PARTE III

GEOMETRÍA

§ 1. OBSERVACIONES GENERALES SOBRE LA GEOMETRÍA

La Geometría goza de poca autoridad entre algunos estudiantes porque a ellos les parece que ésta contiene una cantidad inmensa de teoremas y definiciones que deben aprenderse de memoria. Por esta razón tratan de dominar la Geometría memorizándola, "empollando" todo lo que haya, incluso las designaciones. Entre tanto, los hechos y nociones geométricos, si se llega a su fondo, son muy lógicos, ilustrativos y naturales.

Algunos creen que deben saberse, obligatoriamente, las enunciaciones de las afirmaciones geométricas "palabra por palabra, según el manual". Pero no es así. El estudiante debe presentar una *enunciación exacta, clara y correcta*, sea ésta algo distinta en comparación con la del manual.

Se sabe bien que muchos teoremas del curso pueden ser demostrados de varios modos. Los estudiantes pueden usar cualesquier demostraciones, lo principal es que sean *correctas*. Por lo tanto, es necesario elegir de antemano y analizar minuciosamente aquella demostración de cada teorema que sea más comprensible y sencilla.

Pero es necesario tener en cuenta que, al demostrar un teorema, no nos apoyemos en otro, obtenido a su vez con el empleo de aquel que debe demostrarse. Claro está que tal "círculo lógico" en los razonamientos es inadmisible.

Conviene subrayar especialmente que todas las demostraciones deben ser exhaustivas. En particular, hay que enunciar precisamente y, si es necesario, demostrar todos los teoremas y lemas auxiliares, a los cuales se hacen referencias en el proceso de la demostración.

A veces los estudiantes tratan de omitir una u otra etapa de la demostración, haciendo uso de tales expresiones como "es evidente", "está absolutamente claro que", etc. Pero hay que prepararse para contestar al profesor ya que éste, después de cualquier referencia sobre la "evidencia", puede preguntar: "¿Por qué?" Por consiguiente, si analizamos la demostración hay que tratar de aclarar *completamente cada* afirmación, *cada* paso en el razonamiento. Es muy útil la práctica siguiente: durante la preparación para los exámenes el estudiante demuestra los teoremas y hace a menudo preguntas: "¿Por qué? ¿De dónde se deduce?", sin dejar de aclarar una sola etapa de la demostración y sin creer a pie juntillas ni una afirmación.

Al estudiar la Geometría no debe olvidarse que las nociones, incluso las más simples (salvo, por supuesto, tales como el punto, la recta, el plano), tienen sus *definiciones*. De lo contrario, es probable que surjan disgustos por preguntas "astutas", por ejemplo: "¿Qué es ángulo recto?", "¿Por qué se puede trazar un plano a través de dos rectas paralelas en el espacio?", etc. En términos generales, debe prestarse atención especial a las definiciones, ya que la práctica demuestra que en una serie de casos los estudiantes simplemente sustituyen las definiciones por imágenes geométricas correspondientes. Por ejemplo, cada uno, sin excepción se imagina bien visualmente qué es la circunferencia, el círculo, el prisma, la pirámide, el cono, la

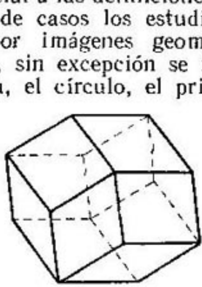

Fig. 68

esfera sólida, la superficie cónica, la esfera, etc., pero ni mucho menos cada uno puede presentar las definiciones correctas de estas nociones.

A modo de ilustración, consideraremos un *prisma*. Sin lugar a dudas, sobre este objeto cada uno posee una imaginación geométrica lo suficientemente clara como para resolver los problemas que se planteen. Sin embargo, la definición del prisma que suelen dar los estudiantes no corresponde a esta imagen geométrica.

De acuerdo con esta definición, el prisma es un poliedro cuyas dos caras son polígonos iguales de lados respectivamente paralelos y las demás caras son paralelogramos. Primero, repitiendo este concepto, muchos olvidan que antes de la definición se estipula que se tiene en cuenta un poliedro *convexo*. Segundo, incluso el poliedro convexo representado en la fig. 68 (se llama *dodecaedro* o *rombododecaedro*; todas sus caras son rombos iguales y los planos y las aristas de las caras opuestas son también paralelas) satisface esta definición. Es evidente que dicho poliedro no corresponde a la imagen geométrica del prisma, sin hablar de que no son válidas las fórmulas para su superficie y volumen.

El hecho es que demostrando estas fórmulas se sobreentiende que el prisma tiene el aspecto que nos imaginamos geométricamente. Es por eso que hay que dar la definición adecuada.

Esto puede realizarse de varios modos. Por ejemplo, *se denomina prisma al poliedro convexo cuyas dos caras son polígonos convexos igua-*

les de lados paralelos respectivamente, y las aristas que unen los vértices correspondientes de estos polígonos son iguales y paralelas [1].

Se puede dar otra definición utilizando la noción de la superficie cilíndrica: *el prisma es un cuerpo limitado por una superficie cilíndrica, cuya directriz es un polígono convexo, y por dos planos secantes paralelos entre sí que no son paralelos a la generatriz.*

Es necesario subrayar que la Geometría, al igual que todas las demás partes de las Matemáticas, requiere cierta cultura lógica. La habilidad de dar la idea de lo dado y de lo que se desea demostrar, la propiedad de expresar exacta y sucintamente un pensamiento matemático, son rasgos indispensables que ha de adquirir cada estudiante que se dedica al estudio de la Geometría.

Muchos estudiantes no entienden bien *el axioma sobre las rectas paralelas*. Por ejemplo, lo enuncian con frecuencia del modo siguiente: "A través de un punto ubicado fuera de una recta puede trazarse una, y sólo una recta que sea paralela a dicha recta". El axioma de tal enunciado contiene *dos* afirmaciones: la primera, que existe una recta paralela y la segunda, que ésta es única.

No obstante, es conocido para cada uno el problema para la construcción sobre el plano: "Trazar por un punto, dispuesto fuera de una recta, otra recta que sea paralela a la recta dada". En este problema se da un método de construcción de tal recta, de donde se deduzca su *existencia*. En este caso, la demostración de lo justo de la construcción, es decir, del hecho de que la recta trazada es de veras paralela a la recta dada, no se basa en el axioma sobre las rectas paralelas, sino que sólo se hace uso del tercer concepto de la igualdad de triángulos y el concepto del paralelismo de rectas por ángulos alternos, y las dos afirmaciones se demuestran *antes* de enunciar el axioma sobre las rectas paralelas.

Pero si es posible trazar una recta (incluso sólo con un compás y una regla) en paralelo con la recta dada por un punto dispuesto fuera de esta línea, entonces, ¿para qué se requiere su existencia en el axioma? Claro está, las exigencias son ilógicas.

En efecto, el axioma sobre las rectas paralelas contiene *una sola* afirmación, o sea, *por un punto fuera de una recta es imposible trazar dos rectas que sean paralelas a la recta en cuestión.*

En algunos casos el axioma se formula del modo siguiente: "a través de un punto, tomado fuera de la recta dada, puede trazarse una sola recta, paralela a esta recta". De cierto modo, esta interpretación no es concreta, porque se puede entender de dos maneras: tanto erróneamente, al exponer que hay dos afirmaciones (primero, que *es posible* trazar tal recta y segundo, que tal recta *es única*), como correctamente, al decir que hay una afirmación (que es imposible

[1] En realidad, esta definición es, de cierto modo, excesiva.

trazar dos rectas paralelas a la recta dada). En las Matemáticas hay enunciaciones de esta índole en algunos casos, pero, por lo general, se entienden únicamente en el *último* sentido. No obstante, conviene evitar esta vaguedad, si enunciamos el axioma para que no tengan lugar interpretaciones distintas.

El tema sobre los segmentos rectilíneos conmensurables e inconmensurables ofrece ciertas dificultades a los estudiantes, puesto que se entrelaza íntimamente con la introducción de un nuevo concepto algebraico, lógicamente difícil, el concepto de número irracional. Se necesita analizar detalladamente el material referente al tema en los manuales, tener una idea clara acerca de la consecuencia lógica de los razonamientos que se deducen.

Un error, en que caen con mayor frecuencia los estudiantes, consiste en que no comprenden como es debido el método, con cuya ayuda se determina si son conmensurables, o no, dos segmentos rectilíneos dados. Algunos estudiantes piensan más o menos del modo que sigue: "Supongamos que se han dado dos segmentos rectilíneos AB y CD (fig. 69). Tomemos el menor de ellos (AB) y vamos a colocarlo sobre el mayor (CD) a partir del punto C hasta que se agote por completo el mayor, o que quede cierto "resto", segmento $C'D$ que es menor en comparación con el segmento dado AB. En el primer caso los segmentos AB y CD son conmensurables. En el segundo caso dividamos el

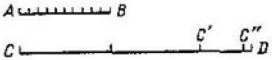

Fig. 69

segmento menor AB en 10 partes iguales, pongamos la 1/10 parte de AB en el $C'D$ a partir del punto C' hasta que se agote por completo este resto, o que quede un nuevo "resto", el segmento $C''D$ que es menor que 1/10 parte de AB. En el primer caso los segmentos AB y CD son conmensurables. En el segundo caso dividamos la décima parte de AB una vez más en 10 partes iguales y la 1/100 parte obtenida de AB póngase en el $C''D$ a partir del punto C'', etc. Si el proceso descrito se detiene en alguna etapa, es decir, cierta parte de AB se coloca sobre el "segmento" corespondiente un número entero de veces, los segmentos AB y CD son conmensurables. Pero, si el proceso no se detiene, los segmentos son inconmensurables".

No es difícil convencerse de que el razonamiento ilustrado contiene un error. En efecto, determinemos según el método descrito, si son conmensurables o no los segmentos del largo de 3 y 4 unidades. Primero, el segmento menor se pone en el mayor una vez y resulta un "resto" del largo igual a 1; a continuación la 1/10 parte del segmento del largo de 3 unidades se coloca en el "resto" obtenido 3 veces, y el nuevo "resto" tendrá 0,1 de largo; la 1/100 parte del segmento de largo de 3 unidades se pone en este "resto" 3 veces y se obtendrá un "resto" de 0,01 de largo, etc. Claro está que este proceso continuará *infinitamente*, de modo que de acuerdo con la "regla" enunciada los segmentos rectilíneos de 3 y 4 unidades de largo son inconmensurables. Pero, por otra parte, es evidente que dichos segmentos son conmensurables, ya que el segmento de una unidad de largo es su medida común.

Esta "paradoja" se resuelve fácilmente: los segmentos AB y CD son inconmensurables no en el caso en que el proceso descrito se continúa infinitamente, sino en que nos conduce a una *fracción infinita no periódica*. No obstante, si el proceso se continúa infinitamente, pero nos conduce a una *fracción infinita periódica*, los segmentos AB y CD, al igual que en el caso de detener el proceso en el paso *finito*, son *conmensurables*. (En el ejemplo de segmentos de 3 y 4 unidades de largo obtenemos una fracción periódica infinita 1, (3), es decir, los segmentos son verdadermante conmensurables).

Antes de empezar el estudio de las cuestiones relacionadas con la longitud de la circunferencia, el área del círculo, las superficies y volúmenes de los cuerpos redondos, es necesario analizar minuciosamente el concepto de *límite de la sucesión*.

Muchos estudiantes no entienden la diferencia que implican las preguntas: "¿Qué es área del círculo?" y "¿A qué es igual el área del círculo?"; "¿Qué es volumen del cono?" y "¿A qué es igual el volumen del cono?", etc. Por ejemplo, al preguntarse: "¿Qué es longitud de la circunferencia?, contestan a veces: "La longitud de la circunferencia es el número $2\pi R$, donde π es igual a 3,14 ... y R es el radio de la circunferencia". En realidad, *la longitud de la circunferencia se define como el límite de la sucesión de los perímetros de polígonos regulares inscritos en la circunferencia, con el aumento ilimitado del número de lados*, mientras que la fórmula $C=2\pi R$, que da la magnitud numérica de la longitud de la circunferencia, es un teorema que se demuestra a base de la definición inicial [1]. Todo lo dicho es justo también para el área del círculo, para la superficie del cono, etc.

Consideremos brevemente la demostración de la fórmula para la longitud de la circunferencia. Hay estudiantes que piensan que la fórmula $C=2\pi R$ se deduce de la fórmula de duplicación. Pero en realidad, partiéndonos de la definición de la longitud de la circunferencia, demostramos que para cualesquier circunferencias la relación de las longitudes es igual a la de los radios. De aquí se deduce a continuación que para *todas* las circunferencias la relación de la longitud de la circunferencia a la longitud del diámetro es siempre el *mismo número*, el llamado número π. Así, *la igualdad* $\pi=C/2R$ o, lo que es lo mismo, $C=2\pi R$ es *válida con respecto a la definición*

[1] Aquí la situación lógica es análoga a la que hemos considerado al determinar y calcular la suma de la progresión geométrica decreciente infinitamente (véase § 1, Parte I).

del número π. Como vemos ahora, la fórmula de duplicación no tiene nada en común con el asunto. Esta fórmula podría servir nada más que para un cálculo aproximado del número π.

Para la demostración de diferentes fórmulas y teoremas de geometría conviene hacer uso amplio de los métodos algebraicos y trigonométricos. En particular, es la forma trigonométrica de muchas afirmaciones geométricas (teorma de los cosenos, fórmula $S=0{,}5\ ab$ sen C para el área del triángulo, teorema de senos) la que hace la demostración de éstas más simple y resulta más cómoda para la solución de problemas; son las funciones trigonométricas las que permiten expresar, en forma escrita y sencilla, con generalización suficiente, muchos conceptos geométricos, lo que a veces es imposible efectuar por medio del "lenguaje puramente geométrico".

Por ejemplo, con la ayuda de las funciones trigonométricas, es muy fácil expresar *el lado de un polígono de n ángulos regular mediante* el radio r de la circunferencia inscrita o el radio R de la circunferencia circunscrita. Por ser igual a $2\pi/n$ de radianes el ángulo central que corresponde a un lado de un polígono regular de n ángulos, es evidente que su lado

$$a_n = 2r\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}. \tag{1}$$

De modo absolutamente análogo nos convenceremos de que

$$a_n = 2R\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}. \tag{2}$$

Si n es igual a 3, 4 ó 6, entonces se obtienen las fórmulas conocidas para el lado del triángulo regular, del cuadrado y del hexágono regular.

Es muy útil la relación

$$R = \frac{a}{2\ \mathrm{sen}\ A}, \tag{3}$$

que expresa *el radio R de la circunferencia circunscrita a un triángulo, recurriéndose solamente a un lado y a su ángulo opuesto* (con ayuda de esta relación se demuestra el teorema de los senos). Es curiosa la deducción originada por esta relación: resulta que para calcular el radio

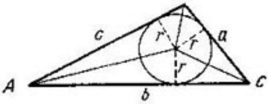

Fig. 70

del círculo circunscrito es suficiente conocer uno de los lados del triángulo y su ángulo opuesto, a pesar de que con estos datos no puede apreciarse el triángulo en forma completa.

En muchos casos, para resolver los problemas se utiliza la fórmula

$$S = pr, \tag{4}$$

que relaciona *el área S del triángulo con su semiperímetro p y radio r del círculo inscrito*. Esta fórmula se obtiene de la igualdad obvia (fig. 70) $0{,}5\ ar + 0{,}5\ br + 0{,}5\ cr = S$. Es fácil convencerse de que esta fórmula es válida también para cualquier polígono en que está inscrito el círculo (S y p son respectivamente el área y el semiperímetro del polígono).

Cabe señalar que también puede utilizarse una fórmula análoga en la estereometría. Supongamos, por ejemplo, que en una pirámide está incrita una esfera de radio r, en este caso puede calcularse el volumen V según la fórmula

$$V = Sr/3, \tag{5}$$

donde S es la superficie total de la pirámide. La demostración de esta fórmula se efectúa de igual modo que en el caso plano. El centro de la esfera se une con todos los vértices, después de lo cual uno puede imaginarse que la pirámide está dividida en varias pirámides pequeñas. Después fijándonos que el radio de la esfera inscrita es la altura de cada una de las pirámides pequeñas, calculamos el volumen de la pirámide en cuestión como la suma de los volúmenes de estas pirámides pequeñas.

Los estudiantes tienen distintas opiniones acerca del dibujo y su importancia para la resolución de problemas geométricos. Unos creen que el dibujo es innecesario y por eso lo trazan con evidente negligencia y tratan de fundamentar sus razonamientos sin referirlos al dibujo. Otros, al contrario, consideran el dibujo como el elemento decisivo en la resolución e incluso piensan que no es necesario argumentar de uno u otro modo lo que "es evidente en el dibujo".

Ambos puntos de vista son erróneos. Naturalmente, ningún dibujo, por hermoso, ilustrativo y exacto que sea, puede sustituir la demostración lógica de un fenómeno geométrico ya que el dibujo no es nada más que una *ilustración* para los razonamientos (para más detalles véase el § 5, Parte III). Por esta razón es necesario argumentar lógicamente el fenómeno geométrico que hemos "notado" en el dibujo, y sólo en este caso podemos estar seguros de que este fenómeno tiene lugar realmente y no es resultado de la ejecución justa (o, quizá, no justa) del dibujo.

Sin embargo, el papel del dibujo no se reduce solamente a la ilustración de los razonamientos durante la resolución de los problemas. En muchas ocasiones resulta que el dibujo hecho acertadamente es lo que puede dar la idea sobre el empleo de uno u otro teorema, o sobre la necesidad de cumplir una construcción adicional. En otras palabras, en la mayoría de los problemas el dibujo desempeña un papel importantísimo, permitiendo encontrar (e incluso sugerir) la idea de la resolución. Por eso conviene trazar los dibujos minuciosa y exactamente, saber notar en ellos los fenómenos geométricos que se pueden aprovechar (véase el § 6, Parte III).

A veces una propiedad, notada con acierto en el dibujo, permite reducir la resolución del problema literalmente a varios renglones. Para resolver el problema que sigue se propusieron más de una decena de variantes. Pero fueron muy pocos estudiantes que ofrecieron la más breve y simple, bastante fácil de encontrar.

1. *En una circunferencia está inscrito un rectángulo $ABCD$, cuyo lado AB es igual a a. Desde el extremo K del diámetro KP paralelo al lado AB el lado BC se ve bajo el ángulo 2β. Calcular el radio de la circunferencia.*

Supongamos que O es el centro del círculo, $KP \parallel AB$, $\angle BCK = 2\beta$ y $AB = a$ (fig. 71). Se requiere calcular el radio R de la circunferencia.

Aquí está la resolución propuesta por algunos estudiantes, basada sobre argumentaciones geométricas superficiales. Sea M el punto de intersección del diámetro KP con el lado BC. Puesto que $R = KM - OM$, calculemos los segmentos rectilíneos KM y OM. Del triángulo rectangular KMB hallamos que $KM = BM \operatorname{cotg} \beta$. Si trazamos el segmento OB y nos fijamos que el triángulo BOK es isósceles podemos concluir que $\angle BOM = 2\beta$ (como ángulo externo de este triángulo), por lo tanto, del triángulo rectángulo BOM se deduce que $OM = BM \times \operatorname{cotg} 2\beta$. De tal modo, $R = BM/\operatorname{sen} 2\beta$.

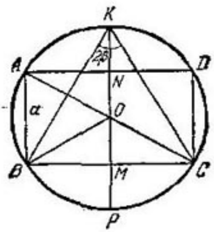

Fig. 71

Si trazamos la diagonal AC en el rectángulo $ABCD$, según el teorema de Pitágoras obtenemos del triángulo rectángulo ABC: $(2R)^2 = a^2 + (2BM)^2$. Despejando BM de esta expresión y de la anterior encontraremos el radio del círculo: $R = a/(2|\cos 2\beta|)$.

Sin embargo, hay otra solución, más simple y breve, la que casi nadie pudo notar. Si se traza la diagonal AC desde el principio, estará claro que los ángulos $\angle BKC$ y $\angle BAC$ son inscritos, que se apoyan en el arco común BPC y por eso del triángulo rectangular ABC la respuesta se obtiene en seguida.

Por supuesto, las dos resoluciones descritas son completamente admisibles; en términos generales, cualquier resolución válida expuesta sin faltas matemáticas es completamente legítima, sea larga o corta. Aun más en las condiciones de los exámenes, cuando el tiempo que se ha dado para la resolución es limitado, conviene evitar la búsqueda prolongada de una resolución "fina" que, tal vez, no existe; es mejor realizar la idea que ha surgido, sin pensar mucho en otras posibilidades, y finalizar la resolución aunque sea larga pero segura. No obstante hay que reconocer que una resolución fina hecha en unos renglones manifiesta que el estudiante posee no sólo conocimientos, sino también un alto "sentido" de la Geometría y espíritu de observación.

Dirigiéndonos otra vez a la figura 71 que hemos utilizado para resolver el problema en cuestión, debemos prestar atención a una circunstancia importante: *los datos del problema no determinan este dibujo en forma completamente unívoca.* En efecto, en la fig. 71 hemos tomado el rectángulo $ABCD$ cuyo lado $AB = a$ es el *menor*; de modo igual hemos elegido según nuestro criterio un caso en que el ángulo BKC es *agudo*. En otras palabras, si realizamos la resolución de este problema según la fig. 71 deduciremos de hecho *suposiciones complementarias* no estipuladas en los datos del problema.

El carácter indefinido de los datos del problema en este sentido suele encontrarse con bastante frecuencia, y el estudiante tiene que hacer suposiciones complementarias necesarias por sí mismo (que, como regla general, no se indican evidentemente) al ilustrar la con-

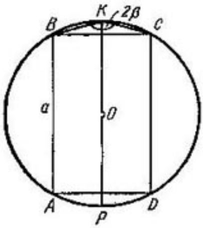

Fig. 72

figuración geométrica en el dibujo. Hablando en forma más estricta, debemos examinar *todos* los dibujos posibles y convencernos de que la elección de uno u otro dibujo no influye de manera alguna en la respuesta. (Por ejemplo, si consideramos el problema anterior convendría, además de la fig. 71 recurrir a la fig. 72 y convencernos de que el resultado que se obtiene es el mismo a pesar de que los razonamientos cambien en cierto modo). Pero, por lo común esto no se cumple ya que en un problema de Geometría planteado de una manera lacónica la respuesta debe ser igual para todos los dibujos *posibles*, por esto es suficiente realizar la resolución sólo con el uso de uno de ellos.

El asunto es más complejo cuando las suposiciones complementarias, hechas durante el trazado del dibujo, son *incompatibles* con los datos del problema. Por ejemplo, en el problema siguiente, por muy rica que sea nuestra imaginación no puede darnos de inmediato la configuración correcta en el espacio, y sólo en el proceso de la resolución estricta se puede aclarar cuál es la disposición real de los cuerpos.

2. *En una pirámide de base triangular dos caras son triángulos equiláteros con el lado a y las otras dos son triángulos rectangulares isósceles. Determinar el radio de la esfera inscrita en la pirámide.*

Para resolver el problema se necesita un dibujo tradicional: supongamos que $SABC$ es la pirámide en cuestión (fig. 73), los triángulos ASC y BSC son equiláteros y $\angle ASB = \angle ACB = 90°$. Con el fin de calcular el radio r de la esfera inscrita recurramos a la fórmula (5).

El área de la superficie de la pirámide $SABC$ se determina inmediatamente: $S = a^2\ (2+\sqrt{3})/2$. Para encontrar su volumen es necesario calcular su altura SH. Unamos el punto H con los vétrices de la base. Puesto que las aristas laterales son iguales, son también

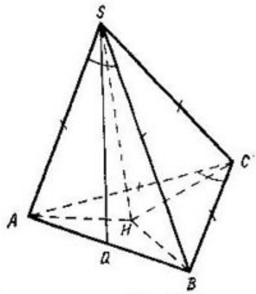

Fig. 73

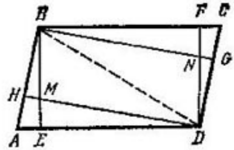

Fig. 74

iguales sus proyecciones: $AH = BH = CH$. Pero esto significa que H es el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC. Sin embrago, como $\angle ACB = 90°$, el centro del círculo circunscrito ha de hallarse en el punto medio de la hipotenusa AB, es decir, el punto H tiene que coincidir con el punto Q, que es la base de la altura de la cara lateral ASB bajada de S a AB.

Es así como resulta imposible el fenómeno ilustrado en la fig. 73, el dibujo es erróneo. En realidad el plano ASB es perpendicular al plano ABC y la altura de la pirámide coincide con la altura SQ de la cara lateral ASB.

Después de hacer correctamente el dibujo, podemos determinar fácilmente $V = a^3\sqrt{2}/12$, luego se calcula el radio de la esfera inscrita en la pirámide: $r = a\sqrt{2}(2-\sqrt{3})/2$.

He aquí otro problema en el cual el dibujo "habitual", como se ha aclarado, no corresponde a los datos del problema y debe ser sustituido.

3. *Se tiene un paralelogramo cuyo lado $AB = 1$, $BC = 2$ y el ángulo ABC es obtuso. Por cada punto B y D se han trazado dos rectas, una de las cuales es perpendicular al lado AB y la otra es perpendicular al lado BC. Como resultado de la intersección de estas cuatro rectas se ha formado un paralelogramo semejante al $ABCD$. Hallar el área del paralelogramo $ABCD$.*

Al empezar a resolver este problema los estudiantes suelen trazar la fig. 74; en ésta $BE \perp BC$, $DF \perp BC$, $BG \perp AB$, $DH \perp AB$. Según las condiciones el paralelogramo $BNDM$ formado por la intersección de las rectas BE, DF, BG y DH es semejante al paralelogramo $ABCD$. Para calcular el área del paralelogramo $ABCD$ hay que calcular el ángulo BAD (los lados del paralelogramo ya se conocen). En virtud de los datos este ángulo es agudo, designemos su valor por medio de α.

Primero encontraremos la relación $BM : MD$ de los lados del paralelogramo $BNDM$. Con este fin es necesario determinar, qué pares de lados de los paralelogramos semejantes $ABCD$ y $BNDM$ son similares. Tracemos la diagonal BD y examinemos los triángulos BAD y BMD. Puesto que $\angle ABD > \angle ADB$ (ya que en el triángulo BAD según los datos $AD > AB$) y $\angle ABE = \angle ADH$ (como ángulos agudos con lados respectivamente perpendiculares), por consiguiente $\angle MBD \angle$ $\angle MDB$, y por eso para los lados del triángulo BMD es válida la desigualdad $MD > BM$. Así pues, en el paralelogramo $BNDM$ el lado MD es *mayor* que el lado BM, es decir, $MD : BM > 1$. Como en el paralelogramo $ABCD$, de acuerdo con los datos, $BC : AB = 2 > 1$, entonces son similares los pares de lados AB y BM, BC y MD y por eso $MD : BM = 2$.

Pasemos ahora al cálculo del ángulo α. De la semejanza de los triángulos rectángulos MED y MHB deduzcamos que $ED : HB = MD : MB$, o sea $ED = 2HB$. Pero $ED = AD - AE = 2 - \cos\alpha$ (del triángulo rectangular ABE se deduce que $AE = AB\cos\alpha = \cos\alpha$) y $HB = AB - AH = 1 - 2\cos\alpha$ (del triángulo rectángulo AHD se deduce que $AH = AD\cos\alpha = 2\cos\alpha$) y, por consiguiente, $2 - \cos\alpha = 2\cdot(1 - 2\cos\alpha)$, de donde $\cos\alpha = 0$, es decir, $\alpha = 90°$.

Al obtener este valor del ángulo α (que según los datos del problema ha de ser *agudo*) muchos estudiantes no pueden superar la contradicción surgida. Unos tratan de encontrar un error en los cálculos anteriores (pero sin éxito, ya que para la configuración que se da en la fig. 74 todos los cálculos se han efectuado correctamente), otros estudiantes dicen que el problema no tiene solución.

Sin embargo, son pocos los que hacen una conclusión correcta: *el resultado obtenido demuestra que la fig. 74 no satisface los datos del problema*, ya que en estos datos la configuración mostrada en la figura (dibujo) resulta *imposible* [1]. Por consiguiente, se necesita aclarar si existe alguna otra disposición de las figuras que se tratan en los datos del problema. Por desgracia, muchos estudiantes, por falta de imaginación geométrica, no llegan a la configuración ilustrada en la fig. 75, donde el paralelogramo $BNDM$ no se halla por completo dentro del paralelogramo $ABCD$.

Así, resolvamos el problema para la configuración ilustrada en la fig. 75. Al determinar que $MD > BM$ (con este fin es suficiente trazar una diagonal BD y notar que $\angle MBD > \angle MBC = 90°$), deducimos de la semejanza de los paralelogramos que

$$\frac{BM}{DC} = \frac{MD}{BC}. \tag{6}$$

Sea K el punto de intersección de la recta MD con el lado BC. De la semejanza de los triángulos rectangulares MBK y KCD se deduce que

$$\frac{BM}{DC} = \frac{MK}{KC}. \tag{7}$$

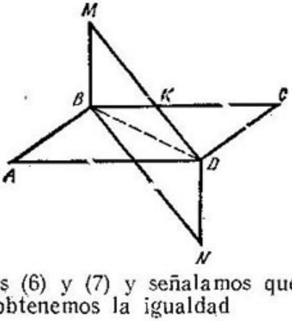

Fig. 75

Si comparamos (6) y (7) y señalamos que $MD = MK + KD$, $BC = BK + KC$, obtenemos la igualdad

$$\frac{MK}{KC} = \frac{MK+KD}{BK+KC}, \quad \text{ó} \quad \frac{MK}{KC} = \frac{KD}{BK}. \tag{8}$$

Sin embargo, de los triángulos semejantes MBK y KDC se deduce que $MK : KC = BK : KD$. Comparando esta igualdad con (8) concluimos que $MK = KC$. Pero en este caso de (7) se deduce que $BM = DC = 1$ y luego de (6), que $MD = BC = 2$. Así resulta que los paralelogramos $ABCD$ y $BMDN$ son *iguales*.

[1] Hablando con mayor precisión, si trazamos las perpendiculares BE, DF, BG y DH en el paralelogramo $ABCD$ (con los lados $AB = 1$, $BC = 2$ y ángulo obtuso ABC) se obtiene el paralelogramo $BMDN$ que se halla *en el interior* del paralelogramo $ABCD$ (fig. 74), en este caso los paralelogramos *no pueden ser semejantes*.

Puesto que $MK = KC$, del triángulo rectángulo MBK, de acuerdo con el teorema de Pitágoras obtenemos que $MK^2 = 1 + (2 - MK)^2$, es decir, $MK = 5/4$. En fin, si tomamos en consideración que $\angle BMK = \alpha$, encontramos del mismo triángulo rectángulo MBK que sen $\alpha = BK/MK = (2 - KC)/MK = (2 - MK)/MK = 3/5$. Por consiguiente, el área del paralelogramo $ABCD$ es igual a $S = AB \cdot BC \cdot$ sen $\alpha = 6/5$.

Así, el problema está resuelto. Resulta que a los datos del problema les satisface la única configuración en que el paralelogramo $BMDN$ no se halla dentro del paralelogramo $ABCD$. Cabe señalar que algunos estudiantes, desde el principio encuentran el área del paralelogramo $ABCD$ haciendo uso de la fig. 75, pero no investigan si es posible o no, según los datos del problema, el caso de la disposición ilustrada en la fig. 74. Es natural, que pueda considerarse por completa sólo aquella resolución en la que se examinen los dos casos.

EJERCICIOS:

1. Defina a) un polígono convexo; b) los ángulos alternos internos; c) una circunferencia inscrita en el triángulo; d) las rectas que se cruzan; e) un ángulo entre dos planos que se intersecan; f) un sector esférico.

2. ¿Es una definición, un axioma o teorema cada una de las siguientes afirmaciones: a) dos rectas que se intersecan pueden tener un solo punto común; b) se llama regular un polígono cuyos ángulos, al igual que los lados, son iguales; c) tres puntos cualesquiera en el espacio siempre se encuentran en un plano; d) una recta es perpendicular a un plano; si es perpendicular a dos rectas que se intersecan y se hallan en dicho plano?

3. Supongamos que la recta l se encuentra en el plano π y que L es una recta cualquiera que no se halla en dicho plano. Consideremos el teorema siguiente: si la recta L es paralela a la recta l, entonces la recta L es paralela al plano π. Formule teoremas: uno inverso, uno contrario y uno contrario al inverso. ¿Cuáles de éstos son válidos?

4. Demostrar que el triángulo cuyos lados son de 5, 13 y 12 unidades es rectangular. ¿Qué relación existe entre esta afirmación y el teorema de Pitágoras?

5. ¿Puede definirse la longitud de la circunferencia como el límite de la sucesión de los perímetros de polígonos inscritos, si se cumplen dos condiciones: a) el número de lados de los polígonos crece infinitamente, b) la sucesión de las longitudes de los mayores lados de los polígonos tiende a cero?

6. Demostrar que $3 < \pi < 4$.

7. Consideremos la afirmación siguiente: "Si en los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ tenemos, que $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ y $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, en este caso $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$". ¿Es justa esta demostración de la afirmación? Apliquemos el triángulo $A_1B_1C_1$ al triángulo ABC de tal modo que el lado A_1C_1 coincida con el lado AC, y el vértice B_1 se halle en cierto punto B_2 dispuesto, en contraste con el vértice B, a otro lado respecto a la recta AC. Unamos los puntos B y B_2. El triángulo BAB_2 es isósceles (porque $AB_2 = A_1B_1 = AB$), y por eso $\angle ABB_2 = \angle AB_2B$. Como $\angle ABC = \angle AB_2C$ (ya que $\angle AB_2C = \angle A_1B_1C_1$), también $\angle CBB_2 = \angle CB_2B$, es decir, el triángulo BCB_2 es isósceles y $BC = B_2C$. Por consiguiente, los triángulos ABC y AB_2C tienen los lados iguales respectivamente, es decir, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ¿Es justa la afirmación inicial?

8. Se dan dos triángulos en el espacio, cuyos lados son respectivamente paralelos. ¿Qué puede decirse de las rectas que unen respectivamente los vértices del primero y segundo triángulos?

9. Demostrar que los tres planos bisectrales de los ángulos diedros de un ángulo triédrico se intersecan en una misma recta.

§ 2. PROBLEMAS PARA LOS LUGARES GEOMÉTRICOS DE LOS PUNTOS Y PARA LA CONSTRUCCIÓN

En Geometría tienen gran importancia los aspectos referentes a la descripción de todo conjunto de puntos que poseen cierta propiedad. Para aclarar estos aspectos, es necesario entender bien la definición del lugar geométrico de los puntos y saber aquellos lugares geométricos que se mencionan en el programa.

Sin embargo, en muchos casos la solución de *los problemas para el lugar geométrico* de los puntos suele basarse en la utilización sabia de algún fenómeno geométrico.

1. *Se da el triángulo ABC; hallar (en el plano de este triángulo) el lugar geométrico de tales puntos que las áreas de los triángulos ABM y BMC sean iguales.*

Señalemos que los dos últimos triángulos tienen un lado BM común (fig. 76); por esta razón sus áreas serán iguales si son iguales también las alturas trazadas a este lado. De este modo, se requiere encontrar tal lugar geométrico de los puntos de M que los puntos A y C equidisten de la recta BM.

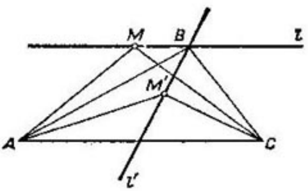

Fig. 76

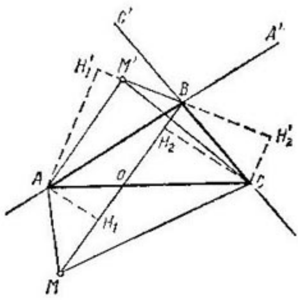

Fig. 77

Interpretado de esta manera, el problema resulta más sencillo. Se puede decir que cualquier recta paralela a la recta AC posee la propiedad de que los puntos A y C equidistan de ésta, y por lo tanto todos los puntos de la recta l, que es paralela a la recta AC y que pasa por el vértice B del triángulo, pertenecen al lugar geométrico de los puntos buscado.

Como vemos ahora, los puntos del plano que poseen la propiedad requerida, pueden hallarse simplemente "adivinándose". No obstante, el razonamiento ilustrado no puede servir de solución, a pesar de que algunos estudiantes, por desgracia, se le recurren.

En efecto, de acuerdo con la definición, *el conjunto de puntos de un plano (o de un espacio, si el problema es estereométrico) que poseen cierta propiedad, se denomina lugar geométrico, si* 1) *cada punto de este conjunto posee la propiedad programada;* 2) *cada punto que no pertenece al conjunto en consideración no posee la propiedad programada.*

Es evidente el hecho de que todos los puntos M de la recta trazada l (fig. 76) poseen la propiedad dada en el problema. Sin embargo, se buscan *todos* los puntos del plano que poseen la propiedad indicada en los datos del problema; no obstante, nosotros no hemos demostrado que entre los demás puntos del plano no tenemos aquéllos, para los cuales esta propiedad se cumple.

Así, nos queda una pregunta: ¿Agota la recta l el lugar geométrico buscado? Resulta que no. Como se sabe, cualquier recta que pase por el punto medio del segmento AC, posee la propiedad de que equidiste de los puntos A y C. Pero tenemos que elegir aquella de las rectas que pasa por el vértice B. Por consiguiente, todos los puntos M' de la recta l', que es mediana del triángulo ABC trazada desde el vértice B (fig. 76), también forman el lugar geométrico buscado. Esta otra "cojetura" ilustra bien que la demostración estricta es inevitable: jamás podemos estar seguros de que hemos adivinado del todo.

He aquí la demostración en que no se emplean ningunas cojeturas previas. Primero, algunos razonamientos para determinar la forma del lugar geométrico buscado. Prolonguemos infinitamente los lados AB y BC del triángulo ABC (fig. 77) y analicemos por separado dos casos posibles.

a) El punto M *que posee la propiedad requerida* se encuentra en el interior del ángulo ABC (o dentro del ángulo $A'BC'$ que es vertical respecto al mismo). Como los triángulos AMB y BMC son equidimensionales, las alturas AH_1 y CH_2 son también iguales, por esta razón son iguales los triángulos rectángulos AOH_1 y COH_2 (O es el punto de intersección del lado AC con el segmento MB o su prolongación; proponemos al lector trazar un dibujo para el caso en que el punto M se encuentra dentro del ángulo $A'BC'$) y, por consiguiente, $AO = OC$. Así, el punto M se halla en la mediana del triángulo ABC trazada desde el vértice B (la mediana se supone prolongada infinitamente).

b) El punto M', *que posee la propiedad requerida*, se encuentra dentro del ángulo ABC' (o en el interior del ángulo CBA' que es vertical respecto a éste). Por ser equidimensionales los triángulos $AM'B$ y $BM'C$, las alturas AH'_1 y CH'_2 son iguales y, por consiguiente, el cuadrilátero $AH'_1\,H'_2\,C$ es rectangular ($AH'_1 \perp H'_1\,H'_2$; $CH'_2 \perp H'_1\,H'_2$; los lados AH'_1 y CH'_2 son iguales y paralelos; proponemos al lector trazar un dibujo para el caso en que el punto M' se encuentra dentro del ángulo CBA'). De este modo, el punto M' se halla en la recta que es paralela a AC y pasa por el punto B.

Es obvio que los puntos del lugar geométrico buscado no pueden encontrarse en las rectas AA' y CC' ya que en este caso uno de los triángulos (AMB ó BMC) se degenera en segmento.

Estos razonamientos demuestran que el lugar geométrico buscado puede componerse sólo de dos rectas: de una mediana (prolongada infinitamente) del triángulo ABC trazada por el vértice B, y de una recta paralela al lado AC y trazada por el punto B (es decir, nos referimos de nuevo a la fig. 76). De hecho, se demostró lo siguiente: si cierto punto M del plano posee la propiedad programada, este punto tiene que hallarse obligatoriamente en la recta l o en la l'; en otros términos, cada punto del plano, que no pertenece a dichas rectas, *no posee* la propiedad dada.

Es muy simple demostrar que *cada* punto de las rectas l y l' pertenece al lugar geométrico buscado. Si M es un punto arbitrario de la recta l (fig. 76), los triángulos ABM y CMB son equidimensionales porque tienen un lado común MB y alturas iguales trazadas a este lado. Si M' es un punto arbitrario de la recta l', en este caso, recurriéndonos a los razonamientos según el punto a), demostraremos que los triángulos AMB y CMB tienen dimensiones iguales.

Por consiguiente, el lugar geométrico de los puntos que se busca se encuentra en las rectas l y l' [1].

En lo ulterior necesitaremos (véase el § 8, Parte III) dos ugares geométricos importantes en el espacio.

El lugar geométrico de los puntos en el espacio, equidistantes de las caras de un ángulo diedro, es un plano que divide dicho ángulo en dos ángulos diedros iguales (el lector puede convencerse de la validez de esta afirmación). Este plano que divide el ángulo diedro en dos partes iguales se denomina *plano bisectral* del ángulo diedro (análogamente a la bisectriz del ángulo plano).

A continuación es fácil demostrar que *el lugar geométrico de los puntos en el espacio que equidistan de los dos puntos programados A y B es un plano perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.*

Hoy día están muy de moda *los problemas* de planimetría *para la construcción*, es decir, problemas que requieren construir alguna configuración geométrica usando no más que dos instrumentos, el compás y la regla. Por supuesto, en estos problemas no se trata del trazado más exacto del dibujo en cuestión, sino de la descripción del

[1] Sin embargo, hay que decir unas palabras sobre el punto B. Si elegimos el propio punto B en calidad del punto M, entonces los triángulos AMB y CMB se degeneran en segmentos, y, a base de esto, puede excluirse el punto B del lugar geométrico buscado. Sin embargo, si se supone que tal triángulo degenerado en segmento tiene un área igual a cero, en este caso también el punto B, hablando formalmente, poseerá la propiedad requerida en los datos del problema, es decir, los triángulos AMB y CMB, al coincidir los puntos M y B, tienen la misma área, que es igual a cero.

algoritmo y del esquema de métodos que permitan efectuar dicha construcción.

El programa escolar no prevé el conocimiento de métodos generales para la resolución de tales problemas (método de simetría, método de semejanza, etc.); los estudiantes tienen que resolver los problemas para la construcción que se reducen directamente a los métodos principales de construcción enumerados en el programa.

Resolviendo los problemas para la construcción, primero debe hacerse un *análisis*, es decir, hallarse la idea que permita cumplir la construcción. Efectuando el análisis y suponiendo que el problema está resuelto, se traza el dibujo de la configuración buscada y se trata de hallar aquellas dependencias entre los datos del problema y los buscados que permitan aplicar los métodos principales conocidos, para la construcción.

Después que se haya encontrado el plan de la resolución del problema, hay que describir detalladamente *el esquema de métodos para la construcción* de la configuración necesaria. Luego es necesario demostrar que la configuración construida satisface realmente todos los requisitos de los datos del problema. En fin, se necesita analizar el problema, es decir, aclarar, si es posible la construcción, cuántas soluciones tiene el problema, etc.

2. *Sobre uno de los lados de un ángulo agudo dado está marcado el segmento BC. Hallar en el otro lado de dicho ángulo un punto desde el cual el segmento BC se vea al ángulo máximo.*

Empecemos por *el análisis* del problema. Supongamos que el segmento BC se encuentra en el lado MO del ángulo MOP, y que el punto A, dispuesto en el lado OP, es el buscado (fig. 78). Esto significa que para otro punto D cualquiera, que se halle en el lado OP, se cumple la condición: $\angle BAC > \angle BDC$. De esta manera, para resolver el problema tenemos que buscar el método de comparación de los ángulos.

Un buen método de comparación de los ángulos nos dan los teoremas sobre la medición de los ángulos cuyos vértices se encuentran en la circunferencia, fuera o dentro del círculo descrito por ésta. Si trazamos una circunferencia que pase por los puntos A, B y C, el ángulo BAC se medirá como la mitad del arco sobre el cual se apoya, y para otro punto D cualquiera que se disponga en OP y fuera de la circunferencia mencionada, el ángulo BDC se medirá por medio de la semidimensionalidad de los arcos en los que se apoya, es decir, BDC será *menor* que el $\angle BAC$.

Ahora está claro que para resolver el problema tenemos que trazar una circunferencia que pase por los puntos B y C, de modo que sea *tangente* al lado OP del ángulo MOP. En este caso el punto de tangencia será el buscado, puesto que todos los demás puntos del lado OP se encontrarán fuera de la circunferencia trazada.

Para hacer *la construcción* no es necesario trazar la propia circunferencia que pase por los puntos B y C y que sea tangente al lado OP, sino que es suficiente hallar el punto de tangencia A. Con este fin encontraremos la distancia entre este punto y el vértice O del ángulo MOP utilizando la propiedad conocida de la tangente y la secante: $OA^2 = OC \cdot OB$.

Así, para efectuar la construcción debe encontrarse la media geométrica de los dos segmentos conocidos OB y OC, y luego colocar este segmento en el lado OP del ángulo MOP a partir del vértice O. El otro extremo del segmento que se coloca nos da el punto buscado.

Realizando todos los razonamientos en orden inverso, se puede *demostrar* que el punto hallado de esta manera será el buscado. *El análisis* del problema demuestra que el problema es siempre resoluble y que tiene una sola resolución.

