PARTE II

TRIGONOMETRÍA

§ 1. OBSERVACIONES GENERALES SOBRE LA TRIGONOMETRÍA

En esta parte sólo nos detendremos brevemente en determinados problemas del curso de Trigonometría, que consideramos importantes.

En este párrafo haremos unas observaciones de carácter general sobre una serie de materias de Trigonometría que a veces se escapan del campo visual de los estudiantes y también examinaremos ejemplos de resolución de problemas.

Definiciones de las funciones trigonométricas. Los estudiantes conocen bien las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo. Sin embargo, al igual que todas las funciones elementales que se estudian en Álgebra, las funciones trigonométricas se examinan, en resumidas cuentas, como funciones del argumento *numérico*. Entre tanto, a veces se manifiesta cierta incompresión acerca de qué significa, por ejemplo, *el seno de un número dado*.

A la pregunta *qué significa* sen π le sigue, por lo general de inmediato, la respuesta: sen $\pi=0$. Pero, se trata no de *la magnitud* de sen π sino *del significado de este símbolo*, se trata de cómo debe comprenderse esta anotación: sen π. Precisamente, el seno del número π, es decir, sen π es el seno de un ángulo de una magnitud de π radianes, o sea, de un ángulo de 180°.

A la definición de las funciones trigonométricas de un argumento numérico, llegamos también poco a poco. Al principio, estas funciones se definen como las de un ángulo arbitrario (positivo o negativo). Luego, la introducción de la medición de ángulos por radianes nos permite poner en correspondencia con un determinado ángulo de valor a en radianes a cada número real a y, a la inversa, un número real determinado unívocamente, o sea, su magnitud en radianes a cada ángulo [1].

[1] Por lo común, a los estudiantes se les ocurre preguntar: ¿Por qué es necesario aplicar la medición *en radianes* de los ángulos para la definición de las funciones trigonométricas de un argumento numérico? ¿Por qué, por ejemplo, es imposible definir el seno del número a como el seno del ángulo de una magnitud de a grados? En efecto, tal definición es posible, en principio, pero a causa de muchos motivos ésta es incómoda y no razonable. Lamentablemente, es imposible explicar aquí los motivos por los cuales tal definición resulta no razonable, teniendo en cuenta el curso escolar de las Matemáticas.

En fin, podemos definir así las funciones trigonométricas de un argumento numerico: *la funcion trigonométrica de un número a es la misma función trigonométrica de un ángulo de una magnitud a en radianes*. De tal modo, por un número dado hallamos un ángulo correspondiente a éste y para cada ángulo las funciones trigonométricas ya han sido definidas.

Por consiguiente, sen 10, por ejemplo, es el seno del ángulo de 10 radianes. En otras palabras, tenemos que tomar el sistema de las coordenadas Oxy, un solo círculo con el centro en el origen de las coordenadas y hallar en la circunferencia tal punto M que el vector $\overrightarrow{OM}$ componga, en el sentido positivo del eje Ox un ángulo de 10 radianes ($\approx 570°$ (градусов)), medido de derecha a la izquierda[1]. En este caso la ordenada del punto M (¡que es un número!) será el seno del ángulo de 10 radianes, es decir, será igual a sen 10.

De esa manera vemos que ningún ángulo participa en la definición categórica de las funciones trigonométricas sino que se establece una relación entre los números. La utilización de los ángulos es una *etapa auxiliar*, intermedia, cuya introducción se impone sólo por razonamientos metodológicos.

Los estudiantes utilizan a menudo el símbolo ∞, el cual no se aplica, en general, en las matemáticas elementales. En particular, es muy popular aunque absurda la fórmula $\operatorname{tg} 90° = \infty$ o su expresión verbal: "La tangente del ángulo recto es igual a infinito". A veces se puede oir hasta sus "argumentos": $\operatorname{tg} 90° = \operatorname{sen} 90°/\cos 90° = 1/0 = \infty$. Hay que comprender que todos estos argumentos no tienen sentido.

Fórmulas trigonométricas. Está claro que las fórmulas deben recordarse. Pero, es necesario también deducirlas con rapidez, porque la habilidad de deducir la fórmula requerida es un mérito mucho mayor que el simple conocimiento de las fórmulas sin saber deducirlas.

El análisis de la demostración de las fórmulas trigonométricas, previsto por el curso escolar de Trigonometría, muestra que puede obtenerse rápidamente cualesquiera de éstas si se saben de memoria las definiciones y propiedades fundamentales de las funciones sen x, cos x, tg x, cotg x[2], la expresión $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y las fórmulas de adición. Por esto es fácil deducir las fórmulas de reducción, las de conversión de un producto de las funciones trigonométricas en la suma y a la inversa, etc.

---

[1] Aquí es conveniente mencionar una convicción difundida de que, al medir, un ángulo en grados obtenemos un número concreto y al medirlo en radianes, un número abstracto. En realidad, cualquiera que sea la medición resulta siempre un número concreto: sean 5 km, 28° ó 10 radianes. Después de la medición de un ángulo en radianes no siempre mencionamos la unidad — "el ángulo es igual simplemente a 3π y no a 3π radianes" —, es un convencionalismo, un convenio universal.

[2] A veces se encuentran designaciones $1/\operatorname{sen} x = \operatorname{cosec} x$ (cosecante), $1/\cos x = \sec x$ (secante).

En efecto, supongamos que necesitamos *una fórmula del seno de un semiángulo* [1]. Según la fórmula de adición y la expresión $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ podemos escribir de inmediato que

$$\cos \alpha = \cos \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2},$$

de donde

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \text{o sea,} \quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Por otra parte, no hay que sobreestimar la posibilidad de deducir cualesquier fórmulas porque esto exige mucho tiempo, debido a que el número de fórmulas que se hallen en la memoria activa ha de ser bastante grande.

Los métodos de deducción de muchas fórmulas son diferentes. El estudiante puede escoger el método que más le guste, siempre y cuando sea *correcto*. En particular, es obvio considerar las demostraciones de las fórmulas expuestas en algunos libros de texto como una de las variantes posibles de su deducción; es muy bueno cuando el mismo estudiante puede proponer otras argumentaciones correctas de tal o cual fórmula. En este caso es deseable que siempre se elijan los métodos de razonamientos más sencillos.

Pero, es imprescindible observar que durante la deducción de una fórmula no nos basemos en otra que se obtiene a su vez con la utilización de la que se demuestra. Por ejemplo, algunos estudiantes, la paridad de la función $\cos x$ la demuestran así:

$$\cos(-x) = \cos(0-x) = \cos 0 \cos x + \operatorname{sen} 0 \operatorname{sen} x = \cos x. \qquad (2)$$

En esta cadena de igualdades se aplica la fórmula de adición $\cos(\alpha-\beta)$ en el caso cuando $\alpha<\beta$. Mientras tanto, en algunos libros de texto la deducción de esta fórmula de adición *aplica* la paridad de la función $\cos x$. Por esto, la demostración (2) de la paridad de la función $\cos x$, recién expuesta, puede ser reconocida correcta tan sólo cuando el estudiante sabe fundamentar la fórmula de adición $\cos(\alpha-\beta)$, $\alpha<\beta$, sin aplicar esta propiedad del coseno.

Llamemos la atención a una confusión bastante difundida en lo que se refiere a la comprensión del signo $\pm$ en las fórmulas del tipo (1). Unos entienden este signo en el sentido de que "el seno del semiángulo puede asumir dos valores", otros consideran que debe elegirse sólo uno de estos valores (es decir, correspondiente al signo más o al menos),

[1] Sería mejor decir "la fórmula del seno de un semiargumento", "la fórmula del coseno del argumento doble", etc., pero no vamos a rechazar la terminología adoptada. Subrayemos que, en lo ulterior, el término "ángulo" puede sustituirse siempre, por el término „número", o a la inversa.

pero no pueden explicar con exactitud cuándo y cuál de estos valores conviene tomar.

En realidad, para cualquier valor *fijo* de α debemos elegir en la fórmula (1) el valor correspondiente al signo más o el valor correspondiente al signo menos (¡y nunca ambos valores a la vez!) [1]. Y cuál de estos valores hay que tomar, depende precisamente *del cuadrante en que se encuentra el ángulo* $\alpha/2$: si éste se halla en el primero o segundo cuadrante, conviene tomar el valor con el signo más, y si se ecuentra en el tercero o cuarto, con el signo menos [2].

De tal modo, el signo $\pm$ en la fórmula (1) no significa el seno del semiángulo de dos signos opuestos; nos hemos visto obligados a poner este signo ya que sen $(\alpha/2)$ puede asumir (para distintos α) tanto valores positivos como negativos mientras que la expresión $\sqrt{1/2(1-\cos\alpha)}$ no es negativa para todos los valores de α.

De hecho, la fórmula (1) significa que el conocimiento del valor $\cos\alpha$ no determina *univocamente* el valor de sen $(\alpha/2)$ sino que sólo determina *el valor absoluto* de sen $(\alpha/2)$; y para determinar el valor de sen $(\alpha/2)$ es necesario tener, además de $\cos\alpha$, una información complementaria de la disposición del ángulo $\alpha/2$; ¿en qué cuadrante éste se encuentra?

Precisamente, por esto es preferible evitar la anotación del tipo (1), utilizando la más exacta:

$$\left|\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Nos tropezamos también con una situación análoga en otros problemas donde se exige calcular el valor de una expresión trigonométrica al saber la magnitud de otra expresión. Hay que recordar que por el valor de una función trigonométrica de algún ángulo sólo se determinan univocamente, diciendo en general, los valores absolutos de otras funciones de este ángulo. Y para determinar los propios valores de estas funciones es preciso saber, por ejemplo, en qué cuadrante se encuentra el ángulo considerado.

1. *Es sabido que* $\operatorname{sen}\beta=4/5$ y $0<\beta<\pi$. *¿A qué valor es igual la relación*

$$\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\dfrac{2}{\cos(\pi/6)}\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\alpha},$$

si: a) *el ángulo* β *es agudo*; b) *el ángulo* β *es obtuso*?

---

[1] Sólo cuando $\cos\alpha\neq 1$ porque en el caso de $\cos\alpha=1$ ambos valores son iguales a cero.

[2] No es difícil comprender que el signo "más" en la fórmula (1) se toma en el caso en que $4n\pi\leqslant\alpha\leqslant 4n\pi+2\pi$, y el signo "menos", cuando $4n\pi+2\pi\leqslant\alpha\leqslant 4n\pi+4\pi$ (donde n es un número entero cualquiera). Para $\alpha=2n\pi$, no tiene importancia cuál de los signos se debe elegir ya que con este valor del ángulo sen $(\alpha/2)=0$.

La relación señalada en la condición — la designaremos, para abreviar, por M — puede reducirse a la forma

$$M = \frac{\operatorname{sen}\alpha\,(3\cos\beta + 4\operatorname{sen}\beta) + \cos\alpha\,(3\operatorname{sen}\beta - 4\cos\beta)}{\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha}.$$

Para calcular el valor de esta expresión es necesario saber, además de la magnitud sen β, el valor de cos β. Ya que sen $\beta = 4/5$, hallamos inmediatamente la magnitud absoluta del coseno de este ángulo: $|\cos\beta| = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\beta} = 3/5$. El signo del coseno ha de determinarse en función del cuadrante considerado.

En el caso en que el ángulo β es *agudo*, tenemos $\cos\beta = 3/5$, debido a que es fácil calcular que $M = 5/\sqrt{3}$. Y si el ángulo β es *obtuso*, entonces $\cos\beta = -3/5$ y, por consiguiente, $M = \sqrt{3}\cdot(7 + 24\operatorname{cotg}\alpha)/15$.

Por desgracia, no son todos los estudiantes que saben hallar aquellos valores del argumento para los cuales una u otra fórmula es correcta. A veces dicen: "Todas las fórmulas trigonométricas deducidas en los libros de texto representan en sí las identidades, o sea, son válidas para todos los valores de los argumentos". Sin embargo, esto no es así. Las fórmulas trigonométricas son válidas sólo para los valores *admisibles* de los argumentos.

En particular, la fórmula $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ es válida realmente para un valor arbitrario de α, mientras que la fórmula $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\alpha = 1$ tiene sentido sólo para los valores de α distintos de $k\pi/2$, donde k es un número entero arbitrario (porque para $\alpha = k\pi/2$, una de las funciones de esta fórmula no está determinada).

Así pues, al escribir alguna fórmula trigonométrica hay que tener presente para cuáles valores de las letras que integran la fórmula ésta es válida.

Para hallar estos valores hay que determinar los valores de los argumentos para los cuales tiene sentido *cada* función que entra en la fórmula trigonométrica. Si una de las funciones, aunque sea una sola, que forman parte de la fórmula trigonométrica, pierde sentido para cualquier valor del argumento, este valor tiene que ser despejado.

Consideremos, por ejemplo, la fórmula

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (3)$$

Su primer miembro es determinado cuando $\alpha \neq (\pi/2) + k\pi$ y $\beta \neq (\pi/2) + n\pi$, donde k y n son números enteros arbitrarios, ya que para cada uno de estos valores $\operatorname{tg}\alpha$ ó $\operatorname{tg}\beta$ pierde sentido. El segundo miembro de (3) tiene sentido para aquellos valores de α y β para los cuales $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$; es fácil comprobar que llegamos a las mismas restricciones para α y β. Vemos de tal modo que los miembros primero y segundo de la fórmula (3) existen en las mismas condiciones:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad k, \ n \ \text{son números enteros;}$$

estas dos desigualdades nos proporcionan condiciones en las cuales es justa la fórmula de la diferencia de tangentes.

Un análisis algo más complejo se refiere a la fórmula siguiente:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \tag{4}$$

Su primer miembro se determina si $\alpha - \beta \neq \pi/2 + k\pi$: solamente para estos valores de α y β la expresión $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ pierde su sentido. Y ahora, en lo que se refiere al segundo miembro de la fórmula (4): para que éste tenga sentido es necesario determinar $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$, o sea, que $\alpha \neq \pi/2 + n\pi$, $\beta \neq \pi/2 + m\pi$, donde n y m son números enteros. No obstante, esto no es todo: el denominador $1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ debe ser distinto de cero. Ya que $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$ son determinados (ya lo hemos supuesto), la condición $1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \neq 0$ puede anotarse en forma de $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$. Por consiguiente, el denominador del segundo miembro de la fórmula (4) es distinto de cero si $\alpha - \beta \neq \pi/2 + k\pi$, donde k es un número entero [1]. De tal manera, la fórmula de la diferencia de tangentes es válida con la condición de que

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \ \beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \tag{5}$$

donde n, m, k son números enteros [2].

La comparación del análisis realizado de las condiciones en las cuales las fórmulas (3) y (4) tienen sentido denuncia una diferencia esencial entre estas fórmulas. Mientras que los primero y segundo miembros de la fórmula de la diferencia de tangentes existen o no existen *con los mismos valores* de los argumentos, los campos de existencia del primero y del segundo miembros de la fórmula de tangente de la diferencia son *distintos*. Por ejemplo,

---

[1] Subrayemos que para que cierto par de valores de α, β sea eliminado del recinto de valores admisibles de la fórmula (4) se requiere solamente que *sea* $\alpha = \pi/2 + n\pi$ para cierto n entero (y β cualquiera), *sea* $\beta = \pi/2 + m\pi$ para cierto m entero (y α cualquiera), *sea* $\alpha - \beta = \pi/2 + k\pi$ para cierto k entero. Por consiguiente, el cumplimiento *aunque sea de una sola* de estas igualdades denuncia que la fórmula (4) es incorrecta para algunos valores de los argumentos.

[2] Las condiciones (5), a veces, se anotan así:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots$$

Aquí se sobreentiende que en *cada* una de estas desigualdades el número k recorre, *independientemente* de las otras dos desigualdades, todos los valores enteros.

el primer miembro de la fórmula (4) tiene sentido para $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi/4$, mientras que su segundo miembro para estos valores de α y β es indeterminado.

Se pueden citar también otros ejemplos de fórmulas trigonométricas *cuyos miembros primero y segundo tienen diferentes recintos de valores admisibles*. Tales son, por ejemplo, las fórmulas que expresan el seno y el coseno por medio de la tangente del semiángulo, la fórmula de la tangente de la suma, la fórmula de la tangente del ángulo doble (el lector puede analizar atentamente todas estas fórmulas).

Este hecho tiene gran importancia para la resolución correcta de las ecuaciones (véase este problema expuesto más detalladamente en el § 9, Parte I).

EJERCICIOS:

1. ¿Qué significa: a) un ángulo negativo; b) la medida de un ángulo en radianes; c) la tangente de un ángulo dado; d) cos 1; e) arc sen a?

2. ¿Es una definición o un teorema cada una de las afirmaciones siguientes: a) $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ para cualquier α; b) el seno de un ángulo φ es igual a la ordenada de un vector de la longitud unidad, el cual proviene del origen de las coordenadas y que forma con el eje de abscisas un ángulo φ; c) la gráfica de la función $y=\operatorname{sen} x$ pasa por el origen de las coordenadas; d) $\operatorname{ctg} 90°=0$?

3. Examinemos el teorema: "Si el ángulo φ termina en el segundo cuadrante, $\cos\varphi\leqslant 0$". Enunciar los teoremas: recíproco, contrario y contrario al recíproco. ¿Cuáles de estos teoremas son correctos?

4. Demostrar que si los números reales x e y satisfacen la condición $x^2+y^2=1$, se encontrará un ángulo φ, donde $x=\operatorname{sen}\varphi$ e $y=\cos\varphi$.

5. ¿Qué es mayor: a) sen 1° ó sen 1; b) tg 1 ó tg 2?

6. ¿Cómo están entrelazados los ángulos α y β si se sabe que a) $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$; b) $\cos\alpha=\cos\beta$; c) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$; d) $\operatorname{sen}\alpha=\cos\beta$?

7. Expresar $\cos(\alpha/2)$ y $\operatorname{sen}(\alpha/2)$ por $\operatorname{sen}\alpha$, si $270°\leqslant\alpha\leqslant 450°$.

8. Tenemos que: $\operatorname{sen} x=1/4(\sqrt{5}-1)$. Calcular $\operatorname{sen} 5x$.

9. Calcular, sin recurrir a las tablas:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

10. Comprobar si es válida la igualdad

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 15°}{1+\operatorname{tg}^2 15°}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§ 2. TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

A veces se proponen diferentes problemas en cuanto a la transformación de las expresiones trigonométricas o a la demostración de las proporciones trigonométricas. Todos los problemas similares pueden ser resueltos aplicando determinadas fórmulas. Aunque las expresiones propuestas para la simplificación parecen a veces "terribles" a primera vista, su transformación por combinación de las fórmulas convenientes no presenta corrientemente dificultades de principio.

Sin embargo, a fin de realizar esto hay que saber bien estas fórmulas, saber "leerlas" no sólo "de izquierda a derecha" sino también "de derecha a izquierda", ver estas fórmulas en las más diversas anotaciones. Por ejemplo, en la anotación $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 30° - \cos 30° \cos x$ se debe "reconocer" $-\cos(x+30°)$ y no $\operatorname{sen}(x-30°)$, como escriben, de vez en cuando, los estudiantes, etc.

Tal conocimiento puede adquirirse si se obtienen hábitos firmes de trabajo con las fórmulas trigonométricas fundamentales, al ejercitarse en la resolución de un número bastante grande de ejemplos.

Naturalmente, al realizar transformaciones trigonométricas es imprescindible *observar* rigurosamente *todas las reglas de las operaciones algebraicas* y calcular atenta y precisamente los mismos cálculos, porque es suficiente escribir en un lugar, por ejemplo, menos en vez de más o calcular erróneamente el coeficiente para que el resultado definitivo sea incorrecto. En el transcurso de las transformaciones, a veces se han de aprovechar diferentes identidades algebraicas que sean aplicables con habilidad a las expresiones trigonométricas.

En particular, una gran cantidad de errores en las transformaciones provienen de la comprensión incorrecta del símbolo $\sqrt{\ }$. En Trigonometría, así como en Álgebra, este signo significa siempre raíz cuadrada aritmética (véase § 4, Parte I). Por lo tanto, por ejemplo,

$$\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}=\sqrt{(\operatorname{sen} x-\cos x)^2}=|\operatorname{sen} x-\cos x|,$$

y de ningún modo $\operatorname{sen} x-\cos x$; en lugar de la expresión $\sqrt{1/2\,(1-\cos 2\alpha)}$ hay que escribir $|\operatorname{sen}\alpha|$ y no $\operatorname{sen}\alpha$, etc.

2. *Simplificar la expresión*

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{b-a}{a}}\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{b-a}{a}}\operatorname{sen} x\right)^2}}\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x},$$

donde $b>a>0$.

Al realizar transformaciones poco complicadas, la expresión dada, designándola por P, para abreviar, puede escribirse en forma que sigue:

$$P=\frac{\operatorname{sen} x\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{a+(b-a)\operatorname{sen}^2 x}}=\frac{\operatorname{sen} x\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{a\cos^2 x+b\operatorname{sen}^2 x}}.$$

No pocos estudiantes realizan incorrectamente la transformación ulterior, considerando que

$$\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x}=\sqrt{a+b\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\sqrt{a\cos^2 x+b\operatorname{sen}^2 x}}{\cos x},$$

y obteniendo la solución $P=\operatorname{tg} x$. El error radica en lo siguiente: durante esta transformación tenemos que simplificar de hecho la expresión $\sqrt{\cos^2 x}$, que es igual, en realidad, a $|\cos x|$. Por eso, el resultado definitivo es tal: $P=\operatorname{sen} x/|\cos x|$.

En el problema que se examinará a continuación la dificultad principal consiste en el aspecto algebraico, o sea, en la necesidad de señalar con exactitud para cuáles valores de los parámetros es válida tal o cual transformación y cómo se debe proceder cuando los valores de los mismos son otros.

3. *Hallar la dependencia entre m y n despejando θ y φ de las expresiones*

$$m^2\operatorname{tg}^2\theta+n^2\operatorname{tg}^2\varphi=1,\quad m^2\cos^2\theta+n^2\operatorname{sen}^2\varphi=1,$$
$$m\operatorname{sen}\theta=n\cos\varphi.$$

En este problema es necesario, considerando que las tres expresiones son cumplidas, despejárselas θ y φ. Esto puede hacerse de diferentes maneras; expondremos aquí uno de los procedimientos posibles.

