PARTE IV

PROBLEMAS "NO TÍPICOS"

Todos los problemas examinados en las partes precedentes prácticamente tienen un aspecto común, "escolar", y sus soluciones se hallan por medio de los métodos habituales y con ayuda de los razonamientos corrientes. Sin embargo, se encuentran a menudo problemas de otro tipo. En particular, esto se refiere a las universidades y centros de enseñanza superior, donde las Matemáticas gozan de gran importancia. Para abreviar, a estos problemas les denominamos "no típicos".

Estos últimos llegan a ser de diferentes tipos. Algunos de ellos tienen un aspecto singular, debido a que, al principio, no está del todo claro cómo resolverlos. También se encuentran otros, enmascarados: por su aspecto exterior, por ejemplo, parecen a una ecuación acostumbrada, sin embargo los métodos ordinarios no sirven para resolverla. Con el fin de hallar la solución de los terceros, hace falta un razonamiento lógico muy fino y exacto. En cuarto lugar . . ., en general, se pueden enumerar muchas particularidades de toda especie de estos problemas "no típicos" y es poco probable que todas puedan citarse.

Estos problemas "no típicos", no comunes, exigen una comprensión definida y un buen dominio de las distintas partes de las Matemáticas y una cultura lógica amplia. Aparte de esto es necesario tener cierta preparación psicológica. ¡Cuántas veces sucede que un problema, el cual, en realidad, no es difícil, sin embargo, se expone de tal modo que motiva dificultades insuperables! Mientras que su solución sólo requiere pocas palabras.

Sin duda, es imposible señalar todos los métodos para resolver los problemas "no típicos". Aquí es necesario utilizar las gráficas, unas u otras propiedades de las funciones y las desigualdades. En resumen, para resolver estos problemas *la lógica* es lo fundamental, por su importancia.

Conviene poner de manifiesto, muy en particular, que estos problemas y los métodos "no típicos" de su solución no salen, de ningún modo, de los límites del programa de las escuelas secundarias. Lo más probable su "originalidad" no consista en la complejidad sino en la singularidad. No obstante, nosotros abrigamos esperanzas en que los métodos "no típicos" aplicados más abajo para resolver los problemas "no típicos", después de ser estudiados atentamente por el lector, se conviertan en típicos y lleguen a ser los métodos corrientes de resolución.

Aquí se analizan, detalladamente, las resoluciones de algunos problemas "no típicos", y se dan, en muchos casos, varias resoluciones con diferentes interpretaciones de los problemas. Señalemos a la vez que estas resoluciones no son complejas por su propia naturaleza y que no son difíciles de comprender. Es más complicado hallar, independientemente, aquellas resoluciones. Por lo tanto, se recomienda resolver cada uno de los problemas antes de ver su solución.

Además, para estos problemas es recomendable distinguir con claridad: una solución "en borrador" y una "en limpio". Al comenzar a resolver un problema, todos los cálculos y razonamientos se realizan a ciegas y en ausencia del método determinado, sin conocer aún cúales de éstos son en realidad necesarios, y cúales serán más tarde innecesarios. De ese modo se obtiene, por último, la solución "en borrador". Esta solución, como regla, contiene pasos lógicos que no son del todo claros, formulaciones inexactas y muchas afirmaciones de sobra. Sin embargo, no representa ningún interés el modo de obtención de las afirmaciones finales. Es necesario que el problema sea resuelto y que la solución sea argumentada con bastante exactitud, es decir, se necesita la solución "en limpio". Esta última no debe, desde luego, copiar exactamente todo el curso de la solución "en borrador". ¿Con qué fin ha de repetirse el camino recorrido a ciegas? Es por esto que la solución "en borrador" obtenida hace falta redactarla en forma más adecuada.

En una serie de ejemplos a examinar más adelante se dan ambas soluciones. No obstante, en la mayoría de los casos se muestran solamente las soluciones "en borrador", presentando al lector la posibilidad de resolver un ejercicio, provechoso en exceso, para pasarlas "en limpio".

§ 1. PROBLEMAS "NO TÍPICOS" POR SU ASPECTO EXTERIOR

Para entender cuáles problemas pueden considerarse como "no típicos por su aspecto", es suficiente ver los datos de los problemas que se analizan más abajo. Es evidente que en estos problemas las transformaciones habituales, fórmulas algebraicas o trinogométricas, no conducen a la solución si al mismo tiempo no se aplican razonamientos de otro género.

Estos razonamientos, como regla, están vinculados con desigualdades, gráficas y, en general, con las diferentes propiedades de las funciones.

1. *Resolver la ecuación* $2 \operatorname{sen} x = 5x^2 + 2x + 3$.

Para encontrar un método de resolver esta ecuación, examinemos el comportamiento de las gráficas de su primer y segundo miembros. Si estas gráficas se intersecan, las abcisas de los puntos de intersección serán las raíces de la ecuación dada; en caso contrario, la ecuación no tiene raíces. La fig. 166 muestra que la ecuación no tiene raíces.

Con esto termina la solución "en borrador". Sin embargo, esta solución no puede considerarse como la solución "en limpio", ya que la gráfica no es la demostración. Por eso hace falta cerciorarse de que esta ecuación no tiene raíces. Sin duda alguna, nuestro razonamiento gráfico no es inútil, al contrario, para hallar la demostración estricta aprovecharemos ese razonamiento.

Para esto es necesario tener una idea clara de las propiedades de las gráficas gracias a las cuales es evidente que estas últimas no se intersecan. Esto se deduce de que la gráfica de la función $y = 5x^2 + 2x + 3$ en todos los puntos se encuentra *por encima* de la gráfica

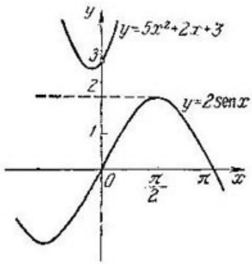

Fig. 166

de la función $y = 2 \operatorname{sen} x$. Esto significa, traduciéndolo del lenguaje geométrico al algebraico, que para cualquier valor de x se satisface la desigualdad

$$5x^2 + 2x + 3 > 2 \operatorname{sen} x.$$

Precisamente, vamos a demostrar esta desigualdad a continuación. En efecto, por un lado, para cualquier x

$$5x^2 + 2x + 3 = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{14}{5} \geqslant \frac{14}{5} > 2,$$

y por otro lado, $2 \operatorname{sen} x \leqslant 2$ también para cualquier x y por esto, en el caso de cualquier x tiene lugar la desigualdad a demostrar.

Empero, ahora, cuando se tiene la resolución estricta, o sea, la demostración exacta de que la ecuación no posee raíces, ¿para qué mencionar todos los razonamientos precedentes? Estos últimos han cumplido con su cometido, es decir, han ayudado a encontrar la demostración estricta. Por lo tanto, la solución "en limpio" puede ser, por ejemplo, la siguiente:

"La ecuación dada no tiene raíces: en realidad, para cualquier valor de x tienen lugar las desigualdades

$$5x^2+2x+3=5\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{5}\geqslant\frac{14}{5}>2 \quad \text{y} \quad 2\geqslant 2\operatorname{sen}x,$$

es decir, $5x^2+2x+3>2\operatorname{sen}x$, lo que hace falta demostrar".

En esta solución está oculto el hecho de que al principio hemos utilizado razonamientos no estrictos — el problema ha sido resuelto con ayuda de las gráficas.

2. *Resolver la ecuación* $\operatorname{sen}x=x^2+x+1$.

Ante todo, deben trazarse las gráficas de ambos miembros de la ecuación (fig. 167). Otra vez, en la figura las gráficas no se intersecan, y por consiguiente, la ecuación no tiene raíces. Sin embargo, esta demostración no puede ser utilizada, ya que en este caso la parábola se sitúa por debajo de la recta $y=1$.

No obstante, aquí la gráfica muestra cómo buscar la demostración exacta. De las propiedades del trinomio cuadrático se deduce que para $x>0$ y para $x<-1$ se cumple la desigualdad $x^2+x+1>1$, ya

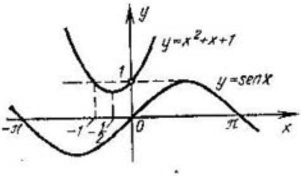

Fig. 167

que para todo valor de x tiene lugar la desigualdad $x^2+x+1>\operatorname{sen}x$. Y en el intervalo restante $-1\leqslant x\leqslant 0$ son válidas las desigualdades $x^2+x+1>0$ y $\operatorname{sen}x\leqslant 0$, así que en este intervalo la ecuación tampoco tiene raíces.

A veces, no es necesario trazar gráficas para resolver estas ecuaciones. Además, la construcción de estas gráficas puede resultar muy complicada. En realidad, al resolverlas conviene utilizar no sólo gráficas sino distintas desigualdades, mientras que las gráficas muestran solamente los caminos de la demostración. En los casos más complejos hay que buscar formalmente la demostración sin tener una representación de la figura geométrica, lo que es un poco más complejo.

3. *Resolver la ecuación*

$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}.$$

Es evidente que es mejor no intentar trazar la gráfica del primer miembro. En este caso hay que cifrar todas las esperanzas en las desigualdades. Por un lado, para cualquier x tiene lugar la desigualdad $2\cos^2\frac{x^2+x}{6}\leqslant 2$ y, por otro, $2^x+2^{-x}\geqslant 2$, que es una suma de magnitudes positivas recíprocamente inversas. Por lo tanto, los miembros primero y segundo de la ecuación inicial pueden igualarse entre sí cuando y sólo cuando ambos son iguales a 2.

En otras palabras, debe satisfacerse el sistema de *dos* ecuaciones con *una* incógnita

$$\begin{cases} 2\cos^2\dfrac{x^2+x}{6}=2,\\ \quad 2^x+2^{-x}=2.\end{cases}$$

La segunda ecuación de este sistema tiene la raíz única $x=0$. Esta raíz satisface también a la primera ecuación, es decir, es la solución única del sistema, y junto con él, de la ecuación inicial.

Los problemas siguientes, gracias a la utilización de las propiedades de las funciones trigonométricas, también se reducen a los sistemas de dos ecuaciones con una incógnita.

4. *Resolver la ecuación* $\cos^7 x+\operatorname{sen}^4 x=1$.

Si sabemos que $\cos^7 x\leqslant\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^4 x\leqslant\operatorname{sen}^2 x$, tenemos que el primer miembro de la ecuación dada no supera a la unidad y es igual a la unidad solamente cuando en ambas desigualdades no estrictas, citadas más arriba, tiene lugar la igualdad, es decir, se cumple el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\cos^7 x=\cos^2 x,\\ \operatorname{sen}^4 x=\operatorname{sen}^2 x.\end{cases}$$

La primera ecuación se satisface si $\cos x=0$ y si $\cos x=1$. Sin embargo, para estos valores de x la segunda ecuación se satisface también: si $\cos x=0$, entonces $\operatorname{sen}^2 x=1$, mientras que si $\cos x=1$, entonces $\operatorname{sen} x=0$. Por esto, las soluciones del sistema, y al mismo tiempo de la ecuación inicial, serán: $x=\pi/2+k\pi$ y $x=2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera.

5. *Resolver la ecuación* $\operatorname{sen}^4 x-\cos^7 x=1$.

El razonamiento utilizado en el problema anterior aquí no puede ser aplicado directamente, pero es posible modificarlo en algo. Es claro que de esta ecuación se deduce que $\cos^7 x\leqslant 0$ (en otro caso, $\operatorname{sen}^4 x>1$), es decir, $\cos x\leqslant 0$. No obstante, entonces $|\cos^7 x|=-\cos^7 x$ y la ecuación se representa de otro modo

$$\operatorname{sen}^4 x+|\cos x|^7=1.$$

Después de esto, es posible razonar así, como se hizo anteriormente:

$$\operatorname{sen}^4 x\leqslant\operatorname{sen}^2 x,\quad |\cos x|^7\leqslant|\cos x|^2=\cos^2 x,$$

y de resultas obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^4 x = \operatorname{sen}^2 x, \\ |\cos x|^7 = |\cos x|^3. \end{cases}$$

La segunda ecuación se satisface cuando $|\cos x| = 0$ y $|\cos x| = 1$. De $|\cos x| = 0$ obtenemos las soluciones $x = \pi/2 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, que satisfacen también la primera ecuación. Si $|\cos x| = 1$, entonces $\cos x = -1$ (ya que $\cos x \leqslant 0$), y $x = (2k+1)\pi$; estos valores satisfacen por igual la primera ecuación. Por consiguiente, la solución de la ecuación inicial se da por dos series:

$$x = \pi/2 + k\pi \text{ y } x = (2k+1)\pi,$$

donde k es un número entero cualquiera.

Indiquemos otro modo de resolución que reduce sencillamente la ecuación dada a la precedente. Sustituyendo x por $\pi - y$, se obtiene la ecuación $\operatorname{sen}^4(\pi - y) - \cos^7(\pi - y) = 1$, o aplicando las fórmulas de reducción, la ecuación

$$\operatorname{sen}^4 y + \cos^7 y = 1,$$

examinada más arriba. Sus soluciones son: $y = \pi/2 + k\pi$ e $y = 2k\pi$, de donde, en vista de que $x = \pi - y$, tenemos

$$x = \pi/2 - k\pi \text{ y } x = \pi - 2k\pi,$$

siendo k un número entero cualquiera.

6. *Resolver la ecuación*

$$\cos^2[\pi/4(\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos^2 x)] - \operatorname{tg}^2(x + \pi/4 \operatorname{tg}^2 x) = 1.$$

Ya que el cuadrado del coseno de cualquier argumento no supera a la unidad, la ecuación dada sólo se cumple en el caso en que simultáneamente

$$\cos^2[\pi/4(\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos^2 x)] = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}(x + \pi/4 \operatorname{tg}^2 x) = 0.$$

De ese modo, hemos llegado de nuevo al sistema de dos ecuaciones con una incógnita. Para su resolución conviene hallar las raíces de la primera ecuación y luego, sustituyéndolas en la segunda, elegimos aquéllas que satisfacen esta segunda ecuación y, por lo tanto, el sistema.

De la primera ecuación se deduce de inmediato

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos^2 x = 4k;$$

donde k es un número entero. Sin embargo

$$|\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos^2 x| \leqslant |\operatorname{sen} x| + \sqrt{2}|\cos^2 x| \leqslant 1 + \sqrt{2} < 4,$$

y por eso la última ecuación no tiene solución, siendo $k \neq 0$. Examinemos $k = 0$, es decir, resolvamos la ecuación $\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$.

Al sustituir $\cos^2 x$ por $1-\operatorname{sen}^2 x$, se obtiene la ecuación cuadrática $\operatorname{sen} x+\sqrt{2}-\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x=0$, de la cual $\operatorname{sen} x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (la segunda raíz de la ecuación cuadrática es mayor que 1). Por consiguiente, obtenemos las soluciones de la primera ecuación:

$$x_1=-\pi/4+2n\pi,\quad x_2=5\pi/4+2n\pi,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

La solución de nuestra ecuación la hemos escrito en forma de dos series en vez de la forma más difundida $x=(-1)^{n+1}\pi/4+n\pi$ para facilitar la resolución posterior. En general, la escritura abreviada de la resolución, en forma de una serie, es muy cómoda para el resultado final, ya que es más compacta. En los casos cuando hay que practicar con estas soluciones cualesquier cálculos y razonamientos, la representación en forma de dos series es más cómoda.

Analicemos la primera serie $x=-\pi/4+2n\pi$. Sustituyamos estos valores de x en la segunda ecuación, ya que es evidente que $\operatorname{tg}^2 x=1$, entonces para estos valores de x, la segunda ecuación toma la forma siguiente: $\operatorname{tg}(-\pi/4+2n\pi+\pi/4)=0$, es decir, se convierte en identidad. Por lo tanto, todos los valores de x de la primera serie son las soluciones del sistema y junto con él de la ecuación inicial.

Al analizar análogamente la segunda serie, nos cercioramos de que ningún valor de ésta puede ser raíz de la segunda ecuación y no satisface la ecuación inicial.

Así, las soluciones de la ecuación inicial se determinan por la fórmula

$$x=-\pi/4+2n\pi,$$

donde n es un número entero cualquiera.

El tipo de problemas difundido, no comunes por su aspecto exterior, son ecuaciones y desigualdades "aisladas" con dos o más incógnitas, y sistemas de ecuaciones en los cuales el número de incógnitas no es igual al número de ecuaciones. Ya hemos resuelto en los ejemplos precedentes varios problemas similares, o sea, sistemas de dos ecuaciones con una incógnita. Los problemas en los cuales el número de las incógnitas es mayor que el de las ecuaciones o desigualdades proporcionan, por lo general, grandes dificultades psicológicas: por lo visto, esto está relacionado con el criterio de que, cuando se tiene un menor número de datos es imposible determinar un mayor número de incógnitas. Más adelante, los problemas examinados demuestran que este criterio no concuerda con la realidad.

7. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x=2\operatorname{sen}^2 y,\\ \operatorname{sen}^2 y+\cos^2 z=1.\end{cases}$$

Este sistema tiene tres incógnitas y sólo dos ecuaciones. No obstante, de inmediato es evidente que en la primera ecuación, el primer miembro es $\geqslant 2$ como suma de las magnitudes recíprocamente inversas, mientras que el segundo miembro es $\leqslant 2$. Por eso, la primera ecuación es equivalente al sistema de dos ecuaciones.

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2, \quad \operatorname{sen}^2 y = 1.$$

Por lo tanto, la particularidad del sistema dado "está eliminada" completamente, es decir, tenemos un sistema ordinario de tres ecuaciones con tres incógnitas, y al mismo tiempo, muy sencillo. En efecto, de las dos nuevas ecuaciones y de la segunda dada se obtienen los resultados siguientes: $\operatorname{tg}^2 x = 1$, $\cos^2 z = 0$. Por eso, las soluciones del sistema dado se obtienen mediante las fórmulas siguientes:

$$x = \pi/4\,(2k+1), \quad y = \pi/2 + l\pi, \quad z = \pi/2 + m\pi,$$

donde k, l, m son números enteros cualesquiera.

8. *Resolver la desigualdad*

$$-|y| + x - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geqslant 1.$$

Ante todo anotamos que *resolver la desigualdad con dos incógnitas* x e y, naturalmente, no es otra cosa que obtener todos los pares de números x, y, y sustituirlos en la desigualdad dada, debido a lo que esta última se convierte en una desigualdad numérica exacta. Por lo visto, todos estos pares pueden mostrarse directamente en la resolución de los sistemas de ecuaciones ordinarios (su número puede ser infinitamente grande, por ejemplo, para los sistemas trigonométricos); o geométricamente, expresando una zona compuesta a base de los puntos respectivos del plano. Con este método geométrico ya hemos resuelto el problema 30 del § 13 de la Parte I. Por consiguiente, aquí es natural reducir la desigualdad dada a tal forma que sus soluciones puedan exponerse fácilmente en el plano.

Luego, la desigualdad se escribe en la forma siguiente

$$x - |y| \geqslant \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + 1.$$

Ahora es evidente que toda solución debe satisfacer la condición $x - |y| \geqslant 0$, y al cumplir esta condición, ambos miembros de esta desigualdad no son negativos (en el RVA). Por eso podemos elevarlos al cuadrado y obtener la desigualdad equivalente en el RVA

$$-x\,|y| \geqslant \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$

No obstante, en el intervalo analizado $x \geqslant |y| \geqslant 0$, por esto el primer miembro de la desigualdad obtenida no es positivo, mientras que el segundo no es negativo. Por lo tanto, esta desigualdad se satisface únicamente en el caso en que ambos miembros sean iguales a cero:

$$x\,|y| = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

La primera de estas ecuaciones significa que x o y es igual a cero. Si

$x=0$, entonces de la condición $x \geqslant |y|$ se deduce que $y=0$, y que el par $x=0$, $y=0$ no se encuentra en el RVA de la desigualdad inicial. Por consiguiente, $y=0$, y de la segunda ecuación obtenemos (si se tiene en cuenta $x \geqslant 0$) que $x=1$.