3. *Se da el punto M dentro del ángulo A. Se requiere trazar una recta l por el punto M de tal manera que forme con dicho ángulo un triángulo de área mínima.*

En primer lugar, realizaremos *el análisis;* supongamos, con fines de certeza, que el ángulo A es agudo.

Sean PN y RS dos rectas que pasan por el punto M (fig. 79). Comparamos las áreas de los triángulos APN y ARS. Construimos los puntos P_1 y R_1 de tal modo que $P_1M = PM$ y $R_1M = RM$; entonces, pasando del triángulo APN al ARS, disminuimos el área, ya que

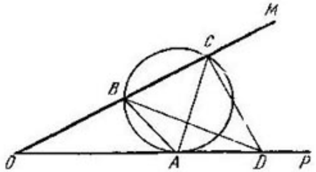

Fig. 78

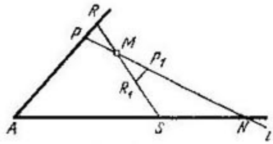

Fig. 79

el área despreciada del triángulo MNS es mayor que la añadida del triángulo PRM que es igual al triángulo P_1R_1M. Es evidente que tal disminución puede hacerse únicamente en el caso en que el punto M divide en dos partes *desiguales* el segmento PN de la recta l, comprendido entre los lados del ángulo.

Así, se debe trazar la recta l por el punto M de tal modo que se cumpla la igualdad $NM = MP$; sólo en este caso resulta imposible disminuir más el área del triángulo ANP. Pero es obvio que en este caso AM es la mediana del triángulo ANP.

Trazando más adelante hasta construir un paralelogramo a base de este triángulo; podemos indicar inmediatamente el método de *construcción* (fig. 80). Trazamos la recta AM más lejos del punto M y marcamos en ella $MB = AM$. Por el punto B trazamos una recta paralela a uno de los lados del ángulo en cuestión, sea AC, hasta que se interseque con su otro lado, AD, en el punto P. La recta buscada l pasa por los puntos P y M.

Para *la demostración* se necesita, de hecho, repetir los razonamientos efectuados durante el análisis. Sea l' una recta arbitraria que pasa por el punto M. Como $\triangle\ MPP' = \triangle\ MNR$ (según el segundo concepto de la igualdad de triángulos), el triángulo APN es equidimensional al cuadrilátero $AP'RN$, cuya área es menor que la del triángulo $AP'N'$.

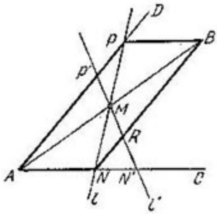

Fig. 80

Si el ángulo A es obtuso, la construcción se efectúa del modo análogo (el lector puede hacerla). *El análisis* del problema no es complejo: es siempre resoluble unívocamente si el ángulo A es menor que el ángulo llano.

Algunas observaciones complementarias sobre la resolución de problemas para la construcción pueden verse en el § 3 de esta Parte.

EJERCICIOS:

1. Hallar el lugar geométrico de los puntos en el plano si se sabe que: a) la diferencia de las distancias de éstos hasta dos rectas L y l de este plano, que se intersecan, es igual (por su valor absoluto) a la magnitud programada $a > 0$; b) la suma de cuadrados de las distancias de los cuales hasta dos puntos A y B de este plano es igual a la magnitud programada a.

2. En una recta se tienen los puntos A y B. Dos circunferencias son tangentes a dicha recta en los puntos A y B respectivamente y tangentes una a la otra en el punto M. Hallar el lugar geométrico de los puntos de M.

3. En un plano se dan tres rectas que se intersecan en pares y no pasan por un punto. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias circunscritas a todos los triángulos posibles cuyos vértices se encuentran en las rectas mencionadas.

4. Hallar en el plano el lugar geométrico de las bases de las perpendiculares trazadas desde el punto A hasta las rectas que pasan por el punto dado B.

5. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de la circunferencia que pasan por el punto A dentro de la circunferencia.

6. Hallar el lugar geométrico de aquellos puntos del plano que las tangentes trazadas de estos puntos a la circunferencia formen entre sí el ángulo α.

7. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos rectilíneos que unen el punto A, dispuesto fuera de la circunferencia, con los puntos de ésta.

8. Se dan dos puntos A y B en un plano. Hallar el lugar geométrico de los puntos de M de este plano, para los cuales $AM \cdot BM \cdot \cos(\angle AMB) = 3/4\ AB^2$.

9. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio equidistantes de los tres puntos A, B, C, si éstos: a) no se disponen en una recta; b) se sitúan en una recta.

10. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que se encuentran a la distancia a de los dos planos Π y π que se intersecan.

11. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de tres planos que se intersecan en pares sin pasar por una misma recta y que son perpendiculares a cierto plano π.

12. Hallar el lugar geométrico de las bases de las perpendiculares bajadas desde el punto A a todas las rectas posibles trazadas en el espacio por el punto fijo B.

13. Hallar el lugar geométrico de las proyecciones del punto A a todos los planos posibles que pasan por la recta l en la que no se encuentra el punto A.

14. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos AB en los cuales los puntos A y B se sitúan en diferentes caras de un ángulo diedro agudo.

15. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio por los cuales es imposible trazar una recta que interseque las rectas L y l que se cruzan.

16. En el plano π se encuentra un cuadrado de lado a. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio alejados de los vértices del cuadrado a la distancia l.

17. Se dan el plano π y los puntos A y B dispuestos a un lado del mismo de tal modo que la recta AB no es paralela al plano π. Se consideran todas las esferas posibles que pasen por los puntos A y B y sean tangentes al plano π. Hallar el lugar geométrico de los puntos de tangencia.

18. Se da un cubo de arista a. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de longitud l, uno de cuyos extremos se sitúa en la diagonal de la cara superior del cubo y el otro, en la diagonal (no paralela) de la cara inferior del cubo (o en las prolongaciones de estas diagonales).

19. Trazar un segmento rectilíneo $\sqrt[4]{a^4+b^4}$, si se conocen los segmentos a y b.

20. Construir un triángulo con el lado a, la mediana m de otro lado y el radio R de la circunferencia circunscrita.

21. Trazar una circunferencia que sea tangente a la recta l y que pase por los dos puntos A y B situados a un lado de esta recta.

22. Trazar una circunferencia tangente a una circunferencia dada y a una recta dada l en el punto fijo A.

23. Se da un círculo cuyo diámetro es AB. Determinar el lugar del punto C en el diámetro AB de tal modo que la suma de las áreas de los círculos, cuyos diámetros son los segmentos rectilíneos AC y BC, sea igual a 2/3 del área del círculo dado.

24. Se tiene el triángulo ABC. Construir el rectángulo $ABDE$, uno de cuyos lados sea igual al lado AB del triángulo, mientras que su área junto con el área del cuadrado construido en el lado BD sea igual al área del triángulo dado.

25. Se da una pirámide cuya base es un cuadrado y la altura es igual a la arista de la base. Construya un prisma triangular, cuya altura es igual al segmento dado h, que su base sea un triángulo rectángulo isósceles y cuyo volumen sea igual al de la pirámide dada. Describir el método de construcción de la base de dicho prisma con ayuda de un compás y una regla.

§ 3. APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA Y EL ALGEBRA EN LA GEOMETRÍA

Algunos estudiantes opinan que hay problemas puramente "algebraicos", "geométricos" y "trigonométricos", cuyos métodos de resolución no tienen nada común. Por esta causa tratan de obtener la solución de los problemas de Geometría empleando medios "puramente geométricos".

Entre tanto, esta opinión, que provoca la desmembración artificial de las matemáticas elementales, es absolutamente errónea. Para resolver muchos problemas conviene aplicar todo el caudal de conocimientos de las diversas partes de las matemáticas elementales [1]. En algunos casos la aplicación de los métodos o fenómenos trigonométricos o algebraicos para la solución de los problemas de Geometría resulta inevitable, ya que éstos pueden carecer de otras resoluciones "puramente geométricas".

En tales problemas la Geometría, la Trigonometría y el Algebra han de actuar como "un frente único". Esta es la razón, por la cual los estudiantes, que saben combinar los fenómenos de las diversas ramas de la Geometría, Trigonometría y Algebra y dominan activamente todo el curso de matemáticas de la escuela, pueden resolver con éxito estos problemas.

Es sabido que es muy útil la aplicación de la Trigonometría a la resolución de los llamados "problemas de cálculo" de Geometría. Con razón se incluye en el cuestionario de los exámenes un punto especial "Aplicación de la Trigonometría a resolución de los problemas de Geometría". Si no existieran relaciones trigonométricas entre los lados y ángulos de diversas figuras, no podríamos resolver muchos problemas.

Sin embargo, el uso de la Trigonometría en la resolución de los problemas de Geometría no se reduce sólo a la resolución de triángulos y a la simplificación de las fórmulas obtenidas, ya que sus posibilidades son mucho más amplias. En particular, resulta a veces muy útil la idea de *hallar el ángulo partiendo de las relaciones trigonométricas*. Por desgracia, este método de solución de los problemas de Geometría es prácticamente desconocido para muchos estudiantes; por esta causa lo ilustraremos con dos ejemplos.

1. *Se toma un punto M dentro del ángulo agudo α. Las bases P y Q de las perpendiculares trazadas desde el punto M a los lados del ángulo distan del vértice O del ángulo a las magnitudes $OP = p$, $OQ = q$. Hallar los ángulos en que la recta OM divide el ángulo α.*

Designemos la distancia OM (desconocida para nosotros) por medio de x y los ángulos agudos POM y QOM en que la recta OM divide el ángulo α, mediante φ_1 y φ_2 respectivamente (fig. 81). La magnitud del ángulo φ_1 puede ser expresada valiéndonos del triángulo rectángulo MPO por p y x:

$$\cos\varphi_1 = \frac{p}{x}, \text{ es decir, } \varphi_1 = \operatorname{arc}\cos\frac{p}{x}.$$

En este caso del triángulo rectángulo MQO, tomando en consideración que $\varphi_2 = \alpha - \varphi_1$, obtenemos:

$$\frac{q}{x} = \cos\varphi_2 = \cos(\alpha - \varphi_1) = \cos\alpha\cos\left(\operatorname{arc}\cos\frac{p}{x}\right) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc}\cos\frac{p}{x}\right).$$

[1] Recordemos que en el problema 19 del § 8, Parte I, hemos indicado la solución de dicho problema algebraico con el uso de ideas geométricas.

Calculando las expresiones obtenidas (véase § 5, Parte II), hallamos que

$$q = p\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\sqrt{x^2 - p^2}.$$

De esta ecuación se podría determinar x y luego, de los triángulos rectángulos MPO y MQO hallar los $\cos\varphi_1$ y $\cos\varphi_2$. Pero es menos

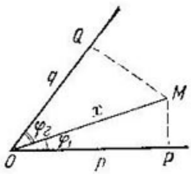

Fig. 81

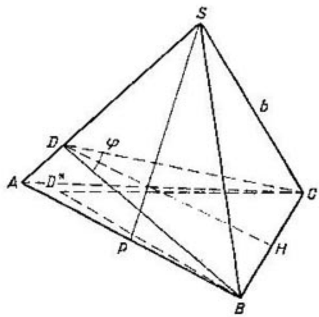

Fig. 82

complicado proceder de otro modo. Señalemos que $\sqrt{x^2 - p^2} = MP$ (del triángulo rectángulo MPO), y por eso

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{MP}{OP} = \frac{\sqrt{x^2 - p^2}}{p} = \frac{q - p\cos\alpha}{p\operatorname{sen}\alpha}.$$

Así obtenemos definitivamente

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{q - p\cos\alpha}{p\operatorname{sen}\alpha}, \quad \varphi_2 = \alpha - \varphi_1$$[1].

2. *La arista lateral de una pirámide triangular regular es igual a b, el ángulo entre las caras laterales es igual a φ. Hallar la magnitud del lado de la base.*

Sea la pirámide $SABC$ regular; $AS = BS = CS = b$ (fig. 82). Tracemos desde los puntos B y C las alturas BD_1 y CD_2 de los triángulos ASB y ASC. Demostremos que les servirá de base un punto común $D_1 = D_2 = D$. En efecto, $\triangle SBD_1 = \triangle SCD_2$, y por lo tanto las distancias entre el vértice S y la base de las alturas trazadas al lado AS en cada uno de estos triángulos serán iguales.

De aquí se deduce que BDC es un ángulo lineal de un ángulo diedro entre las dos caras, es decir, $\angle BDC = \varphi$.

[1] El lector puede convencerse, al hacer cálculos, de que $\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{p - q\cos\alpha}{q\operatorname{sen}\alpha}$.

Tracemos la apotema SP de la pirámide y la altura DH del triángulo isósceles BDC. En este caso es evidente que $AB = 2AP = 2b \cos (DAP)$, que nos permite determinar el ángulo DAP. Por ser agudo este ángulo (como un ángulo a la base de la cara lateral de una pirámide triangular regular), refiriéndonos al triángulo BAD, podemos anotar que

$$\angle DAP = \operatorname{arcsen} \frac{BD}{AB}.$$

A continuación, del triángulo BDH obtenemos:

$$BD = \frac{BH}{\operatorname{sen}(\varphi/2)} = \frac{AB}{2 \operatorname{sen}(\varphi/2)}.$$

Por consiguiente,

$$AB = 2b \cos \left[\operatorname{arcsen} \left(\frac{1}{2 \operatorname{sen}(\varphi/2)} \right) \right].$$

Simplificando esta expresión (véase § 5, Parte II), encontramos

$$AB = b \sqrt{4 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\varphi/2)}}. \tag{1}$$

A base de la respuesta obtenida (1) conviene hacer la observación siguiente. Por lo común, se trata de reducir la respuesta en los problemas de Geometría a la llamada forma "cómoda para la logaritmación". Es fácil representar el segundo miembro de la igualdad (1) en la forma:

$$AB = \frac{2b}{\operatorname{sen}(\varphi/2)} \sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}, \tag{2}$$

pero esta representación no es obligatoria.

A propósito, la tradición de dar la respuesta "en forma cómoda para la logaritmación", en muchos casos resulta inútil para la anotación más simplificada de la respuesta. En contraste con la opinión conocida, tampoco es la más cómoda para el cálculo con valores concretos de las magnitudes dadas en el problema. No es difícil convencerse de que, al efectuar tales cálculos, la respuesta se obtiene más rápida y simplemente valiéndonos de la fórmula (1) en comparación con la fórmula (2).

Al resolver estos problemas, muchos estudiantes no sólo recurren a argumentos y cálculos necesarios sino también tratan de analizar con más detalles la fórmula obtenida. Este análisis, como regla, consiste en la búsqueda de su esfera de definición.

Se procede más o menos de la forma siguiente. Es obvio que la fórmula (1) tiene el sentido únicamente si se observa la condición

$$4 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\varphi/2)} > 0. \tag{3}$$

Puesto que el ángulo φ entre las caras laterales (según los razonamientos geométricos evidentes) debe ser comprendido en los límites de 0° a 180°, en este caso $0° < \varphi/2 < 90°$, entonces sen $(\varphi/2) > 0$. Por esta razón la desigualdad (3) puede escribirse en la forma de sen $(\varphi/2) > 1/2$, de donde obtenemos que la fórmula (1) tiene sentido para $60° < \varphi < 180°$.

Es fácil convencerse que dicha condición se cumple para cualquier pirámide triangular regular. En efecto, según la conocida propiedad de la perpendicular y las oblicuas, $BD < BA$ (fig. 82). Por eso, si se traza un triángulo isósceles BD^*C con los lados BC, $BD^* = BD$, $CD^* = CD$ (igual al triángulo BDC) en el plano de la base ABC de la

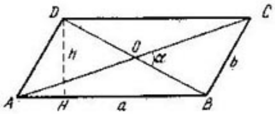

Fig. 83

pirámide, el punto D^* se hallará *dentro* del triángulo ABC. De aquí, después de un simple cálculo de los ángulos, concluimos que $\angle BDC = \angle BD^*C > \angle BAC = 60°$.

Por consiguiente, *en la pirámide triangular regular el ángulo diedro a la arista lateral es siempre mayor de* 60°. Esto significa que la fórmula (1) es siempre válida para cualquier pirámide triangular regular.

Cabe señalar que este análisis de la respuesta no es un elemento obligatorio de la resolución del problema (si, claro está, esta condición no se estipula especialmente en el problema).

No obstante, muchos estudiantes realizan este análisis. A menudo se comete un error lógico: se acepta como cierto que la configuración de que se trata en el problema, existe precisamente con aquellos valores de las letras con los cuales tiene sentido la fórmula definitiva. En realidad, el análisis de las condiciones de la existencia de la configuración geométrica *no es*, de ningún modo, *equivalente* al análisis simple de la respuesta obtenida.

Con el fin de aclarar esta distinción, examinaremos el problema siguiente.

3. *En el paralelogramo $ABCD$ el lado mayor $AB = a$ y el menor $BC = b$, el ángulo agudo entre las diagonales es α. Hallar la distancia entre los lados paralelos AB y DC.*

Compongamos dos expresiones distintas para el área S del paralelogramo (fig. 83). Por una parte,

$$S = 4S_{\triangle BOC} = 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \operatorname{sen} \alpha,$$

donde α es el ángulo agudo entre las diagonales. Para determinar el producto $OB \cdot OC$ apliquemos el teorema de los cosenos al triángulo BOC:

$$b^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos \alpha$$

y la propiedad conocida del paralelogramo

$$OB^2 + OC^2 = 1/4\,(DB^2 + AC^2) = 1/2\,(a^2 + b^2).$$

Obtenemos definitivamente $S = 1/2\,(a^2 - b^2)\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Por otra parte, $S = AB \cdot DH$, donde $DH = h$ es la distancia buscada (la altura del paralelogramo). Igualando las dos expresiones para el área S, encontramos que

$$h = \frac{a^2 - b^2}{2a}\,\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (4)$$

Si buscáramos la esfera de la definición de esta fórmula, veríamos que su segundo miembro tiene sentido, por ejemplo, para todos los valores de $a > 0$, $0 < b < a$ y $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Sin embargo ¿se deduce de aquí que la configuración geométrica en cuestión existe para todos los valores de las letras? Es decir ¿puede construirse un paralelogramo con los lados a y b y el ángulo agudo α entre las diagonales, cualesquiera que sean los valores $a > 0$, $0 < b < a$ y $0^\circ < \alpha < 90^\circ$?

Aplicando a la fórmula (4) los valores, digamos, $a = 3$, $b = 1$, y $\alpha = 45^\circ$, encontraremos que $h = 4/3$. Si meditamos un poco, este resultado nos puede parecer algo extraño. En efecto, si examinamos el triángulo rectangular AHD (fig. 83) su hipotenusa $AD = 1$ debe ser más corta que el cateto $DH = 4/3$. Esto sólo puede significar que no existe el paralelogramo con los valores de a, b y α dados.

Es fácil convencerse directamente de lo expuesto. Como el área del paralelogramo con los lados a y b no supera el área del rectángulo con las mismas longitudes de los lados, debe cumplirse la desigualdad $1/2\,(a^2 - b^2)\,\mathrm{tg}\,\alpha \leqslant ab$, que puede apuntarse también en la forma siguiente:

$$0 < \alpha \leqslant \mathrm{arc\,tg}\,\frac{2ab}{a^2 - b^2}. \qquad (5)$$

En otras palabras, *los valores a, b y α no deben ser cualesquiera, independientemente una de otra, ya que han de satisfacer la desigualdad* (5).

De este modo, son posibles los casos en que la configuración geométrica del problema existe no para todos los valores de las letras que abarca la definición de la respuesta. Por lo tanto, el análisis de un problema de Geometría, es decir, la aclaración de las condiciones con las cuales existe la configuración, es una cosa bastante compleja. Por eso en todos los problemas de Geometría sólo se necesita *realizar su resolución, suponiendo que exista la configuración geométrica de que se trata en el problema* (salvo, como es natural, el caso en que se estipula especialmente la necesidad de efectuar el análisis de esta índole).

Resolviendo los problemas de Geometría, los estudiantes se encuentran a veces con relaciones de forma extraña que se obtienen como resultado de la aplicación de las fórmulas trigonométricas conocidas. Estas "extrañezas", que son difíciles de razonar e interpretar debidamente provocan dudas en los estudiantes.

Entre tanto, es muy importante entender el sentido verdadero de estas relaciones de forma no común que surgen de súbito. El asunto consiste en que a menudo las propias fórmulas "piensan" por nosotros, son más "cautelosas", tomando en consideración los casos que no hemos prestado la atención debida.

Aquí está, por ejemplo, un problema en que las fórmulas tendrán en cuenta la condición que no se utiliza en nuestra resolución y que muchos estudiantes no la notan.

4. *En un triángulo acutángulo ABC con los ángulos α y β y los vértices A y B respectivamente está inscrita la circunferencia de radio r. En paralelo con BC se ha trazado una tangente a esta circunferencia, que interseca los lados AB y AC del triángulo en los puntos K y M, respectivamente. Hallar el área del trapecio $BCMK$.*

De acuerdo con la fórmula para el área del trapecio tenemos que hallar las bases BC y MK y su altura (fig. 84). Es evidente que la altura del trapecio equivale al diámetro $2r$ de la circunferencia inscrita.

La primera etapa de la solución consiste en la búsqueda de la base BC del trapecio, que es el lado del triángulo dado. Si desde el centro O

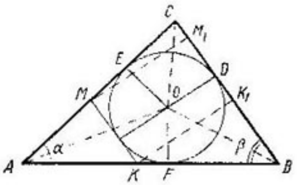

Fig. 84

de la circunferencia inscrita, es decir, desde el punto de intersección de las bisectrices CO y BO trazamos una perpendicular OD al lado BC, en este caso $OD = r$. Entonces de los triángulos rectángulos BOD y COD obtendremos respectivamente

$$BD = r \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}, \quad CD = r \operatorname{cotg} \frac{\pi-\alpha-\beta}{2} = r \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2},$$

y, por consiguiente,

$$BC = r\left(\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}\right). \tag{6}$$

La segunda etapa de la resolución es el proceso de hallar la base MK del trapecio. Tracemos las perpendiculares MM_1 y KK_1 desde los puntos M y K hasta el lado BC; es evidente que $MM_1 = KK_1 = 2r$. Puesto que

$$MK = M_1K_1 = BC - BK_1 - CM_1, \tag{7}$$

es suficiente encontrar los segmentos rectilíneos BK_1 y CM_1. Es posible efectuar esto valiéndonos de los triángulos rectángulos BKK_1 y CMM_1 respectivamente:

$$BK_1 = 2r\operatorname{cotg}\beta; \quad CM_1 = 2r\operatorname{cotg}(\pi - \alpha - \beta) = -2r\operatorname{cotg}(\alpha + \beta). \qquad (8)$$

El signo negativo aparecido en la última fórmula suele sorprender a los estudiantes. ¿Qué sentido geométrico tiene este signo? Naturalmente, no significa ninguna "longitud negativa". Aun más, es este signo negativo aparecido automáticamente el que asegura el valor positivo para el largo del segmento CM_1. Siendo acutángulo según los datos del problema el triángulo ABC, por eso $\alpha + \beta > \pi/2$, es decir, $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) < 0$. De este modo, la fórmula toma en consideración la suposición indicada en los datos del problema sobre el triángulo ABC, que hemos olvidado estipular o utilizar evidentemente.

¿A qué se debe la aparición del signo negativo? ¿De qué modo fue tomado en consideración la condición de que el triángulo es acutángulo? Examinemos una vez más con atención todos los razonamientos y cálculos realizados. Desde luego, al trazar la fig. 84 antes de empezar la resolución, hemos dibujado intencionalmente el triángulo ABC como acutángulo, de acuerdo con los datos del problema. Pero ¿dónde lo usamos después? Claro está que lo hemos aprovechado al bajar la perpendicular MM_1 y tomando por cierto que el punto M_1 se sitúa en el lado BC, ya que sólo en este caso es válida la igualdad (7). Si el ángulo ACB fuera obtuso, la base de la perpendicular M_1 se hallaría en la prolongación del lado BC tras el punto C, y la fórmula (7) tendría la forma $MK = M_1K_1 = BC - BK_1 + CM_1$ (el lector puede convencerse de esto trazando el dibujo correspondiente).

Por consiguiente, no hay nada sorprendente en la aparición del signo negativo en la fórmula para CM_1: la fórmula toma en consideración aquéllo que hemos aceptado como cierto sin estipular o argumentar.

Para cumplir la solución del problema nos quedan por realizar algunos cálculos. Al sustituir los términos de las expresiones (6) y (8) en la (7) determinamos la base MK del trapecio, después de lo cual el área S del trapecio $BCMK$ se halla mediante la fórmula bien conocida

$$S = 2r^2\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\beta} + \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}\right]. \qquad (9)$$

Conviene recordar que en los problemas de Geometría la respuesta puede obtenerse de distintas formas, en muchos casos no semejantes; esto depende de la idea en la cual se basa la solución o simplemente del camino tomado para las transformaciones.

Por ejemplo, si la base MK se busca de otra manera, la respuesta se obtiene de una forma diferente que en la (9). En efecto, $\triangle ABC \backsim \triangle AKM$ (fig. 84) y por eso, $BC : MK = H : h$; donde H y h son las alturas de los triángulos ABC y AKM respectivamente, bajadas desde el vértice común A. Como $h = H - 2r$, de esta proporción obtenemos $MK = BC - (2r \cdot BC/H)$. Puesto que el área del triángulo ABC es $1/2\ H \cdot BC = pr$, donde p es el semiperímetro (véase la fórmula (4) del § 1, Parte III), entonces $H = 2pr/BC$, y solamente nos queda por determinar p. Trazando la bisectriz AO y las perpendiculares OE y OF a los lados del triángulo ABC, refiriéndonos al triángulo AOE, encontramos $AE = r \operatorname{cotg}(\alpha/2)$ y por tanto (de acuerdo con las tangentes a la circunferencia)

$$p = 1/2(AB + BC + CA) = AE + BD + DC.$$

De este modo se determina la base MK del trapecio y luego también su área

$$S = r^2\left(\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left[1 + \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}\right]. \quad (10)$$

Claro está que no importa en qué forma se da la respuesta, a pesar de que se desea que se presente en la forma más sencilla posible. Todas estas formas de respuesta pueden ser transformadas una en otra, lo que demuestra su equivalencia y ausencia de errores en cada una de

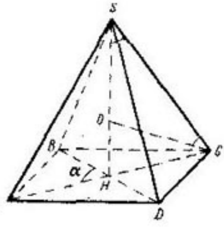

Fig. 85

las soluciones (el propio lector puede hallar el método de transformar la fórmula (10) en la fórmula (9)). Por eso no hay que tener prisa en considerar como errónea la resolución que conduce a la expresión definitiva, distinta de la respuesta dada para el problema.

En el problema que sigue la fórmula nos "avisa" de que en distintas pirámides el centro de la esfera circunscrita puede situarse tanto dentro de la pirámide como fuera de ésta (o en el plano de su cara). Este fenómeno general (véase el § 8, Parte III) es bien conocido; sin embargo, muchos estudiantes, al empezar la resolución de problemas, lo olvidan y no examinan todas las configuraciones posibles en el caso general.

5. *Un rectángulo de ángulo α entre las diagonales sirve de base de la pirámide; todas las aristas laterales forman con el plano de la base un mismo ángulo φ. Determinar la distancia entre el centro de la esfera circunscrita y el plano de la base de la pirámide y hallar el volumen de la pirámide si el radio de la esfera circunscrita a ésta es igual a R.*

Sea dada la pirámide $SABCD$ (fig. 85), su base es un rectángulo. Tracemos la altura de la pirámide SH; en este caso según los datos $\angle HAS = \angle HBS = \angle HCS = \angle HDS = \varphi$, por eso (ya que $\triangle ASH = \triangle BSH = \ldots$) todas las aristas laterales son iguales y H es el punto de intersección de las diagonales del rectángulo. Como el centro O de la esfera circunscrita debe equidistar de todos los vértices, se encuentra en la perpendicular al plano $ABCD$ situada en el centro del rectángulo, es decir, en la altura SH.

Examinemos los triángulos CHS y COS. Puesto que $\angle CSH = 90^\circ - \varphi$ y el triángulo COS es isósceles, por la propiedad del ángulo externo tenemos $\angle COH = 180^\circ - 2\varphi$. Resolviendo el triángulo COH hallamos la distancia del centro O al plano de la base:

$$OH = R\cos(180^\circ - 2\varphi) = -R\cos 2\varphi. \tag{11}$$

El signo negativo aparecido aquí merece la atención particular. ¿Qué significa? El asunto consiste en que, al trazar la fig. 85 hemos supuesto que el centro de la esfera circunscrita está situada en el interior de la pirámide y efectuábamos la resolución con esta suposición no evidente (los datos del problema no contienen tal suposición). No obstante, el centro de la esfera circunscrita no debe estar siempre dentro de la pirámide, y la fórmula nos recuerda esto.

Precisamente, el centro de la esfera circunscrita se ubica dentro de la pirámide si la altura de ésta supera la mitad de la diagonal del rectángulo (dentro del segmento SH se hallará el punto O que equidista de C y S), es decir, si $\varphi > 45^\circ$. Pero en este caso $\cos 2\varphi < 0$ y,

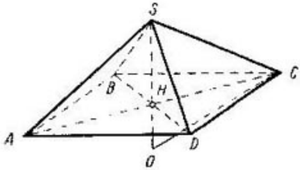

Fig. 86

por consiguiente [véase (11)], $OH > 0$. Si el centro de la esfera circunscrita se sitúa *en la base* de la pirámide coincidiendo con el punto H, la altura de la pirámide es igual a la mitad de la diagonal del rectángulo; entonces $\varphi = 45^\circ$ y por lo tanto $OH = 0$. En fin, si el centro de la esfera circunscrita está *fuera* de la pirámide (fig. 86), $\varphi < 45^\circ$ y no puede buscarse OH valiéndonos de la fórmula (11). De esas consideraciones se obtiene que $\angle COH = 2\varphi$, de donde se deduce que la distancia entre el punto O y el plano de la base OH es igual a $R\cos 2\varphi$ (la magnitud positiva)[1].

[1] No es difícil comprender que la distancia entre el centro O de la esfera circunscrita y el plano de la base $ABCD$ de la pirámide que se considera es igual a $R \times |\cos 2\varphi|$, independientemente de la disposición del centro O.

Pasemos al cálculo del volumen. Del triángulo COH hallamos que $HC = R$ sen $(180° - 2\varphi) = R$ sen 2φ es la igualdad válida para las figs. 85 y 86. Por esta razón el área de la base es:

$$S_{ABCD} = 4S_{\triangle DHC} = 2R^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi \operatorname{sen} \alpha;$$

y el ángulo α puede ser agudo u obtuso. Con el fin de calcular la altura de la pirámide examinemos tres casos. Si $\varphi > 45°$, es decir, el centro O se encuentra dentro de la pirámide (fig. 85), entonces

$$SH = SO + OH = R - R\cos 2\varphi = 2R \operatorname{sen}^2 \varphi;$$

si $\varphi < 45°$, es decir, el centro O se halla fuera de la pirámide (fig. 86), entonces

$$SH = SO - OH = R - R\cos 2\varphi = 2R \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

Pero con $\varphi = 45°$, $SH = SO = R = 3R$ sen^2 $45°$.

Así, cualquiera que sea el valor del ángulo φ, $0° < \varphi < 90°$, llegamos al mismo resultado:

$$V = 4/3\, R^3 \operatorname{sen}^2 2\varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \alpha.$$

Los métodos algebraicos tienen gran importancia para la resolución de los problemas de Geometría. El Algebra, en muchos casos junto con la Trigonometría, permite resolver una gran cantidad de problemas complejos.

La esencia del acercamiento algebraico a los problemas de Geometría consiste en que se componga de consideraciones geométricas una ecuación para cierta magnitud y después se resuelva o se investigue por medios algebraicos. Naturalmente, queda todavía por determinar una u otra interpretación geométrica del resultado algebraico obtenido.

Las relaciones métricas en el triángulo y en el círculo, las fórmulas para la resolución de triángulos rectangulares, los teoremas de senos y cosenos, etc., presentan grandes posibilidades para el uso del Algebra en la Geometría.

Cabe señalar que los problemas a resolver por el método algebraico requieren con frecuencia cálculos bastante prolongados. Por eso los cálculos y respuestas voluminosos no deben ser motivo de asombro. Por lo general, los cálculos necesarios en tales problemas son sencillos desde el pundo de vista lógico y accesibles para todo aquel que conoce las fórmulas fundamentales de la Trigonometría y el Algebra, que conoce la técnica de transformaciones algebraicas y trigonométricas y se ha acostumbrado a cumplir los cálculos puntual y atentamente.

6. *En el triángulo ABC el ángulo A equivale a α y el lado que se le opone es igual a a. Hallar los dos lados restantes si se sabe que el lado a es la media geométrica de los radios de los círculos inscrito y circunscrito de dicho triángulo.*

Reduzcamos la resolución del problema al sistema algebraico. Con este fin compongamos la cantidad necesaria de ecuaciones independientes. Designemos por b y c las longitudes de los lados del triángulo ABC opuestos respectivamente a los ángulos B y C. Las magnitudes b y c son las incógnitas que nos interesan.

Según el teorema de los cosenos, la primera ecuación será:

$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha=a^2. \qquad (12)$$

Para obtener la segunda ecuación apliquemos la relación de los datos del problema: $a=\sqrt{Rr}$, donde R y r son los radios de los círculos circunscrito e inscrito respectivamente. Recordando las expresiones conocidas para estos radios [fórmulas (3), (4) del § 1, Parte III] y para el área del triángulo, podemos anotar una cadena de igualdades

$$a^2=rR=\frac{2S}{a+b+c}\cdot\frac{a}{2\operatorname{sen}A}=\frac{a}{(a+b+c)\operatorname{sen}A}\cdot\frac{1}{2}bc\operatorname{sen}A=\frac{abc}{2(a+b+c)},$$

de donde encontramos la segunda ecuación:

$$bc-2a(b+c)=2a^2. \qquad (13)$$

Así, hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones (12) y (13) con dos incógnitas b y c. Ahora nos queda resolver este sistema que es un problema puramente algebraico.

Si escribimos de nuevo la ecuación (12) en la forma $(b+c)^2-$ $-2bc(1+\cos\alpha)=a^2$ y sustituimos aquí la expresión para bc de la ecuación (13), obtenemos la ecuación cuadrática con respecto a $b+c$:

$$(b+c)^2-8a\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot(b+c)-\left(8a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2\right)=0, \qquad (14)$$

de donde

$$b+c=a\left(1+8\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (15)$$

(omitimos la otra raíz, la negativa, de la ecuación (14), ya que carece de sentido geométrico). Ahora de la ecuación (13) determinamos que

$$bc=4a^2\left(1+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right). \qquad (16)$$

De las relaciones (15) y (16) es obvio que b y c son raíces de la ecuación cuadrática

$$z^2-a\left(1+8\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)z+4a^2\left(1+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=0.$$

Resolviendo esta ecuación hallamos

$$z_{1,2}=\frac{a}{2}\left[5+4\cos\alpha\pm\sqrt{16\cos^2\alpha+8\cos\alpha-23}\right]. \qquad (17)$$

Ahora para b puede tomarse, por ejemplo, el signo "más" y para c, el signo "menos"; otra combinación de los signos proporciona de hecho o el mismo triángulo pero con otra designación de los lados. Hemos cumplido la resolución ya que hemos hallado las longitudes requeridas b y c de los lados del triángulo. A pesar de que el problema no requiere ningunos análisis complementarios, algunos estudiantes aclaran las condiciones con las cuales las fórmulas (17) tienen sentido geométrico.

Es evidente que estas fórmulas tienen sentido geométrico únicamente en el caso en que bajo la raíz se encuentra un número no negativo y, además, $z_1>0$, $z_2>0$. El trinomio $16x^2+8x-23$ (sus raíces se determinan fácilmente) no es negativo para $x\leqslant(-1-\sqrt{24})/4$, ni para $x\geqslant(\sqrt{24}-1)/4$. Enunciando aquí la condición para el ángulo α los estudiantes suelen cometer varios errores que prueban su incapacidad para resolver las desigualdades trigonométricas. En realidad, no es negativa la expresión que se halla bajo la radical en (17) si

$$0<\alpha\leqslant\arccos\frac{\sqrt{24}-1}{4} \tag{18}$$

(no se olvide que α es un ángulo del triángulo y por lo tanto, solamente nos interesan los valores $0<\alpha<\pi$). Después es fácil convencerse que para los valores de α indicados en (18) las dos raíces (17) son positivas, es decir, tienen sentido geométrico [1].

7. *Se tienen dos circunferencias concéntricas de radios r y R ($R>r$). Hallar el lado del cuadrado cuyos dos vértices se encuentran en la circunferencia de radio r y los otros dos, en la circunferencia de radio R. ¿Con qué relación entre r y R:* a) *es posible la solución*; b) *hay una sola solución?*

Señalemos, ante todo, que la configuración geométrica a que hacen referencia en los datos del problema no existe con cualesquier radios de dichas circunferencias. En efecto, si R es "considerablemente mayor" de r, es fácil imaginar que no puede existir un cuadrado cuyos dos vértices se encuentren sobre una circunferencia y los otros dos, en la otra. Además, está claro, que para ciertos valores de R y r pueden existir dos cuadrados [2] dispuestos del modo requerido (fig. 87). Por fin, no se puede garantizar que es imposible un caso en que haya incluso más de dos cuadrados de esta índole.

De los razonamientos mencionados se deduce que la resolución no puede comenzarse por la ejecución del dibujo. En primer lugar, al cumplir el dibujo nos limitaremos al caso en que la configuración *existe* y no podremos decir nada cuando es imposible. En segundo lugar, ya sabemos que la configuración, en términos generales, no es única

[1] Subrayemos (compárense los problemas 2 y 3) que hemos aclarado sólo las condiciones con las cuales las fórmulas (17) *pueden tener* sentido geométrico, pero queda pendiente la cuestión de si *existe* o no en realidad una configuración geométrica para todas las α que satisfacen la condición (18).

[2] Se tiene en cuenta que existen dos cuadrados con lados *diferentes*. Carece de sentido distinguir los cuadrados que satisfacen los datos del problema y cuyos lados tienen la misma longitud.

y por esta razón tenemos que trazar *todas* las posibilidades, pero no sabemos exactamente cuántas son estas posibilidades.

Por lo tanto elegimos otro camino de solución que no usa ningún dibujo de configuración en concreto sino se reduce a construcciones geométricas. Es absolutamente obvio que en caso de existir un cuadrado que satisfaga los datos del problema, uno de sus lados se encuentra en la cuerda de la circunferencia mayor que interseca la circunferencia menor (por ejemplo, de tal cuerda puede servir la prolongación del lado del cuadrado uno de cuyos extremos se sitúa en la circunferencia mayor y el otro, en la menor). Y al contrario, si podemos demostrar que en ninguna cuerda de la circunferencia mayor, que interseca la circunferencia menor, no puede hallarse el lado del cuadrado requerido, esto significara que (con R y r dados) la configuración buscada es imposible.

De este modo, tenemos que obtener las condiciones *necesarias* y *suficientes* de que en cierta cuerda de la circunferencia mayor, que interseca la circunferencia menor, se encuentra uno de los lados del cuadrado que satisface los datos del problema. Sea BC (fig. 88) una cuerda arbitraria de la circunferencia mayor, que interseca la circunferencia menor en cierto punto A. Esta cuerda se determina unívocamente por la longitud h de la perpendicular OP bajada a la misma desde el centro O de las circunferencias.

Designemos por x la longitud del segmento AC y por y, la del segmento AB. Es evidente que el lado del cuadrado que nos interesa puede encontrarse en la cuerda BC en el caso y sólo en el caso en que $x=2h$

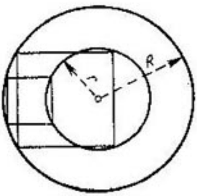

Fig. 87

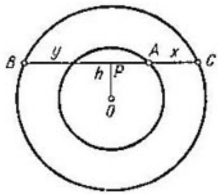

Fig. 88

o $y=2h$. Por consiguiente, si (con R y r dados) se halla siquiera un valor de h que satisfaga la condición $x=2h$ o $y=2h$, entonces la configuración requerida es posible; si no existe tal valor de h (con R y r dados) el problema no tiene solucón.

Puesto que

$$x=CP-AP=\sqrt{R^2-h^2}-\sqrt{r^2-h^2},$$
$$y=BP+PA=\sqrt{R^2-h^2}+\sqrt{r^2-h^2},$$

la condición obtenida, necesaria y suficiente, para resolver el problema, puede enunciarse del modo siguiente: la configuración necesaria para nosotros tiene lugar cuando los valores h (positivos) son tales que satisfacen por lo menos a una de las ecuaciones

$$\begin{gathered}\sqrt{R^2-h^2}-\sqrt{r^2-h^2}=2h,\\ \sqrt{R^2-h^2}+\sqrt{r^2-h^2}=2h,\end{gathered}\tag{19}$$

y no tiene lugar para otro valor cualquiera de h. En particular, si ninguna de las ecuaciones (19) tiene raíces positivas, entonces no existe la configuración requerida [1].

Las ecuaciones irracionales (19) se resuelven fácilmente en paralelo. Su RVA (recinto de valores admisibles) (véase § 7, Parte I) se compone de tales valores de h que $h \leqslant r$ (ya que $R > r$). De la condición $R > r$ se deduce que $\sqrt{R^2-h^2} > \sqrt{r^2-h^2}$, de modo que los dos miembros de ambas ecuaciones no son negativos. Por lo tanto, elevándolos al cuadrado obtendremos, después de las transformaciones evidentes, dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}-2\sqrt{(R^2-h^2)(r^2-h^2)}&=4h^2-(R^2+r^2),\\ 2\sqrt{(R^2-h^2)(r^2-h^2)}&=4h^2-(R^2+r^2),\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

las cuales, de acuerdo con el RVA son equivalentes a las ecuaciones correspondientes (19). Al elevar al cuadrado cada una de las ecuaciones (20) llegaremos en ambos casos, después de algunas transformaciones sencillas, *a la misma* ecuación:

$$32h^4-8(R^2+r^2)h^2+(R^2-r^2)^2=0.\tag{21}$$

Ahora, en principio, tenemos que hallar las raíces de esta ecuación bicuadrada y, de conformidad con la metodología general para resolver las ecuaciones irracionales, seleccionar aquéllas que satisfacen a la primera ecuación (20); éstas son las raíces para las cuales $h \leqslant r$ y $4h^2-(R^2+r^2)\leqslant 0$ y las que satisfacen a la segunda ecuación (20) y que son raíces para las cuales $h \leqslant r$ y $4h^2-(R^2+r^2)\geqslant 0$.

Resulta que esta selección bastante larga puede evitarse si se toma en consideración la argumentación evidente: no nos interesa en absoluto a qué ecuación (20) pertenece tal o cual raíz de la ecuación (21), ya que esta raíz en cualquier caso nos lleva a la configuración necesaria. Por esto no hay necesidad de efectuar selección alguna, y nuestro problema tiene tantas soluciones como raíces positivas tiene la ecuación bicuadrada (21), que satisfacen a la condición $h \leqslant r$.

Examinemos y resolvamos la ecuación bicuadrada (21). Si el discriminante $D=16\,(6R^2r^2-R^4-r^4)<0$, en este caso la ecuación

[1] Toda raíz positiva de la primera ecuación (19) corresponde a tal posición del cuadrado, en la cual éste no contiene en su interior el centro O, mientras que cualquier raíz positiva de la segunda ecuación (19) corresponde a aquella posición del cuadrado en que éste tiene el centro O en su interior.

(21) no tiene raíces reales y no puede existir la configuración que nos interesa.

Aclaremos, con cuál relación entre R y r sucede este fenómeno; con este fin debe determinarse con cuál relación entre R y r está cumplida la desigualdad $6R^2r^2 - R^4 - r^4 < 0$. Designando R^2/r^2 por ρ reduciremos esta desigualdad a la forma de $\rho^2 - 6\rho + 1 > 0$, de donde es obvio que ésta tiene lugar siendo $\rho < 3 - 2\sqrt{2}$ y para $\rho > 3 + 2\sqrt{2}$. Debido a que nos interesan solamente los valores $\rho > 1$ (ya que $R > r$ según los datos del problema), nos queda solamente $\rho > 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$. Así pues, *si* $R > (1 + \sqrt{2})r$, *resulta imposible la configuración geométrica de que se trata en los datos del problema*, es decir, *éste no tiene soluciones.*

Del modo análogo se demuestra que la desigualdad $D \geqslant 0$ tiene lugar para $r < R \leqslant (1 + \sqrt{2})\, r$, siendo la igualdad $D = 0$ obtenida para $R = (1 + \sqrt{2})\, r$. Designando h^2 por z y reduciendo de esta manera la ecuación (21) a la cuadrática respecto a z, obtenemos:

$$z_{1,2} = \frac{(R^2 + r^2) \pm \sqrt{6R^2r^2 - R^4 - r^4}}{8}, \tag{22}$$

y del teorema de Viète se deduce que las dos raíces mencionadas son positivas (para $D = 0$ estas raíces coinciden).

