitamente la x, la gráfica de la función (7) viene aproximándose infinitamente a una recta $y=1$, quedándose por debajo de ésta; si la x va decreciendo infinitamente, la gráfica se aproxima infinitamente a la misma recta, quedándose todo el tiempo por encima de ésta.

18. *Construir la gráfica de la función*

$$y = |\operatorname{sen} x| + |\cos x|.$$

Para la construcción de la gráfica de una función periódica ocurre con frecuencia que es útil el razonamiento siguiente: todos los valores de esta función se repiten cada período. Por lo tanto, si suponemos que la función es periódica con el período T, entonces es suficiente construir

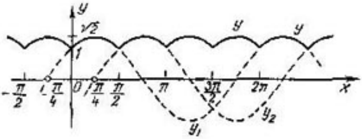


Fig. 43

la gráfica en un segmento de la longitud T, por ejemplo, para $0 \leqslant x \leqslant T$; en los segmentos $T \leqslant x \leqslant 2T$, $2T \leqslant x \leqslant 3T$, $-T \leqslant x \leqslant 0$, etc., la gráfica tiene una forma exactamente igual.

Claro está que el número 2π es el período de la función y a examinar, por esa razón puede limitarse al examen del segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Si dividimos este segmento en cuatro partes, en cada una de las cuales sen x y cos x conservan su signo, obtendremos:

$$y = \begin{cases} \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \\ -\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), & \text{si } \pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}, \\ -\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & \text{si } \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Ahora vamos a construir las gráficas $y_1 = \sqrt{2}\operatorname{sen}[x+(\pi/4)]$ e $y_2 = \sqrt{2}\operatorname{sen}[x-(\pi/4)]$; después, en el segmento de 0 a $\pi/2$ tomamos un trozo de la curva y_1, y en el segmento de $\pi/2$ a π, un trozo de la curva y_2, mientras que en los segmentos desde π hasta $3\pi/2$ y de $3\pi/2$ a 2π tomamos las curvas simétricas a los trozos respectivos de las curvas y_1 y y_2, con relación al eje de abscisas. Posteriormente a esto, valiéndonos de la periodicidad, prolongamos la curva obtenida fuera del segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (señalada con línea gruesa en la fig. 43).

De la gráfica construida se deduce que $\pi/2$ es también el período de la función dada, así que hemos sido muy prudentes al examinar el segmento desde 0 hasta 2π. Si de inmediato nos hubiéramos dado cuenta de que $\pi/2$ era el período de esta función, lo que no es difícil demostrar,

$$\left|\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|\operatorname{sen} x|,$$

la gráfica habría sido construida mucho más rápidamente. Este ejemplo muestra que el análisis minucioso y previo de las propiedades de la función propuesta con frecuencia simplifica la construcción de su gráfica.

19. *Construir la gráfica de la función*

$$y=\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}+\frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}. \tag{8}$$

A primera vista, esta función puede parecer muy complicada. Sin embargo, al realizar las transformaciones de la fórmula que presenta la función a examinar, llegaremos a otra forma de anotación más simple de la función (8), que permitirá dibujar sin mucho esfuerzo la gráfica deseada.

Notemos ante todo que el recinto de determinación de la función (8) está representado por todo su eje numérico, excepto los puntos

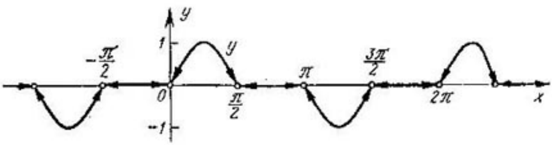


Fig. 44

$x=n\pi/2$, donde n es número entero cualquiera (en cada uno de estos puntos, ya sea $\operatorname{tg} x$ ó $\operatorname{cotg} x$, pierden su sentido).

Ya que para $x\neq n\pi/2$ son válidas las igualdades

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{|\cos x|}, \quad \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}=\frac{1}{|\operatorname{sen} x|}$$

(véase el § 1, Parte II), entonces está claro que la función (8), en su recinto de determinación, puede ser escrita en la forma:

$$y=\operatorname{sen} x\cdot|\cos x|+\cos x\cdot|\operatorname{sen} x|.$$

Esta función es periódica con el período 2π. La gráfica requerida puede ser construida como se ha hecho durante la resolución del problema 18. Ella está representada en la fig. 44. Notemos una vez más que la función (8) no está determinada en los puntos $x=n\pi/2$, $n=0$, ±1, ±2, ... ; esta indeterminación está señalada en el dibujo con flechas en los extremos de los segmentos de la curva, que son adyacentes a estos puntos.

Ahora vamos a considerar algunos ejemplos de construcción de gráficas complejas en los que es imposible limitarse a los métodos elementales examinados más arriba. Cada uno de estos ejemplos tiene sus propias particularidades que deben tomarse en consideración durante la construcción de la gráfica. En el transcurso de la resolución de ejemplos análogos a los que se citan a continuación, uno ha de basarse, como regla, en los razonamientos originales que no tienen nada de parecido con aquéllos; es necesario aprender a hallar los puntos débiles, por decirlo así, de cada problema, y al aferrarse a éstos se logra la construcción.