Para aprovechar la tercera expresión, escribiremos la segunda de modo que en ésta entren los productos $m\operatorname{sen}\theta$ y $n\cos\varphi$:

$$m^2\operatorname{sen}^2\theta+n^2\cos^2\varphi=m^2+n^2-1.$$

Entonces, si tenemos en cuenta la tercera igualdad dada en la condición obtenemos

$$2n^2\cos^2\varphi=m^2+n^2-1.$$

Suponiendo que $n\neq 0$ (la posibilidad de $n=0$ va a examinarse especialmente) tenemos

$$\cos^2\varphi=\frac{m^2+n^2-1}{2n^2}.$$

Luego, de la tercera expresión, *suponiendo* que $m\neq 0$, tenemos

$$\cos^2\theta=1-\operatorname{sen}^2\theta=1-\frac{n^2}{m^2}\cos^2\varphi=\frac{m^2-n^2+1}{2m^2}.$$

De tal manera, ya podemos sacar las primeras conclusiones de las relaciones entre m y n: si $m\neq 0$ y $n\neq 0$, entonces

$$0<\frac{m^2+n^2-1}{2n^2}\leqslant 1,\quad 0<\frac{m^2-n^2+1}{2m^2}\leqslant 1.$$

Ahora escribamos la primera de las expresiones dadas en la forma

$$m^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)+n^2\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)=1$$

y pongamos aquí las expresiones halladas para $\cos^2\theta$ y $\cos^2\varphi$; obtenemos la relación entre m y n:

$$\frac{2m^4}{m^2-n^2+1}+\frac{2n^4}{m^2+n^2-1}=m^2+n^2+1.$$

Veamos ahora qué ocurre cuando $n=0$. En este caso las expresiones en cuestión asumen la forma de

$$m^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta=1,\quad m^2\cos^2\theta=1,\quad m\,\mathrm{sen}\,\theta=0.$$

La primera de estas igualdades demuestra que $m\neq 0$; y la tercera da $\mathrm{sen}\,\theta=0$, lo que contradice a la primera igualdad. Por consiguiente, de las relaciones dadas se deduce que $n\neq 0$. Análogamente se demuestra también que $m\neq 0$.

De esa manera, de las tres igualdades iniciales, una vez despejados θ y φ, se han obtenido las siguientes afirmaciones sobre m y n:

$$m\neq 0,\quad n\neq 0,\quad 0<\frac{m^2+n^2-1}{2n^2}\leqslant 1,\quad 0<\frac{m^2-n^2+1}{2m^2}\leqslant 1,$$
$$\frac{2m^4}{m^2-n^2+1}+\frac{2n^4}{m^2+n^2-1}=m^2+n^2+1,$$

que dan la solución del problema planteado.

Detengámonos en la transformación de la expresión $a\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x$, e *introduzcamos un ángulo auxiliar*. Como se sabe, al definir el ángulo φ de las condiciones [1] (se supone que a y b simultáneamente no son iguales a cero)

$$\mathrm{sen}\,\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\tag{6}$$

podemos reducir la expresión $a\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x$ a la forma $\sqrt{a^2+b^2}\times\mathrm{sen}\,(x+\varphi)$. Es fácil comprender que los *signos* de los números a y b determinan precisamente aquel cuadrante en que se encuentra el ángulo φ.

Este procedimiento general de introducir el ángulo auxiliar conduce siempre a la solución. Sin embargo, en la práctica, al resolver los problemas concretos (por ejemplo, las ecuaciones trigonométricas), ocurre que es más ventajoso introducir el ángulo auxiliar aplicando un método algo diferente.

Con frecuencia es cómodo determinar el ángulo auxiliar de modo que éste se encuentre *en los límites de* 0 *a* $\pi/2$. Si en lugar de las fórmulas (6) para determinar el ángulo auxiliar α se aplican las igualdades

$$\mathrm{sen}\,\alpha\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha\,\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}},\tag{7}$$

[1] En algunos libros de texto se señala que estas condiciones determinan *el único ángulo* dentro de los límites $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Naturalmente, en calidad de ángulo auxiliar podemos elegir también cualquier ángulo $\varphi+2k\pi$, $k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

será claro que el ángulo α puede elegirse en el primer cuadrante. Además, para determinar α es suficiente utilizar *sólo una* de las fórmulas (7), porque el ángulo del primer cuadrante se determina unívocamente por el valor del seno (o del coseno) [1].

En este caso la expresión $a \operatorname{sen} x + b \cos x$ no se reduce obligatoriamente a la forma $\sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x+\alpha)$, sino, quizá, a una de las expresiones

$$\sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(x-\alpha),\ \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(-x+\alpha),\ \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen}(-x-\alpha),$$

lo que resulta en función de los *signos* de los números a y b.

No obstante, no es necesario recordar las fórmulas (7) para transformar la expresión concreta $a \operatorname{sen} x + b \cos x$: es más fácil realizar directamente cálculos requeridos.

Examinemos, por ejemplo, *la expresión* $Q = -2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \times \times \cos x$. Ya que la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de los coeficientes, de seno y coseno, es igual a $\sqrt{7}$, entonces la expresión de Q puede escribirse así:

$$Q = \sqrt{7}\left(-\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cos x\right).$$

Si ahora tomamos $2/\sqrt{7}$ como coseno del ángulo auxiliar α, y $\sqrt{3}/\sqrt{7}$ como seno del mismo ángulo,

$$Q = \sqrt{7}\,(-\cos\alpha \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\alpha \cos x) = \sqrt{7} \operatorname{sen}(\alpha - x) =$$
$$= \sqrt{7} \operatorname{sen}(x-\alpha).$$

El mismo ángulo α (dentro de los límites de 0 a $\pi/2$) puede ser determinado de la igualdad

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \text{es decir},\ \alpha = \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{21}}{7};$$

por tanto, en definitiva resulta que

$$Q = -\sqrt{7} \operatorname{sen}\left(x - \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{21}}{7}\right).$$

Y si, para determinar el ángulo auxiliar α que se halla entre 0 y $\pi/2$, se utiliza la condición

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}},\ \text{o sea},\ \alpha = \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7},$$

[1] Según se desee, para determinar α (entre los límites de 0 a $\pi/2$) se puede utilizar también la expresión $\operatorname{tg}\alpha = |b|/|a|$ (si $a \neq 0$) que se deduce de las fórmulas (7). Es fácil convencerse de que todas estas relaciones determinan *el mismo* ángulo α en el primer cuadrante.

la expresión de Q tomará una forma algo distinta:

$$Q = -\sqrt{7}\,\mathrm{sen}\left(x - \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}\right).$$

A veces resulta más ventajoso reducir la expresión a sen $x +$ $+ b\cos x$ al *coseno* de la suma (o la diferencia) del ángulo x y del ángulo auxiliar que se encuentre en los límites de 0 a $\pi/2$. Es también cómodo realizar tal transformación, directamente, sin aplicar fórmulas generales.

Pues así, la expresión $R = \mathrm{sen}\,2x - \sqrt{3}\cos 2x$ puede ser representada como

$$R = 2\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right).$$

Este conducirá al coseno de una combinación de ángulos, si la expresión que está entre paréntesis la presentamos como un coseno desarrollado de la suma del ángulo $2x$ y de un ángulo β (dentro de los límites de 0 a $\pi/2$). Pero, para esto es suficiente tomar 1/2 como el seno del ángulo auxiliar β, y $\sqrt{3/2}$ como su coseno. Puesto que en este caso $\beta = \pi/6$, tenemos:

$$R = 2\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\,\mathrm{sen}\,2x - \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x\right) = -2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

En general, la expresión trigonométrica, como se sabe, tiene sentido pero *no para todos* los valores de sus argumentos. Por esto, en los problemas en que se trata de la transformación de una u otra expresión trigonométrica, *se supone* siempre (aunque no se estipula corrientemente en una forma explícita en la condición del problema) que la transformación de la expresión propuesta se debe realizar en su *campo de determinación*, es decir, sólo para aquellos valores de los argumentos para los cuales la expresión propuesta tiene sentido.

4. *Tenemos los ángulos* α, β, γ *relacionados del modo siguiente:*

$$2\ \mathrm{tg}^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\beta\ \mathrm{tg}^2\gamma + \mathrm{tg}^2\alpha\ \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\beta\ \mathrm{tg}^2\gamma + \mathrm{tg}^2\gamma\ \mathrm{tg}^2\alpha = 1. \qquad (8)$$

Hallar $\mathrm{sen}^2\alpha + \mathrm{sen}^2\beta + \mathrm{sen}^2\gamma$.

Según lo dicho anteriormente, es necesario hallar la suma de $\mathrm{sen}^2\alpha + \mathrm{sen}^2\beta + \mathrm{sen}^2\gamma$, designándola por N, sólo para aquellos ángulos α, β, γ para los cuales existen todas las funciones trigonométricas que forman parte de (8). En otras palabras, debemos considerar que en este problema los ángulos α, β, γ son tales que tg α, tg β, tg γ tienen sentido [1]. En esta condición complementaria enunciada implícitamente vamos a hallar el valor de N.

[1] Señalemos que la suma incógnita $\mathrm{sen}^2\alpha + \mathrm{sen}^2\beta + \mathrm{sen}^2\gamma$ tiene un sentido y un valor completamente determinado para *todos* los ángulos α, β, γ. Sin embargo, para los ángulos α, β, γ que no tengan existente aunque uno de los números tg α, tg β, tg γ, la condición (8) del problema pierde su sentido, a causa de que no es posible considerar tales ángulos como "relacionados por la expresión (8)".

Ya que se propone calcular el valor de N valiéndose de la magnitud de una expresión trigonométrica que contiene las tangentes, es natural escribir también el valor incógnito de N en otra forma, aplicando las tangentes.

$$N=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}+\frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{1+\operatorname{tg}^2\gamma}.$$

Notemos que aquí utilizamos la suposición de que $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ existen: sólo en este caso puede valerse de la fórmula que relaciona el seno y la tangente de un mismo ángulo.

Las transformaciones ulteriores no presentan dificultades: reduciendo la expresión obtenida para N a un denominador común y utilizando (8) hallamos que $N=1$.

En el problema examinado no era necesario hallar los valores admisibles de los argumentos: solamente era importante que las transformaciones realizadas fueran válidas para todos estos valores admisibles, que éstas no cambiaran los campos de determinación.

No obstante, se deben utilizar aquellas transformaciones que hagan variar el campo de determinación, procediendo con mucho cuidado. Esto es muy esencial cuando se necesita no sólo transformar la expresión dada sino aclarar también aquellos valores de la variable que la convierten, digamos, en cero (o sea, resolver realmente alguna *ecuación*). En este caso se han de observar los cambios que sufre el campo de determinación, no admitir su estrechamiento y efectuar comprobaciones si el campo resulta ampliado.

5. *Simplificar la expresión*

$$\frac{1}{3\operatorname{sen}x}\left[(2\cos x-\operatorname{sen}x)\operatorname{cotg}x+2\operatorname{sen}x+\cos x\right]\times$$
$$\times\left[1+\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}x}{2\cos x-\operatorname{sen}x}\right)^{-2}\right]^{-1}-\frac{\cos 2x\,[2\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)+(\operatorname{sen}x+\cos x)^2]}{6\,(\operatorname{sen}x+\cos x)^2\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)}.$$

Hállense todos los valores de x con los cuales esta expresión se convierte en cero.

Al principio no vamos a aclarar los valores admisibles de x, sino que realizaremos transformaciones formales. Designando la expresión dada por A, el minuendo, por B, y el sustraendo por C (tal que $A=B-C$), reduciremos B y C a una forma más simple:

$$B=\frac{1}{3\operatorname{sen}x}\cdot\frac{2}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{3\operatorname{sen}^2x}{4\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)}=\frac{1}{2\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)};$$

$$C=\frac{3\,(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)}{6\,(\operatorname{sen}x+\cos x)^2\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)}=\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{2\,(\operatorname{sen}x+\cos x)\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)}.$$

Por consiguiente,

$$A=\frac{\operatorname{sen}x}{(\operatorname{sen}x+\cos x)\,(1-\operatorname{sen}x\cos x)}.$$

Si tenemos en cuenta que $1 - \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x$, y aplicamos la identidad algebraica

$$(a+b)\ (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3;$$

obtendremos en definitiva que

$$A = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}.$$

Nos referiremos a la segunda cuestión del problema. La forma definitiva de la expresión dada muestra que ésta puede transformarse en cero sólo para áquellos valores de x cuando $\operatorname{sen} x = 0$. No obstante, para estos valores de x la expresión inicial *pierde su sentido*: la presencia del $\operatorname{sen} x$ en el denominador y del $\operatorname{cotg} x$ presupone que la expresión inicial se considera para $x \neq k\pi$, donde k es un número entero. Por eso, *la expresión dada no puede convertirse en cero para cualesquiera que sean los valores de x.*

¿Y cómo explicar entonces el hecho de que la expresión definitiva se convierte en cero con algunos valores de x y la expresión inicial para estos valores de x no tiene sentido? Resulta que en el proceso de las transformaciones de la expresión inicial habíamos *ampliado* su campo de determinación. Esto ocurre en el momento en que se reducen el numerador y el denominador del minuendo por $\operatorname{sen}^2 x$; precisamente después de esto, los valores $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots$, cayeron en el campo de los valores admisibles.

Notemos que en el campo de determinación de la expresión inicial no entran ni $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ni siquiera los valores de x, para los cuales las expresiones $\operatorname{sen} x + \cos x$ y $2 \cos x - \operatorname{sen} x$ se convierten en cero (la expresión $1 - \operatorname{sen} x \cos x$ nunca se convierte en cero). Y en lo que se refiere a la expresión definitiva, ésta no tiene sentido para los valores de x cuando $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$, pero tiene sentido para x cuando $2 \cos x - \operatorname{sen} x = 0$ (Hállense las transformaciones después de que los valores indicados de x entraron en el campo de determinación).

Ya hemos examinado detalladamente que las fórmulas trigonométricas son válidas cuando son *admisibles* los valores de los argumentos (véanse, por ejemplo, (3) y (4)). Lo mismo se refiere también a las relaciones (identidades) trigonométricas que se proponen a demostrar a los estudiantes.

En los problemas que exigen fundamentar alguna relación trigonométrica es necesario tener presente que cada relación debemos considerarla *junto* con la descripción del conjunto de valores de los argumentos para los cuales esta es justa. Si el conjunto, en el cual la identidad es válida para la demostración, no se expone en la condición del problema, esto significa que hay que examinar la identidad *en su campo de determinación.* En este caso conviene hallar su campo de determinación y asegurar la validez de la determinación a realizar para *todos* los valores admisibles de los argumentos.

6. *Demostrar la identidad*

$$1 = -\cos 2\alpha \left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi - 2\alpha)\right.$$

A pesar de que en este caso esta identidad es válida, no quiere decir que lo sea para todos los valores de α. En efecto, el primer miembro tiene sentido para cualesquier valores de α (porque no depende de α) y el segundo miembro no está determinado para $\alpha = n\pi$, $\alpha = (\pi/4) + (m\pi/2)$, donde n y m son números enteros. (¡Represente estos valores en el círculo trigonométrico!). Todos los valores de α, excepto los indicados recientemente, son admisibles.

Precisamente, con estos valores de α admisibles tenemos que demostrar la identidad propuesta. Es bastante fácil realizar esta demostración utilizando las fórmulas fundamentales de Trigonometría. Con esto es preciso comprobar solamente que las transformaciones sean válidas para todos los valores de α admisibles.

Para la demostración de las relaciones trigonométricas se toma, por lo común, uno de sus miembros y mediante diferentes operaciones trigonométricas y algebraicas (y también datos del problema) éste se transforma de modo que se obtenga la expresión que se halla en otro miembro de la relación a demostrar. Transformando éstos por separado puede convencerse también de la coincidencia del primero y segundo miembros de la relación que se demuestra.

Sin embargo, en los casos más complejos, cuando se requiere obtener, sobre todo, de una igualdad (dada) la otra (buscada), es bastante difícil percibir en seguida aquellas transformaciones que darían la solución. En tales problemas, al principio *se supone que la relación a demostrar es válida* y ésta se reduce, por diferentes transformaciones, a la igualdad evidente (o dada), "tanteando" de tal modo la vía de resolución

7. *Demostrar que si* $\cos x = \cos a \cos b$ y *si* $x \pm a \neq (2k+1)\pi$, $b \neq (2n+1)\pi$, k, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces

$$1 + \operatorname{tg}\frac{x+a}{2}\operatorname{tg}\frac{x-a}{2} = \sec^2\frac{b}{2}. \tag{9}$$

En este problema, es poco probable que sea posible determinar a primera vista cómo debe transformarse la igualdad dada $\cos x = \cos a \times \cos b$ para llegar (teniendo en cuenta las restricciones) a la igualdad incógnita (9) [1].

---

[1] Llamaremos la atención en cuanto a la esencia de las restricciones impuestas sobre x, a, b: sin éstas, la afirmación del problema sería incorrecta porque la igualdad (9) que nos interesa, tiene un campo de determinación más estrecho que la relación dada $\cos x = \cos a \cos b$. Por ejemplo, para $x = a + \pi$, $b = \pi$, la relación $\cos x = \cos a \times \cos b$ es válida mientras que la igualdad (9) pierde su sentido.

Por lo tanto, *supongamos que la igualdad* (9) *es correcta*, y vamos a transformarla:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}} &= \frac{1}{\cos^2\frac{b}{2}} - 1;\\ \frac{\cos a - \cos x}{\cos a + \cos x} &= \frac{1-\cos b}{1+\cos b};\\ \cos x &= \cos a \cos b. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Como resultado de los cálculos realizados hemos llegado a una igualdad que *es correcta según los datos del problema.*

En esta etapa algunos estudiantes cometen un grave error lógico sacando la conclusión inmediata: "Por consiguiente es también correcta la igualdad (9) propuesta para la demostración". En realidad, hasta ahora no hay razón alguna para hacer tales conclusiones: los cálculos realizados *no demuestran* la validez de la igualdad requerida. Hablando en rigor hemos demostrado que si la igualdad (9) es válida, entonces $\cos x = \cos a \cos b$, es decir, hemos demostrado la aseveración *contraria* a la que se exige en el problema.

Luego, para resolver el problema propuesto se puede razonar así. Consideraremos los cálculos realizados (10) como simple *búsqueda* de las vías de resolución, como "borrador". Y en calidad de resolución "en limpio", efectuaremos todas estas transformaciones *en la sucesión contraria*, partiendo de la igualdad dada $\cos x = \cos a \cos b$.

Precisamente, tomemos la igualdad *correcta* (según la condición del problema) $\cos x = \cos a \cos b$, multipliquemos por 2 ambos miembros y escribamos el resultado en forma

$$-\cos x + \cos a \cos b = \cos x - \cos a \cos b.$$

Adicionando la expresión $\cos a - \cos b \cos x$ a ambos miembros, obtenemos

$$(\cos a - \cos x)(1 + \cos b) = (\cos a + \cos x)(1 - \cos b).$$

Ya que $x \pm a \neq (2k+1)\pi$, entonces $\cos a + \cos x \neq 0$; ya que $b \neq \neq (2n+1)\pi$, entonces $1 + \cos b \neq 0$. Por eso [1] ambos miembros de esta última igualdad pueden dividirse por el producto $(\cos a + \cos x) \times \times (1 + \cos b)$; de aquí obtendremos una igualdad *correcta*

$$\frac{\cos a - \cos x}{\cos a + \cos x} = \frac{1 - \cos b}{1 + \cos b}.$$

Transformemos en productos la suma y la diferencia de los cosenos de su primer miembro, y para el segundo miembro apliquemos las

[1] Vemos que las restricciones indicadas en la condición del problema se utilizan esencialmente: sólo con estas restricciones podemos realizar a la inversa las transformaciones hechas en "borrador".

fórmulas del semiángulo:

$$\frac{2\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{2\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}}=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{b}{2}}{\cos^2\frac{b}{2}}.$$

Ahora, en el primer miembro nos queda por pasar a las tangentes y, en el segundo, expresar el seno del ángulo $b/2$ por su coseno para obtener la igualdad requerida (9).

Pero, se puede de hecho prescindir de los cálculos a la inversa. Es preciso demostrar solamente que todas las transformaciones, con ayuda de las cuales hemos pasado, en la fórmula (10), de la igualdad (9) a la relación $\cos x = \cos a \cos b$, en el campo de determinación de (9) son *reversibles* (o sea, no sólo de cada igualdad obtenida en el curso de transformaciones resulta la consecuente, sino que la misma se deduce de la consecuente). Este método de consideraciones ya lo hemos discutido en el § 8, de la Parte I con arreglo a la demostración de las desigualdades; es totalmente aplicable también para fundamentar las igualdades (incluso las trigonométricas).

Pues, así, debemos analizar una vez más las transformaciones (10). Es fácil convencerse de que todas estas son reversibles (en particular, la transición de la segunda igualdad (10) a la tercera es precisamente reversible a causa de las restricciones superpuestas en la condición del problema sobre x, a, b). Los cálculos (10), provistos de la demostración de reversibilidad de cada transformación, pueden considerarse como solución completa: en este caso éstos permiten sacar conclusiones de la validez de la igualdad inicial (9) (en su campo de determinación).

En resumen, propongamos un problema más sobre la demostración de una relación trigonométrica que se resuelve aplicando un procedimiento artificial.

8. *Demostrar que para cualquier n entero positivo es válida la igualdad*

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}=2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{(n+1)\pi}{6}.$$ [1]

Para abreviar la fórmula, designaremos por S el primer miembro de esta igualdad, lo multiplicaremos por sen $(\pi/6)$ y todos los productos de los senos los desarrollaremos en diferencias de los cosenos:

$$S\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{3\pi}{6}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\cos\frac{2n-1}{6}\pi-\cos\frac{2n+1}{6}\pi\right)\right].$$

[1] En el problema 8, del § 3 de la Parte I, esta relación fue demostrada por el método de inducción matemática.

Notando que todos los sumandos intermedios de la suma obtenida se eliminan recíprocamente, hallaremos que

$$S \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{2n+1}{6} \pi \right] = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{n+1}{6} \pi,$$

$$S = 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{(n+1)\pi}{6}.$$

El primer miembro de la igualdad a demostrar coincidió de esa manera con su segundo miembro, lo que comprueba su validez [1].

EJERCICIOS:

1. Comprobar la validez de la igualdad

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Está propuesto: $\operatorname{sen} x = 1/4(\sqrt{5}-1)$. Calcular $\operatorname{sen} 5x$.

3. Está propuesto: $\operatorname{sen} x = 1/4(\sqrt{5}-1)$. Demuéstrese que en este caso $\cos 4x = \operatorname{sen} x$ y hállese en grados el ángulo x que se encuentra entre los límites de 0 a 90°.

4. Exprésese $\cos(\alpha/2)$ y $\operatorname{sen}(\alpha/2)$ por $\operatorname{sen}\alpha$, si $270^\circ \leqslant \alpha \leqslant 450^\circ$.

5. Demuéstrese que la expresión $y = \cos^2 x + \cos^2(x+\alpha) - 2\cos\alpha\cos x \times \cos(x+\alpha)$ no depende de x.