Antes de continuar calculando las propias raíces de la ecuación bicuadrada (21) comprobemos si integran los RVA de las ecuaciones iniciales (19). Para este propósito aclaremos si tienen lugar las desigualdades $z_1 \leqslant r^2$, $z_2 \leqslant r^2$, puesto que $0 < z_2 \leqslant z_1$, entonces es suficiente comprobar la desigualdad $z_1 \leqslant r^2$, o sea,

$$\frac{R^2 + r^2 + \sqrt{6R^2r^2 - R^4 - r^4}}{8} \leqslant r^2,$$

o bien

$$\sqrt{6R^2r^2 - R^4 - r^4} \leqslant 7r^2 - R^2. \tag{23}$$

Como en el caso considerado $D \geqslant 0$, es decir, $R \leqslant (1 + \sqrt{2})\, r$, entonces $7r^2 - R^2 \geqslant 7r^2 - (1 + \sqrt{2})^2\, r^2 > 0$ y por ser así, elevando la desigualdad (23) al cuadrado, llegaremos, después de transformaciones no complejas, a la desigualdad equipotencial $2(5r^2 - R^2)^2 \geqslant 0$ la cual, por lo visto, es válida. De esta manera, las raíces de la ecuación bicuadrada (21) (para $D \geqslant 0$) integran los RVA de las ecuaciones (19).

Teniendo en cuenta que solamente nos interesan las raíces positivas de la ecuación (21), hallamos de la (22) que *para* $r < R < (1 + \sqrt{2})\, r$ *el problema tiene dos soluciones que corresponden a los valores*

$$h_{1,2} = \sqrt{\frac{(R^2 + r^2) \pm \sqrt{6R^2r^2 - R^4 - r^4}}{8}},$$

y para $R=(1+\sqrt{2})r$ *tiene una solución única que corresponde al valor*

$$h=\sqrt{\frac{R^2+r^2}{8}}.$$

En este caso, si hay dos soluciones, los lados de los cuadrados son iguales a $2h_1$ y $2h_2$ y si hay una sola, el lado del cuadrado equivale a $2h$ [1].

La Trigonometría y el Algebra son también de uso amplio en la resolución de *los problemas de Geometría para los valores máximo y mínimo*. En estos problemas se examina, habitualmente, un cuerpo geométrico (o una figura) y se requiere determinar sus dimensiones de tal manera que una magnitud relacionada con el cuerpo en cuestión adopte el valor máximo (o mínimo). Para la solución algebraica del

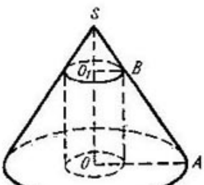

Fig. 89

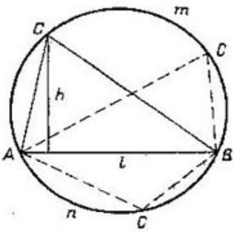

Fig. 90

problema, como regla, se escribe una *función* que enlaza la magnitud que nos interesa, con las dimensiones del cuerpo, y luego se investiga dicha función. De este modo el problema de Geometría se reduce a uno de Algebra, es decir, al estudio de las propiedades de las funciones.

8. *El radio de la base de un cono circular recto es igual a* R *y su altura equivale a* H. *¿Cuál de los cilindros inscritos en este cono tiene la mayor superficie lateral?*

Supongamos que el cilindro con radio r de la base y altura h está inscrito en el cono (véase § 8, Parte III). De la semejanza de los triángulos AOS y BO_1S (fig. 89) se deduce que $r=R(H-h)/H$. El área lateral del cilindro $s=2\pi rh$, es decir,

$$s=\frac{2\pi R}{H}h(H-h).$$

[1] Señalemos que el camino omitido de la solución *por separado* de cada una de las ecuaciones irracioneles (19) nos ofrecería un resultado más interesante desde el punto de vista geométrico. Precisamente, para $r<R<r\sqrt{5}$ los dos cuadrados existentes no contienen el centro O; para $r\sqrt{5}<R<r(1-\sqrt{2})$ uno de los cuadrados contiene el centro y el otro no lo contiene; para $R=r\sqrt{5}$ un cuadrado no contiene el centro, mientras que el lado del otro pasa justamente por este centro.

Es ésta la función que enlaza la magnitud s, que nos interesa, con la altura de cilindro h conocida por nosotros. De acuerdo con las consideraciones geométricas la variable independiente h cambia en el intervalo de $0 < h < H$.

Ahora tenemos que hallar el valor máximo de esta función en el segmento indicado de la variación del argumento h. Es un polinomio de segunda potencia, por esto procedemos de modo igual a cuando se suele hallar el valor máximo (o mínimo) del trinomio cuadrático. Precisamente, eliminando el cuadrado exacto anotemos de nuevo la fórmula para s en la forma

$$s = \frac{\pi RH}{H} - \frac{2\pi R}{H}\left(h - \frac{H}{2}\right)^2.$$

En la expresión ilustrada se ve que la función $s = s(h)$ adquiere el valor máximo $1/2\,\pi RH$ para $h = 1/2\,H$. Puesto que el valor $h = 1/2$ H se encuentra en el intervalo $0 < h < H$, por consiguiente, el valor máximo de la superficie lateral $s_{max} = 1/2\,\pi RH$ se obtiene en el caso en que la altura del cilindro inscrito es igual a la mitad de la altura del cono.

9. *En la circunferencia de radio R se dan los puntos A y B que distan a l. ¿Qué valor máximo puede tener la suma $AC^2 + BC^2$ si el punto C se encuentra en dicha circunferencia?*

Sea C un punto arbitrario de la circunferencia en la cual se dan los puntos A y B (fig. 90). Si designamos el ángulo ACB por α, tendremos según el teorema de los cosenos del triángulo ABC:

$$AC^2 + BC^2 = l^2 + 2AC\cdot BC\cos\alpha,$$

Por consiguiente, hay que determinar la posición del punto C en la circunferencia en la cual el producto $AC\cdot BC$ cos α obtiene el valor *máximo* posible.

La cuerda AB divide la circunferencia en dos arcos: el arco AmB, que es mayor que la semicircunferencia, y el arco AnB, que es menor respecto a ésta [1]. Es fácil convencerse que para cualquier posición del punto C en el arco AmB [2] el ángulo α tiene el mismo valor comprendido en los límites de 0° a 90° (puesto que para todo punto C el ángulo ABC es inscrito y se apoya contra el arco AnB, menor que la semicircunferencia), y para cualquier posición del punto C en el arco AnB el ángulo α tiene el mismo valor en los límites de 90° a 180°. Puesto que el coseno de un ángulo obtuso es negativo, nos pueden interesar sólo los puntos C en el arco AmB: en este caso el producto $AC\cdot BC$ cos α es *positivo*.

[1] El caso en que AB es el diámetro de la circunferencia, es decir, cuando $l = 2R$, el lector puede examinarlo sin ningunas dificultades. Si $l > 2R$, entonces resulta imposible la configuración de que se trata en el problema.

[2] Salvo los extremos del arco que son los propios puntos A y B.

Como ya hemos señalado que para cualquier punto C en el arco AmB el ángulo α tiene *un mismo* valor, a continuación determinaremos la posición del punto C (sobre este arco) en la que el producto $AC \cdot BC$ sea máximo. Utilizando la fórmula $S = 1/2\ AC \cdot BC$ sen α para el área S del triángulo ABC podemos escribir la igualdad $AC \times \times BC = 2S/\operatorname{sen}\alpha$. De aquí se deduce que el producto $AC \cdot BC$ adquiere el valor máximo con tal posición del punto C en el arco AmB en la cual el triángulo ABC tiene el área máxima posible.

Sin embargo, de acuerdo con la fórmula conocida, $S = 1/2\ lh$, donde h es la longitud de la perpendicular bajada desde el punto C a la cuerda AB. Por lo tanto, entre todos los triángulos posibles ABC de vértice C sobre el arco AmB tendrá la mayor área aquel triángulo en el cual esta perpendicular tenga la longitud máxima. Pero la perpendicular tendrá la longitud máxima en el caso en que el punto medio del arco AmB se elija en calidad del punto C.

De este modo, la suma $AC^2 + BC^2$ adquiere el valor máximo si en calidad de C se toma *el punto medio del mayor* de los dos arcos en que los puntos A y B dividen la circunferencia; este valor máximo es igual a $4R^2 + 2R\sqrt{4R^2 - l^2}$.

10. *Se quiere hacer una cometa en forma de un prisma recto cuya base es un triángulo rectángulo con una hipotenusa de* 50 cm. *El área de la superficie lateral del prisma es de* 0,96 m².

¿Qué longitud han de tener los lados del triángulo de la base para que la suma de las longitudes de las aristas del prisma sea la mínima?

Designemos los catetos de la base del prisma por x e y, y su arista lateral, por z. Por los datos del problema componemos dos relaciones entre estas dimensiones del prisma:

$$\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0{,}25; \\ (x + y + 0{,}5)\, z &= 0{,}96. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Nos interesa el valor mínimo de la suma $l = 2(x + y + 0{,}5) + 3z$ de todas las aristas del prisma.

La magnitud l es la función de las tres variables x, y, z dependientes unas de otras debido a las ecuaciones (24). Sustituyendo la suma $x + y + 0{,}5$ por su expresión por medio de z obtenida de la segunda ecuación (24) representamos a l como función de una sola variable

$$l = \frac{1{,}92}{z} + 3z. \tag{25}$$

Determinemos el valor mínimo de esta función. Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica (véase el § 9, Parte I), puede apuntarse que para cualesquier $z > 0$,

$$l = \frac{1{,}92}{z} + 3z \geqslant 2\sqrt{\frac{1{,}92}{z} \cdot 3z} = 4{,}8.$$

Es decir, el valor mínimo de la función (25) es 4,8; ésta obtiene este valor mínimo cuando $1,92/z = 3z$, esto es, siendo $z = 0,8$ (solamente nos interesan los valores *positivos* de z).

Este lugar contiene una sutileza lógica. Hemos demostrado que *la función* (25) como la función de la variable z adquiere su valor mínimo 4,8 cuando $z = 0,8$. Pero para estar seguros de que es el valor mínimo de *la magnitud geométrica*, o sea, de la suma de las aristas del prisma, tenemos que convencernos de que *existe* un prisma que satisface los datos del problema y cuya arista lateral es $z = 0,8$.

En otras palabras, se requiere aclarar también si el sistema (24) es resoluble para $z = 0,8$. Si tiene solución, entonces el prisma correspondiente (o prismas, si tiene varias soluciones) es precisamente la solución del problema. Pero si el sistema (24) para $z = 0,8$ no tiene soluciones, la suma de las aristas laterales no puede ser igual a 4,8 y tendremos que realizar razonamientos complementarios.

Así, al sustituir $z = 0,8$ en el sistema (24), obtenemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0,25, \\ x + y = 0,7, \end{cases}$$

de donde $x_1 = 0,4$, $y_1 = 0,3$; $x_2 = 0,3$; $y_2 = 0,4$. Estas dos soluciones corresponden geométricamente a un mismo prisma [1].

De este modo, la suma de las longitudes de todas las aristas del prisma será la mínima, si los catetos del triángulo de la base son iguales a 30 cm y 40 cm.

Al hacer uso amplio de la Trigonometría y el Álgebra en la solución de los "problemas de cálculo" geométricos, en algunos casos los estudiantes no aplican los métodos algebraicos y trigonométricos para efectuar la demostración de los fenómenos geométricos, para hallar los lugares geométricos, para cumplir unas u otras construcciones. Entre tanto, es difícil sobreestimar la importancia de estos métodos para todos los problemas en cuestión.

Por ejemplo, he aquí un problema en el cual la demostración de la afirmación que nos interesa se obtiene puramente del modo analítico, sin ningunos razonamientos geométricos. Estos ejemplos en que la demostración más simple se obtiene por un cálculo directo, se puede darlos tantos como se quiera.

11. *Por el centro de un triángulo regular se ha trazado una recta arbitraria en el plano de este triángulo. Hay que demostrar que la suma*

[1] No se debe creer que la observación señalada más arriba, acerca de la sutileza lógica, fue superflua ya que todo resultó muy sencillo. Si en los datos del problema la longitud de la hipotenusa fuera igual, supongamos, a 40 cm, el sistema correspondiente

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0,16, \\ x + y = 0,7 \end{cases}$$

no tendría soluciones reales. Sin embargo, esto no significa que en tal caso no existe el prisma que satisface los datos del problema. Para resolver este problema complejo es necesario, entre todas las z con las cuales el sistema (24) tiene una soulción, hallar tal valor al cual corresponde el valor mínimo posible de función (25).

de los cuadrados de las distancias desde los vértices del triángulo hasta esta recta no depende de la selección de la recta.

Supongamos que la recta l pasa por el punto O, que es el centro del triángulo regular ABC (fig. 91). Bajemos perpendiculares desde los vértices A, B y C a la recta l; sus bases se designan por M, N y P respectivamente. Unamos el punto O con los vértices del triángulo ABC y designemos el ángulo BOP por φ; en este caso $\angle AOM = \angle AOB - \angle BOM = 120° - (180° - \varphi) = \varphi - 60°$ y $\angle COP = 120° - \varphi$. Luego, sea $OA = OB = OC = R$; entonces $BN = R$ sen φ, $AM = R \times$ $\times$ sen $(\varphi - 60°)$, $CP = R$ sen $(120° - \varphi) = R$ sen $(\varphi + 60°)$. Es fácil comprobar ahora que

$$AM^2 + BN^2 + CP^2 = R^2 [\text{sen}^2 \varphi + \text{sen}^2 (\varphi - 60°) + \text{sen}^2 (\varphi + 60°)] = = 3/2\, R^2 = 1/2\, a^2,$$

donde a es el lado del triángulo regular.

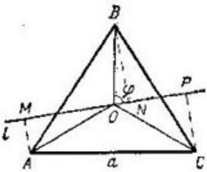

Fig. 91

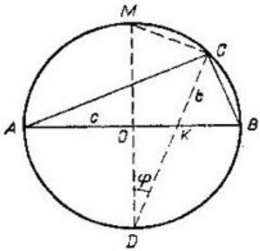

Fig. 92

En conclusión, damos un ejemplo de la aplicación de la Trigonometría y el Álgebra para la solución de *los problemas de construcción*. Algunos estudiantes consideran los problemas de construcción como rompecabezas complicados. En efecto, en el proceso de la resolución de muchos de estos problemas por los medios de una sola Geometría surgen grandes dificultades. Pero el empleo de la Trigonometría y el Álgebra en la solución de estos problemas facilita el proceso.

12. *Construir un triángulo rectángulo valiéndonos de la hipotenusa c y la bisectriz b del ángulo recto.*

Supongamos que el triángulo ABC es el buscado (fig. 92). Circunscribámosle una circunferencia: su diámetro es igual a c. Es fácil demostrar que el punto de intersección D de la prolongación de la bisectriz CK con la circunferencia es el extremo del diámetro DM que es perpendicular a AB. Claro está, el problema quedará resuelto cuando se conozca el segmento CD; calculemos este último.

Designando el ángulo CDM por φ podemos escribir, según el triángulo rectángulo MDC, que $CD = c \cos \varphi$, y de acuerdo con el triángulo DKO, que $KD = c/(2\cos\varphi)$ ya que $DM = 2DO = c$. Luego componemos la ecuación cuadrática

$$c\cos\varphi - \frac{c}{2\cos\varphi} = b,$$

una sola raíz de la cual

$$\cos\varphi = \frac{b+\sqrt{b^2+2c^2}}{2c}$$

tiene sentido geométrico. De aquí

$$CD = c\cos\varphi = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2+2c^2}}{2}.$$

Así, la construcción está puesta en claro. En el segmento $AB = c$, como en el diámetro, trazamos la circunferencia (O es su centro) y hallamos tal punto D que $DO \perp AB$. A continuación construimos por separado el segmento $a = CD$. Con este fin, primero construimos el segmento $c\sqrt{2}$ como la media geométrica de los segmentos c y $2c$[1]. Después construimos el segmento $x = \sqrt{b^2+(c\sqrt{2})^2}$ que es la hipotenusa del triángulo con los catetos b y $c\sqrt{2}$. Finalmente, $a = 1/2(b+x)$. Por medio del compás, cuya abertura es igual al segmento a, y tomando como centro el punto D trazamos una marca, obteniendo así el punto C, que es el vértice del ángulo recto del triángulo buscado.

EJERCICIOS:

1. Sean b y c dos lados de un triángulo y l la longitud de la bisectriz del ángulo entre éstos. Calcular el tercer lado del triángulo.

2. La altura h de un cilindro es igual al diámetro de la circunferencia de la base. Un punto de la circunferencia superior está unido con otro de la inferior; la recta que une estos puntos forma con el plano de la base del cilindro el ángulo α. Determinar la distancia más corta entre dicha recta y el eje del cilindro.

3. Se conoce que en los ángulos del triángulo ABC $\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C = 1:2:3$. Hallar la relación de los senos de los ángulos.

4. En el triángulo regular ABC cada lado está dividido en tres partes iguales: el lado AB por los puntos D y E (de manera que $AD = DE = EB$), el lado BC por puntos F y G (de modo que $BF = FG = GC$), el lado CA por los puntos H e I (así que $CH = HI = IA$). Con las letras L, M y N se designan respectivamente los puntos de intersección de los pares de rectas BI y CD, AF y CE, AG y BH. Hallar la relación de las áreas de los triángulos LMN y ABC.

5. El volumen de una pirámide n - angular regular es igual a v y el lado de su base es igual a a. Determinar el ángulo de inclinación de la arista lateral de la pirámide respecto a la base.

[1] Conviene tener presente que si se dan los segmentos a y ka, donde k es el coeficiente numérico, entonces, para construir el segmento $x = a\sqrt{k}$ es suficiente construir la media geométrica de los segmentos dados $x = \sqrt{a\cdot ka} = a\sqrt{k}$. A propósito, este método permite construir segmentos con la longitud de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc. si se da la unidad de longitud.

6. En un paralelogramo se dan los lados a y b. Determinar la relación entre los volúmenes de los "cuerpos" obtenidos por el giro de este paralelogramo alrededor de sus lados a y b respectivamente.

7. En un triángulo se da la base a y los ángulos α y $\alpha + 90°$ adyacentes a ésta. Determinar el volumen del "cuerpo" formado por el giro de este triángulo alrededor de la altura bajada al lado a.

8. El área del triángulo ABC satisface a la relación $S = a^2 - (b - c)^2$, donde a, b y c son los lados del triángulo opuestos a los ángulos A, B y C respectivamente. Hallar el ángulo A.

9. Dados los lados b y c del triángulo y el ángulo A entre éstos. El triángulo gira alrededor de un eje que no lo atraviesa, pero pasa por el vértice A y forma con los lados b y c ángulos iguales. Hallar el volumen del "cuerpo" formado por el giro.

10. El radio del sector es igual a R, el radio de la circunferencia inscrita en este sector es igual a r. Calcular el área del sector.

11. Se da un triángulo cuya base es a y el ángulo del vértice es igual a α. Se tiene una circunferencia que pasa por el centro del círculo inscrito en este triángulo y por los extremos de la base. Hallar el radio de la circunferencia.

12. La base de una pirámide es un cuadrado. Dos caras laterales son perpendiculares al plano de la base y las otras dos forman con ésta los ángulos iguales a α. Calcular el ángulo diedro formado por las dos últimas caras laterales.

13. En un triángulo rectángulo con catetos b y c está inscrito un cuadrado que junto con el triángulo tiene un ángulo recto común (es decir, dos lados del cuadrado se encuentran en los catetos mientras que un vértice, lo está en la hipotenusa). Hallar el área del cuadrado.

14. En un triángulo isósceles el ángulo de la base es α. La altura bajada a la base es en el valor m mayor que el radio del círculo inscrito. Determinar la base del triángulo y el radio del círculo circunscrito.

15. Dos cuerdas de un círculo de radio R se intersecan bajo un ángulo recto. Los segmentos de una cuerda se relacionan uno a otro como $4 : 5$ y los de la otra, como $5 : 16$. Hallar las longitudes de los cuatro arcos en los cuales los extremos de estas cuerdas dividen la circunferencia.

16. En una circunferencia están inscritos un triángulo isósceles y un trapecio. Los lados laterales del triángulo son paralelos a los lados laterales del trapecio. Una de las bases del trapecio es el diámetro de la circunferencia. Calcular la altura del trapecio siendo su línea media igual a l y el área del triángulo igual a S.

17. A una circunferencia de radio r, desde un punto exterior A están trazadas una tangente AP y una secante AQ que pasa por el centro de la circunferencia, siendo $AQ = 2AP$. Hallar el radio de otra circunferencia construida de tal modo que sus tangentes sean la secante, la tangente dada (fuera del segmento AP) y el radio de la circunferencia dada trazado al punto P.

18. En una circunferencia de radio R, por el punto M del diámetro está trazada la cuerda AB bajo un ángulo φ respecto al diámetro, siendo $BM : AM = p : q$. Por el punto B está trazada la cuerda BC que es perpendicular a dicho diámetro y el punto C está unido con el punto A. Hallar el área del triángulo ABC.

19. Se da una circunferencia de radio 1 y el centro en el punto O, y una recta tangente a esta circunferencia en el punto E. En la circunferencia se toma un punto M. Hallar el radio de la circunferencia tangente a la circunferencia dada en el punto M y a la recta dada si el ángulo EOM es φ para $0° < \varphi < 90°$.

20. La distancia entre las rectas paralelas es igual a 1. El punto A se encuentra entre estas rectas a una distancia a de una de estas. Hallar la longitud del lado del triángulo equilátero ABC cuyo vértice B se sitúa en una de las rectas paralelas y el vértice C, en la otra.

21. Un trapecio isósceles con los ángulos de la base iguales a 60° tiene tal forma que se puede inscribirle dos circunferencias tangentes una a otra, cada una de las cuales es tangente a su vez a las bases del trapecio y a uno de sus lados laterales. El lado lateral del trapecio es igual a 2. Hallar el área del trapecio.

22. En un trapecio con las bases a y b, por el punto de intersección de las diagona-

les está trazada una recta paralela a las bases. Hallar el segmento de dicha recta comprendido entre los lados laterales del trapecio.

23. Sean α, β, γ los ángulos del triángulo ABC. A', B', C' son puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos internos del triángulo ABC con la circunferencia circunscrita a este triángulo. Hallar la relación entre las áreas del triángulo ABC y del triángulo $A'B'C'$.

24. Se dan las longitudes de las alturas $AA' = h_a$ y $BB' = h_b$ del triángulo ABC y la longitud $CD = l$ de la bisectriz del ángulo C. Hallar el ángulo C.

25. En un triángulo isósceles está inscrito un cuadrado de área de una unidad cuyo lado se encuentra en la base del triángulo. Hallar el área del triángulo si se sabe que los centros de gravedad del triángulo y del cuadrado coinciden.

26. Calcular el área de la parte común de dos rombos, en el primero de los cuales las diagonales son iguales a 2 y 3, mientras que el segundo se obtiene al girar el primero 90° alrededor de su centro.

27. En un triángulo isósceles se da el lado lateral b y el ángulo α de la base. Calcular la distancia entre el centro de la circunferencia inscrita en este triángulo y el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

28. Desde el punto A dispuesto fuera de la circunferencia del radio r, está trazada una secante que no pasa por el centro O de la circunferencia. Sean B y C los puntos en que dicha secante atraviesa la circunferencia. Hallar la magnitud $\operatorname{tg}(1/2\angle AOB) \times \operatorname{tg}(1/2\angle AOC)$ si $OA = a$.

29. En un sector circular limitado por los radios OA y OB con el ángulo central α $(\alpha < \pi/2)$ está inscrito un cuadrado de tal modo que sus dos vértices adyacentes se encuentran en el radio OA y el tercer vértice, en el radio OB, mientras que el cuarto vértice se halla en el arco AB. Calcular la relación de las áreas del cuadrado y del sector.

30. Dos esferas iguales son tangentes una a otra y a las caras de un ángulo diedro. La tercera esfera de menor radio es también tangente a las caras de dicho ángulo diedro y a las dos esferas. Se da la relación m entre el radio de la esfera menor y el de una de las esferas iguales. Hallar la magnitud del ángulo diedro. ¿En qué límites puede variar m?

31. El ángulo de la base del triángulo isósceles ABC es igual a α $(\alpha > 45°)$ y el área es igual a S. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son las bases de las alturas del triángulo ABC.

32. En el triángulo ABC $\angle A = \angle B = \alpha$, $AB = a$; AH es la altura, BE es la bisectriz (el punto H se encuentra en el lado BC, el punto E, en el AC). Los puntos H y E están unidos por un segmento. Hallar el área del triángulo CHE.

33. Dentro del ángulo AOB se toma el punto M; $\angle MOA = \alpha$, $\angle MOB = \beta$, $OM = a$ $(\alpha + \beta < \pi)$. Hallar el radio de la circunferencia que pasa por el punto M y forma las cuerdas de $2a$ de longitud en los lados OA y OB del ángulo dado.

34. Se da el ángulo AOB igual a α $(\alpha < \pi)$. En el lado OA se toma el punto C y en el lado OB, el punto D, siendo $OC = a \neq 0$, $OD = b \neq 0$. Se tiene una circunferencia que es tangente al lado OA en el punto C y que pasa por el punto D. Supongamos que dicha circunferencia interseca otra vez el lado OB en el punto E. Calcular el radio r de la circunferencia construida y la longitud de la cuerda DE.

35. De una roca de granito se necesita tallar un pedestal en forma de paralelepípedo rectangular cuya altura ha de ser igual a la diagonal de la base y el área de la base debe ser de 4 m². ¿Con qué lados de la base se obtendrá la mínima superficie total del pedestal?

36. Se requiere hacer una caja en forma de un paralelepípedo rectangular con el área de la base igual a 1 cm². La suma de las longitudes de todas las aristas debe constituir 20 cm. ¿Con qué dimensiones de la caja será máxima su superficie total?

37. En una hoja cuadrática de madera contrachapada con un lado igual a 10 unidades de longitud está cortada una abertura en forma de rectángulo cuyo diagonal es igual a 5 unidades de longitud. El borde de la abertura está revestido con un marco hecho de alambre fino. La unidad del área (es decir, el área del cuadrado con el lado igual a la unidad de longitud) de la madera contrachapada pesa 2 g, la unidad de longitud del alambre pesa 7 g. ¿Con cuáles lados del rectángulo se obtendrá el mayor peso de la hoja con la abertura revestida?

38. En el triángulo ABC, del vértice A está trazada una recta que interseca el lado BC en el punto D, que se encuentra entre los puntos B y C siendo $CD : BC = \alpha$ (donde $\alpha < 1/2$). En el lado BC, entre los puntos B y D se toma el punto E y por éste se ha trazado una recta paralela al lado AC y que interseca el lado AB en el punto F. Hallar la relación entre las áreas del trapecio $ACEF$ y del triángulo ADC si se sabe que $CD = DE$.

39. En el lado AB del triángulo ABC entre los puntos A y B se toma el punto D tal modo que $AD : AB = \alpha$ (donde $\alpha < 1$); en el lado BC entre los puntos B y C se toma el punto E de manera que $BE : BC = \beta$ (donde $\beta < 1$). Por el punto E se ha trazado una recta que es paralela al lado AC e interseca el lado AB en el punto F. Hallar la relación entre las áreas de los triángulos BDE y BEF.

40. Mostrar las formas posibles de los triángulos en los que los lados constituyen una progresión geométrica y los ángulos, una progresión aritmética.

41. Serán suficientes 4000 azulejos de 10 cm $\times$ 10 cm para revestir una piscina de forma romboidal, con un área de 450 m^2 y una altura del bordo de 0,5 m?

42. Una pirámide tiene por base un rectángulo, todas las aristas laterales son iguales y la altura de la pirámide es igual a $\sqrt{2}$ cm. Por una de las aristas de la pirámide se mueve un escarabajo con una velocidad de 1 cm/s. Calcular, si le bastarán 2 segundos para bajar desde el vértice de la pirámide por la arista lateral hasta el vértice de la base si se sabe que el escarabajo cubre el perímetro de la base durante 8 s.

43. Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

44. En el triángulo ABC están trazadas la bisectriz AD del ángulo BAC y la CF del ángulo ACB (el punto D está en el lado BC; el punto F, en el lado AB). Hallar la relación entre las áreas de los triángulos ABC y AFD si se sabe que $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.

45. En un está círculo inscrito un triángulo isósceles ABC en el cual $AB = BC$ y $\angle ABC = \alpha$. Desde el vértice A se ha trazado la bisectriz del ángulo BAC, que interseca el lado BC en el punto D y la circunferencia, en el punto E. El vértice B está unido con el punto E por medio de un segmento rectilíneo. Hallar la relación entre las áreas de los triángulos ABE y BDE.

46. En un trapecio $ABCD$ los ángulos a la base mayor a son iguales a α y β; la altura del trapecio es h. Sean O_1, O_2, O_3, O_4 los centros de las circunferencias circunscritas respectivamente a los triángulos ABC, BCD, CDA y DAB. Calcular el área del cuadrilátero $O_1O_2O_3O_4$.

47. En un triángulo rectángulo la relación entre el producto de las longitudes de las bisectrices de los ángulos internos agudos y el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a 1/2. Calcular los ángulos agudos del triángulo.

48. De un extremo del diámetro de una esfera se ha trazado una cuerda de tal modo que la superficie formada por la rotación de la cuerda alrededor del diámetro divide el volumen de la esfera en dos partes iguales. Determinar el ángulo entre la cuerda y el diámetro.

49. En un cuadrilátero cóncavo $ABCD$ la bisectriz del ángulo ABC interseca el lado AD en el punto M, mientras que la perpendicular bajada desde el vértice A al lado BC lo interseca en el punto N de tal manera que $BN = NC$ y $AM = 2 \cdot MD$. Calcular los lados y el área S del cuadrilátero $ABCD$ siendo su perímetro igual a $5 + \sqrt{3}$, $\angle BAD = 90°$ y $\angle ABC = 60°$.

50. En una pirámide de base cuadrangular $OABCD$ el trapecio $ABCD$ sirve de base y las caras laterales OAD y OBC son perpendiculares al plano de la base. Si se sabe que $AB = 3$, $CD = 5$, el área de la cara OAB es igual a 9 y el área de la cara OCD es igual a 20, hallar el volumen de la pirámide.

§ 4. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

Esta parte de la estereometría se considera como inicial y por lo tanto es de suma importancia para el aprendizaje exitoso de los apartados ulteriores y, en general, para el desarrollo de la imaginación espacial. Los teoremas que se demuestran aquí no son verdaderamente complejos, pero requieren cierta cultura lógica, es decir, la capacidad de reducir estrictamente la demostración de cualquier teorema al empleo de los axiomas enumerados en el principio y de los teoremas antes demostrados, basándose en las definiciones dadas. A su vez esto requiere un conocimiento muy preciso de los teoremas y definiciones iniciales. Algunos estudiantes manifiestan cierta negligencia respecto a estas cuestiones al suponer que la intuición geométrica les ayudará a encontrar definiciones y enunciaciones de axiomas justas. Como resultado, en el mejor caso se dan formulaciones equivalentes, pero esto provoca complicaciones inesperadas en las enunciaciones y demostraciones de los teoremas.

En el estudio de este párrafo debe prestarse atención a *la comprensión exacta y memorización firme* de las definiciones. El paralelismo y la perpendicularidad de las rectas y los planos, el ángulo entre las rectas que se cruzan y la distancia entre éstas, el ángulo entre una recta y un plano, el ángulo entre dos planos, todos estos conceptos deben saberse muy bien.

Con esto, claro está, no se debe llegar a los extremos. Primero, no hace falta "empollar" las enunciaciones de las definiciones sin comprender su sentido geométrico y sin ver detrás de éstas la configuración geométrica. Segundo, que es lo más común para los estudiantes (y por eso más peligroso), no se debe reducir únicamente a las imágenes geométricas olvidándose de las definiciones exactas.

Por ejemplo, cada uno se imagina qué son las rectas paralelas en el espacio. Sin embargo, muchos empiezan a demostrar la afirmación "evidente por completo" que por dos rectas paralelas puede trazarse un plano, olvidándose de que la existencia de tal plano integra la propia *definición* de las rectas paralelas.

Otro ejemplo de igual índole es la demostración de *la existencia* de las rectas que se cruzan. En este caso, muchos estudiantes se limitan a indicar ... el suelo y el techo. Naturalmente, está bien conocer dónde "en la vida" hay rectas cruzadas, pero esto no elimina la necesidad de demostrar estrictamente su existencia.

Tomemos tres puntos A, B, C cualesquiera y un cuarto punto D fuera del plano determinado por los mismos. En este caso las rectas AB y CD se cruzan. En efecto, si se encontraran en el mismo plano, todos los puntos estarían en este plano; pero esto está en contradicción con la elección del punto D (fig. 93).

Hay también casos en que los estudiantes, sin saber exactamente la definición, recurren a analogías erróneas y, como resultado, llegan a "invenciones" fantásticas al estilo de "una recta es paralela al plano si es paralela a cualquier recta situada en dicho plano"; "una recta es perpendicular al plano si es perpendicular a cualquier recta de este plano"; "se denomina ángulo entre la recta y el plano a tal ángulo que la recta en cuestión lo forma con las rectas del plano dado", etc. Es suficiente imaginarse el sentido geométrico de estas definiciones para ver su carácter absurdo.

Al mismo tiempo, la definición no debe "empollarse" palabra por palabra, letra por letra, y puede apartarse de la enunciación dada en el manual. Pero esta separación no ha de ir demasiado lejos. Por ejemplo, no son raros los casos en que los estudiantes emplean *el criterio* de la perpendicularidad de la recta y el plano en calidad de *definición* de la recta y el plano. Pero no siempre entienden que con este nuevo concepto *la definición* anterior se hace *teorema* que debe demostrarse. En este caso "la invención" de definiciones conlleva más y más complicaciones.

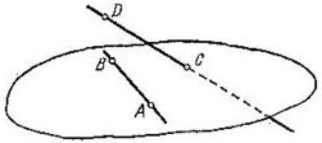

Fig. 93

Los estudiantes cometen muchos errores en la formulación *incompleta* de las definiciones y, sobre todo, de los teoremas. He aquí un ejemplo típico de la respuesta a la solicitud de enunciar el criterio del paralelismo de dos planos: "Si dos rectas dispuestas en un plano son paralelas respectivamente a dos rectas situadas en otro plano, estos planos son paralelos". Está omitida una sola palabra: se trata de dos rectas que *se intersecan*, y con esta interpretación el teorema ya no es justo, la respuesta no puede ser considerada como exacta.

Uno de los conceptos más importantes de este apartado es el *ángulo entre las rectas que se cruzan*. Recordémoslo. Para construir el ángulo entre las rectas que se cruzan se procede del modo siguiente: se toma un punto arbitrario del espacio y por el punto se trazan dos rectas paralelas a las rectas dadas. El ángulo entre las rectas construidas que se intersecan es, según la definición, el ángulo entre las rectas que se cruzan.

Esta definición puede causar una pregunta natural: ¿si no depende el ángulo entre las rectas que se cruzan del punto que hemos elegido como su vértice? Resulta que la elección del punto no influye realmente en la magnitud del ángulo: para razonar esta afirmación hay que referirse al indicio conocido del paralelismo de dos planos y al teorema sobre ángulos con lados paralelos en el espacio.

El concepto del ángulo entre las rectas cruzadas, si se aplica sistemáticamente, permite simplificar muchos teoremas y definiciones. Por ejemplo, pueden determinarse en seguida *las rectas perpendiculares* como rectas, el ángulo entre las cuales es recto, independientemente de que si están o no están en el mismo plano. A su vez, esta definición simplifica la solución de los problemas.

Es fácil convencerse de que *una recta perpendicular al plano es también perpendicular a cualquier recta situada en este plano*, incluso a la que no pasa por el punto de intersección de la recta dada con el plano. Esto se deduce directamente de la definición de la perpendicular al plano y de la definición de las rectas perpendiculares.

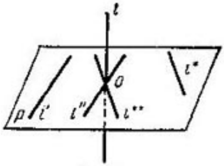

Fig. 94

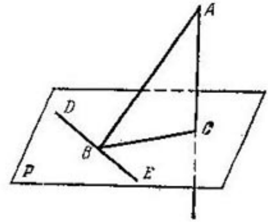

Fig. 95

A consecuencia de lo expuesto, es de gran interés el llamado *criterio reforzado de la perpendicularidad de una recta a un plano: si una recta es perpendicular a dos rectas no paralelas cualesquiera (que se intersecan) dispuestas en cierto plano, dicha recta es perpendicular al mismo plano.*

Esta enunciación, en contraste con la ordinaria, no requiere que dos rectas pasen explícitamente por el punto de intersección de dicha recta con el plano. Este detalle, por insignificante que parezca, desempeña un papel esencial en la resolución de los problemas.

La demostración del criterio reforzado es muy simple (fig. 94). Si la recta dada l es perpendicular a dos rectas que se intersecan l' y l^* del plano P, es también perpendicular a las rectas l'' y l^{**} paralelas a éstas, trazadas por el punto O de su intersección con el plano P. Por consiguiente, la recta l según el criterio de perpendicularidad de una recta y un plano es perpendicular respecto de todo el plano P. Es lo que tuvimos que demostrar [1].

Este criterio formulado permite, reducir a pocas palabras la demostración del llamado *teorema de las tres perpendiculares* que, propiamente dicho, es su caso particular. En efecto (fig. 95), supongamos

[1] Naturalmente, la perpendicularidad de una recta a dos rectas *paralelas* en un plano no implica la perpendicularidad de esta recta al propio plano (dese un ejemplo).

que la recta AC es perpendicular al plano P, AB es una oblicua y BC es la proyección de la oblicua en el plano P. Si la recta DE está trazada en el plano P perpendicularmente a la oblicua AB, en este caso DE es perpendicular al plano ACB (puesto que $DE \perp AC$ y $DE \perp AB$), por esta razón DE es perpendicular a cualquier recta de este plano, en particular, a la proyección BC de la oblicua. Y al contrario, si la recta DE está trazada en el plano P, perpendicularmente a la proyección BC, de nuevo la recta DE es perpendicular al plano ACB y, por lo tanto, $DE \perp AB$.

Además, señalemos, que el empleo del concepto de ángulo entre dos rectas que se cruzan permite en el teorema de tres perpendiculares no suponer que una recta dispuesta en el plano dado pasa explícitamente por la base de la oblicua.

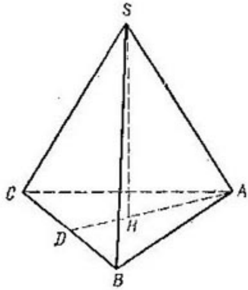

Fig. 96

Los conceptos que consideramos son particularmente importantes para imaginar como se debe a los fenómenos geométricos en el proceso de la resolución de los diversos problemas de las pirámides. En particular, es de gran utilidad *el teorema* siguiente que trata de una pirámide de base triangular arbitraria (fig. 96): *la altura SH de la pirámide $SABC$ pasa por la altura AD de la base en el caso, y sólo en el caso, en que la arista lateral SA es perpendicular a la arista de la base BC*. Es fácil ver que esta afirmación es simplemente otra enunciación del mismo teorema sobre tres perpendiculares: SH y SA son respectivamente la perpendicular y la oblicua respecto del plano de la base ABC, mientras que BC es una tercera recta.

El problema siguiente, que es muy difícil para los estudiantes, se resuelve de inmediato con la ayuda de este teorema.

I. *En una pirámide de base triangular, la altura trazada desde el vértice cae en el punto de intersección de las alturas del triángulo dispuesto en la base. Demostrar que esta misma propiedad poseen también todas las alturas de la pirámide bajadas desde los vértices de la base sobre las caras laterales.*

En realidad, si la altura de la pirámide pasa por todas las alturas de la base, cada arista lateral de la pirámide es perpendicular a la arista opuesta de la base. Pero de acuerdo con el mismo teorema, con la excepción de que "en el sentido contrario", cualquier altura de la pirámide posee dicha propiedad.

Del mismo teorema se deduce que, en particular, las aristas laterales de una pirámide regular de base triangular son perpendiculares a las aristas opuestas de la base. Esta afirmación puede ser útil, por ejemplo, para la construcción de un ángulo lineal de un ángulo diedro de una arista lateral de la pirámide. A menudo los estudiantes

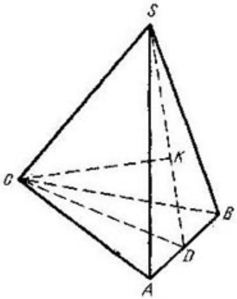

Fig. 97

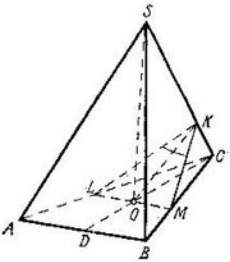

Fig. 98

ofrecen la construcción siguiente: "Tracemos por el lado de la base un plano perpendicular a la arista lateral, en este caso el ángulo obtenido en el corte es el requerido". En principio el razonamiento es justo, pero carece de un detalle bastante esencial: ¿por qué puede trazarse tal plano? En efecto, en el caso en que se cruzan cualesquier rectas no puede, hablando en términos generales, trazarse tal plano, ya que esto es posible en el caso, y sólo en el caso, en que las rectas son perpendiculares (el lector puede demostrarlo). Por esta razón, en lo que se refiere a la pirámide *regular* de base triangular, dicha construcción es realmente posible.

Un error más, por ser típico, merece también nuestra atención. Después de bajar la perpendicular desde el vértice de la base triangular de la pirámide regular a la cara lateral, algunos estudiantes juzgan sin duda alguna, que dicha altura incide en la altura de la cara lateral. Naturalmente, esta afirmación resulta justa, pero requiere pruebas. Es fácil observar que se deduce del teorema recién enunciado por nosotros, así como del resultado del problema 1. Sin embargo, resolviendo el problema en que se emplea esta afirmación, conviene no fiarse del teorema mencionado (y, aun más, del problema 1), sino dar una demostración independiente.

Un camino "frontal", más privado de perspectivas, es el de la demostración de dicha afirmación: trazar la altura SD de la cara lateral ASB de la pirámide regular $SABC$; bajar la altura CK de la pirámide desde el vértice C de la base a la cara ASB y demostrar que SD y CK se intersecan (fig. 97). Por desgracia, muchos estudiantes tratan de razonar de este modo, mientras que hay otro método mucho más simple.

Sean $SABC$ la pirámide regular y CK la perpendicular bajada desde el vértice C a la cara ASB (fig. 97). Uniendo el punto K con el punto D que es el punto medio de la arista AB, tenemos que la recta DC es perpendicular a la recta AB como mediana del triángulo equilátero ABC. La recta CK es perpendicular al plano ASB y, por consiguiente, a cualquier recta en este plano, en particular, a la arista AB. Esto significa que la arista AB es perpendicular al plano DCK por ser perpendicular a las dos rectas que se intersecan, CD y CK, situadas en este plano. Por lo tanto, la recta AB es perpendicular a cualquier recta en el plano DCK, en particular, a la recta DK.

En resumen, $DK \perp AB$, y como D es el punto medio de la base AB del triángulo isósceles ASB, el punto K se encuentra en la altura SD de este triángulo.

El criterio de la perpendicularidad presenta buenos resultados para muchos problemas, en que para los ángulos diedros dados se requiere construir ángulos lineales.

2. *Desde la base de la altura de una pirámide regular de base triangular está bajada la perpendicular a la arista lateral, igual a p. Hallar el volumen de la pirámide si el ángulo diedro entre sus caras laterales es igual a 2α.*

Supongamos que $SABC$ es la pirámide dada (fig. 98), OK es la perpendicular en cuestión cuya longitud es igual a p y que el ángulo diedro a la arista SC es igual a 2α.

Primero construyamos el ángulo lineal del ángulo diedro. Tomemos, naturalmente, por el vértice del ángulo lineal el punto K; a continuación, desde el punto K en los planos de las caras ASC y BSC tracemos las perpendiculares KL y KM a la arista SC.

Al tratarse de esto último, muchos estudiantes son víctimas de errores. Unos consideran que dichas perpendiculares pasarán inevitablemente por los puntos A y B, los otros, que L y M son los puntos medios de los lados AC y BC del triángulo ABC. Pero no es justa ninguna de las suposiciones. En realidad, es válido lo siguiente.

El plano en el cual se encuentran KL y KM ha de ser perpendicular a la arista SC (por ser $SC \perp KL$ y $SC \perp KM$). Para hallar dicho plano, perpendicular a SC, basta con hallar dos rectas no paralelas, perpendiculares a SC. Una de estas rectas es OK, ya que según los datos $OK \perp SC$. En calidad de la otra recta de este tipo podemos tomar la arista AB. En efecto, SO es perpendicular al plano ABC, SC es la oblicua y CO es su proyección; pero $AB \perp CO$ y, por lo tanto, según el teorema de las tres perpendiculares, $AB \perp SC$.

Así, están halladas las dos rectas, OK y AB que son perpendiculares a SC. Pero no se intersecan sino se cruzan. Sin embargo, hay una solución: tracemos por el punto O la recta LM paralela a AB. En este caso LM es también perpendicular a SC y LM ya se interseca con OK. Por consiguiente, SC es perpendicular al plano en el cual se encuentran estas rectas, es decir, al plano del triángulo KLM. En tal caso, $SC \perp$ $\perp KL$ y $SC \perp KM$, o sea, $\angle LKM$ es el ángulo lineal del ángulo diedro junto a la arista SC. De este modo, $\angle LKM = 2\alpha$, estando situados los puntos L y M de las perpendiculares KL y KM a la arista SC en los lados AC y BC del triángulo ABC de tal manera, que LM, que pasa por el centro del triángulo ABC, es paralelo al lado AB.

Nos quedan solamente los cálculos. Después de demostrar que $\angle OKM = \angle OKL = \alpha$, hallamos que $OM = p \operatorname{tg} \alpha$ y por eso (por medio del triángulo rectángulo OCM) tenemos $OC = p\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$. Pero OC es el radio del círculo circunscrito al triángulo regular ABC; por lo tanto, $AB = 3\,p \operatorname{tg} \alpha$ y el área $S_{\Delta ABC}$ de la base de la pirámide se determina directamente.