20. *Construir la gráfica de la función* $y=\frac{x^2+1}{x}$.

Al representar la función propuesta en la forma $y=x+(1/x)$ apliquemos un método llamado *adición de gráficas*. Justamente, la gráfica requerida va a ser construida por medio de "la adición" de dos gráficas auxiliales $y_1=x$ e $y_2=1/x$. En otras palabras, para cada valor

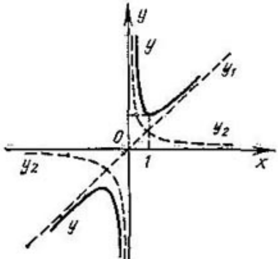


Fig. 45

admisible del argumento (o sea, para cada $x\neq 0$), la ordenada y correspondiente a éste, se construye como la suma (algebraica) de magnitudes de las ordenadas y_1 e y_2 correspondientes al mismo valor del argumento (fig. 45).

Es fácil comprender qué aspecto tendrá la gráfica de la función sobre el semieje positivo de abscisas: para cada valor de $x>0$ hay que aumentar la ordenada respectiva de la recta $y_1=x$ en una magnitud de la ordenada de la hipérbola $y_2=1/x$ que corresponde al mismo valor de x. Es evidente que cuando x es positivo y tiende a cero, la expresión $x+(1/x)$ tiende a $+\infty$ (crece infinitamente), y cuando x tiende a $+\infty$ la gráfica incógnita viene aproximándose infinitamente a la bisectriz $y_1=x$, porque "el complemento" $1/x$ va siendo cada vez más pequeño. En el caso en cuestión es fácil determinar el valor mínimo de la función y (recordemos que hasta ahora examinamos solamente los valores positivos de x): en efecto, para $x>0$ es justa la desigualdad $x+(1/x)\geqslant 2$ (véase § 8, Parte I), o sea el valor mínimo es igual a 2, que se logra cuando $x=1$ [1].

De modo análogo se construye la gráfica en la parte negativa del eje de abscisas. Además, puede aprovecharse del hecho de que la función y es impar y, por consiguiente, su gráfica es simétrica respecto al origen de las coordenadas.

21. *Construir la gráfica de la función* $y = x \operatorname{sen} x$.

Aprovechemos el hecho de que la fórmula, que predetermina esta función, representa en sí un producto y apliquemos un método llamado *multiplicación de gráficas*. Precisamente, la gráfica necesaria va a ser

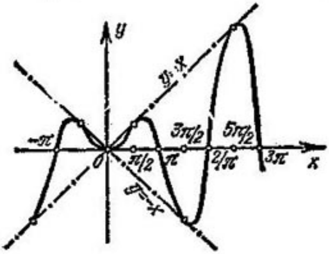


Fig. 46

construida por medio de "la multiplicación" de dos gráficas auxiliares $y_1 = x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$. Es decir, para cada valor del argumento la ordenada y que corresponde a éste, se construye como un producto de magnitudes de las ordenadas y_1 e y_2 que corresponden al mismo valor del argumento (fig. 46).

Al principio vamos a construir la gráfica de la función y para los valores no negativos del argumento. Multiplicando para cada valor de x, la magnitud de la ordenada respectiva de la recta $y_1 = x$ por la de la ordenada de la sinusoide $y_2 = \operatorname{sen} x$, se puede construir una curva suave que reproduce aproximadamente el comportamiento de la gráfica de la función y sobre el semieje no negativo de abscisas. Precisemos en algo el aspecto de esta curva recurriendo a la ayuda de unos puntos característicos. Ante todo, es claro que $y=0$ para todos los valores de x, cuando $\operatorname{sen} x = 0$; por esta causa, la gráfica de la función y cruza el semieje positivo de abscisas en los puntos $x = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Seguidamente, para $x>0$ es válida la desigualdad evidente $-x \leqslant x \operatorname{sen} x \leqslant x$, que significa que para los valores positivos del argumento la gráfica de la función y se encuentra ni por encima de la recta $y = x$ ni por debajo de la recta $y = -x$. En este caso, los puntos de la gráfica de la fun-

[1] Algo más difícil, aunque completamente accesible a los estudiantes, es la demostración de que $x+(1/x)$ decrece monótonamente cuando $0 < x \leqslant 1$ y crece monótonamente cuando $x \geqslant 1$.

ción y, que corresponden a tales valores de $x>0$ para los cuales $\operatorname{sen} x = 1$, es decir, a los valores de $x=(\pi/2)+2k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$, se hallan en la recta $y=x$, los puntos correspondientes a aquellos valores de $x>0$ para los cuales $\operatorname{sen} x = -1$, es decir, a los valores de $x=(3\pi/2+2k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$, se encuentran sobre la recta $y=-x$.

El trazado de la gráfica de la función y en el semieje negativo de abscisas, es muy simple: por cuanto la función y es par, su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas.

22. *Construir la gráfica de la función* $y=2^{1/x}$.

Aquí nos tropezamos con la necesidad de construir la gráfica de "una función de otra función"; tales *funciones complejas* se encuentran con bastante frecuencia. Para construir sus gráficas se ha de conocer bien las propiedades de las funciones elementales fundamentales y tener una idea clara de las propiedades de combinaciones de las funciones que se deducen de las primeras.