6. Simplificar la expresión

$$\frac{2 \operatorname{sen} 2x \left(\operatorname{sen} x \cos x + \dfrac{\cos^3 x \operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} \right)}{\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}} + \frac{\cos^2 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

7. Simplificar la expresión

$$\frac{1}{2\sqrt{-a^2-ab}} \left(\frac{\dfrac{\sqrt{-a^2-ab}}{\cos^2 x}}{a+\sqrt{-a^2-ab}\operatorname{tg} x} - \frac{\dfrac{\sqrt{-a^2-ab}}{\cos^2 x}}{-a+\sqrt{-a^2-ab}\operatorname{tg} x} \right),$$

donde $a^2+ab<0$.

8. Simplificar la expresión

$$\frac{(\operatorname{tg} x)^{-1/2}}{\cos^2 x} - \frac{\left[1+(2\operatorname{tg} x)^{-1/2}\right]\left[\operatorname{tg} x-(2\operatorname{tg} x)^{1/2}+1\right]-\left[1-(2\operatorname{tg} x)^{-1/2}\right]\left[\operatorname{tg} x+(2\operatorname{tg} x)^{1/2}+1\right]}{2\sqrt{2}\cos^2 x\left[\operatorname{tg} x+(2\operatorname{tg} x)^{1/2}+1\right]\left[\operatorname{tg} x-(2\operatorname{tg} x)^{1/2}+1\right]} +$$
$$+ \frac{(\operatorname{tg} x-1)(2\operatorname{tg} x)^{-1/2}-(2\operatorname{tg} x)^{1/2}}{\sqrt{2}\cos^2 x(\operatorname{tg} x-1)^2}\left[1+2\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x-1)^{-2}\right]^{-1}.$$

---

[1] El lector puede convencerse de que el método expuesto es aplicable también a otros problemas. Por ejemplo, éste permite calcular sumas de la forma $s_1 = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+h) + \ldots + \operatorname{sen}(x+nh)$; $s_2 = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$ y así sucesivamente (para esto es suficiente examinar las expresiones $s_1 \cdot \operatorname{sen}(h/2)$ y $s_2 \cdot \operatorname{sen}(x/2)$, respectivamente).

Hallar todos los valores de x para los cuales esta expresión es igual a $3^{3/4}$.

9. Simplificar la expresión

$$\frac{2 \operatorname{sen} a \cos x(1-\cos a \cos x)-\operatorname{sen} 2a \operatorname{sen}^2 x}{2(1-\cos a \cos x)^2} \cdot \left[1-\frac{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 x}{(1-\cos a \cos x)^2}\right]^{-1/2},$$

si $0 < a < \pi/4$, $\pi/4 < x < \pi/2$.

10. Demostrar la identidad

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}.$$

11. Demostrar que para $0 < x < \pi/2$

$$\sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{sen} x}+\sqrt{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}=2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

12. Representar la expresión $-\operatorname{tg}(x/2)+\cos x+\operatorname{sen} x$ en forma del producto.

13. Simplificar la expresión

$$\operatorname{sen}(a-b)+\operatorname{sen}(b-c)+\operatorname{sen}(c-a)+4\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{c-a}{2}.$$

14. Despejando θ y φ de las relaciones

$$a\operatorname{sen}^2\theta+b\cos^2\theta=1,$$
$$a\cos^2\varphi+b\operatorname{sen}^2\varphi=1,\quad a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi,$$

hallar la dependencia entre a y b, si $0 < b < 1$, $a > 1$.

15. Despejando θ y φ de las relaciones

$$p\operatorname{cotg}^2\theta+q\operatorname{cotg}^2\varphi=1,\quad p\cos^2\theta+q\cos^2\varphi=1,$$
$$p\operatorname{sen}\theta=q\operatorname{sen}\varphi,$$

hallar la dependencia entre p y q.

16. Se da: $\operatorname{tg} x=2b/(a-c)$, $a\neq c$. Calcular las expresiones siguientes: $y=a\cos^2 x+2b\operatorname{sen} x\cos x+c\operatorname{sen}^2 x$; $z=a\operatorname{sen}^2 x-2b\operatorname{sen} x\cos x+c\cos^2 x$.

17. Calcular sin recurrir a las tablas, que

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

18. Demostrar que

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

19. Demostrar que $\operatorname{tg} 142°30'=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

20. ¿Para los cuáles valores de α y β, de la igualdad $\cos(2\alpha+\beta)=1$ se deduce la igualdad $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}(\beta/2)$?

21. Demostrar que $\operatorname{sen}(\alpha+2\beta)=\operatorname{sen}\alpha$, si $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=0$.

22. Hallar $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ si $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\sqrt{7}/2$ y el ángulo α se encuentra entre 0° y 45°.

23. Demostrar que $\alpha+2\beta=45°$ si α y β son los ángulos del primer cuadrante y $\operatorname{tg}\alpha=1/7$, $\operatorname{sen}\beta=1/\sqrt{10}$.

24. Demostrar que $\cos(\alpha-\beta)=(aA+bB)/(aB+bA)$ si $\operatorname{sen}(x-\alpha)/\operatorname{sen}(x-\beta)=a/b$, $\cos(x-\alpha)/(\cos(x-\beta)=A/B$ y $aB+bA\neq 0$.

25. Calcular la expresión $\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)+p\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$, sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$ son las raíces de la ecuación $x^2+px+q=0$.

26. Transformar la expresión $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ en una suma de senos a condición de que $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$.

27. Simplificar la expresión $\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

28. La suma de tres números positivos α, β, γ es igual a $\pi/2$. Calcular el producto $\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\gamma$ si se conoce que $\operatorname{cotg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\beta$, $\operatorname{cotg}\gamma$ forman una progresión aritmética.

29. Demostrar que

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2},$$

si α, β, γ son los ángulos de un triángulo.

30. Demostrar que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, si $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$, $0<\gamma<\pi/2$ y $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}$.

§ 3. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los estudiantes tienen que saber escribir las fórmulas que presenten las soluciones de las ecuaciones trigonométricas *elementales*: $\operatorname{sen} px=a$, $\cos qx=b$, etc. A veces, al escribir las soluciones de tales ecuaciones se encuentran errores que se explican por el dominio inseguro o la comprensión incorrecta de los símbolos arc sen α, arc cos α y de otros.

Consideraremos por ejemplo, la ecuación $\cos x=-1/2$. A veces se oye decir que "la solución de esta ecuación será $x=\pm(-\pi/3)+2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera". Tal respuesta denuncia la incomprensión del símbolo arc cos $(-1/2)$ (véase el § 5, Parte II). Esta magnitud se calcula correctamente por muchos estudiantes: $\arccos(-1/2)=\pi-(\pi/3)$, pero la respuesta se escribe, no se sabe por qué, en la forma $x=\pm\pi-(\pi/3)+2k\pi$ en lugar de la forma correcta $x=\pm(2\pi/3)+2k\pi$.

También se cometen errores graves cuando se aplican automáticamente tales o cuales fórmulas. Así pues, al resolver la ecuación $\operatorname{sen} x=(\sqrt{5}+1)/2$ a veces se da la respuesta siguiente:

$$x=(-1)^k\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}+1}{2}+k\pi,\quad \text{para } k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

mientras que esta ecuación no tiene raíces (porque $(\sqrt{5}+1)/2>1$).

Los estudiantes, de vez en cuando, las soluciones de las ecuaciones trigonométricas las escriben en grados. Claro que esto es admisible, aunque es preferible que la solución se dé en radianes, considerando a x como *número* y no como ángulo. Sin embargo, no conviene del todo utilizar anotación en la cual figuren a la vez los grados y los radianes (por ejemplo, $x=(-\pi/8)+90^\circ\cdot k$).

La ecuación de la forma

$$a\operatorname{sen}x+b\cos x=c \tag{1}$$

es próxima a las ecuaciones trigonométricas elementales; a ésta se reducen muchas ecuaciones. Las ecuaciones del tipo (1) se resolverán mejor aplicando *el método de introducción de un ángulo auxiliar* (véase § 2, Parte II).

1. *Resolver la ecuación*

$$\cos x + \sqrt{3}\ \mathrm{sen}\ x = 2\cos 2x.$$

Aquí es más cómodo transformar el primer miembro al *coseno* de la diferencia (determinando el ángulo auxiliar dentro de los límites de 0 a $\pi/2$):

$$\cos x + \sqrt{3}\ \mathrm{sen}\ x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

después de lo cual la ecuación toma la forma $\cos[x-(\pi/3)] = \cos 2x$. Si transformaramos el primer miembro al seno de la suma $\cos x + \sqrt{3}\ \mathrm{sen}\ x = 2\ \mathrm{sen}\ [x+(\pi/6)]$, entonces, después de permutar al primer miembro $2\cos 2x$, tendríamos que aplicar también la fórmula del ángulo auxiliar para pasar al producto de las funciones trigonométricas [1]. No obstante, ahora podemos realizar esto inmediatamente:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = 0, \quad \mathrm{sen}\ \frac{9x-\pi}{6}\ \mathrm{sen}\ \frac{3x+\pi}{6} = 0;$$

de aquí obtenemos dos series de soluciones:

$$x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad \text{para } k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad \text{para } n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Las ecuaciones trigonométricas casi siempre tienen varias series de soluciones. Es importante comprender que los números k y n que entran en distintas series *de ninguna manera están ligados entre sí*. Al mismo tiempo, la solución obtenida puede ser escrita en otra forma:

$$x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{para } k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;$$

sin embargo, en este caso se sobreentiende que en *cada una* de estas igualdades el número k toma, *independientemente* de otro, todos los valores enteros.

En caso de que el ángulo auxiliar resulta ser "bueno" (por ejemplo, $\pi/3$, $\pi/4$, etc.), los estudiantes resuelven siempre tales ecuaciones (1) recurriendo al método expuesto. Y si el ángulo auxiliar no es igual

---

[1] Las ecuaciones de la forma $\cos[x-(\pi/3)] = \cos 2x$ o bien, $\mathrm{sen}\ [x+(\pi/6)] = \cos 2x$ se resuelven a menudo no por el método indicado por nosotros, sino que se utilizan las relaciones entre α y β que se deducen de las igualdades $\cos\alpha = \cos\beta$ ó $\mathrm{sen}\,\alpha = \cos\beta$ (véase ejercicio 1). Sin embargo, la experiencia enseña que en este caso los estudiantes cometen errores relacionados con la aplicación incorrecta de estas relaciones. No hay necesidad de aprender estas relaciones porque su utilización no conduce a la disminución de los cálculos.

a ninguno de los valores bien conocidos, son pocos los que resuelven ecuaciones de tal modo: la sustitución universal y la elevación al cuadrado son de uso común.

Esto se explica, por lo visto, por cierta adversión a los símbolos arc sen a y otros; en este caso "malo", el ángulo auxiliar sólo puede anotarse como arc seno o arc coseno de un número (de una expresión) que "no se deja calcular". No obstante, hay que subrayar que tal inconveniencia es insignificante en comparación con las dificultades que nos esperan al aplicar otros métodos [1].

2. *Resolver la ecuación*

$$2 \operatorname{sen} 4x + 16 \operatorname{sen}^3 x \cos x + 3 \cos 2x - 5 = 0.$$

Surge un método bastante natural: expresar sen $4x$ por funciones trigonométricas del ángulo x:

$$2 \operatorname{sen} 4x = 8 \operatorname{sen} x \cos x - 16 \operatorname{sen}^3 x \cos x.$$

Ahora ya se ve que la ecuación propuesta se reduce a la forma (1):

$$4 \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 2x = 5. \qquad (2)$$

Sea α el ángulo entre 0 y $\pi/2$ que satisface a las expresiones sen $\alpha = 3/5$, $\cos \alpha = 4/5$, es decir, $\alpha = \operatorname{arc\,sen} 3/5$. En este caso la ecuación (2) es equivalente a la ecuación sen $(2x + \alpha) = 1$, de donde

$$x = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{3}{5} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Las expresiones que determinan el ángulo auxiliar α permiten elegir $\alpha = \operatorname{arc\,cos} 4/5$ que presenta otra forma de solución:

$$x = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{4}{5} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

o bien, elegir $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 3/4$; entonces

$$x = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En fin, se podría introducir el ángulo auxiliar β, $0 < \beta < \pi/2$, de modo que la ecuación (2) se reduzca a la forma $\cos (2x - \beta) = 1$. Para esto es suficiente elegir $\beta = \operatorname{arc\,sen} 4/5$ ó $\beta = \operatorname{arc\,cos} 3/5$; la solu-

[1] En efecto, la sustitución universal, o sea, el cambio del seno y del coseno por la tangente del semiángulo, reduce el campo de valores admisibles, lo que puede conducir a la pérdida de raíces (véase el problema 15 del § 9, Parte I). La operación de elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación puede dar lugar a la adquisición de soluciones (véase § 9, Parte I). Por consiguiente estos métodos exigen investigaciones complementarias, mientras que el método de introducción del ángulo auxiliar nos da inmediatamente una ecuación equivalente elemental. Por esto se recomienda su aplicación para resolver las ecuaciones del tipo (1).

ción se escribe, respectivamente, en forma de

$$x=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}+k\pi,\ \text{para } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

o bien,

$$x=\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+k\pi,\ \text{para } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Es fácil convencerse de que las fórmulas obtenidas son solamente diferentes formas de anotación de las soluciones de la ecuación (2), o sea, todas éstas pueden ser transformadas una en otra (véase el § 5, Parte II).

3. *Resolver la ecuación*

$$tg\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)-\operatorname{cotg}(\pi\ \operatorname{sen} x)=0.$$

Esta ecuación parece insólita a causa de los argumentos "exóticos" de la tangente y la cotangente. Pero, en realidad aquí no hay nada excepcional: para cualquier x, los números sen x y cos x son totalmente determinados ya que tienen sentido determinado la tangente del número $(\pi/2)\cos x$, si $\cos x\neq\pm 1$, y la cotangente del número π sen x, si sen $x\neq 0$, sen $x\neq\pm 1$. Estas condiciones describen el RVA de la ecuación inicial.

Transformando la diferencia de la tangente y la cotangente y omitiendo el denominador, llegaremos a la ecuación

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x+\pi\operatorname{sen} x\right)=0; \tag{3}$$

es necesario resolver esta ecuación y tomar sus raíces que entran en el RVA de la ecuación inicial.

De la ecuación (3) obtenemos

$$\frac{\pi}{2}\cos x+\pi\operatorname{sen} x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Ahora deben hallarse *todas* las raíces de la ecuación para *cada k* entero:

$$2\operatorname{sen} x+\cos x=2k+1 \tag{4}$$

del tipo (1). La ecuación (3) "se descompone" por lo tanto, en un número *infinito* de ecuaciones, y para obtener todas sus raíces se ha de buscar todas las raíces de la ecuación (4) correspondiente a $k=0$, todas las raíces de la ecuación (4) correspondiente a $k=1$, todas las raíces de la ecuación (4) que corresponde a $k=-1$, etc.

Esta particularidad del problema desorienta a algunos estudiantes. Unos obtienen de la ecuación (3) la relación $(\pi/2)\cos x+\pi\times$ $\times\operatorname{sen} x=\pi/2$ perdiendo de tal modo parte de las raíces; otros consideran que el número k de la ecuación (4) ha de asumir un valor completamente determinado y en vano tratan de hallar este valor de k de la ecuación (3).

No es difícil buscar todas las raíces del número infinito de ecuaciones (4). Introduciendo el ángulo auxiliar, por ejemplo, según la fórmula $\beta = \arccos(1/\sqrt{5})$, podemos reducir las ecuaciones (4) a la forma

$$\cos(x-\beta) = \frac{2k+1}{\sqrt{5}}, \quad \text{para } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5}$$

Resolviendo la desigualdad $-1 \leqslant (2k+1)/\sqrt{5} \leqslant 1$, nos convencemos fácilmente de que ésta tiene dos soluciones *de números enteros*: $k=0$ y $k=-1$. Por consiguiente, de todo el número infinito de ecuaciones (5) es preciso hallar solamente las raíces de las *dos* ecuaciones correspondientes a los valores de $k=0$ y $k=-1$:

$$\cos(x-\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \cos(x-\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

las ecuaciones (5) correspondientes a todos los demás valores de k, no tienen raíces.

Las raíces de las dos ecuaciones obtenidas las anotaremos en forma de cuatro series (x_1 y x_2 son las series de la primera ecuación, x_3 y x_4, las de la segunda [1]):

$$x_1 = \beta + \operatorname{arccos}\frac{1}{\sqrt{5}} + 2n\pi = 2\operatorname{arccos}\frac{1}{\sqrt{5}} + 2n\pi$$
$$\text{para } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$x_2 = \beta - \operatorname{arccos}\frac{1}{\sqrt{5}} + 2m\pi = 2m\pi \quad \text{para } m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x_3 = \beta + \operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2p\pi = (2p+1)\pi \text{ para } p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$x_4 = \beta - \operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2q\pi = 2\operatorname{arccos}\frac{1}{\sqrt{5}} + (2q-1)\pi$$
$$\text{para } q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Sin embargo, no todas estas series entran en el RVA de la ecuación inicial: para cualquier raíz de las series segunda y tercera es evidente que $\operatorname{sen} x = 0$ debido a que no existe $\operatorname{cotg}(\pi \operatorname{sen} x)$. Por consiguiente, estas series no pueden ser soluciones de la ecuación inicial. En lo que se refiere a las raíces de las series primera y cuarta, todas éstas entran en el RVA de la ecuación inicial: los cálculos requeridos (que pueden realizarse, por ejemplo, análogamente a la resolución de los ejemplos 2—4 dados en el § 5, Parte II) señalan que para estas raíces $\cos x \neq \pm 1$, $\operatorname{sen} x \neq 0$, $\operatorname{sen} x = \pm 1$. Pues así, la

[1] Al transformar la tercera serie se ha utilizado la expresión obtenida en el problema 10 del § 5, Parte II.

solución de la ecuación inicial comprende dos series x_1 y x_4 indicadas anteriormente.

A veces, algunas series de raíces de la ecuación trigonométrica se logran reuniéndolas mediante una sola fórmula. Por ejemplo, en el problema considerado, las series x_1 y x_4 son fáciles de representar en la forma

$$x = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + l\pi \quad \text{para } l = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

(los valores pares de $l = 2n$ dan la primera serie y los impares de $l = 2q - 1$, la cuarta serie). Sin embargo, esta agrupación no es obligatoria (y no siempre es cómoda); se puede dejar la respuesta definitiva en forma de varias series.

Las ecuaciones trigonométricas contienen expresiones trigonométricas más o menos complejas. Como se sabe, no existe un método único con cuya ayuda se podría resolver cualquier ecuación de funciones trigonométricas. Pero, la finalidad consiste en la transformación de las expresiones trigonométricas, que forman parte de la ecuación, de modo que la ecuación considerada se reduzca a una elemental, o bien "se descomponga" en unas elementales.

En cada ejemplo concreto se ha de aplicar su propio método de transformación de la ecuación considerada. De vez en cuando resulta necesario variar diferentes transformaciones, probar distintas ideas de que se elija el método que conduzca a la solución.

Y sólo el buen conocimiento de las fórmulas trigonométricas y el dominio correcto de las transformaciones trigonométricas (véase el § 2, Parte II) pueden proporcionarnos el éxito; esto puede lograrse sólo con una práctica intensiva.

Muchas ecuaciones trigonométricas admiten distintos métodos de resolución: en dependencia de la idea en que se basa la resolución, cómo se transforman las expresiones trigonométricas que entran en la ecuación. Subrayemos que en este caso la forma de anotación de las soluciones depende a menudo del método elegido para la resolución, y si queremos demostrar la equivalencia de dos formas diferentes de anotación de la solución, tendremos que recurrir a las transformaciones complementarias.

Esto tiene importancia porque los estudiantes, después de resolver una ecuación trigonométrica, a veces empiezan a resolverla, "para el control", de otro modo y obtienen una solución distinta, la cual se toma como una confirmación de que la primera solución es incorrecta; los estudiantes tratan de encontrar errores inexistentes gastando para ello mucho tiempo y esfuerzos en lugar de realizar las transformaciones requeridas de las soluciones y convencerse de su identidad.

Además, se requiere resolver la ecuación trigonométrica propuesta aplicando otro método cualquiera (es deseado: por un método más sencillo y breve), sin recurrir a otras formas de transformaciones de la solución.

En el proceso de las transformaciones de la ecuación se ha de observar la equivalencia para que no se pierdan las raíces (por ejemplo, al dividir el primero y segundo miembros de la ecuación por un factor común) ni se adquieran raíces extrañas (por ejemplo, al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación). Además de esto, es necesario controlar por separado si las raíces obtenidas de la ecuación considerada pertenecen al RVA. En todos los casos necesarios (o sea, cuando se han realizado las transformaciones no equivalentes), debe, obligatoriamente, realizarse la comprobación.

Todas las cuestiones similares referentes a *la resolución de las ecuaciones* (incluso las trigonométricas), así como algunos ejemplos son considerados detalladamente en el § 9, Parte I. Por eso, aquí no nos detendremos especialmente en estos casos.

Los ejemplos que se examinan a continuación, en términos generales solamente ilustran recomendaciones que deben ser tenidas en cuenta, al resolver las ecuaciones *trigonométricas*. Sin embargo, no hace falta pensar que estas recomendaciones tienen un carácter universal y que en todos los casos conducen a las soluciones.

Es sumamente conveniente resolver muchas ecuaciones trigonométricas que contienen el seno, el coseno y la tangente, pasando previamente a una sola función cualquiera. En particular, a veces se logra simplificar la ecuación con ayuda de la sustitución universal, es decir, la sustitución de todas las funciones trigonométricas integrantes, por la tangente del semiángulo.

Sin embargo, es necesario recordar que esta transformación reduce el RVA y por eso puede provocar *la pérdida de raíces* (véase el problema 15 del § 9, Parte I). Por lo tanto, la sustitución universal debe acompañarse de las investigaciones complementarias requeridas.

4. *Resolver la ecuación*

$$(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{sen} 2x)=1+\operatorname{tg} x.$$

Son muchos los métodos para resolver esta ecuación. Pero, lo más pronto que conduce a la solución es la sustitución universal: expresando sen $2x$ por tg x, obtenemos la ecuación

$$(1-\operatorname{tg} x)\left(1+\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)=1+\operatorname{tg} x,$$

que es *equivalente* a la inicial (ya que tg x existe en el RVA de la ecuación inicial). Reduciendo el segundo factor del primer miembro a un denominador común y despejando el denominador (esto es posible, porque $1+\operatorname{tg}^2 x\neq 0$), llegamos a una ecuación "descomponente" $\operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg} x)=0$ que tiene dos series de soluciones:

$$x_1=k\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{4}+n\pi;\quad k,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Los estudiantes, al resolver las ecuaciones trigonométricas que contienen las funciones trigonométricas de los argumentos múltiplos, a veces se esfuerzan por pasar a las funciones del propio argumento; en este caso resulta una ecuación algebraica de alto grado respecto a sen x (o cos x). No obstante, en muchos casos es más cómodo pasar *de los cuadrados de las funciones trigonométricas a las funciones de argumento doble*, aplicando las fórmulas

$$\cos^2 x = 1/2\,(1+\cos 2x), \quad \operatorname{sen}^2 x = 1/2\,(1-\cos 2x), \tag{6}$$

disminuyendo de tal modo la potencia de la ecuación obtenida. Este procedimiento reduce los cálculos y, además de esto, permite anotar automáticamente la respuesta en la forma más compacta.