La sustitución directa en la desigualdad inicial demuestra que el par obtenido $x=1$, $y=0$ satisface esta desigualdad. Es interesante señalar que, aunque hemos estado "preparados" para la representación geométrica de la solución, no necesitamos de ella para apuntar el resultado.

9. *Hallar todos los pares de los números x, y, que satisfacen la ecuación*

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}.$$

Primera solución. Sin duda, en vez de esta formulación tan larga, es mejor decir: resolver la ecuación. La ecuación dada permite la solución "casi típica" que se reduce, como veremos ahora, a la solución de la desigualdad trigonométrica. La primera idea que puede surgir al resolver una ecuación con dos incógnitas es la siguiente: ¿Es posible expresar una incógnita por otra? Luego, dando ciertos valores a una incógnita, podrían obtenerse los valores respectivos de otra incógnita. Los pares obtenidos de ese modo serán las soluciones de la ecuación. Por lo tanto, el problema será resuelto.

Intentemos sustituir y por x. Nuestra ecuación puede escribirse en la forma siguiente:

$$\cos x + 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+y\right)\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Es claro que $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ $\left(\text{en otro caso } \cos x = \frac{3}{2}\right)$ y por eso

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+y\right) = \frac{\frac{3}{2}-\cos x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Consideraremos esta ecuación como una ecuación respecto a y. Ella puede ser resuelta en el caso y solamente en el caso cuando su segundo miembro por el módulo es menor o igual a 1, es decir, cuando

$$\left|\frac{\frac{3}{2}-\cos x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right| \leqslant 1.$$

Esta desigualdad (ya que $3/2-\cos x>0$) se puede escribir en la forma

$$\frac{3}{2}-\cos x \leqslant 2\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|.$$

Pero $\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$, y designando $\left|\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ por t, obtendremos la desigualdad $4t^2 - 4t + 1 \leqslant 0$ que se satisface solamente para $t = 1/2$.

Así, el segundo miembro de la ecuación examinada respecto a y no supera por el módulo a la unidad sólo en el caso cuando $\left|\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| = 1/2$, es decir, cuando $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$. Para los demás valores de x esta ecuación no tiene soluciones. Examinemos por separado los casos: $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$ y $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Si $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$, entonces $x = (-1)^k \pi/3 + 2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera. En este caso, para cualquier valor de k

$$\cos x = \cos\left[(-1)^k \pi/3 + 2k\pi\right] = \frac{1}{2},$$

y la ecuación examinada respecto a y toma la forma $\text{sen}\left(\frac{x}{2} + y\right) = 1$. De aquí $\frac{x}{2} + y = \pi/2 + 2n\pi$ y, por consiguiente,

$$y = 2n\pi + \pi/2 - \frac{x}{2} = 2n\pi + \pi/2 - (-1)^k \pi/6 - k\pi.$$

De esa manera hemos obtenido una serie de soluciones de la ecuación inicial

$$x = (-1)^k \pi/3 + 2k\pi, \quad y = \pi/2 + (-1)^{k+1}\pi/6 + (2n - k)\pi,$$
$$n,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

En forma análoga se estudia el caso de $\text{sen}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, que conduce a la segunda serie de soluciones:

$$x = (-1)^{k+1} \pi/3 + 2k\pi, \qquad y = -\frac{\pi}{2} + (-1)^k\pi/6 + (2n - k)\pi,$$
$$n,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Señalemos que los valores de y se hallan con más facilidad, si se toma en consideración que la igualdad $\left|\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}$ es equivalente a la igualdad $\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$, así que $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$.

Segunda solución. La ecuación dada permite también otra solución que se base en el agrupamiento acertado. Si utilizamos fórmulas trigonométricas, la ecuación se reduce a la forma siguiente:

$$4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + 1 = 0.$$

Los primeros dos sumandos del primer miembro son fáciles de completar hasta el cuadrado de la diferencia, después de lo cual la ecuación se escribe de ese modo

$$\left(2\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\operatorname{sen}^2\frac{x-y}{2}=0.$$

Es del todo evidente que la última ecuación equivale al sistema:

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2}=\cos\dfrac{x-y}{2}, \\ \operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2}=0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación de este sistema obtenemos: $x-y=2k\pi$, o $y=x-2k\pi$, siendo k cualquier número entero. Al sustituir el valor de y en la primera ecuación, obtenemos

$$2\cos(x-k\pi)=\cos k\pi.$$

Ya que $\cos(x-k\pi)=(-1)^k\cos x$ y $\cos k\pi=(-1)^k$, de aqui se deduce que $\cos x=\frac{1}{2}$, es decir, $x=\pm\pi/3+2n\pi$, donde n es un número entero cualquiera.

Por lo tanto, la solución de la ecuación inicial se da por los pares siguientes:

$$x=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi,\quad y=\pm\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi,$$
$$n,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

(en las fórmulas se toman simultáneamente ambos signos superiores o inferiores).

Mencionemos que las fórmulas obtenidas por medio de esta solución son poco parecidas a las fórmulas obtenidas mediante la primera solución. Con todo, estas fórmulas describen un mismo sin número de pares (x, y), aunque es difícil cerciorarse directamente de este hecho.

Resulta interesante comparar las soluciones citadas más arriba: la segunda solución, por su aspecto exterior, es muy sencilla; ésta se basa en el agrupamiento hallado acertadamente, sin embargo, en este caso, hay siempre algún artificio y elemento de presunción. Mientras que la primera solución sigue una idea muy natural y sólo representa dificultades técnicas.

El problema siguiente se reduce, en dependencia del método elegido, a la solución de una desigualdad trigonométrica y, luego, a un sistema de desigualdades algebraicas, o a la demostración de una desigualdad trigonométrica. En ambos casos es necesario mostrar cierta ingeniosidad.

10. *Hallar todos los pares de los números x, y, que satisfacen la ecuación*

$$\left(\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\frac{1}{2}\operatorname{sen} y.$$

Primera solución. La idea de la solución es la misma que en el caso de la primera solución del ejemplo precedente: tratamos de expresar y por x. Tenemos la ecuación respecto de y:

$$\operatorname{sen} y = 2\left(\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)^2 + 2\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 - 24.$$

Para poder resolverla, es necesario que el segundo miembro, por su valor absoluto, no supere a la unidad.

Transformemos el segundo miembro; este último es igual a

$$\begin{aligned} 2\left(\operatorname{sen}^4 x + \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\right) + 4 + 2\left(\cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x}\right) + 4 - 24 = \\ = 2(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)\left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x \cos^4 x}\right) - 16 = \\ = 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x)\left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x \cos^4 x}\right) - 16 = \\ = 2\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\operatorname{sen}^4 2x}\right) - 16. \end{aligned}$$

De ese modo, designando $\operatorname{sen}^2 2x$ por z para abreviar, obtenemos una desigualdad doble que asegura la resolución de la ecuación inicial

$$-1 \leqslant 2\left(1 - \frac{z}{2}\right)\left(1 + \frac{16}{z^2}\right) - 16 \leqslant 1.$$

Después de las transformaciones de rigor se obtiene un sistema de dos desigualdades

$$\begin{cases} z^3 + 15z^2 + 16z - 32 \geqslant 0, \\ z^3 + 13z^2 + 16z - 32 \leqslant 0. \end{cases}$$

La primera de estas desigualdades, aunque es cúbica, se resuelve fácilmente mediante el agrupamiento del primer miembro:

$$z^3 - 1 + 15z^2 - 15 + 16z - 16 = (z-1)(z^2 + 16z + 32),$$

y debido a lo cual, esta desigualdad se reduce a la forma

$$(z-1)[z - (8 - 4\sqrt{2})][z - (8 + 4\sqrt{2})] \geqslant 0.$$

Al resolver la última desigualdad (por ejemplo, con ayuda del método de intervalos), obtenemos

$$1 \leqslant z \leqslant 8 - 4\sqrt{2}, \quad z \geqslant 8 + 4\sqrt{2}.$$

Sin embargo, $z = \operatorname{sen}^2 2x \leqslant 1$, por consiguiente de todas las soluciones obtenidas la única que presenta interés es $z = 1$. Al efectuar la sustitución directa se verifica que esta solución satisface también la segunda desigualdad, es decir, es la solución del sistema.

Así, la ecuación respecto de y que necesitamos resolver sólo tiene solución para $z=\operatorname{sen}^2 2x=1$. Sustituyendo $z=1$ en la ecuación para sen y, y utilizando el segundo miembro transformado

$$\operatorname{sen} y=2\left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{16}{z^2}\right)-16,$$

obtenemos que $\operatorname{sen} y=1$. Por consiguiente, la ecuación inicial se ha reducido a un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 2x=1, \\ \operatorname{sen} y=1, \end{cases}$$

cuyas soluciones, como es fácil comprobar, son los pares siguientes:

$$x=\pi/4+k\pi/2, \quad y=\pi/2+2n\pi, \quad k,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Señalemos que para resolver el sistema de desigualdades algebraicas obtenido anteriormente es posible emplear un método menos natural, pero más breve. Precisamente, como $z=\operatorname{sen}^2 2x$, entonces $0\leqslant z\leqslant 1$ y, por lo tanto,

$$z^3+15z^2+16z-32\leqslant 1+15+16-32=0,$$

es decir, el primer miembro de la primera desigualdad no es positivo y será igual a cero sólo cuando $z=1$. Por consiguiente, en el caso de $0\leqslant z\leqslant 1$ esta desigualdad se satisface solamente para $z=1$. La segunda desigualdad se cumple también si $z=1$. Sin duda, idear esta solución es más difícil.

Aclaremos que el éxito del método aplicado para resolver la desigualdad cúbica, relacionado con la separación del factor $z-1$, está garantizado por la sustitución acertada $z=\operatorname{sen}^2 2x$. Si introducimos en vez de z una nueva variable, según la fórmula $t=\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$, la desigualdad que se obtendrá posteriormente, será más complicada y en este caso de su primer miembro se desprenderá el factor $t-\frac{1}{4}$, lo que es difícil de imaginar.

Segunda solución. Transformando el primer miembro de la ecuación dada al igual que en la primera solución, obtenemos la ecuación

$$(2-\operatorname{sen}^2 2x)\left(1+\frac{16}{\operatorname{sen}^4 2x}\right)=16+\operatorname{sen} y.$$

Pero $2-\operatorname{sen}^2 2x\geqslant 1$, $1+\frac{16}{\operatorname{sen}^4 2x}\geqslant 1+16=17$, y ambas desigualdades se convierten en igualdades en el caso de $\operatorname{sen}^2 2x=1$. Por esto, el primer miembro de nuestra ecuación no es menor de 17 y, es evidente, que el segundo miembro no es mayor de 17. Por lo tanto, la ecuación inicial es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 2x=1, \\ \operatorname{sen} y=1, \end{cases}$$

ya obtenido en la primera solución.

Conviene anotar que, aunque la segunda solución es más breve, la primera es más natural; en otras palabras, cada vez es más comprensible el objetivo de esto u otro razonamiento. Al mismo tiempo, en la segunda solución se emplea un método original: comparación de los valores del primer y segundo miembros de la ecuación.

Para resolver la siguiente ecuación con dos incógnitas se utilizan completamente otros razonamientos, no obstante vinculados con las desigualdades. La idea de expresar una incógnita por otra no es aplicable en este caso.

11. *Hallar todos los pares de números x e y, que satisfacen la ecuación*

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{cotg}^2 x \operatorname{cotg}^2 y = 3 + \operatorname{sen}^2 (x+y).$$

Examinemos el primer miembro de esta ecuación. Utilizando la desigualdad $a^4 + b^4 \geqslant 2a^2 b^2$, que se satisface para cualesquier a y b, obtendremos la desigualdad

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y \geqslant 2\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y,$$

además, la igualdad se obtiene solamente para $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y$.

Luego,

$$\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{cotg}^2 x \operatorname{cotg}^2 y \geqslant 2,$$

siendo la suma de magnitudes positivas recíprocamente inversas y la igualdad se obtiene solamente cuando $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y = 1$. Así, el primer miembro de nuestra ecuación es mayor o igual a 4, y con eso es igual a 4 sólo al cumplir a la vez las igualdades

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y, \\ \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y = 1. \end{cases}$$

Por otro lado, $\operatorname{sen}^2 (x+y) \leqslant 1$ y, por consiguiente, el segundo miembro es menor o igual a 4.

De esa manera, la ecuación inicial se satisface únicamente en el caso en que ambos miembros son iguales a 4, lo que tiene lugar, cuando x e y son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y, \\ \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y = 1, \\ \operatorname{sen}^2 (x+y) = 1. \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones tenemos $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y = 1$, es decir, $\operatorname{tg} x = \pm 1$, $\operatorname{tg} y = \pm 1$, y al mismo tiempo son posibles las cuatro combinaciones de signos. En este caso, los ángulos x e y pueden escribirse en la forma

$$x = \pi/4\,(2k+1), \quad y = \pi/4\,(2n+1),$$

donde k y n son números enteros cualesquiera.

De estos ángulos es necesario elegir aquéllos que satisfacen la tercera ecuación del sistema. Con este fin los sustituimos en la tercera ecuación:

$$\operatorname{sen}^2(x+y)=\operatorname{sen}^2\pi/2\,(k+n+1)=$$
$$=\begin{cases}1, \text{ si } k+n+1 \text{ es impar,}\\ 0, \text{ si } k+n+1 \text{ es par.}\end{cases}$$

De aquí se deduce que de las soluciones de las dos primeras ecuaciones deben tomarse los pares k y n para los cuales la suma $k+n$ es par, $k+n=2m$, es decir, $n=2m-k$, donde m es número entero cualquiera.

Así, las soluciones de la ecuación dada son los pares x, y de la forma

$$x=\pi/4\,(2k+1),\quad y=\pi/4\,(4m-2k+1),$$

donde m, k, son números enteros cualesquiera.

Conviene considerar que esta solución es "en borrador" y debe reformarse en una solución "en limpio" más exacta desde el punto de vista de la lógica. Esto se puede efectuar, por ejemplo, del modo siguiente. Reduzcamos el primer miembro a la forma

$$\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+\operatorname{cotg}^2 x\operatorname{cotg}^2 y=$$
$$=(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{cotg}^2 x\operatorname{cotg}^2 y)=$$
$$=(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-\operatorname{cotg} x\operatorname{cotg} y)^2+4.$$

Entonces esta ecuación se convierte en

$$(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-\operatorname{cotg} x\operatorname{cotg} y)^2+1=\operatorname{sen}^2(x+y).$$

El primer miembro de esta ecuación es mayor o igual a la unidad, mientras que el segundo es menor o igual a la unidad. Por consiguiente, esta ecuación se satisface únicamente en el caso en que ambos miembros son iguales a la unidad, o sea, cuando x e y son las soluciones del sistema

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y=0,\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-\operatorname{cotg} x\operatorname{cotg} y=0,\\ \operatorname{sen}^2(x+y)=1.\end{cases}$$

El sistema dado se resuelve como en el caso de la solución "en borrador".

EJERCICIOS:

Resolver las ecuaciones, desigualdades y sistemas:

1. $2^{|x|}=\operatorname{sen} x^2$.
2. $3|\operatorname{sen}\sqrt{x}|=|\cos x|$.
3. $x^2=-\cos x$.
4. $3x^2=1-2\cos x$.
5. $2\cos(x/3)=2^x+2^{-x}$.
6. Demostrar que la ecuación $2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x}{6}=x^2+\frac{1}{x^2}$ no tiene soluciones.

7. $8-x\cdot 2^x+2^{3-x}-x=0.$
8. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x.$
9. $x\cdot 2^x=x(3-x)+2(2^x-1).$
10. $x^x=10^{x-x^2},\ x>0.$
11. $x^2+(x+1)\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{6}=\dfrac{3+x}{2},\ -2\leqslant x\leqslant 0.$
12. $x=\operatorname{sen}\pi\dfrac{x+1}{3}\operatorname{sen}\pi\dfrac{1-x}{3},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$
13. $5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=0.$
14. $x^2+4x\cos xy+4=0.$
15. $\dfrac{|\operatorname{cotg} xy|}{\cos^2 xy}=\log_{1/3}(9y^2-18y+10)+2.$
16. $\log_2\left(\cos^2 xy+\dfrac{1}{\cos^2 xy}\right)=\dfrac{1}{y^2-2y+2}.$
17. $\operatorname{tg}^2\pi(x+y)+\operatorname{cotg}^2\pi(x+y)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}}+1.$
18. $\log_3|\pi x|+\log_{|\pi x|}3=\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2(x+y)-2\operatorname{sen}(x+y)+2}.$
19. $\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x(\operatorname{sen} y+\cos y)+2=0.$
20. $2\sqrt{2}\,(\operatorname{sen} x+\cos x)\cos y=3+\cos 2y.$
21. $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0.$
22. $-x-y^2-\sqrt{x-y^2-1}\geqslant -1.$
23. $\begin{cases}\cos x=-1/3,\\ \operatorname{tg} x=2\sqrt{2}.\end{cases}$ 24. $\begin{cases}\operatorname{sen} x=-2/5,\\ \operatorname{cotg} x=-3/\sqrt{5}.\end{cases}$
25. $2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)=7.$

Hallar las soluciones reales de los sistemas

26. $\begin{cases}x+y+z=2,\\ 2xy-z^2=4.\end{cases}$ 27. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x^3+y^3+z^3=a^3.\end{cases}$

28. ¿Para cuáles valores del parámetro a el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}x^2+y^2=z,\\ x+y+z=a,\end{cases}$$

tiene solución única?

29. Hallar todos los valores de los parámetros a y b para los cuales la ecuación $(x^2+5)/2=x-2\cos(ax+b)$ tiene por lo menos una solución.

§ 2. PROBLEMAS TÍPICOS POR SU ASPECTO EXTERIOR QUE SE RESUELVEN POR MÉTODOS NO TÍPICOS

Los métodos que se han aplicado en el párrafo precedente para resolver los problemas no típicos por su aspecto exterior, donde los primeros son verdaderamente necesarios, se emplean con éxito para resolver los problemas más típicos que admiten una solución más usada. Es natural, que estos métodos, como regla, proporcionan una solución más breve y elegante.

Así, en particular, después de los ejemplos 5 y 6 analizados en el § 1 de la Parte IV, puede resolverse *oralmente* la ecuación $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 1$, al mismo tiempo que su resolución con ayuda del método habitual exige cálculos bastante extensos. A continuación se dan más ejemplos de este tipo.

1. *Resolver la desigualdad*

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos x} > 1.$$

El RVA de esta desigualdad consta de los valores de x, los cuales, simultáneamente, dan $\operatorname{sen} x \geqslant 0$ y $\cos x \geqslant 0$. Ya que $\operatorname{sen} x \leqslant 1$ y $\cos x \leqslant 1$, entonces, según la propiedad de las potencias,

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} \geqslant \operatorname{sen}^2 x, \quad \sqrt{\cos x} \geqslant \cos^2 x.$$

Al sumar estas desigualdades se obtiene

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} + \sqrt{\cos x} \geqslant 1,$$

además, la igualdad tiene lugar sólo en el caso en que simultáneamente

$$\sqrt{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen}^2 x \quad \text{y} \quad \sqrt{\cos x} = \cos^2 x.$$

Razonando así, como en el § 1 de la Parte IV se puede determinar fácilmente que estas ecuaciones se satisfacen a la vez solamente si $x = 2k\pi$ y si $x = \pi/2 + 2k\pi$, y por lo tanto, la desigualdad inicial se cumple para todos los valores de x del RVA, excepto los valores apenas señalados, o sea, todos los valores de x que dan a la vez

$$\operatorname{sen} x > 0 \quad \text{y} \quad \cos x > 0.$$

En calidad de la solución común de estas dos desigualdades y de ese modo de la desigualdad inicial será

$$2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Para comparación, mostramos una solución ordinaria, típica, de la desigualdad dada. Su RVA se determina por las desigualdades $\operatorname{sen} x \geqslant 0$ y $\cos x \geqslant 0$. Ambos miembros de la desigualdad inicial son positivos y por eso, después de elevarla al cuadrado, en el RVA se obtiene una desigualdad equivalente a la inicial

$$\operatorname{sen} x + \cos x + 2\sqrt{\operatorname{sen} x \cos x} > 1.$$

Ya que $2 \operatorname{sen} x \cos x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1$, entonces, al sustituir para abreviar $\operatorname{sen} x + \cos x$ por u, se obtiene la desigualdad siguiente

$$\sqrt{2u^2 - 2} > 1 - u.$$

Como el primer miembro de la última desigualdad no es negativa, entonces, en el caso de $u > 1$, ésta se satisface automáticamente, o sea, todos los valores de $u > 1$ son sus soluciones.