El recinto de determinación de la función a considerar y abarca todos los números reales, excepto $x=0$. Ya que para $x>0$ el exponente $1/x>0$, entonces, según la propiedad de la función exponencial, $y>1$ para todos los valores positivos del argumento. Notemos que $y=2$

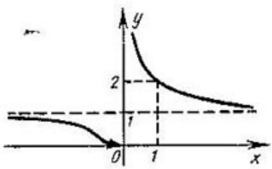


Fig. 47

cuando $x=1$. Si x va a crecer infinitamente, la expresión $1/x$ viene decreciendo monótonamente hacia cero, siendo positiva (véase las propiedades de la hipérbola), por lo cual $2^{1/x}$ decrece monótonamente hacia 1, siendo sin embargo, mayor que 1 (según la propiedad de la función exponencial). Cuando x es positiva y tiende a cero, el exponente $1/x$ va creciendo infinitamente y, por consiguiente, $2^{1/x}$ también crece infinitamente. Esta circunstancia permite dibujar la gráfica aproximada de la función y para $x>0$.

Se puede demostrar fácilmente que en el semieje negativo de abscisas es justa la desigualdad $0<y<1$. Con ayuda de los razonamientos analógicos se construye también la gráfica de la función y cuando $x<0$ (fig. 47; la flecha en la curva significa que el origen de las coordenadas no pertenece a la gráfica).

23. *Construir la gráfica de la función*

$$y=1-2^{1+\operatorname{sen}(x+1)}.$$

Si representamos esta función en la forma

$$y = 1 + (-2) \cdot 2^{\operatorname{sen}(x+1)}, \tag{9}$$

es evidente entonces que es fácil obtener, teniendo la gráfica de la función $y_1 = 2^{\operatorname{sen} x}$, la gráfica de la función y que nos interesa, recurriendo a los métodos considerados durante la resolución de los problemas 4, 5, 8.

Por eso, al principio nos pondremos a examinar la gráfica de la función y_1. Esta función es periódica con el período 2π; por consiguiente, es suficiente dibujar su gráfica en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (véase el problema 18).

Para $x = 0$ la función y_1 toma el valor de 1. Si x va aumentando desde 0 hasta $\pi/2$, entonces sen x viene creciendo monótonamente desde 0 hasta 1, y $2^{\operatorname{sen} x}$ crece monótonamente desde 1 hasta 2. Si luego x va creciendo de $\pi/2$ a $3\pi/2$, entonces sen x decrece monótonamente desde 1 hasta -1, y $2^{\operatorname{sen} x}$ decrece monótonamente desde 2 hasta 1/2;

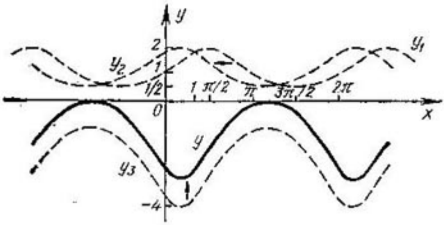


Fig. 48

en particular, para $x = \pi$ la función y_1 toma el valor de 1. Por fin, si x crece desde $3\pi/2$ hasta 2π, entonces sen x crece monótonamente desde -1 hasta 0, y $2^{\operatorname{sen} x}$ crece monótonamente de 1/2 a 1; para $x = 2\pi$ el valor de la función y_1 es igual a 1. Todas estas afirmaciones respecto al comportamiento de la función y_1 se deducen de las propiedades del seno y de la función exponencial (al mismo lector se le ofrece fundamentar rigurosamente estas afirmaciones). Estas permiten esclarecer el comportamiento aproximado de la gráfica de la función y_1 para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; conviene prolongar periódicamente la curva obtenida de este segmento a todo el eje de abscisas (en la fig. 48, la gráfica de la función y_1 está representada por las líneas punteadas).

Ahora todo está preparado para construir la gráfica de la función y según la fórmula (9). Ante todo, desplazamos la gráfica de la función y_1, como un cuerpo sólido, en una unidad a la izquierda, a lo largo del eje de abscisas; resulta una curva que es la gráfica de la función $y_2 = 2^{\operatorname{sen}(x+1)}$ (véase el problema 5). Esta también es una función periódica (con el período 2π); su valor máximo, igual a 2, alcanza en los puntos $x^* = (\pi/2) - 1 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y el valor mínimo, igual a 1/2, en los puntos $x^{**} = -(\pi/2) - 1 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (fig. 48). Al "extender" 2 veces la curva y_2 a lo largo del eje de ordenadas y al realizar su representación especular respecto al eje de abscisas, construiremos la gráfica de la función $y_3 = (-2) \cdot 2^{\text{sen}\,(x+1)}$ (véase el problema 8). Notemos que el valor máximo de esta función periódica es igual a -1, y su valor mínimo, a -4 (fig. 48). Por fin, la gráfica de la función y se obtendrá si la curva y_3, como un cuerpo sólido, se eleva en una unidad hacia arriba, a lo largo del eje de ordenadas (véase el problema 4).