Por otra parte, si KOC es un triángulo rectángulo,

$$\operatorname{sen}(\angle OCK) = \frac{OK}{OC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{cotg} \alpha;$$

puesto que $\angle KOS = \angle OCK$ (como ángulos agudos con lados perpendiculares), la altura de la pirámide

$$SO = \frac{p}{\cos(\angle OCK)} = \frac{p\sqrt{3}}{\sqrt{3-\operatorname{cotg}^2 \alpha}}.$$

De este modo, el volumen buscado

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{9}{4} p^3 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{3-\operatorname{cotg}^2 \alpha}}.$$

3. *Un triángulo regular con el lado a sirve de base de una pirámide. Una de las caras de la pirámide es perpendicular al plano de la base. Esta cara es un triángulo isósceles con el lado lateral $b \neq a$. Hallar el área de tal sección de la pirámide que sea un cuadrado.*

Sea $KLMN$ el cuadrado de que se trata en los datos del problema (fig. 99). Hasta ahora no hacemos ningunas suposiciones acerca de cuál cara lateral: ASB o BSC o ASC, es perpendicular al plano de la base.

Puesto que $KN \parallel LM$, KN es paralela al plano de la base ABC, por lo tanto el plano ASB que pasa por la recta KN interseca el plano ABC por la arista AB que es paralela a KN. De modo análogo se demuestra que $SC \parallel KL$.

De aquí se deduce, primero, que el plano de la sección es paralelo a las aristas AB y SC que se cruzan y, segundo, que estas aristas deben ser perpendiculares entre sí ya que el ángulo (recto) LKN del cuadrado $KLMN$ es el ángulo comprendido entre estas rectas que se cruzan.

Señalemos ahora que la pirámide $SABC$ posee sólo un par de aristas que se cruzan y son perpendiculares entre sí. Demostrémoslo con la ayuda de otro dibujo (fig. 100).

Supongamos que $SPQR$ es la pirámide en cuestión cuya cara PSQ es perpendicular a la base PQR. Tracemos la altura ST de la pirámide; por lo visto, ST se encuentra en el plano de la cara PSQ y sirve simultáneamente de altura para el triángulo isósceles PSQ y, por consiguiente, de su mediana, de modo que la recta RT es la altura del

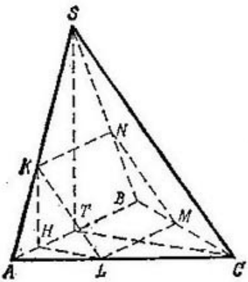

Fig. 99

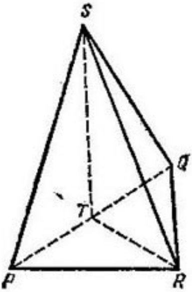

Fig. 100

triángulo regular PQR. De acuerdo con el teorema acerca de tres perpendiculares, la oblicua SR es perpendicular a PQ, a la recta perpendicular a su proyección PT. Por otro lado, una recta en el plano PQR, siendo perpendicular a la arista SQ, debe ser también perpendicular a su proyección PQ; pero PR no posee tal propiedad y por esta razón las aristas SQ y PR no son perpendiculares. De modo análogo, las aristas SP y QR tampoco son perpendiculares. Así, sólo las aristas SR y PQ, son mutuamente perpendiculares, es decir, la arista lateral que no se encuentra en la cara perpendicular a la base, y la arista del ángulo diedro recto.

Refiriéndonos a la fig. 99 concluimos que AB es la arista del ángulo diedro recto, es decir, la cara ASB es perpendicular al plano de la base.

Con el fin de realizar los cálculos tracemos $KH \perp AB$ y unamos el punto H con L. La recta KH es perpendicular a la HL como una recta situada en uno de los planos mutuamente perpendiculares y que es perpendicular a la línea de su intersección. Además, tracemos la altura ST del triángulo isósceles ASB y la altura CT de la base

ABC. Designemos por x el lado del cuadrado $KLMN$. En este caso

$$ST=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}, \quad AT=\frac{a}{2}, \quad AH=\frac{a-x}{2}.$$

Puesto que $\triangle AKH \backsim \triangle AST$ y $\triangle ALH \backsim \triangle ACT$,

$$KH=\frac{a-x}{a}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}, \quad HL=\frac{a-x}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}},$$

y de acuerdo con el teorema de Pitágoras referente al triángulo rectángulo KHL

$$x^2=\left(\frac{a-x}{a}\right)^2\left(\frac{a^2}{2}+b^2\right).$$

De aquí, después de extraer la raíz (teniendo en cuenta que $a>x$) y cumplir las transformaciones necesarias, hallamos el lado del cuadrado x y, luego, su área:

$$S=\left(\frac{a\sqrt{2a^2+4b^2}}{2a+\sqrt{2a^2+4b^2}}\right)^2.$$

En los problemas de estereometría tiene gran importancia para su solución un dibujo bien hecho. Si éste está ejecutado como es debido, la solución resulta a menudo "visible" geométricamente.

Sin embargo, la presentación plana de las configuraciones espaciales es siempre posible únicamente con cierta desfiguración, por esta razón, por preciso que sea el dibujo, es necesario también comprender correctamente marcando en especial, por ejemplo, los ángulos rectos que en el dibujo se observan como agudos, las rectas que se cruzan que en el dibujo se presentan por líneas que se intersecan, etc.

Tenemos que argumentar de modo rigurosamente lógico cualquier fenómeno, por evidente que sea en el dibujo, para evitar errores provocados por las peculiaridades de la presentación plana de las configuraciones espaciales. Esto es importante sobre todo cuando se trata de los problemas a demostrar. En estos problemas, son precisamente estas peculiaridades de presentación (desfiguraciones de ángulos, etc.) que ponen a la sombra el cuadro verdadero y dificultan la demostración.

4. *En el espacio se dan dos rayos Ax y By que no se encuentran en un plano y forman entre sí un ángulo de 90°; su perpendicular común es AB. En los rayos Ax y By se encuentran los puntos M y P, respectivamente, de tal manera que $2AM\cdot BP=AB^2$. Demostrar que la distancia entre el punto medio O del segmento AB y la recta MP constituye $AB/2$.*

Supongamos que Ax y By son los rayos de que se trata en el problema (fig. 101); en nuestro dibujo se representan en forma de dos rayos de las rectas que se intersecan, pero tendremos en memoria que es una ilusión del dibujo: estos rayos no se encuentran en un plano.

En muchos problemas en que se trata de las rectas que se cruzan, es útil la construcción siguiente. Tracemos el rayo $Bz \parallel Ax$ por el punto B, y marquemos el segmento $BN = AM$. Sobre la base de la definición del ángulo entre las rectas AM y BP que se cruzan, tenemos: $\angle PBN = 90°$, es decir, el triángulo PBN es rectángulo con la hipotenusa PN. Debe subrayarse especialmente este concepto, ya que algunos estudiantes resolviendo este problema cedieron a la ilusión del dibujo y tomaron por recto el ángulo BPN.

De acuerdo con el teorema de Pitágoras y valiéndonos del triángulo rectángulo, se obtiene que $PN^2 = BN^2 + BP^2 = u^2 + v^2$ (véanse las designaciones en la fig. 101). Luego, la recta MN es perpendicular al plano yBz y, por lo tanto, valiéndonos del triángulo rectángulo PNM se obtiene que $PM^2 = 4h^2 + u^2 + v^2$. Pero según los datos, $(2h)^2 = 2uv$; por consiguiente, $PM^2 = (u+v)^2$, es decir, $PM = u + v$.

Tracemos la altura OT del triángulo POM; la longitud de dicha altura es la distancia que estamos buscando. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos PTO y MTO puede anotarse la igualdad $b^2 - PT^2 = c^2 - (u+v-PT)^2$. Tomando en consideración

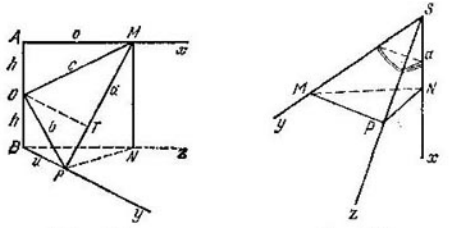

Fig. 101 Fig. 102

que $b^2 = u^2 + h^2$ (valiéndonos del triángulo rectángulo OBP) y $c^2 = v^2 + h^2$ (refiriéndonos al triángulo rectángulo OAM), obtenemos la igualdad $2u(u+v) = 2 \cdot PT \cdot (u+v)$, o $PT = u$. Por consiguiente, $OT^2 = b^2 - PT^2 = h^2$, es decir, $OT = h = AB/2$.

Hay muchos problemas en los que se necesita calcular los ángulos poliedros. Estos problemas suelen implicar ciertas dificultades relacionadas con la representación geométrica incompleta y con la incapacidad de trazar un dibujo adecuado. Mientras tanto, todos los elementos de un ángulo triedro se determinan sin dificultades algunas con la ayuda de la Trigonometría, partiendo de consideraciones geométricas simples.

5. *Sean los ángulos agudos A, B, C ángulos planos de un ángulo triedro. Demostrar que* $\cos C = \cos A \cdot \cos B$, *en caso de ser recto el ángulo diedro opuesto al ángulo plano C.*

Supongamos que $Sxyz$ es el triángulo triedro (fig. 102) en el cual $\angle xSy = A$, $\angle zSx = B$, $\angle ySz = C$, y el plano de la cara zSx es perpendicular al plano de la cara ySx. Tracemos el plano MNP

perpendicularmente a Sx; en este caso $MN \perp Sx$, $PN \perp Sx$, $\angle MNP = 90°$. Señalemos que los demás ángulos del triángulo MNP, es decir, $\angle PMN$ y $\angle MPN$ *no son* ángulos lineales de los ángulos diedros de las aristas Sy y Sz.

Al designar por a la longitud del segmento SN, obtendremos de acuerdo con los triángulos rectángulos PSN y MSN que

$$PN = a \operatorname{tg} B, \quad MN = a \operatorname{tg} A,$$
$$PS = \frac{a}{\cos B}, \quad MS = \frac{a}{\cos A}.$$

Recurriendo a dos métodos (sobre la base del triángulo rectángulo MNP y del oblicuángulo MSP) calculemos ahora la longitud del segmento MP e igualemos los resultados

$$a^2 \operatorname{tg}^2 B + a^2 \operatorname{tg}^2 A = \frac{a^2}{\cos^2 B} + \frac{a^2}{\cos^2 A} - \frac{2a^2 \cos C}{\cos B \cos A}.$$

Al reducir por a^2 y efectuar las transformaciones evidentes, llegaremos a la relación requerida por los datos del problema.

Señalemos que tanto la fig. 102 como la solución recién efectuada se cumplieron con la suposición de que todos los ángulos A, B, C son *agudos*. Sin embargo, la fórmula que hemos obtenido es válida sin

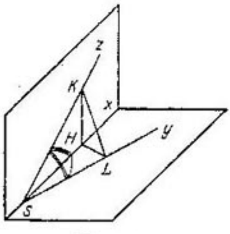

Fig. 103

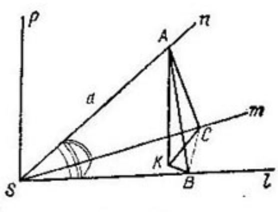

Fig. 104

dicha suposición complementaria. Ofrecemos al estudiante examinar todos los casos posibles y argumentar esta fórmula.

Cabe señalar que en caso de dibujar este ángulo triedro en una forma mucho mejor que en la fig. 102 y no con el vértice hacia arriba (es extraño, pero los estudiantes suelen hacerlo de este modo), la solución se cumpliría de modo más simple. En efecto, es razonable trazar el ángulo diedro recto de la manera que se usa para la representación del par de planos perpendiculares recíprocamente (fig. 103).

Sea Sx la arista del ángulo diedro recto, las aristas Sy y Sz se encuentran en diferentes planos de dicho ángulo. Desde un punto K cualquiera de la arista Sz bajamos las perpendiculares KH y KL, respectivamente, a las rectas Sx y Sy. Puesto que el ángulo diedro de la arista Sx es recto, la recta KH es perpendicular a todo el plano xSy y, en particular, $KH \perp SL$. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de las tres perpendiculares, $HL \perp SL$.

Ahora, valiéndonos del triángulo rectángulo KLS se obtiene $SL = SK \cos C$ y de los triángulos rectángulos SLH y SHK tenemos que $SL = SH \cos A = SK \cos B \cos A$. Comparando estas dos expresiones para SL nos convencemos de que la igualdad requerida es válida.

6. *Los ángulos planos de un ángulo triedro son iguales a 45°, 45° y 60°. Por su vértice se ha trazado una recta que es perpendicular a una de las caras, cuyo ángulo plano es igual a 45°. Hallar el ángulo entre esta recta y la arista del ángulo triedro que no se encuentra en la cara mencionada.*

Al construir el dibujo, evitemos otra vez el método habitual: en los datos del problema se trata de la perpendicular a dos rectas, es decir, al plano determinado por éstas, conviene representar este plano horizontalmente y la perpendicular, verticalmente.

Así, pues, sean S el vértice del ángulo triedro (fig. 104) de donde salen las aristas Sl y Sm que forman el ángulo de 45°; Sp, la perpendicular a dichas rectas; Sn, la tercera arista del ángulo triedro siendo $\angle nSm = 45°$ y $\angle nSl = 60°$.

Tomemos un segmento SA de cierta longitud a en la recta Sn y desde el punto A bajemos la perpendicular AK al plano mSl y las perpendiculares AB y AC a las rectas Sl y Sm respectivamente. Después de unir los puntos B y C con el punto K, según el teorema de las tres perpendiculares obtenemos que BK y CK son perpendiculares respectivamente a las rectas Sl y Sm.

A base de los triángulos rectángulos ACS y ABS encontramos fácilmente que $SC = a\sqrt{2}/2$, $SB = a/2$. Sin embargo, si unimos los puntos B y C y examinamos el triángulo CBS, según el teorema de los cosenos se determina que $CB = a/2$, es decir, $CB = SB$. Puesto que $\angle CSB = 45°$, en este caso el triángulo isósceles CBS tiene en su vértice B un ángulo *recto*. Pero ya hemos señalado que $\angle KBS = 90°$, de modo que hemos llegado a una contradicción inesperada.

Los estudiantes resuelven esta contradicción con gran dificultad pese a que el problema no es tan complejo. De los razonamientos efectuados se deduce que la configuración ilustrada en la fig. 104 no tiene lugar en la realidad (véase § 2, Parte III): el punto K, de verdad, ha de encontrarse en la recta CB (fig. 105).

No obstante, colocando el punto K en el segmento CB, encontraremos inmediatamente otra contradicción: como $CK \perp Sm$ y $BK \perp Sl$, resulta que en el triángulo SBC hay dos ángulos rectos. ¿De qué modo podemos resolver esta contradicción? Con este fin, partiendo de los triángulos rectángulos ACS y ABS hallamos que $AC = a\sqrt{2}/2$, $AB = a\sqrt{3}/2$. Recordando que $CB = a/2$ es fácil determinar que según el teorema, que es inverso al de Pitágoras, el triángulo ABC es rectangular, con el ángulo recto ACB.

Así, pues, tampoco tiene lugar la configuración ilustrada en la fig. 105: los puntos K y C coinciden, es decir, la perpendicular AC a la recta Sm es simultáneamente perpendicular a todo el plano mSl.

Pero es evidente en este caso que $AC \parallel Sp$, es decir, las rectas Sp y AC se sitúan en un mismo plano. Dado que $\angle ASC = 45°$, el ángulo buscado entre las rectas Sp y Sn, es decir, el ángulo nSp es igual a $45°$.

Señalemos que al disponer de una imaginación geométrica bastante desarrollada, el estudiante puede hallar una solución muy breve de este problema, puramente geométrica, que no requiere cálculos. Examinemos un cubo (fig. 106). Si se toma en consideración que el ángulo triedro $SABC$ es el ángulo triedro de que se trata en los datos

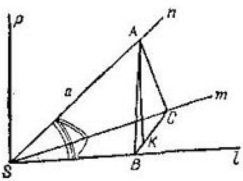

Fig. 105

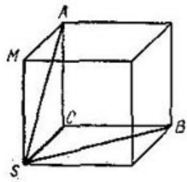

Fig. 106

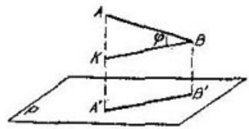

Fig. 107

del problema y que la arista SM del cubo es la perpendicular a la cara BSC, es evidente que el ángulo MSA de $45°$ es el ángulo que se busca.

Para concluir el párrafo, nos detendremos en el concepto de *proyección ortogonal*.

En particular, *si el segmento AB dispuesto en el espacio se proyecta ortogonalmente sobre cierto plano P, la longitud de la proyección $A'B'$ está ligada con la longitud del segmento AB mediante la relación*

$$A'B' = AB \cos\varphi, \tag{1}$$

donde φ es *el ángulo entre la recta AB y el plano P*[1] (fig. 107). Si por el punto B trazamos la recta BK paralela a la proyección $A'B'$, esta fórmula se deduce del triángulo rectángulo AKB, ya que el ángulo ABK se encuentra entre la recta AB y el plano P.

La fórmula (1) muestra que la longitud de la proyección del segmento nunca puede sobrepasar la longitud del propio segmento y que es igual a su longitud si el segmento es paralelo al plano en que se proyecta. En cambio, si el segmento es perpendicular a dicho plano, su proyección es un punto.

---

[1] Si la recta y el plano son paralelos, el ángulo entre éstos se considera (según la definición) igual a cero.

A menudo es útil la proposición que describe la relación entre las áreas de una figura plana y de su proyección ortogonal. Precisamente, *si S es el área de un polígono plano y S_{pr} es el área de su proyección sobre cierto plano P,*

$$S_{pr} = S \cos \alpha, \tag{2}$$

donde α es el ángulo entre el plano P y el plano del polígono en cuestión[1].

Demostremos primero esta fórmula para el triángulo (fig. 108). Vamos a suponer que el triángulo ABC se proyecta ortogonalmente sobre el plano P; entonces obtenemos el triángulo $A'B'C'$. (Si un segmento sirve como proyección, esto significa que el plano del triángulo ABC es perpendicular al plano P y la fórmula que se demuestra será evidente si se toma en consideración que el área del triángulo, degenerado en el segmento, es igual a cero.) Supongamos que de los tres vértices del triángulo ABC el vértice B posee la propiedad de que $AA' > BB' > CC'$. (Proponemos al estudiante analizar el caso de $AA' = BB' \neq CC'$; si $AA' = BB' = CC'$, el plano del triángulo ABC es paralelo al plano P).

Tracemos por el punto B el plano P_1 paralelo al plano P; la proyección del triángulo ABC sobre el plano P_1 es el triángulo $A''BC''$, igual

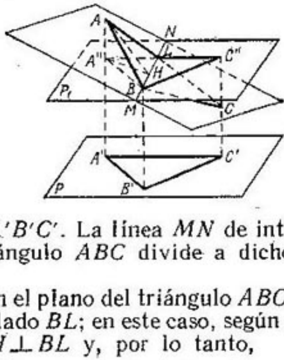

Fig. 108

al triángulo $A'B'C'$. La línea MN de intersección del plano P_1 con el plano del triángulo ABC divide a dicho triángulo en dos: $\triangle ABL$ y $\triangle BLC$.

Bajamos en el plano del triángulo ABC una perpendicular AH desde el punto A al lado BL; en este caso, según el teorema de las tres perpendiculares $A''H \perp BL$ y, por lo tanto,

$$S_{ABL} = 1/2 BL \cdot AH; \quad S_{A''BL} = 1/2 BL \cdot A''H.$$

Pero, el ángulo entre la recta AH y el plano P_1 es igual al ángulo α entre el plano del triángulo ABC y el plano P_1 (o el plano P). Por esta razón $A''H = AH \cdot \cos \alpha$ y, por lo tanto,

$$S_{A''BL} = 1/2 BL \cdot A''H = 1/2 BL \cdot AH \cdot \cos \alpha = S_{ABL} \cdot \cos \alpha.$$

[1] El ángulo entre dos planos (que se intersecan mutuamente) se mide por el ángulo lineal de uno de los ángulos diedros formados por estos planos. Si los planos son paralelos, el ángulo entre éstos se considera (según la definición) igual a cero.

El razonamiento es exactamente análogo para los triángulos BCL y $BC''L$; de este modo,

$$S_{\mathrm{pr}} = S_{A'B'C'} = S_{A''BC''} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha = S \cdot \cos\alpha.$$

Si la figura que se proyecta es un polígono, en tal caso, dividiendo éste y su proyección en triángulos y sumando los resultados para cada par de triángulos, llegaremos a la fórmula que se demuestra.

Conviene utilizar la fórmula (2) para calcular las áreas de las secciones de diversos cuerpos, superficies laterales, ángulos entre los planos, etc. Por ejemplo, si se conocen el área s de la base de una pirámide n-angular *regular* y el ángulo α de la inclinación de la cara lateral respecto al plano de la base, entonces la superficie lateral

$$S = \frac{s}{\cos\alpha}.$$

En lo que se refiere a una pirámide truncada, s será la diferencia de las áreas de las bases mayor y menor. No es difícil darse cuenta de que este hecho es válido también para cualquier pirámide irregular siempre que todas sus caras laterales estén inclinadas al plano de la base bajo *el mismo* ángulo, el ángulo α.

EJERCICIOS:

1. Sea $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cubo ($ABCD$ es el cuadrado de la base inferior; AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 son las aristas laterales). Hallar la magnitud del ángulo entre las rectas: a) AA_1 y B_1D; b) AD_1 y D_1C; c) AD_1 y B_1D. Hallar la distancia entre las rectas: d) AA_1 y B_1D; e) AD_1 y DC_1, si la arista del cubo es igual a a.

2. Determinar el ángulo entre las aristas que se cruzan y el ángulo diedro entre las caras de un tetraedro regular. Hallar la distancia entre las aristas que se cruzan, si el lado del tetraedro es a.

3. ¿Es válida la afirmación de que siendo L y l rectas que se cruzan, por la recta L se puede trazar sólo un plano, paralelo a la recta l? Aclarar, si es justa tal demostración de la afirmación. Tomemos el punto A en la recta L y por este punto tracemos una recta L^* paralela a la recta l. El plano π que pasa las rectas L y L^* que se cortan es, por lo visto, paralelo a la recta l. Puesto que por el punto A puede trazarse una sola recta L^* paralela a la recta l y como puede trazarse sólo un plano por las rectas L y L^* que se cortan, entonces por la recta L puede trazarse sólo un plano paralelo a la recta l.

4. Si L y l son dos rectas que se cruzan, ¿es siempre posible construir un plano que contenga la recta L y que sea perpendicular a l?

5. ¿Existe siempre una recta que es perpendicular a tres rectas dadas que se cruzan en pares?

6. ¿Existe siempre una recta que interseca las tres rectas dadas que se cruzan en pares?

7. ¿Existen en el espacio cuatro rectas que se cruzan y que son mutuamente perpendiculares en pares?

8. En un cubo de arista a se ha trazado una perpendicular común para dos diagonales que se cruzan y que pertenecen a las caras contiguas. Hallar la longitud de los segmentos en los cuales la perpendicular divide dichas diagonales de las caras.

9. Si una recta forma ángulos iguales con cada una de las tres rectas no paralelas en pares, situadas en un plano, dicha recta es perpendicular a éste. Demuéstrelo,

10. ¿Pueden ser perpendiculares al plano de la base dos caras laterales no contiguas de una pirámide de base poligonal?

11. ¿En qué límites puede cambiar la magnitud del ángulo plano formado como resultado de la sección del ángulo diedro dado por planos cualesquiera posibles que cortan la arista del ángulo diedro?

12. Supongamos que A, B, C, D son cuatro puntos arbitrarios del espacio. Demostrar que los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD, DA se encuentran en un mismo plano. ¿De qué forma se obtendrá la figura si se unen entre sí consecutivamente los puntos medios de estos segmentos?

13. Demostrar que las cuatro alturas del tetraedro regular se intersecan en un mismo punto.

14. La recta AB es paralela al plano π. La recta CD interseca la recta AB bajo un ángulo agudo α y forma con el plano π el ángulo φ. Determinar el ángulo entre el plano π y el plano en que se hallan las rectas AB y CD.

15. El plano que corta una de las aristas del tetraedro regular divide su volumen en una relación de $3:5$. Hallar los tangentes de los ángulos en los que dicho plano divide el ángulo diedro del tetraedro.

16. En una pirámide triangular regular el lado de la base equivale a y las aristas laterales son iguales a b. Determinar el ángulo diedro de la arista lateral.

17. Un triángulo rectángulo está dispuesto de tal modo que su hipotenusa se encuentra en el plano π y los catetos forman con este plano los ángulos α y β respectivamente. Hallar el ángulo entre el plano del triángulo y el plano π.

18. Desde un punto de la arista de un ángulo diedro α $(0 < \alpha < 90°)$ salen dos rayos dispuestos en diferentes caras. Uno de los rayos es perpendicular a la arista del ángulo diedro y el otro forma con la arista el ángulo agudo β. Hallar el ángulo entre los rayos.

19. Los segmentos de dos rectas comprendidos entre planos paralelos están dispuestos en una relación de $2:3$ y sus ángulos con uno de los planos, en una relación de $2:1$ respectivamente. Determinar estos ángulos.

20. Los ángulos planos de un ángulo triedro son iguales a α, β y γ. Se toma un punto a la distancia 1 desde el vértice del ángulo triedro en la arista a la cual son contiguos los ángulos planos β y γ. Determinar la distancia entre este punto y el plano del ángulo α.

21. En una esfera cuyo radio es R se toma el punto M y por éste se trazan tres cuerdas MP; MQ y MR iguales entre sí, de tal modo que $\angle PMQ = \angle QMR = \angle RMP = \alpha$. Hallar la longitud de las cuerdas.

22. En un triángulo rectángulo, por la bisectriz del ángulo recto, está trazado un plano que constituye con el plano del triángulo un ángulo α. ¿Qué ángulos forma el plano con los catetos del triángulo?

23. Una recta tangente a un cono, junto con la generatriz de éste forma un ángulo agudo α en el punto de tangencia y está inclinada respecto del plano de la base del cono a un ángulo β. Determinar el ángulo entre la generatriz y el plano de la base del cono.

24. La altura de una pirámide triangular $ABCD$, bajada desde al vértice D pasa por el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC. Se sabe, además, que $DB = b$, $DC = c$, $\angle BDC = 90°$. Hallar la relación entre las áreas de las caras ADB y ADC.

25. El segmento AB de la longitud a y el CD de la longitud b se encuentran en dos rectas que se cruzan, cuyo ángulo es α. Las bases O y O' de la perpendicular común de la longitud c a dichas rectas dividen los segmentos AB y CD de tal manera que $OA : OB = 2:3$ y $CO' : O'D = 3:2$. Hallar las longitudes de los segmentos BD y BC.

26. Sea $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un paralelepípedo recto ($ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ son paralelogramos, mientras que las aristas laterales AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 son paralelas entre sí y perpendiculares al plano de estos paralelogramos), en el cual $AD_1 = A_1D = a$, $BA_1 = AB_1 = b$, $AC = c$, $BD = d$. Calcular el ángulo diedro entre las caras AA_1B_1B y AA_1D_1D.

27. Dentro de un ángulo triedro, cuyos ángulos planos son iguales a α, pasa una recta de igual inclinación a sus aristas. Hallar el ángulo de inclinación de dicha recta respecto a cada arista del ángulo triedro.

28. En el plano P se da el triángulo equilátero ABC de lado a. En la perpendicular al plano P se toma el segmento $AS = a$ en el punto A. Hallar la tangente del ángulo agudo entre las rectas AB y SC y la distancia mínima entre éstas.

29. Desde la base de la altura de una pirámide triangular regular se ha bajado una perpendicular a la cara lateral igual a a. Hallar el volumen de la pirámide si el ángulo plano al vértice de la pirámide es α.

30. Desde la base de la altura de una pirámide triangular regular se ha bajado una perpendicular a la arista lateral igual a p. Hallar el volumen de la pirámide si el ángulo diedro entre la cara lateral y la base de la pirámide es igual a α.

31. Determinar el volumen del paralelepípedo siendo todas sus aristas iguales a 1 y los ángulos planos a uno de los vértices $\varphi < 90°$.

32. Determinar el seno del ángulo entre dos alturas bajadas desde dos vértices de un tetraedro regular a las caras opuestas.

33. En el ángulo triedro $OABC$ el ángulo entre las caras OAB y OBC es recto, mientras que la magnitud de cada uno de los ángulos diedros restantes es igual a γ. Hallar la magnitud del ángulo plano AOC.

34. El ángulo entre dos rectas que se cruzan es igual a 60°. El punto A se encuentra en una recta y el punto B en la otra, siendo iguales las distancias desde cada uno de los puntos hasta la perpendicular común de las rectas que se cruzan y también iguales a la distancia entre las rectas. Hallar el ángulo entre la perpendicular común y la recta AB. Préstese atención a la posibilidad de resolver el problema no unívocamente.

35. El segmento AB se sitúa en la arista de un ángulo diedro, M es el punto de una de las caras del ángulo, estando dispuesto aquél a una distancia l de la arista. La perpendicular bajada desde el punto M hasta la otra cara del ángulo diedro se observa desde el punto A bajo el ángulo α y desde el punto B, bajo el ángulo β. La distancia entre el centro de gravedad del triángulo ABM y la otra cara del ángulo diedro es igual a m. Hallar la longitud del segmento AB. Préstese atención a la posibilidad de una solución no unívoca del problema.

36. Tres conos circulares rectos iguales con el ángulo α ($\alpha \leqslant 2\pi/3$) tienen en la sección axial un vértice común y son tangentes uno a otro exteriormente por las generatrices l_1, l_2, l_3. Hallar el ángulo entre l_1 y l_2.

§ 5. DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS

La experiencia de los exámenes enseña que las demostraciones geométricas son las que implican mayores dificultades a los estudiantes. Los diversos problemas a demostrar suelen considerarse bastante complejos y más difíciles que los de cálculo.

Las demostraciones geométricas son difíciles, ante todo, porque requieren un razonamiento lógico y la expresión exacta de los pensamientos, la comprensión clara de lo que se da y lo que se necesita demostrar. Precisamente, la ausencia de hábitos en la realización de las deducciones lógicas explica los errores en la solución de problemas para la demostración. Al examinar las "demostraciones" de algunos estudiantes el profesor puede ver la idea bastante vaga de éstos sobre qué significa demostrar uno u otro concepto.

La habilidad de pensar lógicamente, fundamentar con exactitud los conceptos geométricos pueden adquirirse sólo por medio de la práctica, resolviendo muchos problemas. Se sabe que es imposible par una "receta" general de cómo puede hallarse la demostración de una u otra afirmación, cómo se debe resolver un problema concreto para la demostración. Sin proponernos el objetivo de ilustrar todos los métodos posibles de demostraciones y enumerar los errores cometidos por los estudiantes, aquí damos algunos ejemplos de razonamientos y analizamos los más típicos y característicos.

Al comenzar a demostrar un concepto geométrico, a resolver un problema para la demostración debe hallarse ante todo, la idea, con la cual se logra construir el argumento estricto de la afirmación que nos interesa. Con este fin es necesario manifestar cierta ingeniosidad: "notar" la aplicabilidad de varios teoremas ya conocidos según el curso, buscar diversas construcciones complementarias y advertir cierta propiedad específica de la configuración geométrica en cuestión [1].

Esta "búsqueda de la solución" no debe exponerse en la solución limpia. Esta última ha de representarse como una demostración estricta en la cual no importa de qué modo nos las hemos arreglado para efectuar los razonamientos de una u otra manera. Pero en cambio, en la solución limpia se requiere fundamentar todos los razonamientos correcta y lógicamente, de forma exhaustiva.

Analicemos algunos ejemplos acerca del modo de la búsqueda de aproximaciones a la solución de los problemas de Geometría para la demostración.

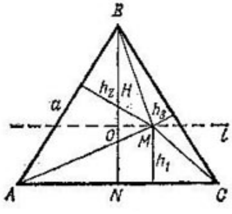

Fig. 109

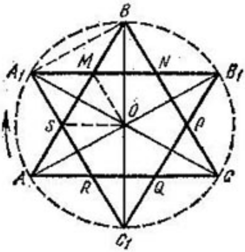

Fig. 110

1. *Por el centro de un triángulo regular se ha trazado una recta, paralela a la base. En la recta, dentro del triángulo, se ha tomado un punto arbitrario M. Demostrar que la distancia entre el punto M y la base del triángulo es la media aritmética de las distancias desde el punto M hasta los lados laterales del triángulo.*

[1] Aquí puede recurrirse a cierta analogía con el método de agrupación que es de amplio uso en Algebra. En general, es difícil decir algo definido acerca de qué modo puede hallarse la agrupación que nos conduzca al objetivo. No obstante, si se dispone del hábito suficiente para la solución de los problemas, esta agrupación se localiza con mayor o menor rapidez, después de algunas apreciaciones y tentativas.

Primero tratemos de hallar la idea de la demostración. Sean h_1 la distancia entre el punto M y la base AC; h_2 y h_3, las distancias entre el mismo punto y los lados laterales AB y BC (fig. 109).

Se necesita obtener la igualdad $h_1 = 1/2\,(h_2 + h_3)$. Como la distancia entre la recta l y la base AC es igual a una tercera parte de la altura H del triángulo, en este caso $h_1 = 1/3\,H$. Por lo tanto es suficiente demostrar que $h_2 + h_3 = 2/3\,H$. Es fácil entender que en lugar de lo expuesto puede demostrarse la igualdad $h_1 + h_2 + h_3 = H$. Puesto que cada uno de los segmentos h_1, h_2 y h_3 es perpendicular al lado correspondiente del triángulo, sería lógico tratarse de demostrar la última igualdad utilizando los razonamientos relacionados con la medición de las áreas.

Ahora cumplimos una demostración estricta. Unamos el punto M con los vértices del triángulo. En este caso $S_{ABC} = S_{AMB} + S_{MBC} + S_{CMA}$ o, lo que es lo mismo, $1/2\,aH = 1/2\,ah_2 + 1/2\,ah_3 + 1/2\,ah_1$ donde a es la longitud del lado del triángulo. De aquí se deduce que $h_1 + h_2 + h_3 = H$. Por otro lado, $h_1 = ON = 1/3\,H$, ya que O es el centro del triángulo regular y el punto de intersección de las medianas. Por eso $h_2 + h_3 = H - h_1 = 2/3\,H$. Por consiguiente, en efecto, $h_2 + h_3 = 2h_1$, es decir, h_1 es la media aritmética de los segmentos h_2 y h_3.

He aquí otro problema de planimetría para la demostración, cuya dificultad principal reside, probablemente, en que la afirmación que se demuestra resulta nada más que evidente valiéndonos del dibujo y por lo tanto no está claro, de qué modo puede argumentarse estrictamente.

2. *Un triángulo equilátero se ha girado 60° alrededor del centro. Demostrar que el hexágono obtenido en la intersección de sus posiciones anterior y posterior es regular.*

Sea ABC el triángulo dado (fig. 110). Después del giro a 60° el punto A se trasladó al punto A_1; el punto B, al B_1; el punto C, al C_1. De acuerdo con los datos, $\angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \angle COC_1 = 60°$. Pero, por otro lado, $\angle AOC = \angle AOB = \angle BOC = 120°$ y, por lo tanto, $\angle AOA_1 = \angle A_1OB = \angle BOB_1 = \angle B_1OC = \angle COC_1 = \angle C_1OA = 60°$. Además, todos los segmentos OA, OA_1, OB, OB_1, OC, OC_1 son de igual longitud. De los dos hechos se deduce que los puntos A, A_1, B, B_1, C, C_1 son los vértices del hexágono regular inscrito en la circunferencia con el centro en el punto O. Luego, por ser $\angle AOA_1 + \angle A_1OB + \angle BOB_1 = 180°$, los radios AO y OB_1 constituyen una recta. Esta última AB_1 es secante para el par de rectas A_1B_1 y AC, siendo iguales los ángulos alternos A_1B_1A y B_1AC (precisamente $\angle A_1B_1A = 30°$ como un ángulo inscrito que se apoya en el arco AA_1 cuyo ángulo central A_1OA es igual a 60°; de manera análoga, $\angle B_1AC = 30°$). Por consiguiente, $A_1B_1 \parallel AC$. De modo análogo se demuestra que $BC \parallel A_1C_1$ y $B_1C_1 \parallel BA$.

Pero en este caso $MN \parallel AC$, así que $\triangle MBN \backsim \triangle ABC$, de donde se desprende que el triángulo MBN es equilátero. De modo análogo puede demostrarse que los triángulos pequeños restantes con los vértices B_1, C, C_1, A, A_1 son equiláteros.

Tracemos el segmento A_1B. El ángulo A_1BA está inscrito en la circunferencia y se apoya en un arco de 60°. El ángulo B_1A_1B está también inscrito en la circunferencia apoyándose también en un arco de 60°. Por consiguiente, $\angle A_1BM = \angle MA_1B$. Por lo tanto, el triángulo A_1MB es isósceles: $A_1M = BM$. Pero los triángulos A_1SM y BMN son equiláteros y de esta igualdad se concluye que $SM = MN$. De forma igual se demuestran las igualdades $MN = NP = PQ = QR = RS$ de todos los demás lados del hexágono $MNPQRS$. Finalmente, todos los ángulos de este hexágono son contiguos a los ángulos de 60°, es decir, todos son iguales a 120°. Esto significa que en el hexágono $MNPQRS$ todos los lados y los ángulos son iguales, es decir, éste es regular.

Se puede ofrecer otra demostración empezando, como se dice, del otro lado.

Dividamos los lados del triángulo ABC en tres partes iguales. El hexágono obtenido $MNPQRS$ es, por lo visto, regular, ya que es fácil deducir de la semejanza de los triángulos que todos sus lados son iguales a $1/3\ AB$ y que todos los ángulos son de 120°.

Nos queda por demostrar que es precisamente este hexágono que se obtiene en la intersección del triángulo ABC y del triángulo "girado". Con este fin prolonguemos los lados MN, RS y PQ del hexágono hasta que se intersequen mutuamente en pares, y analicemos el triángulo formado $A_1B_1C_1$. Es obvio que $\angle A_1MS = 60°$ (siendo contiguo al ángulo SMN de 120°) y que $\angle A_1SM = 60°$. Por eso $\angle SA_1M = 60°$ y, de modo similar, $\angle NB_1P = \angle QC_1R = 60°$. Por lo tanto, el triángulo $A_1B_1C_1$ es equilátero.

Analicemos el cuadrilátero A_1MOS. Sus ángulos opuestos son iguales por pares ($\angle SA_1M = \angle MOS = 60°$, $\angle A_1SO = \angle A_1MO = 120°$). Por consiguiente, A_1MOS es un paralelogramo o, lo que es más exacto, un rombo, ya que $OS = OM$. Por esto A_1O es la bisectriz del ángulo SA_1M y, de modo análogo, B_1O es la bisectriz del ángulo NB_1P. De aquí se deduce que O es el centro del triángulo $A_1B_1C_1$. Además, $A_1B_1 = A_1M + MN + NB_1 = SM + MN + NP = AB$, es decir, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales.

Por fin, $\angle A_1OS = 30°$ (por ser A_1O la bisectriz del ángulo MOS) y, análogamente, $\angle AOS = 30°$, de donde $\angle AOA_1 = 60°$.

De este modo, los triángulos equiláteros ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales, tienen un centro común y los vértices del segundo se obtienen a consecuencia del giro a 60° de los vértices del primero. Por lo tanto, el triángulo $A_1B_1C_1$ es la segunda posición del triángulo dado de que se trata en el problema, mientras que $MNPQRS$ es el hexágono regular que nos interesa.

Si en el problema anterior es del todo evidente la afirmación que se demuestra, en el problema que sigue nos encontramos, en cambio, con una condición bastante voluminosa, con muchas construcciones y con la conclusión que no se deduce del dibujo. No obstante, si se analiza con atención el problema, resultará que no hay nada complejo en las construcciones porque la demostración de la afirmación es muy natural.

3. *Los ángulos C, A, B del triángulo ABC forman (en el orden indicado) una progresión geométrica con la razón 2. Supongamos que O es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, K es el centro de la circunferencia que es tangente al lado AC y a las prolongaciones de los lados BC y BA fuera de los puntos C y A; L es el centro de la circunferencia que es tangente al lado BC y a las prolongaciones de los lados AC y AB del triángulo fuera de los puntos C y B. Demostrar que son semejantes los triángulos ABC y OKL.*

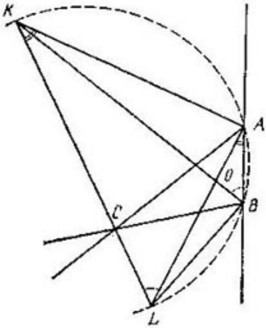

Fig. 111

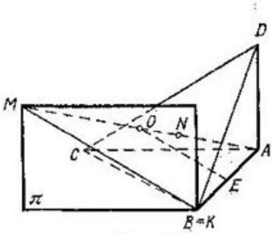

Fig. 112

De los datos del problema se deduce que en el triángulo ABC (fig. 111) tienen lugar las relaciones: $\angle CAB = 2\angle BCA$, $\angle CBA = 2\angle CAB$. Es evidente que el punto K equidista de las rectas AC, AB y CB y que por eso es el punto de intersección de las bisectrices BK y AK. Análogamente, AL y BL, así como AO y BO son bisectrices de los ángulos respectivos. En este caso los ángulos LAK y LBK son rectos (como ángulos entre las bisectrices de los ángulos contiguos).

Por eso, si construimos una circunferencia usando KL como diámetro, los puntos A y B se hallarán sobre la misma. Pero los ángulos KLA y KBA se apoyarán en el arco AK; por lo tanto, éstos son iguales. De manera análoga, $\angle LKB = \angle LAB$. Pero $\angle KBA = 1/2\angle CBA = \angle CAB$ y $\angle LAB = 1/2\angle CAB = \angle BCA$, de modo que $\angle KLA = \angle CAB$, $\angle LKB = \angle BCA$.

Por consiguiente, $\triangle ABC \backsim \triangle OKL$ (porque tienen dos ángulos respectivamente iguales).

Sin duda alguna, los problemas estereométricos para la demostración son más difíciles que los planimétricos. Esto se explica, ante todo, por la necesidad de imaginarse bien las configuraciones espaciales que a menudo son difíciles de representar claramente en el dibujo plano (véase § 6, Parte III sobre este asunto). Aún más difícil es "encontrar" una construcción adicional que facilitaría la solución de los problemas estereométricos. Incluso el nivel lógico de los razonamientos en las demostraciones en el espacio es mucho más alto que en la demostración de las afirmaciones planimétricas.

4. *En una pirámide de base triangular todos los ángulos planos del vértice son rectos. Demostrar que el vértice de la pirámide, el punto de intersección de las medianas de la base y el centro de la esfera circunscrita a la pirámide se encuentran en una misma recta.*

Designemos por A el vértice de la pirámide en cuestión y por BCD la base de ésta (fig. 112).

Con el fin de resolver el problema conviene representar la pirámide $ABCD$ no del modo ordinario, sino colocada en una de las caras laterales, por ejemplo, en la cara CAB. Según los datos del problema, $\angle BAD = \angle DAC = \angle CAB = 90°$.

Como se sabe, el centro de la esfera circunscrita a la pirámide es el punto de intersección de todos los planos que pasan por los puntos medios de las aristas de la pirámide perpendicularmente a dichas aristas (véase § 8, Parte III). De aquí se deduce, en particular, que *las rectas que unen el centro O de la esfera circunscrita a la pirámide $ABCD$ con los puntos medios de las aristas AB, AC y AD, son respectivamente perpendiculares a estas aristas.*

Unimos el centro O con el vértice A. Necesitamos demostrar que el punto N de intersección de la recta OA con el plano de la base BCD es el punto de intersección de las medianas del triángulo BCD. Con este propósito tendremos que efectuar construcciones adicionales en el espacio, fuera de la pirámide en cuestión.

En la recta AO, fuera del punto O, fijamos un punto M tal que $AM = 2AO$. Trazamos por este punto un plano π, perpendicular a la arista AB. Sea K el punto de intersección del plano π y de la arista AB; en este caso $MK \perp AB$. Supongamos que E es el punto medio del segmento AB; como ya hemos mencionado, $OE \perp AB$. Los triángulos rectángulos AEO y AKM que se encuentran en un mismo plano (trazado por las líneas rectas AB y AM que se intersecan) tienen un ángulo común al vértice A y por eso son semejantes. De su semejanza se deduce que $AK = 2AE$, es decir, $AK = AB$. Esto quiere decir que los puntos K y B coinciden.

Así, pues, *el plano π que pasa por el punto M perpendicularmente a la arista AB interseca a ésta en el punto B.* De modo análogo se demuestra que los planos que pasan por el punto M y son perpendiculares a las aristas AC y AD, intersecan éstas en los puntos C y D respectivamente. Pero en este caso, al intersecarse estos tres planos con los planos ABC, ABD y ACD de las caras laterales de la pirámide se forma un *paralelepípedo rectangular* $ABA_1CDB_1MC_1$ con la diagonal AM (fig. 113).