Luego, al analizar los valores de $u \leqslant 1$, de nuevo obtenemos una desigualdad con miembros no negativos. Al elevarla al cuadrado, después de las transformaciones, se obtiene una desigualdad equivalente $u^2+2u-3>0$, cuyas soluciones son $u<-3$ y $u>1$. Examinamos el caso de $u \leqslant 1$ y por eso ha de aplicarse solamente la desigualdad $u<<-3$.

Pues, la desigualdad $\sqrt{2u^2-2}>1-u$ tiene una solución $u>1$ (del primer caso) y otra $u<-3$. Pero $u=\operatorname{sen} x+\cos x=\sqrt{2} \operatorname{sen}(x++\pi/4)$ no puede ser menor de -3 y por eso hace falta resolver la desigualdad

$$\operatorname{sen} x+\cos x>1.$$

En el RVA de la desigualdad inicial $\operatorname{sen} x+\cos x \geqslant 0$; por ello, después de elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad, se obtiene la desigualdad equivalente $\operatorname{sen} x \cos x>0$, la cual se cumple para todo valor de x del RVA, excepto el caso cuando $\operatorname{sen} x \cos x=0$, es decir, para los valores de x de los intervalos

$$2k\pi<x<\pi/2+2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Como se ve, la primera solución es más breve, sin tomar en consideración que esta solución es más universal, pues, en ella es insignificante que ambas raíces de esta desigualdad sean cuadradas, incluso ellas podrían ser de diferentes potencias. Al mismo tiempo, la solución "típica", en este caso, tropezaría con dificultades insuperables.

En los ejemplos analizados el provecho de los métodos no típicos consiste, en lo fundamental, en su brevedad, y puede pasarse por completo sin emplear estos métodos.

La singularidad del tipo de las ecuaciones examinadas en el párrafo precedente es, en realidad, lo que da lugar a una idea de buscar nuevos métodos. Son más difíciles los problemas que tienen un aspecto exterior ordinario, típico, pero, de hecho, es imposible resolverlos aplicando los métodos típicos. Al resolver los problemas de tal tipo, nunca estamos seguros de que el método elegido es simplemente incorrecto o que se necesitan cualesquier razonamientos no típicos.

A continuación se examinan dos problemas más; para cada uno de ellos se dan varias soluciones, mostrando cuán diferentes pueden ser los métodos no típicos, qué ideas más distintas pueden ser aplicadas al resolver estos problemas.

2. *¿Cuántas raíces tiene la ecuación* $\operatorname{sen} x+2 \operatorname{sen} 2x=3+\operatorname{sen} 3x$ *en el segmento* $0 \leqslant x \leqslant \pi$?

Primera solución. Esta ecuación tiene un aspecto exterior enteramente típico, y por lo tanto es natural, al principio, intentar resolverla con ayuda de los métodos ordinarios, por ejemplo, reduciéndola a una función, por ejemplo, a $\operatorname{sen} x$.

Si empleamos las fórmulas del ángulo doble o triple obtenemos la ecuación

$$4\,\mathrm{sen}\,x\cos x = 3 + 3\,\mathrm{sen}\,x - 4\,\mathrm{sen}^3 x - \mathrm{sen}\,x.$$

Aquí, ya nos espera una contrariedad: para expresar $\cos x$ por medio de $\mathrm{sen}\,x$ sin irracionalidad es necesario elevar esta ecuación al cuadrado, arriesgándonos a obtener raíces sobrantes. Como resultado obtenemos la ecuación

$$16\,\mathrm{sen}^2 x\,(1 - \mathrm{sen}^2 x) = (3 + 2\,\mathrm{sen}\,x - 4\,\mathrm{sen}^3 x)^2,$$

que después de sustituir $\mathrm{sen}\,x$ por y y de las transformaciones no complejas se reduce a la forma

$$16y^6 - 24y^3 - 12y^2 + 12y + 9 = 0.$$

Esta ecuación de sexto grado da una idea de que este método no puede conducir a nada de bueno. Sin embargo, es posible aún el intento de encontrar un agrupamiento conveniente: si unimos los sumandos primero, segundo y último se obtiene una ecuación en la forma

$$(4y^3 - 3)^2 + 12y\,(1 - y) = 0.$$

Pero $y = \mathrm{sen}\,x$ y según los datos $0 \leqslant x \leqslant \pi$, así que sólo se necesitan las raíces de y que dan $0 \leqslant y \leqslant 1$. Sin embargo, para estas y el segundo sumando del primer miembro de la ecuación no es negativo, mientras que el primer sumando no es negativo para cualquier y, por esto la ecuación se satisface únicamente en el caso de los valores de y para los cuales, al mismo tiempo, $4y^3 - 3 = 0$ y $12y\,(1 - y) = 0$. Ya que evidentemente tales y no existen, la ecuación examinada no tiene soluciones en el segmento $0 \leqslant y \leqslant 1$. De aquí se deduce que la ecuación inicial tampoco tiene soluciones en el segmento $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Como se ve, el método elegido, que, al principio, parecía en absoluto típico, nos llevó al objetivo sólo con el agrupamiento acertado. Más abajo resultará que este método es fallado justamente.

Segunda solución. Esta solución también se basa en el agrupamiento acertado que tiene lugar despues de algunas transformaciones trigonométricas.

La ecuación dada se escribe en la forma siguiente:

$$\mathrm{sen}\,3x - \mathrm{sen}\,x - 2\,\mathrm{sen}\,2x + 3 = 0$$

y a continuación se practica la transformación del primer miembro; el último es igual a

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{sen}\,x\cos 2x &- 4\,\mathrm{sen}\,x\cos x + 3 = \\ &= \mathrm{sen}\,x\,(2\cos 2x - 4\cos x) + 3 = \\ &= \mathrm{sen}\,x\,(4\cos^2 x - 4\cos x - 2) + 3 = \\ &\qquad = \mathrm{sen}\,x\,[(2\cos x - 1)^2 - 3] + 3.\end{aligned}$$

Como resultado se obtiene la ecuación

$$\operatorname{sen} x\,(2\cos x-1)^2+3\,(1-\operatorname{sen} x)=0.$$

Según los datos sólo hay que hallar la solución en el segmento $0\leqslant x\leqslant\pi$. En este segmento es válida la desigualdad $\operatorname{sen} x\geqslant 0$. Por eso, ambos sumandos en la ecuación obtenida no son negativos y, en consecuencia, ésta es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\operatorname{sen} x\,(2\cos x-1)^2=0,\\ 3\,(1-\operatorname{sen} x)=0.\end{cases}$$

De la segunda ecuación del sistema tenemos $\operatorname{sen} x=1$. En este caso, $\cos x=0$ y $\operatorname{sen} x\,(2\cos x-1)^2=1\neq 0$. Por lo tanto, ninguna solución de la segunda ecuación puede ser solución de la primera ecuación y, por consiguiente, el sistema y junto con él la ecuación inicial no tienen soluciones.

Tercera solución. Escribamos nuestra ecuación así:

$$\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 3x+2\operatorname{sen} 2x=3,$$

y utilizando las fórmulas de la diferencia de los senos y del ángulo doble, obtenemos la ecuación $\operatorname{sen} x\,(-4\cos^2 x+4\cos x+2)=3$. Ya que para las raíces de esta ecuación $\operatorname{sen} x\neq 0$, esta última es equivalente a la siguiente:

$$-4\cos^2 x+4\cos x+2=\frac{3}{\operatorname{sen} x}.$$

Si el trinomio $y=-4\cos^2 x+4\cos x+2$ se considera como cuadrático respecto a $\cos x$, es fácil cerciorarse de que su valor máximo es igual a 3 y que se obtiene cuando $\cos x=\frac{1}{2}$. Por otro lado, en el segmento $0\leqslant x\leqslant\pi$ se tiene la desigualdad $0\leqslant\operatorname{sen} x\leqslant 1$, por lo tanto $\frac{3}{\operatorname{sen} x}\geqslant 3$ y en este caso la igualdad se consigue sólo cuando $\operatorname{sen} x=1$. Esto significa que la ecuación dada se satisface únicamente en el caso en que, a la vez, $\cos x=1/2$ y $\operatorname{sen} x=1$. Sin embargo, esto es imposible, o sea, la ecuación a examinar no tiene soluciones.

Conviene señalar que en todas las soluciones analizadas fue muy esencial que $\operatorname{sen} x\geqslant 0$, puesto que las raíces se han buscado solamente en el segmento $0\leqslant x\leqslant\pi$. No obstante esta condición se da solamente para facilitar el problema; este último puede ser resuelto también sin esta limitación. Demostremos que la ecuación dada no tiene raíces de x para las cuales $\operatorname{sen} x<0$.

En efecto, si $\operatorname{sen} x<0$,

$$\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} 2x<0+2=2,$$

mientras

$$3+\operatorname{sen} 3x\geqslant 3+(-1)=2,$$

es decir, el primer miembro de la ecuación inicial, para todos los valores de x, es *estrictamente menos* de 2, mientras que su segundo miembro, para todos los valores de x es *más o igual* a 2. Mediante transformaciones simples puede cerciorarse de esto: es necesario escribir la ecuación en la forma siguiente

$$\operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen} 2x) + 1 + \operatorname{sen} 3x;$$

el segundo miembro de esta igualdad no es negativo, de lo que se deduce que $\operatorname{sen} x \geqslant 0$.

De esa manera, la ecuación dada no tiene raíces de x para las cuales $\operatorname{sen} x < 0$; más arriba se ha demostrado que no existen las raíces de x para las cuales $\operatorname{sen} x \geqslant 0$. Por consiguiente, la ecuación inicial, en general, no tiene raíces.

Cuarta solución. Es más breve y se efectúa independientemente de las limitaciones con respecto a x. Al escribir la ecuación así:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x + 2 \operatorname{sen} 2x = 3,$$

o, que es lo mismo,

$$-2 \operatorname{sen} x \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x = 3,$$

escribamos la siguiente serie:

$$|-2 \operatorname{sen} x \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x| \leqslant |-2 \operatorname{sen} x \cos 2x| + |2 \operatorname{sen} 2x| = 2|\operatorname{sen} x|\,|\cos 2x| + 2|\operatorname{sen} 2x| \leqslant 2(|\cos 2x| + |\operatorname{sen} 2x|).$$

Ya que $|\cos 2x| + |\operatorname{sen} 2x| \leqslant \sqrt{2}$ para cualquier x (esto es fácil demostrar, interpretando los módulos o aún más sencillamente, elevando al cuadrado), el primer miembro de la última ecuación, por su valor absoluto, no supera a $2\sqrt{2}$ y no puede, en consecuencia, igualarse a 3.

En la siguiente ecuación, que en apariencia es ordinaria, los métodos típicos no conducen al objetivo. Al intentar, por ejemplo, recibir la ecuación respecto a $\operatorname{sen} x$, se tiene una ecuación de la séptima potencia.

3. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x.$$

Primera solución. La ecuación puede escribirse en la forma

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x = 0$$

y analizando su primer miembro como un trinomio cuadrático con relación a $\operatorname{sen} x$, separemos el cuadrado completo, después de lo cual esta ecuación se convierte en la siguiente

$$\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 3x\right)^2 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x (1 - \operatorname{sen}^2 3x) = 0,$$

o sea,

$$(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 3x)^2 + \frac{1}{16}\operatorname{sen}^2 6x = 0.$$

Está claro que esta ecuación es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^2 3x, \\ \operatorname{sen} 6x = 0. \end{cases}$$

La solución de la segunda ecuación es una serie de valores de $x = k\pi/6$, donde k es número entero cualquiera. De esta serie deben separarse los valores que satisfacen la primera ecuación. Para encontrar los valores respectivos de k se sustituye $x = k\pi/6$ en la primera ecuación y se obtiene

$$\operatorname{sen}\frac{k\pi}{6} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ si } k \text{ es par}, \\ 1/2, \text{ si } k \text{ es impar}. \end{cases}$$

A continuación analicemos por separado los casos de k par e impar. Si k es par, en este caso $\operatorname{sen} k\pi/6 = 0$, lo que se cumple para $k\pi/6 = m\pi$, siendo m un número entero cualquiera. Por consiguiente, entre los valores pares de k sólo son convenientes $k = 6m$, donde m es un número entero cualquiera. Si k es impar, en este caso $\operatorname{sen} k\pi/6 = 1/2$, lo cual se cumple con $k\pi/6 = (-1)^m \pi/6 + m\pi$, siendo m un número entero cualquiera. Por lo tanto, entre los valores impares de k son convenientes solamente $k = (-1)^m + 6m$, donde m es un número entero cualquiera.

Así, las soluciones de la ecuación inicial son los valores de las siguientes series:

$x = m\pi$, $x = (-1)^m \pi/6 + m\pi$, donde m es un número entero cualquiera.

El sistema obtenido se resuelve fácilmente con ayuda de los razonamientos siguientes. Su segunda ecuación se divide en las dos: $\operatorname{sen} 3x = 0$ y $\cos 3x = 0$. Si $\operatorname{sen} 3x = 0$, de la primera ecuación obtenemos $\operatorname{sen} x = 0$, o sea, $x = k\pi$. Estas x son las soluciones del sistema. Si $\cos 3x = 0$, $\operatorname{sen}^2 3x = 1$, y de la primera ecuación tenemos $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$. Es evidente, que las soluciones de esta ecuación $x = (-1)^k \pi/6 + k\pi$ son, al mismo tiempo, las soluciones del sistema. Las dos series obtenidas no son más que la solución de la ecuación inicial.

Comparando este razonamiento con el precedente conviene indicar que la división de la simple ecuación $\operatorname{sen} 6x = 0$, que no es del todo natural, en las dos, resultó más efectivo que el procedimiento natural vinculado con su resolución y elección posterior de las raíces.

Segunda solución. Ante todo debe notarse que si $\operatorname{sen}^2 3x = 0$, de la ecuación se deduce que $\operatorname{sen} x = 0$, y es fácil verificar que todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, $x = k\pi$, donde k es un número entero cualquiera, satisfacen la ecuación. En el caso de $\operatorname{sen}^2 3x \neq 0$, el primer miembro de la ecuación dada es positivo, lo que significa, que sen $x>0$.

A continuación traslademos todos los términos al lado izquierdo y añadamos la suma de cuadrados hasta recibir el cuadrado completo utilizando dos métodos: hasta el cuadrado de la suma y hasta el de la diferencia. Luego tenemos que analizar la ecuación en dos formas:

$$(\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x)^2+\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen}^2 3x)=0$$

y

$$(\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x)^2+\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen}^2 3x)=0.$$

Examinemos por separado dos casos:

a) $\operatorname{sen} 3x>0$. Entonces $\operatorname{sen} 3x\geqslant\operatorname{sen}^2 3x$ y, por consiguiente, ambos sumandos de la segunda forma de nuestra ecuación no son negativos, es decir, x debe satisfacer el sistema

$$\left\{\begin{array}{r}\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x=0,\\ \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen}^2 3x)=0.\end{array}\right.$$

Sin embargo, sen $x\neq 0$, por esto de la segunda ecuación del sistema tenemos $\operatorname{sen} 3x-\operatorname{sen}^2 3x=0$. Según los datos a) sen $3x\neq 0$, es decir, de aquí se deduce que $\operatorname{sen} 3x=1$. En este caso de la primera ecuación resulta que $\operatorname{sen} x=1/2$. Tenemos que resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}\ x=\frac{1}{2},\\ \operatorname{sen} 3x=1.\end{array}\right.$$

Si $\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} 3x=3\operatorname{sen} x-4\operatorname{sen}^3 x=1$, o sea, entonces toda solución de la primera ecuación es también solución de la segunda ecuación y, en consecuencia, el sistema se reduce a la primera ecuación. De ese modo, sus soluciones serán los ángulos x de la serie

$x=(-1)^k\pi/6+k\pi$, donde k es un número entero cualquiera.

b) $\operatorname{sen} 3x<0$. Este caso se analiza igualmente como el precedente, pero aquí se utiliza la primera forma de nuestra ecuación. Este caso no da nuevas soluciones.

Por consiguiente, la solución de nuestra ecuación puede escribirse en la forma siguiente

$x=k\pi$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, donde k es un número entero cualquiera.

Esta misma resolución puede efectuarse de un modo más compacto al utilizar módulos. Nuestra ecuación es posible exponerla en la forma

$$\left(\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\left|\operatorname{sen} 3x\right|\right)^2+\operatorname{sen} x(|\operatorname{sen} 3x|-\operatorname{sen}^2 3x)=0.$$

Sin embargo, $\operatorname{sen}^2 3x \leqslant |\operatorname{sen} 3x|$, entonces ambos sumandos no son negativos y por lo tanto tenemos el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} |\operatorname{sen} 3x| = 0, \\ \operatorname{sen} x (|\operatorname{sen} 3x| - \operatorname{sen}^2 3x) = 0. \end{cases}$$

La solución ulterior es la misma que en el caso precedente.

Tercera solución. Ante todo conviene anotar que de la ecuación dada se deduce que $\operatorname{sen} x \geqslant 0$ y que esta ecuación se satisface si $\operatorname{sen} x = 0$, o sea, si $x = k\pi$; debe considerarse a continuación que $\operatorname{sen} x > 0$.

Supongamos que nuestra ecuación se satisface por algún número x y escribimos esta ecuación en la forma siguiente

$$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 3x \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\right).$$

Ya que $\operatorname{sen}^2 x \neq 0$, $\operatorname{sen}^2 3x \neq 0$ y por lo tanto $\operatorname{sen} x - 1/4 > 0$. En ese caso, al multiplicar la desigualdad $\operatorname{sen}^2 3x \leqslant 1$ por la expresión positiva $\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}$, obtenemos la desigualdad

$$\operatorname{sen}^2 3x \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\right) \leqslant \operatorname{sen} x - \frac{1}{4};$$

con todo, la igualdad se obtiene únicamente cuando $\operatorname{sen}^2 3x = 1$. De ese modo, debe cumplirse también la desigualdad

$$\operatorname{sen}^2 x \leqslant \operatorname{sen} x - \frac{1}{4},$$

o lo que es lo mismo, la desigualdad $(\operatorname{sen} x - 1/2)^2 \leqslant 0$ que sólo es válida para $\operatorname{sen} x = 1/2$.

Así, si cierto número x satisface nuestra ecuación, al mismo tiempo éste satisface el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 3x = 1, \\ \operatorname{sen} x = 1/2. \end{cases}$$

Lo contrario es evidente: si x satisface este sistema, entonces, al sustituir $\operatorname{sen} x = 1/2$ y $\operatorname{sen}^2 3x = 1$ en la ecuación inicial nos cercioraremos de que esta última se satisface también. De esa manera, la ecuación dada es equivalente al sistema obtenido, mientras este sistema se resuelve también mediante los mismos razonamientos que los precedentes.