La gráfica (la línea gruesa en la fig. 48) reproduce los rasgos principales del comportamiento de la función y. Esta es una función periódica (con el período 2π) que se convierte en cero en los puntos $x^{**} = -(\pi/2) - 1 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (el cero es su valor máximo) y toma el valor mínimo que es igual a -3, en los puntos $x^* = (\pi/2) - 1 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ En los intervalos entre los valores extremos la función y varía monótonamente. Para $x = 0$ el valor de la función y es igual a $1 - 2^{1+\text{sen}\,1}$ (¡Notemos que sen 1 es el seno del ángulo de un radián!).

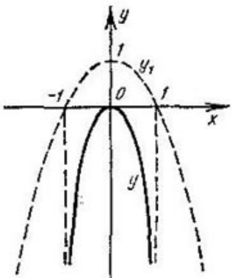


Fig. 49

Claro que la fig. 48 da una representación aproximada, a grandes rasgos, de la gráfica de la función y y los estudiantes no deben dar más detalles a ésta.

24. *Construir la gráfica de la función* $y = \log_2 (1 - x^2)$.

Primeramente construyamos la gráfica de una función auxiliar $y_1 = 1 - x^2$; en la fig. 49 esta parábola está representada por la línea punteada. Luego hay que construir la gráfica del logaritmo de esta función.

Para $x = 0$ tenemos $y = \log_2 1 = 0$. Cuando x va aumentando desde 0 hasta 1, entonces como lo muestra la gráfica de la función auxiliar, $1 - x^2$ decrece desde 1 hasta 0, a causa de que $\log_2(1 - x^2)$ viene decreciendo de 0 a $-\infty$. Análogamente, si x disminuye de 0 a -1, entonces $1 - x^2$ decrece de 1 a 0, y $\log_2 (1 - x^2)$ va decreciendo desde 0 hasta $-\infty$. Para los demás valores de x, es decir, para $x \leqslant -1$ y $x \geqslant 1$, tenemos que $1 - x^2 \leqslant 0$; por eso, $\log_2 (1 - x^2)$ no tiene sentido. La gráfica de la función y esta representada por la línea gruesa en la fig. 49.

Notemos que para la construcción de esta gráfica, al principio no hallamos el campo de definición de la función considerada, y éste resultó automáticamente (por sí mismo). Sin embargo, ocurre a menudo que se hace muy útil hallar previamente el campo de definición.

25. *Construir la gráfica de la función* $y = \log_{\text{sen}\,x} 1/2$.

El campo de definición de esta función representa un conjunto de todos aquellos valores de x para los cuales sen $x>0$, sen $x\neq 1$ simultáneamente, es decir,

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < (2k+1)\pi$$

para $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Es evidente que la función y es periódica con el período 2π. Por eso, durante la construcción de su gráfica es suficiente limitarse al segmento de la longitud 2π, por ejemplo, al segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Pero, no todo el segmento entra en su recinto de determinación: la función tiene sentido (dentro de este segmento) sólo cuando $0<x<\pi/2$, $\pi/2<x<\pi$. Precisamente por eso, en estos intervalos tenemos que construir en primer lugar su gráfica (al ampliarla simplemente a todo el campo de definición según la razón de periodicidad).

Notemos que la función y en su campo de definición puede escribirse en forma de

$$y = \frac{1}{\log_{1/2} \operatorname{sen} x}, \tag{10}$$

en primer lugar, construimos la gráfica de la función auxiliar $y_1 = \log_{1/2} \operatorname{sen} x$; ésta nos interesará sólo cuando $0<x<\pi$. Tomando un segmento de la sinusoide $y_2 = \operatorname{sen} x$, el que corresponde al segmento

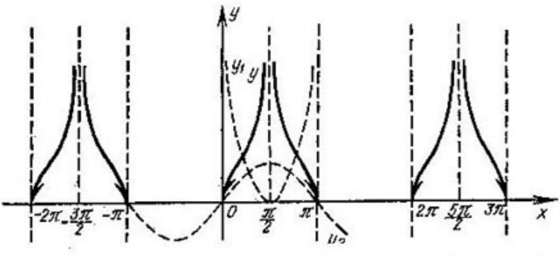


Fig. 50

de variación del argumento de 0 a π, se puede, por el mismo método que ha sido aplicado en el problema anterior (¡no olvidarse que la base del logaritmo es $1/2<1$!), obtener la gráfica de la función compleja y_1 (fig. 50; las gráficas auxiliares y_1 e y_2 están representadas con las líneas punteadas).

Consideremos ahora el intervalo $0<x<\pi/2$. Ya que para cualquier valor de x de este intervalo la magnitud de la función y que le corresponde es *contraria* con respecto a la magnitud de la función y_1 correspondiente al mismo valor del argumento (véase (10)), entonces es fácil imaginarse el aspecto aproximado de la gráfica de la función y para $0<x<\pi/2$ (la línea gruesa en la fig. 50; la flecha en la curva, cerca del origen de las coordenadas, señala que este punto no pertenece a la gráfica).

No es difícil demostrar, utilizando las propiedades conocidas de las funciones elementales que la función y crece monótonamente cuando x varía desde 0 hasta $\pi/2$: si x crece desde 0 hasta $\pi/2$, entonces sen x crece monótonamente de 0 a 1, mientras que $\log_{1/2}$ sen x decrece monótonamente desde $+\infty$ hasta 0 y, por consiguiente (véase (10)), la magnitud de la función y aumenta desde 0 hasta $+\infty$.