5. *Resolver la ecuación*

$$\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Es fácil reducir el segundo miembro de esta ecuación a la forma $1/2+\cos 4x$. Luego, si expresamos $\cos 4x$ por $\cos x$ y en el primer miembro de la ecuación inicial sustituimos $\operatorname{sen}^2 x$ por $1-\cos^2 x$, entonces ésta se reducirá a la ecuación bicuadrada $12\cos^4 x-12\cos^2 x+1=$ $=0$ (respecto a cos x).

Designando por y la expresión $\cos^2 x$, obtendremos una ecuación de segundo grado $12y^2-12y+1=0$ cuyas soluciones son:

$$y_1=\frac{3-\sqrt{6}}{6}, \quad y_2=\frac{3+\sqrt{6}}{6}.$$

La primera raíz y_1 nos lleva a la ecuación $\cos^2 x=(3-\sqrt{6})/6$; puesto que $0<y_1<1$, ésta se descompone a su vez en dos ecuaciones:

$$\cos x=\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}} \quad \text{y} \quad \cos x=-\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}},$$

de donde obtenemos dos series de soluciones de la ecuación inicial. Análogamente, la segunda raíz y_2 conduce más a dos series de soluciones de la ecuación inicial (el mismo lector puede escribir todas las cuatro series de ecuaciones).

Naturalmente, la solución expuesta no hace ningunas objeciones por esencia porque es del todo correcta. Pero, es mejor y más económico otro procedimiento de solución de la ecuación inicial, que permite reducir todo a la consideración de *una* ecuación trigonométrica elemental y obtener la respuesta en forma de una sola fórmula.

En la ecuación $\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x=1/2+\cos 4x$ transformaremos no $\cos 4x$ sino que, al contrario, expresaremos $\cos^4 x$ y $\operatorname{sen}^4 x$ por el coseno del argumento cuádruplo, para lo cual aplicaremos la fórmula (6). Cálculos bastante sencillos nos conducirán en seguida a la ecuación $\cos 4x = 1/3$, de donde

$$x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Notemos en particular que la aplicación de la fórmula (6) siempre permite resolver la ecuación *cuadrada* respecto a $\cos 2x$, en lugar de la ecuación *bicuadrada* respecto a $\cos x$ (o $\operatorname{sen} x$), que exige menos cálculos y permite escribir la solución en una forma más sencilla.

6. *Resolver la ecuación*

$$4 \cos^2 (2 - 6x) + 16 \cos^2 (1 - 3x) = 13.$$

Para abreviar la ecuación, al designar $1 - 3x$ por y, ésta la escribiremos en forma de $4 \cos^2 2y + 16 \cos^2 y = 13$. Claro está que el primer sumando del primer miembro puede transformarse por la fórmula del argumento doble: como resultado se obtendrá la ecuación bicuadrada respecto a $\cos y$. Pero, si transformamos el segundo sumando del primer miembro por la fórmula (6), llegaremos a la ecuación de segundo grado $4 \cos^2 2y + 8 \cos 2y - 5 = 0$.

La ecuación de segundo grado $4z^2 + 8z - 5 = 0$ respecto a $z = \cos 2y$ tiene dos soluciones: $z_1 = -5/2$, $z_2 = 1/2$. Por consiguiente, tenemos que resolver dos ecuaciones: $\cos 2y = -5/2$ y $\cos 2y = 1/2$. Ya que $|\cos 2y| \leqslant 1$, la primera ecuación no tiene raíces, y de la segunda se deducen fácilmente las raíces de la ecuación inicial

$$x = \frac{1}{3} \pm \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Se recomienda al lector que observe por qué la solución puede anotarse en tal forma.

La aplicación acertada de las fórmulas *de transformación del producto de las funciones trigonométricas en la suma (diferencia) de tales funciones (o a la inversa)* conduce a menudo a la solución siguiendo un método más breve. Al resolver las ecuaciones es muy útil calcular mentalmente el resultado de la aplicación de estas fórmulas y ver las posibilidades que se obtengan.

7. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{sen} 4x + 3 \operatorname{sen} 2x = \operatorname{tg} x.$$

Algunos estudiantes proceden del modo siguiente: al multiplicar esta ecuación por $\cos x$ y aplicar las fórmulas del argumento doble, llegan a la ecuación

$$\operatorname{sen} x (8 \cos^4 x + 2 \cos^2 x - 1) = 0,$$

que se resuelve luego por métodos ya conocidos.

Mientras tanto, es más fácil proceder de otro modo. Si se desarrollan los productos obtenidos $\operatorname{sen} 4x \cos x$ y $3 \operatorname{sen} 2x \cos x$, una vez multiplicada la ecuación inicial por $\cos x$, en sumas de las funciones trigonométricas, llegaremos a la ecuación $\operatorname{sen} 5x + 4 \operatorname{sen} \cdot 3x + \operatorname{sen} x = 0$. Más adelante, el primer y el tercer sumandos del primer miembro de la última ecuación los transformaremos en un producto de funciones trigonométricas; como resultado obtenemos que $\operatorname{sen} 3x(\cos 2x + 2) = 0$. Esta ecuación "se desintegra" en dos: la primera ($\operatorname{sen} 3x = 0$) da una serie de $x = k\pi/3$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y la segunda, ($\cos 2x + 2 = 0$) no tiene raíces.

Una comprobación (necesaria, dado que la multiplicación por $\cos x$ amplió el RVA) muestra que la serie hallada es la solución de la ecuación inicial.

En muchos casos, al resolver las ecuaciones trigonométricas, se aplica con éxito un método especial: *designación de cierta combinación de funciones trigonométricas por una nueva incógnita y la solución de la ecuación para esta incógnita. Naturalmente, hay que tener una experiencia para ver una combinación apropiada.*

8. *Hallar todas las soluciones de la ecuación*

$$1 + \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x.$$

Se comprende fácilmente que los miembros de la izquierda y de la derecha de esta ecuación se expresan por la suma y el producto $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Utilizando la identidad $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ escribiremos la ecuación considerada en forma de

$$1 + (\operatorname{sen} x + \cos x)(1 - \operatorname{sen} x \cos x) = 3 \operatorname{sen} x \cos x.$$

El producto $\operatorname{sen} x \cos x$ se expresa a su vez por la suma $\operatorname{sen} x + \cos x$ mediante una identidad trigonométrica [1].

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1.$$

Por eso, es natural designar la suma $\operatorname{sen} x + \cos x$ por y y escribir la ecuación inicial en forma de

$$1 + y - y\frac{y^2 - 1}{2} = 3\frac{y^2 - 1}{2}.$$

De esta manera hemos llegado a una ecuación algebraica con la incógnita y. Agrupando todos sus términos del primer miembro y sacando $y + 1$ fuera de paréntesis, obtendremos la ecuación $(y + 1) \times (y^2 + 2y - 5) = 0$, que tiene tres raíces:

$$y_1 = -1,\ y_2 = -1 + \sqrt{6},\ y_3 = -1 - \sqrt{6}.$$

La primera raíz conduce a la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \cos x = -1, \quad \text{o bien} \quad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

[1] En ocasiones resulta útil la fórmula análoga $2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 - (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$.

de donde obtenemos una serie de soluciones:

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En lo que se refiere a la segunda y tercera raíces, estas superan a $\sqrt{2}$ en su magnitud absoluta, mientras que

$$|\operatorname{sen} x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2},$$

y, por consiguiente, estas raíces no dan soluciones de la ecuación inicial.

9. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{tg}^2 2x+\operatorname{cotg}^2 2x+2\operatorname{tg} 2x+2\operatorname{cotg} 2x=6.$$

Notemos que $2\operatorname{tg} 2x \operatorname{cotg} 2x=2$, a razón de que se puede escribir la ecuación dada en forma de

$$(\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x)^2+2(\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x)-8=0.$$

Designando por z la suma $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x$ llegamos de tal modo a la ecuación de segundo grado $z^2+2z-8=0$, cuyas raíces son $z_1=-4$ y $z_2=2$. Ahora tenemos que considerar dos posibilidades correspondientes a cada una de estas raíces:

$$\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x=-4 \text{ y } \operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x=2.$$

Mediante la sustitución de $\operatorname{cotg} 2x$ por $1/\operatorname{tg} 2x$ estas ecuaciones se reducen a las de segundo grado respecto a $\operatorname{tg} 2x$: a cada raíz de la ecuación de segundo grado le corresponde una serie de soluciones.

Si transformamos preliminarmente la suma de la tangente y la cotangente, se exigirán cálculos más fáciles para hallar la solución:

$$\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x=\frac{2}{\operatorname{sen} 4x}.$$

En este caso la raíz z_1 nos conducirá a la ecuación $\operatorname{sen} 4x=-1/2$, de donde obtendremos la primera serie de soluciones

$$x_1=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4} \quad \text{para } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

y la raíz z_2, a la ecuación $\operatorname{sen} 4x=1$ que nos da la segunda serie

$$x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Es fácil convencerse de que todos los valores de ambas series pertenecen al RVA de la ecuación inicial.

A menudo, al resolver las ecuaciones trigonométricas, conduce a la solución la *agrupación* acertada de los términos. Sin embargo, a veces cuesta trabajo encontrar tal agrupación acertada: para esto es ha de buscar diferentes posibilidades.

10. *Resolver la ecuación*

$$4 \text{ sen } x + 2 \cos x = 2 + 3 \text{ tg } x.$$

A primera vista esta ecuación parece bastante sencilla aunque nos dará mucho que hacer. Notemos que el método de resolución con ayuda de la sustitución universal, que aparenta natural, en realidad conduce a la ecuación de cuarto grado respecto a $\text{tg}(x/2)$.

Tratemos de agrupar los miembros de la ecuación considerada de tal modo que resulte una ecuación "desintegrante". Multiplicando todos los miembros de la ecuación inicial por $\cos x$ (naturalmente, en este caso se amplía el RVA y por eso al final deberá verificarse si resultan o no las raíces extrañas) y permutándolos al primer miembro, obtendremos

$$4 \text{ sen } x \cos x + 2 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 \text{ sen } x = 0.$$

¿Puede descomponerse el primer miembro de esta ecuación en factores? En todo caso, no es explícito cómo proceder, y hemos de poner a prueba diferentes variantes.

Es fácil convencerse de que la agrupación del primer término con el segundo, del tercero con el cuarto y del primero con el cuarto y del segundo con el tercero no sirve de nada. Tratemos de agrupar el primer término con el tercero y el segundo con el cuarto:

$$2 \cos x (2 \text{ sen } x - 1) + (2 \cos^2 x - 3 \text{ sen } x) = 0. \qquad (7)$$

Luego, el segundo sumando en (7) puede escribirse en la forma de un trinomio de segundo grado (respecto a $\text{sen } x$): $2 \cos^2 x - 3 \text{ sen } x = 2 - 3 \text{ sen } x - 2 \text{ sen}^2 x$. Pero, el trinomio $2y^2 + 3y - 2$ se descompone fácilmente en factores: $2y^2 + 3y - 2 = (2y - 1)(y + 2)$. Por lo tanto, el segundo sumando de (7) se representa en forma de un producto: $2 \cos^2 x - 3 \text{ sen } x = -(2 \text{ sen } x - 1)(\text{sen } x + 2)$ y, por consiguiente, la ecuación puede anotarse así:

$$(2 \text{ sen } x - 1)(2 \cos x - \text{sen } x - 2) = 0.$$

Esta ecuación "se descompone" en una más simple, $\text{sen } x = 1/2$, de donde

$$x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ,$$

y en la ecuación $\text{sen } x - 2 \cos x = -2$ del tipo (1), de donde

$$x_2 = 2n\pi, \; x_3 = -2 \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + 2m\pi;$$
$$\text{para } n, \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Todas las raíces de las tres series obtenidas entran en el RVA de la ecuación inicial, o sea, son sus soluciones.

11. *Resolver la ecuación*

$$\cos(\pi 3^x) - 2\cos^2(\pi 3^x) + 2\cos(4\pi 3^x) - \cos(7\pi 3^x) =$$
$$= \operatorname{sen}(\pi 3^x) + 2\operatorname{sen}^2(\pi 3^x) - 2\operatorname{sen}(4\pi 3^x) + 2\operatorname{sen}(\pi 3^{x+1}) - \operatorname{sen}(7\pi 3^x).$$

Para que la ecuación sea más evidente, designemos $\pi 3^x$ por y; entonces la ecuación considerada tomará una forma común:

$$\cos y - 2\cos^2 y + 2\cos 4y - \cos 7y =$$
$$= \operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen}^2 y - 2\operatorname{sen} 4y + 2\operatorname{sen} 3y - \operatorname{sen} 7y.$$

Después de permutar todos los términos al primer miembro y aplicar diferentes métodos de agrupación, puede hallarse como más aceptable:

$$(\cos y - \cos 7y) + (\operatorname{sen} 7y - \operatorname{sen} y) + 2(\cos 4y + \operatorname{sen} 4y) -$$
$$- 2(\cos^2 y + \operatorname{sen} y^2) - 2\operatorname{sen} 3y = 0,$$

de donde

$$2\operatorname{sen} 4y \operatorname{sen} 3y + 2\operatorname{sen} 3y\cos 4y + 2(\cos 4y + \operatorname{sen} 4y) -$$
$$-2(\operatorname{sen} 3y + 1) = 0. \tag{8}$$

Si ahora sacamos fuera del paréntesis $2\operatorname{sen} 3y$ de los primeros dos términos y comparamos la expresión obtenida con el tercer término, será evidente que estos tres términos se representan en forma de un producto de dos factores, uno de los cuales coincide con el último término de la ecuación (8). Por eso la ecuación (8) puede ser escrita en la forma descompuesta:

$$(\operatorname{sen} 3y + 1)(\operatorname{sen} 4y + \cos 4y - 1) = 0,$$

lo que da la posibilidad de escribir tres series de sus soluciones:

$$y_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad y_2 = \frac{n\pi}{2}, \quad y_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{2};$$

donde k, n, m son los números enteros arbitrarios.

Al recordar que $y = \pi 3^x$, llegaremos a un número infinito de ecuaciones para determinar las raíces de la ecuación inicial:

$$\left.\begin{array}{ll} 3^x = -\frac{1}{6} + \frac{2k}{3} & \text{para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \\ 3^x = \frac{\pi}{2} & \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \\ 3^x = \frac{1}{8} + \frac{m}{2} & \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{array}\right\} \tag{9}$$

Es decir, *cualquier* valor de x que satisface a la primera ecuación (9) para *cierto valor entero de k*, es la solución de la ecuación inicial.

Por consiguiente, tenemos que hallar todas las soluciones de la primera ecuación (9) para cada valor entero de k. Lo mismo ocurre con las dos ecuaciones restantes (9).

Algunos estudiantes no comprenden el sentido de las expresiones obtenidas (9) considerándolas como un sistema de ecuaciones, esto es, buscando sólo aquellos valores de x que (para ciertos números enteros de k, n, m) satisfagan a la vez tres ecuaciones (9). A veces se cometen errores cuando se determinan las raíces de las ecuaciones (9). De vez en cuando, las raíces de estas ecuaciones se escriben formalmente (por ejemplo, se afirma que las raíces de la primera ecuación (9) "son los números $\log_3 [(-1/6)+(2k/3)]$, donde k es un número entero cualquiera"), sin recurrir a un análisis correcto y necesario para aquellos valores de k, n, m (como números enteros) para los cuales las ecuaciones (9) tienen soluciones.

Entre tanto, antes de resolver las ecuaciones (9) hay que recordar que la ecuación $3^x = a$ tiene una sola solución (única) para *a positiva*, que se anota por la fórmula $x = \log_3 a$. Por eso, las ecuaciones (9) sólo tienen soluciones para los valores de k, n, m (enteros) cuando los segundos miembros correspondientes de las relaciones (9) son positivos. Es fácil ver que el segundo miembro de la primera ecuación (9) es positivo para *$k>0$ enteros*; el segundo miembro de la segunda ecuación (9), para *$n>0$ enteros*; el segundo miembro de la tercera ecuación (9) para *$m \geqslant 0$ enteros*. De tal modo, sólo para los valores indicados de k, n, m podemos resolver las ecuaciones (9); los valores de x, obtenidos como resultado de lo expuesto, son precisamente soluciones de la ecuación inicial:

$$x = \log_3\left(-\frac{1}{6}+\frac{2k}{3}\right) \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots;$$

$$x = \log_3 \frac{n}{2} \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots;$$

$$x = \log_3\left(\frac{1}{8}+\frac{m}{2}\right) \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots.$$

A menudo nos encontramos con problemas en que se exige buscar no todo el conjunto de raíces de una ecuación trigonométrica sino aquéllas que satisfagan las condiciones complementarias indicadas en el problema (por ejemplo, cuales se hallan entre los límites determinados).

Estos problemas pueden resolverse del modo siguiente: se escriben todas las raíces de la ecuación que se tienen que resolver, y después se escogen aquéllas para las cuales se verifican las condiciones complementarias. Por lo demás, a veces resulta más fácil prescindir las soluciones de la ecuación, hallando inmediatamente las necesarias.

12. *Hallar todas las soluciones de la ecuación*

$$\sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0, \tag{10}$$

comprendidas entre π *y* $3\pi/2$.

Esta ecuación se puede resolver elevándola al cuadrado, pero en este caso, al final de la resolución tendremos que omitir todas las raíces extrañas y de las que queden, escoger aquéllas que satisfagan la desigualdad $\pi<x<3\pi/2$. Vamos a elegir otro método de solución.

Dado que $\sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}=|\operatorname{sen} x+\cos x|$, la ecuación (10) puede escribirse así:

$$|\operatorname{sen} x+\cos x|-\sqrt{2}\cos 3x=0.$$

Para resolver esta ecuación hay que deshacerse del módulo. Sin embargo, no hay que considerar todos los casos posibles. En efecto, debemos hallar sólo aquellas raíces de esta ecuación que satisfagan la desigualdad $\pi<x<3\pi/2$. Pero, el seno y el coseno son negativos en el tercer cuadrante (¡en el intervalo que nos interesa!), a consecuencia de lo cual la ecuación inicial se reduce a la forma

$$(\operatorname{sen} x+\cos x)+\sqrt{2}\cos 3x=0,$$

o bien, una vez realizadas las transformaciones evidentes,

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{ocs}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=0.$$

Luego, se describen en la forma habitual las series de soluciones se esta ecuación "desintegrante" escogiendo de estas series aquellas daíces que se encuentran entre π y $3\,\pi/2$. Se puede proceder también rin estos cálculos obteniendo de inmediato la respuesta que nos interesa.

En realidad, examinemos primeramente la ecuación $\cos[2x-(\pi/8)]=0$, o buen, designando $2x-(\pi/8)$ por t, la ecuación $\cos t=0$. Nos interesan sólo los valores de x que satisfacen la desigualdad $\pi<x<3\pi/2$; de aquí se deduce que

$$2\pi-\frac{\pi}{8}<2x-\frac{\pi}{8}<3\pi-\frac{\pi}{8}.$$

De esta manera, para nosotros sólo son necesarias las raíces de la ecuación $\cos t=0$ que están comprendidas entre $2\pi-(\pi/8)$ y $3\pi-(\pi/8)$. Recurriendo a la gráfica de la función $y=\cos t$ (fig. 56) es fácil convencerse de que en este intervalo el coseno se convierte en cero una sola vez: en el punto $t=5\pi/2$. Por lo tanto,

$$2x-\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{2}, \quad \text{de donde} \quad x=\frac{21\pi}{16}.$$

Del mismo modo nos convenceremos de que entre π y $3\pi/2$ hay un solo valor de x, a saber: $x=11\pi/8$, que satisface la ecuación $\cos[x+(\pi/8)]=0$.

Muy a menudo se tiene que recurrir al método de escoger las soluciones de una ecuación trigonométrica cuando ésta se obtiene de una ecuación inicial de tipo "combinado" (por ejemplo, de una ecuación que comprende funciones logarítmicas y trigonométricas). En estos casos, las desigualdades que determinan el RVA de la ecuación inicial hacen el papel de condiciones "complementarias".

13. *Resolver la ecuación*

$$\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}(\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} x)=\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}\operatorname{sen} 2x. \tag{11}$$

Se eliminan inmediatamente los logaritmos que participan en el enunciado del problema, pero, sería un error grave afirmar que la ecuación inicial es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} 2x, \tag{12}$$

porque el paso de (11) a (12) *ensancha* el RVA y por eso entre las soluciones de la ecuación (12) pueden encontrarse extrañas.

Por consiguiente, según la afirmación B del § 9, Parte I, para resolver la ecuación inicial (11) es suficiente resolver la ecuación (12)

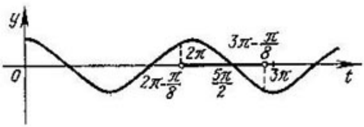

Fig. 56

y tomar sólo aquellas soluciones que entran en el RVA de la ecuación (11), es decir, que satisfacen a las desigualdades

$$\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} x>0,\ \operatorname{sen} 2x>0,\ -6<x<0 \tag{13}$$

(¡obtenga estas desigualdades usted mismo!).

La ecuación (12) se escribe inmediatamente en forma de $2\operatorname{sen}\times\times 2x\cos x=\operatorname{sen} 2x$. Ya que $\operatorname{sen} 2x>0$ en el RVA de la ecuación inicial (véase (13)), al realizar la reducción por $\operatorname{sen} 2x$, obtenemos la ecuación $\cos x=1/2$, de donde

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ para } k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

De estas soluciones tenemos que escoger precisamente aquéllas que satisfacen las condiciones (13).

En este caso será más cómodo examinar dos series de soluciones de las ecuaciones (12), en lugar de una sola fórmula obtenida para las raíces:

$$x_1=\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad x_2=-\frac{\pi}{3}+2m\pi \qquad \text{para } n,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

y para cada una de éstas hallar por separado los valores (enteros) de n y m para los cuales las raíces correspondientes satisfagan las tres desigualdades (13).

Primeramente examinemos la primera serie x_1. La más "fuerte" de las restricciones (13) es, evidentemente, la tercera; por esta razón empezaremos por ésta: esto nos dará la posibilidad de realizar una gran "depuración" entre las soluciones.