Este método de resolución podría ser expuesto de otra forma. Precisamente, al tener en cuenta que $\operatorname{sen} x - 1/4 > 0$ y añadir $-\operatorname{sen} x + 1/4$ a ambos miembros de la ecuación $\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 3x (\operatorname{sen} x - 1/4)$, obtenemos la ecuación

$$\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right)^2 = (\operatorname{sen}^2 3x - 1)\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\right).$$

El primer miembro de esta ecuación no es negativo y el segundo no es positivo y, por consiguiente, la ecuación se satisface únicamente en aquel caso y solamente en aquel caso cuando ambos miembros son iguales a cero. Como resultado se obtiene un sistema ya conocido.

Cuarta solución. La ecuación se divide por su segundo miembro. Sin embargo, para no perder raíces, antes de hacer la división hay que cerciorarse de que éste es diferente de cero. Si analizamos el caso de $\operatorname{sen} x = 0$, se obtienen las raíces de la ecuación inicial $x = k\pi$, donde k es un número entero cualquiera y para $\operatorname{sen} 3x = 0$ obtenemos de la ecuación de nuevo $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, de ese modo tendremos las mismas raíces que acaban de hallarse.

Notando como antes, que $\operatorname{sen} x \geqslant 0$, a continuación debe considerarse que $\operatorname{sen} x > 0$. Ahora puede dividirse:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 3x} + \frac{1}{4 \operatorname{sen} x} = 1.$$

Ambos sumandos del primer miembro son positivos y por eso es posible aplicar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 3x} + \frac{1}{4 \operatorname{sen} x} \geqslant 2 \sqrt{\frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 3x}} = \frac{1}{|\operatorname{sen} 3x|} \geqslant 1.$$

En la primera desigualdad no estricta, la igualdad se obtiene si $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 3x} = \frac{1}{4 \operatorname{sen} x}$, y en la segunda, cuando $|\operatorname{sen} 3x| = 1$. Por eso el primer miembro es igual a la unidad en aquel caso y sólo en aquel caso cuando ambas desigualdades no estrictas se convierten en igualdades, es decir, cuando se cumple el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 4 \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 3x, \\ |\operatorname{sen} 3x| = 1. \end{cases}$$

Este sistema se resuelve fácilmente.

Quinta solución. Al indicar que $\operatorname{sen} x \geqslant 0$, escribimos una serie de desigualdades

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 3x \geqslant |\operatorname{sen} x| \, |\operatorname{sen} 3x| \geqslant \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x.$$

(Aquí hemos utilizado la desigualdad $a^2 + b^2 \geqslant 2 |a| \, |b|$ para $a = \operatorname{sen} x$, $b = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 3x$, y que $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$ y $|\operatorname{sen} 3x| \geqslant \operatorname{sen}^2 3x$).

Por lo tanto, nuestra ecuación se satisface solamente en el caso cuando ambas desigualdades no estrictas se convierten en igualdades, lo que tiene lugar al cumplir el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} |\operatorname{sen} 3x|, \\ \operatorname{sen} x \, |\operatorname{sen} 3x| = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 3x. \end{cases}$$

La segunda ecuación se satisface en los cuatro casos siguientes:

$$\operatorname{sen} x = 0, \ \operatorname{sen} 3x = 0, \ \operatorname{sen} 3x = \pm 1.$$

En el primer caso tenemos los valores de $x = k\pi$, que son también las soluciones de la primera ecuación del sistema, o sea, de la ecuación inicial. El segundo caso, al sustituir en la primera ecuación, da lugar a las mismas soluciones. El tercero y cuarto casos dan la solución

$$x = (-1)^k \left(\frac{\pi}{6}\right) + k\pi, \ k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

EJERCICIOS:

Resolver las ecuaciones y desigualdades:

1. $\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{\operatorname{sen} x}} + \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2-x-2}} = \dfrac{3}{2}$.
2. $\sqrt{\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+4x+2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+4x+2}{x^2-2x-2}} = 2$.
3. $\sqrt[4]{17+x} + \sqrt[4]{17-x} = 2$.
4. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \geqslant 1$.
5. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} > \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}$.
6. $\operatorname{sen}^4 x + \cos^{15} x = 1$.
7. $\sqrt{\operatorname{sen} 2x} + \sqrt{\cos 2x} = 1$.
8. $\sqrt{\operatorname{sen}^3 x} + \sqrt{\cos^3 x} = \sqrt{2}$.
9. $\sqrt{2+\cos^2 2x} = \operatorname{sen} 3x - \cos 3x$.
10. $\sqrt{5+\operatorname{sen}^2 3x} = \operatorname{sen} x + 2\cos x$.

§ 3. PROBLEMAS EN LOS CUALES LAS DIFICULTADES LÓGICAS SON MÁS ESENCIALES

Las ecuaciones, desigualdades o sistemas con *parámetros* proporcionan por lo común grandes dificultades de carácter lógico. En las primeras es necesario hallar aquellos valores de los parámetros para los cuales se cumplen algunas condiciones complementarias (por ejemplo, una ecuación tiene solución única o por el contrario, se satisface por todos los valores admisibles de x, o toda solución de un sistema de ecuaciones es la de otro, o toda solución de una desigualdad es la de otra, etc.).

Estos problemas son, en verdad, los más difíciles a examinar, y precisamente, es por ello que exigen una preparación lógica bastante elevada, es decir, lo que necesita la mayoría de los escolares. Para resolver tal tipo de problema hay que saber bien, a cada momento, lo que fue hecho ya y lo que es necesario hacer, así como lo que significan los resultados obtenidos.

1. *¿Para qué valores de a la ecuación* $1 + \operatorname{sen}^2 ax = \cos x$ *tiene una solución única?*

Es evidente que para el valor arbitrario de a no es posible expresar $\operatorname{sen}^2 ax$ por $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Por eso la ecuación a examinar no puede ser resuelta por medio de los métodos habituales. Es necesario encontrar un nuevo método para la resolución. Esta última será análoga a las ideas que se han utilizado en el § 1 de la Parte IV.

Gracias a la desigualdad $\cos x \leqslant 1 \leqslant 1 + \operatorname{sen}^2 ax$, la ecuación inicial se cumplirá sólo cuando se satisfaga el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{sen}^2 ax = 1, \\ \cos x = 1, \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} ax = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Por consiguiente, hay que resolver el sistema y analizar ¿para qué valores de a este sistema tiene una solución única?

Ya que la ecuación inicial es equivalente a este sistema, los valores hallados de a serán buscados.

En este instante es cuando empiezan las dificultades lógicas más serias. Precisamente, en este momento se hace claro, quién entiende bien el problema planteado y quién simplemente practica algunos cálculos sin darse cuenta de lo que hace y para qué necesita de esto.

Así, por ejemplo, una de las "resoluciones", propuestas para este sistema, es:

$$\text{“}ax = \pi k, \quad x = 2\pi n, \quad 2a\pi n = \pi k, \quad a = \frac{k}{2n}\text{”}.$$

¡Y nada más! No se da ni una palabra más, se subraya solamente la igualdad $a = k/(2n)$ que, por lo visto, se considera como la respuesta. ¡Es evidente que es imposible entender esta solucion!

A continuación expondremos una resolución que repetirá los cálculos de la "solución" precedente, pero que irá acompañada de razonamientos que allí faltaban.

Las soluciones de la primera ecuación del último sistema son las siguientes:

$$ax = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Las soluciones de la segunda ecuación son también evidentes:

$$x = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Se necesitan los valores de x, que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones, es decir, hay que hallar los números, k y n, para los cuales de ambas series se obtiene el mismo valor de x. De ese modo debe resolverse una ecuación con dos incógnitas n y k (y más con el parámetro a):

$$2an\pi = k\pi. \tag{1}$$

Es evidente que para *cualquier* valor de a el par de los números $n = 0$, $k = 0$ es la solución de esta ecuación. A éste le corresponde la raíz $x = 0$. De esa manera, para *todo* a la ecuación inicial tiene la solución $x=0$. Si $n\neq 0$, la ecuación (1) puede escribirse en la forma siguiente

$$a=k/(2n). \qquad (2)$$

Ahora conviene recordar nuestro problema principal: *en efecto, no tenemos que resolver la ecuación, sino determinar ¿para los cuáles valores de a ésta tiene una solución única?* Sin embargo, todo par de los números k y n que satisface la condición (2), proporciona la solución de la ecuación inicial $x=2\pi n=\frac{\pi k}{a}$. Como ya hemos hallado para todo valor de a una raíz de la ecuación inicial ($x=0$), tendremos que hallar aquellos valores de a para los cuales no existen las k y n enteras, con las que se cumple la relación (2). Es claro que si a es irracional, es imposible, en realidad, encontrar las k y n necesarias. El primer resultado se ha obtenido: *si a es un número irracional, la ecuación dada tiene sólo una solución.*

¿Está resuelto el problema? ¡Naturalmente que no, porque no están examinados del todo los valores racionales de a! No obstante, si a es racional, o sea $a=p/q$, es posible escribir $a=(2p)/(2q)$ y en la ecuación (2) obtener la solución $k=2p$, $n=q$. Por consiguiente, en este caso, además de $x=0$, habrá por lo menos, una solución más (en efecto habrá un número infinito de soluciones). Así, *en el caso del valor racional de a la ecuación inicial tiene muchas soluciones.* El problema está resuelto.

Conviene practicar estos razonamientos para resolver el problema para sí, o sea, para obtener la respuesta. Esto, se puede decir, es la solución "en borrador". Pasemos a demostrar cómo podría exponerse la solución "en limpio".

En realidad, $x=0$ es la raíz de la ecuación para *todo* valor de a. Debe demostrarse que para el valor irracional de a no hay otras soluciones, mientras que para a racional las hay. En efecto, al principio, a es *irracional*. De las desigualdades $\cos x\leqslant 1\leqslant 1+\operatorname{sen}^2 ax$ se deduce que x es la solución sólo cuando esta x satisface el sistema

$$\begin{cases} 1+\operatorname{sen}^2 ax=1, \\ \cos x=1, \end{cases} \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} ax=0, \\ \cos x=1. \end{cases}$$

Si $x\neq 0$ es la solución del último sistema, entonces, en primer lugar, $ax=\pi k$, k es cierto número entero y, en segundo lugar, $x=2\pi n$, n es cierto número entero, pero $n\neq 0$. En este caso $2a\pi n=\pi k$, de donde $a=k/(2n)$, es decir, a es un número racional, lo que contradice a la suposición. Ahora, supongamos que a es *racional* $a=p/q$. En este caso $x=2\pi q$ que, evidentemente, será una solución y, además, diferente de cero. Por lo tanto, la ecuación dada tiene una solución única solamente cuando a es irracional.

Es posible también resolver este problema gráficamente. Sea $a\neq 0$, ya que en efecto la ecuación tiene un número infinito de soluciones cuando $a=0$. Luego escribamos nuestra ecuación así:

$$\operatorname{sen}^2 ax = \cos x - 1$$

y designemos

$$y_1 = \cos x - 1, \quad y_2 = \operatorname{sen}^2 ax = \frac{1-\cos 2ax}{2}.$$

Después de esto, tracemos ambas gráficas (fig. 168). Es claro que la ecuación inicial tiene su solución sólo en el caso en que las curvas de las funciones y_1 e y_2 tengan un punto común.

En la figura se ve que para todo valor de a hay un punto de intersección de las curvas: $x=0$. Se ve también que las intersecciones posteriores son posibles sólo en los puntos en que ambas curvas se tocan con el eje Ox, es decir, en el lugar donde simultáneamente $\operatorname{sen}^2 ax = 0$ y $\cos x = 1$. Pero $\operatorname{sen}^2 ax = 0$ para $ax = n\pi$, siendo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mientras que $\cos x = 1$ para $x = 2k\pi$, siendo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Por lo tanto, el punto $x=0$ será el único punto de encuentro de las curvas solamente cuando $2ak\pi \neq n\pi$ no para cualesquier valores enteros de n y k, diferentes de cero. En otras palabras, se ha demostrado que la solución única tiene lugar sólo cuando $a \neq n/(2k)$, siendo n y k números enteros, diferentes de cero. Más adelante se muestra, como se hizo anteriormente, que esto tiene lugar cuando a sea un número irracional.

Para resolver problemas con parámetros frecuentemente conviene razonar del modo siguiente. Dado que el parámetro a es cierto número fijo que *satisface a los datos del problema*; estos valores de a los vamos a denominar *convenientes*. Ahora hace falta deducir de los corolarios

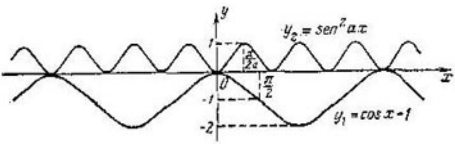

Fig. 168

los datos del problema y suposiciones respecto de a. Gracias a estos se obtienen algunas condiciones a las que tienen que satisfacerlas los valores convenientes del parámetro. De esa manera, los valores del parámetro que no satisfagan estos corolarios, automáticamente no son convenientas y sólo tenemos que analizar aquellos valores del parámetro que satisfagan los corolarios obtenidos. En particular, si a estos corolarios los satisfacen algunos valores concretos, el problema se reduce sencillamente a la comprobación de estos valores.

2. *Hallar todos los valores de a para los cuales el sistema*

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

tiene sólo una solución (a, x, y son los números reales).

De acuerdo con lo que hemos dicho, al principio supongamos que a es el número conveniente, es decir, el número que satisface los datos del problema. En otras palabras, para este valor de a el sistema de ecuaciones dado tiene sólo una solución, que se designa con (x_0, y_0). Sin embargo, es fácil notar que ambas ecuaciones del sistema no se modifican al sustituir x por $-x$, lo que significa que en el caso del valor examinado el par $(-x_0, y_0)$ es también la solución del sistema. No obstante, según la suposición inicial respecto de a, el sistema tiene una solución *única*. La salida de esta contradicción es una: (x_0, y_0) y $(-x_0, y_0)$ son el mismo par. Esto significa sencillamente que $x_0 = -x_0$, o sea $x_0 = 0$. Estos razonamientos no dan ninguna información acerca del número y_0. Pero, al poner la solución $(0, y_0)$ en el sistema inicial, tenemos las igualdades

$$1 = y_0 + a, \quad y_0^2 = 1.$$

De aquí se deduce que y_0 es igual a 1 ó a -1, y, de acuerdo con esto, a se iguala a 0 ó a 2.

De esa manera, hemos demostrado que, si a es el número conveniente, entonces $a = 0$ ó $a = 2$. Subrayamos sobre todo que los razonamientos anteriores no han demostrado, en ningún caso, que los números 0 y 2 son convenientes. Por el contrario, hay que determinarlo.

Al principio examinemos el valor de $a = 0$. En este caso tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{3}$$

Si es posible demostrar que este sistema tiene una solución, esto significará que el valor de $a = 0$ satisface a los datos del problema. Indiquemos que el valor de $a = 0$ ha sido obtenido por medio de la sustitución del par (0, 1) en el sistema inicial. Es fácil comprobar que este par satisface realmente el sistema (3) y, de ese modo, cuando $a = 0$, el sistema inicial tiene ya una solución. Aclaremos, ¿hay o no otras soluciones para el sistema (3)?

Este último no puede resolverse con ayuda de los métodos habituales. Por eso aplicaremos razonamientos especiales. De la segunda ecuación de este sistema se obtiene que $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, de donde resulta que $x^2 \leqslant |x|$ e $|y| \leqslant 1$. Además, $2^{|x|} \geqslant 1$, ya que $|x| \geqslant 0$. De todas estas desigualdades tenemos

$$2^{|x|}+|x| \geqslant 1+x^2 \geqslant y+x^2,$$

y, por consiguiente, la primera ecuación se satisface solamente cuando en ambas desigualdades no estrictas tendrá lugar la igualdad, es decir, cuando

$$2^{|x|}=1, \ |x|=x^2, \ y=1,$$

lo que es válido para $x=0$, $y=1$. Por lo tanto, si $a=0$, el sistema dado tiene una solución (0, 1).

Ahora examinemos el valor de $a=2$. En este caso tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+2, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Como antes, indiquemos que el par (0, —1) es la solución y de nuevo debe aclararse ¿si hay otras soluciones o no? Pero al sustituir $x=1$, $y=0$, resulta que el par (1, 0) es también la solución del sistema y, por consiguiente, para $a=2$ el sistema tiene varias soluciones.

Así, el sistema dado tiene una solución única solamente para $a=0$.

La solución expuesta requiere algunas palabras de carácter no matemático, sino más bien psicológico. Como suele suceder a menudo, es fácil entender esta solución, pero ¿cómo hallarla? Sin duda, no es posible, en el caso general, dar una respuesta universal.

En nuestra solución se encuentran tres suposiciones.

Primero, hemos observado que el sistema no cambia al sustituir x por $-x$, lo que nos da un avance considerable. Es imposible decir cómo anotarlo, pero cada uno podría hacerlo si conociera la noción de paridad e imparidad de las funciones y supiera utilizarlas.

Segundo, hemos empezado a resolver el sistema (3) con ayuda del método no habitual, al utilizar las desigualdades. Esta suposición es un poco más complicada, pero los ejemplos expuestos en los párrafos precedentes muestran que para resolver las ecuaciones suele ser necesario el empleo de desigualdades.

Tercero, hemos deducido que para $a=2$ el sistema inicial tiene una solución más: $x=1$, $y=0$. Sencillamente hemos tratado de escoger la solución y tuvimos éxito. Este método resultó acertado solamente debido a la presencia de las "buenas" soluciones de números enteros. En algunos casos esta selección es la única vía posible.

3. *Hallar todos los valores de a y b para los cuales el sistema*

$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

tiene una sola solución (a, b, x, y, z son números reales).

Supongamos que (a, b) es un par conveniente de los valores de los parámetros y (x_0, y_0, z_0) es la solución única respectiva. Sin embargo, es fácil anotar que el sistema no varía si en éste, simultáneamente, se sustituyen las x por $-x$ e y por $-y$. De aquí se deduce que el trío $(-x_0, -y_0, z_0)$ es también la solución del sistema y, como en el problema precedente, saquemos la conclusión de que $x_0 = y_0 = 0$. Sustituyendo, ahora, el trío $(0, 0, z_0)$ en el sistema, obtenemos $z_0 = a$, $z_0 = b$, $z_0^2 = 4$, de donde $z_0 = \pm 2$ y $a = b = \pm 2$.

De esa manera, si el par (a, b) es conveniente, entonces $a = b = 2$ ó $a = b = -2$.

De nuevo, como en el problema precedente, es necesario determinar que estos pares de los valores de parámetros son convenientes.

Para $a = b = 2$ tenemos el sistema

$$\begin{cases} xyz + z = 2, \\ xyz^2 + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

una de cuyas soluciones es $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, lo que es fácil comprobar. De la segunda y primera ecuaciones se deduce que $xy(z^2 - z) = 0$. Si $x = 0$, entonces, a continuación, de la segunda y tercera ecuación obtenemos $z = 2$ e $y = 0$. Esta solución ya es conocida. Se obtiene la misma solución si $y = 0$.

Ahora consideramos que $z^2 - z = 0$, es decir, $z = 0$ ó $z = 1$. No obstante, si $z = 0$ obtenemos que las dos primeras ecuaciones son contradictorias y, cuando $z = 1$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 3, \end{cases}$$

el cual tiene cuatro soluciones reales de lo que es fácil cerciorarse. De ese modo, para $a = b = 2$ el sistema inicial tiene cinco soluciones y por esto el par $a = b = 2$ no es conveniente.

A continuación, supongamos que $a = b = -2$. Entonces tenemos el sistema

$$\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Una de las soluciones de este sistema es $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$. No es difícil cerciorarse de esto. Los razonamientos semejantes a los expuestos muestran ahora que este sistema no tiene otras soluciones y por lo tanto para $a = b = -2$ el sistema inicial tiene una solución única, o sea, este par de los valores de parámetros es conveniente.