Vamos a subrayar que si x viene acercándose a $\pi/2$, quedándose menor que este valor, entonces la magnitud de la función y_1 tiende a cero permaneciendo positiva; por esta razón la magnitud de la función y va creciendo infinitamente; y cuando x se aproxima a cero permaneciendo positiva, la magnitud de la función y_1 va creciendo infinitamente, a causa de que la magnitud de la funcion y tiende a cero (aunque no toma el mismo valor de cero).

De un modo análogo se construye la gráfica de la función considerada cuando $\pi/2<x<\pi$.

Préstese la atención a lo siguiente: tales razonamientos, más o menos parecidos a los que tenían lugar durante la construcción de la gráfica de la función y, según la gráfica ya obtenida de la función auxiliar

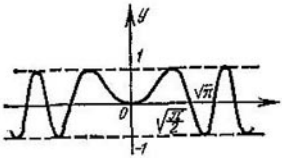


Fig. 51

y_1 (aplicando la fórmula (10)), permiten *construir la gráfica de la función* $y = 1/f(x)$, *si la gráfica de la función* $y_1 = f(x)$ *es conocida.*

Al examinar más detalladamente la fig. 50 se puede notar que no hemos obtenido una descripción completa del comportamiento de la gráfica de la función dada en el curso de la resolución expuesta por arriba (por ejemplo, ni siquiera se discutía el hecho de que esta gráfica resultó encorvada de tal modo como está representada en el dibujo). No obstante, como lo hemos visto, no es difícil dibujar *aproximadamente* el comportamiento de la gráfica.

Además, la forma de la curva, se habría podido precisar en algo de haber calculado complementariamente la tabla de valores de la función para los valores "cómodos" del argumento y haber tomado los puntos obtenidos durante el trazado de la gráfica. Pero, lo importante es aprender a dibujar una curva "aproximada" que ofrezca la forma general y las propiedades características de la gráfica.

26. *Construir la gráfica de la función* $y =$ sen x^2.

Antes que nada subrayemos que la anotación sen x^2 no hay que confundirla con $\text{sen}^2 x$: si la primera expresión presenta sen (x^2), la segunda, $(\text{sen}\, x)^2$.

Examinemos primeramente los valores no negativos del argumento y dividamos el semieje $x \geqslant 0$ en segmentos, donde la función y crece o decrece. Si x^2 aumenta desde 0 hasta $\pi/2$ (o sea, x crece desde 0 hasta $\sqrt{\pi/2}$), entonces sen x^2 crece desde 0 hasta 1; si x^2 crece desde $\pi/2$ hasta $3\pi/2$ (es decir, aumenta desde $\sqrt{\pi/2}$ hasta $\sqrt{3\pi/2}$), entonces sen x^2 decrece desde 1 hasta -1; si x^2 crece desde $3\pi/2$ hasta $5\pi/2$ (o sea, x crece de $\sqrt{3\pi/2}$ a $\sqrt{5\pi/2}$), entonces sen x^2 crece desde -1 hasta 1, etc. Por eso la gráfica de la función y tiene un carácter "ondulatorio" con "la amplitud" 1 (fig. 51)[1]. Es fácil obtener abscisas de los puntos de intersección de esta gráfica con el eje x: con este fin es suficiente resolver la ecuación sen $x^2 = 0$; está claro que las raíces no negativas de esa ecuación son los números $x = \sqrt{k\pi}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Inmediatamente se construye la gráfica sobre el semieje negativo de las abscisas, por cuanto la función y examinada es par.

En resumen, examinemos algunos ejemplos algo distintos de los considerados anteriormente, aunque relacionados también con las construcciones en el plano, con el sistema de coordenadas dado.

27. *Hallar en el plano un conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y verifican el sistema de desigualdades*

$$\begin{cases} 5x + 3y \geqslant 0, \\ y - 2x < 2. \end{cases} \qquad (11)$$

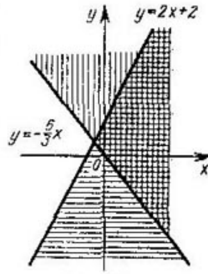


Fig. 52

De la primera desigualdad tenemos que $y \geqslant -5x/3$. Vamos a construir, en primer término, la gráfica de la función $y = -5x/3$ (fig. 52). En este caso, los puntos cuyas coordenadas satisfacen *la igualdad* $y = -5x/3$ se encuentran en la recta construida, y los puntos cuya coordenada *y es mayor que* $-5x/3$ han de hallarse por arriba de esta recta. De tal modo, el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la primera desigualdad (11) será el semiplano ubicado *por arriba* de la recta $y = -5x/3$ (comprendida también esta recta; en la fig. 52 este campo está marcado por sombreado vertical).

Asimismo, de la segunda desigualdad (11) tenemos $y < 2x + 2$, por lo cual, el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la segunda desigualdad (11) será el semiplano que se halla por debajo de la recta $y = 2x + 2$ (no comprendida la misma recta; en la fig. 52 este campo está marcado por sombreado horizontal).