Nos queda aclarar, en qué punto la diagonal AM del paralelepípedo interseca el punto del triángulo BCD. La diagonal AM se ubica en el plano $ADMA_1$. Este interseca el segmento BC en su punto medio S (ya que al intersecarse las diagonales del paralelogramo ABA_1C, se dividen en mitades). Por eso, el plano $ADMA_1$ interseca el plano BCD por la recta que une el punto D con el punto medio S del segmento BC, es decir, por la mediana SD del triángulo BCD. Esto significa que el punto de intersección N de la diagonal AM con el plano de la base

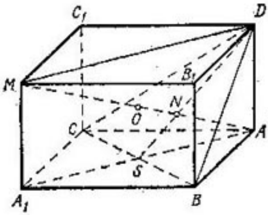

Fig. 113

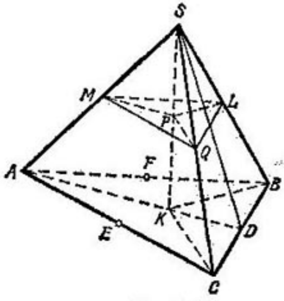

Fig. 114

BCD de la pirámide se encuentra en la mediana del triángulo BCD trazada desde el vértice D hasta el lado BC.

De manera análoga se demuestra (examinando el plano BMC_1A no representado en la fig. 113) que el punto N de intersección de la diagonal AM con el plano del triángulo BCD se halla en la mediana de este triángulo trazada desde el vértice B hasta el lado CD.

Por lo tanto, el punto de intersección de la recta OA con el plano de la base BCD de la pirámide $ABCD$ es efectivamente el punto de intersección de las medianas del triángulo BCD [1].

Uno de los errores más difundidos entre los estudiantes consiste en que *las demostraciones son incompletas y las argumentaciones lógicas son*

---

[1] Señalemos que al cumplir las construcciones en las figs. 112 y 113, suponíamos que el centro O de la esfera circunscrita se sitúa fuera de la pirámide, es decir, se halla en la recta AM más lejos del punto A que el punto N. Se podría demostrar estrictamente este fenómeno *(siendo rectos los ángulos del vértice de una pirámide de base triangular, el centro de la esfera circunscrita se encuentra fuera de la pirámide, al otro lado del plano de la base)*; sin embargo, esto no es necesario para resolver nuestro problema ya que en ningún lugar de la demostración hemos utilizado el orden de la disposición de los puntos A, N, O y M en la diagonal AM.

insuficientes. A menudo demuestran menos de lo que se requiere, hacen conclusiones sin suficientes argumentos. Precisamente, errores de este tipo suelen cometerse en la solución del problema que sigue.

5. *La superficie lateral de una pirámide de base triangular es igual a s y el perímetro de la base es igual a $3a$. Una esfera es tangente a los tres lados de la base en sus puntos medios e interseca las aristas laterales en sus puntos medios. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar el radio de la esfera.*

Señalemos, ante todo, que la esfera de referencia es "atravesada" por las aristas laterales de la pirámide en los puntos medios de éstas. Entre tanto, a pesar de la claridad del enunciado de los datos del problema, algunos estudiantes consideran que la esfera es *tangente* a las aristas laterales de la pirámide en los puntos medios de éstas. De este modo el problema propuesto se sustituye por otro. Así, la negligencia en la lectura de los datos o la incomprensión de éstos sirve de causa para los errores.

Para algunos resulta difícil dibujar la esfera mencionada en los datos y representar la figura necesaria. De hecho, es suficiente imaginar la esfera sin trazarla en el dibujo (véase § 8, Parte III).

Después de hacer estas observaciones preliminares, vamos a demostrar que la pirámide de que se trata en los datos es regular (designémosla por $SABC$, fig. 114). La esfera es tangente a los lados de la base AB, BC y CA, en sus puntos medios F, D y E. De acuerdo con la propiedad de las tangentes a la esfera, trazadas desde un punto, $AF = AE$, $BF = BD$, $CE = CD$. Pero según los datos $AE = EC$, $CD = DB$, $AF = FB$, y por eso está claro que la base de la pirámide es un triángulo regular.

Cortando la esfera, el plano de la base ABC forma una circunferencia que resulta inscrita en este triángulo regular. Es evidente que el centro de esta circunferencia, el punto K, coincide con el centro del triángulo regular ABC.

Supongamos que M, L, Q son los puntos medios de las aristas laterales AS, BS y CS de la pirámide. Algunos estudiantes escriben de inmediato que el plano trazado por estos puntos es paralelo a la base ABC, sin juzgar que es necesario argumentar esta confirmación. Pero, ¿por qué han de ser paralelos estos planos? Puesto que MQ es la línea media del triángulo ASC, en este caso $MQ \parallel AC$, por las mismas razones $QL \parallel CB$. Precisamente de aquí, conforme al principio de paralelismo de dos planos, se deduce nuestra afirmación.

De acuerdo con la propiedad de secciones paralelas en la pirámide, el triángulo MLQ es también regular, por ser semejante al triángulo regular ABC. Al cortar la esfera, el plano del triángulo MLQ forma una circunferencia circunscrita alrededor de este triángulo, y su centro coincide con el centro del triángulo regular MLQ.

Muchos estudiantes, al designar este centro con la letra P, trazan una recta por los puntos S, P y K diciendo que esta recta es la altura de la pirámide. Sin embargo, todavía no tenemos razón para tal conclusión, ya que no hemos demostrado que estos tres puntos se encuentran en una misma recta y que esta recta es perpendicular al plano de la base.

A fin de cumplir una demostración rigurosa actuemos del modo siguiente. Tracemos la recta SK por el vértice de la pirámide y el centro de la base; supongamos que esta recta interseca el plano MLQ en cierto punto P. Unamos este punto con los vértices del triángulo MLQ, y el punto K, con los vértices del triángulo ABC. Las rectas PL y KB son paralelas (como líneas de intersección de dos planos paralelos MLQ y ABC con el plano KSB) y por eso $\triangle KSB \sim \triangle PSL$, por consiguiente, $PL = \frac{1}{2} KB$. De manera análoga se demuestra que $PQ = \frac{1}{2} KC$, $PM = \frac{1}{2} KA$. Siendo $KB = KC = KA$, el P es el punto

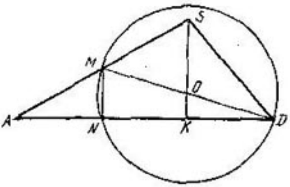

Fig. 115

de intersección de la recta KS con el plano MLQ, que equidista de los tres vértices del triángulo MLQ y por esta razón es el centro de la circunferencia circunscrita. Así queda probado que el vértice S y los centros P y K de los triángulos MLQ y ABC se hallan en una misma recta.

Esta recta une los centros de las dos circunferencias formadas mediante la sección de la esfera por dos planos paralelos. Como se sabe, tal recta es perpendicular a estos planos y pasa por el centro de la esfera. Por lo tanto, la recta SK es perpendicular al plano ABC, es decir, es la altura de la pirámide. Simultáneamente hemos demostrado que el centro de la esfera a la que se hace referencia en los datos del problema, se encuentra en la altura de la pirámide.

Así, la base de la pirámide $SABC$ es un triángulo regular y la altura de la pirámide SK pasa por el centro K de la base. De acuerdo con la definición esto significa que la pirámide $SABC$ es regular.

Para calcular el radio buscado de la esfera conviene trazar por separado un dibujo en el plano del triángulo ASD (fig. 115). Sea el punto O, que se halla en la altura SK, el centro de la esfera. Claro está que los segmentos OM y OD son iguales al radio r de la esfera.

Muchos estudiantes suponen que MOD es el diámetro de la esfera; en esta afirmación se basa la solución ulterior. Pero dicha afirmación todavía no está fundamentada, ya que no se deduce de los razonamientos anteriores y necesita una demostración especial.

Designemos por N el punto de intersección de la circunferencia cortada de la esfera por el plano ASD, con la recta AD. Puesto que $KD = \frac{1}{3} AD$ (el punto K es el centro del triángulo regular ABC) y $NK = KD$ (ya que el punto K es la base de la perpendicular bajada desde el centro O a la cuerda ND), entonces $AN = NK = KD$. Pero en tal caso MN es la línea media del triángulo ASK. Por consiguiente, $MN \parallel SK$, es decir, $\angle MND = 90°$. De aquí se deduce que MD, por ser la cuerda en la cual se apoya el ángulo recto inscrito, es el diámetro de la circunferencia.

Ahora no es difícil realizar los cálculos ulteriores. Después de obtener mediante la fórmula para la superficie lateral de la pirámide la longitud de su apotema SD, hay que hallar la altura de la pirámide con la ayuda del triángulo rectangular SKD y, luego, aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo MND. Con ello se obtiene definitivamente que

$$r = \frac{\sqrt{16s^2 + 45a^4}}{24a}.$$

Valiéndonos del ejemplo del problema examinado se puede concluir que es necesario demostrar minuciosamente cada uno de los conceptos geométricos que nos interesa, al practicar construcciones complementarias necesarias y aplicar los teoremas del curso de Geometría. Por lo general, todos estos conceptos no son tan evidentes como para dejarlos sin la argumentación debida. Ninguno de estos conceptos puede considerarse determinado del modo lógicamente estricto si no se tienen tales argumentaciones, tampoco puede tomarse por exhaustiva la solución de problemas que no contiene estas argumentaciones.

Muchos estudiantes preguntan, ¿si es necesario expresar por completo las enunciaciones de los teoremas y axiomas utilizados para la demostración? El estudiante puede elegir lo que prefiera: escribir toda la enunciación del teorema necesario para la argumentación o hacer una breve referencia sobre el mismo. Lo que importa es que los conceptos geométricos de las afirmaciones y construcciones estén descritos claramente y argumentados de una forma convincente y correcta.

Al hablar de la necesidad de dar demostraciones lógicamente estrictas de las afirmaciones geométricas, hay que señalar que en muchos casos los estudiantes en vez de argumentar estrictamente uno u otro concepto, recurren a las expresiones, por ejemplo, "es absolutamente evidente del dibujo", "del dibujo se deduce de forma clara que...", etc. Se debe recordar que la demostración geométrica ha de deducir el concepto requerido no de la "evidencia" que con frecuencia suele ser ilusoria, sino de los axiomas de Geometría, de las definiciones y teoremas conocidos en el programa de la secundaria.

He aquí un ejemplo en que casi todos los estudiantes obtuvieron respuestas correctas, pero que muchos de ellos cometieron errores de carácter lógico.

6. *Se da un cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en que AA_1, BB_1, CC_1 y DD_1 son aristas laterales. Hallar el área del hexágono obtenido por la sección del cubo por un plano que pasa por el centro del cubo y los puntos medios de las aristas AB y BC. La arista del cubo es igual a* 1.

Puesto que en los datos del problema está indicada la forma de la sección, no es difícil imaginarse el hexágono. Por lo visto, esta es la razón por la cual muchos estudiantes comprendieron que el hexágono es regular y propusieron, por ejemplo, la solución siguiente:

"Sean K y L los puntos medios de las aristas AB y BC. Debido a la simetría, la sección pasa por los puntos P y N que son los puntos medios de las aristas A_1D_1 y D_1C_1. Es evidente que la sección atraviesa también los puntos M y Q que son los puntos medios de las aristas CC_1 y AA_1. Valiéndonos de los triángulos KBL, LCM, etc., según el teorema de Pitágoras se determinan fácilmente los lados del hexágono: $KL = LM = MN = NP = PQ = QK = \sqrt{1/2}$. Como todos los lados del hexágono son iguales, el hexágono es regular y, según la conocida longitud del lado se determina su área. Esta es igual a $3\sqrt{3}/4$".

La respuesta obtenida es correcta, pero esta argumentación no puede considerarse como *la solución completa* ya que contiene muchas afirmaciones geométricas no fundamentadas e incluso hay una errónea: no es obligatoriamente regular el hexágono cuyos lados son iguales. Se sabe que en la definición del hexágono regular, además de la condición de la igualdad de los lados, hay otra condición, la igualdad de los ángulos, que no se deduce de la igualdad de los lados. Sin embargo, en la "solución" mencionada no está argumentada la igualdad de los ángulos del hexágono que es una sección, por lo tanto la conclusión acerca de que el hexágono es regular resulta lógicamente falsa.

Ilustremos una de las soluciones completas posibles (utilizando el método general desarrollado en § 7, Parte III).

Supongamos que el punto O es el centro del cubo en cuestión (fig. 116). Este punto se encuentra en la intersección de las diagonales BD_1 y A_1C del cubo (éstas no están trazadas en el dibujo): el plano que pasa por las dos diagonales corta el cubo formando el rectángulo BA_1D_1C. Este plano, junto con el plano de la sección que nos interesa, tiene dos puntos comunes: O y el punto medio L de la arista BC; por esto su línea de intersección es la recta OL. Pero en el rectángulo BA_1D_1C el punto O es el centro de simetría, por eso LO interseca el lado A_1D_1 en su punto medio. Por consiguiente, queda demostrado que P es el punto medio de la arista A_1D_1 y pertenece a la sección que se considera.

Razonamientos del mismo tipo demuestran que el punto medio N de la arista D_1C_1 también pertenece a la sección que se considera.

La recta KL situada en el plano de la cara $ABCD$ (perteneciente también a la sección) interseca las prolongaciones de las aristas AD y CD en los puntos R y F respectivamente. Unimos con recta los puntos N y F que se encuentran en el plano de la cara CC_1D_1D a diferentes lados respecto del segmento CC_1; esta recta cruzará el segmento CC en cierto punto M que también pertenece a la sección. De modo análogo nos convencemos de que la sección pasa por cierto punto Q en la arista AA_1. Por fin, está claro, que las rectas NF y RP que pertenecen al plano de la sección y son líneas de intersección de este plano con los planos de las caras CC_1D_1D y AA_1D_1D respectivamente, se intersecan en cierto punto E situado en la línea de intersección de los planos de las caras mencionadas, es decir, en la recta DD_1.

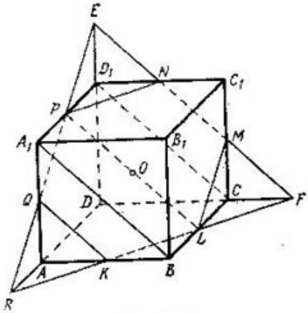

Fig. 116

Se han establecido los puntos de intersección del corte buscado con todas las aristas del cubo. Demostremos también que Q y M son los puntos medios de las aristas correspondientes. Comparando los triángulos rectángulos RAK, KBL y LCF nos convencemos de que son iguales y por eso $RA=FC=\frac{1}{2}AB$. Comparando los triángulos rectángulos RAQ, QA_1P y PD_1E podemos ver que son iguales (por ejemplo, $\triangle RAQ = \triangle QA_1P$, ya que $\angle RQA = \angle A_1QP$ por ser verticales, mientras que $RA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}A_1D_1 = A_1P$, puesto que P es el punto medio de la arista); pero en este caso, Q es el punto medio de la arista AA_1 y $D_1E = \frac{1}{2}AA_1$. Del mismo modo se demuestra también que M es el punto medio de la arista CC_1.

Así, queda demostrado que la sección $KLMNPQ$ pasa por los puntos medios de las aristas AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 y A_1A del cubo. Es evidente que cada uno de los lados del hexágono es igual a la mitad de la diagonal de la cara del cubo, es decir, todos los lados del hexágono son iguales.

Nos queda por demostrar, si todos los ángulos del hexágono son iguales; en caso positivo será demostrado que el hexágono obtenido en la sección es regular. De la igualdad de los triángulos rectángulos RAK, RAQ y QAK se deduce que el triángulo RKQ es equilátero; por consiguiente, $\angle RKQ = 60°$ y por eso $\angle QKL = 120°$. Del modo análogo nos convencemos de que los demás ángulos del hexágono son iguales a $120°$.

Ahora, para terminar la resolución, con plena razón puede recurrirse al enunciado del área del hexágono regular, valiéndonos de la longitud de su lado.

En algunos casos los estudiantes tratan de argumentar los conceptos estereométricos refiriéndose a afirmaciones análogas que son válidas para la planimetría. Por ejemplo, al resolver el problema 5 hemos aprovechado el teorema: *si desde un punto cualquiera tomado fuera de una esfera sólida se trazan tangentes a ésta, en este caso los segmentos de*

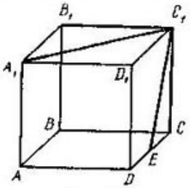

Fig. 117

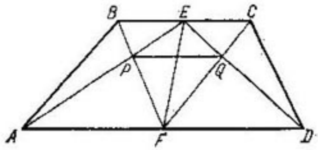

Fig. 118

cada tangente comprendidos entre este punto y el punto de tangencia son iguales entre sí. Algunos estudiantes consideran el teorema como válido para la estereometría por la simple razón de que "la propiedad análoga de las tangentes tiene lugar en el plano".

Sin embargo, la analogía entre las afirmaciones referentes al plano y al espacio no puede considerarse como una demostración; cada afirmación "espacial" debe argumentarse estrictamente. En particular, la propiedad recién enunciada de las tangentes a la esfera requiere una demostración especial (el propio lector puede realizarla).

Conviene tener en cuenta, que la analogía entre las afirmaciones planimétricas y las estereométricas puede incluso llevar a conclusiones erróneas. Como se sabe, en el plano dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son iguales entre sí. Pero *¿serán iguales dos ángulos agudos planos, dispuestos en el espacio, cuyos lados son respectivamente perpendiculares?* Es fácil trazar un dibujo que ilustre que tales ángulos no son obligatoriamente iguales (en la fig. 117 se muestra un cubo; aunque $B_1C_1 \perp C_1E$ y $A_1C_1 \perp C_1C$, pero los ángulos $B_1C_1A_1$ y CC_1E no son iguales entre sí).

Los estudiantes, al cumplir las demostraciones geométricas, sustituyen a veces las afirmaciones directas por las inversas. Por ejemplo, vamos a suponer, que en el proceso de razonamientos es preciso argumentar cierto concepto, es decir, *demostrar un teorema* (o *hacer referencia* a un teorema correspondiente del programa de la secundaria) *que afirma la validez del concepto que nos interesa*, partiendo de lo que está dado o ya se conoce. No obstante, con frecuencia, en vez de este teorema directo se hace referencia a la afirmación *inversa*, es decir, a la que *es válida en el supuesto de que tenga lugar el concepto que nos interesa.*

Claro está que esto es un grave error lógico; con este método de razonamiento el concepto que nos interesa no puede considerarse como demostrado. Las raíces de este error radican, por lo visto, en que no se comprende claramente qué *está dado* en cada etapa de la demostración que se considera y qué *se necesita argumentar*. Por lo tanto, si en el proceso de la demostración surge la necesidad de referirse a una u otra afirmación, se recomienda recordar su enunciación *exacta* y luego hay que convencerse de que están satisfechas las suposiciones con las cuales dicha afirmación queda demostrada.

Precisamente, el error lógico mencionado no permitió a muchos estudiantes resolver el problema que sigue.

7. *En el trapecio $ABCD$, E es el punto medio de la base BC, y F, el punto medio de la base AD. Designemos por P el punto de intersección de los segmentos BF y AE y por Q, el punto de intersección de los segmentos ED y CF. Demostrar que el segmento PQ es paralelo a las bases del trapecio.*

Como $\angle BEP = \angle PAF$ y $\angle PBE = \angle PFA$ (fig. 118), entonces $\triangle BPE \backsim \triangle APF$ y por eso

$$\frac{EP}{AP}=\frac{BE}{AF}.$$

Se puede demostrar de modo análogo que $\triangle EQC \backsim \triangle FQD$, de donde se deduce la igualdad

$$\frac{EQ}{QD}=\frac{EC}{FD}.$$

De acuerdo con los datos, $BE = EC$ y $AF = FD$. Por eso los miembros de la derecha de las dos proporciones escritas son iguales; pero en tal caso son iguales también los miembros de la izquierda:

$$\frac{AP}{EP}=\frac{DQ}{EQ}.$$

Componiendo la proporción derivada

$$\frac{AP+EP}{EP}=\frac{DQ+EQ}{EQ},$$

llegamos a la igualdad

$$\frac{AE}{EP}=\frac{DE}{EQ}. \qquad (1)$$

Por consiguiente, los triángulos AED y PEQ son semejantes, ya que tienen un ángulo común, E, y los lados son proporcionales respectivamente.

Aquí es donde muchos estudiantes suelen hacer la conclusión siguiente: "Puesto que $\triangle AED \backsim \triangle PEQ$, por lo tanto $PQ \parallel AD$ ya que la recta que es paralela a la base del triángulo separa de éste un triángulo semejante al de origen". Entre tanto, la aplicación de este teorema es aquí *inadmisible*: en éste *se supone* que la recta es paralela a la base del triángulo y *se demuestra* que en este caso el triángulo separado es semejante al dado. Pero en nuestro caso la situación es precisamente inversa: sabemos que $\triangle AED \backsim \triangle PEQ$ y tenemos que demostrar que $PQ \parallel AD$. El carácter erróneo, desde el punto de vista lógico, de la conclusión que acabamos de hacer es evidente.

Para que esta conclusión sea argumentada lógicamente, tendríamos que referirnos a la afirmación *inversa* del teorema mencionado: "Si una recta interseca los lados laterales de un triángulo, separando un triángulo semejante al dado, esta recta es paralela a la base". Sin em-

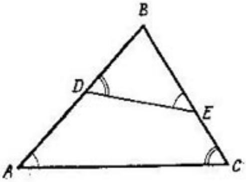

Fig. 119

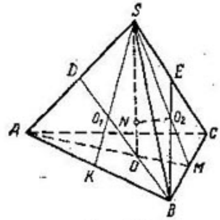

Fig. 120

bargo, esta afirmación *es errónea* (véase, por ejemplo, la fig. 119: en ésta $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$ puesto que $\angle BED = \angle BAC$, $\angle BDE = \angle BCA$, pero DE no es paralela a AC). Se ve que el concepto de paralelismo de las rectas PQ y AD necesita una argumentación estricta.

Esta argumentación puede cumplirse del modo siguiente. En los triángulos semejantes los ángulos correspondientes son iguales; por eso, valiéndonos de la proporción (1) puede deducirse que $\angle EPQ = \angle EAD$. Pero estos ángulos se corresponden si la secante EA corta a las rectas PQ y AD; de aquí se deduce, según el criterio de paralelismo, que $PQ \parallel AD$.

Aquí hay otro problema en cuya resolución muchos estudiantes no realizan las demostraciones necesarias o las realizan con graves errores lógicos.

8. *Una esfera de radio r es tangente a las caras laterales de una pirámide de base triangular en los puntos de intersección de las alturas de éstas. La suma de los tres ángulos planos al vértice de la pirámide es igual a 3α. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar la longitud de la arista lateral de la pirámide.*

Primero nos detendremos en demostrar la suposición de que la pirámide $SABC$ es regular (fig. 120). Sean O_1 el punto de intersección de las alturas SK y BD de la cara lateral BSA y O_2, de las alturas SM y BE de la cara lateral BSC.

De acuerdo con los datos del problema, la esfera es tangente a los planos BSA y BSC en los puntos O_1 y O_2 respectivamente. Esto significa que cualquier recta que pase por el punto O_1 (u O_2) y que se sitúe en el plano BSA (respectivamente, en el plano BSC) es tangente a la esfera. En particular, las rectas SK, BD, SM, BE son tangentes a la esfera. Pero, en este caso, $SO_1 = SO_2$ y $BO_1 = BO_2$ de acuerdo con la propiedad de las tangentes a la esfera, trazadas de un mismo punto.

Al examinar los triángulos SBO_1 y SBO_2 nos convencemos de que tienen tres lados iguales en pares. De la igualdad de los triángulos se deduce que $\angle BSO_1 = \angle BSO_2$; $\angle SBO_1 = \angle SBO_2$.

Ahora es evidente que $\triangle BSE = \triangle BSD$ (son rectángulos, tienen una hipotenusa común BS y ángulos agudos iguales); $\triangle SBM = \triangle SBK$ (por las mismas razones). De la igualdad de estos triángulos deducimos que $\angle BSD = \angle BSE$; $\angle SBM = \angle SBK$.

Finalmente, examinaremos los triángulos ASB y BSC. Estos son iguales ya que tienen el lado común BS y dos ángulos, contiguos a éste, de dos en dos iguales. De aquí se deduce que $AB = BC$ y $AS = CS$.

Aplicando argumentaciones análogas para las caras laterales ASB y ASC, obtendremos las igualdades $AB = AC$ y $BS = CS$. De este modo demostramos que en la pirámide dada las aristas laterales son iguales entre sí, al igual que los lados de la base.

Al cumplir estos razonamientos, muchos estudiantes llegan a la conclusión siguiente: "Por lo tanto, la pirámide es regular, puesto que en la pirámide de base triangular, regular, las aristas laterales son iguales y la base es un triángulo regular". La afirmación de que en la pirámide de base triangular regular las aristas laterales son iguales y que su base es un triángulo regular, es absolutamente válida, pero no para este caso. Precisamente, la afirmación *inversa* es la que nos interesa: si en una pirámide las aristas laterales son iguales y la base es un triángulo regular, la pirámide es regular. Esta afirmación, distinta de la recién enunciada por algunos estudiantes es la que hay que *demostrar* [1], es decir, es necesario probar que con todas estas suposiciones se cumplen todas las condiciones de *la definición* de la pirámide regular de base triangular.

La demostración de esta afirmación no es compleja: de la igualdad de las aristas laterales se deduce que la altura SO de la pirámide pasa por el centro del triángulo regular ABC. Por eso, de acuerdo con la definición, la pirámide $SABC$ es regular.

---

[1] A veces esta objeción provoca la réplica siguiente: podemos *definir* la pirámide regular de base triangular como una pirámide cuya base es un triángulo regular y todas las aristas laterales son iguales entre sí. Naturalmente, tal definición puede darse; de acuerdo con *esta* definición la pirámide en cuestión, al instante, puede considerarse como regular. Pero en este caso hay que efectuar todos los razonamientos partiendo de esta definición (véase § 4, Parte III); en particular, hay que demostrar (esto será necesario en el proceso de la resolución ulterior del problema) que, en la pirámide definida de esta manera, la altura pasa por el centro de la base. Con el fin de evitar errores lógicos siempre sería mejor partir de las definiciones de uso general que se dan en los libros de texto.

Ahora es preciso efectuar otra etapa de la resolución, la del cálculo. Con este fin, necesitaremos el concepto de que *el centro de la esfera tangente a las caras laterales de la pirámide regular de base triangular, se sitúa en la altura de la pirámide.* A pesar de que aquí se trata de una esfera que es tangente solamente a las caras laterales de una pirámide regular (y no de una esfera inscrita en ésta), la demostración de esta afirmación coincide textualmente con los razonamientos que determinan la posición del centro de la esfera inscrita en la pirámide regular de base triangular (véase § 8, Parte III). Por eso no vamos a cumplir esta demostración, se la ofrecemos al lector.

Sin embargo, cabe señalar que esta demostración es un elemento obligatorio en la solución del problema. Por desgracia, muchos estudiantes no recurren a tal demostración, sustituyéndola por la frase: "Este concepto es evidente en el dibujo, gracias a la simetría". Claro está, la afirmación es obvia, pero no puede considerarse como una demostración exhaustiva. Pero si se pide realizar una argumentación más profunda, en casos raros se presenta una demostración lógica y correcta.

Así, pues, supongamos que el punto *N situado en la altura SO de la pirámide $SABC$ es el centro de la esfera tangente a las caras laterales.* Tracemos el plano SOM y unamos los puntos N y O_2. Como O_2 es el punto de tangencia, entonces el radio de la esfera $NO_2 = r$ es perpendicular al plano BSC y, por consiguiente, $\angle NO_2S = 90°$. Los triángulos rectángulos NO_2S y MOS son, evidentemente, semejantes y por lo tanto

$$NO_2 : OM = SO_2 : SO. \qquad (2)$$

Designemos por x la longitud buscada de la arista lateral de la pirámide. Por ser $\angle BSM = \alpha/2$, es fácil determinar el lado de la base de la pirámide y, por consiguiente, también el segmento OM. En este caso, según el teorema de Pitágoras, mediante el triángulo SOM se determina la altura SO de la pirámide. Finalmente, valiéndonos del triángulo SEB hallamos que $\angle SBE = 90° - \alpha$ y por eso el teorema de los senos aplicado al triángulo SBO_2 permite determinar a SO_2.

Al sustituir las expresiones obtenidas para NO_2, OM, SO_2 y SO en la igualdad (2) hallamos

$$x = \frac{r \operatorname{cotg}(\alpha/2)}{\cos\alpha} \sqrt{1 + 2\cos\alpha}.$$

Por lo común, los estudiantes creen que en lo referente a los problemas de Geometría para cálculos, "la respuesta correcta es lo fundamental". Y, como regla, resuelven con éxito la parte del cálculo (incluso el que requiere cierta minuciosidad) de la magnitud buscada. Pero muchos no prestan atención a otra parte, por supuesto la más importante, de la solución: no consideran necesario (o simplemente no entienden que esto es necesario) argumentar "la legitimidad" de las afirmaciones, es decir, demostrar los conceptos geométricos en los que se basan los cálculos. Aún más, no son raros los casos en que un estudiante que opera libremente con una variedad de fórmulas resulta ser completamente incapaz cuando se trata de la argumentación estricta de una afirmación de carácter geométrico, utilizada en los cálculos.

Mientras tanto, *la demostración de los conceptos geométricos que se aplican a los cálculos, es parte integrante e importante en principio de la solución del problema de cálculo.* ¿Por qué en la pirámide concreta dada, de que se trata en el problema, el centro de la esfera inscrita se halla en la altura? ¿Por qué la recta en cuestión es perpendicular al plano construido? ¿Por qué la esfera que se examina es tangente al plano dado en el punto indicado? Todas estas afirmaciones que se utilizan fundamentalmente en la resolución de un problema de cálculo, deben ser no sólo enunciadas sino demostradas. En el examen se requiere, ante todo, argumentar correcta y completamente la resolución del problema y no mencionar simplemente las afirmaciones, ya que sin demostraciones imprescindibles los cálculos resultan "suspendidos en el aire" y, por lo tanto, el problema no puede considerarse como resuelto de modo impecable.

En términos generales, la división de los problemas de Geometría en los "de cálculo" y los de "demostración" es puramente convencional. De los ejemplos ilustrados arriba (véanse los problemas 1, 2) se ve que a veces lo necesario puede demostrarse sólo después de cumplir ciertos cálculos. Por otra parte, hay muchos problemas para cálculo, en cuya solución las afirmaciones no son las que ocupan el lugar más importante, sino la demostración de cierto concepto. Con esta situación nos tropezamos en la solución del problema 6. En el problema que sigue tampoco podríamos realizar los cálculos sin argumentación completa de la afirmación necesaria, ya que sólo en el proceso de la demostración se consigue encontrar el método que permite calcular la respuesta.

9. *Se da un triángulo de área s. Las medianas del triángulo componen otro triángulo, luego las medianas del otro, un tercero, etc. En términos generales, el* $(n+1)$ — *ésimo triángulo se compone de las medianas del n-ésimo triángulo. Hallar la suma de las áreas de todos los triángulos en esta sucesión.*

Ante todo, demostraremos que es posible componer un triángulo por medio de medianas de un triángulo *cualquiera.*

Sean AK, BM y CN las medianas del triángulo ABC (fig. 121). Por el punto A trazaremos una recta que es paralela a CN y fijaremos el segmento $AP = CN$. Todo quedará demostrado si probamos que $KP = BM$.

Como $ANCP$ es un paralelogramo (de acuerdo con la construcción) y $AM = MC$, los puntos N, M y P se hallan en una misma recta, en la diagonal de este paralelogramo, en este caso $NM = MP$. Pero NM es la línea media del triángulo ABC y por lo tanto, $NP \parallel BC$ y $NM = \frac{1}{2} BC = BK$. Por esto en el cuadrilátero $BMPK$ los lados MP y BK son iguales y paralelos, es decir, el cuadrilátero es un paralelogramo y, por consiguiente, $KP = BM$.

Así, pues, se puede componer un triángulo por medio de medianas de *cualquier* triángulo. Supongamos ahora que ABC es el triángulo dado de área s; después que el triángulo AKP esté compuesto de sus medianas. Hallaremos $S_{AKP} = s_1$ si $S_{ABC} = s$. Señalaremos con este fin que AR es la mediana del triángulo AKP (la igualdad $PR = RK$ procede de la igualdad $\triangle PMR = \triangle RKC$) y recordemos que la mediana divide el área del triángulo en dos partes iguales. Por esta razón $S_{AKR} = s_1/2$. Por otra parte, $S_{AKR} = 3s/8$, ya que AR es la base del triángulo AKR y es igual a $3/4\ AC$ y la altura de este triángulo es dos veces más corta que la del triángulo ABC. De aquí obtenemos que $s_1 = 3/4\ s$.

Si por medio de las medianas del triángulo AKP se construye de nuevo un triángulo, el área de éste será $s_2 = 3/4\, s_1$, etc. El problema

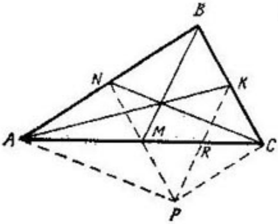

Fig. 121

se reduce a la búsqueda de la suma $S = s + s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots$ No es difícil imaginar que ésta es la suma de una progresión geométrica que desciende infinitamente.

$$S = s + \frac{3}{4}s + \left(\frac{3}{4}\right)^2 s + \ldots = 4s.$$

La argumentación de los conceptos geométricos, sobre los cuales se basan los cálculos, es particularmente importante para los problemas estereométricos. Muy a menudo el centro de gravedad de la solución de tales problemas está en la demostración y no en los cálculos que se reducen a la aplicación no compleja de las fórmulas ya conocidas.

10. *La altura de una pirámide regular de base triangular es igual a h. Los puntos de intersección de las alturas de cada una de las caras laterales y el vértice de la pirámide se encuentran en la superficie de una esfera de radio r. Hallar el volúmen de la pirámide.*

Muchos estudiantes piensan que el centro de la esfera está situado en la altura de la pirámide (esto se utiliza en los cálculos), y ellos, sin argumentar este concepto como es debido, pasan directamente a los cálculos. Algunos, incluso, replican contra el error admitido en la resolución, es decir, la falta de demostración, refiriéndose a que "nunca se les ha pedido exponer una descripción detallada y explicar el dibujo". Pero no se trata de la explicación del dibujo sino de la falta de una parte esencial de la solución.

El plano π trazado por los puntos O_1, O_2 y O_3 (que son los puntos de intersección de las alturas de las caras laterales de la pirámide $SABC$ (fig. 122) corta en la superficie de la esfera a una circunferencia que pasa por los tres puntos mencionados. El centro de la esfera se encuentra en la perpendicular al plano π trazada desde el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $O_1O_2O_3$. Demostraremos que dicha perpendicular coincide con la altura de la pirámide.

Por ser la pirámide regular, todas sus caras laterales son triángulos iguales y por eso los puntos de intersección de sus alturas (los puntos O_1, O_2 y O_3) equidistan del vértice S. De este modo, $SO_1 = SO_2 = SO_3$ [1].

Tracemos la altura SK de la pirámide y designemos por N el punto de intersección de SK con el plano π. De la igualdad de los triángulos SKD, SKF y SKE se deduce que $\angle DSK = \angle FSK =$

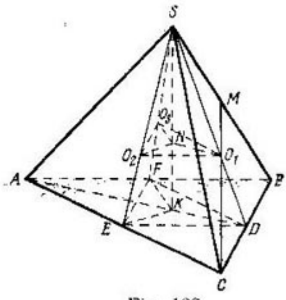

Fig. 122

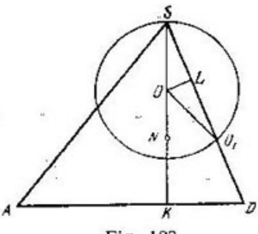

Fig. 123

$= \angle ESK$, y de la igualdad de estos ángulos y de la de los segmentos SO_1, SO_2 y SO_3 se deduce que $\triangle SNO_1 = \triangle SNO_2 = \triangle SNO_3$. Por eso $NO_1 = NO_2 = NO_3$, es decir, el punto N es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $O_1O_2O_3$.

Así, pues, la altura de la pirámide pasa realmente por el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $O_1O_2O_3$. No obstante, todavía no está demostrado que dicha altura es perpendicular al plano π.

[1] Subrayemos que este concepto es la propiedad de triángulos iguales; tiene lugar independientemente de la esfera de que se trata en el problema. Algunos estudiantes tratan de obtener estas igualdades utilizando la propiedad de las tangentes a la esfera; sin embargo, las rectas SE, SD y SF "atraviesan" la esfera y por eso no sirven de tangentes para la esfera en cuestión.

De la semejanza de los triángulos isósceles ESD y O_2SO_1 (en éstos los lados que componen el ángulo común del vértice son proporcionales) se deduce que $O_1O_2 \| ED$ (véase el problema 7). De modo análogo se prueba que $O_1O_3 \| DF$. Por lo tanto, el plano π es paralelo al plano de la base de la pirámide y por eso la altura SK es perpendicular al plano π. Con esto se cumple la demostración de que el centro de la esfera se encuentra en la altura de la pirámide.

Pasemos a los cálculos. Con el fin de determinar el volumen de la pirámide hallaremos el lado de su base. Analicemos la cara BSC. Como los triángulos rectángulos SDB y BMC tienen el ángulo agudo B común, en este caso $\angle DSB = \angle MCB$ y por eso los triángulos rectángulos SDB y O_1DC son semejantes. De su semejanza concluimos que

$$O_1D = \frac{x^2}{4SD}, \qquad (3)$$

donde x es la longitud de la arista de la base de la pirámide.

Estudiemos ahora el plano ADS trazando un dibujo aparte (fig. 123). Supongamos que el punto O situado en la altura SK del triángulo ADS es el centro de la esfera, o sea, el centro de la circunferencia que pasa por los puntos S y O_1; entonces $OS = OO_1 = r$. Al trazar la altura OL del triángulo isósceles SOO_1 y señalar que $\triangle SLO \sim \triangle SKD$, hallamos

$$SL = \frac{rh}{SD}. \qquad (4)$$

Pero $SD = 2SL + O_1D$, es decir, tomando en consideración (4) y (3),

$$SD^2 = 2rh + \frac{x^2}{4}.$$

Por otra parte, del triángulo rectangular SKD tenemos, que $SD^2 = h^2 + KD^2$, donde $KD = 1/3\, AD$ (ya que K es el centro del triángulo regular ABC, véase fig. 122). Las dos igualdades obtenidas para SD^2 nos dan la ecuación para determinar x, después de lo cual hallamos el volumen $V = 1/2 \sqrt{3}h^2 (h - 2r)$.

En conclusión vale señalar que en el proceso de la resolución hemos demostrado no todos los conceptos geométricos que se utilizaban. Consideramos algunos de ellos tan evidentes que ni los enunciábamos con claridad. Por ejemplo, afirmábamos sin comentar que la altura SK (fig. 122) *interseca* el plano π del triángulo $O_1O_2O_3$ y no es paralela a éste. Efectuando los cálculos en el mismo problema nos referíamos a la fig. 123 en la cual el punto O se encuentra en la altura SK *por encima* del punto K, etc.

Sin lugar a dudas, es lógicamente necesario demostrar tales afirmaciones. Pero en realidad no hay ninguna posibilidad, puramente física, de argumentar absolutamente todas las afirmaciones. Además, muchas afirmaciones geométricas no pueden ser demostradas estrictamente sin construir con anterioridad un sistema completo de axiomas de Geometría (esto no se practica en la secundaria).

Por esta causa el estudiante tiene que destacar en cada problema las afirmaciones fundamentales, más importantes, y demostrarlas correctamente.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que las rectas que unen sucesivamente los centros de los cuadrados construidos en los lados del paralelogramo y aplicados a éste por el exterior, forman un cuadrado.

2. Demostrar que cuando son iguales entre sí todos los ángulos diedros de una pirámide de base triangular, todas las aristas son también iguales entre sí.

3. Demostrar que si son perpendiculares en pares las aristas opuestas de una pirámide de base triangular, todas sus alturas se intersecan en un mismo punto.

4. Dentro del triángulo ABC se toma un punto arbitrario O. Por éste punto se han trazado rectas paralelas a los lados del triángulo: $EK \parallel BC$, $PM \parallel AC$ y $TX \parallel AB$. Los puntos E y P se sitúan en el lado AB, los puntos K y T en el lado AC y los puntos M y X, en el lado BC. Demostrar que

$$\frac{AP}{AB}+\frac{BX}{BC}+\frac{CK}{CA}=1.$$

5. Los lados a, b y c del triángulo ABC se encuentran, respectivamente, frente a los ángulos A, B y C. Demostrar que la bisectriz del ángulo A $\beta_a=\dfrac{2bc\cos(A/2)}{b+c}$. Demostrar con la ayuda de esta fórmula que el triángulo con dos bisectrices iguales es isósceles.

6. En los lados de un triángulo isósceles, en su parte exterior, se han construido cuadrados. Demostrar que la distancia entre los centros de estos cuadrados, construidos en los lados laterales, es igual a la distancia entre el centro del cuadrado, construido en la base, y el vértice opuesto del triángulo.

7. Demostrar que el triángulo ABC es rectángulo si la mediana y la altura trazadas desde el vértice B dividen el ángulo B en tres partes iguales.

8. Se sabe que los vértices de la base inferior de un prisma triangular recto se encuentran en la superficie de una esfera y que los lados de la base superior son tangentes a ésta. Demostrar que el prisma es regular.

9. En el triángulo ABC se han trazado las medianas BD y CE; que se intersecan en el punto G. Demostrar que el triángulo BCG y el cuadrilátero $ADGF$ son equidimensionales.

10. Dos círculos son concéntricos y la circunferencia del menor divide el mayor en dos partes equidimensionales. Demostrar que la parte del anillo, comprendida entre las tangentes (que son paralelas) a la circunferencia de radio menor, es equidimensional al cuadrado inscrito en el círculo menor.

11. En un trapecio isósceles se ha inscrito un círculo. Demostrar que la relación entre el área del círculo y el área del trapecio es igual a la relación entre la longitud de la circunferencia del círculo y el perímetro del trapecio.

12. Una esfera está inscrita en un cono truncado. Demostrar que el área de la superficie de la esfera es menor que el área de la superficie lateral del cono.

13. En un triángulo isósceles el ángulo de vértice es igual a 10°. Demostrar que el lado lateral a y la base b de este triángulo se relacionan como $1/2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,a^3+b^3=$ $=3ba^2$.

14. Demostrar que el radio de la circunferencia trazada por los puntos medios de los lados del triángulo ABC es dos veces menor que el radio de la circunferencia circunscrita a este triángulo.

15. Una pirámide truncada de base cuadrangular está circunscrita a una esfera. Demostrar que los volúmenes de la esfera y de la pirámide están en la misma relación que sus superficies totales.

16. En el paralelogramo $ABCD$, en los lados AB, BC, CD y DA se han tomado los puntos E, F, G, H respectivamente, teniendo en cuenta que $AE : EB = CF : FB = CG : GD = AH : HD = 1 : 2$. Demostrar que el cuadrilátero $EFGH$ es un paralelogramo y hallar la relación entre su área y el área del paralelogramo $ABCD$.

17. Demostrar que en el triángulo equilátero la suma de las distancias entre cualquier punto y los tres lados es constante.

18. Demostrar que en el triángulo isósceles la suma de las distancias entre cualquier punto de la base y los lados laterales es constante.

19. En el triángulo ABC se dan los ángulos $A=\pi/7$, $B=2\pi/7$, $C=4\pi/7$. Demostrar que las longitudes a, b y c de los lados BC, CA y AB se relacionan como $a^{-1}=b^{-1}+c^{-1}$.

20. Se da un tetraedro $ABCD$. Demostrar que sus aristas AD y BC son recíprocamente perpendiculares en el caso y sólo en el caso en que se cumpla la igualdad

$$AB^2+DC^2=AC^2+DB^2.$$

21. En el plano P se da el triángulo equilátero ABC con el lado a. En las perpendiculares, en los puntos B y C al plano P, por un lado de este plano, se toman los segmentos $BD=a/\sqrt{2}$ y $CE=a/\sqrt{2}$. Demostrar que el triángulo DAE es rectángulo. Calcular su área y hallar el coseno del ángulo diedro que forma el plano DAE con el plano P.

22. AB y CD son dos diámetros recíprocamente perpendiculares de la circunferencia S_1. La circunferencia S_2 tiene el centro D y el radio DA. Desde el punto D se han trazado dos rayos que intersecan la circunferencia S_1 en los puntos P y Q, y el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia S_2 dispuesto dentro de la circunferencia S_1, en los puntos M y N. Sean P_1 y Q_1 las proyecciones de los puntos P y Q sobre el diámetro AB. Demostrar que la figura limitada por los arcos $\overset{\frown}{PQ}$ y $\overset{\frown}{MN}$ y por los segmentos MP y NQ es equidimensional al triángulo DP_1Q_1.

23. Demostrar que en el triángulo ABC, cuyos lados $AB=4$ cm, $BC=3$ cm y $AC=\sqrt{5}$ cm, las medianas AK y CL son recíprocamente perpendiculares.

24. Demostrar que la proyección del tetraedro regular sobre el plano tendrá el área máxima cuando dicho plano es paralelo a dos aristas que se cruzan del tetraedro.

25. Demostrar que la suma de cuadrados de las longitudes de proyecciones de las aristas de un cubo de una unidad sobre el plano no depende de la posición recíproca del cubo y del plano y es igual a 8.