Así, a los datos del problema los satisfacen solamente los valores $a = b = -2$.

4. *Hallar todos los valores de a para los cuales el sistema*

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2 y = 1 \end{cases}$$

tiene, por lo menos, una solución para cualquier valor de b (a, b, x, y, son números reales).

Dado que a es un valor conveniente de parámetro, es decir, un valor para el cual el sistema en cuestión tiene por lo menos una solución para *todo* valor de b. Elijamos algún valor de b; esto puede hacerse arbitrariamente, pero elijamos b de manera que el sistema tome una forma más simple. Es claro que es mejor aceptar $b=0$. En este caso el sistema toma la forma siguiente

$$\begin{cases} (x^2+1)^a = 1, \\ a + x^2 y = 1. \end{cases}$$

Al mismo tiempo, ya que a es un valor conveniente, este sistema tiene por lo menos una solución que designaremos con (x_0, y_0).

En esta solución x_0 es igual o no igual a cero. Si $x_0=0$, de la segunda ecuación obtenemos $a=1$ y si $x_0 \neq 0$, entonces $x_0^2+1 \neq 1$, y en este caso de la primera ecuación tenemos $a=0$.

Por lo tanto, si a es el número conveniente, entonces $a=0$ ó $a=1$. Ahora hace falta poner en claro que estos valores son realmente convenientes.

Cuando $a=0$, el sistema tiene la forma siguiente

$$\begin{cases} (b^2+1)^y = 1, \\ bxy + x^2 y = 1; \end{cases}$$

y se necesita saber si este sistema tiene sus soluciones para todos los valores de b. Si $b \neq 0$, de la primera ecuación resulta que $y=0$, y en este caso la segunda ecuación es contradictoria. Por consiguiente, el valor de $a=0$ no es conveniente.

Dado que $a=1$. Entonces el sistema tiene la forma siguiente

$$\begin{cases} x^2 + (b^2+1)^y = 1, \\ bxy + x^2 y = 0. \end{cases}$$

Es evidente que $x=y=0$ es una solución para todo valor de b, y por lo tanto, $a=1$ es el valor conveniente.

De ese modo, a los datos del problema los satisface el valor único $a=1$.

5. *Hallar todos los números de a para cada uno de los cuales toda raíz de la ecuación*

$$\operatorname{sen} 3x = a \operatorname{sen} x + (4 - 2|a|) \operatorname{sen}^2 x \tag{4}$$

es también la raíz de la ecuación

$$\operatorname{sen} 3x + \cos 2x = 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos 2x \tag{5}$$

y al contrario, toda raíz de la segunda ecuación es la raíz de la primera.

Este problema puede formularse más brevemente: *¿para qué a las ecuaciones* (4) *y* (5) *son equivalentes*? Para poner en claro la equivalencia de dos ecuaciones existen, en general, dos procedimientos: primero, debe obtenerse cada ecuación de la otra con ayuda de ciertas transformaciones y segundo, de acuerdo con la determinación de la equivalencia conviene demostrar que toda raíz de una ecuación es la raíz de la otra y viceversa.

En nuestro ejemplo, el primer procedimiento, según parece, no es aplicable y conviene aprovecharse del segundo. Sin embargo, aquí hay algunas dificultades. Es difícil razonar sobre la coincidencia de las raíces de dos ecuaciones que son tan distintas: lo único que aquí puede ayudarnos, es el conocimiento de todas las raíces o sólo de las raíces de una de estas ecuaciones.[1]

En este caso resulta que la ecuación (5) se resuelve fácilmente y por esto el problema se reduce al siguiente: *¿para cuáles valores de a la ecuación* (4) *tiene las mismas raíces que la* (5)?

Para abreviar razonamientos designemos $\operatorname{sen} x$ con y. Luego la ecuación (5) se reduce a la forma siguiente:

$$2y^2 - y = 0. \qquad (6)$$

La última ecuación tiene las raíces $y_1 = 0$, $y_2 = 1/2$. Igualmente, después de sustituir $\operatorname{sen} 3x = 3y - 4y^3$, la ecuación (4) se reduce a

$$[4y^2 + (4 - 2|a|)\,y + a - 3]\,y = 0. \qquad (7)$$

Al resolver este problema muchos estudiantes efectuan la sustitución $\operatorname{sen} x$ por y, lo que les "ayuda" a cometer dos errores graves. Así, muchos deciden al instante que no existen los valores necesarias de a, ya que la ecuación (6) es cuadrática, mientras que la (7) es cúbica, y por lo tanto, estas no son equivalentes, pues tienen un número distinto de raíces. Este razonamiento tiene dos errores. En primer lugar, las ecuaciones cuadrática y cúbica pueden ser equivalentes (por ejemplo, ecuaciones $x^2 = 0$ y $x^3 = 0$ ambas tienen *una* raíz, $x = 0$) y en segundo lugar, la ecuación (4) y la (5) pueden ser equivalentes, como nos cercioraremos más adelante, incluso si las ecuaciones (6) y (7) no son equivalentes.

Precisamente en esto consiste el segundo error cometido. En verdad, a primera vista se representa absolutamente evidente que nuestro problema se ha reducido a lo siguiente: ¿para cuál valor de a la ecuación (7) tiene las raíces 0 y $\frac{1}{2}$? Pero en realidad, si no olvidamos que $y = \operatorname{sen} x$, es posible indicar una posibilidad más para que el valor de a sea conveniente: si la ecuación (7) tiene las raíces 0, 1/2, y su tercera raíz y_3 por su módulo es mayor que 1, las ecuaciones (4) y (5) son equivalentes, es decir, el valor respectivo $\operatorname{sen} x = y_3$ no da lugar a soluciones complementarias a la ecuación (4). Además, las ecuaciones (4) y (5) son naturalmente equivalentes en el caso en que la tercera raíz de la ecuación (7) es igual a 0 ó 1/2.

Ahora nuestro problema es completamente claro: *deben encontrarse*

---

[1] Es posible dar ejemplos más evidentes de esta situación: las ecuaciones $x^2 = 2x^3 - 1$ y $x2^x = 2$ (en el intervalo de los números reales), son equivalentes ya que su raíz única es $x = 1$, pero hagan tentativas para cerciorarse de su equivalencia sin resolver preliminarmente ambas ecuaciones.

los valores de a con los que la ecuación (7) *tiene las raíces* 0, 1/2, *mientras que su tercera raíz es igual a* 0 ó 1/2, *o supera, por su módulo, a* 1.

En seguida se ve que 0 es la raíz de la ecuación (7), es por esto que examinaremos la ecuación

$$4y^2+(4-2\,|a|)\,y+a-3=0. \qquad (8)$$

Una de las raíces de esta ecuación debe ser 1/2. Sustituyendo en ésta $y=1/2$, obtenemos que 1/2 será la raíz si $a=|a|$, o sea, si $a\geqslant 0$. Según el teorema de Viete, la segunda raíz es $(a-3)/2$ y en concordancia con lo que se ha dicho anteriormente, el valor de a será conveniente en los tres casos siguientes:

$$1)\ \frac{a-3}{2}=0, \qquad 2)\ \frac{a-3}{2}=\frac{1}{2}, \qquad 3)\ \left|\frac{a-3}{2}\right|>1$$

(al mismo tiempo debe tomarse en consideración que $a\geqslant 0$).

De ahí obtenemos la respuesta:

$$a=3, \quad a=4, \quad 0\leqslant a<1, \quad a>5.$$

6. *Hallar todos los números de a, en el caso de cada uno de los cuales toda raíz de la ecuación*

$$2\operatorname{sen}^7 x-(1-a)\operatorname{sen}^3 x+(2a^3-2a-1)\operatorname{sen} x=0 \qquad (9)$$

es, al mismo tiempo, la raíz de la ecuación

$$2\operatorname{sen}^6 x+\cos 2x=1+a-2a^3+a\cos^2 x \qquad (10)$$

y viceversa: que toda raíz de la segunda ecuación es la de la primera ecuación.

Aquí ya ambas ecuaciones iniciales son complejas y por esto no es posible obrar del mismo modo como en el caso precedente. Sin embargo, a primera vista puede anotarse que la ecuación (9) tiene las soluciones del tipo $x=k\pi$, donde k es un número entero cualquiera (y es posible que tenga algunas soluciones más). Esta nota conduce a la solución del problema.

Supongamos que a es el valor conveniente del parámetro. En este caso los valores $x=k\pi$ que son las raíces de la ecuación (9), son también las de la ecuación (10), lo que, al mismo tiempo, da la igualdad $a^3=a$ (ya que $\operatorname{sen}^6 k\pi=0$, $\cos 2k\pi=\cos^2 k\pi=1$). Por lo tanto, los valores convenientes tienen que ser elegidos de los tres números: 0, 1 y -1. Ahora conviene comprobar estos tres valores.

Dado $a=0$, entonces las ecuaciones se transforman en

$$\operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x-1)(2\operatorname{sen}^4 x+2\operatorname{sen}^2 x+1)=0$$
$$\operatorname{sen}^2 x(\operatorname{sen}^2 x-1)(\operatorname{sen}^2 x+1)=0$$

Debido a que $1+\operatorname{sen}^2 x>0$ y $2\operatorname{sen}^4 x+2\operatorname{sen}^2 x+1>0$, estas ecuaciones son equivalentes.

Si $a=1$, entonces las ecuaciones se escriben de nuevo en la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} x\,(2\operatorname{sen}^6 x - 1) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x\,(2\operatorname{sen}^4 x - 1) = 0.$$

Como la primera ecuación tiene la solución $\operatorname{sen} x = \sqrt[6]{1/2}$, que no satisface a la segunda ecuación, estas ecuaciones no son equivalentes.

Si $a=-1$, en este caso tenemos las ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x\,(2\operatorname{sen}^6 x - 2\operatorname{sen}^2 x - 1) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x\,(2\operatorname{sen}^4 x - 3) = 0.$$

Ya que $2\operatorname{sen}^4 x - 3 < 0$ y $2\operatorname{sen}^6 x - 2\operatorname{sen}^2 x - 1 = 2\operatorname{sen}^2 x\,(\operatorname{sen}^4 x - 1) - 1 < 0$, es evidente que estas ecuaciones son equivalentes. Así, los datos del problema se satisfacen solamente cuando $a=0$ y $a=-1$. Indiquemos que en este problema muchos estudiantes, al sustituir $\operatorname{sen}^2 x$ por y, tampoco pudieron entender el caso del valor de $a=-1$, ya que en las desigualdades que es necesario demostrar en este caso se utiliza esencialmente que $0 \leqslant y \leqslant 1$.

7. *Encontrar todos los pares de números a y b para los cuales todo par de números x, y ($x \neq \pi/2 + k\pi$, $y \neq \pi/2 + n\pi$; $k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) que satisface a la ecuación $x+y=a$,* satisface también la ecuación

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b. \tag{11}$$

Sean a y b un par conveniente de valores de los parámetros. Tomemos el par de los números $x=0$, $y=a$ que satisface, evidentemente, la ecuación $x+y=a$. Si $a \neq \pi/2 + n\pi$, este par satisface las limitaciones de x e y impuestas por los datos del problema. Por consiguiente, debido a (11), debe cumplirse la igualdad

$$\operatorname{tg} a = b.$$

Luego tomemos el par de los números $x=\pi/4$, $y=a-\pi/4$ que también satisface la ecuación $x+y=a$. Si $a \neq 3\pi/4 + k\pi$, este par satisface también las limitaciones de x e y, y por lo tanto (ya que a y b han sido presupuestos como valores convenientes), debe cumplirse la igualdad

$$1 + 2\operatorname{tg}\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = b. \tag{12}$$

Ya que $b = \operatorname{tg} a$, entonces a, satisface la ecuación

$$1 + 2\operatorname{tg}\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} a,$$

la cual se reduce fácilmente a la ecuación cuadrática $\operatorname{tg}^2 a - 2\operatorname{tg} a + 1 = 0$. Por consiguiente $\operatorname{tg} a = 1$ y los pares convenientes a y b hay que buscarlos entre una cantidad infinita de pares:

$$a = \frac{\pi}{4} + m\pi, \; b = 1, \quad \text{siendo } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Determinemos cuáles de estos pares, en realidad, son convenientes. Dado que para algún número entero m, $x+y=\pi/4+m\pi$ y con todo $x\neq\pi/2+k\pi$, $y\neq\pi/2+n\pi$; k, $n=0$, ±1, ±2, ... En este caso $y=\pi/4+m\pi-x$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y&=\\&=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+m\pi-x\right)+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+m\pi-x\right)=\\&=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\\&=\operatorname{tg}x+\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}.\end{aligned}$$

La última expresión es igual a 1. Por lo tanto, todos los pares $a=\pi/4+m\pi$, siendo $m=0$, ±1, ±2, ..., $b=1$ son convenientes.

No obstante, la resolución no está concluida, ya que durante los razonamientos han sido excluidos los valores $a=\pi/2+n\pi$ y $a=3\pi/4+k\pi$, donde k, $n=0$, ±1, ±2, ... Se necesita analizar también estos valores.

Sea $a=\pi/2+n\pi$, donde n es un número entero. En este caso es evidente que $a\neq3\pi/4+k\pi$ y por esto debe tener lugar la igualdad (12) de la cual, para los valores examinados de a se obtiene que $b=3$. Determinemos que hay o no entre los pares siguientes

$$a=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ b=3,\quad \text{donde } n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

los que son convenientes. El par $x=-\pi/4$, $y=3\pi/4+n\pi$ satisface la ecuación $x+y=a$; por otro lado,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+n\pi\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+n\pi\right)=-1\neq3,$$

y, por lo tanto, entre los pares a examinar a, b no se encuentren pares convenientes.

Ahora supongamos que $a=3\pi/4+k\pi$, siendo k un número entero. Puesto que en este caso $a\neq\pi/2+n\pi$, debe tener lugar la igualdad $\operatorname{tg} a=b$, es decir, $b=-1$. Determinemos que hay o no entre los pares

$$a=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ b=-1,\quad \text{siendo } k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

los que son convenientes. El par $x=3\pi/8$, $y=3\pi/8+k\pi$ satisface la ecuación $x+y=a$; por otro lado

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right)+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}+k\pi\right)=2\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}+\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{8}>0,$$

(ya que el ángulo $3\pi/8$ se encuentra en el primer cuadrante) y por esto el primer miembro de la igualdad (11) es diferente de -1 y, por consiguiente, entre los pares a examinar a, b no se encuentran los que son convenientes.

La respuesta definitiva es la siguiente: a los datos del problema los satisfacen una cantidad infinita de pares:

$$a=\pi/4+m\pi,\ b=1,\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

En conclusión de este ejemplo señalemos que muchos estudiantes, al resolverlo, han propuesto otras soluciones, a veces, más breves. Sin embargo, en todas estas soluciones algunos hechos se han considerado evidentes, aunque la argumentación estricta de éstos exige razonamientos muy prolongados y detallados. Al resolver estos problemas, por desgracia, estos razonamientos no se exponen y es más, no se expresa el entendimiento de su necesidad para que la solución pueda considerarse completa.

8. *Hallar todos los valores de a para los cuales todo valor de x que satisface la desigualdad*

$$ax^2+(1-a^2)\,x-a>0,$$

no supera a 2 por su módulo.

Los datos de este problema, según su forma lógica, son análogos a los del problema precedente. Precisamente, deben hallarse los valores del parámetro a, para los cuales de la desigualdad $ax^2+(1-a^2)\,x-a>0$ se deduce la desigualdad $-2\leqslant x\leqslant 2$. Pero el método de solución aplicado en el caso anterior aquí no da resultado; en primer lugar, debido a que no estamos analizando las ecuaciones sino las desigualdades.

En este caso es necesario determinar, ¿para cuáles valores de a todas las soluciones de la desigualdad dada se encuentran en el intervalo $-2\leqslant x\leqslant 2$? Si $a\neq 0$, la desigualdad es cuadrática y hay que examinar, desde su principio, este caso general. Sea $a\neq 0$. Es conocido que las soluciones de una desigualdad cuadrática, si éstas existen, forman en el eje numérico un intervalo o dos intervalos infinitos, o toda la multitud de números reales, y todo esto depende de los signos del discriminante y del coeficiente del término mayor. Por esto, en seguida, conviene calcular el discriminante del trinomio cuadrático que se encuentra en el primer miembro de la desigualdad

$$D=(1-a^2)^2+4a^2=a^4+2a^2+1=(a^2+1)^2.$$

De esa manera, $D>0$ para todo valor de a, por esto las raíces del trinomio son reales y diferentes; éstas se hallan fácilmente: $x_1=a$, $x_2=-1/a$.

Ahora, en función del signo del número a, las soluciones de la desigualdad dada forman un intervalo entre las raíces (si $a<0$, ramas de la parábola se dirigen hacia abajo) o dos intervalos infinitos (si $a>0$).

Según los datos, son necesarios los valores de a para los cuales todas las soluciones de la desigualdad se encuentran en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Por lo tanto, los valores de $a>0$ no son convenientes, es decir, dos intervalos infinitos no pueden situarse dentro de un intervalo finito. Nos quedan por examinar solamente los valores de $a<0$. En este caso, $x_1<0<x_2$ y la solución de la desigualdad dada será el intervalo $a<x<-1/a$.

Es necesario que todo el intervalo $a<x<-1/a$ se encuentre en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$, lo que se cumple, evidentemente, cuando y sólo cuando los extremos de este intervalo se encuentren en el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$ (se admite la coincidencia de los puntos límites), es decir, se cumplen las desigualdades

$$-2 \leqslant a < -\frac{1}{a} \leqslant 2.$$

De la desigualdad $-1/a \leqslant 2$, tomando en consideración que $a<0$, obtenemos que $a \leqslant -1/2$ y, por consiguiente, $-2 \leqslant a \leqslant -1/2$.

Así, toda solución de la desigualdad inicial, por su módulo, no supera a 2 para $-2 \leqslant a \leqslant -1/2$, pero esto se ha obtenido al suponer que $a \neq 0$. Para concluir la solución nos queda por examinar este caso particular. Cuando $a=0$, la desigualdad inicial tiene la forma $x>0$ y no todas sus soluciones, por su módulo, superan a 2, por lo tanto, el valor $a=0$ no es conveniente. De ese modo la desigualdad obtenida anteriormente

$$-2 \leqslant a \leqslant -1/2$$

es la respuesta definitiva.

9. *Hallar todos los valores de a con los cuales para todos los valores de x, que por su módulo no superan a 1, se cumple la desigualdad*

$$\frac{ax-a(1-a)}{a^2-ax-1} > 0.$$

Ante todo, hay que sustituir la desigualdad dada por la desigualdad cuadrática que es equivalente a ésta:

$$(ax+1-a^2) \cdot [ax-a(1-a)] < 0.$$

Al denominar como cuadrática a esta desigualdad, nos hemos dado prisa, ya que aún no se ha comprobado que el coeficiente de x^2 sea diferente de cero después de abrir los paréntesis. Este coeficiente es igual a a^2 y se iguala a cero cuando $a=0$, pero si $a=0$ la desigualdad dada tiene la forma $0<0$, es decir, no se cumple para ninguna x. Por esto, $a=0$ no es el valor conveniente y es necesario excluirlo del análisis, considerando que en todos los casos $a \neq 0$.

Al obtener la desigualdad cuadrática, la resolveremos del mismo modo como lo hemos hecho en el caso precedente. Aquí se ve en seguida que las raíces del trinomino cuadrático son reales, por lo tanto, no es menester determinar el discriminante. Además, el coeficiente a^2 del término mayor es positivo y, por consiguiente, las soluciones de la desigualdad forman un intervalo entre sus raíces $x_1 = (a^2-1)/a$, $x_2 = 1-a$, si estas raíces son distintas. Pero, al coincidir las raíces, la desigualdad no se satisface para ningún valor de x y por lo tanto, los valores respectivos no nos interesan.