Por consiguiente, los puntos del plano, cuyas coordenadas x e y satisfacen el sistema de desigualdades (11), se encuentran en la parte común de los dos semiplanos obtenidos que representa un campo angular (en la fig. 52 el conjunto buscado está señalado por sombreado

[1] Es preciso subrayar que la función $y =$ sen x^2 no es periódica.

doble); en este caso uno de los rayos o un segmento de la recta $y = -5x/3$, que acotan este campo, está comprendido en el conjunto incógnito, y el otro, que es un segmento de la recta $y = 2x + 2$, no está comprendido (el vértice A del campo angular que es un punto de intersección de las rectas $y = -5x/3$ e $y = 2x + 2$, tampoco pertenece al conjunto incógnito).

28. *Determinar el conjunto de puntos de un plano cuyas coordenadas x e y satisfacen la expresión*

$$|x+y| = |y| - x. \qquad (12)$$

Antes que nada trataremos de eliminar el signo del valor absoluto, como se hizo en la resolución de otros problemas con módulos.

Con este fin tracemos (fig. 53) dos rectas en un plano: $x + y = 0$ (es la bisectriz AOB del segundo y cuarto ángulos de coordenadas) e $y = 0$ (es el eje COD de abscisas). Está claro que las coordenadas x e y de cualquier punto ubicado por encima de la recta $x + y = 0$,

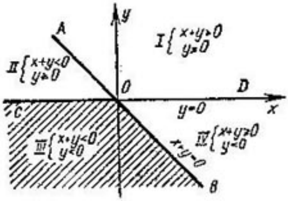


Fig. 53

satisfacen la desigualdad $x + y > 0$, y para cualquier punto ubicado por debajo de esta recta se verifica la desigualdad $x + y < 0$. Análogamente, cualquier punto del semiplano superior (respecto al eje de abscisas) lleva una ordenada positiva y cualquier punto del semiplano inferior tiene la ordenada negativa.

Las rectas señaladas dividen el plano en cuatro campos (fig. 53), de donde es evidente que en cada uno de estos recintos, para cualquier punto (x, y), las expresiones $x + y$ e y conservan su signo. Por eso es razonable hallar, por separado en cada uno de estos campos, los puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen la expresión (12).

Para cualquier punto (x, y) del recinto I (campo angular DOA que comprende también los rayos límites) tenemos las desigualdades $x + y \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Por consiguiente, la expresión (12) del recinto I toma la forma $x + y = y - x$, esto es, que $x = 0$. Pues, a esta última igualdad le satisfacen las coordenadas de puntos del semieje positivo de las ordenadas (esto no quiere decir que sean todos los puntos del eje de ordenadas; en efecto, nos hemos interesado solamente por aquellos puntos que se encuentran en el campo I, y el semieje negativo de ordenadas no pertenece a este recinto).

Para cualquier punto del campo II (el recinto angular AOC que incluye sólo el rayo CO) tienen lugar las desigualdades $x+y<0$, $y\geqslant 0$ dado que la relación (12) en el recinto II toma la forma $-(x+y)=y-x$, o bien, $y=0$. A esta última igualdad la satisfacen los puntos del semieje negativo de las abscisas (los demas puntos del eje de las abscisas no se encuentran en el recinto II).

Para cualquier punto del campo III (el campo angular COB, excepto los rayos límites) son válidas las desigualdades $x+y<0$, $y<0$, dado que la expresión (12) en el recinto III toma la forma $-(x+y)=-y-x$, o bien, $0=0$. Esto denota que las coordenadas de cualquier punto del campo III satisfacen la expresión (12).

Finalmente, para cualquier punto del campo IV (el campo angular que comprende solamente el rayo BO) tenemos $x+y\geqslant 0$, $y<0$, y por eso la expresión (12) en el campo IV toma la forma $x+y=$

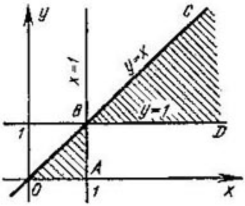


Fig. 54

$=-y-x$, o bien, $x+y=0$. A esta última igualdad le satisfacen, evidentemente, aquellos puntos del campo IV que se hallan sobre la bisectriz del cuarto ángulo de coordenadas.

De tal modo, el conjunto de puntos de un plano cuyas coordenadas x e y satisfacen la expresión (12) son el campo angular entre el semieje negativo de las abscisas y la bisectriz del cuarto ángulo de coordenadas (incluso los rayos límites), y el semieje positivo de las ordenadas (fig. 53).

29. *En un plano está dado un sistema de coordenadas cartesianas. Representar el campo de este plano lleno de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad*

$$\log_x \log_y x>0. \qquad (1)$$

Ahora mismo notemos que x e y, que satisfacen las condiciones (13,3) son tales que $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$ e $y\neq 1$. Por cuanto las propiedades de los logaritmos son distintas en función de las bases, menores o mayores que 1, entonces es natural analizar dos casos.

a) Sea $x>1$. Basándose en las propiedades de los logaritmos, la desigualdad (13) resulta válida si se cumple la desigualdad $\log_y x>1$. Como se sabe, los logaritmos de los números mayores que 1 son negativos, de su base menor que 1. Por lo tanto, la desigualdad $\log_y x > 1$ no puede satisfacerse para y desde el intervalo $0 < y < 1$.