Para la primera serie de soluciones de la ecuación (12), la tercera de las desigualdades (13) tiene la forma de

$$-6<\frac{\pi}{3}+2n\pi<0; \tag{14}$$

no debemos olvidar que nos interesan solamente las soluciones en *números enteros* de esta desigualdad. Es más fácil hallar estas soluciones mediante la solucción directa. Es comprensible que para cualquier número entero $n\geqslant0$ el miembro medio de la desigualdad (14) es positivo, y por eso ningún valor entero no negativo de n satisface esta desigualdad. Luego, para cualquier número entero $n\leqslant-2$ tenemos (teniendo en cuenta que $\pi>3$):

$$\frac{\pi}{3}+2n\pi\leqslant\frac{\pi}{3}-4\pi=-\frac{11\pi}{3}<-\frac{11\cdot3}{3}=-11<-6,$$

es decir, ninguno de los valores de número entero de $n\leqslant-2$ satisface la desigualdad (14). Por consiguiente, nos queda por comprobar si el valor de $n=-1$ satisface la desigualdad (14). Ya que con este valor de n el miembro medio de la desigualdad (14) es, evidentemente, negativo y ya que (en vigor de que $\pi<3,2$)

$$\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3}>-\frac{5\cdot3,2}{3}=-5\frac{1}{3}>-6,$$

está claro que el valor de $n=-1$ satisface la desigualdad (14).

Así, de toda la primera serie x_1 de soluciones de la ecuación (12) un solo valor de $x^*=-5\pi/3$ satisface la tercera desigualdad (13). La verificación directa demuestra que este valor satisface también dos [1] otras desigualdades (13), o sea, $x^*=-5\pi/3$ es la raíz de la ecuación inicial (11).

[1] Mientras tanto, es suficiente efectuar esta verificación para establecer solamente la desigualdad sen $2x^*>0$. Si recordamos luego que x^* es la raíz de la ecuación (12), es decir, sen $3x^*+$ sen $x^*=$ sen $2x^*$, será evidente que la desigualdad sen $3x^*+$ + sen $x^*>0$ resulta de la desigualdad sen $2x^*>0$.

Análogamente podríamos examinar la segunda serie x_2 de las soluciones de la ecuación (12), pero llegaremos más rápidamente a la finalidad si comprobamos al principio la segunda de las desigualdades (13). Esta comprobación demuestra que ninguna de las raíces de la segunda serie x_2 satisface la condición sen $2x > 0$ y, por consiguiente, no es una raíz de la ecuación (11).

Se encuentran problemas en los cuales se tienen que escoger también raíces de las ecuaciones trigonométricas, pero por otra causa: hay que hallar sólo aquellas soluciones que son *comunes*, por ejemplo, para *dos* ecuaciones trigonométricas.

14. *Resolver la ecuación* sen $7x + \cos 2x = -2$.

A primera vista puede parecer que este problema no tiene nada de particular. No obstante, a medida que realizamos las transformaciones se esclarece que esta ecuación es de un carácter excepcional: ésta no "se descompone en varias ecuaciones simples, sino se reduce a *un sistema de dos ecuaciones trigonométricas (simplísimas) con una incógnita.*

Escribiendo la ecuación inicial en la forma

$$\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right)\right] + \left[(1 + \cos 2x)\right] = 0$$

y transformando cada uno de los términos entre corchetes, obtendremos la correlación

$$\cos^2\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2 x = 0. \tag{15}$$

Como se sabe, la suma de cuadrados de dos magnitudes es igual a cero cuando y sólo cuando ambas estas magnitudes son iguales a cero. Por consiguiente, la ecuación inicial *es equivalente al sistema* de dos ecuaciones con una incógnita

$$\left\{\begin{aligned} \cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) &= 0, \\ \cos x &= 0. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Hace falta, por lo tanto, obtener todas las soluciones del sistema (16), es decir, todas las x, que satisfacen ambas ecuaciones de este sistema.

La primera ecuación del sistema (16) tiene una serie de raíces

$$x = \frac{3\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7} \quad \text{para } k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots,$$

mientras que la segunda,

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{para } n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots;$$

es necesario elegir todos los valores de x que pertenecen, a la vez a estas dos series (es decir, hay que hallar todos los valores de x que se obtengan para cierto k entero de la primera serie y para algún n entero de la segunda).

Para eso es conveniente hacer uso del círculo trigonométrico[1] Marquemos con puntos los valores de x que pertenecen a la primera serie para $k=0, 1, 2, \ldots, 6$ (fig. 57). Se ve que los puntos que representan los demás valores de x de esta serie (para los demás valores de k), se reiteran dentro de siete unidades (por ejemplo, el punto que corresponde al valor de x para $k=9$ coincide con el punto correspondiente al valor de x para $k=2$, etc.). Los valores de x de la segunda serie se marcan con cruces para $n=0, 1$; los puntos que corresponden a los demás valores de n se repiten dentro de dos unidades.

De la fig. 57. se deduce que las series a examinar tienen como comunes aquellos valores de x a los cuales les corresponden el extremo

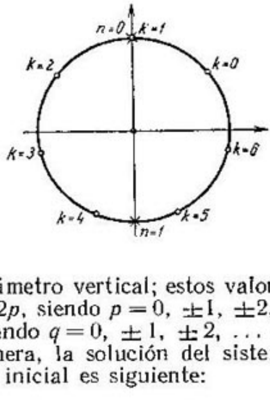

Fig. 57

superior del diámetro vertical; estos valores se obtienen de la segunda serie para $n=2p$, siendo $p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y de la primera, para $k=7q+1$, cuando $q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

De esa manera, la solución del sistema (16) y, por consiguiente de la ecuación inicial es siguiente:

$$x=\frac{\pi}{2}+2p\pi, \quad \text{siendo } p=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En la resolución efectuada se ha utilizado la transformación de la ecuación inicial en la forma (15). Sin embargo, no es difícil comprender cómo pasar sin tal transformación.

En efecto, examinemos atentamente la ecuación inicial. Su primer miembro es la suma del seno y del coseno, mientras que el segundo, un número,— 2. Pero, según las propiedades del seno y del coseno, las desigualdades $\operatorname{sen} 7x \geqslant -1$, $\cos 2x \geqslant -1$, son válidas para toda x, de donde al sumar estas desigualdades, obtenemos $\operatorname{sen} 7x+\cos 2x \geqslant -2$. Por lo tanto, la ecuación inicial se satisface úni-

[1] La selección de los valores de x que pertenecen a ambas series indicadas es posible realizarla del todo analíticamente (sin utilizar el círculo trigonométrico), es decir, aplicando el método usado en el problema 4 del § 2, Parte 1.

camente en el caso de que cada uno de *ambos* sumandos de su primer miembro sean iguales a -1, es decir, cuando x satisfaga *simultáneamente* a las dos ecuaciónes

$$\operatorname{sen} 7x = -1, \quad \cos 2x = -1.$$

Tenemos de nuevo el sistema de dos ecuaciones con una incógnita: su resolución puede practicarse como en el caso del sistema (16).

15. *Resolver la ecuación*

$$2 \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x. \tag{17}$$

Después de las transformaciones elementales, la ecuación a examinar se reduce a la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen} 2x = 1,$$

o

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = 2. \tag{18}$$

Se obtiene la ecuación del mismo género que ha sido analizada en el ejemplo precedente; sin ninguna dificultad el lector efectuará por sí mismo, los razonamientos posteriores.

No obstante, al considerar atentamente la ecuación (18) puede concebirse la idea de que la utilización acertada de las propiedades de las funciones trigonométricas permite no realizar transformaciones que están demás. Aquí, para encontrar la solución, conviene tomar en consideración que el seno de cualquier argumento no supera a la unidad por su valor absoluto.

Por lo tanto, el producto del primer miembro de la ecuación (18) puede ser igual a 1 solamente en dos casos: cuando cada uno de los factores es igual a 1, o cuando cada uno de ellos es igual a -1. De ese modo, el número x será una raíz de la ecuación cuando y sólo cuando este número satisfaga *uno* de los *dos* sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \operatorname{sen} 2x = 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -1, \\ \operatorname{sen} 2x = -1. \end{cases}$$

Examinemos el primer sistema. De su segunda ecuación tenemos: $x=\pi/4+k\pi$, para $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Sustituyendo estos valores de x en su primera ecuación, obtenemos $\operatorname{sen}[(\pi/2)+k\pi]=1$, lo que es válido solamente cuando los valores de k son *pares*, es decir, para $k=2n$, donde $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Por lo tanto, como soluciones del primer sistema serán: $x=\pi/4+2n\pi$, donde n es un número entero cualquiera.

En el caso de resolver del mismo modo el segundo sistema nos cercioramos de que el último no tiene soluciones. Por consiguiente, las soluciones halladas del primer sistema son raíces de la ecuación inicial.

Sin embargo, la solución más corta de la ecuación (17) se obtiene como resultado del empleo acertado de las desigualdades. Su segundo miembro, por su valor absoluto para cualquier valor de x (admisible), es más o igual a 2, mientras que la magnitud absoluta de su primer miembro no supera a 2. De ahí, la ecuación (17) puede satisfacerse sólo para los valores de x, con los cuales *ambos miembros* de la ecuación (17) son iguales a 2 ó -2. Examinemos estas posibilidades.

El segundo miembro de la ecuación (17) será igual a 2, si $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x = 1$, es decir, en caso de $x = (\pi/4) + k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ El primer miembro de la (17) tomará este valor cuando $x = \pi/4 + 2n\pi$, siendo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ El termino generae de estas dos series, precisamente, los valores de $x = \pi/4 + 2n\pi$, donde n es un número entero cualquiera, da las raíces de la ecuación (17).

A continuación. El segundo miembro de la ecuación (17) es igual a -2 cuando $x = 3\pi/4 + n\pi$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Sin embargo, con estos valores de x el primer miembro de la ecuación (17) es igual a cero y por lo tanto esta ecuación no se satisface.

Las ecuaciones trigonométricas, que además de las incógnitas contienen *parámetros* componen un grupo especial. Al resolver estos problemas, ante todo, hace falta encontrar los valores de los parámetros para los cuales *existen* soluciones. Sin duda, hay que hallar también mismas soluciones (en función de los parámetros).

Aunque, al resolver los problemas con los parámetros, no son necesarios algunos conocimientos complementarios, los razonamientos requeridos, a veces, pueden manifestar ciertas dificultades lógicas y técnicas.

16. *Hallar todas las soluciones reales de la ecuación*

$$\operatorname{sen} x + \cos(a + x) + \cos(a - x) = 2$$

para cada número real.

Sumando el segundo y tercero término del primer miembro, obtenemos inmediatamente la ecuación del tipo (1):

$$\operatorname{sen} x + 2\cos a \cos x = 2.$$

Es natural que hay que resolverla con ayuda del método de la introducción del ángulo auxiliar; no obstante, es necesario tener en cuenta diversas posibilidades que surgen para distintos valores del parámetro a.

Es posible escribir las condiciones que determinan el ángulo auxiliar de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cos^2 a}}, \quad \cos\beta = \frac{2\cos a}{\sqrt{1 + 4\cos^2 a}}; \qquad (19)$$

en este caso la última ecuación se reduce a la siguiente

$$\cos(x-\beta)=\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}. \tag{20}$$

Como se sabe, esta ecuación tiene sus raíces solamente si el segundo miembro no supera a 1 por su módulo. Sin embargo, ya que este miembro es positivo (¡raíz aritmética!) para cualquier parámetro a, la ecuación (20) tiene sus soluciones sólo para los valores del a, que satisfacen la desigualdad

$$\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\leqslant 1$$

(para los demás valores de a la ecuación (20) no tiene raíces).

No es difícil resolver esta desigualdad (véase el § 8, Parte I): ésta se reduce a la forma siguiente: $\cos^2 a\geqslant 3/4$, de donde,

$$-\pi/6+k\pi\leqslant a\leqslant\pi/6+k\pi,\ \text{donde } k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{21}$$

Así, la ecuación (20) y la ecuación inicial también *tienen soluciones solamente para los valores de a que satisfacen la condición* (21).

Ya es fácil hallar las mismas soluciones de la ecuación (20) (y, por lo tanto, de la ecuación inicial) correspondientes a todo valor de a que satisface la condición (21):

$$x=\beta\pm\arccos\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+2n\pi,$$
$$\text{siendo } n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;$$

aquí hace falta sólo sustituir la expresión del ángulo auxiliar β.

Muchos estudiantes, sin razonamientos especiales, aplicando las relaciones (19), toman para β la expresión que se obtiene de la primera fórmula (19):

$$\beta=\text{arc sen}\,\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}.$$

Pero el ángulo β que se determina por esta igualdad satisface la segunda de las condiciones (19) no para todo valor del parámetro a. En realidad, este ángulo se encuentra en el primer cuadrante (ya que bajo el signo del arco seno se halla la expresión positiva para todos los valores de a) y por lo tanto, su coseno será también positivo para todos los valores del parámetro a. Entretanto la segunda fórmula (19) muestra que si $\cos a<0$, el coseno del ángulo auxiliar debe ser negativo.

Para elegir la expresión necesaria del ángulo auxiliar β puede ayudarnos el razonamiento siguiente. Ya que sen β es siempre positivo (lo que se ve de la primera fórmula (19)), por lo tanto, es posible tomar el mismo ángulo β en el primero o segundo cuadrante. Pero, precisamente, en estos cuadrantes se encuentra el arco coseno.

Por eso, como el ángulo auxiliar es posible tomar

$$\beta = \arccos \frac{2 \cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}.$$

Este ejemplo muestra que para los problemas con parámetro es imposible tener éxito en cada intento de elegir el ángulo auxiliar de manera que éste se encuentre en el primer cuadrante y se exprese por una fórmula que sería válida para *todos* los valores del parámetro

17. *Hallar todas las soluciones de la ecuación*

$$(\operatorname{sen} x + \cos x) \operatorname{sen} 2x = a (\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x),$$

que se sitúan entre $\pi/2$ *y* π. *¿Para qué* a *esta ecuación no tiene más de una solución que satisfaga la condición* $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$?

La ecuación dada puede ser escrita de una vez, en la forma "descomponente":

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} 2x - a + a \operatorname{sen} x \cos x) = 0,$$

debido a que siempre (es decir, para todo el valor del parámetro a) se tiene *por lo menos una* raíz que se encuentre en el intervalo a examinar $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$, o sea, la raíz $x = 3\pi/4$ de la ecuación $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$.

Luego, hace falta hallar las demás soluciones de la ecuación inicial, es decir, las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x - a + a \operatorname{sen} x \times \cos x = 0$ ó $(2+a) \operatorname{sen} 2x = 2a$.

Para todo valor del parámetro a distinto de -2, esta ecuación puede adoptar la forma siguiente

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2a}{2+a}. \tag{22}$$

Sin embargo, solamente tienen interés las raíces de x que se encuentren entre $\pi/2$ y π. En este caso $\pi < 2x < 2\pi$, por lo tanto, $\operatorname{sen} 2x$ debe ser no positivo y no debe ser menor que -1. En consecuencia, la ecuación (22) tiene raíces entre $\pi/2$ y π sólo para los valores del parámetro $a \neq -2$ para los cuales

$$-1 \leqslant \frac{2a}{2+a} \leqslant 0. \tag{23}$$

Esta desigualdad se resuelve fácilmente: $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$.

De ese modo, para cada valor de a que satisface la condición $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$, la ecuación (22) tiene raíces entre $\pi/2$ y π; para los demás valores de a distintos de -2 no hay tales raíces.

Ahora es necesario hallar las mismas raíces de x de la ecuación (22) que se encuentran en el intervalo de $\pi/2$ a π, considerando que $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$. Para esto $2x$ se denomina con y, y la ecuación (22) toma la forma $\operatorname{sen} y = 2a/(2+a)$; determinemos las raíces de y de esta ecuación (para $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$) que satisfacen la condición

$\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$. Ya que en virtud de la desigualdad (23), el ángulo

$$\alpha = \text{arc sen}\,\frac{2a}{2+a}$$

se sitúa entre $-\pi/2$ y 0 (véase el § 5, Parte II), es fácil entender, utilizando el círculo trigonométrico (fig. 58), que la ecuación sen $y=2a/(2+a)$ tiene sólo dos soluciones que satisfacen la condición $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$, a saber:

$$y_1 = \pi - \text{arc sen}\,\frac{2a}{2+a} \quad \text{e} \quad y_2 = 2\pi + \text{arc sen}\,\frac{2a}{2+a}.$$

Por lo tanto, como raíces de (22) (para $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$) que se encuentran en el intervalo $\pi/2\ \pi$, serán

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{2a}{2+a}, \quad x_2 = \pi + \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{2a}{2+a}.$$

Así, pues, para $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$, satisfacen la ecuación inicial tres números: $3\pi/4$, x_1 y x_2. A pesar de esto, no hay ninguna razón para considerar que la ecuación inicial con cada valor de a en el intervalo

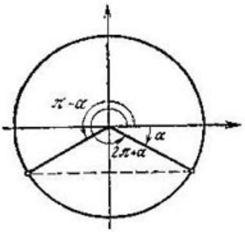

Fig. 58

indicado tiene *más* de una raíz: quizá, para algunos de estos valores de a, $x_1 = x_2 = 3\pi/4$. Precisamente, esto tiene lugar cuando $a=-2/3$ y sólo cuando a tiene este valor, de lo que es fácil cerciorarse directamente.

Por consiguiente, si $-2/3 \leqslant a \leqslant 0$, la ecuación inicial tiene tres raíces en el intervalo $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$, a saber $3\pi/4$, x_1, x_2; para otros valores de a, además de $a=-2$, esta ecuación tiene sólo una raíz $3\pi/4$.

Señalemos que ahora hace falta examinar el último caso cuando $a=-2$. Con este valor del parámetro a es imposible analizar la ecuación (22) y debe examinarse la ecuación $(2+a)$ sen $2x = 2a$ la cual (para $a=-2$) obtiene la forma siguiente: $0=-4$. Como esta ecuación no tiene raíces, la ecuación inicial sólo tiene una raíz $3\pi/4$ en el intervalo entre $\pi/2$ y π cuando $a=-2$.

EJERCICIOS:

1. ¿Qué relación existe entre los ángulos α y β si es conocido que a) $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$; b) $\cos\alpha = \cos\beta$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$; d) $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$?

2. Estudiar las posibilidades de resolver la ecuación $a \operatorname{sen} x + b\cos x = c$.

Resolver las ecuaciones:

3. $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg}(\pi/6)\cos 2x = 1$.
4. $\operatorname{sen}[2x-(\pi/2)] + \cos[2x-(\pi/12)] = \sqrt{2}\cos[3x+(\pi/6)]$.
5. $\operatorname{sen} 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\operatorname{sen} 6x + \cos 8x)$.
6. $\operatorname{sen} 3x + 4\operatorname{sen}^3 x + 4\cos x = 5$.
7. $2\operatorname{sen} 4x - 3\operatorname{sen}^2 2x = 1$.
8. $-2 + 4\cos^2 z = \cos z + \sqrt{3}\operatorname{sen} z$.
9. $2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi \operatorname{sen} 2x)$.
10. $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{cotg} x} = 2\operatorname{sen} x$.
11. $2\left[1-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\right] = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi-x}{2}$.
12. $3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x = 0$.
13. $\operatorname{cotg}[(\pi/4)-x] = 5\operatorname{tg} 2x + 7$.
14. $2\cos 2x + \operatorname{sen} 3x - 2 = 0$.
15. $\frac{7}{4}\cos\frac{x}{4} = \cos^3\frac{x}{4} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}$.
16. $\operatorname{tg} x = (2+\sqrt{3})\operatorname{tg}(x/3)$.
17. $\cos(10x+12) + 4\sqrt{2}\operatorname{sen}(5x+6) = 4$.
18. $\operatorname{cotg}^3\left(\frac{\pi-\pi x}{1+x}\right) - \sqrt{3}\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi-\pi x}{1+x}\right) = 6\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi-\pi x}{1+x}\right)$.
19. $4\operatorname{sen}^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$.
20. $\operatorname{sen} 3t \cos t = 3/2 \operatorname{tg} t$.
21. $\left(2\operatorname{sen}^4\frac{x}{2} - 1\right)\frac{1}{\cos^4\frac{x}{2}} = 2$.
22. $\operatorname{sen}^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$.
23. $\operatorname{sen}^6 2x + \cos^6 2x = 7/16$.
24. $\cos^2 x + \cos^2(3x/4) + \cos^2(x/2) + \cos^2(x/4) = 2$.
25. $\operatorname{sen} y + \cos 3y = 1 - 2\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} 2y$.
26. $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6x = 1/4 \operatorname{sen} 4x$.
27. $\cos^2(x-\gamma) + \cos^2(0{,}5x+\beta-\gamma) - 2\cos(0{,}5-\beta)\times$
$\times\cos(x-\gamma)\cos(0{,}5x+\beta-\gamma) = {}^3/_4$.
28. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x + \ldots + \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} n^2 x = 1$.
29. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x = 0$.
30. $\operatorname{sen} x \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \cos 5x = \operatorname{sen} 3x \cos 5x$.
31. $\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} + 2\operatorname{tg} x = 0$.

32. $\cos x + \operatorname{sen} x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x}$.

33. $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x + 2\cos x = \operatorname{sen} 2x + 2\cos^2 x$.

34. $(2/\sqrt{3})(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x - 2$.

35. $\sqrt{17\sec^2 x + 16(1/2\operatorname{tg} x \sec x - 1)} = 2\operatorname{tg} x\,(1 + 4\operatorname{sen} x)$.

36. $\sqrt{\dfrac{1}{16} + \cos^4 x - \dfrac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\dfrac{9}{16} + \cos^4 x - \dfrac{3}{2}\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}$.

37. $\operatorname{sen}(5\pi 2^x) + \operatorname{sen}(\pi 2^x) - 2\operatorname{sen}(3\pi 2^x) = 8\operatorname{sen}^2(\pi 2^x) + 2\cos(3\pi 2^x) - \cos(\pi 2^x) - \cos(5\pi 2^x)$.

38. $2\cos^2(\pi 4^x) - \operatorname{sen}(\pi 4^{x+1}) + \operatorname{sen}(\pi 4^{x+1/2}) - 2\cos(\pi 4^{x+1/2}) = 0$.

39. $6\operatorname{tg} x + 5\operatorname{cotg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

40. $5(\operatorname{sen} x + \cos x) + \operatorname{sen} 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}\,(2 + \operatorname{sen} 2x)$.

41. Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \pi/8 \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 0,$$

que se encuentran en el intervalo y $5\pi/2$ entre $7\pi/2$.

42. Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$\frac{\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}}{\cos x} = 4\operatorname{sen} x,$$

que se encuentran entre 0 y 2π.

Resolver las ecuaciones:

43. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 7x = 1$.