De ese modo, son necesarios los valores de a con los cuales el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$ se encuentra entre los números $a-1/a$ y $1-a$. Sin embargo, para escribir esta condición geométrica en el lenguaje de las desigualdades hay que saber cuál número de estos dos es mayor. Esto depende, por lo visto, del número a y por eso conviene examinar dos casos.

a) $(a^2-1)/a < 1-a$. Como en el problema precedente, para que el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$ se encuentre completamente dentro del intervalo $(a^2-1)/a < x < 1-a$ es menester que sus extremos, los puntos -1 y 1, se encuentren en el interior del intervalo, o sea, deben cumplirse las desigualdades

$$\frac{a^2-1}{a} < -1 < 1 < 1-a.$$

(Las coincidencias de los puntos extremos, es decir, las igualdades $a-1/a=-1$ y $1-a=1$ no se admiten, ya que, por ejemplo, si $a-1/a=-1$, el número -1, que se encuentra en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, no está en el intervalo $-1 < x < 1-a$).

De la desigualdad $1 < 1-a$ se deduce que $a < 0$, entonces de la desigualdad $(a^2-1)/a < -1$ obtenemos que $a^2-1 > -a$, ó $a^2+a-1>0$. Las soluciones de esta desigualdad son los valores $a < (-1-\sqrt{5})/2$ y $a > (-1+\sqrt{5})/2$. Como $a<0$, utilicemos solamente los valores $a < (-1-\sqrt{5})/2$.

Ahora entre los valores obtenidos de a es necesario escoger aquéllos que satisfacen la condición a), es decir, la desigualdad $a-1/a < 1-a$. No obstante, en el caso de los valores $a < (-1-\sqrt{5})/2$ esta condición se satisface automáticamente: en efecto, los valores mencionados han sido obtenidos como soluciones de las desigualdades

$a-1/a < -1 < 1 < 1-a$.

b) $1-a < (a^2-1)/a$. En este caso hay que resolver las desigualdades

$$1-a < -1 < 1 < \frac{a^2-1}{a}.$$

De la desigualdad $1-a<-1$ resulta que $a>2$, entonces de $(a^2-1)/a > 1$ se deduce que $a^2-1>a$ ó $a^2-a-1>0$. Las soluciones de esta desigualdad son los valores $a<(1-\sqrt{5})/2$ y $a>(1+\sqrt{5})/2$. Ya que $a>2$, utilicemos sólo los valores $a>2$. Como en el caso a), estos valores automáticamente satisfacen a la condición b). Así, a los datos del problema los satisfacen los valores $a<(-1-\sqrt{5})/2$ y $a>2$.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que si las ecuaciones

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0 \text{ y } 2a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x + 2c = 0$$

ambas no tienen soluciones, entonces $a = b = 0$, $c \neq 0$.

2. ¿Para qué valores del parámetro a los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

son equivalentes?

3. ¿Para qué valores del parámetro a las ecuaciones

$$x^2 + x + a = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + ax + 1 = 0$$

a) tienen una raíz común; b) son equivalentes? (a, x son números reales).

4. Hallar los números de a para cada uno de los cuales toda raíz de la ecuación

$$a \cos 2x + |a| \cos 4x + \cos 6x = 1$$

es también la raíz de la ecuación

$$\operatorname{sen} x \cos 2x = \operatorname{sen} 2x \cos 3x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 5x$$

y, viceversa, cada raíz de la segunda ecuación es la raíz de la primera.

5. Hallar todos los números de a con cada uno de los cuales toda raíz de la ecuación

$$4 \cos^2 x - \cos 3x = a \cos x - |a - 4| (1 + \cos 2x)$$

es también la raíz de la ecuación

$$2 \cos x \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x,$$

y, viceversa, cada raíz de la segunda es también la raíz de la primera.

6. Hallar todos los valores de a y b para los cuales el sistema

$$\begin{cases} \left| \dfrac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

tiene solamente una solución (a, b, x, y, son números reales, $x > 0$).

7. Hallar todos los valores de a para los cuales el sistema

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1) by^2 = a^2, \\ (a-1) x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

tiene por lo menos una solución para cualquier valor de b (a, b, x, y son números reales).

8. Hallar todos los valores de a para los cuales el sistema

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \dfrac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3 + ax^2 y + xy^2 = 1 \end{cases}$$

tiene por lo menos una solución y toda su solución satisface la ecuación $x + y = 0$ (a, x, y son números reales).

9. Dada la desigualdad $ax + k^2 > 0$. ¿Para qué valores de a:

a) la desigualdad se cumple con todos los valores de x y k?

b) se encontrarían los valores de x y k para los cuales se cumple la desigualdad?

c) se encontraría tal valor de x con el cual se satisface la desigualdad para todo valor de k?

d) se encontraría un valor de k con el cual la desigualdad se cumple para todo valor de x?

e) se encontraría tal valor de k con el cual se satisface la desigualdad para todos los valores de x?

f) se encontraría un valor de x en el caso en que la desigualdad se cumple para todo valor de k?

§ 4. PROBLEMAS VINCULADOS CON LA DISPOSICIÓN DE LAS RAÍCES DEL TRINOMIO CUADRÁTICO

El trinomio cuadrático puede calificarse como la función principal de las Matemáticas escolares. Si no se toma en consideración la función lineal absolutamente simple, es posible considerar que esta función es única para que en las Matemáticas escolares se demuestran estrictamente todas las propiedades necesarias para resolver problemas y en la teoría. Cada estudiante debe tener buen conocimiento de las propiedades necesarias del trinomio cuadrático.

Además de los problemas, cuya solución se obtiene por medio de los teoremas conocidos (soluciones de las ecuaciones y desigualdades cuadráticas, búsqueda de las condiciones de existencia de las raíces reales, determinación de los signos de las raíces, búsqueda de los valores máximo y mínimo del trinomio cuadrático), se encuentran (y también a menudo) los problemas que no pueden resolverse mediante estos teoremas simplísimos.

Sin tener la posibilidad de describir por completo todos los tipos posibles de los problemas a base del trinomio cuadrático, aquí se examinan solamente los problemas vinculados con la disposición de las raíces. Entre los problemas escolares enumerados más arriba se encuentra uno de este tipo: en efecto, determinar los signos de las raíces no es más que determinar la disposición de las raíces respecto al punto 0. Según se sabe este problema se resuelve con ayuda del teorema de Viete. ¿Qué hacer si se necesita determinar la disposición de las raíces respecto a cualquier otro punto? ¿Es posible que el punto 0 sea "mejor" que otros puntos y por eso el problema se resuelve respecto al primero de una vez, mientras que respecto a otros se tengan dificultades? Sin duda no es mejor. El punto 0 se diferencia, en este sentido, de otros puntos únicamente en lo siguiente: para este punto 0 se tiene el teorema de Viete, mientras que para los demás hay que idear un teorema igual, lo que es indispensable para resolver este problema.

Sin embargo, en este caso nos encontraremos en una situación difícil: si empezáramos a idear los teoremas con ayuda de los cuales todos los problemas, con respecto a la disposición de las raíces, se resuelven sin dificultades, lo mismo que se determinan los signos de las raíces, entonces el número de estos teoremas sería tan grande que no podría sencillamente retenerlos en la memoria. En efecto, es absolutamente natural (esto se encuentra en realidad en los problemas) interesarse por la disposición de las raíces en algún intervalo dado

$c<x<d$, o en un intervalo infinito $x<c$, o en otro infinito $x>d$. Con relación a cada uno de estos intervalos pueden plantearse, por ejemplo, las preguntas siguientes: ¿Para qué condición en este intervalo se encuentran ambas raíces; o no hay raíces; o hay solamente una raíz; o hay por lo menos una raíz? Fundamentándonos en estas preguntas podemos formular doce problemas diferentes. ¿Si a la par con los intervalos mencionados se analizan también los intervalos con los extremos incluídos del tipo $c\leqslant x<d$ ó $x\geqslant d$? ¿Y si se tiene en cuenta que las propiedades del trinomio cuadrático dependen en mucho del signo de su coeficiente mayor (coeficiente de x^2)? Es del todo evidente que la cantidad de teoremas necesarios es inmensa. Por lo tanto, aquí no podemos utilizar el método de la recordación de los teoremas. No nos queda otra salida que aprender a idear un teorema para cada problema concreto, así como también, hacer lo posible por memorizar los más importantes.

Para idear estos teoremas es necesario no sólo conocer las propiedades del trinomio cuadrático sino dominar libremente estas propiedades y, ante todo, saber razonar en dos lenguajes: la algebraica y la geométrica. Esto significa que hay que saber exponer la interpretación geométrica en la gráfica para toda propiedad definida oralmente o en la lenguaje algebraica. Y viceversa, toda propiedad de la gráfica hay que describirla con las palabras y por los datos algebraicos. Por ejemplo, el coeficiente mayor es menor que cero. En este caso, las ramas de la parábola están dirigidas hacia abajo, el trinomio no tiene raíces reales. Esto significa que: la parábola no interseca y no toca al eje de abscisas; la gráfica del trinomio ax^2+bx+c se encuentra por encima del eje de abscisas, es decir, $a>0$ y $b^2-4ac<0$. Esta última afirmación geométrica puede exponerse por lo menos por tres procedimientos diferentes: la desigualdad $ax^2+bx+c>0$ se satisface para toda x; la desigualdad $ax^2+bx+c\leqslant 0$ no tiene soluciones; el trinomio no tiene raíces reales y su coeficiente mayor es positivo.

La solución de muchos problemas que siguen es, en realidad, una ampliación del "vocabulario de traducción" citado de la lenguaje algebraica a la geométrica y viceversa. Antes de empezar a analizar los problemas concretos se da la metodología de la resolución de algunos ejemplos de carácter teórico.

Sea $f(x)=ax^2+bx+c$. *Todos los razonamientos los efectuamos considerando que* $a>0$; respectivamente, al resolver los problemas concretos siempre conviene transformarlos para utilizar las propiedades del trinomio con el coeficiente mayor positivo. Designemos las raíces de este trinomio por x_1 y x_2 y el discriminante, por D.

1. *¿Para cuáles condiciones ambas raíces de este trinomio son mayores que cierto número dado d?*

Para definir estos datos, de inmediato imaginemos la gráfica de un trinomio que satisface esta condición (fig. 169). En primer lugar, la curva interseca el eje de abscisas o toca a éste último, es decir, $D\geqslant 0$;

en segundo lugar, en el punto d el valor de $f(d)$ es positivo. Sin embargo, esto no es suficiente: el trinomio, cuya gráfica está expuesta en la fig. 169 por una línea punteada, no satisface los datos del problema,

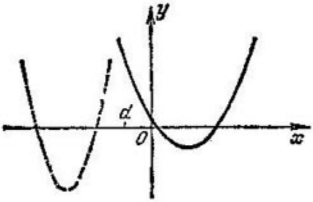

Fig. 169

aunque tenga las mismas propiedades. Para separar "nuestros trinomios" de los "extraños" de este tipo es suficiente que la cresta de la parábola (o sea, su abscisa) se encuentre a la derecha del punto d, es decir, $-b/(2a) > d$. De ese modo hemos hallado la condición requerida: ambas raíces son mayores que d cuando y sólo cuando $D \geqslant 0$, $f(d) > 0$ y $-b/(2a) > d$.

Sin duda, el razonamiento anterior no es estricto del todo y es posible considerarlo sólo como una solución "en borrador", o como una búsqueda de la respuesta, y debe efectuarse una demostración más estricta. Esta última es bastante simple.

Supongamos que ambas raíces son mayores que d. En este caso $D \geqslant 0$, pues las raíces son reales, la abscisa de la cresta $-b/(2a)$ es mayor que d, ya que la última se encuentra entre las raíces; y en fin, $f(d) > 0$, ya que d se encuentra fuera del intervalo entre las raíces. Y viceversa, sean satisfechas las tres condiciones mencionadas. Entonces ambas raíces son reales; la condición $f(d) > 0$ significa que el punto d se encuentra fuera del intervalo entre las raíces; mientras que la tercera condición asegura que el valor de d es más pequeño que la raíz menor. En caso contrario, d sería más grande que la raíz mayor, y, por consiguiente, más grande que la semisuma de las raíces que es igual a $-b/(2a)$.

Al examinar los ejemplos ulteriores nos limitaremos solamente a la solución "en borrador" dejando para el lector la demostración estricta como un ejercicio provechoso e incluso necesario.

2. *¿Para cuáles condiciones las raíces del trinomio se encuentran por uno y por otro lado del número d?*

La respuesta se obtiene inmediatamente si la pregunta se formula así: ¿para cuáles condiciones el número d se encuentra entre las raíces del trinomio dado? Como es sabido, esta afirmación es equivalente a la que $f(d) < 0$. (¡Recordemos que el coeficiente mayor se considera positivo!).

3. *¿Para cuáles condiciones una raíz del trinomio se encuentra en el intervalo $d < x < e$?*

Aquí la respuesta es también muy evidente: esto es válido solamente cuando en los puntos d y e el trinomio tiene valores de distintos signos. Resolviendo los problemas para no examinar por separado los casos en que $f(d) > 0$, $f(e) < 0$ y $f(d) < 0$, $f(e) > 0$ es útil escribir estas condiciones en una forma más compacta: $f(d) f(e) < 0$.

Los tres ejemplos citados muestran con bastante claridad la dirección general al resolver los problemas del tipo analizado. No obstante, en la mayoría de los problemas la cuestión no se plantea tan directamente como tiene lugar en los ejemplos teóricos examinados, y para llegar al planteamiento necesario hay que formular de nuevo el problema. Ahora empezamos a examinar los problemas concretos.

Ante todo, recordemos el último problema del párrafo precedente. En aquel problema hubo que determinar, ¿en qué caso el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$ se encuentra entre las raíces del trinomio $(ax + 1 - a^2) \times \times (ax - a + a^2)$? Es evidente que esta afirmación significa que los números -1 y 1 se encuentran entre las raíces de este trinomio y esto se cumple cuando y sólo cuando $f(-1) < 0$ y $f(1) < 0$, es decir,

$$(-a + 1 - a^2)(-2a + a^2) < 0, \quad (a + 1 - a^2) a^2 < 0.$$

Este sistema de desigualdades se resuelve fácilmente mediante el método de intervalos.

4. *Hallar con cuáles valores de m el trinomio cuadrático $x^2 + mx + m^2 + 6m$ es negativo para todas x que satisfacen la condición $1 < x < 2$.*

Para que el trinomio cuadrático a examinar sea negativo para todos los valores de x del intervalo $1 < x < 2$, es necesario que, en primer lugar, éste tenga el discriminante positivo y, en segundo lugar, que el intervalo $1 < x < 2$ se encuentre entre sus raíces, además no se excluye la coincidencia de los extremos con las raíces. Razonando igualmente que en los problemas precedentes, obtenemos el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} m^2 - 4(m^2 + 6m) > 0, \\ \dfrac{-m - \sqrt{-3m^2 - 24m}}{2} \leqslant 1 < 2 \leqslant \dfrac{-m + \sqrt{-3m^2 - 24m}}{2}. \end{cases}$$

La resolución de este sistema no es, en principio, compleja. No obstante, desde el punto de vista del cálculo, este sistema puede causar muchas preocupaciones. Por esto, apliquemos los razonamientos expuestos más arriba: la condición necesaria se satisfaga si los números $f(1)$ y $f(2)$ son negativos, es decir, se cumple el sistema de desigualdades;

$$\begin{cases} m^2 + 7m + 1 \leqslant 0, \\ m^2 + 8m + 4 \leqslant 0, \end{cases}$$

cuya solución se halla fácilmente en el eje numérico:

$$-\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \leqslant m \leqslant -4+2\sqrt{3}.$$

5. *Hallar para cuáles valores de p la ecuación* $1+p\,\text{sen}\,x=p^2-\text{sen}^2 x$ *tiene su solución.*

Al designar $\text{sen}\,x$ con y, escribamos de nuevo la ecuación en la forma siguiente:

$$y^2+py+1-p^2=0.$$

En este instante muchos estudiantes cometen un error grave, razonando, por ejemplo, así: "Ya que y es no más que $\text{sen}\,x$, entonces $-1 \leqslant y \leqslant 1$ y, por lo tanto, es necesario hallar los valores de p para los cuales las raíces de la ecuación cuadrática, escrita más arriba, se encuentran en el segmento $-1 \leqslant y \leqslant 1$". En efecto, no es menester que ambas raíces se encuentren en este segmento; es suficiente que una de estas raíces se encuentre en el segmento indicado: si para alguna p una raíz y_1 por su valor absoluto no supera a 1, la ecuación $\text{sen}\,x = y_1$ tiene solución, es decir, la ecuación inicial posee solución y tal valor de p es conveniente.

De ese modo, hay que hallar tales valores de p para los cuales una de las raíces de la ecuación (5) se encuentre en el intervalo $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Este problema puede ser reducido a una resolución de desigualdades: en primer lugar, no debe ser negativo el discriminante $5p^2-4 \geqslant 0$, y en segundo lugar, debe cumplirse, por lo menos, una de las desigualdades dobles

$$-1 \leqslant \frac{-p-\sqrt{5p^2-4}}{2} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{-p+\sqrt{5p^2-4}}{2} \leqslant 1.$$

Pero desde el punto de vista del cálculo esta solución es muy compleja. Nosotros escogemos otro método.

Para facilitar los razonamientos posteriores conviene analizar un caso en que ambas raíces del trinomio $y^2+py+1-p^2$ son diferentes de -1 y 1. Entonces la condición requerida se realiza para los dos casos: cuando solamente una raíz se encuentra en el intervalo $-1 < y < 1$, y cuando ambas raíces se encuentran en el mismo intervalo. El primer caso, según el ejemplo 3, tiene lugar cuando y sólo cuando el producto de los valores del trinomio a examinar en los puntos -1 y 1 es negativo, o sea, para los valores de p que satisfacen la desigualdad

$$(p^2-p-2)(p^2+p-2)<0,$$

cuyas soluciones se hallan fácilmente por el método de intervalos:

$$-2<p<-1, \quad 1<p<2.$$

Escribamos las condiciones para el segundo caso. Ante todo, el trinomio debe ser positivo para $y=-1$ y para $y=1$. Sin embargo, esta condición no determina aún nuestro caso: la misma se satisface también para los trinomios que, en general, no tienen raíces y al mismo tiempo para los trinomios cuyas raíces se encuentran a la derecha de 1 o a la izquierda de -1. Con motivo de separar los trinomios que no tienen raíces hay que exigir que el discriminante sea mayor que cero y para excluir los demás trinomios "extraños" es necesario condicionar que la abscisa de la cresta de la parábola, es decir, $y=-p/2$ se encuentre en el intervalo $-1<y<1$.

De esa manera, el conjunto de condiciones para resolver el caso examinado es el siguiente: a) los valores del trinomio deben ser positivos si $y=-1$ e $y=1$; b) el discriminante del mismo debe ser también positivo; c) la cresta de la parábola debe encontrarse en el intervalo $-1<y<1$. Como resultado obtenemos el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 2-p-p^2>0, \\ 2+p-p^2>0, \\ 5p^2-4\geqslant 0, \\ -1<-\frac{p}{2}<1. \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema se hallan fácilmente:

$$-1<p\leqslant-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \frac{2}{\sqrt{5}}\leqslant p<1.$$

En resumen, analicemos el caso dejado temporalmente de lado, donde el trinomio tiene las raíces: $y=-1$ e $y=1$. Es evidente que $y=-1$ es la raíz si $p=1$ y $p=-2$, mientras que $y=1$ es también la raíz si $p=-1$ y $p=2$. Por lo tanto, los últimos valores de p también son convenientes.