De tal modo, la desigualdad $\log_y x > 1$ puede ser válida sólo en aquel caso en que $y > 1$. Pero, si $y > 1$, todas las $x > y$ serán la solución de la desigualdad $\log_y x > 1$.

Si $x > 1$, entonces, para que se satisfaga la desigualdad (13), y ha de ser obligatoriamente mayor que 1: $y > 1$, y a la desigualdad inicial le satisfacerán sólo aquellos puntos para cuyas coordenadas sea válida también la condición $x > y$.

Si se representa este conjunto de puntos en un dibujo, se puede ver que es una parte interior del campo angular CBD (fig. 54).

b) Sea ahora $0 < x < 1$. Razonando de modo análogo, hallemos que a la condición del problema le satisfacen aquellos puntos para cuyas

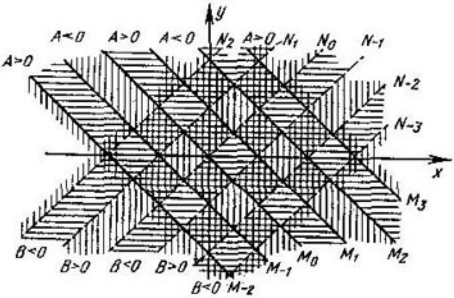


Fig. 55

coordenadas se cumplen las condiciones $0 < y < 1$ e $y < x$. El conjunto de estos puntos constituye el interior del triángulo AOB (fig. 54).

Es por esto que los puntos, cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad (13), forman el campo sombreado en la fig. 54 (las coordenadas de los puntos límites de este campo no satisfacen la expresión (13)).

30. *Hallar todos los puntos de un plano cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad*

$$\cos x - \cos y > 0.$$

Aplicando una fórmula conocida de Trigonometría, escribamos la desigualdad dada en la forma

$$\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{y-x}{2} > 0.$$

Esta desigualdad es válida para todos aquellos puntos cuyas coordenadas x e y son tales que las expresiones $A = \operatorname{sen}[(x+y)/2]$ y $B = \operatorname{sen}[(y-x)/2]$ llevan signos iguales.

Ante todo, vamos a investigar la expresión A. Al resolver la ecuación sen $[(x+y)/2]=0$, hallamos que $x+y=2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Esto significa, geométricamente, que la expresión A puede ser reducida a cero sólo por las coordenadas x e y de los puntos del plano que se encuentren en cualquiera de las rectas $y=-x+2k\pi$, $k=0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$ (en la fig. 55 estas rectas están representadas por líneas contínuas). Por abreviar cuestión, la recta $y=-x+2k\pi$, para k entero, la designaremos por M_k (así, la recta M_0 es la bisectriz del segundo y cuarto ángulos de coordenadas, la recta M_{-1} tiene la ecuación $y=-x-2\pi$, etc.).

Todas las rectas M_k son paralelas entre sí y dividen el plano en fajas; convengamos en denominar faja $\{M_k, M_{k+1}\}$ a la faja comprendida entre las rectas adyacentes M_k y M_{k+1}, con todo esto las mismas rectas M_k y M_{k+1} no pertenecen a esta faja. Por ejemplo, $\{M_0, M_1\}$ es la faja que se encuentra entre las rectas $y=-x$ e $y=-x+2\pi$, es decir, un conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad $0<x+y<2\pi$. Análogamente, en el caso general, la faja $\{M_k, M_{k+1}\}$ es un conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad $2k\pi<x+y<2(k+1)\pi$.

Ahora esclareceremos qué representa aquel conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad sen $[(x+y)/2]>0$. Es fácil resolver esta desigualdad; es válida para

$$2\cdot 2n\pi<x+y<2(2n+1)\pi, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Esto denuncia, geométricamente, que la expresión A es positiva para las coordenadas x e y de todos los puntos ubicados en cada una de las fajas $\{M_{2n}, M_{2n+1}\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, o sea, en cada faja acotada por debajo con la recta M_{2n} de signo par, y por encima, con la recta M_{2n+1}.

Resolviendo la desigualdad sen $[(x+y)/2]<0$, nos convenceremos de que la expresión A es negativa para las coordenadas x e y de todos los puntos ubicados en cada una de las fajas $\{M_{2n-1}, M_{2n}\}$, $n=0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$ En cada una de las fajas $\{M_k, M_{k+1}\}$ de la fig. 55 va señalado el signo correspondiente de la expresión A: las fajas, donde $A>0$ quedan sombreadas horizontalmente y, donde $A<0$, verticalmente.

Pasemos ahora a la expresión B. Razonamientos análogos muestran que la expresión B la convierten en cero las coordenadas x e y de los puntos ubicados sobre las rectas $y=x+2m\pi$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (en la fig. 55) estas rectas están señaladas con líneas punteadas). Designemos por N_m la recta $y=x+2m\pi$ siendo m entero, y convengamos en llamar $\{N_m, N_{m+1}\}$ a la faja comprendida entre las rectas adyacentes N_m y N_{m+1} (con todo esto, estas rectas no pertenecen a esta faja). Es fácil comprobar que la faja $\{N_m, N_{m+1}\}$ es un conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad $2m\pi<y-x<2(m+$ $+1)\pi$.