44. $\log_{\frac{6x - x^2}{11}}(-\cos x - \cos 3x) = \log_{\frac{6x - x^2}{11}}(-\cos 2x)$.

45. $\log_{\frac{9x - x^2 - 14}{7}}(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x) = \log_{\frac{9x - x^2 - 14}{7}} \cos 2x$.

46. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x = 2$.

47. $\cos x - \operatorname{sen} 3x = -2$.

48. $\operatorname{sen}(5x/2) - \operatorname{sen}(x/2) = 2$.

49. $\cos x \cos 6x = -1$.

50. $(\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x)\operatorname{sen} 3x = 2$.

51. $\cos(\pi\sqrt{x})\cos(\pi\sqrt{x - 4}) = 1$.

52. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 7x = 1$.

53. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{sen} x$.

54. Demostrar que la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \ldots + \operatorname{sen} nx = n - 1$$

para todo número entero $n > 2$ no tiene soluciones.

55. ¿Para qué valores de a la ecuación

$$4\operatorname{sen}(x + \pi/3)\cos(x - \pi/6) = a^2 + \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x - \cos 2x$$

tiene sus soluciones? Hallar estas soluciones.

56. ¿Qué valores de a dan soluciones de la ecuación $a^2 - 2a + \sec^2 \pi(a + x) = 0$? Hallar estas soluciones.

57. ¿Con qué valores de a la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - a = 0$ tiene soluciones? Hallar qué soluciones se encuentran entre los límites $0 \leqslant x < 2\pi$.

58. Resolver la ecuación $\operatorname{sen} 4x = m\operatorname{tg} x$, $m > 0$.

59. ¿Para qué valores de b la ecuación

$$\frac{b\cos x}{2\cos 2x-1}=\frac{b+\operatorname{sen} x}{(\cos^2 x-3\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{tg} x}.$$

tiene soluciones? Hallar estas soluciones.

60. ¿Qué valores de a proporcionan las soluciones de la ecuación

$$\frac{a^2}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+a^2-2}{\cos 2x}?$$

Hallar estas soluciones.

§ 4. SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

A veces es necesario resolver sistemas de ecuaciones trigonométricas. Resolver este sistema no es otra cosa (según la determinación algebraica general de la resolución de un sistema de ecuaciones) que *hallar todos los conjuntos de valores de las incógnitas que convierten al mismo tiempo todas las ecuaciones del sistema en igualdades numéricas justas.*

Por lo común, al resolver sistemas trigonométricos, se elimina una de las incógnitas, expresándola con ayuda de las otras de una ecuación del sistema, o un sistema trigonométrico se reduce al sistema de ecuaciones algebraicas mediante la introducción acertada de nuevas incógnitas, o transformando las ecuaciones del sistema.

Es natural que en caso de resolver sistemas de ecuaciones trigonométricas no deben perderse soluciones y hay que omitir soluciones extrañas si éstas aparecen.

La resolución de los sistemas trigonométricos no exige métodos o conocimientos especiales que no formen parte del curso general de la trigonometría. No obstante, estos problemas están vinculados con algunas dificultades específicas. Una de estas dificultades está relacionada con el hecho de que estos sistemas tienen como regla *un número infinitamente grande de soluciones.* Por lo tanto, la representación correcta del conjunto de los valores de las incógnitas que forman la solución y también la elección de las soluciones debidas, etc., pueden ser dificultadas por la necesidad de examinar distintos casos o resolver desigualdades auxiliares.

1. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} y,\\ x-y=\pi/6.\end{array}\right.$$

La segunda ecuación del sistema a examinar permite fácilmente expresar una incógnita por la otra. Esto sugiere la idea de que es mejor resolver el sistema sustituyendo directamente una incógnita, después de lo cual el sistema se reduce a una ecuación trigonométrica "ordinaria".

No importa qué incógnita se elimina; sustituimos y. Ya que $y=x-(\pi/6)$, la sustitución en la primera ecuación proporciona una ecuación trigonométrica respecto a x:

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

El primer miembro de esta ecuación se transforma con facilidad en la forma tg $[(\pi/4)-x]$ después de lo cual mediante la fórmula de la diferencia de tangentes, se obtiene la ecuación

$$\operatorname{sen}\left(2x-\frac{5\pi}{12}\right)=0, \text{ de donde } 2x-\frac{5\pi}{12}=k\pi, \text{ para } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Por consecuencia, las soluciones del sistema inicial son las siguientes:

$$x=\frac{5\pi}{24}-\frac{k\pi}{2}, \quad y=\frac{\pi}{24}-\frac{k\pi}{2}, \text{ siendo } k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

La comprobación que aquí es indispensable, demuestra que todos los pares de los valores obtenidos de x e y satisfacen el sistema inicial. Subrayamos que a cada número entero k le corresponde *el par* de los valores de x e y, o sea, *la solución* del sistema inicial. Este par se calcula por aquellas fórmulas. El sistema en cuestión tiene un número infinitamente grande de soluciones.

2. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\operatorname{cotg}\frac{z}{2}&=0,\\ \cos(x-y-z)&=1/2,\\ x+y+z&=\pi.\end{aligned}\right.$$

La última ecuación del sistema permite inmediatamente sustituir z. Precisamente, poniendo $z=\pi-(x+y)$ en las dos primeras ecuaciones obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}&=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2},\\ \cos 2x&=-1/2.\end{aligned}\right. \tag{1}$$

La segunda ecuación de este sistema se resuelve en seguida

$$x=\pm\pi/3+k\pi, \text{ donde } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2}$$

Parece que es natural poner esta expresión para x en la primera ecuación (1) y, por lo tanto, reducir el sistema (1) a una ecuación. Sin embargo, este procedimiento nos conduce a una ecuación trigonométrica, bastante incómoda respecto a y (aunque, sin duda, es posible resolverla).

Por esto, conviene elegir otro método, es decir, transformar la primera ecuación del sistema (1). Convirtiendo el primer miembro de acuerdo con la fórmula de la suma de tangentes, después de transformaciones evidentes obtenemos la correlación siguiente:

$$\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\right)=0. \qquad (3)$$

Igualando el primer factor a cero, obtenemos la correlación algebraica entre x e y:

$$x+y=2n\pi, \text{ donde } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \qquad (4)$$

Ahora, aplicando las expresiones para x y z, es fácil obtener la primera serie de los valores de las incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} &x_1=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, && \text{siendo } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ &y_1=\mp\frac{\pi}{3}+(2n-k)\pi, && \text{siendo } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ &z_1=\pi-2n\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Igualemos el segundo factor del primer miembro (3) a cero. Por medio de la fórmula del coseno de suma (coseno suma), tenemos la correlación siguiente: sen $(x/2)$ sen $(y/2)=0$. Pero, en virtud de (2), sen $(x/2)\neq 0$, y por lo tanto, sen $(y/2)=0$, de donde $y=2m\pi$, siendo m un número entero. Empleando las expresiones de x y z, hallamos la segunda serie de valores de las incógnitas:

$$\begin{aligned} &x_2=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, && \text{siendo } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ &y_2=2m\pi, && \text{siendo } m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ &z_2=\pi\mp\frac{\pi}{3}-(2m+k)\pi. \end{aligned}$$

La comprobación muestra que las dos series encontradas son, en realidad, las soluciones del sistema inicial.

Señalemos algunas observaciones con respecto a la forma de escribir las soluciones de los sistemas trigonométricos.

Al resolver un problema a considerar, muchos estudiantes razonan, por ejemplo, de esa manera: "Ya que de la fórmula (4) se deduce que $y=2n\pi-x$, entonces, tomando en consideración (2) para x, hallamos que

$$y=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}-k\pi=\pm\frac{\pi}{3}+(2n-k)\pi. \qquad (6)$$

Algunos intentan incluso demostrar la "legalidad" de esta fórmula: "Ya que (2) da lugar a tomar ambos valores (más y menos), por lo tanto en la expresión para y hay que tomar ambos signos, lo que se indica en (6) por medio del signo $\pm$".

En realidad, la expresión (6) para y no es justa: si se aplica algun valor de x correspondiente al signo "más" en la fórmula (2), el valor respectivo de y corresponde a la elección del signo "menos" en la segunda fórmula (5). Por consiguiente, los signos en las fórmulas (5) no significan la elección arbitraria de los signos "más" y "menos" en cada una de ellas, sino la elección determinada por completo: en estas fórmulas *se toman simultáneamente ambos signos superiores o ambos inferiores.*

Conviene entender correctamente este exacto sentido de la expresión convencional (5). En particular, esta expresión significa que a cada elección de los valores de k y n le corresponden dos soluciones, es decir, dos tríos de números x, y, z, del sistema inicial.

Otra equivocación típica consiste en denominar con una misma letra, en todos los casos, los números enteros arbitrarios. Por ejemplo, en vez de (4) muchos estudiantes escriben: $x+y=2k\pi$, donde $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y teniendo en cuenta (2) y la expresión para z, obtienen en vez de (5) la serie:

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ y=\mp\frac{\pi}{3}+k\pi,\ z=\pi-2k\pi.$$

Aunque estos tríos de números satisfacen realmente el sistema inicial, muchas de sus soluciones están perdidas. La causa de este error consiste en que, al pasar de las ecuaciones del sistema (1) a las igualdades para x y $x+y$, hace falta, introduciendo los parámetros de números enteros k y n (como se ha sido hecho en (2) y (4)), conservar "la independencia" de estas igualdades y no "atarlas" mediante la introducción de un mismo número entero k.

3. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \cos x+\cos y=1, \\ \cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1. \end{cases}$$

En este sistema no tenemos una ecuación que permita expresar *directamente* una incógnita por otra, y con esto eliminar una de las incógnitas. Por consiguiente, intentemos transformar las ecuaciones de este sistema de modo que se obtenga un sistema algebraico de ecuaciones respecto a unas funciones trigonométricas de incógnitas x e y.

Como se sabe, el coseno de cualquier ángulo se expresa por el coseno del semiángulo lo que sugiere la idea de designar $\cos(x/2)$ por u y $\cos(y/2)$ por v, y escribir la primera ecuación del sistema con ayuda de u y v[1]. Las transformaciones evidentes conducen al sistema que es un sistema algebraico "corriente":

$$\begin{cases} u^2+v^2=3/2, \\ u+v=\frac{\sqrt{2}}{2}-1. \end{cases}$$

[1] A propósito, de la segunda ecuación del sistema, sería posible expresar $\cos(x/2)$ por $\cos(y/2)$ y luego, al reducir el primer miembro de la primera ecuación a $\cos(x/2)$ y $\cos(y/2)$, eliminar $\cos(x/2)$. Como resultado, se obtiene la ecuación cuadrática respecto a $\cos(y/2)$.

No es difícil resolver este sistema. Desprendiendo del primer miembro de la primera ecuación el cuadrado completo de la suma de incógnitas u y v, y tomando en consideración la segunda ecuación, hallamos la magnitud del producto uv. De este modo podemos obtener otro sistema

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1, \\ uv=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

que se resuelve por medio de la reducción conocida a la ecuación cuadrática (por el teorema inverso al teorema de Viete). Sin embargo, es más simple "adivinar" las soluciones del último sistema. En efecto, son evidentes dos pares de tales números [1], que la suma de éstos es igual a $\sqrt{2}/2-1$ y su producto, a $-\sqrt{2}/2$

$$u_1=\sqrt{2}/2,\ v_1=-1;\ u_2=-1,\ v_2=\sqrt{2}/2.$$

Por consiguiente, para determinar las incógnitas x e y tenemos que resolver sucesivamente dos sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\dfrac{y}{2}=-1. \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}=-1, \\ \cos\dfrac{y}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

De aquí se hallan dos series de soluciones del sistema inicial

$$x_1=\pm\frac{\pi}{2}+4k\pi,\quad y_1=2\pi+4n\pi,\ \text{donde } k,\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x_2=2\pi+4p\pi,\quad y_2=\pm\frac{\pi}{2}+4q\pi,\ \text{donde } p,\ q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En el problema siguiente tampoco tenemos la posibilidad de eliminar directamente una de las incógnitas, pero el sistema que se considera allí se transforma simplemente en una forma que permite encontrar soluciones. La particularidad de este problema consiste en que nos interesan no todas las soluciones del sistema trigonométrico sino aquellas que satisfacen algunas condiciones complementarias.

4. *Hallar todas las soluciones del sistema*

$$\begin{cases} |\operatorname{sen} x| \operatorname{sen} y=-1/4, \\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=3/2, \end{cases}$$

que satisfacen las condiciones $0<x<2\pi,\ \pi<y<2\pi$.

---

[1] No obstante, de nuestra "conjetura" no se deduce que este sistema no tenga otras soluciones. Por lo tanto, para la exactitud completa es necesario referirse al hecho de que cada sistema del tipo $u+v=a,\ uv=b$ no tiene más de dos soluciones.

Para resolver este sistema se utiliza el método corriente de eliminación del módulo. Con este motivo se consideran dos casos: sen $\times x > 0$ y sen $x < 0$. La primera de estas desigualdades se satisface (tomando en consideración la limitación de x que se deduce de las condiciones del problema) si $0 < x < \pi$, la segunda, si $\pi < x < 2\pi$; es evidente que la igualdad $x = \pi$ es imposible.

Al principio, sen $x > 0$, es decir, $0 < x < \pi$. En este caso la primera ecuación se reduce a la forma sen x sen $y = -1/4$ y se transforma el producto de senos en diferencia de cosenos; el sistema inicial se reduce al sistema

$$\begin{cases} \cos(x-y) - \cos(x+y) = -1/2, \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = 3/2, \end{cases}$$

del cual se deduce otro sistema más simple:

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1/2 \\ \cos(x+y) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

El sistema obtenido se reduce de modo evidente al sistema algebraico de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} &x - y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, && \text{siendo } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ &x + y = 2n\pi, && \text{siendo } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{aligned}$$

lo que permite encontrar fácilmente todas las soluciones del sistema (7). Sin embargo, la selección posterior de las soluciones que satisfacen las limitaciones complementarias planteadas en la condición, sería muy compleja, pués sería necesario resolver las desigualdades de los números enteros y examinar distintas posibilidades.

Por lo tanto, es más simple, buscar en seguida las soluciones necesarias, es decir, las soluciones del sistema (7) que se encuentran en los intervalos $0 < x < \pi$ (supongamos que sen $x > 0$) y $\pi < y < 2\pi$ que son de interés para nosotros. De estas desigualdades se deduce que

$$\begin{aligned} -2\pi < x - y < 0, \\ \pi < x + y < 3\pi. \end{aligned}$$

Hablando de otro modo, se necesita hallar solamente tales soluciones del sistema (7) para las cuales son justas estas desigualdades.

No obstante, si la diferencia $x - y$ se encuentra entre -2π y 0, la igualdad $\cos(x-y) = 1/2$ se satisface sólo para dos casos: cuando $x - y = -\pi/3$ y $x - y = -5\pi/3$. De esto puede cerciorarse, por ejemplo, por medio del círculo trigonométrico (fig. 59) o según la gráfica del coseno. Luego, si la suma $x + y$ se encuentra entre π y 3π, la igualdad $\cos(x+y) = 1$ puede satisfacerse sólo para el caso de $x + y = 2\pi$.

De esa manera, obtenemos dos sistemas algebraicos lineales:

$$\begin{cases} x-y=-\pi/3, \\ x+y=2\pi \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x-y=-5\pi/3, \\ x+y=2\pi, \end{cases}$$

de donde tenemos, respectivamente, dos soluciones de nuestro problema:

$$x_1=5\pi/6,\ y_1=7\pi/6 \ \text{ y } \ x_2=\pi/6,\ y_2=11\pi/6.$$

El caso de sen $x<0$ que tiene lugar si $\pi<x<2\pi$ se analiza análogamente del todo y da dos soluciones más del sistema inicial que satisfacen las desigualdades del problema:

$$x_3=7\pi/6,\ y_3=7\pi/6 \ \text{ y } \ x_4=11\pi/6,\ y_4=11\ \pi/6.$$

5. *Hallar las soluciones del sistema*

$$\begin{cases} \log_2 x \log_y 2+1=0, \\ \operatorname{sen} x \cos y=1-\cos x \operatorname{sen} y, \end{cases}$$

que satisfacen la siguiente condición: $x+y<8$.

Al resolver este sistema, nos encontramos también con la selección de las soluciones. Pero hace falta prestar atención a que, además de

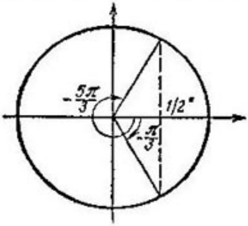

Fig. 59

la desigualdad indicada $x+y<8$, surgen otras condiciones complementarias, vinculadas con la necesidad de asegurar la existencia de los logaritmos integrantes del sistema. Por esto, precisamente, son interesantes sólo tales pares de valores x e y para los cuales $x>0$, $y>0$, $y\neq 1$.

A partir de estas condiciones complementarias es fácil reducir la primera ecuación del sistema a la forma $xy=1$. En lo que se refiere a la segunda ecuación del sistema, ésta se escribe en forma de sen $(x+y)=1$, de donde

$$x+y=(\pi/2)+2k\pi, \text{ siendo } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Así, en vez del sistema trigonométrico inicial, obtenemos una multitud infinita de sistemas algebraicos

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \text{ siendo } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ xy=1; \end{cases} \tag{8}$$

al mismo tiempo, nos interesan solamente tales soluciones de cada uno de estos sistemas para las cuales $x+y<8$, $x>0$, $y>0$, $y\neq 1$. En lugar de resolver todos los sistemas (8) y luego seleccionar las soluciones necesarias, hallaremos estas soluciones.

De las condiciones complementarias $x+y<8$, $x>0$, $y>0$ se deduce que $0<x+y<8$, debido a lo cual tiene razón hacer el análisis de tales sistemas (8) que correspondan a los valores (de números enteros) de k que satisfacen la desigualdad:

$$0<\frac{\pi}{2}+2k\pi<8.$$

La selección directa (véase el problema 15, § 3, Parte II) muestra que a esta desigualdad le corresponden solamente dos valores (enteros) de k, es decir, $k=0$, y $k=1$; los sistemas (8) que corresponden a los demás valores de k no pueden tener las soluciones requeridas.

Así, hace falta resolver dos sistemas algebraicos

$$\begin{cases} x+y=\pi/2, \\ xy=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x+y=5\pi/2, \\ xy=1; \end{cases} \tag{9}$$

el primer sistema no tiene soluciones reales y el segundo nos da

$$x_1=\frac{5\pi+\sqrt{25\pi^2-16}}{4}, \quad y_1=\frac{5\pi-\sqrt{25\pi^2-16}}{4};$$
$$x_2=\frac{5\pi-\sqrt{25\pi^2-16}}{4}, \quad y_2=\frac{5\pi+\sqrt{25\pi^2-16}}{4}.$$

Nos cercioramos inmediatamente de que para cada una de estas soluciones $x>0$, $y>0$, $y\neq 1$. Las dos primeras de estas condiciones, por otra parte, son evidentes al examinar el segundo sistema (9) (ya que la suma y el producto de los números x e y son positivos). En lo que se refiere a la condición $y\neq 1$, es cómodo comprobar esta última no para las fórmulas finales, sino para obtener, directamente, del segundo sistema (9): este último no tiene soluciones cuando $y=1$.

Luego se estudia un sistema más de ecuaciones trigonométricas, cuya solución exige cierta ingeniosidad al realizar transformaciones trigonométricas. Se dan varios métodos de su solución para mostrar distintos procedimientos que conducen al objetivo y que podrían ser útiles en caso de resolver otros sistemas trigonométricos.

6. *Resolver un sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\operatorname{sen}\alpha, \\ \cos x+\cos y=\cos\alpha. \end{cases} \tag{10}$$

Primer método. La idea de esta solución consiste en obtener alguna dependencia algebraica entre las incógnitas x e y, y luego, por medio de sustitución, eliminar una de las incógnitas. Para realizar esta idea, indicamos que, el sistema inicial se escribe de nuevo en forma

$$\begin{cases} 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\operatorname{sen}\alpha, \\ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\cos\alpha, \end{cases} \tag{11}$$

los primeros miembros de ambas ecuaciones contienen un mismo factor $\cos[(x-y)/2]$. Si se pudiera eliminar este factor , se obtendría una ecuación trigonométrica respecto a $x+y$, que nos daría la dependencia lineal entre las incógnitas x e y.

Ahora mostremos la solución total del sistema (10) que utiliza la idea de eliminar el factor $\cos[(x-y)/2]$ de las ecuaciones (11).

Supongamos, en primer término que el valor del ángulo α asegura que $\cos\alpha\neq 0$ (más adelante se analiza especialmente el caso contrario). En este caso, el primer miembro de la segunda ecuación de (11) es diferente de cero, debido a lo que cada miembro de la primera ecuación puede dividirse por la segunda.

Como resultado tenemos

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\operatorname{tg}\alpha \tag{12}$$

de donde

$$x+y=2\alpha+2k\pi,\ \text{siendo } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{13}$$

Notemos que el paso de (12) a (13) da una ecuación *equivalente*. En efecto, si $x+y=2\alpha+2k\pi$, $(x+y)/2=\alpha+k\pi$, pero, como $\operatorname{tg}(\alpha+k\pi)=\operatorname{tg}\alpha$ existe (debido a $\cos\alpha\neq 0$), entonces $tg[(x+y)/2]$ tiene sentido y la igualdad (12) es válida.

El paso ulterior de la resolución es evidente. De la correlación (13) se halla que

$$y=2\alpha+2k\pi-x, \tag{14}$$

a partir de lo cual se realiza la sustitución en la segunda ecuación del sistema (10) $\cos x+\cos(2\alpha+2k\pi-x)=\cos\alpha$. Aplicando la periodicidad del coseno y transformando la suma de cosenos en el producto, obtenemos la ecuación $2\cos\alpha\cos(x-\alpha)=\cos\alpha$.

Hemos supuesto que $\cos\alpha\neq 0$. Por lo tanto, de la última correlación se deduce que $\cos(x-\alpha)=1/2$, es decir, $x=\alpha\pm(\pi/3)+2n\pi$, siendo $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Sustituyendo los valores hallados de x en la correlación (14), tenemos las soluciones del sistema inicial (10):

$$x=\alpha\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ y=\alpha\mp\frac{\pi}{3}+2(k-n)\pi; \tag{15}$$

donde k y n son números enteros cualesquiera y simultáneamente, en ambas fórmulas se usan los signos superiores o inferiores.

De ese modo ha sido considerado por completo el caso de $\cos\alpha \neq 0$; es preciso, sin duda, recordar que todas las correlaciones obtenidas más arriba (12), (13) y otras, en particular, *las soluciones* (15) *tienen lugar solamente para los valores de* α, *para los cuales* $\cos\alpha \neq 0$, ya que estas soluciones fueron obtenidas precisamente a partir de esta suposición. Por ejemplo, si $\alpha = \pi/2$, no tenemos, por ahora, derecho a escribir las fórmulas (15), aunque para este valor de α las fórmulas dadas tienen sentido.