26. El ángulo diedro entre los planos P y Q es igual a α. En el plano P se encuentra un cuadrado de lado 1. Demostrar que el perímetro de la proyección del cuadrado sobre el plano Q es máximo cuando la diagonal del cuadrado es paralela al plano Q.

27. El ángulo diedro entre los dos planos P y Q es igual a α. En el plano P se sitúa un triángulo regular de lado 1. Demostrar que la suma de cuadrados de las longitudes de proyecciones de los lados de dicho triángulo sobre el plano Q no depende de su disposición en el plano P.

28. Demostrar que en caso de formar las longitudes de los lados del triángulo una progresión aritmética, el centro de la circunferencia inscrita en este triángulo y el punto de intersección de sus medianas se hallan en una recta paralela al lado medio del triángulo según la longitud.

29. Una esfera es tangente a todas las caras laterales de la pirámide de base triangular en los centros de las circunferencias circunscritas a las mismas. Cada uno de los tres ángulos planos del vértice de la pirámide es igual a α. La suma de las longitudes de las aristas laterales es igual a $3b$. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar el radio de la esfera.

30. La altura de la pirámide de base triangular es igual a h, la suma de los nueve ángulos planos de los vértices de la base es igual a α. Se conoce que existe una esfera que es tangente a todas las caras laterales en los puntos de intersección de sus medianas. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar el radio de la esfera.

31. La esfera es tangente a todas las caras laterales de la pirámide de base triangular $SABC$ en los puntos de intersección de sus bisectrices. Del vértice S se han trazado las bisectrices SD y SE de las caras laterales SAB y SAC. El ángulo DSE es igual a α y el volumen de la pirámide es igual a V. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar el perímetro de la base.

32. Si se sabe que los lados del triángulo ABC satisfacen la relación $AC \cdot AB = BC^2 - AC^2$, demostrar que el ángulo A es dos veces mayor que el ángulo B.

§ 6. IMAGINACIÓN GEOMÉTRICA

Los problemas geométricos que requieren no sólo determinada fórmula o la argumentación de cierto concepto, sino imaginar bien las figuras geométricas necesarias, provocan en los estudiantes no pocas inquietudes.

La imaginación geométrica clara se desarrolla gradualmente, como resultado del entrenamiento continuo. Es necesario imaginarse bien "desde distintos puntos de vista" los cuerpos y las figuras que se plantean en el problema, tratarse de cumplir correctamente el dibujo.

Precisamente, la imaginación pobre de la figura en el espacio, la incomprensión de la disposición mutua real de los cuerpos que se muestran en el dibujo, fueron la causa de que muchos estudiantes daban soluciones erróneas de distinto carácter en el problema siguiente.

1. *Un rombo con el ángulo agudo φ sirve de base inferior $ABCD$ del prisma recto $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (donde A_1A, B_1B, C_1C, D_1D son las aristas laterales). Se sabe que en el prisma puede inscribirse una esfera de diá-*

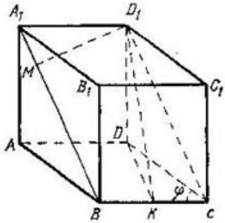

Fig. 124

metro d, tangente por el interior a todas sus caras. Hallar el área de la sección del prisma por el plano que pasa por las aristas BC y A_1D_1.

Determinemos el área S del cuadrilátero A_1D_1CB (fig. 124). Puesto que en el prisma recto puede inscribirse una esfera (no se muestra en la figura), en el rombo $ABCD$ puede inscribirse una circunferencia. En efecto, el centro de la esfera equidista de todas las caras laterales del prisma recto y por eso la proyección ortogonal del centro sobre el plano $ABCD$ equidista de todos los lados del rombo. De esta manera, la altura DK del rombo es igual al diámetro de la esfera, es decir, el lado del rombo $DC = d/\text{sen}\,\varphi$. Es fácil comprender que la altura del prisma es igual al diámetro de la esfera inscrita en el prisma, es decir, $DD_1 = d$.

Algunos estudiantes, valiéndose del dibujo, consideraron que A_1D_1CB es un rectángulo y por eso buscaron el área de la sección por medio de la fórmula $S = BC \cdot D_1C$. Pero, en realidad $S = BC \cdot D_1K$ donde D_1K es la altura del *paralelogramo* A_1D_1CB, o sea, $D_1K \perp BC$. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, del triángulo D_1DK hallamos que $D_1K = d\sqrt{2}$ y, por consiguiente, $S = d^2\sqrt{2}/\text{sen}\,\varphi$.

Otra solución incorrecta consistía en lo siguiente. Del punto D_1 al lado A_1B del paralelogramo A_1D_1CB se baja la altura D_1M de este paralelogramo. El lado A_1B se halla por medio del triángulo A_1AB según el teorema de Pitágoras: $A_1B = d\sqrt{1 + \text{sen}^2\,\varphi}/\text{sen}\,\varphi$. Luego, como la esfera es tangente a las caras AA_1B_1B y DD_1C_1C, se llega a la conclusión de que $D_1M = d$ y por eso $S = A_1B \cdot d$. Sin embargo, aquí también falló la imaginación espacial: en realidad $D_1M \neq d$[1]; es decir, la altura D_1M de la sección que se analiza no es igual a la distancia entre los planos paralelos AA_1B_1B y DD_1C_1C, esto es, D_1M no es simplemente perpendicular al *plano* AA_1B_1B. Señalemos también que A_1B y D_1C no son rectas tangentes a la esfera inscrita en el prisma.

Claro está, los errores en las resoluciones incorrectas mencionadas tuvieron lugar por la incomprensión del dibujo, por la insuficiente imaginación geométrica. Sin embargo, estos errores se habrían evitado si los estudiantes no hubieran utilizado simplemente el hecho "evidente" del dibujo (y en realidad, erróneo), sino hubieran tratado de argumentarlo estrictamente. En este caso se habrían convencido de que este concepto no tiene lugar.

Se debe comprender bien que la imaginación espacial perfecta es inseparable de la demostración lógica completa de todos los conceptos geométricos, sobre los cuales nos apoyamos en el proceso de la resolución. Por clara que "veamos" la configuración espacial, por preciso y nítido que esté hecho el dibujo, es necesario demostrar estrictamente todas las afirmaciones, incluso las que parecen "evidentes" del dibujo.

Hablando metafóricamente, la imaginación geométrica nos sugiere el camino de la solución, permite hacer "un borrador" de la resolución en que seguimos solo a nuestra intuición, tratando de comprobar si llegamos o no al resultado deseado. Pero luego es necesario crear la resolución "en limpio" en la cual las consideraciones y conjeturas intuitivas y no estrictas se sustituyen por demostraciones exhaustivas.

Ilustremos otros dos problemas en que la imaginación geométrica es muy importante: sin "fantasía geométrica" es difícil trazar el camino

[1] Utilizando la expresión hallada para S y la fórmula $S = A_1B \cdot D_1M$, es fácil calcular a qué es igual la altura D_1M.

de la resolución. Señalemos, a propósito, que incluso con un buen dibujo no es siempre fácil encontrar el concepto sobre la base del cual se logra realizar la resolución.

2. *Se da una pirámide de base cuadrangular $SABCD$ con el vértice S. Por los puntos A y B y el punto medio de la arista SC se ha trazado un plano. ¿En qué relación el plano divide al volumen de la pirámide?*

Primera solución. Señalemos ante todo que la recta AB es paralela al plano de la cara lateral DSC (fig. 125), ya que la arista AB es paralela a DC. Por esta razón el plano secante que pasa por la arista AB y el punto F (el punto medio de la arista SC) se interseca con el plano de la arista DSC a lo largo de la recta EF que es paralela a AB y, por consiguiente, a DC. De aquí se deduce que EF es la línea media del triángulo DSC.

Necesitamos comparar los volúmenes de los dos cuerpos, disponiéndolos uno debajo del plano secante y otro por encima de éste; el cuerpo dispuesto debajo del plano secante es de forma irregular. Con el fin de cumplirlo, realicemos primero una construcción complementaria para obtener un cuerpo más "natural": en la prolongación del segmento EF, tras el punto F, tracemos el segmento $FK = EF$ y luego unamos el punto K con los vértices B y C de la base de la pirámide.

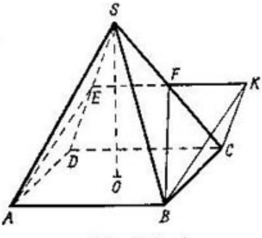

Fig. 125

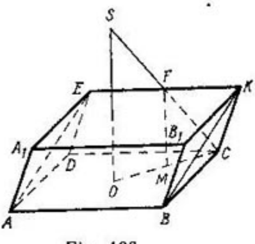

Fig. 126

Analicemos el cuadrilátero $DCKE$. Este es un paralelogramo ya que los lados opuestos DC y KE son iguales y paralelos, y por lo tanto, los lados opuestos DE y CK son también iguales y paralelos. De modo análogo se demuestra que el cuadrilátero $ABKE$ es un paralelogramo y por esta razón sus lados opuestos AE y BK son iguales y paralelos. Puesto que en la base de la pirámide regular $SABCD$ se halla un cuadrado, los lados DA y CB del cuadrado $ABCD$ son también iguales y paralelos.

De lo dicho se deduce que los lados correspondientes de los triángulos ADE y BCK son iguales y paralelos, lo que significa que los triángulos ADE y BCK son iguales y sus planos son paralelos. Además, como $DC = EK = AB$ y las rectas DC, EK y AB son paralelas, el cuerpo $CBKDAE$ es un prisma triangular (oblicuo) con las bases CBK y DAE.

Este prisma puede considerarse también como la mitad del paralelepípedo $ABCDA_1B_1KE$ en el cual sirve de base el cuadrado $ABCD$, mientras que una de sus caras laterales es el paralelogramo $DCKE$ (fig. 126). Por lo tanto, el volumen del prisma $CBKDAE$ es igual a la mitad del volumen de este paralelepípedo, es decir, igual a la mitad del producto del área del cuadrado $ABCD$ por la altura del paralelepípedo, o sea, por ejemplo, por la longitud de la perpendicular FM bajada desde el punto F al plano $ABCD$.

Si SO es la altura de la pirámide $SABCD$, en este caso, de la semejanza de los triángulos OSC y MFC se desprende que la altura FM de nuestro paralelepípedo equivale a la mitad de la altura de la pirámide.

Sean V el volumen de la pirámide, V_1 el del prisma $CBKDAE$, Q el área del cuadrado $ABCD$ y H la altura de la pirámide; en tal caso $V = 1/3\,QH$, $V_1 = 1/4\,QH$. De este modo, $V_1 = 3/4\,V$, es decir, el volumen del prisma $CBKDAE$ constituye 3/4 del volumen de la pirámide $SABCD$.

Sin embargo, no nos interesa el volumen del prisma $CBKDAE$, sino él del poliedro $CFBDEA$ (fig. 125), que es igual a la diferencia de los volúmenes del prisma $CBKDAE$ y la pirámide $BCKF$. Hallemos por eso el volúmen V_2 de la pirámide $BCKF$.

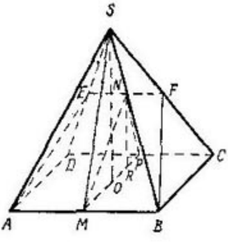

Fig. 127

Supongamos que Q_1 es el área del triángulo CKF y h es la longitud de la altura bajada desde el vértice B al plano del triángulo CKF. Por eso, el volumen V_2 de la pirámide $BCKF$ es igual a $1/3\,Q_1h$. Pero el prisma $CBKDAE$ puede considerarse como la mitad del paralelepípedo $DCKEABB_1A_1$ cuya base es el paralelográmo $DCKE$, mientras que el cuadrado $ABCD$ es una de las caras laterales (fig. 126). Entonces la altura de este paralelepípedo es igual a h y el área de la base $DCKE$ es el área cuadriplicada del triángulo CKF. Así, el volumen del prisma $CBKDAE$ puede escribirse también en la forma siguiente: $V_1 = 2Q_1h$. De aquí, tomando en consideración la expresión para V_2, obtenemos que $V_2 = 1/6\,V_1$ y por esta razón el volumen del poliedro $SFBDEA$ es $V_3 = V_1 - V_2 = 5/6\,V_1$. Pero, como $V_1 = 3/4\,V$, hallamos definitivamente que $V_3 = 5/8\,V$.

Por consiguiente, el volumen del poliedro $CFBDEA$ constituye 5/8 del volumen de la pirámide $SABCD$, es decir, el plano secante divide el volumen de esta pirámide en la relación de 3 : 5.

Segunda solución. Primero, al igual que en la solución anterior, demostremos que el plano secante se interseca con la cara lateral DSC a lo largo de la línea media EF. Luego, pasemos al análisis de los volúmenes formados por el corte de los dos cuerpos. Pero ahora concentremos nuestra atención en la pirámide de base cuadrangular $SABFE$, cuya base es la sección o el trapecio $ABFE$ (fig. 127).

Designemos por a el lado del cuadrado $ABCD$ y por h la altura SO de la pirámide $SABCD$. Es evidente, que el volumen de la pirámide $SABCD$ será: $V = 1/3\,a^2h$.

El volumen de la pirámide $SABFE$ es igual a la tercera parte del producto del área del trapecio $ABFE$ por la longitud de la perpendicular bajada desde el punto S al plano secante.

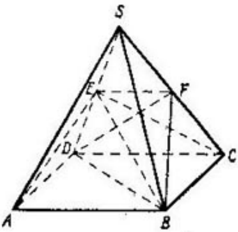

Fig. 128

Empecemos por el cálculo del área del trapecio $ABFE$. Sus bases son iguales a a y $a/2$; nos queda demostrar su altura. Tracemos por la altura SO el plano MSP que sea perpendicular a la arista AB. La recta MN es la línea de intersección de dicho plano con el plano de la sección y es precisamente la altura del trapecio $ABFE$, puesto que une los puntos medios de las bases del trapecio isósceles. Bajando una perpendicular desde el punto N al plano $ABCD$ y analizando los triángulos semejantes SOP y NRP, hallamos fácilmente que $NR = h/2$. Después, tomando en consideración el triángulo NRM determinamos que $MN = 1/4\sqrt{4h^2 + 9a^2}$ y por lo tanto, el área del trapecio $ABFE$ constituye $3/16\,a\sqrt{4h^2 + 9a^2}$.

Por ser el plano MSN perpendicular al plano $ABFE$ (ya que el plano $ABFE$ contiene la recta AB que es perpendicular al plano MSN), la perpendicular bajada desde el vértice S al plano $ABFE$ se encuentra en el plano MSN y con el segmento MN forma un ángulo recto. Es decir, la altura de la pirámide $SABFE$ coincide con la altura del triángulo MSN bajada desde el vértice S. Pero es fácil hallar la altura de este triángulo comparando las dos expresiones siguientes para su área: una, por medio de los tres lados según la fórmula de Herón (señalemos que se determinan con facilidad todos los tres lados del triángulo MSN) y otra, por medio del producto de la mitad del lado MN por la altura correspondiente.

Ahora demostramos fácilmente que la altura del triángulo MSN bajada desde el vértice S, es decir, la altura de la pirámide $SABFE$, equivale a $2ah/\sqrt{4h^2+9a^2}$.

Mas, en este caso el volumen de la pirámide $SABFE$ es igual a $1/8\ a^2h$, es decir, constituye 3/8 del volumen de la pirámide $SABCD$.

Tercera solución. Después de demostrar que el plano secante pasa por la línea media EF del triángulo DSC, analicemos el cuerpo dispuesto bajo el plano secante. En contraste con la primera solución, tratemos de calcular el volumen de dicho cuerpo como una suma de volúmenes de las pirámides construidas especialmente.

Al trazar un plano por los puntos B, E, C (fig. 128). dividimos el poliedro $CFBDEA$ que nos interesa en dos pirámides: la de base cuadrangular $EABCD$ con el vértice E y la base $ABCD$, y la $FBCE$, de base triangular, con el vertice F y la base BCE.

Puesto que la altura de la pirámide $EABCD$ es dos veces menor que la de la pirámide $SABCD$, el volumen de la pirámide $EABCD$ es igual a la mitad del volumen de la pirámide $SABCD$.

El volumen de la pirámide $FBCE$ se calcula fácilmente si se toma por su vértice el punto E y por la base el triángulo BCE: resulta que el volumen de la pirámide en cuestión equivale a la mitad del volumen de la pirámide de base triangular $DBCF$ (para la demostración es suficiente bajar perpendiculares desde los puntos D y E al plano BSC y, analizando los triángulos semejantes correspondientes, convencerse de que la altura de la pirámide $DBCF$ es dos veces más larga que la altura de la pirámide $EBCF$). Ahora, en la pirámide $DBCF$, tomemos el punto F por su vértice y el triángulo DBC por su base. Al confrontar las pirámides $FDBC$ y $SABCD$ vemos que el volumen de la primera es 4 veces menor que el de la segunda.

Por consiguiente, el volumen de la pirámide $FBCE$ es igual a 1/8 del volumen de la pirámide $SABCD$ y por lo tanto, el volumen del poliedro $CFBDEA$ constituye 5/8 del volumen de la pirámide en cuestión.

3. *Se da la pirámide regular $SABC$ de base triangular (S es el vértice) con el lado a de la base y la arista lateral b. La primera esfera con el centro en el punto O_1 es tangente a los planos SAB y SAC en los puntos B y C, mientras que la segudna esfera, con el centro en el punto O_2 es tangente a los planos SAC y SBC en los puntos A y B. Hallar el volumen de la pirámide SBO_1O_2.*

Con el fin de hallar el volumen de cualquier pirámide de base triangular es necesario decidir, ante todo, qué cara se toma por la base de la pirámide, para que el cálculo del área de la base y de la altura de la pirámide, bajada al plano de esta base, se haga lo más simple posible.

Los estudiantes que poseen imaginación geométrica no tardan en notar que la arista SB (fig. 129) es perpendicular al plano O_1BO_2 y que $O_1O_2 = AC$. De este modo, "la observación" geométrica les sugirió un método sencillo para resolver el problema: la demostración de los conceptos recién mencionados y el cálculo de los radios O_1B y O_2B.

Ilustremos esta resolución. Puesto que BO_1 es perpendicular al plano ABS, es también $BO_1 \perp SB$; gracias a que BO_2 es perpendicular al plano BCS, será $BO_2 \perp SB$, de modo que (véase § 4, Parte III) SB es perpendicular al plano O_1BO_2, es decir, SB es la altura de nuestra pirámide.

A fin de calcular el área del triángulo O_1BO_2 deben hallarse los radios O_1B y O_2B. Primero hallaremos el radio O_1B. Con este propósito tracemos un plano por los tres puntos B, C y O_1; éste cortará la arista AS en el punto D. Por ser BO_1 perpendicular al plano ABS, entonces, en particular, $BO_1 \perp AS$; de modo análogo $CO_1 \perp AS$; esto significa

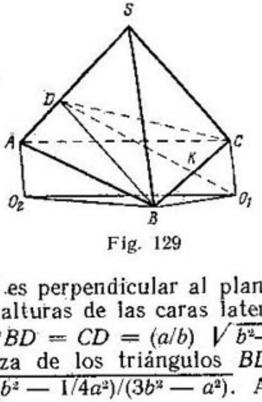

Fig. 129

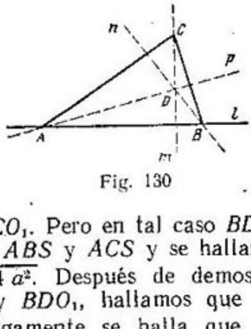

Fig. 130

que AS es perpendicular al plano BCO_1. Pero en tal caso BD y CD son las alturas de las caras laterales ABS y ACS y se hallan fácilmente: $BD = CD = (a/b)\sqrt{b^2 - 1/4\,a^2}$. Después de demostrar la semejanza de los triángulos BDK y BDO_1, hallamos que $BO_1 = a\sqrt{(b^2 - 1/4a^2)/(3b^2 - a^2)}$. Análogamente se halla que $BO_2 = BO_1$.

Queda encontrar O_1O_2, es decir, demostrar que $O_1O_2 = AC$. Al señalar que AO_2 es perpendicular al plano ACS y que CO_1 es perpendicular al mismo plano ACS, obtenemos que $AO_2 \parallel CO_1$; esto significa que los puntos A, C, O_1 y O_2 están en un mismo plano. El cuadrilátero ACO_1O_2 es plano y $AO_2 \parallel CO_1$. $AO_2 = CO_1$; así que ACO_1O_2 es un paralelogramo y por lo tanto $O_1O_2 = AC = a$. Ahora hallamos el área del triángulo BO_1O_2 por medio de sus tres lados y luego el volumen buscado $V = a^2b^2/(12\sqrt{3b^2 - a^2})$.

Sin embargo, no se debe creer, que la imaginación geométrica es necesaria solamente para la estereometría. En el problema planimétrico que sigue, lo principal es imaginarse correctamente el dibujo, examinar y explicar todos los casos posibles.

4. *En el plano se dan cuatro puntos A, B, C y D, siendo $AB \perp CD$ y $AC \perp BD$. Demostrar que $AD \perp BC$.*

En efecto, la posición de los puntos A y B en el plano puede ser cualquiera (fig. 130). Supongamos a continuación que el punto C está dispuesto de tal manera que la base de la perpendicular bajada desde éste a la recta l, en la que se encuentra el segmento AB, se sitúa *dentro* de este segmento.

Está claro que el punto D ha de encontrarse en la recta m, que es perpendicular a AB y pasa por el punto C. Puesto que según los datos $AC \perp BD$ el punto D ha de encontrarse en la recta n que pasa por el punto B perpendicularmente a AC. Como AC y AB se intersecan, así lo hacen también las rectas m y n que son perpendiculares a las mismas; el punto de intersección es precisamente el punto D. Examinemos ahora el triángulo ABC; supongamos que el punto D está dispuesto en su *interior* y tracemos la recta p por los puntos A y D. Es evidente que m y n son las alturas de este triángulo, por esta razón la recta p es también la altura. En efecto, si desde el vértice A bajamos la altura a BC, ésta (según el teorema sobre la propiedad de las alturas del triángulo) debe pasar también por el punto D y por eso coincidirá con la recta p (tienen dos puntos comunes). De aquí se deduce que $AD \perp BC$.

Los casos en que el punto D se sitúa *fuera* del triángulo ABC o que la recta m interseca a la recta l *fuera* del segmento AB, se examinan de manera análoga; el punto C no puede encontrarse en la propia recta l. El lector puede demostrarlo. Señalemos que sin un análisis exhaustivo de todos los casos posibles la solución, naturalmente, no puede ser reconocida como satisfactoria.

La importancia de la imaginación geométrica se ilustra bien por medio de los problemas de sombra geométrica, en los cuales la imaginación permite dar la idea del resultado esperado, encontrar "sondeando" la solución y después argumentarla estrictamente.

5. *En una superficie plana se han colocado un cono circular recto y un soporte (segmento) vertical. El radio de la base del cono es igual a* 1 m *y la altura del cono,* 2 m. *La base del soporte dista* 2 m *del centro de la base del cono; la altura del soporte es de* 4 m. *En el extremo superior del soporte se sitúa una fuente puntiforme de luz. Hallar el área de la sombra producida por el cono sobre la superficie plana (el área de la base del cono no se toma en consideración).*

Con el fin de construir la sombra del cono es necesario unir el punto I, en que se encuentra la fuente de luz (fig. 131), con todos los puntos del cono, y los puntos de intersección de estos rayos con el plano P, en que está el cono, justamente compondrán la sombra producida por el cono. Pero para construir la sombra no hay necesidad de trazar todos estos rayos; es suficiente trazar sólo aquellos que determinan la forma de la sombra, es decir, los que crean los límites de la sombra. Por esto, en este problema lo principal es determinar qué rayos crean los límites.

No es difícil darse idea de que los puntos límites de la sombra se producen por los rayos que tienen un solo punto común con el cono: si el rayo interseca la superficie del cono en dos puntos, su punto de intersección con el cono se encontrará dentro de la sombra, pero si el rayo no interseca el cono, entonces este punto de intersección con el plano no pertenece a la sombra. Pero ¿de qué modo pueden hallarse los rayos que tienen un punto común con el cono?

Con este fin "miremos" el cono desde el punto I. Ante todo, veremos la sombra C del punto S, luego nuestra mirada va a deslizarse hacia

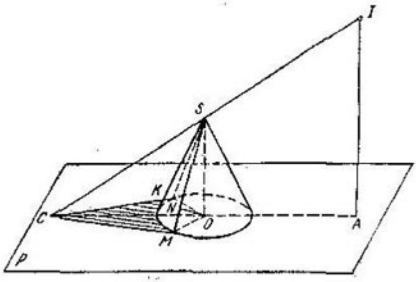

Fig. 131

abajo, vamos a suponer que por el lado izquierdo del cono, mientras que los puntos correspondientes en el plano se moverán, evidentemente, por cierta recta CM. No es difícil entender que la recta CM pasará por la base del cono, de lo contrario esto significaría que nuestra mirada se apartó del cono y no intersecará la base, ya que esto significaría que miramos a través del cono. Por consiguiente, CM es la tangente a la circunferencia de la base del cono. De este modo la sombra queda completamente determinada, es una figura curvilínea CKM, donde CK es la segunda tangente a la circunferencia de la base del cono.

Nos queda por ... demostrar esta afirmación de modo estricto. En la demostración son inadmisibles las expresiones del tipo "la mirada va a deslizarse": ya han desempeñado su papel dándonos la posibilidad de "ver" la sombra.

Para la demostración señalemos ante todo que en el caso que el segmento ON se ha trazado perpendicularmente a la generatriz SM, el plano que pasa por SM perpendicularmente a ON, no tiene puntos comunes con el cono salvo los que se encuentran en SM. (Esta afirmación es muy sencilla y puede demostrarse por el lector). Por lo tanto, ninguna recta de este plano puede tener más de un punto común con el cono.

Construimos ahora los vértices: sabiendo que $SO \parallel IA$, por estas rectas puede trazarse un plano vertical, y la sombra C del vértice S es el punto de intersección de las rectas IS y AO que se encuentran en este plano. Desde el punto C tracemos las tangentes CK y CM a la circunferencia de la base del cono. En este caso $CM \perp MO$, $CM \perp SO$ y, por consiguiente, la recta CM es perpendicular al plano SOM. Por eso $CM \perp ON$. Pero según la construcción, ON es perpendicular a SM y es, por lo tanto, perpendicular al plano CSM. Así, CSM es precisamente el plano de que se trataba al principio de la demostración. Pero en tal caso cualquier rayo que salga del punto I dispuesto en este plano, tiene exactamente un punto común con el cono (si, por supuesto, no es paralelo a SM, pero no nos interesa tal rayo) y, por consiguiente, el límite de la sombra se determina por estos rayos, y es la línea de intersección del plano CSM con el plano P, es decir, coincide con la tangente CM. De esta manera la afirmación necesaria queda demostrada.

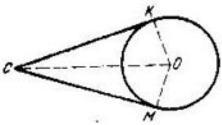

Fig. 132

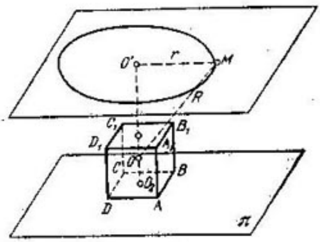

Fig. 133

Así, pues, nuestro problema se redujo al problema planimétrico: hallar el área de la figura CKM (fig. 132); tenemos que hallar además la distancia CO, pero ésta se determina fácilmente de acuerdo con la semejanza de los triángulos SCO e ICA. El problema ya no es difícil; el área buscada es igual a $(3\sqrt{3}-\pi)/3\text{m}^2$.

Cabe señalar que algunos estudiantes afirman que los puntos límites K y M de la sombra son los extremos del diámetro que es perpendicular a la recta AO. Los autores de esta resolución no se preocupan incluso del hecho de que las tangentes en los extremos del diámetro serían paralelas y, por consiguiente, no podrían pasar por el punto C.

6. *En el punto M, dispuesto a la distancia $2h$ del plano de la base del cubo de arista h y a la distancia R ($R > 3h$) del centro del cubo, se ha situado una fuente de luz. Demostrar que la sombra producida por el cubo sobre el plano de la base tiene el área máxima cuando el plano que pasa*

por el centro del cubo, el punto M, y por uno de los vértices, es perpendicular al plano de la base.

Sea tal el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 133) que las aristas AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 son perpendiculares al plano π de la base $ABCD$ y el punto O es el centro del cubo. En este caso es fácil imaginarse que todos los puntos M que satisfagan los datos del problema se encuentran a lo largo de la circunferencia dispuesta en un plano paralelo al plano π que dista de éste a $2h$. El centro de la circunferencia se halla en la perpendicular OO' al plano π; el radio r de la circunferencia puede calcularse fácilmente:

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{3}{2}h\right)^2} > \frac{3\sqrt{3}}{2}h. \tag{1}$$

Está claro que, al igual que en el problema anterior, si desde el punto M trazamos rectas para unirlo con todos los puntos del cubo, los puntos de intersección de estas rectas con el plano π son los que nos dan la sombra producida por el cubo. Aquí, para hacer más cómodos los cálculos, en la sombra incluímos también el cuadrado $ABCD$ dispuesto en la base.

Es obvio que para la construcción práctica de la sombra es suficiente trazar las rectas que unen el punto M con los vértices del cubo; hallando los puntos de su intersección con el plano π y uniendo estos puntos con rectas, obtendremos los contornos de la sombra.

Al proyectar la circunferencia en que se sitúa el punto M, y el cubo sobre el plano π, obtendremos (fig. 134) una circunferencia del radio r dentro de la cual se encuentra el cuadrado $ABCD$ con el lado h.

Tomemos un punto arbitrario K en el plano π y un punto K_1 en la perpendicular al plano π trazada desde el punto K a la distancia h por encima del plano π. Con esto es fácil demostrar que siendo K_2 el punto de intersección de la recta MK_1 con el plano π, será $M_1K_2 = 2KM_1$ (fig. 135). Después de unir con rectas los puntos A_1, B_1, C_1, D_1 con el punto M y designar por A_2, B_2, C_2, D_2 los puntos de intersección de estas rectas con el plano π, obtendremos las igualdades $A_2M_1 = 2AM_1$, $B_2M_1 = 2BM_1$, $C_2M_1 = 2CM_1$, $D_2M = 2DM_1$.

De los razonamientos anteriores es evidente el modo de cómo debe construirse la sombra, y ahora podemos pasar del problema espacial a la planimétrica. Es más (fig. 134), a causa de la simetría resulta suficiente analizar las sombras sólo en el caso en que el punto M_1 se encuentra en el arco LN ($O_2N \perp AB$ y los puntos O_2, A, L se disponen en una misma recta).

Al examinar las sombras en diferentes posiciones del punto M_1 sobre el arco LN, nos convencemos de que el punto P del arco (P se sitúa en la recta DA) desempeña un papel particular. Por esta razón, en lo ulterior, tendremos que analizar dos casos: a) cuando el punto M_1 se halla en el arco PN, b) cuando el punto M_1 se halla en el arco PL.

a) Supongamos que el punto M_1 se sitúa en el arco PN (fig. 134).

Aclaremos, en qué posición del punto M_1 la sombra será máxima En caso de no coincidir M_1 con el punto P, servirá de sombra el hexágono $AA_2D_2C_2B_2B$ (fig. 136) en el cual, como se ve fácilmente, los lados $B_2C_2 = A_2D_2 = C_2D_2 = 2h$ y, además, $A_2D_2 \parallel AD$, $B_2C_2 \parallel BC$, $D_2C_2 \parallel DC$. Uniendo los puntos A_2 y B_2 obtendremos que la sombra en cuestión consta del cuadrado $A_2B_2C_2D_2$ con el lado $2h$, del trapecio AA_2B_2B con las bases h y $2h$ y la altura igual a la distancia entre el punto M_1 y la recta AB. Esta altura será máxima en el punto N, es decir, siendo la recta M_1O_2 perpendicular a la arista AB.

Esto significa que con el movimiento del punto M_1 por el arco NP desde N hasta P se reduce el área de la sombra y se hace mínima cuando el punto M_1 coincide con el punto P. En este caso ya servirá de sombra el pentágono $AD_2C_2B_2B$ (fig. 137), pero su área también puede ser calculada como área del cuadrado $A_2B_2C_2D_2$ con el lado $2h$ y del trapecio AA_2B_2B con las bases h y $2h$ y la altura igual a la distancia entre el punto P y la recta AB.

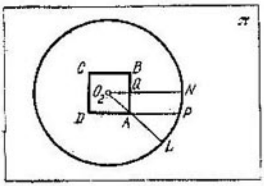

Fig. 134

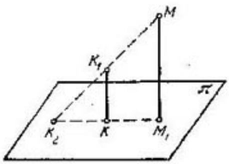

Fig. 135

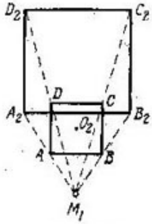

Fig. 136

b) Examinemos, de qué modo cambia el área de la sombra si el punto M_1 se mueve por el arco PL. En este caso la sombra es hexagonal, pero en forma del hexágono $ABB_2C_2D_2D$ (fig. 138). Conviene analizar esta sombra del modo siguiente: ella está compuesta por dos triángulos rectangulares (ABD con el cateto h y $B_2C_2D_2$ con el cateto $2h$) y el trapecio BB_2D_2D con las bases $h\sqrt{2}$ y $2h\sqrt{2}$ y la altura igual a la distancia entre el punto M_1 y la recta BD.

Está claro que las perpendiculares bajadas desde los puntos del arco PL a la recta BD son de distintas longitudes, y es fácil encontrar que la longitud será máxima cuando el punto M_1 coincida con el punto L.

Pues, bien, con el movimiento del punto M_1 por el arco PL desde P hasta el punto L crece la sombra y será máxima al coincidir M_1 con el punto L.

Así, pues, resultó en nuestro análisis que en el punto P el área de la sombra es mínima y en los puntos L (del arco LP) y N (del arco PN) las sombras son máximas para sus arcos. Con el fin de elegir la sombra mayor de todas las posibles es necesario comparar las áreas de estas dos sombras.

Calculemos primero el área de la sombra para el caso en que el punto M_1 coincide con el punto N. Aquí la sombra consta del cuadrado

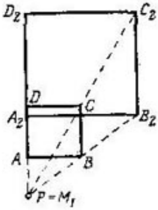

Fig. 137

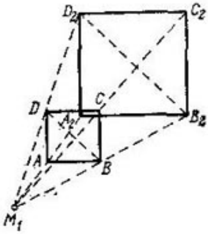

Fig. 138

$A_2B_2C_2D_2$ con el área $4h^2$ y del trapecio AA_2B_2B con el área igual a $3/2\,h\cdot NQ$. Puesto que $NQ=r-(h/2)$, el área de la sombra en este caso es igual a $(13h^2+6hr)/4$.

En el caso en que el punto M_1 coincide con el punto L, la sombra consta del triángulo ABD con el área $1/2\,h^2$, del triángulo $B_2C_2D_2$ con el área $2h^2$ y del trapecio BB_2D_2D con el área $1/2\,(BD+B_2D_2)\,LO_2$. Puesto que $LO_2=r$, $BD=h\sqrt{2}$ y $B_2D_2=2h\sqrt{2}$, el área de la sombra en este caso es igual a $1/2\,(5h^2+3\sqrt{2}hr)$.

La desigualdad

$$\frac{5}{2}h^2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\,hr>\frac{13}{4}h^2+\frac{3}{2}hr \tag{2}$$

es válida, si es válida la desigualdad equivalente $r>(\sqrt{2}+1)\,h/2$. Esta última desigualdad se cumple gracias a (1), por eso se cumple también la desigualdad (2).

Esto significa que el área de la sombra es máxima al coincidir el punto M_1 con el punto L. Para completar la demostración, queda por señalar que el punto L, el centro del cubo O y el vértice A se sitúan en el plano que es perpendicular al plano de la base.

Así, pues, para resolver este problema hemos necesitado seis dibujos, y no uno, como suele tener lugar. Naturalmente, podríamos limitarnos a un menor número de dibujos, pero es mucho mejor tener un debujo para cada etapa de la resolución, ya que el dibujo principal puede "sobresaturarse" de las líneas necesarias y hacerse ilegible.

EJERCICIOS:

1. Se dan tres rectas que se cruzan en pares y no son paralelas a un plano. Demostrar que existe un paralelepípedo en que las diagonales de sus tres caras se cruzan y se sitúan en las rectas dadas.

2. Se sabe que en el paralelepípedo rectangular el cuadrado de la diagonal equivale a la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones. ¿Es válido el teorema inverso?

3. Como se sabe, en cualquier triángulo la base, de por lo menos de una altura, se encuentra en el propio lado y no en su prolongación. ¿Sería cierta la afirmación de que en cualquier pirámide de base triangular la base, de por lo menos de una altura, se encuentra en la propia cara y no en su prolongación?

4. ¿Se puede cortar cualquier ángulo tetraédrico por un plano de tal modo que en la sección se forme un paralelogramo?

5. ¿Es posible construir en una pirámide de base triangular un plano secante que corte cinco aristas de la pirámide?

6. Enumerar las figuras posibles que se forman como resultado del corte de un tetraedro regular por un plano.

7. ¿Es posible cortar cualquier pirámide regular de base triangular por un plano de modo que en la sección se obtenga: a) un paralelogramo? b) un rombo? c) un rectángulo?

8. Determinar la forma de la proyección de un tetraedro regular sobre un plano paralelo a sus dos aristas no contiguas.

9. Hallar la sombra del cubo sobre un plano perpendicular a su diagonal; el haz de rayos está dirigido paralelamente a la diagonal.

10. ¿Es posible practicar un orificio en un cubo de madera de tal modo que a través de éste pase otro cubo de madera, igual al primero?

11. Meter un cuadrado con el lado a dentro de un triángulo equilátero de dimensiones mínimas. Hallar el lado de este triángulo.

12. Colocar dentro de un cuadrado con el lado a un triángulo equilátero de dimensiones máximas posibles. Hallar el lado de este triángulo.

13. Colocar dentro de un hexágono regular con el lado a un cuadrado de dimensiones máximas posibles. Hallar el lado de este cuadrado.

14. Meter dentro de un cuadrado con el lado a un hexágono regular de dimensiones máximas posibles. Hallar el lado del hexágono.

15. ¿Es posible cortar un cubo por medio de un plano de tal manera que en la sección se obtenga: a) un cuadrado? b) un pentágono? c) un hexágono? d) un hexágono regular?

16. En un tetraedro regular cuya arista es igual a 1, está inscrita una semiesfera de tal modo que tres caras del tetraedro son tangentes a su superficie esférica y la cuarta cara le sirve del plano diametral. Determinar la superficie total de la semiesfera.

17. En una pirámide de base triangular, dos caras son triángulos isósceles rectángulos que son adyacentes uno a otro por medio de las hipotenusas y forman un ángulo diedro α. Determinar el ángulo diedro en esta pirámide, cuya arista es el cateto de un triángulo rectángulo.

18. El lado (la arista) de un tetraedro regular es a. Determinar el radio de la esfera que es tangente a las aristas laterales del tetraedro en los vértices de la base.

19. El radio de la esfera es igual a R. Desde el punto A separado del centro de la esfera a la distancia l se han trazado n tangentes a la esfera de tal manera que todos los ángulos planos del ángulo poliédro del vértice A son iguales entre sí. Determinar la distancia entre los puntos de tangencia de los dos rayos adyacentes y el ángulo entre estos rayos.

20. Se sabe que dos generatrices recíprocamente perpendiculares de un cono circular recto dividen la circunferencia de la base en dos arcos, uno de los cuales es dos veces más corto que el otro. Hallar el volumen del cono si su altura es igual a h.

21. La arista del cubo es igual a a. La esfera con el centro O interseca tres aristas que convergen en el vértice A, en sus puntos medios. Desde el punto B de la intersección de la esfera con una de las aristas del cubo se ha bajado una perpendicular a la diagonal del cubo que atraviesa el vértice A, dividiéndose en dos partes iguales el ángulo entre esta perpendicular y el radio OB por medio de la arista del cubo. Hallar el radio de la esfera.

22. El punto medio de la altura del cono recto con la generatriz l y el ángulo α del vértice se toma por el centro de la esfera que pasa por el vértice. Determinar el radio de la esfera obtenida como resultado de la intersección de las superficies del cono y de la esfera.

23. Las aristas de una pirámide de base triangular que salen del vértice O son perpendiculares en pares y sus longitudes son iguales a a, b, c. Hallar el volumen del cubo inscrito en esta pirámide de tal modo que uno de sus vértices coincide con el vértice O.

24. Una pirámide regular, cuya base es un cuadrado con el lado a, gira alrededor de una recta que pasa por el vértice de la pirámide en paralelo a uno de los lados de la base. Calcular el volúmen del cuerpo de giro si el ángulo plano al vértice de la pirámide es igual a α.

25. Tres esferas son tangentes al plano del triángulo ABC en sus vértices y en pares una a otra. Hallar los radios de las esferas si se conocen la longitud c del lado AB y los ángulos A y B contiguos a éste.

26. Se da el triángulo isósceles ABC, $AB = AC = b$, y el ángulo $BAC = \alpha$. El triángulo gira alrededor del eje que pasa por el vértice A de tal manera que el ángulo entre el eje y el plano del triángulo es igual a β, mientras que la base del triángulo es perpendicular al eje. Calcular el volumen del cuerpo obtenido en el giro del triángulo ABC.

27. Dos conos iguales tienen un vértice común y son tangentes por la generatriz común. El ángulo de la sección axial del cono es igual a 2α. Hallar el ángulo diedro entre los dos planos, cada uno de los cuales es tangente a los dos conos, pero no pasa por su generatriz común.

28. Se da el ángulo α ($\alpha < \pi/2$) de la sección axial de un cono circular recto con el vértice S y generatriz de longitud l. Por el punto A de la base de un cono se ha trazado el plano P que es perpendicular a la generatriz SA. Por el vértice del cono se ha trazado el plano Q. Este plano es perpendicular al plano de la sección axial del cono que pasa por SA y forma junto con la generatriz SA del cono el ángulo β ($\beta < \alpha/2$). El plano Q corta el cono a lo largo de dos generatrices. Supongamos que las prolongaciones de las generatrices intersecan el plano P en dos puntos: C_1 y C_2. Hallar la longitud del segmento C_1C_2.

29. Una esfera es tangente a todas las aristas laterales de un prisma hexagonal recto y regular, cuyas bases se encuentran fuera de la esfera. Hallar la relación entre aquella parte del área de la superficie lateral del prisma, que está comprendida dentro de la esfera y la parte de la superficie de la esfera que se encuentra fuera del prisma.

§ 7. SECCIONES DE POLIEDROS

A los estudiantes se proponen con frecuencia problemas de Geometría, en los cuales se traza cierto plano de sección de un poliedro dado y se requiere calcular, por ejemplo, el área del corte o la relación en que el plano secante divide el volumen del poliedro.

Cada uno de estos problemas consta de dos partes: la construcción de la sección y el cálculo de lo que se requiere en el problema, representándose cada una cierta dificultad.

Es natural que sin resolver la primera parte del problema no se puede tratar de la resolución de la otra. Habitualmente, en los problemas para la sección, después de realizar las consideraciones geométricas relacionadas con la construcción de la sección, éstos se simplifican mucho. Así, "el centro de gravedad" de los problemas de sección no radica en las afirmaciones trigonométricas ni en la solución de los triángulos, sino en la Geometría en el sentido directo de la palabra.

Los exámenes muestran que los estudiantes suelen indicar correctamente la forma de la sección y cumplen bien los cálculos ulteriores. Sin embargo no todos pueden argumentar de modo convincente el aspecto geométrico de la solución, e incluso muchos estudiantes no tratan de realizar las demostraciones correspondientes considerando que todo ya está claro. Naturalmente, en tales casos el problema no se considera resuelto. Por esta razón cabe subrayar aquí una vez más que al resolver un problema deben argumentarse obligatoriamente todas las afirmaciones, incluso las que parecen "evidentes".

Indiquemos un método, bastante general, de la construcción de secciones de poliedros. Construir una sección significa indicar los puntos de intersección del plano secante con las aristas del poliedro (estos puntos, en particular, pueden ser también los vértices del poliedro) y unir estos puntos por medio de segmentos dispuestos en las caras. Con este fin es suficiente, en el plano de la cara del poliedro, indicar dos puntos que pertenecen a la sección, unirlos por medio de una recta y hallar los puntos de intersección de esta recta con las aristas del poliedro.

Esta construcción es muy natural, sin embargo, es poco usada por los estudiantes. Esto se debe a que suele ser difícil encontrar dos puntos de la sección situados en la propia cara. No obstante, nos satisfacerían por completo dos puntos de la sección ubicados en *el plano* de la cara (y no obligatoriamente en la propia cara), lo que se obtiene con frecuencia de una manera simple. El asunto consiste en que con este fin, por regla general, se tiene que salir de los límites del poliedro en consideración. Pero por una u otra razón los estudiantes no se atreven a cumplir construcciones complementarias fuera del poliedro.

Sin embargo, en una serie de problemas estas construcciones complementarias resultan inevitables. Además, estas construcciones permiten realizar, con bastante facilidad, las demostraciones y cálculos necesarios.

Ilustremos por medio de problemas concretos, de qué modo se aplica este método de construcción de las secciones.

1. *Se da un cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en el cual AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 son las aristas laterales. Hallar el área de la sección del cubo por el plano que pasa por el vértice A y los puntos medios de las aristas B_1C_1 y C_1D_1. La arista del cubo es igual a* 1.