Resolviendo las desigualdades $B>0$ y $B<0$ nos convencemos de que la expresión B es positiva para las coordenadas x e y de los puntos ubicados en cada una de las fajas $\{N_{2p}, N_{2p+1}\}$, $p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, o sea, en cada faja acotada por debajo con la recta N_{2p} de signo par, y por encima, con la recta N_{2p+1}. A continuación, la expresión B es negativa para las coordenadas x e y de todos los puntos situados en cada una de las fajas $\{N_{2p-1}, N_{2p}\}$, $p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ En cada una de las fajas $\{N_m, N_{m+1}\}$ de la fig. 55 va señalado el signo respectivo de la expresión B: las fajas, donde $B>0$, están sombreadas verticalmente y, donde $B<0$, horizontalmente.

Ahora es fácil describir el conjunto de puntos de un plano cuyas coordenadas x e y satisfacen la desigualdad $A \cdot B>0$: son todos los rectángulos (exceptos sus contornos) que tienen doble sombreado en la fig. 55.

EJERCICIOS:

Hallar el recinto de determinación de las funciones:

1. $y=5\sqrt{1-4x^2}$.
2. $y=\log_{x-1}(2-x-x^2)$.
3. $y=\arccos 2^{|x|}$.
4. $y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x)$.
5. $y=\sqrt[4]{x^{-3}(x-2)(x-3)}$.
6. $y=\sqrt{\lg\cos(2\pi x)}$.

Construir las gráficas de las funciones:

7. $y=-5$.
8. $y=\pi(x+1)$.
9. $y=x(1-x)$.
10. $y=x^2+5|x-1|+1$.
11. $y=|-3x+2|-|2x-3|$.
12. $y=|x^2-3x+2|+|5-x|$.
13. $y=(x+1)(|x|-2)$.
14. $y=|x+1|\cdot(|x|-2)$.
15. $y=\dfrac{2x+1}{2-x}$.
16. $y=\dfrac{2x-6}{3-x}$.
17. $y=1-1/|x|$.
18. $y=(1/3)^{-2x+1}$.
19. $y=2\cdot 3^{x+1}-1$.
20. $y=10^{-|x|}$.
21. $y=-\lg(2x+1)$.
22. $y=\log_{|x|}2$.
23. $y=|\log_{1/\pi}x^2|$.
24. $y=\sqrt{\lg \operatorname{sen} x}$.
25. $y=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$.
26. $y=\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x$.
27. $y=\sqrt{3}\operatorname{sen} 2x+\cos 2x$.
28. $y=2\operatorname{sen}|2x|$.
29. $y=2\operatorname{tg}[-2x+(\pi/4)]$.
30. $y=-\cos^2[x-(\pi/6)]$.
31. $y=1+\sqrt{x}$.
32. $y=x+\operatorname{sen} x$.
33. $y=\log_{1/2}\dfrac{1}{1-x^2}$.
34. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg} x}$.
35. $y=\log_{1/\pi}\operatorname{tg} x$.
36. $y=\operatorname{sen}(\arccos x)$.
37. $y=\cos 2x-\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}\,(\operatorname{sen} x+\cos x)$.
38. $y=\dfrac{|x-2|+1}{|x+3|}$.
39. $y=3+2^{3\cos\frac{x}{3}}$.

¿Cómo se diferencian las gráficas de las funciones:

40. $y_1=\log_3 x^2$ e $y_2=2\log_3 x$?
41. $y_1=2^{\log_2 x}$ e $y_2=x$?
42. $y_1=\operatorname{tg} x\operatorname{cotg} x$ e $y_2=1$?

En un plano con el sistema de coordenadas dado dibujar un conjunto de puntos cuyas coordenadas x e y satisfacen las expresiones:

43. $|y-1|=x^2-4x+3$

44. $|x|+x=|y|+y$.

45. $|x-2|+|y+1|\leqslant 1$.

46. $|x-y|>2$.

47. $|2x+y|+|2x-y|<4$.

48. $|y|=\operatorname{sen} x$.

49. $\cos 2x+\cos y=0$.

50. $x\geqslant \operatorname{sen}|y|$.

51. $\log_{|\operatorname{sen} x|} y>0$.

52. $x>\log_2|y|$, $y<x$.

53. La altura de un paralelepípedo rectangular es igual a 1/2, y los lados de la base son iguales a x e y. Hallar la dependencia entre y y x y representarla en una gráfica si se sabe que la superficie lateral del paralelepípedo es igual al área de la base.

54. En una pirámide cuadrangular de altura y y base x, el área de la base es mayor en 1 que el área del corte hecho por el vértice de la pirámide y la diagonal de la base. Hallar la dependencia entre y y x y representarla en una gráfica.

55. En la base del primer cilindro recto se encuentra un círculo de radio y, en la base del segundo, un círculo de radio x; con esto, el radio del primer círculo es mayor. La altura del primer cilindro es igual a 1/8, la altura del segundo, 1/2. Hallar la dependencia entre y y x y representarla en una gráfica, si la diferencia entre el área de la superficie lateral y el área de la base del primer cilindro es igual al área de la superficie lateral del segundo cilindro.