A continuación examinaremos el caso de $\cos\alpha = 0$. Este puede reducirse fácilmente a las consideraciones anteriores. En efecto, si $\cos\alpha = 0$, siempre $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$. Por eso consideraremos el sistema inicial (10) suponiendo que $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$. Pero en este caso cada miembro de la segunda ecuación del sistema (11) puede dividirse por la primera de este sistema y se obtiene

$$\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2} = \operatorname{cotg}\alpha,$$

de donde se desprende de nuevo la correlación (13). Hasta ahora esta correlación ha sido obtenida sólo para todos los valores de α, excepto el caso en que $\cos\alpha = 0$; no obstante resultó que esta correlación tiene lugar también para aquellos valores de α para los cuales $\cos\alpha = 0$, es decir, *para todas las* α.

Luego, expresando mediante (13) y por x, y sustituyendo (14) en la primera ecuación del sistema (10), hallamos (ya que $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$) que ahora $\cos(x-\alpha) = 1/2$ para toda α. Por consiguiente, podemos deducir que las fórmulas (15) nos dan la solución del sistema inicial (10).

Segundo método. Es posible realizar de otro modo la idea, que se puso en práctica durante la primera resolución: la obtención de la dependencia algebraica entre las incógnitas y la eliminación de una de éstas. Para esto debemos notar que si la primera ecuación del sistema (10) se multiplica por $\cos\alpha$ y después de ésta se resta la segunda ecuación de este sistema multiplicada por $\operatorname{sen}\alpha$, en este caso se obtiene la correlación

$$\operatorname{sen}(x-\alpha) + \operatorname{sen}(y-\alpha) = 0.$$

Es evidente que *si simultáneamente* $\cos\alpha \neq 0$ y $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ (¡las ecuaciones del sistema (10) se multiplicaron por estas magnitudes!), en vez del sistema (10) luego se puede resolver un sistema [1] *equivalente* a éste

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}(x-\alpha) + \operatorname{sen}(y-\alpha) &= 0, \\ \cos x + \cos y &= \cos\alpha. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

[1] Es posible examinar también el sistema
$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}(x-\alpha) + \operatorname{sen}(y-\alpha) &= 0, \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= \operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}\right.$$

La primera ecuación de este sistema escrita en forma de "descomposición"

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}-\alpha\right)\cos\frac{x-y}{2}=0,$$

nos conduce a la necesidad de examinar dos posibilidades. Si

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}-\alpha\right)=0, \quad \text{es decir,} \quad x+y=2\alpha+2k\pi,$$

donde k es un número entero arbitrario, podemos expresar y por x (véase (14)) y, mediante la ecuación obtenida, producir la sustitución en la segunda ecuación de (16). En este caso llegamos a la ecuación trigonométrica respecto a una incógnita x

$$2\cos\alpha \ \cos(x-\alpha)=\cos\alpha$$

o, debido a que $\cos\alpha \neq 0$ según suposición, $\cos(x-\alpha)=1/2$, de donde es fácil encontrar la solución (15) del sistema inicial.

Hay que analizar aún la segunda posibilidad, a saber, $\cos[(x-y)/2]=0$. Para esto es más sencillo escribir la segunda ecuación del sistema (16) en la forma siguiente

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\cos\alpha;$$

de donde se ve que, si $\cos\alpha\neq 0$, la igualdad $\cos[(x-y)/2]=0$ es imposible, es decir, el sistema (16) resulta ser incompatible [1].

A continuación hace falta examinar los casos de $\operatorname{sen}\alpha=0$ ó $\cos\alpha=0$. Si $\operatorname{sen}\alpha=0$, la sustitución directa de los valores (15) obtenidos en el sistema inicial (10) expone que el sistema se satisface, o sea, que entre las soluciones (15) no hay ajenas. Lo mismo tiene lugar también en el caso de $\cos\alpha=0$. Por consiguiente, las fórmulas (15) describen las soluciones del sistema (10) *para todos los valores de* α.

Tercer método. La idea de este método de resolución es bastante sencilla: con ayuda de la correlación trigonométrica básica (suma de los cuadrados del seno y coseno de cualquier argumento es igual a 1) hay que intentar obtener del sistema (10) una ecuación que tiene solamente la incógnita x y otra que tiene sólo la y.

Con este motivo escribimos el sistema inicial (10) en la forma siguiente:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}x=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}y, \\ \cos x=\cos\alpha-\cos y, \end{cases}$$

y elevamos al cuadrado cada una de estas ecuaciones, y luego sumamos. Como resultado de las transformaciones evidentes se obtiene la ecua-

[1] Si halláramos de la correlación $\cos[(x-y)/2]=0$ la dependencia entre x e y, y después elimináramos una de las incógnitas sustituyendo respectiva expresión en la segunda ecuación (16), se obtendría la relación $\cos\alpha=0$. Puesto que esta última no es justa, por lo tanto la segunda posibilidad no da ninguna solución del sistema inicial.

ción $\cos(y-\alpha)=1/2$, de donde $y-\alpha=\pm(\pi/3)+2k\pi$, donde k es un número entero. Si el sistema (10) se escribe de otra forma, "aislando" respectivamente en el primer miembro de sus ecuaciones sen y y cos y, y se efectúan las mismas transformaciones, se obtiene la ecuación $\cos(x-\alpha)\,1/2$ de donde $x-\alpha=\pm(\pi/3)+2n\pi$.

Así, hemos obtenido *cuatro* series de valores de las incógnitas (notemos que aquí las correlaciones $y-\alpha=\pm(\pi/3)+2k\pi$ y $x-\alpha=$ $=\pm(\pi/3)+2n\pi$ son completamente independientes y por esto deben tomarse todas las combinaciones de signos):

$$x_1=\alpha+\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad y_1=\alpha+\frac{\pi}{3}+2k\pi;$$

$$x_2=\alpha+\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad y_2=\alpha-\frac{\pi}{3}+2k\pi;$$

$$x_3=\alpha-\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad y_3=\alpha+\frac{\pi}{3}+2k\pi;$$

$$x_4-\alpha-\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad y_4=\alpha-\frac{\pi}{3}+2k\pi,$$

donde k y n son números enteros arbitrarios.

Sin embargo, sería prematuro declarar que estas cuatro series son las soluciones del sistema inicial (10), ya que las ecuaciones se elevaron al cuadrado, mientras que esta operación puede originar soluciones ajenas. Por lo tanto es necesaria la comprobación.

Esta comprobación proporciona sólo algunas dificultades puramente técnicas. Por ejemplo, efectuamos la comprobación para la primera serie. Con este motivo hace falta sustituir las expresiones de x_1 e y_1 en las ecuaciones del sistema (10). Las transformaciones indispensables dan las siguientes igualdades

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{sen}\,\alpha, \\ 2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha, \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \sqrt{3}\cos\alpha=0, \\ \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\alpha=0, \end{cases}$$

que no pueden cumplirse simultáneamente. De este modo, la primera serie no es la solución del sistema (10). La cuarta serie tampoco es la solución del sistema inicial. En lo que se refiere a las segunda y tercera series puede decirse que son válidas para el sistema inicial (éstas coinciden con la solución (15)).

Cuarto método. A continuación demostraremos otro método eficaz de resolver el sistema (10) en el cual se utilizan particularidades específicas de este sistema y que permite sencillamente alcanzar el objetivo. La idea de esta solución consiste en el uso de la teoría de números complejos, más exactamente, de su interpretación geométrica.

Se puede señalar que el sistema (10) es equivalente a la igualdad $z_1+z_2=w$ entre los números complejos: $z_1=\cos x+i$ sen x, $z_2=$

$= \cos y + i$ sen y, $w = \cos\alpha + i$ sen α; donde w es un número conocido (ya que su argumento α está prefijado) y z_1 y z_2 son números incógnitos complejos. Luego, es evidente que $|z_1| = |z_2| = |w| = 1$.

De ese modo, la solución del sistema (10) se reduce a lo siguiente: hallar dos números complejos z_1 y z_2 con módulos unitarios cuya suma es igual a w, para el número complejo dado w con el módulo igual a 1. Está claro que es suficiente determinar los argumentos de los números z_1 y z_2 ya que sus módulos tienen su valor prefijado igual a 1.

Supongamos que el punto A representa un número conocido w, como $|w| = 1$, el punto A se encuentra en una circunferencia única, cuyo centro está en el origen de las coordenadas (fig. 60). Los puntos B y C que representan los números que se buscan z_1 y z_2 también deben situarse en esta circunferencia. La igualdad $z_1 + z_2 = w$ significa geométricamente que OA es la diagonal del paralelogramo, cuyos lados no paralelos OB y OC son iguales entre sí y a esta diagonal. En este caso el triángulo OBA debe ser equilateral, o sea, $\angle BOA = \angle AOC = \pi/3$.

De ahí se deduce que si α es el argumento del número prefijado w, $\alpha + (\pi/3)$ es el argumento de uno de los números buscados, mientras que $\alpha - (\pi/3)$ es el argumento del otro. Nosotros sabemos que todos los argumentos (no iguales a cero) de un número complejo se obtienen

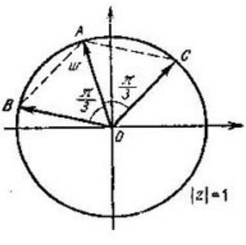

Fig. 60

de uno solo, según la fórmula (5) del § 5, Parte I. Por consiguiente, todos los argumentos de uno de los números a buscar son de la forma siguiente $\alpha + (\pi/3) + 2k\pi$ donde k es un número entero cualquiera, y todos los del otro número, $\alpha - (\pi/3) + 2n\pi$, siendo n un número entero cualquiera. Ahora, si notamos que los números z_1 y z_2 son iguales entre sí por completo (es posible considerar que el punto B representa el número z_1 y el C, el z_2; no obstante, puede considerarse, viceversa, que el punto B es el número z_2 y el C, el z_1), entonces se obtienen dos series de soluciones descritas por las fórmulas:

$$x_1 = \alpha + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y_1 = \alpha - \frac{\pi}{3} + 2n\pi;$$

$$x_2 = \alpha - \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad y_2 = \alpha + \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

donde k, n, son números enteros cualesquiera (esta respuesta coincide con la (15)).

En resumen de este párrafo examinemos un ejemplo de la resolución de un sistema de ecuaciones trigonométricas con parámetro.

7. *Hallar todos valores de a para los cuales el sistema*

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = a^2, \\ \operatorname{sen} y \cos x = a, \end{cases}$$

tiene soluciones y a continuación hallar estas soluciones.

Sumando y sustrayendo las ecuaciones del sistema a examinar, obtenemos otro sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = a^2 + a, \\ \operatorname{sen}(x-y) = a^2 - a. \end{cases} \tag{17}$$

Está claro que este sistema tiene soluciones únicamente cuando se cumplen al mismo tiempo las dos desigualdades dobles siguientes:

$$\begin{cases} -1 \leqslant a^2 + a \leqslant 1, \\ -1 \leqslant a^2 - a \leqslant 1. \end{cases} \tag{18}$$

La primera de estas desigualdades dobles puede escribirse como un sistema de dos desigualdades cuadráticas

$$\begin{cases} a^2 + a + 1 \geqslant 0, \\ a^2 + a - 1 \leqslant 0; \end{cases}$$

de éstas, la primera se cumple para todo valor de a y la segunda, para

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \tag{19}$$

Este intervalo sirve de solución para la primera desigualdad doble (18).

La segunda desigualdad doble (18) se escribe de nuevo como un sistema de dos desigualdades cuadráticas

$$\begin{cases} a^2 - a + 1 \geqslant 0. \\ a^2 - a - 1 \leqslant 0; \end{cases}$$

de éstas, la primera es válida para todo valor de a y la segunda para

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{20}$$

Este intervalo es la solución de la segunda desigualdad doble (18).

Por lo tanto, la parte común de los intervalos (19) y (20) puede servir de solución del distema (18) de las desigualdades dobles o sea

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \tag{21}$$

Para estos valores del parámetro a el sistema inicial de las ecuaciones trigonométricas tiene soluciones; para todos los demás valores de a este sistema no tiene soluciones.

No es difícil hallar las soluciones del sistema inicial a partir de la condición (21). En efecto, para todo valor del parámetro a del intervalo (21) el sistema (17) se escribe en la forma siguiente:

$$\begin{cases} x+y=(-1)^n \operatorname{arc\,sen}(a^2+a)+n\pi, & \text{siendo } n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ x-y=(-1)^n \operatorname{arc\,sen}(a^2-a)+k\pi, & \text{siendo } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

de donde

$$x=\frac{1}{2}[(-1)^n \operatorname{arc\,sen}(a^2+a)+(-1)^k \operatorname{arc\,sen}(a^2-a)+(n+k)\pi],$$

$$y=\frac{1}{2}[(-1)^n \operatorname{arc\,sen}(a^2+a)-(-1)^k \operatorname{arc\,sen}(a^2-a)+(n-k)\pi];$$

siendo n y k números enteros arbitrarios.

EJERCICIOS:

Resolver los sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x-y=\pi/18, \\ \operatorname{sen}(x+\pi/18)\ \operatorname{sen}(y+\pi/9)=1/2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=2\pi/3, \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} y=3, \\ |x-y|=\pi/3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z=3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z=6, \\ x+y+z=\pi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \operatorname{sen} x+\sec y=2, \\ \operatorname{sen} x \sec y=1/2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \operatorname{sen}(x-y)=3 \operatorname{sen} x \cos y-1, \\ \operatorname{sen}(x+y)=-2 \cos x \operatorname{sen} y. \end{cases}$

7. Hallar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 1/2 \operatorname{sen}(1-y+x^2) \cos 2x=\cos(y-1-x^2) \operatorname{sen} x \cos x, \\ \log_2 x \dfrac{2^{y+2x}}{2^{1+x^2}}=2-x, \end{cases}$$

que satisfacen la condición $y-1-x^2+2x \geqslant 0$.

8. Hallar las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} 2y \\ \cos x=\operatorname{sen} y \end{cases}$$

que satisfacen las condiciones $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

9. Hallar las soluciones del sistema que satisfacen las condiciones $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$

$$\begin{cases} |\operatorname{sen} x| = a \operatorname{sen} y \quad (a > 0), \\ \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

10. Determinar, para qué valores de a y b, el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = a \operatorname{cotg} x, \\ \operatorname{tg} 2x = b \cos y \end{cases}$$

tiene soluciones y hallar estas soluciones.

§ 5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

En las escuelas de segundo grado las funciones trigonométricas inversas se estudian muy brevemente y, como resultado, muchos estudiantes tienen una idea muy vaga de estas funciones. Les parece que la teoría de estas funciones es muy compleja y vaga y está llena de una gran cantidad de las fórmulas complicadas, imposibles de deducir y retener en la memoria.

En realidad, las funciones trigonométricas inversas no son tan difíciles. Las definiciones iniciales son sencillas y para utilizarlas es suficiente conocer bien Trigonometría general. En lo que se refiere a las fórmulas complicadas, no deben deducirse y tampoco memorizarse.

En primer lugar, conviene llegar a comprender las designaciones, por ejemplo, entender la diferencia entre Arc sen a y arc sen a. El asunto es el siguiente. De las propiedades de la función $y = \operatorname{sen} x$ se deduce que para $-1 \leqslant a \leqslant 1$ existe una multitud infinita de ángulos x que satisfacen la ecuación sen $x = a$. Esta multitud infinita de ángulos se denomina convencionalmente con el símbolo Arc sen a. No obstante, entre todos los ángulos de esta multitud hay *uno* que se sitúa en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Este ángulo se llama, a veces, *principal*, y se designa por arc sen a. Todo esto se representa muy bien en la

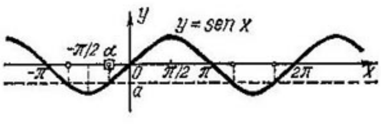

Fig. 61

curva de la función $y = \operatorname{sen} x$ (fig. 61). En el eje de abscisas se señalan con puntos los ángulos de Arc sen a, mientras que el ángulo α que se encuentra en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$, es decir, arc sen a, está marcado con un cuadrado.

De esa manera, arc sen a es un *ángulo, cuyo seno es igual a a y que se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.*

Es posible escribir más formalmente esta *definición*: $\alpha = \operatorname{arc\,sen} a$, si 1) sen $\alpha = a$ y 2) $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

Un error grave y muy difundido es el siguiente: por ejemplo, al ver la igualdad $t = \operatorname{sen}\alpha$, escriben de una vez $\alpha = \operatorname{arc\,sen} t$. Sin duda alguna, esto no es correcto, ya que de la igualdad $t = \operatorname{sen}\alpha$ se deduce sólo que el ángulo α es de la multitud designada con Arc sen t, sin embargo, no se deduce de ninguna manera que este ángulo satisface también la segunda condición, o sea, $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

Es muy difundida también la definición de la segunda condición. En vez de esta última se utiliza la expresión: "el ángulo se encuentra en el primer o cuarto cuadrante". Pero esta frase, cuyo sentido exacto significa que el radio móvil del ángulo se encuentra en el primer o cuarto cuadrante, expresa una cosa diferente de la segunda condicion de la definición. Por ejemplo, el radio móvil del ángulo $9\pi/4$ se sitúa en el primer cuadrante, no obstante no tiene lugar la desigualdad $-\pi/2 \leqslant 9\pi/4 \leqslant \pi/2$.

Conviene razonar de forma análoga las definiciones de otras funciones trigonométricas inversas. Ilustremos todas estas definiciones en una tabla:

$\alpha = \operatorname{arc\,sen} a$	$\alpha = \operatorname{arc\,cos} a$	$\alpha = \operatorname{arc\,tg} a$	$\alpha = \operatorname{arc\,cotg} a$
1) $\operatorname{sen}\alpha = a$; 2) $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$	1) $\cos\alpha = a$; 2) $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$	1) $\operatorname{tg}\alpha = a$; 2) $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$	1) $\operatorname{cotg}\alpha = a$; 2) $0 < \alpha < \pi$

Estas definiciones y fórmulas trigonométricas son suficientes por completo para resolver distintos problemas de cálculo relacionados con las funciones trigonométricas inversas. A continuación, se dan ejemplos más característicos de este tipo. En algunos se obtienen fórmulas muy útiles.

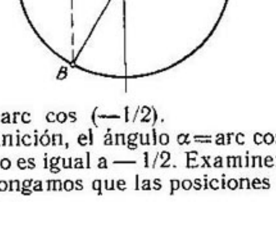

Fig. 62

1. *Calcular* arc cos $(-1/2)$.

Según la definición, el ángulo $\alpha = \operatorname{arc\,cos}(-1/2)$ se encuentra entre 0 y π, y su coseno es igual a $-1/2$. Examinemos el círculo trigonométrico (fig. 62); supongamos que las posiciones OA y OB del radio móvil corresponden a los ángulos cuyo coseno es igual a $-1/2$ (por consiguiente, estos ángulos pertenecen al Arc cos $(-1/2)$. Designemos con una flecha el ángulo α entre 0 y π; es evidente que $\alpha = 2\pi/3$, es decir, $\operatorname{arc\,cos}(-1/2) = 2\pi/3$.

2. *Calcular* cotg [arc cos $(-1/3)$].

Ante todo, no debemos impresionarnos por esta expresión. Si se dominan las definiciones y las fórmulas trigonométricas, este problema se resuelve sin dificultad alguna. En efecto ¿qué es necesario hacer? Hay que hallar la cotangente del ángulo $\alpha = \operatorname{arc\,cos}(-1/3)$. Según la definición del arco coseno puede escribirse que $\cos\alpha = -1/3$ y $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$; ya que el coseno es negativo, el ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante: $\pi/2 < \alpha < \pi$. De esa manera, el problema se ha hecho más sencillo:

Es sabido que $\pi/2 < \alpha < \pi$ y $\cos\alpha = -1/3$.
Hallar cotg α.

Esta función se resuelve con ayuda de las correlaciones fundamentales entre las funciones trigonométricas. En realidad, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} =$
$= \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ (el seno situado en el segundo cuadrante es positivo [1]),
de donde tenemos definitivamente que

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\left[\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3. *¿A qué es igual* cos (arc sen a), $|a| \leqslant 1$?

Dado $\alpha = \operatorname{arc\,sen} a$, en este caso: 1) $\operatorname{sen}\alpha = a$ y 2) $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Por lo tanto, el seno del ángulo ya se conoce y nos queda hallar su coseno. Pero $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$, o sea, $\cos^2\alpha = 1 - a^2$. En este caso ¿cómo hallar cos α? Está claro que es suficiente saber el signo del coseno α. El ángulo α se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. En este intervalo el coseno no es negativo: $\cos\alpha \geqslant 0$, y por esto $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2}$. De ese modo:

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} a) = \sqrt{1-a^2}.$$

Es posible demostrar análogamente que la fórmula

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos} a) = \sqrt{1-a^2}$$

es válida.

4. *¿A qué es igual* cos (2 arc sen 2/3)?

Empleando la fórmula del coseno de ángulo doble $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$, tenemos

$$\cos\left(2\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}\right) = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

[1] El signo del radical significa, como siempre, la raíz no negativa.

Aquí hemos utilizado, además, la fórmula que se deduce de la definición del arco seno

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} a) = a.$$

Las fórmulas semejantes son válidas para otras funciones trigonométricas:

$$\cos(\arccos a) = a, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} a) = a, \quad \operatorname{cotg}(\operatorname{arc\,cotg} a) = a.$$

Hay un grupo aparte de problemas que consiste de ejemplos relacionados con distintas formas de escribir cierto ángulo, aplicando diferentes funciones trigonométricas. En efecto, a cada ángulo, por ejemplo, ángulo $\pi/6$, le corresponde un valor determinado del seno: $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$, del coseno: $\cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, etc. Por lo tanto, este ángulo puede representarse a la vez en dos formas distintas: arc sen $1/2$ y arc cos $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Otro ejemplo del mismo tipo nos muestra el problema 2 examinado más arriba. La respuesta de este ejemplo nos muestra que el ángulo $\alpha = \arccos(-1/3)$ puede escribirse en la forma siguiente: $\alpha = \operatorname{arc\,cotg}(-\sqrt{2}/4)$, ya que $\operatorname{cotg} \alpha = -\sqrt{2}/4$ y $0 < \alpha < \pi$. De hecho, este problema nos enseña que ambas formas expresan un mismo ángulo.

La determinación del hecho de que distintas formas expresan un mismo ángulo, tiene gran importancia resolviendo problemas de Geometría. Supongamos que, al resolver un problema, en que hay que determinar un ángulo incógnito se obtiene la respuesta: $\alpha = \arccos(-1/3)$. Sin embargo, este problema, a menudo, puede resolverse de otro modo. En este caso la respuesta puede tener otra forma, por ejemplo, $\alpha = \operatorname{arc\,cotg}(-\sqrt{2}/4)$. Todo esto demuestra que distintas formas de la respuesta no deben ser motivo de emociones.