Si reunimos todos los valores de p hallados, obtenemos la respuesta definitiva: la ecuación inicial tiene solución para

$$-2\leqslant p\leqslant-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \frac{2}{\sqrt{5}}\leqslant p\leqslant 2.$$

6. *En el plano de coordenadas hay que encontrar todos los puntos cuyas coordenadas (x, y) deben asegurar que la expresión*

$$(2\cos t+1/2\cos x\cos y)\cos x\cos y+1+\cos x-\cos y+\cos 2t$$

sea positiva para todo valor de t y exponer la zona formada por estos puntos.

Si t puede ser un número real cualquiera (o que pueda encontrarse en cualquier segmento de una longitud de 2π), entonces $z=\cos t$ pasa un segmento $-1\leqslant z\leqslant 1$. Por esto, el problema dado puede ser formulado así: ¿para qué valores de x e y la desigualdad

$$2z^2+2z\cos x\cos y+1/2\cos^2 x\cos^2 y+\cos x-\cos y>0$$

se cumple para toda z del segmento $-1\leqslant z\leqslant 1$?

¿En qué caso el trinomio cuadrático es positivo en todo el segmento $-1\leqslant z\leqslant 1$? Ante todo, esto sería válido si su discriminante es menor de cero. Por lo tanto, los pares (x, y), para los cuales

$$D=\cos^2 x\cos^2 y-2(1/2\cos^2 x\cos^2 y+\cos x-\cos y)= \\ =-2(\cos x-\cos y)<0$$

ó $\cos x-\cos y>0$ serán convenientes.

Si el discriminante no es negativo, los pares convenientes (x, y), como es fácil ver, se determinan por las condiciones siguientes: los valores del trinomio en los puntos -1 y 1 son positivos, mientras la abscisa de la cresta de la parábola se encuentra fuera del segmento $-1\leqslant z\leqslant 1$. Sin embargo, la abscisa de la cresta de nuestro trinomio es igual a $-1/2\cos x\cos y$, que por el módulo es, evidentemente, menos de la unidad. Por consiguiente, la abscisa de la cresta se encuentra, justamente entre -1 y 1. En consecuencia, el caso de $D\geqslant 0$ no proporciona soluciones nuevas.

La parte final de la resolución, o sea, la exposición de las soluciones de la desigualdad $\cos x-\cos y>0$ en el plano, se muestra en el problema 30 del § 13 de la Parte I.

Este ejercicio podemos resolver también de otro modo, si escribimos la desigualdad analizada en la forma siguiente:

$$(2z+\cos x\cos y)^2+2(\cos x-\cos y)>0.$$

Este método lo eligen muchos estudiantes; no obstante, aquí les espera una dificultad lógica que no todos pueden superar. La mayoría considera que la última desigualdad se cumple para toda z en el caso y solamente en el caso de $\cos x-\cos y>0$. En calidad de demostración se aduce un razonamiento según el cual, al aceptar z de manera que el primer sumando se convierta en cero, con ello alteramos la desigualdad.

Este razonamiento sería justo si el problema se resuelve para *todo valor* de z. Pero $z=\cos t$ y tiene su valor sólo en el intervalo -1 y 1. Por eso, al intentar convertir el primer sumando en cero, hay que demostrar la existencia del número *z en el segmento* $-1\leqslant z\leqslant 1$ para el cual este paréntesis es igual a cero. La ausencia de esta demostración es un defecto lógico indudable, aunque no conduce a un error real; en efecto, tal número z existe siempre, lo que se explica por las particularidades del ejemplo dado. Esto se deduce del hecho de que la expresión $-1/2\cos x\cos y$ es siempre, por el módulo, menos de 1.

Indiquemos que la demostración de este hecho en la segunda resolución corresponde al análisis de la posición de la abscisa de la cresta en la primera resolución.

7. *Para cada número real a debe resolverse la ecuación*

$$9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0.$$

Designando $3^{-|x-2|}$ por y y tomando en consideración que para cualquier x $0<3^{-|x-2|}\leqslant 1$, obtenemos la ecuación

$$y^2-4y-a=0,$$

para la que es necesario hallar las raíces que se encuentran en el intervalo $0<y\leqslant 1$. La abscisa de la cresta de la gráfica del trinomio $f(y)=y^2-4y-a$ es igual a 2. De esa manera, si el trinomio tiene raíces, en este caso la raíz mayor es mayor que 2 y no nos interesa. Por lo tanto, debe escribirse una condición según la cual en el intervalo $0<y\leqslant 1$ se tiene una raíz.

Ante todo, $y=1$ es la raíz siendo $a=-3$. A continuación, ya que $f(0)=-a$, $f(1)=-a-3<f(0)$, entonces, debido al ejemplo 3, en el intervalo $0<y<1$ se encuentra solamente una raíz en el caso y sólo en el caso de $f(0)>0$ y $f(1)<0$, lo que será si $-3<a<0$.

Por consiguiente, sólo cuando $-3\leqslant a<0$ en el intervalo $0<y<1$, la ecuación tiene una raíz y esta última es su raíz menor: $y=2-\sqrt{4+a}$. Ahora, resolviendo la ecuación $3^{-|x-2|}=2-\sqrt{4+a}$, que con los valores hallados de a tiene la solución (esto se deduce de que el valor de y se encuentra entre 0 y 1), obtenemos

$$|x-2|=-\log_3(2-\sqrt{4+a}),\quad x_{1,2}=2\pm\log_3(2-\sqrt{4+a}).$$

8. *Hallar todos los valores de a para los cuales la ecuación*

$$\log_{\sqrt{x}} a^2\left|\left(\log_{a^2}\frac{x}{2}\right|+\log_a x=\log_{a^2}4\cdot\log_{\sqrt{x}} a\right.$$

tiene solución y encontrar todas las soluciones correspondientes.

Designando $\log_a x$ por y y $\log_a 2$ por b y aplicando las fórmulas de transformación de los logaritmos, obtenemos la ecuación

$$\frac{4}{y}\left|\frac{1}{2}(y-b)\right|+y=\frac{2b}{y},$$

o, aumentando el RVA a cuenta de la adición de cero, la ecuación

$$y^2+2|y-b|-2b=0.$$

Al principio comenzamos a hallar las raíces de esta ecuación que satisfacen la condición $y>b$ y, sin duda alguna, no son iguales a cero. En este caso nuestra ecuación se convierte en la cuadrática:

$$y^2+2y-4b=0.$$

Necesitamos raíces que no sean iguales a cero y sean mayores que b. Ante todo, para la existencia de tales raíces es menester que el discriminante $D=1+4b$ no sea negativo. Por ello, vamos a suponer que $b\geqslant -1/4$.

La abscisa de la cresta de la gráfica del trinomio $y^2+2y-4b$ es igual a -1, y debido a esto la raíz menor es menos de $-1<b$, ya que $b\geqslant -1/4$. Por lo tanto, nos interesa únicamente la raíz mayor, es decir, su posición del lado derecho del punto b. Es evidente de los razonamientos gráficos, que la raíz mayor será más de b solamente cuando el trinomio en el punto b sea negativo, es decir, $b^2-2b<0$. Esta desigualdad se satisface para $0<b<2$ y con estos últimos valores de b tenemos la raíz

$$y=-1+\sqrt{1+4b},$$

que no es igual a cero y, en consecuencia, satisface todas las condiciones necesarias.

Luego examinemos los valores de $y\leqslant b$. En este caso nuestra ecuación toma la forma siguiente: $y^2-2y=0$. Sus raíces son $y_1=2$ y $y_2=0$. Necesitamos solamente raíces que no son iguales a cero y que no superan a b, por esto y_2 no puede servirnos en absoluto, mientras que $y_1=2$ será conveniente cuando $b\geqslant 2$.

Si reunimos los resultados de los dos casos examinados, obtenemos las soluciones (¡diferentes de cero!) de la ecuación respecto a y: si $b\leqslant 0$, no tenemos soluciones; si $0<b<2$, tenemos $y=-\sqrt{1+1+4b}$; si $b\geqslant 2$, tenemos $y=2$.

Es necesario examinar el caso en cuanto a la incógnita x y al parámetro a. El paso, para $x=a^y$ no proporciona ninguna dificultad, mientras que, para pasar para a, hay que resolver tres desigualdades:

$$\log_a 2\leqslant 0,\quad 0<\log_a 2<2,\quad \log_a 2\geqslant 2.$$

Estas últimas se resuelven fácilmente: la primera desigualdad se cumple para $0<a<1$; la segunda, para $a>\sqrt{2}$, y la tercera para $1<a\leqslant 2$.

Obtenemos, en definitiva, la respuesta siguiente: para $0<a<1$ no tenemos soluciones; $x=a^{-1+\sqrt{4+\log_a 2}}$ cuando $a>\sqrt{2}$; $x=a^2$ si $1<a\leqslant\sqrt{2}$.

EJERCICIOS:

1. Hallar todos los valores del parámetro d para los cuales ambas raíces de la ecuación cuadrática $x^2-6dx+(2-2d+9d^2)=0$ son reales y mayores que 3.

2. Hallar todos los valores del parámetro a para los cuales ambas raíces de la ecuación cuadrática $x^2-ax+2=0$ son reales y se encuentran entre 0 y 3 (a excepción de los valores extremos).

3. ¿Para cuáles valores de a una de las raíces del polinomio $(a^2+a+1)x^2+(a-1)x+a^2$ es mayor que 3, mientras que la otra es menor que 3?

4. Hallar todos los valores de a para los cuales las raíces de la ecuación $x^2+x+a=0$ son mayor que a.

5. ¿Para cuáles valores de a las raíces de polinomio $2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)$ satisfacen las desigualdades $x_1<a<x_2$?

6. ¿Para cuáles valores de a la ecuación

$$(1+a)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2-3a\,\frac{x^2}{x^2+1}+4a=0$$

tiene raíces reales?

7. Hallar todos los valores de m para los cuales la desigualdad $mx^2-4x+3m+1>0$ será cumplida para todas las $x>0$.

8. Hallar todos los valores de a con los cuales la desigualdad $x^2-a(1+a^2)x+a^4<0$ se reduce a la desigualdad $x^2+4x+3>0$.

9. ¿Para cuáles valores de y es válida la afirmación siguiente: "Existe por lo menos un valor de x para el que se satisface la desigualdad $2\log_{0,5}y^2-3+2x\log_{0,5}y^2-x^2>0$?"

10. Para cuáles valores de y es válida la afirmación siguiente: "La desigualdad

$$x^2\left(2-\log_2\frac{y}{y+1}\right)+2x\left(1+\log_2\frac{y}{y+1}\right)-2\left(1+\log_2\frac{y}{y+1}\right)>0$$

se satisface para toda x"?

11. Hallar todos los valores de a con los cuales la desigualdad $0<x<1$ se deduce de la desigualdad $ax^2-x+1-a<0$.

12. Hallar todos los valores de a con los cuales la desigualdad $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2\leqslant 0$ se deduce de la desigualdad $0\leqslant x\leqslant 1$.

13. Hallar todos los valores de a para los cuales, con todas las x que por el módulo no superan a la unidad, es válida la desigualdad $2x^2-4a^2x-a^2+1>0$.

Resolver las ecuaciones y desigualdades:

14. $x+\sqrt{x}=a$.

15. $\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2+2a\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}+1=0$.

16. $4^x-4m2^x+2m+2=0$.

17. $4^{\operatorname{sen} x}+m2^{\operatorname{sen} x}+m^2-1=0$, donde $-1<m<1$.

18. $(\lg \operatorname{sen} x)^2-2a\lg \operatorname{sen} x-a^2+2=0$.

19. $(\log_a \operatorname{sen} x)^2+\log_a \operatorname{sen} x-a=0$, $a>0$, $a\neq 1$.

20. $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$.

21. $\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x$.

22. $2|\lg(ax)|\log_x 10=(4\lg a-3)\log_{x^2}10-\dfrac{1}{2}\lg x$.

23. $\log_{\sqrt{x}} a\cdot\left|\log_a\dfrac{x}{2}\right|=\log_{a^2}2\cdot\log_{\sqrt{x}}a^2-\log_a\sqrt{x}$.

24. $\log_{100}x^2=\log_{\sqrt{x}}10\left(\lg 10a-\left|\lg\dfrac{x}{a}\right|\right)$

25. $\log_{\sqrt{x}}a^2\cdot\left|\log_{a^2}\dfrac{x}{2}\right|+\log_a x=\log_{a^2}4\cdot\log_{\sqrt{x}}a$.

26. $\log_a x\cdot|\log_x a-\log_2 a|=\log_x(ax)-\log_2 a^2+\log_a x\cdot\log_2 a$.

Determinar en el plano de coordenadas los puntos para los cuales se satisfacen las condiciones siguientes.

27. Para todo valor t

$$\cos 2(t+x)+2\operatorname{sen}(t+x)\cos y-\frac{1}{2}(\cos y-1)^2-\operatorname{sen} x<\frac{1}{2}.$$

28. Para todo valor t

$$\operatorname{sen}^2(t+x)+\operatorname{sen}(t+y)+\operatorname{sen}(t+2x-y)+1/4>0.$$

29. Para todo valor t

$$\left(2\cos t+\frac{1}{2}\cos x\cos y\right)\cos x\cos y+1+\cos x-\cos y+\cos 2t>0.$$

30. Por lo menos para un valor t

$$\cos(t+3x+y)-\cos(t+x-y)-\operatorname{sen}^2(t+2x)>\frac{1}{4}.$$

31. Por lo menos para un valor t

$$\operatorname{sen}^2 t\cos^2 x+\cos^2 t\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}2t+2(\cos 2x+\cos y)<0.$$

RESPUESTAS

Y SOLUCIONES

PARA LOS EJERCICIOS[1]

PARTE I

§ 1

1. c) La ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde x es una magnitud incógnita y a, b, c son números dados, $a \neq 0$. d) Véase el § 4 de la Parte I. e) Véase el § 5 de la Parte I. g) Véase el § 7 de la Parte I. **2.** a) Axioma. b) Teorema. c) Definición. d) Teorema. **3.** Para $a>0$, $b>0$. **4.** Teorema inverso: si la ecuación de segundo grado tiene dos raíces reales diferentes, entonces el discriminante es positivo y el teorema es correcto. Teorema contrario: si el discriminante de la ecuación cuadrática no es positivo (o sea, negativo o igual a cero), entonces esta ecuación no puede tener dos raíces reales diferentes y el teorema es correcto. Teorema contrario al inverso: si la ecuación de segundo grado no tiene dos raíces reales diferentes, entonces el discriminante no es positivo y el teorema es correcto. (¡Demuéstrense todos estos teoremas!) **5.** Demostración de lo absurdo. **6.** $(a_1-\alpha)\ldots(a_n-\alpha)=0$. **7.** $|ab|+|bc|+|ca|=0$. **8.** Sean $a<0$, $b>0$, o sean a y b los números de signos iguales y $a>b$. Esto se deduce de que la función $y=1/x$ es negativa decreciendo en el conjunto de números negativos, y positiva decreciendo en el conjunto de números positivos. **9.** Si cualesquier x_1 y x_2 son tales que $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$, entonces $3x_1-x_1^2<3x_2-x_2^2$. **10.** La condición es necesaria.

§ 2

1. El número $a_n \ldots a_3a_2a_1a_0$ se divide por 11 cuando y sólo cuando se divide por 11 el número $|a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^na_n|$. **2.** Demuéstrese por oposición. Sea $N=m^2$; examínense dos casos: cuando m se divide por 3 y cuando m no se divide por 3. **3.** Demuéstrese que $(p-1)$ $(p+1)$ se divide por 3 y por 8. **4.** $p=3$. Uno de los tres números sucesivos: p, $p+1$, $p+2$ ha de dividirse por 3. Por eso sea $p=3$, o sea (para $p>3$) el número $p+1$ que se divide por 3. En este caso $p+4=(p+1)+3$ no puede ser simple. **5.** Hay que convencerse de que una sola de las cifras 0, 1, 4, 5, 6, 9 puede ser la última del cuadrado de cualquier número entero. **6.** 494. **7.** Hay diez de estos números: 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137, 152. **8.** Para las n representadas en la forma de $5s-3$, donde s es un número entero positivo. Si $3n+4=5k$, entonces $3(n+3)=5(k+1)$ y por eso $n+3$ ha de dividirse por 5. **9.** Para ningunos. Si tuvieran lugar las igualdades $2n+3=kp$ y $5n+7=kq$, $k>1$, se obtendría que $1=(5p-2q)k$. **10.** 3762. Hay que convencerse por comprobación sucesiva de que se tiene una sola representación de $13=2^2+3^2$ y sólo dos representaciones de $85=2^2+9^2=6^2+7^2$. De la tercera condición se deduce que la primera cifra del número incógnito no puede ser menor que la última. Por esta razón es necesario analizar los cuatro números: 3292, 3922, 3672, 3762. **11.** 857. Nótese que

[1] En las respuestas a las ecuaciones y desigualdades trigonométricas k, l, m, n significan, si no se estipula lo contrario, números enteros cualesquiera.

$\overline{abc1} = 10 \cdot \overline{abc} + 1$ y $2\overline{abc} = \overline{abc} + 2000$. **12.** 34056, 34452, 34956. Utilícense los criterios de divisibilidad por 4 y por 9. **13.** $n \geqslant 2$. Factorizar n^4+4. **14.** Demuéstrese que entre los números k, m, n se hallan sea dos pares o sea dos impares. Luego debe aplicarse la identidad $k^3+m^3+n^3=(k+m+n)^3-3(k+m)(m+n)\times$ $\times(n+k)$. **15.** $\underbrace{\overline{1 \ \ldots \ 1}}_{2n \text{ veces}} - \underbrace{\overline{2 \ \ldots \ 2}}_{n \text{ veces}} = 9^{-1} \cdot \underbrace{\overline{9 \ \ldots \ 9}}_{2n \text{ veces}} - 2 \cdot 9^{-1} \cdot \underbrace{\overline{9 \ \ldots \ 9}}_{n \text{ veces}} = 9^{-1} \times$ $\times(10^{2n}-1)-2\cdot 9^{-1}\cdot(10^n-1)=[(10^n-1)/3]^2=\underbrace{\overline{3 \ \ldots \ 3}}_{n \text{ veces}}{}^2$. **16.** $x_1=3$, $y_1=1$; $x_2=-3$, $y_2=-1$. Considerando la ecuación como de segundo grado respecto a x, hacer la conclusión de que su discriminante $25y^2+56$ ha de ser el cuadrado de un número entero, o sea, $56=(k+5y)(k-5y)$. Luego hay que aplicar las representaciones posibles del número 56 en forma de un producto de dos números enteros. **17.** $x_1=2$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=-2$; $x_3=-2$, $y_3=2$; $x_4=-2$, $y_4=-2$. Exprésese x^2 por y^2 y conclúyase que y puede asumir tales valores enteros para los cuales $3 < y^2 \leqslant 12$. **18.** Por ejemplo, los números $(a+b)/2$ y $a+2^{-1/2}(b-a)$. **19.** No pueden. **20.** Demuéstrese que de la racionalidad del número tg 5° se deducirá que tg 30° es un número racional.