Antes que nada es preciso construir la sección. Sean K y L los puntos medios de las aristas D_1C_1 y B_1C_1 (fig. 139). La recta KL se sitúa en el plano de la cara $A_1B_1C_1D_1$, por eso interseca las prolongaciones de las aristas A_1B_1 y A_1D_1 en los puntos F y E. Es fácil calcular que $B_1F = 1/2\,A_1B_1 = 1/3\,A_1F$ y $D_1F = 1/2\,A_1D_1 = 1/3\,A_1E$.

Los puntos A y F se encuentran en el plano de la cara AA_1B_1B, por esta razón la recta AF interseca la arista BB_1 en cierto punto M. Analizando los triángulos AA_1F y MB_1F nos convencemos de que son semejantes. De su semejanza se deduce que $MB_1 = 1/3\,AA_1$. Teniendo en cuenta que $AA_1 = BB_1$, obtenemos definitivamente que el punto M divide la arista BB_1 en la relación de $2:1$.

Los puntos A y E se sitúan en el plano de la cara ADD_1A_1, por eso la recta AE interseca la arista DD_1 en el punto N. De modo análogo al anterior puede demostrarse que el punto N divide la arista DD_1 en la relación de $2:1$.

Así, la sección queda construida: ésta pasa por el vértice A, los puntos medios de las aristas B_1C_1 y C_1D_1 y por los puntos que dividen las aristas BB_1 y DD_1 en la relación de $2:1$; la sección es un pentágono $AMLKN$.

Calculemos su área. Nuestro pentágono se produce del triángulo AEF, separando de éste dos triángulos iguales EKN y FLM. Por me-

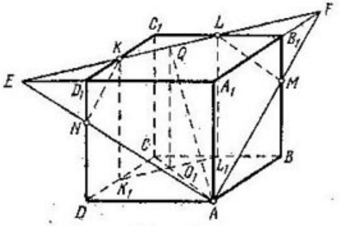

Fig. 139

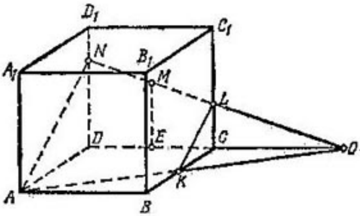

Fig. 140

dio de la construcción efectuada es fácil obtener las longitudes de los lados de estos triángulos y calcular sus áreas; la respuesta definitiva es la siguiente: el área de la sección es igual a $7\sqrt{17}/24$.

Se puede proceder de otro modo, considerando el pentágono $AMLKN$ como formado del triángulo AMN y del cuadrilátero $KLMN$. En este caso habrá que demostrar complementariamente que $KLMN$ es un trapecio.

Ambos métodos mencionados requieren cálculos considerables que no son muy difíciles. En efecto, se pueden evitar los cálculos voluminosos si se hace uso de la fórmula para el área de la proyección (véase § 4, Parte III). Por lo visto, la proyección del pentágono $AMLKN$ sobre la base inferior del cubo será el pentágono ABL_1K_1D cuya área es igual a $7/8$ y, valiéndonos del triángulo AQQ_1 es fácil encontrar que $\cos(\angle QAQ_1) = 3/\sqrt{17}$. No obstante nos queda lo principal: es necesario demostrar que $\angle QAQ_1$ es precisamente el ángulo entre el plano de la sección y la cara inferior del cubo.

2. *Se da un cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en el cual AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 son las aristas laterales. ¿En qué relación se divide el volumen del cubo por el plano que pasa por el vértice A, el punto medio de la arista BC y el centro de la cara DCC_1D_1?*

Sea K el punto medio de la arista BC (fig. 140). Merced a que los puntos A y K se sitúan en el plano de la cara inferior, la recta AK intersecará la prolongación de la arista DC en cierto punto O. Al analizar los triángulos ABK y KCO podemos ver que son iguales y, por eso, $CO = AB = DC$ y $DO = 2DC$.

Sea el punto M el centro de la cara DCC_1D_1. Los puntos M y O se encuentran en el plano de la cara DCC_1D_1, por eso la recta MO interseca las aristas C_1C y D_1D en los puntos L y N. De este modo, la forma de la sección queda encontrada, es el cuadrilátero $AKLN$.

Bajando una perpendicular desde el punto M a la recta DC, obtenemos que su base, el punto E, es el punto medio de la arista DC. Examinemos los triángulos DNO, EMO y CLO. De la semejanza de dichos triángulos se deduce que $CL = 2/3\ ME$ y $DN = 4/3\ ME$. Tomando en consideración que $ME = 1/2\ CC_1 = 1/2\ DD_1$, obtenemos $DN = 2/3\ DD_1$ y $CL = 1/3\ CC_1$.

Así es cómo se han determinado las posiciones de todos los puntos de intersección del plano de sección con las aristas del cubo.

Ahora aclaremos, en qué relación el plano de la sección ha dividido el volumen del cubo. Designando por a la longitud de la arista del cubo, calculemos el volumen del poliedro, es decir, la parte del cubo bajo el plano secante.

Este poliedro, como puede notarse, se obtiene de la pirámide de base triangular $NADO$ (con el vértice N) al separar la pirámide $LKCO$ (con el vértice L). Los volúmenes de estas pirámides se determinan fácilmente, puesto que ND y LC son sus alturas ya calculadas. Como resultado obtenemos que el volumen del poliedro $ADCKNL$ es igual a $7a^3/36$ y por eso el plano secante divide el volumen del cubo en la relación de $7 : 29$.

Los estudiantes, en su mayor parte, construían la sección de otro modo, basándose en la imaginación intuitiva, puramente geométrica. Al hacerlo, ponían al azar los puntos N y L sobre las aristas correspondientes.

Aquellos que poseían buena imaginación geométrica y se dieron cuenta de que el punto L se encuentra más bajo que el punto medio de la arista CC_1, pudieron construir un dibujo correcto y revelar (y después, claro está, demostrar) que la parte del cubo dispuesta por debajo del plano de la sección es una pirámide truncada "acostada" con las bases AND y KLC. Otros estudiantes, fijando el punto L superior al punto medio de la arista CC_1 obtuvieron un dibujo desfigurado y, naturalmente, no pudieron ni empezar los cálculos.

Al mismo tiempo, el método "estandartizado" propuesto más arriba nos permitió construir automáticamente la sección necesaria, indicar la posición de los puntos de intersección del plano secante con las aristas del cubo y cumplir con facilidad los cálculos necesarios.

3. *Se da una pirámide regular SABCD de base cuadrangular de vértice S. Por los puntos medios de las aristas AB, AD y CS se ha trazado un plano. ¿En qué relación el plano divide el volumen de la pirámide?*

Sean K y F los puntos medios de las aristas AB y AD (fig. 141). Uniéndolos con una recta obtenemos que ésta intersecará las prolongaciones de las aristas CB y CD en los puntos M y E. Comparando los triángulos BKM, AKF y DEF obtenemos que $MB = 1/2\ BC$ y $ED = 1/2\ DC$.

Sea N el punto medio de la arista CS. Los puntos N y M se sitúan en el plano de la arista SBC, por eso la recta MN interseca la arista BS en cierto punto L.

Aclaremos ahora, en qué relación el punto L divide la arista SB. Para hacer más cómodos los cálculos, conviene construir un dibujo planimétrico auxiliar trazando el plano de la cara SBC en la fig. 142.

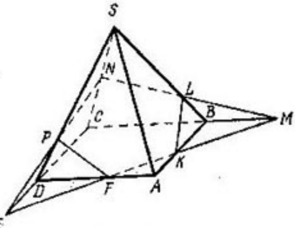

Fig. 141

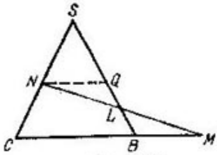

Fig. 142

Trazando la línea media NQ en el triángulo CBS, obtendremos dos triángulos iguales NQL y LBM, de los cuales encontramos que $BL = 1/2\ BQ = 1/4\ BS$.

De modo absolutamente análogo se demuestra que $DP = 1/4\ SD$, donde P es el punto de intersección de la recta EN con la arista SD.

Así, hemos construido nuestra sección. Resultó que el plano de la sección interseca la pirámide formando el pentágono $LKFPN$.

Este plano divide la pirámide en dos poliedros tales que es imposible calcular directamente sus volúmenes. Para calcular el volumen de uno de los poliedros, por lo menos, se necesita cumplir construcciones complementarias y analizar varias pirámides.

Sin embargo, se puede ver en la fig. 141 que el volumen del poliedro $CDFKBLNP$ dispuesto debajo del plano secante es igual al volumen de la pirámide de base triangular $NECM$ sin el volumen de dos pirámides de base triangular $LKBM$ y $PEDF$. Calculemos ahora el volumen de estas pirámides.

Supongamos que la altura de la pirámide $SABCD$ es igual a H y la arista de la base equivale a a; en este caso su volumen $V = 1/3\ a^2H$. Por ser N el punto medio de la arista CS, la perpendicular bajada desde este punto al plano $ABCD$ es igual a $1/2\ H$. Es también fácil demostrar que las perpendiculares bajadas desde los puntos L y P al plano $ABCD$ son iguales a $1/4\ H$. Las áreas de las bases de las pirámides en cuestión se calculan con facilidad: son iguales respectivamente a $9\ a^2/8$, $a^2/8$ y $a^2/8$. El volumen de nuestro poliedro $CDFKBLNP$ es igual a

$$V_1 = \frac{9}{48}a^2H - 2\cdot\frac{a^2H}{96} = \frac{V}{2}.$$

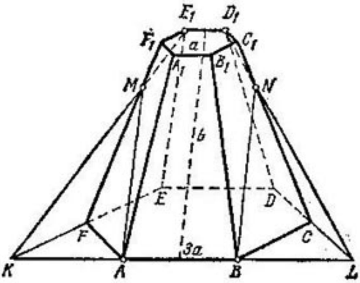

Fig. 143

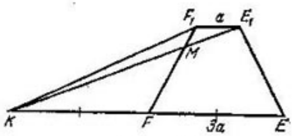

Fig. 144

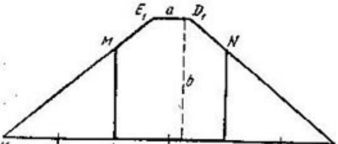

Fig. 145

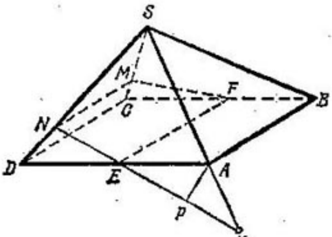

Fig. 146

Esto significa que el plano secante divide el volumen de la pirámide en la relación de 1 : 1.

La determinación de la forma de la sección en este problema puede obtenerse de modo bastante simple, sin aplicar el método en consideración, puesto que está absolutamente claro que en la sección resulta un pentágono $NLKFP$. Sin embargo, sin salir de los límites de la pirámide, no habríamos podido encontrar un método fino del cálculo del volumen del poliedro que se sitúa debajo del plano secante.

Muchos estudiantes trataron de hallar el volumen dividiendo el poliedro $CDFKBLNP$ en pirámides. Pero este método requiere, ante todo, una imaginación geométrica excelente, mucho más desarrollada, que para el cumplimiento de nuestra solución. Además, este método implica cálculos muy voluminosos, mientras que en la solución ilustrada éstos son insignificantes.

4. *Los lados de las bases de una pirámide regular truncada de base hexagonal son a y $3a$. La distancia entre dos aristas paralelas situadas en los planos de distintas bases y en distintas caras laterales es igual a b. Calcular el área de la sección de la pirámide por un plano que pasa por las aristas paralelas mencionadas.*

Tracemos un plano secante por las aristas AB y D_1E_1 (fig. 143). Con el fin de construir la sección, encontremos los puntos K y L en que la recta AB se interseca con las prolongaciones de las aristas EF y DC. Como los puntos K y E_1 se sitúan en el plano de la cara lateral EFF_1E_1, la recta KE_1 cortará la arista FF_1 en cierto punto M. La recta LD_1 se sitúa en el plano de la cara lateral CDD_1C_1 e interseca la arista CC_1 en cierto punto N.

Así, la forma de la sección ha sido hallada: es el hexágono $ABND_1E_1M$.

Señalemos para los cálculos ulteriores que los triángulos AKF y BLC son equiláteros, con el lado igual a $3a$. De aquí se deduce, en particular, que $KF = LC = 3a$.

Con el fin de facilitar los cálculos, conviene levantar dibujos planimétricos auxiliares. Trazando el plano de la cara EE_1F_1F en la fig. 144 y comparando los triángulos semejantes ME_1F_1 y MKF, determinamos que el punto M divide la arista F_1F en la relación de $1:3$. De modo análogo se puede mostrar que el punto N divide la arista C_1C también en la relación de $1:3$. De aquí se deduce, además, que $E_1M : MK = 1:3$ y $D_1N : NL = 1:3$.

Dibujemos aparte el plano de la sección en la fig. 145. El hexágono en cuestión $ABND_1E_1M$ se obtiene del trapecio KLD_1E_1 por medio de la separación de dos triángulos iguales KAM y LBN. Puesto que $KL = 9a$, $E_1D_1 = a$ y la altura del trapecio, el decir, la distancia entre las rectas AB y E_1D_1 es igual a b, en este caso el área del trapecio equivale a $5\,ab$. Gracias a que el punto M divide el segmento E_1K en la relación de $1:3$, la altura del triángulo KMA bajada desde el punto M a la AK[1], es igual a $3/4\,b$. Por esto el área del triángulo AKM equivale a $9ab/8$.

Ahora se calcula fácilmente el área de la sección: es igual a $11\,ab/4$.

Existen problemas en los cuales el plano secante se da por tres puntos dispuestos en las aristas (o en sus prolongaciones) del poliedro

[1] Señalemos de paso que MA y NB son perpendiculares a KL.

en consideración y, no obstante, la ejecución formal del método descrito arriba de la construcción de la sección no conduce al resultado.

Esto tiene lugar en los problemas en que la recta que une los dos puntos dados de la sección resulta ser paralela a la arista del poliedro.

En tales casos conviene aprovechar el teorema de que si dos planos son paralelos a una recta, la línea de su intersección es también paralela a esta recta.

5. *En la pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ todas las caras laterales son triángulos equiláteros con el lado igual a* 1 m. *En la prolongación de la arista AS se toma el punto K por el punto A de tal modo que $AK = 1/2$* m. *Un plano está trazado por el punto K y puntos medios de las aristas BC y AD. Hallar el área de la sección formada.*

Supongamos que E es el punto medio de la arista AD y F es el punto medio de la arista BC (fig. 146). Por encontrarse los puntos K y E en el plano de la cara ADS, la recta KE interseca la arista DS en el punto N. Al trazar una recta $AP \parallel DS$ y analizar los triángulos semejantes KAP y KSM hallaremos que $AP = 1/3\ SN$. Pero tomando en consideración que $AP = DN$ obtenemos que el punto N divide la arista SD en la relación de $3:1$.

Ahora se necesita encontrar un punto más (además del punto dado F) en cualquier cara lateral. Sin embargo, esto se puede efectuar solamente aplicando el teorema recién formulado. En efecto, puesto que $EF \parallel CD$, el plano de la sección es paralelo a la arista CD y, teniendo

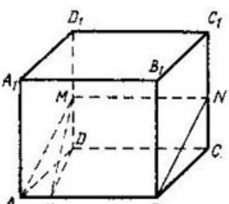

Fig. 147

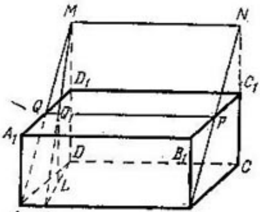

Fig. 148

en cuenta que la arista CD se halla en la cara CDS, obtenemos que el plano de la sección corta la CDS, por la recta MN que es paralela a la arista CD.

Así, pues, la sección está construida: ésta es el trapecio $EFMN$. Calculemos ahora su área. Como $SN = 3/4\ DS$ y $\triangle DSC \backsim \triangle MNS$, en este caso $SN = 3/4$ m. Analizando el $\triangle DNE$ y aplicando el teorema de los cosenos hallamos que $NE = \sqrt{3}/4$ m. De modo análogo hallamos que $FM = \sqrt{3}/4$ m. Aquí están todos los lados del trapecio $EFMN$, y su área será: $7\sqrt{11}/64$ m².

6. *La altura de un prisma recto es 1, su base es un rombo de lado 2 y ángulo agudo de 30°. Por un lado de la base se ha trazado un plano que corta el prisma y está inclinado a 60° respecto de la base. Hallar el área de la sección.*

También en este problema, para construir la sección, debe recurrirse al teorema de la intersección de los planos paralelos a una recta. Algunos estudiantes ofrecen "la solución" siguiente: "Supongamos que el plano secante pasa por la arista AB del prisma $ABCDA_1B_1C_1D_1$, entonces interseca el plano de la cara DCC_1D_1 por la recta MN (fig.147). Bajando desde el punto M una perpendicular a la AB, obtenemos los triángulos rectángulos ADK y MKD, ya que de acuerdo con el teorema de las tres perpendiculares $KD \perp AB$. Valiéndonos del $\triangle ADK$ se obtiene: $DK = 1$. Puesto que $AB \perp KD$ y $AB \perp KM$, el ángulo MKD es lineal del ángulo diedro entre el plano de la base y el plano secante, es decir, $\angle MKD = 60°$. En el $\triangle MKD$ hallamos que $MK = 2$. Por ser MK la altura del paralelogramo $AMNB$, el área de éste es igual a 4. Esto significa que el área de la sección es igual a 4".

En esta solución todo es correcto, salvo la última frase de que la sección es el paralelogramo $AMNB$. En realidad, en la resolución recién cumplida la sección no fue construida ya que para hacerlo es necesario saber la posición exacta de los puntos M y N en las aristas DD_1 y CC_1, lo que no fue hecho. Por esto, para resolver correctamente este problema, lo primero que hay que hacer es determinar la posición del punto M. Efectuando los mismos razonamientos que en la solución anterior, encontramos de acuerdo con el $\triangle KMD$ que $MD = \sqrt{3}$. Resulta que la longitud del segmento MD es mayor que la de la arista DD_1, es decir, resulta que la fig. 147 contiene un error y es necesario trazar otro dibujo donde el punto M se sitúe por encima del punto D_1 (fig. 148)[1]. Uniendo los puntos A y M, B y N, obtenemos que el plano secante corta también la cara $A_1B_1C_1D_1$ por la recta $QP \parallel AB$. Esto significa que la sección es el paralelogramo $ABPQ$. Hallemos su altura. Con este fin tracemos $MK \perp AB$ y desde el punto Q_1 (intersección de las rectas MK y QP) bajemos una perpendicular a KD. Valiéndonos del triángulo rectángulo Q_1KL, en que $LQ_1 = 1$ y $\angle Q_1KL = 60°$ se obtiene que $KQ_1 = 2/\sqrt{3}$. Ahora se calcula fácilmente el área incógnita de la sección: ésta es igual a $4/\sqrt{3}$

En los problemas anteriores teníamos siempre, en el plano de por lo menos una cara del poliedro, dos puntos de la sección buscada. Conociéndolos, encontrábamos uno o dos puntos más que se hallan en las aristas y, por lo tanto, en otras caras. Ahora en el plano de la cara nueva también tenemos dos puntos de la sección, etc.

[1] Puesto que para la determinación de la longitud del segmento MD no hemos utilizado la condición de que si el punto M se sitúa por encima o por debajo del punto D_1, se puede calcular la longitud del segmento MD utilizando cualquiera de las dos figuras, 147 ó 148.

Sin embargo, esto tiene lugar no en todos los problemas; con frecuencia uno de los puntos que determinan la sección se encuentra dentro del poliedro o todos los puntos se dan en diferentes caras. Para resolver los problemas de este tipo hay que trazar construcciones complementarias. Por lo común, en estos casos se traza un plano auxiliar que contenga una recta del plano de la sección y una recta dispuesta en el plano de una de las caras del poliedro. En el plano auxiliar construido se busca el punto de intersección de dichas rectas y de este modo se halla un punto más de la sección, dispuesto ya en el plano de la cara. La construcción ulterior se efectúa de acuerdo con el esquema descrito arriba.

7. *Se da el cubo* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en que AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *son las aristas laterales. ¿En qué relación se divide la arista* B_1C_1 *por el punto* E *que pertenece al plano que pasa por el vértice* A *y los centros de las caras* $A_1B_1C_1D_1$ *y* B_1C_1CB?

En este problema ninguno de los tres puntos de la sección se encuentra en una cara del cubo.

Supongamos que los puntos S y R son los centros de las caras BCC_1B_1 y $A_1B_1C_1D_1$ (fig. 149). Tracemos por estos dos puntos el plano α, perpendicular a la arista B_1C_1. Es obvio que el plano corta el cubo formando el cuadrado $NLMQ$, cuyos vértices son los puntos medios de las aristas correspondientes del cubo.

Como los puntos R y S se sitúan en este plano, en el mismo se halla también toda la recta RS. Mas en este caso RS intersecará la recta MQ en cierto punto O. Con esto $\triangle RNS = \triangle OQS$, de donde se deduce que el segmento OQ es igual a la mitad de la arista del cubo.

Ahora disponemos de dos puntos de la sección en el plano de la cara $ABCD$: A y O. La recta AO interseca la arista BC en cierto punto

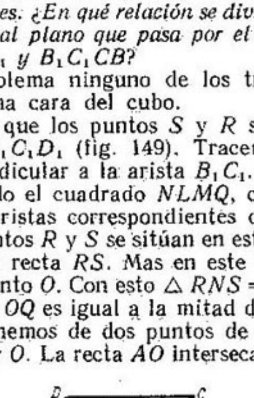

Fig. 149

K. Valiéndonos de la semejanza de los triángulos ABK y KQO se obtiene que $BK = 2QK$. Como el segmento BQ equivale a la mitad de la arista BC, de aquí hallamos que $BK = 1/3\ BC$.

La recta KS se sitúa en el plano de la cara BCC_1B_1 e interseca la arista B_1C_1 en el punto E. Precisamente, de este punto se trata en los datos del problema. Por ser S el centro del cuadrado BCC_1B_1, en este caso $EC_1 = BK = 1/3\ B_1C_1$, es decir, el punto E divide la arista B_1C_1 en la relación de $2:1$.

Muchos estudiantes resolvían este problema basándose también en la intuición puramente geométrica. Colocando al azar el punto E, de que se trata en el problema, más cerca del vértice C_1 o del vértice B_1, obtenían la fig. 150 o la 151 (el punto E no puede encontrarse exactamente en el centro del segmento B_1C_1, ya que en este caso el plano que pasa por los puntos E, S y R sería paralelo al plano de la cara ABB_1A_1 y no pasaría por el punto A).

Está claro, intuitivamente, que el cuadrángulo representado $AKEL$ en la fig. 151 no es plano, pero no es tan simple demostrar que este dibujo es imposible. Entre tanto, algunos estudiantes sólo pudieron ver el dibujo en la fig. 151 y no el de la fig. 150 y por eso no pudieron resolver el problema.

Procedamos los razonamientos observando simultáneamente los dos dibujos; esto nos facilitará resolver estrictamente el problema y al mismo tiempo permitirá convencernos de que es correcta la fig. 150.

El plano secante de que se trata en el problema, lo designemos por β, pasa por el vértice A y los centros R y S de las caras $A_1B_1C_1D_1$ y B_1C_1CB y, por consiguiente, se determina de manera unívoca. La recta l, a cuyo largo el plano β se interseca con la cara $A_1B_1C_1D_1$, no puede ser paralela a la arista A_1D_1 ya que de lo contrario el plano β no se intersecaría por la cara B_1C_1CB y por eso no podría pasar por el punto S. Por consiguiente, la recta l se interseca con la recta A_1D_1, es decir, el plano β se interseca con esta recta y, por eso, también con las rectas B_1C_1 y BC, paralelas a ésta. De este modo, el plano β interseca las aristas A_1D_1, B_1C_1 y BC del cubo (o las prolongaciones de éstas); designemos por L, E, K los puntos de intersección correspondientes.

El cuadrángulo $ALEK$ es plano (sus cuatro vértices se sitúan en el plano β); $AL \parallel KE$ y $AK \parallel LE$ como líneas de intersección del par de

Fig. 150

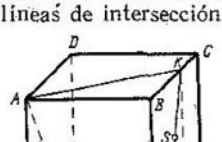

Fig. 151

planos paralelos por una tercera. Por consiguiente, $ALEK$ es un paralelogramo. De esta manera queda determinada la forma de la sección.

Tracemos $KK_1 \perp B_1C_1$ en el plano de la cara B_1C_1CB. $K_1E = A_1L$, puesto que $\triangle K_1KE = \triangle A_1AL$. Como R y S son centros de las caras, $EC_1 = BK$ y $EC_1 = A_1L$; además está claro que $BK = B_1K_1$. De aquí obtenemos que $B_1K_1 = K_1E = EC_1$.

Ahora es evidente que los puntos B_1, K_1, E y C están dispuestos precisamente del modo que se ven en la fig. 150, mientras que la fig. 151 es irreal ya que en ésta $B_1K_1 > K_1E$.

Hemos obtenido automáticamente también la solución del problema: $B_1E : EC_1 = 2$.

8. *Se da un prisma triangular regular $ABCA_1B_1C_1$ con las aristas laterales AA_1, BB_1 y CC_1. Supongamos que el punto P divide el eje OO_1 del prisma en la relación de* 5 : 1. *Por el punto P y los puntos medios de las aristas AB y A_1C_1 está trazado un plano. ¿En qué relación dicho plano divide el volumen del prisma?*

Supongamos que E y N son los puntos medios de las aristas A_1C_1 y AB (fig. 152). Con el fin de construir la sección hallemos un punto más que se encuentra en una misma cara con el punto N, por ejemplo, el punto de intersección de la recta EP con la cara ABB_1A_1. Está claro que dicha recta se encuentra, en particular, en el plano α que pasa por los puntos E, O_1 y P. En este plano se sitúa la recta EO_1 y, por consiguiente, también el punto B_1.

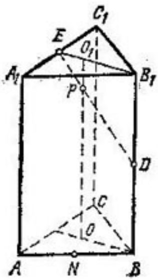

Fig. 152

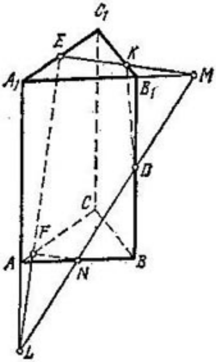

Fig. 153

Como las rectas PO_1 y BB_1 son paralelas y la recta PO_1 se encuentra en el plano α, en éste se halla también la recta BB_1. Esto quiere decir que la recta EP intersecará la arista BB_1 en cierto punto D. Como los triángulos EDB_1 y PEO_1 son semejantes y como $EO_1 = 1/3\ B_1E$, $PO_1 = 1/6\ BB_1$, obtenemos que $DB_1 = 1/2\ BB_1$. Así, pues, hemos hallado un punto más de la sección, el punto medio de la arista BB_1. Los razonamientos ulteriores son análogos a los de los problemas anteriores.

Merced a que los puntos N y D (fig. 153) se sitúan en el plano de la cara ABB_1A_1, obtendremos, trazando la recta ND, que ésta intersecará la prolongación de las aristas A_1B_1 y A_1A en los puntos M y L. En este caso es fácil demostrar que el punto L dista la mitad de la arista AA_1 del punto A y el punto M dista la mitad de la arista A_1B_1 del punto B_1.

Al unir el punto E con los puntos M y L, obtenemos los puntos K y F que determinan definitivamente la sección que se busca, el pentágono $EKDNF$.

Teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos ALF y A_1LE obtenemos que $AF = 1/6\ AC$. Con el fin de determinar B_1K se puede proceder de la misma manera que en el problema 3 y, como resultado, obtendremos que $B_1K = 1/4\ B_1C_1$. Así queda determinada completamente la posición de los puntos E, K, D, N y F.

Calculemos el volumen del poliedro A_1EKB_1DNAF designando por h la arista lateral del prisma y por s el área de su base. Dicho poliedro se obtiene de la pirámide LA_1EM (L es el vértice) separando las pirámides $LAFN$ y DB_1KM (L y D son los vértices).

Un cálculo sencillo demuestra que el volumen del poliedro en cuestión es igual a $49\ hs/144$, de donde se deduce que el plano secante divide el volumen de la pirámide en la relación de $49 : 95$.

A veces el plano de la sección se da no con tres puntos, sino con otras condiciones, por ejemplo, con un punto y la condición de que el plano secante sea paralelo a cierto plano, o con un punto y la condición de que el plano secante sea paralelo a dos rectas que se cruzan. En los problemas de este tipo deben hallarse, utilizando estas condiciones, los puntos que estén en los planos de las caras y sólo después se puede seguir con la resolución del problema, según el método corriente descrito arriba.

9. *En el paralelepípedo rectangular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ son las bases, $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) se dan las longitudes de las aristas $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Supongamos que O es el centro de la base $ABCD$, O_1 es el centro de la base $A_1B_1C_1D_1$ y S es el punto que divide el segmento O_1O en la relación de $1 : 3$, es decir, $O_1S : SO = 1 : 3$. Hallar el área de la sección del paralelepípedo por el plano que pasa por el punto S en paralelo a la diagonal AC_1 del paralelepípedo y con la diagonal BD de su base $ABCD$.*

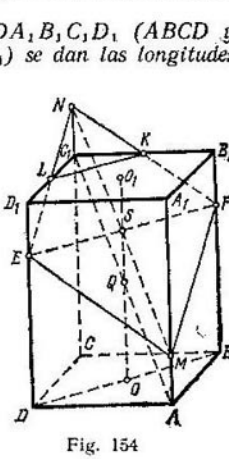

Fig. 154

Puesto que el punto S se encuentra en el plano diagonal BDD_1B_1, el plano secante que es paralelo a la diagonal BD, interseca dicho plano a lo largo de la recta EF que es paralela a BD (fig. 154). En este caso es evidente que $D_1E = 1/4\ D_1D = c/4$ y $B_1F = c/4$.

Así, al aplicar la condición del paralelismo del plano secante a la diagonal BD, hemos encontrado dos puntos de la sección que se sitúan en las aristas del paralelepípedo.

Apliquemos ahora otra condición: el paralelismo del plano secante a la diagonal AC_1. El punto S está también en el plano diagonal ACC_1A_1, por eso el plano secante interseca a este plano por la recta MN que es paralela a la diagonal AC_1. Sea Q el punto medio de la diagonal AC_1. Como la recta OO_1 se sitúa en el plano ACC_1A_1, está claro que $SQ = 1/4 \ O_1O = 1/4 \ AA_1 = c/4$. Puesto que $MN \parallel AC_1$, $AM \parallel SQ$ y $NC_1 \parallel SQ$, obtenemos que $MA = NC_1 = SQ = c/4$.

Así es como hemos encontrado cuatro puntos que pertenecen a la sección y se sitúan en las aristas del paralelepípedo o en sus prolongaciones.

Los puntos E y N están en el plano de la cara DCC_1D_1, por eso la recta EN interseca la arista D_1C_1 en cierto punto L. Como $ED_1 = NC_1$, está claro que L es el punto medio de la arista D_1C_1 y, además, $EL = LN$. De modo análogo se demuestra que la recta FN interseca la arista B_1C_1 en su punto medio (en el punto K) y que $KN = KF$.

Así, pues, la sección se ha determinado por completo: es el pentágono $MFKLE$. Para calcular su área señalemos que el pentágono se obtiene del cuadrángulo $MFNE$ mediante la separación del triángulo KNL. El cuadrángulo $MFNE$ es un paralelogramo, ya que $ME \parallel FN$ y $MF \parallel EN$ (el plano secante corta los planos paralelos por las líneas paralelas), por esta razón su área es igual a dos áreas del triángulo MFE.

Teniendo en cuenta que $LN = 1/2 \ EN$ y $KN = 1/2 \ FN$ obtenemos que el área del triángulo LNK es igual a la cuarta parte del área del triángulo EFN o a la cuarta parte del triángulo MFE que es igual a éste. Esto significa que el área de la sección es igual a 7/4 del área del triángulo MFE.

Hallemos ahora el área S del triángulo NFE. Se nota fácilmente que $EF = DB = \sqrt{a^2 + b^2}$, $MF = \sqrt{a^2 + (c^2/4)}$, $ME = \sqrt{b^2 + (c^2/4)}$. Valiéndonos de la fórmula de Herón, después de las transformaciones necesarias, se encuentra el área del triángulo MFE. Luego se obtiene el área de la sección que es igual a $\frac{7}{16}\sqrt{4a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.

Así, en todos los problemas analizados, el método corriente nos permitió construir casi automáticamente la sección, mientras que las construcciones complementarias fuera del poliedro en cuestión permitieron efectuar de modo muy simple los cálculos necesarios.

Señalemos además, que las construcciones complementarias con la salida fuera de los límites del poliedro que se considera pueden aplicarse con éxito a la solución de otros problemas (véanse, por ejemplo, el problema 4 del § 5 y el problema 2 del § 6 de la Parte III).

EJERCICIOS:

1. Una pirámide regular de base cuadrangular cuyo lado de la base es a y el ángulo diedro de la base es igual a 2α está cortada por un plano que divide en dos partes iguales el ángulo diedro de la base. Hallar el área de la sección.

2. En una pirámide regular de base triangular el ángulo plano del vértice es igual a 2α. Hallar el área de la sección de la pirámide por un plano que pasa por uno de los lados de la base perpendicularmente a la arista lateral opuesta. El lado de la base de la pirámide es a.

3. En una pirámide regular de base cuadrangular, por un lado de la base se ha trazado un plano perpendicular a la cara lateral opuesta. Calcular el área de la sección si el lado de la base de la pirámide es a y el ángulo diedro a la base es igual a α.

4. Hallar la relación entre los volúmenes de dos cuerpos formados por la sección de una pirámide regular cuadrangular por un plano que pasa por los puntos medios de dos lados contiguos de la base perpendicularmente a ésta.

5. En una pirámide regular de base cuadrangular el plano que pasa por un lado de la base y la línea media de la cara lateral opuesta, forma con la base un ángulo de 60°. Calcular el volumen de la pirámide si el lado de la base es a.

6. Una pirámide regular de base triangular está cortada por un plano que es paralelo a la base de tal manera que la superficie lateral se divide en dos partes iguales. ¿En qué relación se divide la altura?

7. Una pirámide regular de base triangular tiene la altura h y la arista lateral l. Hallar el área de la sección que es paralela a la base y está separada de ésta a la distancia de a.

8. Una pirámide regular de base cuadrangular stá coertada por un plano que es paralelo a la base. ¿En qué relación se divide el volumen de la pirámide si el área de la sección es tres veces menor que el área de la base?

9. Por uno de los vértices de la base de una pirámide regular de base cuadrangular se ha trazado un plano que es perpendicular a la arista lateral. Determinar el área de la sección si la arista de la base es igual a 1 y la arista lateral es 2.

10. Por uno de los lados de la base de un prisma triangular recto y regular se ha trazado un plano bajo el ángulo α respecto a la base, separando del prisma una pirámide de volumen V. Determinar el área de la sección.

11. En una pirámide regular de base cuadrangular $PABCD$ de vértice P el lado de la base es igual a a y el ángulo de inclinación de la cara lateral respecto a la base es igual a φ. En la pirámide se traza un plano secante que divide en dos partes iguales el ángulo diedro a la arista CD. Determinar la longitud del segmento, a lo largo del cual el plano se interseca con la arista APB.

12. La base inferior $ABCD$ de un prisma recto $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (donde AA_1, BB_1, CC_1 y DD_1 son las aristas laterales) es un rombo con el ángulo agudo φ. Se sabe que en el prisma puede inscribirse una esfera de diámetro d, que es tangente por su interior a todas sus caras. Calcular el área de la sección del prisma con el plano que pasa por las aristas BC y A_1D_1.

13. De una pirámide regular de base cuadrangular se ha separado otra pirámide por un plano que pasa por la arista AB de la base. La relación entre las superficies laterales de las pirámides es igual a 2. Determinar la relación entre el área del triángulo, separado por la sección trazada de la cara opuesta a la arista AB, y el área de esta cara.

14. Se da un prisma recto en el cual un triángulo regular sirve de base. Por uno de los lados de la base inferior y por el vértice opuesto de la base superior se ha trazado un plano. El ángulo entre este plano y la base del prisma es igual a α y el plano de la sección del prisma es S. Determinar el volumen del prisma.

15. Se da un prisma regular triangular $ABCA'B'C'$ con las aristas laterales AA', BB', CC'. En la prolongación de la arista BA se toma un punto M de tal modo que $MA = AB$ ($MB = 2AB$); un plano se ha trazado por los puntos M, B' y el punto medio de la arista AC. ¿En qué relación el plano divide al volumen de la pirámide?

16. Se da el cubo $ABCDA'B'C'D'$ con las aristas laterales AA', BB', CC' y DD'. En las prolongaciones de las aristas AB, AA', AD se han fijado, respectivamente, los segmentos BP, $A'Q$, DR de 1,5 AB de longitud ($AP = AQ = AR = 2{,}5AB$). Se tiene un plano que pasa por los puntos P, Q y R. ¿En qué relación el plano divide al volumen del cubo?

17. En la base de una pirámide regular de base cuadrangular se sitúa un cuadrado de lado a. La altura de la pirámide es igual a la diagonal de este cuadrado. La pirámide está cortada por un plano que es paralelo a su altura y a dos lados opuestos de la base. Hallar el perímetro de la sección si se sabe que en ésta puede inscribirse una circunferencia.

18. Un plano está trazado por el punto medio de la diagonal de un cubo, que es perpendicular a ésta. Determinar el área de la figura formada en la sección del cubo por dicho plano si la arista del cubo es a.

19. Por una arista de la base de una pirámide regular de base cuadrangular se ha trazado un plano que separa de la cara opuesta un triángulo de área a^2. Determinar la superficie lateral de la pirámide que está separada de ésta por el plano trazado, si la superficie lateral de la pirámide entera es igual a b^2.

20. En la pirámide regular de base triangular $SABC$ un plano que pasa por el lado AC de la base y se dispone perpendicularmente a la arista SB, separa a otra pirámide $DABC$ cuyo volumen es 1,5 veces menor que el de la pirámide $SABC$. Calcular la superficie lateral de la pirámide $SABC$ si $AC = a$.

21. En la pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ el plano trazado por el lado AD de la base es perpendicular a la cara BSC y la divide en dos partes de áreas iguales. Determinar la superficie total de la pirámide si se conoce que $AD = a$.

22. En una pirámide regular de base cuadrangular $SABC$ de vértice S y volumen V se ha trazado un plano que es paralelo a la mediana de la base BN e interseca la arista lateral SA en el punto K y a la arista lateral SB en el punto L, siendo $SK = 1/2\ SA$, $SL = 1/3\ SB$. Hallar el volumen de la parte de la pirámide que se encuentra por debajo de este plano.

23. La pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ de vértice S se corta por un plano que separa las aristas SA, SB y SC formando los segmentos $SK = 2/3\,SA$, $SL = 1/2\,SB$, $SM = 1/3\,SC$ respectivamente. La longitud de la arista lateral de la pirámide es igual a a. Calcular la longitud del segmento SN cortado por el plano en la arista SD.

24. En la pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ de vértice S y altura h, se ha trazado un plano por el centro de la base, que es paralelo a la cara SAB. El área de la sección obtenida es igual a la de la base. Hallar el volumen de aquella parte de la pirámide que se encuentra por debajo del plano.

25. En una pirámide regular de base hexagonal el lado de la base es a y la altura, h. Calcular el área de la sección que pasa por los puntos medios de dos lados de la base no contiguos ni paralelos y por el punto medio de la altura de la pirámide.

26. El área de la sección trazada por la diagonal de la base de una pirámide regular de base cuadrangular en paralelo a la arista lateral que no se interseca con esta diagonal, es igual a S. Calcular el área de la sección que pasa por los puntos medios de los dos lados contiguos de la base y el punto medio de la altura de la pirámide.

27. El área de la cara lateral de una pirámide regular de base hexagonal es igual a S. Calcular el área de la sección que atraviesa el punto medio de la altura de la pirámide paralelamente a la cara lateral.

28. El ángulo entre la arista lateral y el plano de la base de la pirámide regular de base triangular $SABC$ de vértice S es igual a 60°. Por el punto A se ha trazado un plano que es perpendicular a la bisectriz del ángulo S del triángulo BSC. ¿En qué relación la línea de intersección de este plano con el plano BSC divide al plano de la cara BSC?

29. Por el lado de la base de la pirámide regular de base cuadrangular se ha trazado un plano que es perpendicular a la cara opuesta. Calcular el área de la sección formada, si la altura de la pirámide es h, mientras que la relación entre la superficie lateral y el área de la base es $\sqrt{3}$.

30. En la pirámide de base triangular $SABC$ de vértice S se tiene que

$$SA = SC;\quad SB = 2AC,\quad AB = BC = 1{,}5AC.$$

Se ha trazado un plano por AC y el punto medio D de la arista SB. El área de la superficie total de la pirámide $SADC$ supera al área total de la superficie de la pirámide $DABC$ en una magnitud que es igual al área de la base de la pirámide $SABC$. Determinar el ángulo de oblicuidad de la cara ASC al plano de la base de la pirámide $SABC$.

31. En la pirámide regular de base triangular $SABC$ de vértice S, el lado de la base es a y los ángulos planos del vértice son de 30°. Por el punto A y el punto medio de la arista SB se ha trazado un plano que divide a la pirámide en dos partes iguales en volumen. Hallar los segmentos en que el plano divide la altura de la pirámide.

32. En la pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ del vértice S se ha trazado un plano secante P paralelo al lado AB y que pasa por el punto de tangencia de la esfera inscrita y la cara SAB, así como por el punto de esta esfera, próximo al vértice S. Determinar el área de la sección de la pirámide por el plano P si $AB = 1$, $SA = \sqrt{5}/2$.

33. En una pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ de vértice S y lado de la base $d\sqrt{3}$ está inscrita una esfera cuyo radio es $d/2$. El plano P, que forma con el plano de la base un ángulo de 30°, es tangente a la esfera e interseca la base de la pirámide a lo largo de la línea que es paralela al lado AB (el punto de tangencia del plano P con la esfera está situado por debajo del centro de la esfera). Hallar el área de la sección de la pirámide por el plano P.

34. La base del prisma recto $ABCA_1B_1C_1$ es el triángulo rectángulo isósceles ABC con catetos $AB = BC = 1$ dm. En éste se ha trazado un plano por los puntos medios de las aristas AB y BC y el punto P que está dispuesto en la prolongación de la arista B_1B, tras el punto B. Calcular el área de la sección obtenida si $BP = 1/2$ dm y $B_1B = 1$ dm.

35. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cuya arista es igual a 1 dm. En la prolongación de la arista D_1D, tras el punto D, se toma un punto P tal que $DP = 1/2$ dm. Se ha trazado un plano por el punto P y los puntos medios de las aristas AA_1 y CC_1. Determinar el área de la sección obtenida.

§ 8. COMBINACIONES DE CUERPOS

En los exámenes se practican ampliamente los problemas estereométricos en los cuales se analizan diferentes combinaciones de cuerpos. Al resolver estos problemas hay que pensar detenidamente e imaginar bien la disposición mutua de los cuerpos en el espacio, trazar de manera legible el dibujo y demostrar con exactitud todas las afirmaciones.

Las mayores dificultades surgen en los casos en que uno de los cuerpos es una esfera. Sin embargo, en estos problemas la representación de la propia esfera suele a menudo ser superflua, es suficiente indicar sólo su centro y puntos de tangencia con diversos planos y rectas.

En la solución de los problemas para las combinaciones de cuerpos es muy útil hacer diversos dibujos planimétricos auxiliares, trazar aparte configuraciones planas, cuya representación esté desfigurada por la perspectiva espacial.

Examinemos más detalladamente un caso en que se trata de combinaciones de la pirámide y la esfera. Primero, nos detendremos en la figura compuesta de una pirámide y una esfera inscrita en la misma.

Definición. *Una esfera se denomina inscrita en una pirámide (cualquiera) si es tangente a todas las caras de la pirámide (tanto a las laterales como a la de la base).*

De este modo, el centro O de la esfera inscrita (fig. 155) es un punto que equidista de todas *las caras de la pirámide*. Esto significa que en

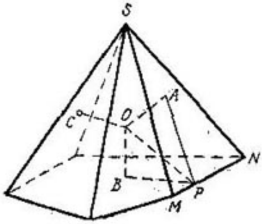

Fig. 155

caso de bajar las perpendiculares OA, OB, OC, ... desde el centro de la esfera inscrita a las caras de la pirámide, todas estas perpendiculares tendrán una misma longitud.

En lo que se refiere a los puntos A, B, C, ..., que son bases de las perpendiculares, son también los puntos de tangencia de la esfera inscrita con las caras de la pirámide.

Señalemos el hecho siguiente. Al bajar perpendiculares desde los puntos A y B a la arista MN, resulta que un mismo punto servirá de base de dichas perpendiculares. En efecto, el segmento OB es perpendicular al plano de la base y por eso $OB \perp MN$ (véase el § 4, Parte III); el segmento OA es perpendicular al plano MSN y por eso $OA \perp MN$. Por consiguiente, la arista MN es perpendicular al plano trazado por las rectas que se intersecan OA y OB. Si P es el punto de intersección de este plano con la arista MN (nótese que este punto puede encontrarse también en *la prolongación* de dicha arista), entonces $AP \perp MN$, $BP \perp MN$ y por lo tanto el punto P es la base común de las perpendiculares bajadas desde los puntos A y B a la arista MN. Naturalmente, todos los razonamientos serán válidos si en lugar de MN se toma cualquier otra arista de la pirámide (el lector mismo puede cumplir los razonamientos para la arista MS).