5. *Demostrar, que*

$$1/2 \arccos 3/5 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}.$$

Doblemos cada uno de estos tres términos e intentemos demostrar que

$$\arccos 3/5 = 2 \operatorname{arc\,tg} 1/2 = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5}$$

Ante todo, señalemos que los tres ángulos se encuentran entre 0 y $\pi/2$. En efecto, para el primer ángulo esto es evidente, ya que si $\alpha = \arccos 3/5$, entonces $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ y $\cos \alpha = 3/5$ es positivo, de donde se deduce lo que es necesario. Para el ángulo $\pi/2 - \arccos 4/5$ esto se demuestra análogamente. En fin, si $\beta = \operatorname{arc\,tg} 1/2$, esto significa que $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ y $\operatorname{tg} \beta = 1/2$; por lo tanto, el ángulo β está situado en el intervalo desde 0 hasta $\pi/4$, a causa de lo cual el ángulo $2 \operatorname{arc\,tg} 1/2$ se encuentra entre 0 y $\pi/2$.

Como los tres ángulos a examinar se encuentran entre los límites de 0 a $\pi/2$, es menester, para demostrar su igualdad, mostrar que una función trigonométrica cualquiera, por ejemplo, coseno de estos ángulos tiene un mismo valor. En realidad, hallamos con facilidad

$$\cos(\operatorname{arc}\cos 3/5) = 3/5;$$

$$\cos(2 \operatorname{arc}\operatorname{tg} 1/2) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)} = 3/5;$$

$$\cos(\pi/2 - \operatorname{arc}\cos 4/5) = \operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos 4/5) = \sqrt{1-\cos^2(\operatorname{arc}\cos 4/5)} = 3/5$$

(indiquemos que arc cos 4/5 es un ángulo del primer cuadrante, Por ello el radical se da con el signo más) lo que pone fin a la demostración.

Al resolver estos problemas, los estudiantes cometen un gran número de errores. El error más grave consiste de lo siguiente. Para determinar la igualdad de estos ángulos, se comprueba que una de las funciones trigonométricas de cada uno de estos ángulos tiene el mismo valor y a base de esto se da la conclusión de que los ángulos son iguales. En efecto, esta deducción es infundada por completo. Por ejemplo, los ángulos arc sen 1/2 y arc sen (—1/2) no son iguales, sin embargo

$$\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen} 1/2) = \cos[\operatorname{arc}\operatorname{sen}(-1/2)] = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La cosa consiste en que *de la igualdad de cosenos (senos, etc.) de dos ángulos no se deduce la igualdad de los mismos ángulos*. Pero, si nosotros hemos demostrado que los ángulos están situados, por ejemplo, en el intervalo de 0 a $\pi/2$ (como tuvo lugar en el problema ya examinado), la igualdad de las funciones trigonométricas conduce a la igualdad de los ángulos.

6. *¿A qué es igual el ángulo* arc sen $1/3 +$ arc sen $3/4$?

Supongamos que $\alpha = \operatorname{arc}\operatorname{sen} 1/3$, $\beta = \operatorname{arc}\operatorname{sen} 3/4$, $\gamma = \alpha + \beta$. Hay que hallar, ante todo, una función trigonométrica del ángulo γ para encontrar el valor del mismo ángulo. Parece que es natural calcular sen γ:

$$\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha =$$
$$= 1/3\sqrt{1-9/16} + 3/4\sqrt{1-1/9} = \frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}.$$

¿Cómo puede hallarse el mismo ángulo γ? Es conocido ya que no es posible escribir $\gamma = \operatorname{arc}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}$, sin determinar con antelación si se sitúa o no el ángulo γ en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Esto no es fácil de aclarar.

Por lo tanto, intentemos resolverlo de otro modo. Al principio hace falta analizar las condiciones. Se sabe que los ángulos α y β

se encuentran en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$ y sus senos son positivos. Por esto es posible decir con más exactitud que ellos se sitúan entre 0 y $\pi/2$, o sea, $0<\alpha<\pi/2$; $0<\beta<\pi/2$. Sumando estas desigualdades, obtenemos

$$0<\gamma<\pi.$$

Ahora está claro que el ángulo γ puede determinarse a partir de su coseno:

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=$$
$$=\sqrt{1-1/9}\sqrt{1-9/16}-1/3\cdot 3/4=\frac{2\sqrt{14}-3}{12}.$$

Así, 1) $\cos\gamma=\frac{2\sqrt{14}-3}{12}$, 2) $0<\gamma<\pi$ [1]. Por consiguiente

$$\gamma=\arccos\frac{2\sqrt{14}-3}{12}.$$

7. *¿A qué es igual el ángulo* $2\operatorname{arc\,tg}(-3)$?

Es evidente que el ángulo $\alpha=\operatorname{arc\,tg}(-3)$ satisface la igualdad $-\pi/2<\alpha<0$, de donde $-\pi<2\alpha<0$. ¿Qué función puede ayudarnos a determinar 2α? Pueden aplicarse distintos métodos.

Primer método. Al multiplicar la última desigualdad por -1, obtenemos $\pi>-2\alpha>0$. A continuación,

$$\cos(-2\alpha)=\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-9}{1+9}=-\frac{4}{5}.$$

Así, 1) $\cos(-2\alpha)=-4/5$ y 2) $0<-2\alpha<\pi$. Por lo tanto, $-2\alpha=$ $=\arccos(-4/5)$, es decir, $2\alpha=-\arccos(-4/5)$.

Segundo método. De la desigualdad $-\pi<2\alpha<0$ se deduce que $0<2\alpha+\pi<\pi$. Luego, $\cos(2\alpha+\pi)=-\cos 2\alpha=4/5$. Pero, si se cumplen estas dos condiciones, entonces $2\alpha+\pi=\arccos 4/5$, es decir, $2\alpha=-\pi+\arccos 4/5$.

Tercer método. De la desigualdad $-\pi<2\alpha<0$ se desprende que $-\pi/2<2\alpha+\pi/2<\pi/2$. Luego,

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\pi/2)=-\operatorname{cotg}2\alpha=-\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}=-\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=-4/3.$$

Por eso, $2\alpha+\pi/2=\operatorname{arc\,tg}(-4/3)$, de donde obtenemos una solución más: $2\alpha=-\pi/2+\operatorname{arc\,cotg}(-4/3)$.

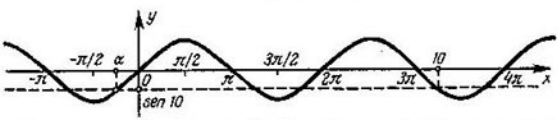

Fig. 63

Se ve que los tres métodos de resolución han dado lugar a tres soluciones distintas. Sin embargo, estas tres respuestas sólo parecen distintas. En realidad, ellas son de distintas formas de representa-

[1] Es evidente que si $0<\gamma<\pi$, entonces es más justa la desigualdad $0\leqslant\gamma\leqslant\pi$ (véase el § 1 de la Parte I).

ción *del mismo ángulo* y, si es necesario demostrarlo, esto puede hacerse como en el ejemplo 5.

Adelante se da un ejemplo de otro tipo más que provoca ciertas dificultades. A pesar de esto, su resolución exige solamente conocimientos seguros de las definiciones.

8. *¿A qué es igual el ángulo* arc sen (sen 10)?

Según la definición, $\alpha = \text{arc sen (sen } 10)$ es un ángulo que satisface dos condiciones: sen α = sen 10 y $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Es más fácil determinar este ángulo con ayuda de la curva de la función $y = \text{sen } x$ (fig. 63). Hay que encontrar en el eje de abscisas el número 10, luego hallar geométricamente sen 10, que será la ordenada y de un punto de curva que corresponde a $x = 10$, y a continuación trazar una recta

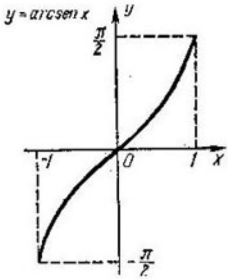

Fig. 64

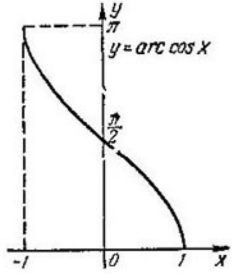

Fig. 65

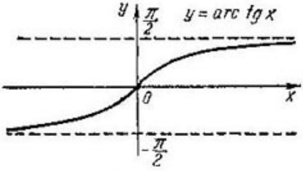

Fig. 66

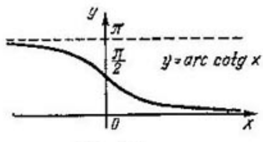

Fig. 67

horizontal $y = \text{sen } 10$. La abscisa de uno de los puntos de intersección de esta recta con la curva se encuentra en el intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$; esta abscisa es el ángulo que se busca, es decir, según sus condiciones éste se sitúa entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, y su seno es igual a sen 10. Mediante simples razonamientos geométricos es fácil ver que los puntos α y 10 son simétricos respecto del punto $3\pi/2$, por eso, $10 - 3\pi/2 = 3\pi/2 - \alpha$, de donde se deduce que $\alpha = 3\pi - 10$.

Al terminar por considerar los ejemplos numéricos, conviene examinar directamente *las funciones trigonométricas inversas*.

Para los números α que satisfacen la condición $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, tenemos la expresión siguiente: arc sen α. En este caso es posible examinar la función:

$$y = \operatorname{arc\,sen} x,$$

que determina cada número y en función de cada número a. Este número y es igual a *la medida en radianes* del ángulo arc sen a. Este número se designa también por arc sen a. El intervalo de definición de esta función, (es decir, multitud de los valores de x para los cuales ésta tiene sentido) es una multitud de valores que se encuentran entre -1 y 1.

Del mismo modo se definen las demás funciones trigonométricas inversas. Sus intervalos de existencia son: para la función arc cos x una multitud de números pertenecientes al intervalo de -1 a 1; y para las funciones arc tg x y arc cotg x, una multitud de todos los números reales.

Las curvas de las funciones trigonométricas inversas se exponen en las figs. 64—67. Sin duda alguna, antes que trazarlas hay que estudiar detalladamente las propiedades necesarias de estas funciones. En particular, conviene demostrar que arc sen x y arc tg x son funciones crecientes, mientras que arc cos x y arc cotg x decrecientes. Estas demostraciones no son difíciles, sin embargo, no es indispensable efectuarlas, ya que las gráficas de las funciones en cuestión no se refieren al programa de esta obra, y en este libro se dan a modo de ilustración. El lector puede efectuar estas demostraciones individualmente. Por un lado, este ejercicio es muy útil y por otro, la aplicación de estas propiedades simplifica a menudo la resolución de los problemas.

El análisis de las resoluciones de los problemas siguientes proporciona la demostración de distintas propiedades de las funciones trigonométricas inversas.

9. *Demostrar la identidad*:

$$\operatorname{arc\,sen}(-x) = -\operatorname{arc\,sen} x, \text{ si } \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Escribamos esta igualdad en otra forma $-\operatorname{arc\,sen}(-x) = \operatorname{arc\,sen} x$ e indiquemos que $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(-x)$. Entonces según la definición

$$1) \ \operatorname{sen} \alpha = -x \ \text{ y } \ 2) \ -\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2.$$

Sin embargo, de estas condiciones es fácil deducir que

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = x \ \text{ y } \ \pi/2 \geqslant -\alpha \geqslant -\pi/2,$$

lo que significa que $-\alpha = \operatorname{arc\,sen} x$. Esto ha sido necesario demostrar.

La identidad demostrada puede expresarse del modo siguiente: $y =$ arc sen x no es otra cosa que una función impar.

Señalemos que no tenemos *ningún* argumento para declarar que $y =$ arc sen x es una función impar *ya que* la función $y =$ sen x es impar. En realidad, guiándonos de este procedimiento, podríamos deducir lo siguiente: la función $y = \cos x$ es par, por lo tanto $y = \operatorname{arc\,cos} x$

es también par. Sin embargo, esto es incorrecto, puesto que, por ejemplo, $\arccos 1 = 0$, mientras que $\arccos(-1) = \pi \neq 0$. La relación entre $\arccos x$ y $\arccos(-x)$ es más compleja.

10. *Demostrar la identidad*:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad \text{siendo} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

La demostración es igual que en el caso precedente. Dado $\alpha = \arccos(-x)$. Esto significa que:

$$1)\ \cos\alpha = -x \ \text{ y } \ 2)\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,$$

pero en este caso $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = x$ y $0 \geqslant -\alpha \geqslant -\pi$, o sea $\pi \geqslant \pi - \alpha \geqslant 0$, así que $\pi - \alpha = \arccos x$, es decir, $\pi - \arccos(-x) = \arccos x$, lo que ha sido necesario demostrar.

Las identidades 9 y 10 nos permiten simplificar algunas expresiones. Indiquemos además que ambas identidades se exponen bien en el círculo trigonométrico.

11. *Demostrar la identidad*:

$$\operatorname{arc\,sen} x + \arccos x = \pi/2, \qquad \text{cuando } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Primer método. De la desigualdad $-\pi/2 \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \pi/2$ y $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ se deduce que

$$-\pi/2 \leqslant \operatorname{arc\,sen} x + \arccos x \leqslant 3\pi/2.$$

Además (véase el ejemplo 3).

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x + \arccos x) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x^2} = 1.$$

Pero, entre $-\pi/2$ y $3\pi/2$ existe sólo un ángulo, cuyo seno es igual a 1, es decir $\pi/2$, por lo tanto, $\operatorname{arc\,sen} x + \arccos x = \pi/2$, lo que ha sido necesario demostrar.

Segundo método. Esta identidad es equivalente a la siguiente:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \pi/2 - \arccos x;$$

pero $\operatorname{sen}(\pi/2 - \arccos x) = \cos(\arccos x) = x$ y más

$$-\pi/2 \leqslant \pi/2 - \arccos x \leqslant \pi/2$$

(esto se deduce fácilmente de la desigualdad $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$). Por consiguiente, $\pi/2 - \arccos x = \operatorname{arc\,sen} x$, lo que ha sido necesario demostrar.

Esta identidad se expone bien en el círculo trigonométrico (hace falta examinar también dos casos: $x \geqslant 0$ y $x < 0$).

A continuación, resolvemos varias ecuaciones que contienen funciones trigonométricas inversas.

12. *Resolver la ecuación* $\operatorname{arc\,sen} x = \pi$.

Es evidente que esta ecuación no tiene soluciones ya que $\operatorname{arc\,sen} x$ no puede superar a $\pi/2$.

Muchos estudiantes resuelven esta ecuación del modo siguiente: "Tomamos senos de ambos miembros: $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = \operatorname{sen} \pi$, o sea: $x = \operatorname{sen} \pi = 0$. Respuesta: $x = 0$". ¿En qué consiste la equivocación de este razonamiento? El hecho es que en el caso general, las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $\operatorname{sen} f(x) = \operatorname{sen} g(x)$ no son en absoluto de igual fuerza. La segunda ecuación es el corolario de la primera, pero, sin duda, puede tener raíces de sobra, lo que ha tenido lugar en este caso.

Esto siempre hay que tenerlo muy presente ya que, al resolver ecuaciones que contienen funciones trigonométricas inversas, a menudo, conviene operar con funciones trigonométricas "directas" de ambos miembros. Por consiguiente, debe realizarse la comprobación [1]. La comprobación de esta resolución incorrecta mostraría que $\operatorname{arc} \times$ $\times \operatorname{sen} 0 = 0 \neq \pi$, es decir, la raíz $x = 0$ está de más.

13. *Resolver la ecuación* $\arccos x\sqrt{3} + \arccos x = \pi/2$.

Escribamos esta ecuación en otra forma:

$$\arccos x\sqrt{3} = \pi/2 - \arccos x,$$

y tomemos los cosenos de ambos miembros

$$\cos(\arccos x\sqrt{3}) = \cos(\pi/2 - \arccos x),$$

es decir, $x\sqrt{3} = \sqrt{1 - x^2}$. Ambos miembros de esta última expresión se elevan al cuadrado (merced a esta operación podrán aparecer raíces sobrantes, pero a pesar de todo nos vemos en la necesidad de efectuar la comprobación, ¡ya que hemos tomado los cosenos de ambos miembros!): $3x^2 = 1 - x^2$. De ahí, $4x^2 = 1$, o sea $x_{1,2} = \pm 1/2$.

Realicemos la comprobación. Cuando $x = 1/2$, tenemos

$$\arccos \sqrt{3}/2 + \arccos 1/2 = \pi/6 + \pi/3 = \pi/2,$$

y en consecuencia, $x_1 = 1/2$ es la raíz de la ecuación dada. Si $x = -1/2$, tenemos

$$\arccos(-\sqrt{3}/2) + \arccos(-1/2) = 5\pi/6 + 2\pi/3 = 3\pi/2,$$

es decir, $x_2 = -1/2$ es una raíz sobrante.

14. *Resolver la ecuación* $\operatorname{arc\,sen} 3x/5 + \operatorname{arc\,sen} 4x/5 = \operatorname{arc\,sen} x$.

Tomemos los senos de ambos miembros de la ecuación. En este caso se obtiene

$$\frac{3x}{5}\sqrt{1 - \frac{16x^2}{25}} + \frac{4x}{5}\sqrt{1 - \frac{9x^2}{25}} = x,$$

ó

$$x(3\sqrt{25 - 16x^2} + 4\sqrt{25 - 9x^2}) = 25x.$$

[1] Además, hay que tener en cuenta que debido a que las funciones $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{cotg} x$ no tienen sentido para algunos valores de x, entonces, al tomar estas funciones de ambos miembros, las raíces pueden perderse. Por ello ha de servirse de ellas con gran atención.

Una raiz es evidente: $x_1=0$; hace falta resolver la ecuación

$$3\sqrt{25-16x^2}+4\sqrt{25-9x^2}=25.$$

Para simplificar, designemos x^2 por y. La ecuación irracional se resuelve del modo común, elevando al cuadrado y separando previamente uno de los radicales [1]. Como resultado tenemos $y=1$. Así, $x^2=1$, o sea $x_{2,3}=\pm 1$. Nos queda por verificarlo. Puesto que arc sen $0+$ arc sen $0=$ arc sen 0, $x_1=0$ es la raíz. La verificación de la segunda raíz está relacionada con algunas dificultades. Esta se reduce a la demostración o refutación de la igualdad:

$$\text{arc sen } 3/5+\text{arc sen } 4/5=\pi/2.$$

Es necesario demostrar esta igualdad. El ángulo arc sen $4/5$ es agudo y positivo, su coseno es igual a $\sqrt{1-16/25}=3/5$; por esto arc sen $4/5=$ arc cos $3/5$. En este caso a base de la identidad del ejemplo 11, tenemos

$$\text{arc sen } 3/5+\text{arc sen } 4/5=\text{arc sen } 3/5+\text{arc cos } 3/5=\pi/2=\text{arc sen } 1,$$

así que $x_2=1$ es una raíz de la ecuación inicial. Luego, según la identidad 9, tenemos las igualdades:

$$\text{arc sen }(-3/5)+\text{arc sen }(-4/5)=-\text{arc sen } 3/5-\text{arc sen } 4/5=$$
$$=-\pi/2=\text{arc sen }(-1),$$

es decir, $x_3=-1$ es también una raíz de la ecuación inicial.

15. *Resolver la ecuación* arc sen $(1-x)-2$ arc sen $x=\pi/2$.

Primer método. Es posible escribir la ecuación en la forma siguiente: arc sen $(1-x)=\pi/2+2$ arc sen x, y después tomemos los senos de ambos miembros. Al realizar las transformaciones evidentes, obtenemos la ecuación $x=2x^2$, es decir, $x_1=0$; $x_2=1/2$.

La comprobación muestra que $x_2=1/2$ es una raíz extraña.

Segundo método. El intervalo de valores admisibles (RVA) de la ecuación en cuestión se determina por las desigualdades:

$$-1\leqslant 1-x\leqslant 1,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Resolviendo estas dos desigualdades, se obtiene $0\leqslant x\leqslant 1$. Pero, si $x>0$, entonces 2 arc sen $x>0$ y $1-x<1$, y como resultado arc$\times$ $\times$sen$(1-x)<\pi/2$. Por lo tanto, si $x>0$, en este caso

$$\text{arc sen }(1-x)-2\text{ arc sen } x<\pi/2,$$

así que $x>0$ no puede ser una raiz de la ecuación inicial. Sólo queda comprobar el valor $x=0$. Este último valor resulta ser la raíz.

[1] Esta ecuación irracional se resuelve sin dificultades, si entendemos que $y=1$ es una raíz, mientras que el primer miembro es una función decreciente.

Es posible continuar proponiendo otros ejemplos para su resolución. Sin embargo, está claro que no se confrontan grandes dificultades con este teoría. Es suficiente conocer la Trigonometría general y las definiciones fundamentales de las funciones trigonométricas inversas para resolver con éxito muchos problemas.

EJERCICIOS:

Calcular los ángulos:

1. $\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\operatorname{arc\,sen} 1$.
2. $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\operatorname{arc\,cos}(-1)$; $\operatorname{arc\,cos} 0$.
3. $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\operatorname{arc\,tg}(-1)$.
4. $\operatorname{arc\,cotg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\operatorname{arc\,cotg}(-1)$; $\operatorname{arc\,cotg} 0$.
5. $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} 5)$; $\operatorname{arc\,cos}(\cos 10)$; $\operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(-6)]$; $\operatorname{arc\,cotg}[\operatorname{cotg}(-10)]$.
6. $\operatorname{arc\,cos}\frac{4}{5}-\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{4}$; $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}$; $\operatorname{arc\,cotg}(-2)-\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Demostrar las fórmulas:

7. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen}\alpha)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$, $-1<a<1$.
8. $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cotg} a)=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.
9. $\operatorname{cotg}(\operatorname{arc\,sen} a)=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$, $-1\leqslant a\leqslant 1$, $a\neq 0$.

Demostrar las identidades:

10. $\operatorname{arc\,tg}(-x)=-\operatorname{arc\,tg} x$.
11. $\operatorname{arc\,cotg}(-x)=\pi-\operatorname{arc\,cotg} x$.
12. $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,cotg} x=\frac{\pi}{2}$.

¿Para qué valores de x son justas las igualdades?

13. $\operatorname{arc\,sen} x=\operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2}$;
14. $\operatorname{arc\,cotg} x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

Resolver las ecuaciones:

15. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\operatorname{arc\,cos} x\right)=1$.
16. $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{x}}-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2}$.
17. $\operatorname{arc\,cotg} x=\operatorname{arc\,cos} x$.
18. $\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{arc\,cos} x=\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2}$.