Teorema. *Si en una pirámide está inscrita una esfera, el centro de ésta es el punto de intersección de los planos bisectrales de todos los ángulos diedros de la pirámide.*

En efecto, cualquier punto que equidiste de las dos caras de un ángulo diedro, se sitúa en el plano bisectral de este ángulo diedro (véase § 2, Parte III). Por esta razón el centro de la esfera inscrita, equidistando de todas las caras de la pirámide, ha de encontrarse en cada uno de los planos bisectrales, es decir, es el punto de intersección de los planos bisectrales de todos los ángulos diedros [1].

El centro de una esfera inscrita en una pirámide siempre se halla dentro de la pirámide; esta afirmación se deduce de que todos los puntos del plano bisectral se encuentran *entre* las caras del ángulo diedro.

Subrayemos, finalmente, que en caso de proyectar ortogonalmente la esfera inscrita en la pirámide, sobre el plano de la base de la pirámide, el círculo producido en la proyección no será inscrito en el polígono dispuesto en la base de la pirámide.

El problema que sigue da una idea de cómo debe efectuarse, de manera exhaustiva, la solución de los problemas para las combinaciones de la pirámide y la esfera (y otros problemas similares). Es interesante también por el hecho de que la pirámide que se analiza es "mala": en su base se encuentra no un polígono regular, como suele suceder a menudo, sino un trapecio.

1. *En una pirámide de base cuadrangular $PABCD$ está inscrita una esfera que es tangente a todas sus caras. La base de la pirámide es un trapecio isósceles $ABCD$ con el lado lateral $AB = l$ y el ángulo agudo φ, mientras que las caras laterales APD y BPC son triángulos isósceles ($AP = PD$, $BP = PC$) que con la base de la pirámide forman un mismo ángulo α. Hallar el radio de la esfera.*

Supongamos que $PABCD$ es la pirámide, en cuya base se sitúa el trapecio isósceles $ABCD$; $AB = CD = l$, $\angle BAD = \angle ADC = \varphi$. Las caras laterales de la pirámide APD y BPC son triángulos isósceles: $AP = PD$, $BP = PC$; sus bases son simultáneamente las bases del trapecio (fig. 156).

Tracemos una apotema PK de la cara APD y la altura PH de la pirámide. En este caso la arista AD, por ser perpendicular a las dos rectas PH y PK que se intersecan, es perpendicular al plano HPK; $BC \parallel AD$ y por eso la arista BC es perpendicular al plano HPK y, en caso particular, a la línea PL de intersección de este plano con la cara BPC (es decir, PL es una apotema). Por lo tanto $\angle PLK$ y $\angle PKL$ son ángulos lineales de los ángulos diedros entre la base y las caras laterales BPC y APD respectivamente; según los datos, $\angle PLK = \angle PKL = \alpha$.

[1] No es difícil comprender que es válida también la afirmación inversa: *una esfera puede inscribirse en una pirámide, si los planos bisectrales de todos sus ángulos diedros se intersecan en un mismo punto.* No obstante, no se deduce de ningún modo que todos los planos bisectrales se intersecan en un mismo punto. No es difícil encontrar un ejemplo de una pirámide de base cuadrangular que no tenga un punto *común* para los ocho planos bisectrales; por esta causa es imposible inscribir una esfera en la pirámide de este tipo. Se puede demostrar (esto se propone al lector) que 1) *puede inscribirse una esfera en cualquier pirámide de base triangular*, 2) *puede inscribirse una esfera en una pirámide regular de base n-angular.*

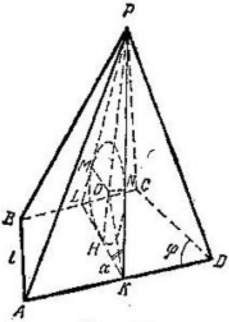

Fig. 156

De acuerdo con los datos, en la pirámide en cuestión está inscrita una esfera; se requiere hallar su radio. El centro de la esfera inscrita se sitúa en el plano bisectral del ángulo diedro entre los planos BPC y APD puesto que equidista de las dos caras. Luego, de acuerdo con las mismas consideraciones, el centro se sitúa también en el plano bisectral del ángulo diedro entre los planos APB y CPD. Por eso se dispone en la línea de intersección de estos dos planos bisectrales. Demostremos que la altura PH de la pirámide es precisamente esta línea de intersección. Con este fin es suficiente demostrar que la altura PH se encuentra en cada uno de estos planos bisectrales.

En primer lugar, demostremos que PH se halla en el plano bisectral del ángulo diedro entre los planos BPC y APD. Siendo el plano LPK perpendicular al plano APD (ya que el plano APD pasa por la perpendicular AD al plano LPK) y el plano LPK perpendicular al plano BPC (por razones análogas), el plano LPK es perpendicular a la línea de intersección de los planos APD y BPC y, por consiguiente, el ángulo LPK es el lineal del ángulo diedro entre las caras BPC y APD. Pero $\angle PLK = \angle PKL$, por eso el triángulo PKL es isósceles y la altura PH también es simultáneamente la bisectriz. Como se sabe, la bisectriz de un ángulo lineal que corresponde al ángulo diedro se encuentra en el plano bisectral del ángulo diedro.

En segundo lugar, demostremos que PH está en el plano bisectral del ángulo diedro entre los planos APB y DPC. Convenzámonos de que el plano LPK sirve de dicho plano bisectral; con este fin demostremos que la distancia entre el punto arbitrario S de este plano y las caras APB y DPC es la misma. Unamos mentalmente el punto S con los vértices P, A, B, C y D de la pirámide. Puesto que $V_{PABLK} = V_{PDCLK}$ (estas pirámides poseen una misma altura PH e iguales bases $ABLK$ y $DCLK$) y, por las mismas razones, $V_{SABLK} = V_{SDCLK}$, $V_{SAPK} = V_{SDPK}$, $V_{SBPL} = V_{SCPL}$, por lo tanto, $V_{SAPB} = V_{SDCP}$. Sin embargo, de la igualdad de los volúmenes de las pirámides $SABP$ y $SDCP$ en virtud de la igualdad de $\triangle ABP = \triangle DCP$ (por los tres lados) se deduce la igualdad de las alturas bajadas desde el punto S a las caras ABP y DCP respectivamente. Así, LPK es el plano bisectral y la altura PH se encuentra en este plano.

De este modo, el centro de la esfera inscrita (designémoslo con la letra O) se halla realmente en la altura PH de la pirámide.

Examinemos ahora el triángulo isósceles LPK. En éste está inscrito el círculo mayor de nuestra esfera, puesto que dicho plano pasa por el centro de la esfera. (De lo anteriormente expuesto se deduce que la esfera es tangente a la pirámide en el punto H y en los puntos M y N dispuestos en las apotemas PL y PK). El problema se reduce, de tal manera, a un problema planimétrico: hallar el radio del círculo inscrito en el triángulo isósceles LPK con el ángulo α de la base LK, la que es la altura del trapecio isósceles $ABCD$ con ángulo agudo φ y lado lateral l, y por eso tiene la longitud $l \operatorname{sen} \varphi$.

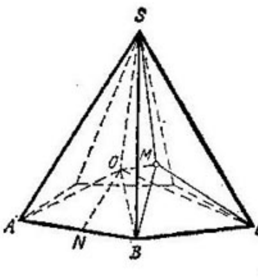

Fig. 157

Como el centro del círculo inscrito se sitúa en el punto de intersección de las bisectrices, $\angle OKH = \alpha/2$ por lo tanto el radio buscado

$$r = OH = KH \operatorname{tg}(\alpha/2) = 1/2\ l\ \operatorname{sen}\varphi \operatorname{tg}(\alpha/2).$$

En adición a la solución ilustrada hagamos una observación. Prestemos atención a que en los datos del problema no se dan las bases del trapecio. Sin embargo, esto no significa que las longitudes de las bases pueden ser cualesquiera. Desde luego, los puntos de la recta PH equidistan de los planos APD y BPC; precisamente del mismo modo equidistan de los planos APB y CPD. Pero de ninguna manera con cualesquier dimensiones de las bases del trapecio la distancia entre el punto en la recta PH y el plano APD es igual a la distancia entre el mismo punto y el plano APB. En otras palabras, no con cualesquiera longitudes de las bases AD y BC puede encontrarse en la altura PH un punto que equidiste de las cinco caras de la pirámide. Si hubiera deseo, se podría determinar (utilizando el hecho de que existe la esfera inscrita, es decir, suponiendo que tal punto existe) las dimensiones del trapecio que se sitúa en la base.

Ahora pasemos a un caso en que la esfera *está circunscrita* a la pirámide.

Definición. *Una esfera se denomina circunscrita a una pirámide (cualquiera), si todos los vértices de la pirámide se encuentran en la superficie de la esfera.*

Así pues, el centro O de la esfera circunscrita (fig. 157) es un punto que equidista de todos los vértices de la pirámide. Esto significa que, en caso de unir el centro de la esfera circunscrita con los vértices S, A, B, C, ... de la pirámide, todos los segmentos OS, OA, OB, OC, ... tendrán una misma longitud.

Señalemos lo siguiente. Si desde el centro O de la esfera circunscrita se baja la perpendicular OM a la cara BSC, el centro de la circunferencia circunscrita a esta cara será la base de esta perpendicular. En efecto, $MS = MB = MC$ como proyecciones de oblicuas iguales OS, OB y OC en el plano BSC. (Repitiendo este argumento para la base de la pirámide, es fácil convencerse de que puede circunscribirse una circunferencia al polígono de la base.) De este modo, si a una pirámide está circunscrita una esfera, el centro de ésta se encuentra en la intersección de las perpendiculares trazadas a cada una de las caras de la pirámide en el centro del círculo circunscrito a esta cara. Señalemos también que en caso de bajar una perpendicular desde el punto O a alguna arista, digamos AB, la base N de dicha perpendicular será el punto medio de la arista AB.

Teorema. *Si una esfera está circunscrita a una pirámide, el centro de la esfera es el punto de intersección de todos los planos trazados por los puntos medios de las aristas de la pirámide perpendicularmente a dichas aristas.*

En efecto, cualquier punto que equidiste de dos vértices de la pirámide adyacentes a una arista, se encuentra en un plano trazado perpendicularmente a esta arista de la pirámide por su punto medio (véase § 2, Parte III). Por esta razón el centro de la esfera circunscrita, equidistando de todos los vértices de la pirámide, debe estar en cada uno de tales planos, es decir, éste es el punto de intersección de todos estos planos [1].

Hay muchos casos en que los estudiantes, al trazar un dibujo, colocan el centro de la esfera circunscrita al azar, sin tener una idea clara de la figura espacial dada y, aun más, sin practicar algunos razonamientos acerca de la posición de este centro. En este caso, como regla general, el centro se sitúa dentro de la pirámide. Entre tanto, el centro de la esfera circunscrita puede encontrarse tanto dentro de la pirámide, como fuera o en la superficie de ésta (en dependencia del tipo de pirámide). Por ejemplo, en el problema que sigue resulta que el centro de la esfera circunscrita se encuentra fuera de la pirámide, lo que se deduce fácilmente de los cálculos realizados en el proceso de la resolución.

2. *En una pirámide de base triangular $SABC$, la arista BC es igual a a, $AB = AC$, la arista SA es perpendicular a la base ABC de la pirámide, el ángulo diedro de la arista SA es igual a 2α y de la arista BC es igual a β. Hallar el radio de la esfera circunscrita.*

Analicemos la pirámide $SABC$ de que se trata en los datos del problema (fig. 158). Por ser la arista SA perpendicular al plano de la base, $\angle BAS = \angle CAS = 90°$ y por eso el ángulo BAC es precisamente el ángulo lineal del ángulo diedro de la arista SA. De este modo, la base de la pirámide tiene la forma de un triángulo isósceles con el ángulo

[1] No es posible circunscribir una esfera a cualquier pirámide. No es difícil hallar un ejemplo con tal pirámide de base cuadrangular a la que es imposible circunscribir una esfera. Proponemos al lector mismo demostrar que *puede circunscribirse una esfera a una pirámide si es posible circunscribir una circunferencia al polígono que sirve de base a la pirámide*. De aquí se deduce, por ejemplo, que: 1) *puede circunscribirse una esfera a una pirámide de base triangular*, 2) *puede circunscribirse una esfera a una pirámide regular de base n-angular*.

2α del vértice, y la altura de la pirámide coincide con la arista SA.

Como las proyecciones de las aristas laterales SB y SC sobre el plano de la base son iguales, son también iguales las aristas. Por esto la cara BSC es un triángulo isósceles, y su altura bajada desde el vértice S incide en el punto medio K de la arista BC. Según el teorema de las tres perpendiculares, AK es la altura del triángulo BAC. De aquí se deduce que el ángulo SKA es lineal del ángulo diedro a la arista BC, es decir, $\angle SKA = \beta$.

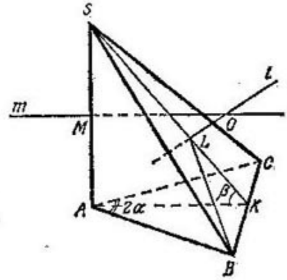

Fig. 158

El centro de la esfera circunscrita se sitúa en la intersección de la recta l, que pasa por el centro del círculo circunscrito al triángulo BSC, con el plano que pasa por el punto medio de la arista AS perpendicularmente a ésta. La recta l se sitúa en el plano ASK: en efecto, el plano BSC pasa por la recta BC que es perpendicular al plano ASK, es decir, los planos BSC y ASK son perpendiculares; al mismo tiempo la recta l es perpendicular al plano BSC y pasa por la línea de su intersección, así es que se encuentra en el plano ASK.

Así, pues, el centro de la esfera se halla en el plano ASK. Tracemos este plano en un dibujo especial. En este caso el centro O de la esfera se encontrará en la intersección de la recta l y la recta m que es perpendicular a AS y pasa por su punto medio. Pero, en términos generales, pueden tener lugar tres posibilidades: las rectas l y m se intersecan dentro o fuera del triángulo ASK, o en su lado, y tendremos que analizar todas estas posibilidades (figs. 159, 160, 161). En lo ulterior, en el proceso de las argumentaciones demostraremos que dos de las posibilidades no son reales.

Nos interesa el radio R de la esfera circunscrita, es decir, la distancia entre el punto O (que es el punto de intersección de las perpendiculares m y l a los lados del ángulo KSA) y el punto S, vértice de este ángulo.

Ante todo, busquemos SL, la proyección de la distancia desconocida sobre el lado SK del triángulo KAS. Puesto que en el triángulo AKB (fig. 158) conocemos el cateto $BK = 1/2\ a$ y el ángulo $KAB = \alpha$, entonces $AK = 1/2\ a \operatorname{cotg} \alpha$. Luego, valiéndonos del triángulo KAS se obtiene:

$$SK = \frac{a \operatorname{cotg} \alpha}{2 \cos \beta}.$$

Como L es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo BSC, entonces $LS = LB$, y por eso, valiéndonos del triángulo BKL hallamos

$(SK - SL)^2 + KB^2 = SL^2$, es decir,

$$SL = \frac{a(\operatorname{cotg}^2 \alpha + \cos^2 \beta)}{4 \operatorname{cotg} \alpha \cos \beta}.$$

Después de tomar en consideración que los cálculos efectuados para el segmento SL no dependían en manera alguna de la disposición del centro O de la esfera circunscrita, volvámonos a las figs. 159, 160, 161. Designemos por N el punto de intersección de la recta m con el lado SK. Está absolutamente evidente que las rectas l y m se intersecan *fuera* del triángulo KAS si $SN < SL$ (fig. 160); pero si $SN > SL$, el punto O se encuentra dentro de dicho triángulo (fig. 159); finalmente, si $SN = SL$, el punto O se halla en el lado SK del triángulo (fig. 161). Aclaremos, cuál de las posiciones mencionadas tiene lugar en realidad.

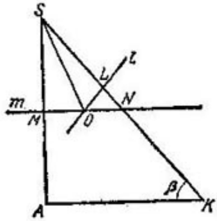

Fig. 159

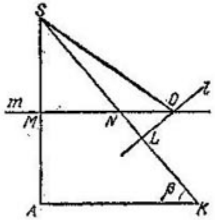

Fig. 160

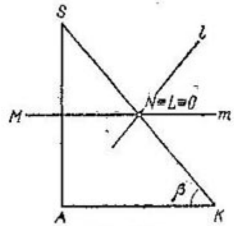

Fig. 161

Puesto que MN es la línea media del triángulo KAS, $SN = 1/2\, SK$. Comparando las longitudes de los segmentos SN y SL, demostraremos sin dificultad que con cualesquier a, α y β

$$\frac{a \operatorname{cotg} \alpha}{4 \cos \beta} < \frac{a(\operatorname{cotg}^2 \alpha + \cos^2 \beta)}{4 \operatorname{cotg} \alpha \cos \beta}$$

(de las consideraciones geométricas se deduce que $a > 0$, $0° < \alpha < 90°$ y $0° < \beta < 90°$). Por consiguiente, cualesquiera que sean las dimensiones a, α y β de la pirámide $SABC$, el centro O de la esfera circunscrita siempre se halla fuera de la pirámide. A su vez esto significa que la configuración plana dibujada aparte en el plano KAS puede tener sólo el aspecto que aparece en la fig. 160; las posiciones representadas en las figs. 159 y 161 no pueden tener lugar en la realidad.

Al examinar la fig. 160 es fácil demostrar que $\angle ONL = \beta$, y por eso $LO = NL \operatorname{tg} \beta = (SL - SN) \operatorname{tg} \beta$. Sustituyendo aquí las expresiones obtenidas arriba para SL y SN, obtenemos después de los cálculos necesarios que $LO = 1/4\ a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \beta$. Por último, valiéndonos del triángulo rectángulo OLS se halla que

$$R = \sqrt{LO^2 + SL^2} = \frac{a}{2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos \beta} \sqrt{\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta \cos^4 \alpha}.$$

Como podemos ver, los cálculos efectuados en el problema fueron muy simples, la dificultad principal radica en los razonamientos que determinan la disposición del centro de la esfera circunscrita.

Si los estudiantes tienen una idea clara acerca de las combinaciones de la pirámide con la esfera inscrita o circunscrita, en cuanto a la disposición recíproca de la pirámide y de la esfera surgen dificultades a veces insuperables. Los hechos demuestran que hay pocos aquéllos que puedan imaginar correctamente la configuración espacial, digamos, en el caso de una esfera que es tangente a todas las aristas de una pirámide de base triangular; de una esfera que es tangente a la base y pasa por el vértice; de una esfera que es tangente a dos aristas que se cruzan de una pirámide de base triangular, etc. En todos estos casos "el centro de gravedad" del problema radica siempre en la determina-

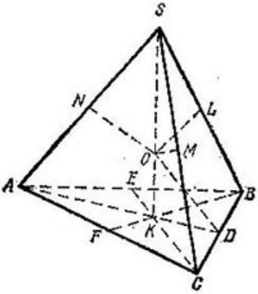

Fig. 162

ción de las propiedades recíprocas del centro de la esfera y de los elementos de la pirámide, que son necesarias para los cálculos.

Es imposible examinar y analizar todas las disposiciones recíprocas posibles de la esfera y la pirámide. Por eso, nos limitamos sólo a dos ejemplos.

3. *Una esfera de radio r es tangente a todas las aristas de una pirámide de base triangular. El centro de la esfera se sitúa dentro de la pirámide, en su altura, a la distancia* $r\sqrt{3}$ *del vértice. Demostrar que la pirámide es regular. Hallar la altura de la pirámide.*

Supongamos que M, N y L son los puntos de tangencia de la esfera a las aristas laterales de la pirámide $SABC$, y D, E y F son los puntos de tangencia de la esfera con los lados de la base (fig. 162). Desígnemos con la letra O el centro de la esfera, que de acuerdo con los datos se halla en la altura SK de la pirámide.

Según la definición de las tangentes a la esfera, $ON \perp AS$, $OL \perp BS$, $OM \perp CS$; $ON = OM = OL = r$. De aquí se deduce que los triángulos rectángulos SNO, SLO y SMO son iguales y por esta razón $SN = SL = SM$ y $\angle NSO = \angle LSO = \angle MSO$.

La última igualdad para los ángulos nos permite resumir que los triángulos AKS, BKS y CKS son iguales; por consiguiente, $AS = BS = CS$, es decir, en la pirámide en cuestión son iguales todas las aristas laterales. Pero es lógico que esto es insuficiente para afirmar que la pirámide es regular.

La igualdad de las aristas laterales y la de los segmentos SN, SL y SM demuestran que $AN = BL = CM$. Aprovechemos ahora el hecho de que las tangentes a la esfera trazadas de un punto son iguales: $AN = AF = AE$; $BL = BE = BD$; $CM = CF = CD$. Por lo tanto, $AN = BL = CM = AF = AE = BE = BD = CF = CD$. De aquí se deduce que los puntos D, E y F son los puntos medios de las aristas de la base y $AB = BC = CA$, es decir, el triángulo ABC es regular. La igualdad de las aristas laterales de la pirámide implica la igualdad de sus proyecciones: $AK = BK = CK$, es decir, K es la base de la altura y el centro del triángulo regular ABC.

Con esto queda demostrado que la pirámide $SABC$ es regular. Calculemos la longitud de su altura SK.

Los triángulos rectángulos AKS y ONS que tienen un ángulo agudo común del vértice S, son semejantes, de donde $SK = AK \cdot NS/NO$. Con el fin de abreviar, designemos por h la longitud de la altura SK. Ya hemos indicado que $ON = r$. Valiéndonos del triángulo rectángulo SNO obtenemos que $NS = \sqrt{SO^2 - NO^2} = r\sqrt{2}$ y por eso $h = AK \cdot \sqrt{2}$ y nos queda por determinar una relación más entre h y AK.

Esta relación puede obtenerse valiéndonos del triángulo rectángulo OKD. En este triángulo $KD = 1/2\,AK$, $OD = r$ y $OK = h - r\sqrt{3}$; según el teorema de Pitágoras tenemos: $1/4\,AK^2 = r^2 - (h - r\sqrt{3})^2$. Sustituyendo en esta igualdad $AK = h/\sqrt{2}$ obtenemos una ecuación cuadrática respecto de h, que tiene dos raíces positivas:

$$h_1 = 4/3\,r\sqrt{3}, \quad h_2 = 4/9\,r\sqrt{3}.$$

Sin embargo, la segunda raíz no satisface a los datos del problema. En efecto, el centro de la esfera ha de estar *dentro* de la pirámide, en su altura, a la distancia $r\sqrt{3}$ del vértice. Esto significa que la altura de la pirámide ha de ser mayor que $r\sqrt{3}$, mientras que la segunda raíz h_2 es menor que $r\sqrt{3}$. La primera raíz h_1 nos da la altura de la pirámide: $h = 4/3\,r\sqrt{3}$.

Señalemos que también en este caso hemos pasado sin trazar la esfera en el dibujo. Sólo hay que imaginarse bien que la esfera que se analiza en el problema "excede" de los límites de la pirámide, intersecándose con las aristas de ésta (hay estudiantes que tratan de dibujar la esfera tangente a las caras de la pirámide).

4. *Se da la pirámide regular $SABC$ de base triangular (S es su vértice) cuyo lado de la base es a y la arista lateral $a\sqrt{2}$. La esfera pasa por*

el punto A y es tangente a las aristas laterales SB y SC en sus puntos medios. Hallar el radio de la esfera.

En este problema, la tentativa de imaginarse toda la configuración tampoco facilita la resolución del problema; el propio hecho de la tangencia, es el único que debe utilizarse.

El problema se resuelve más fácilmente con la ayuda del teorema planimétrico: el cuadrado de la tangente a la circunferencia es igual al producto de la secante por la parte exterior de ésta.

Sabiendo que la esfera es tangente a la arista SC en su punto medio y que pasa por el vértice A, encontramos dos puntos más, en que la esfera interseca a las aristas AC y AS (fig. 163). En efecto, el plano ACS interseca la esfera formando una circunferencia que es tangente a la recta CS (en el punto medio de CS) y pasa por el punto A; aplicando el teorema recién enunciado encontramos que esta circunferencia interseca la arista AC en su punto medio K, y la arista AS en un punto E tal que $SE = 1/4\ a\sqrt{2}$.

Razonamientos análogos respecto al plano ABS nos permiten hallar dos puntos más de la intersección de la esfera con las aristas AB

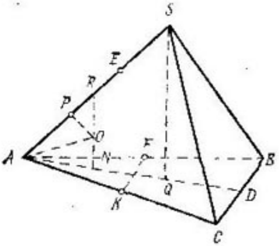

Fig. 163

y AS: F que es el punto medio de la arista AB y el mismo punto E en la arista AS. Ahora puede hallarse el radio de la esfera utilizando sólo los puntos A, K, F y E.

Puesto que la esfera pasa por los puntos A, K y F, el centro de la esfera se sitúa en la perpendicular al plano AKF trazada desde el centro del triángulo AKF. Como el punto N (centro del $\triangle AKF$) está en la mediana AD del triángulo ABC, siendo $AN = 2/3(AD/2) = 1/3\,AD$, en este caso el centro de la esfera se sitúa en el plano ADS, ya que en éste, como se sabe, se encuentra también la altura SQ de la pirámide. Como $AQ = 2/3\ AD$, $AN = NQ$, por consiguiente, el centro de la esfera se encuentra en la línea media NR del triángulo ASQ.

Pero el centro de la esfera está también en el plano perpendicular a AE, que pasa por P, el punto medio de AE. Esto significa que el centro de la esfera se encuentra en la recta situada en el plano ASD

que es perpendicular a la arista AS y que pasa por el punto P. Así, el centro de la esfera se sitúa en el plano ASQ, en la intersección de las rectas siguientes: de la línea media del $\triangle ASQ$ y de la perpendicular al segmento AE en su punto medio.

Pasemos a los cálculos:

$$R = AO = \sqrt{AP^2 + PO^2}.$$

Como $AP = 1/2\ AE = 1/2(AS - ES) = 3/8\, a\sqrt{2}$, falta hallar PO. De la semejanza de los triángulos RPO y RAN se deduce que $PO = RP \cdot AN/RN$. Puesto que $RP = AR - AP = 1/8\, a\sqrt{2}$, $AN = 1/3 AD = 1/6\, a\sqrt{3}$, $RN = 1/2\ SQ = a\sqrt{15}/6$, entonces $PO = a\sqrt{10}/40$. De aquí resulta que $R = a\sqrt{115}/20$.

En lo que se refiere a las combinaciones de otros cuerpos geométricos, aquí ofrecemos todas las definiciones correspondientes que no siempre se dan en los manuales escolares, pero son indispensables para los estudiantes de la escuela superior. No es necesario aprender de memoria estas definiciones; sólo es conveniente comprender bien el cuadro geométrico de cada configuración de los cuerpos. Recomendamos al lector que trace los dibujos y demuestre los conceptos adicionales que se dan después de las definiciones.

Una esfera está inscrita en un prisma si es tangente a todas las caras del prisma. Si el prisma es recto, la proyección ortogonal de la esfera sobre el plano de la base del prisma será un círculo inscrito en el polígono, base del prisma; el concepto no es válido para un prisma oblicuo. En cualquier caso la altura del prisma es igual al diámetro de la esfera.

Una esfera está inscrita en un cono circular recto si es tangente tanto a la base del cono como a su superficie lateral. El centro de la base es el punto de tangencia de la esfera con la base, mientras que la tangencia con la superficie lateral tiene lugar por cierta circunferencia (no es la circunferencia del círculo mayor), cuyo plano es paralelo al plano de la base. El centro de la esfera se halla en la altura del cono.

Una esfera está inscrita en un cilindro circular recto si es tangente tanto a las bases del cilindro como a su superficie lateral. Los puntos de tangencia de la esfera a las bases son los centros de las bases, y la tangencia con la superficie lateral pasa por la circunferencia del círculo mayor de la esfera que es paralelo a las bases. El centro de la esfera se encuentra en el eje del cilindro; el diámetro de la base del cilindro es igual al diámetro de la esfera y a la altura del cilindro.

Una esfera está inscrita en una pirámide truncada (en un cono circular recto truncado) si es tangente a las bases y a la superficie lateral. El diámetro de la esfera es igual a la altura de la pirámide truncada (del cono truncado)

Un cilindro circular recto está inscrito en un prisma si su superficie lateral es tangente a las caras laterales del prisma, mientras que las bases *son círculos inscritos en polígonos que son las bases del prisma.* Si un cilindro circular recto está inscrito en un prisma, el prisma es recto. Las líneas por las cuales la superficie lateral del cilindro es tangente a las caras laterales del prisma son rectas y perpendiculares a las bases del prisma.

Un cilindro circular recto está inscrito en una pirámide si la circunferencia de una de sus bases es tangente a todas las caras laterales de la pirámide, y la otra base se encuentra en la base de la pirámide. Señalemos que la pirámide no es obligatoriamente regular. Si el cilindro está inscrito en la pirámide, en este caso, primero, la base de la altura de la pirámide se halla dentro (o en los lados) del polígono dispuesto en la base de la pirámide y, segundo, la base de la pirámide es el polígono en que puede inscribirse una circunferencia (sin embargo, la base del cilindro situada en la base de la pirámide no es un círculo inscrito en la base de la pirámide).

Un cilindro circular recto está inscrito en un cono circular recto si la circunferencia de una de las bases del cilindro se encuentra en la superficie lateral del cono y la otra base del cilindro se halla en la base del cono. El eje del cilindro se sitúa en la altura del cono. En cada cono puede inscribirse una cantidad infinita de cilindros.

Un cilindro circular recto está inscrito en una esfera si las circunferencias de sus bases se disponen en la superficie de la esfera. Las bases del cilindro son los círculos menores de la esfera; el centro de la esfera coincide con el punto medio del eje del cilindro.

Un cono recto circular está inscrito en un prisma si su vértice se halla en la base superior del prisma y si su base es un círculo inscrito en un polígono que es la base inferior del prisma. Si en un prisma está inscrito un cono, en este caso, primero las bases del prisma son polígonos en que puede inscribirse una circunferencia y, segundo, la recta que es perpendicular a la base inferior y pasa por el centro del círculo inscrito en el polígono, que es la base inferior, interseca la base superior (y no su prolongación). La altura del cono es igual a la del prisma.

Un cono circular recto está inscrito en una pirámide si el vértice del cono coincide con el vértice de la pirámide, mientras que la base de la pirámide es un polígono circunscrito a la circunferencia de la base del cono. Si el cono está inscrito en la pirámide, primero, su base es un polígono en el que puede inscribirse una circunferencia y, segundo, la altura de la pirámide pasa por el centro de esta circunferencia. Las alturas de la pirámide y del cono coinciden.

Un cono circular recto está inscrito en una esfera si su vértice y la circunferencia de su base se encuentran en la esfera. La base del cono es el círculo menor (o mayor) de la esfera; el centro de la esfera se sitúa en la altura del cono.

Una pirámide está inscrita en un cono si el vértice de la pirámide coincide con el vértice del cono, mientras que la base de la pirámide es un polígono inscrito en la circunferencia de la base del cono. Las alturas de la pirámide y del cono coinciden; las aristas laterales de la pirámide se encuentran en la superficie lateral del cono.

Un prisma está inscrito en un cono circular recto si todos los vértices de la base superior del prisma se hallan en la superficie lateral del cono, mientras que la base inferior del prisma se encuentra en la base del cono. La base del prisma es un polígono a que puede circunscribirse una circunferencia (pero la base inferior del prisma no está inscrita en la circunferencia de la base del cono).

Un prisma está inscrito en un cilindro si sus bases son polígonos inscritos en las circunferencias de las bases del cilindro. La base del prisma es un polígono al que puede circunscribirse una circunferencia; el prisma es recto y su altura es igual a la altura del cilindro.

Un prisma está inscrito en una esfera si todos sus vértices se encuentran en la superficie esférica. El prisma es recto; su base es un polígono que puede inscribirse en la circunferencia.

5. *Se dan tres conos circulares rectos con el ángulo* α ($\alpha < 2\pi/3$) *en la sección axial y el radio de la base igual a* r. *Las bases de los conos se sitúan en un mismo plano y son tangentes en pares una a otra exteriormente. Hallar el radio de la esfera que es tangente a los tres conos y al plano que pasa por sus vértices.*

Se puede imaginar con bastante facilidad la configuración de los cuerpos de la que se trata en los datos del problema, pero es muy difícil dibujarla. Por otra parte, no es necesario dibujar "el aspecto general" de esta figura para la resolución del problema, es suficiente imaginarla. Si se describe este aspecto general, puede decirse que la esfera está colocada en un "embudo" entre tres conos iguales (que están en un

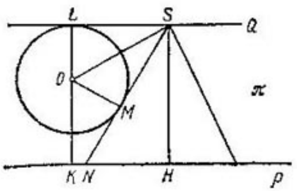

Fig. 164

mismo plano horizontal P de tal modo que sus bases son tangentes en pares una a otra exteriormente) y la dimensión de la esfera es tal que es tangente al "techo", es decir, al plano Q dispuesto en los tres vértices de los conos.

Sin embargo, antes de resolver el problema es preciso especificar el sentido de las palabras "la esfera está colocada en un "embudo" entre los conos", darles un sentido matemático estricto. Es evidente que la esfera tiene un solo punto común con la superficie lateral de cada uno de los conos o, como se dice, es tangente a la superficie lateral exteriormente. ¿Qué significa esto? Esto significa que al trazar un plano secante por la altura del cono y por el centro de la esfera, el círculo mayor obtenido en la sección de la esfera es tangente exteriormente al lado lateral del triángulo isósceles que es la sección del cono (fig. 164). En esto consiste *la definición* de la tangencia de la esfera, que está situada fuera del cono, a la superficie lateral del cono. En otros términos, si M es el punto de tangencia de la esfera al cono, ésta es tangente a la generatriz SMN del cono (de vértice S) en el punto M, y el radio OM de la esfera es perpendicular a dicha generatriz.

Supongamos ahora que la fig. 164 muestra la sección de uno de los conos de nuestra configuración, de la esfera y de los planos P y Q (los planos de las bases de los conos y los de sus vértices) por el plano π que pasa por la altura SH de este cono y el centro O de la esfera (los dos conos restantes no están representados). El hecho de que el plano secante π será perpendicular a los planos paralelos P y Q se deduce de que el primero pasa por la altura SH del cono, la que es perpendicular al plano P de su base y, por lo tanto, perpendicular al plano Q.

Sea M el punto de tangencia de la esfera y del cono; en este caso, en virtud de lo expuesto anteriormente, el círculo mayor formado en la sección de la esfera por el plano π es tangente a la generatriz NS del cono en el punto M. No obstante, el hecho de que el mismo círculo es tangente a la recta en la que se intersecan los planos π y Q, requiere una demostración especial.

Designemos por L el punto de tangencia de la esfera al plano Q. Cualquier recta en el plano Q que pase por el punto L, y en particular, la recta LS, será tangente a la esfera, es decir, será perpendicular al radio OL; por eso $OL \perp LS$. Puesto que el radio OL de la esfera trazado al punto de tangencia es perpendicular al plano Q y, por consi-

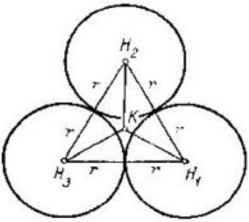

Fig. 165

guiente, $OL \parallel SH$ como dos perpendiculares a un mismo plano Q. Sin embargo, dos rectas paralelas se encuentran en un mismo plano, de lo que se deduce que el radio OL se halla en el plano π que pasa por SH y el punto O. Es decir, el punto L de tangencia de la esfera al plano Q se sitúa en el plano π. Esto significa a su vez que la recta LS es la línea de intersección de los planos π y Q y es tangente al círculo mayor formado en la sección de la esfera por el plano π. En efecto, la recta LS pasa por el extremo del radio OL de este círculo mayor perpendicularmente a OL.

Prolonguemos el segmento LO hasta la intersección con la recta NH en el punto K. Es evidente que $LSHK$ es un rectángulo, de donde se deduce, en particular, que $\angle LSH = 90°$ y $KH = LS$. Como $\angle NSH = \alpha/2$ según los datos, en este caso, uniendo los puntos O y S, hallaremos sin dificultad que $\angle OSM = (\pi - \alpha)/4$ y por eso, valiéndonos del triángulo OSM,

$$SM = R\operatorname{cotg}\frac{\pi-\alpha}{4},$$

donde R es el radio buscado de la esfera. Si se toma en cuenta que $LS = SM$ (como dos tangentes trazadas desde un punto a una misma circunferencia), obtendremos que

$$KH = R\operatorname{cotg}\frac{\pi-\alpha}{4}.$$

De aquí se deduce que la distancia entre la proyección K del centro O de la esfera sobre el plano P y el centro del cono no depende de cuál de los tres conos dados está en consideración. Esto es, el punto K equidista de los tres centros de las bases de los conos y por eso KH puede hallarse fácilmente (fig. 165) como el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo regular, cuyo lado es $2r$ y, precisamente, $KH = 2r\sqrt{3}$. Ahora tenemos que

$$R = \frac{2r}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\ [1].$$

EJERCICIOS:

1. En una esfera de radio R está inscrito un cono circular recto. Hallar la superficie lateral del cono si su altura es igual a h.

2. El lado de un tetraedro regular es igual a a. Determinar el radio de la esfera que es tangente a las caras laterales del tetraedro en los puntos que se encuentran en los lados de la base.

---

[1] Señalemos en adición a la solución cumplida que el ángulo α en la sección axial del cono satisface siempre a las desigualdades $0 < \alpha < \pi$ y, por lo visto, la fórmula obtenida para el radio de la esfera tiene sentido con todas estas α. Sin embargo, esto no significa que con cualquier α existe la configuración geométrica de que se trata en el problema: es fácil comprender que si el ángulo α es grande, es decir, los conos son anchos y bajos, el radio de la esfera que es tangente a su esfera será mayor, y la esfera pasará por encima del plano que pasa por los vértices de los conos. Para la existencia de la esfera con propiedades requeridas es, evidentemente, necesario y suficiente que el punto de intersección de la bisectriz SO y la recta KL se proyecte sobre la generatriz del cono y no sobre su prolongación, o sea, que se cumpla la desigualdad $SM < l$ ó, lo que es lo mismo, $2r/\sqrt{3} < r \operatorname{cosec}(\alpha/2)$, de donde $\operatorname{sen}(\alpha/2) < \sqrt{3}/2$, es decir, $\alpha < 2\pi/3$. Precisamente esta es la restricción que está impuesta para α por los datos del problema.

3. En un cono circular recto está inscrita una esfera. El radio del círculo de tangencia de la superficie de la esfera y de la superficie lateral del cono es igual a r. El radio de la base del cono es R. Determinar la superficie lateral de la esfera.

4. En un cono truncado, cuyo volumen es V, está inscrita una esfera que es tangente tanto a la superficie lateral como a las dos bases. El radio de la esfera es igual a R. ¿Qué ángulo forman la generatriz del cono y la base mayor?

5. En un cono circular recto está inscrita una esfera, cuya superficie es igual al área de la base del cono. ¿En qué relación se divide la superficie lateral del cono por la línea de tangencia de la esfera y del cono?

6. Una pirámide de base pentagonal está circunscrita a un cono circular recto, cuya altura es igual al radio de la base. La superficie total de la pirámide es dos veces mayor que la del cono. Hallar el volumen de la pirámide si la superficie lateral del cono es igual a $\pi\sqrt{2}$.

7. La base de la pirámide es un triángulo rectángulo; las caras laterales que pasan por los catetos forman con la base los ángulos de 30° y 60°. A la pirámide está circunscrito un cono circular recto. Determinar el volumen del cono si la altura de la pirámide es igual a h.

8. En una esfera está inscrito un cilindro circular recto. ¿Cuántas veces el volumen de la esfera es mayor que el del cilindro si se sabe que la relación del radio de la esfera al radio de la base del cilindro es dos veces menor que la relación de la superficie de la esfera a la superficie lateral del cilindro?

9. En una esfera de radio a está inscrito un tetraedro regular. Hallar el volumen del tetraedro.

10. En una pirámide regular de base triangular la relación entre los radios de las esferas circunscrita e inscrita es igual a 3. Hallar la relación entre el volumen de la pirámide y el de la esfera inscrita.

11. La base de una pirámide es un triángulo isósceles, cuyos lados laterales son iguales a b; las caras laterales que les corresponden son perpendiculares al plano de la base y forman entre sí el ángulo α. El ángulo entre la tercera cara lateral y el plano de la base es también α. Hallar el radio de la esfera inscrita en la pirámide

12. Hallar el volumen de una pirámide regular de base triangular conociendo el radio r de la esfera inscrita en la pirámide y el ángulo de inclinación α de su cara lateral respecto a la base.

13. En un cono truncado, cuya generatriz tiene la longitud l y forma con la base el ángulo α, está inscrita una esfera. Determinar el radio del círculo, por el cual la esfera es tangente al cono truncado.

14. En un sector esférico está inscrita una esfera. El radio de la circunferencia por la que la esfera es tangente al sector es igual a r. El plano diametral del sector esférico corta de éste un sector circular con el ángulo central 2φ. Determinar el radio del sector esférico.

15. La arista de un cubo es a. Una esfera con el centro O interseca tres aristas (que concurren en el vértice A) en sus puntos medios. Desde el punto B de la intersección de la esfera con una de las aristas del cubo se ha bajado una perpendicular a la diagonal del cubo que pasa por el vértice A, de modo que el ángulo entre la perpendicular y el radio OB se divide por la arista del cubo en dos partes iguales. Hallar el radio de la esfera.

16. En un cono se han colocado cinco esferas iguales. Cuatro de éstas se encuentran en la base del cono de modo que cada una de las cuatro esferas es tangente a otras dos, dispuestas en la base, y a la superficie lateral del cono. La quinta esfera es tangente a la superficie lateral y a las otras cuatro esferas. Determinar el volumen del cono si se conoce que el radio de cada esfera es igual a R.

17. Dos esferas iguales de radio r son tangentes una a otra y a las caras de un ángulo diedro igual a α. Hallar el radio de la esfera que es tangente a las caras del ángulo diedro y a las dos esferas dadas.

18. La altura de un cono es 4 veces mayor que el radio de la esfera inscrita en el cono. La generatriz del cono es l. Hallar la superficie lateral del cono y el radio de la esfera circunscrita al cono.

19. La superficie lateral de una pirámide regular de base triangular con el lado de la base a es 5 veces mayor que la superficie de la base. Hallar el volumen del cono inscrito en la pirámide.

20. Una esfera de radio r es tangente a todas las aristas de una pirámide regular de base cuadrangular cuyo lado de la base es a. Encontrar el volumen de la pirámide.

21. En un cubo, cuya arista es a, está inscrita una esfera. Determinar el radio de otra esfera que es tangente a tres caras del cubo y a la primera esfera.

22. En la pirámide $SABC$ (S es el vértice, ABC es la base) se da: $AB = AC = a$, $BC = b$; la altura de la pirámide pasa por el punto medio de la altura AD de la base; el ángulo diedro τ formado por las caras SBC y ABC es igual a $\pi/4$. Un cilindro, cuya altura es igual al diámetro de la base, está inscrito en la pirámide de tal manera que una de sus bases es tangente a las caras del ángulo diedro τ, mientras que la otra lo es a las caras del ángulo triedro A, y el eje del cilindro es paralelo a AD. Hallar el radio de la base del cilindro.

23. La arista de un cubo es a. Hallar el volumen de un cilindro circular recto inscrito en el cubo de tal modo que su eje es la diagonal l del cubo, y las circunferencias de las bases son tangentes a aquellas diagonales de las caras del cubo que no tienen puntos comunes con la diagonal l del cubo.

24. En la base de un cono circular recto se hallan tres esferas de radio r. En éstas se ha colocado una cuarta esfera del mismo radio. Cada una de las cuatro esferas es tengente a la superficie lateral del cono y a las otras tres esferas. Encontrar la altura del cono.

25. Tres esferas de radio r están situadas en la base inferior de un prisma regular triangular, cada una de las cuales es tangente a otras dos y a dos caras laterares del prisma. En las esferas se ha situado una cuarta esfera que es tangente a todas las caras laterales y a la base superior del prisma. Determinar la altura del prisma.

26. Cuatro esferas iguales de radio r son tangentes exteriormente una a otra, de manera que cada una es tangente a las otras tres. Hallar el radio de la esfera que es tangente a las cuatro esferas y que las contiene en su interior.

27. En un cono circular recto está inscrita una esfera. La relación entre los volúmenes del cono y de la esfera es igual a dos. Hallar la relación entre la superficie total del cono y la de la esfera.

28. En una pirámide regular de base triangular la altura es h y el lado de la base es a. Uno de los vértices de la base es el centro de la esfera que es tangente a la cara opuesta de la pirámide. Hallar el área de aquellas partes de las caras la terales de la pirámide que se encuentran en el interior de la esfera.

29. Se da la pirámide regular de base triangular $SABC$ (S es el vértice) con el lado de la base a y la arista lateral b ($b > a$). La esfera se sitúa sobre el plano de la base ABC, es tangente a este plano en el punto A y, además, es tangente a la arista lateral SB. Hallar el radio de la esfera.

30. Se da la pirámide regular de base cuadrangular $SABCD$ (S es el vértice) con el lado de la base a y la arista lateral a. La esfera con el centro en el punto O pasa por el punto 4 y es tangente a las aristas SB y SD en sus puntos medios. Hallar el volumen de la pirámide $OSCD$.