§ 4

1. Sí. Para $a=0$ el módulo a es igual simultáneamente a a y $a-a$. **2.** a) Si $x \geqslant 0$, entonces $-x \leqslant 0$, y entonces $|-x|=-(-x)=x=|x|$; si $x<0$, entonces $-x>0$, y entonces $|-x|=-x=|x|$. b) Si $x \geqslant 0$, entonces $|x|=x$, y, por consiguiente, $x \leqslant |x|$; si $x<0$, entonces $x<-x$, es decir, $x<|x|$, de donde $x \leqslant |x|$. **4.** $a_1=\ldots=a_n=0$. **5.** Sea $a<b$ para la certeza; entonces $|b-a|=b-a$. Son posibles tres casos: $0 \leqslant a < b$, $a < 0 \leqslant b$, $a<b<0$. En el primer caso la distancia es igual a $b-a=|b-a|$, en el segundo, $b+|a|=$ $=b-a=|b-a|$, en el tercero, $|a|-|b|=-a-(-b)=b-a=|b-a|$. **6.** a) $a-b<x<a+b$. b) $x \leqslant a-b$, $x \geqslant a+b$. **7.** $x_1=3/2$, $x_2=7/6$. **8.** $x=-1$. **9.** No hay soluciones. **10.** x es un número cualquiera. **11.** No hay soluciones. **12.** $7/6 \leqslant x \leqslant 3/2$. **13.** $x_1=0$, $x_2=-1$. Ya que $|x|+x^3>0$ para $x>0$, entonces no hay raíces positivas; para $x \leqslant 0$ tenemos una ecuación $-x+x^3=0$, para la cual se buscan las raíces no positivas. **14.** $x=-1$. Está claro que las raíces satisfacen la desigualdad $x+1 \leqslant 0$; escríbase la ecuación en forma de $(x+1)\times$ $\times(1-|x-1|)=0$ y elíjase aquella raíz que satisface la condición $x \leqslant -1$. **15.** No hay soluciones. Convénzase de que $-x^2+2x-3<0$ para todos los valores de x; obténgase la ecuación $x^2-2x+2=0$ que no tiene raíces reales. **16.** $x=-1$, $x \geqslant 0$. Escríbase la desigualdad en forma de $|1+x|^2 \geqslant$ $\geqslant |1+x|\,|1-x|$; $x=-1$ es una solución, y, si $x \neq -1$, puede dividirse por $|x+1|>0$. **17.** $1 \leqslant x \leqslant 3$, $x=4$. **18.** $x<-3$, $-3<x<-2$, $x>0$. **19.** $x \leqslant 3/2$. **20.** $0 \leqslant x \leqslant 2$. Ya que $x^2+x+1>0$ para todos los valores de x, entonces puede dividir ambos miembros de la desigualdad por x^2+x+1. **21.** $x_1=2$, $x_2=5$. **22.** $x_1=1/\sqrt{2}$, $x_{2,3}=-1 \pm (1/\sqrt{2})$. **23.** $x=-2$. **24.** $x_{1,2}=\pm\log_3 2$. Nótese que la ecuación no cambia al sustituir x por $-x$, por eso es suficiente hallar solamente las raíces no negativas (después de que las raíces no positivas se obtienen al cambiar el signo por el contrario). **25.** $x=-1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. **26.** $x<1/3$, $x>3$. **27.** $4/3<x<4$. **28.** $2<x<5$. **29.** $x \leqslant -2-\sqrt{2}$, $x \geqslant 1+\sqrt{3}$. **30.** $1-$ $-\sqrt{17} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}-1$. **31.** $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=0$, $y_2=-3$; $x_3=-6$, $y_3=9$. **32.** $x_{1,2}=\pm(1-\sqrt{1-4a})/2$, si $a<0$; $x=0$ para $a=0$; para $a>0$ no tiene soluciones. Escríbase la ecuación en forma de $|x|^2+|x|+a=0$. **33.** $x_{1,2}=$ $=\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$ para $a<1$; $x=0$ para $a=1$; para $a>1$ no hay soluciones. **34.** $x_{1,2}=2\pm\log_3(2-\sqrt{4+a})$ para $-3 \leqslant a<0$; no hay soluciones para los demás valores de a. **35.** Utilícese la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica. **36.** $\sqrt{|x|}$; x^2; $|x|$; x; $|x|^3\sqrt{y}$; x^3y^3. **37.** Para $a \geqslant 0$. **38.** $-2a$. **39.** $2/(2-x)$. Nótese que $x \pm 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} \pm 1)^2$. **40.** $|\cos\alpha - \cos\beta|$.

§ 5

1. a) En la circunferencia con el radio 20 y el centro en el origen de las coordenadas; b) en la circunferencia con el radio 5 y el centro en el punto (2, 0); c) en la circunferencia con el radio 15 y el centro en el punto (—1, 0). **2.** Dentro de la circunferencia con el radio 1 y el centro en el origen de las coordenadas. **3.** En la circunferencia con el radio 2 y el centro en el origen de las coordenadas y fuera de esta circunferencia. **4.** Dentro del anillo limitado por las circunferencias con los centros en el origen de las coordenadas y los radios 1 y 2, y en la primera circunferencia. **5.** Dentro de la circunferencia con el radio 2 y el centro en el origen de las coordenadas. **6.** En la circunferencia con el radio 3 y el centro en el punto (—1, 0). **7.** Dentro de la circunferencia con el radio 1 y el centro en el punto (0, 1). **8.** En la circunferencia con el radio 7 y el centro en el punto (—1, 2). **9.** Fuera de la circunferencia con el radio 9/2 y el centro en el punto (—1/2, 1/2). **10.** Dentro del anillo limitado por las circunferencias con los centros en el punto (0, —1) y los radios 2 y 3, y en las dos circunferencias. **11.** En la recta perpendicular al segmento que une los puntos (0, 0) y (0, 1/3), y que pasa por el medio de este segmento. **12.** El punto $(0, \sqrt{3}/3)$. **13.** El punto (0, —2). **14.** No hay tales puntos. **15.** En la circunferencia con el radio 1 y el centro en el origen de las coordenadas. **16.** En la circunferencia con el radio $\sqrt{3/2}$ y el centro en el origen de las coordenadas. **17.** Hay dos de tales números complejos: $z_1 = 6+17i$ y $z_2 = 6+8i$. **18.** $\frac{z_1+z_2}{2}$. **19.** $z_1+z_2-z_3$; $z_1+z_3-z_2$; $z_2+z_3-z_1$. **20.** $\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°$. **21.** $2\cos 20° (\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$. **22.** $\cos(\pi-\alpha) + i \operatorname{sen}(\pi-\alpha)$. **23.** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$. **24.** $\frac{1}{\cos\alpha} \times \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right]$, si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\frac{1}{|\cos\alpha|}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]$, si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. **25.** En el rayo que sale del origen de las coordenadas en un ángulo de $\pi/4$ en dirección positiva del eje Ox. **26.** En el rayo que sale del origen de las coordenadas en un ángulo de $7\pi/6$ en dirección positiva del eje Ox. **27.** La parte del plano que contiene el segundo y tercer cuadrantes, incluso el eje Oy sin el origen de las coordenadas, y la parte del primer cuadrante dispuesta entre los rayos que salen del origen de las coordenadas bajo los ángulos $\pi/3$ y $\pi/2$. **28.** El segmento del eje Ox, comprendido entre los puntos (—1, 0) y (0, 0), sin extremos. **29.** El punto (0, 2). **31.** $z = 12+16i$. El punto que representa este número es el punto tangencial del rayo que sale del origen y se halla en el primer cuadrante, con la circunferencia de radio $\sqrt{15}$ y el centro en el punto (0, 25). **32.** $\varphi/2$, si $0 \leqslant \varphi < \pi/3$ o bien $\pi < \varphi < 5\pi/3$; $\varphi/2+\pi$, si $\pi/3 < \varphi < \pi$ o bien $5\pi/3 < \varphi < 2\pi$; si $\varphi = \pi/3$ o bien $\varphi = \pi$, ó $\varphi = 5\pi/3$, entonces $z_1 = 0$. **33.** No, hablando en general; por ejemplo, $z_1 = i$, $z_2 = 2i$. **34.** No, hablando en general; por ejemplo, $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2-i$. **35.** Notemos que esta aseveración es incorrecta si las partes imaginarias de los números z_1, z_2 son iguales a cero, es decir, si estos números son reales. **37.** Todos los números son reales. **38.** Todos los números son puramente imaginarios. **39.** Todos los números complejos, cuya parte real es igual a 1. **40.** 0. **41.** 0, -1, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **42.** 0, $\pm i$. **43.** Para $x=1$, $y=-4$ y para $x=-1$, $y=-4$.

44. a) Fuera de la circunferencia con el radio 10 y el centro en el punto (1, 0); b) dentro de la circunferencia con el radio 5 y el centro en el origen de las coordenadas. **45.** Si $a=1$, entonces $z=-1-i$; si $1<a<\sqrt{2}$, entonces $z_{1,2}=\dfrac{-a^2\pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1}-i$; si $a=\sqrt{2}$, entonces $z=-2-i$; si $a>\sqrt{2}$, entonces la ecuación no tiene soluciones. **46.** Si $0\leqslant a\leqslant 1/2$, entonces la ecuación no tiene soluciones; si $a>1/2$, entonces $z=\dfrac{4a+\sqrt{4a^2+3}}{16a^2-4}+\dfrac{i}{4}$. **47.** $z_1=1$, $w_1=-1$; $z_2=-1$, $w_2=1$.

§ 6

1. $N^{\frac{-\alpha\beta\gamma}{s}}$. **2.** 0. **3.** 0. **4.** $-1/4$. **5.** 1. **6.** 2. **7.** $\log_b N$. **8.** 0. **9.** 0. **10.** 0, porque $2^{\log_3 5}=(5^{\log_5 2})^{\log_3 5}=5^{\log_3 2}$. **11.** $7\dfrac{1}{196}$. **12.** $\dfrac{16}{\sqrt[3]{5}}$. **13.** $\log_3 2<\log_2 3$. **14.** $\log_4 5>\log_8 5$. **15.** $\log_2 3<\log_3 11$. **16.** Si $a>1$, entonces $\log_2 a>\log_3 a$; si $a=1$, entonces $\log_2 a=\log_3 a=0$; si $0<a<1$, entonces $\log_2 a<\log_3 a$. **17.** Si $a>1$, entonces $\log_a 2<\log_a 3$; si $0<a<1$, entonces $\log_a 2>\log_a 3$. **18.** $\sqrt[3]{0{,}01}<\sqrt[5]{0{,}001}$. **20.** $\dfrac{1+ab}{a(8-5b)}$. **21.** $3(1-a-b)$. **22.** $a>0$, $a\neq 1$; $N>0$, $N\neq 1$; $b>0$, $b\neq 1/a$. **24.** 1. **25.** Para $a=1$ la igualdad es evidente; si $a\neq 1$, entonces hay que pasar a los logaritmos de la base a. **27.** Ya que $0<\log_3 2<1$ y $1/2<1$, la desigualdad es válida. **28.** Demuéstrese previamente que $\log_b a\,\log_c b\,\log_d c=\log_d a$, $b\neq 1$, $c\neq 1$, $d\neq 1$, $a>0, b>0, c>0$, $d>0$. **29.** Para $a>1$ y $b>1$, o bien, para $0<a<1$ y $0<b<1$. **30.** Demuéstrese por oposición. **31.** $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant x<0$; $x\geqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **32.** $x_1=1/8$; $x_2=2$. **33.** $x=2$. **34.** $x_1=10$; $x_2=\sqrt[9]{10}$. **35.** $x_1=16$; $x_2=1/2$. **36.** $x_1=1/4$; $x_2=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **37.** $x_1=9$, $x_2=1/9$. **38.** $x_1=a^{1/\sqrt{2}}$; $x_2=a^{-1/\sqrt{2}}$ **39.** $x_1=a^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $x_2=a^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$. **40.** $x_1=9$, $x_2=1/9$. **41.** $x=\sqrt{2}$, $y=1$. **42.** $x=a^{1-4a}$, $y=a^{2a}$. **43.** $x_1=2$, $y_1=4$; $x_2=1/2$, $y_2=1/4$. **44.** $x=9$, $y=1/3$. **45.** $x=a^{4m-6n}$, $y=a^{6m-12n}$. **46.** $x=2/3$, $y=27/8$, $z=32/3$. **47.** $x=1$, $y=2$. **48.** $x_1=4$, $y_1=32$; $x_2=-1$, $y_2=1$. **49.** $0<x<3^{\frac{1}{1-\log_2 3}}$. **50.** $0<x<\sqrt[10]{10}$. **51.** $a\geqslant 1/16$.

§ 7

1. $x=3$. **3.** $3-2\sqrt{2}$, 1, $3+2\sqrt{2}$. **4.** $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$, $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{5}}$. **5.** $A=2$, $B=32$. **6.** 25 piedras. **7.** 27, 18 y 12 años. **8.** Si $b_1>0$, entonces son admisibles cualesquier valores de $q<1$ y cualesquier valores de $q>3$; si $b_1<0$, entonces son admisibles cualesquier valores de q dentro del intervalo $1<q<3$. **9.** 25 cosechadoras. **10.** 1921. **11.** 18 litros. **13.** $x=y=z=2$. **15.** Nótese que los números $\dfrac{1}{a_1}$, $\dfrac{1}{a_2}$, ..., $\dfrac{1}{a_n}$ componen una progresión geométrica, calcule su suma. $P=(S/T)^{n/2}$. **16.** $x_1=2$, $x_2=-2$. **17.** $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$.

§ 8

1. Al multiplicar la desigualdad por 2, pasemos a una desigualdad evidente $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$. 3. Escribir la desigualdad en forma de $(a-1)^2+$ $+(b-1)^2+(c-1)^2 \geqslant 0$. 7. Escribir la desigualdad en forma de $(x+y+1)^2+$ $+2(y+1)^2 \geqslant 0$. 8. Escribir la desigualdad en forma de $(1-\operatorname{sen}^2 x)(5-\operatorname{sen}^2 x) \geqslant 0$. 9. Todos los sumandos, para $x \leqslant 0$, no son negativos; tenemos $x^2 > x^5$, $1 > x$ para $0 < x < 1$; tenemos $x^8 \geqslant x^5$, $x^2 \geqslant x$ para $x \geqslant 1$. 10. Ya que $a/c+b/c=1$, entonces $0 < a/c < 1$, $0 < b/c < 1$, por razón de que $(a/c)^{2/3} > (a/c)$, $(b/c)^{2/3} > (b/c)$. 11. Extraer la raíz de potencia n de ambos miembros de la desigualdad. 12. Convénzase de que en el primer miembro de la desigualdad la suma de los números equidistantes de los extremos no es menor de $2(n+1)^{-1}$. 13. Represéntese $(n!)^2=(1\cdot n)\cdot[2\cdot(n-1)]\ldots[(n-1)\cdot 2]\cdot(n\cdot 1)$ y demuéstrese que para cualquier k, $1 < k < n$, es válida la desigualdad $k(n-k+1) > n$. 14. Aplíquese el método de inducción matemática. 15. Aplíquese el método de inducción matemática. 19. Si p es el semiperímetro de un triángulo cuyos lados son a, b, c y S es su área, entonces, de la fórmula de Herón y de la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética obtenemos que $\sqrt{S} \leqslant p/2$. 20. Introdúzcase el ángulo auxiliar. 21. El valor mínimo 2/3 se logra para $x=0$; no hay valor máximo. 22. El valor mínimo 0 se logra para $x=0$; el valor máximo 1/2 se logra para $x=-1$ y para $x=1$. Para determinar el valor mínimo hay que representar la función en forma de $y=(x^2+x^{-2})^{-1}$. 23. El valor máximo 1 se logra para $x=1$; el valor mínimo -1 se logra para $x=-1$. 24. Aplíquese la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, utilizando luego la desigualdad $\operatorname{sen} x+\cos x \geqslant -\sqrt{2}$. La igualdad se logra para $x=(5\pi/4)+2k\pi$. 25. Exprésese $\operatorname{cotg} x$ por $\operatorname{cotg}(x/2)$.

§ 9

1. $x=2$. 2. $x=(14+2\sqrt{15})/3$. 3. $x=45-16\sqrt{7}$. 4. No hay soluciones. 5. $x=2$. 6. $x=8$. 7. $x=5$. 8. $x_1=0$, $x_2=4$. 9. $x_1=1$, $x_2=3/2$, $x_3=2$. 10. $x_1=190/63$, $x_2=2185/728$. 11. $x=\sqrt[5]{a^4}/(1-\sqrt[5]{a^4})$ para $0 < a < 1$; para los demás a no hay soluciones. 12. $x=-2$. 13. $x_1=0$, $x_2=2$. 14. $x=\log_{2/7} 3$. 15. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\log_{2+\sqrt{3}} 10}$. 16. $x=\log_2 3$. 17. $x=4\log_3 2$. 18. $x_1=\log_3 28-3$, $x_2=\log_3 10$. 19. $x=2$. 20. $x_1=1/8$, $x_2=2$. 21. $x=[\log_2(1+\sqrt{41})-1]3/6$. 22. $x_1=10$, $x_2=\sqrt[9]{10}$. 23. $x_1=9$, $x_2=1/9$. 24. $x_1=2$, $x_2=8$. 25. $x_1=0$, $x_2=1$. 26. No hay soluciones. 27. $x_1=100$, $x_2=1/100$. 28. $x_1=9$, $x_2=1/9$. 29. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1/\sqrt[4]{8}$. 30. $x_1=\sqrt[4]{3}$, $x_2=1/\sqrt[4]{3}$. 31. $x=2^{-\log_3 a}$. 32. No hay soluciones. 33. No hay soluciones. 34. $x=5/2$. 35. $x=-25$. 36. $x=5$. 37. $x=8$. 38. $x=1/9$. 39. $x=3$. 40. $x=5$. 41. $x=-4$. 42. $x=2$. 43. $x=1$. 44. $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x=4$. 45. $x=4$. 46. $x_1=2k\pi/5$, $x_2=(6k\pm 2)\pi/15$. 47. $x_1=(4k-1)\pi/4$, $x_2=(2k+1)\pi/2$. 48. $x_1=k\pi$, $x_2=[(-1)^{k+1}\pi/6]+k\pi$. 49. $x=[(-1)^k\pi/6]+k\pi$. 50. $x=(8k+1)\pi/4$. 51. $x=(8k+1)\pi/4$. 52. $x=(6k+1)\pi/3$. 53. $x=1/2\arccos 1/7+2k\pi$. 54. $x=$ $=(16k+1)\pi/8$. 55. $x_1=(20k+1)\pi/5$, $x_2=(20k+9)\pi/5$. 56. $x=1/2\operatorname{arc\,tg} 4+2k\pi$. 57. $x=(4k+1)\pi/2$. 58. $x_1=(4k+1)\pi/4$, $x_2=\operatorname{arc\,sen}[(\sqrt{5}-1)/2]+(2k+1)\pi$. 59. $x_1=2$, $x_2=-5$, $x_3=(2\pi/3)+4k\pi$, $x_4=(-2\pi/3)+4k\pi$ $(k \neq 0)$, $x_5=2\arccos\times$ $\times[(2\sqrt{3}-3)/2]+4k\pi$, $x_6=-2\arccos[(2\sqrt{3}-3)/2]+4k\pi$ $(k \neq 0)$. 60. $x_1=$ $=(2k+1)\pi/6$, $x_2=(4k+1)\pi/4$. 61. $x=k\pi/3$. 62. $x_1=(2k+1)\pi/4$, $x_{2,3}=$ $=(6k\pm 1)\pi/6$. 63. $x=-\operatorname{arc\,sen}[(\sqrt{5}-1)/2]+(2k+1)\pi$. 64. $x=\pm\arccos\times$ $(2-2\sqrt{2})+2k\pi$. 65. $x_1=k\pi$, $x_2=(12k+1)\pi/6$. 66. $x=2$. 67. $x=2$,

§ 10

1. $1 < x < 3$. **2.** $x > 5/2$. **3.** $x > \log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. **4.** $0 < x < a$, $1 < x < 1/a$. **5.** $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$. **6.** $2k\pi < x < (\pi/4)+2k\pi$. **7.** $0 < x < 1/2$, $x > 32$. **8.** $1/16 < x < 1/8$, $8 < x < 16$. **9.** $-1 < x < -2/\sqrt{5}$, $2/\sqrt{5} < x < 1$. **10.** $\log_2 5 - 2 < x < \log_2 3$. **11.** $2^{-1/\sqrt{2}} \leqslant x < 1$. **12.** $0 \leqslant x < \log_3^2 2$, $x > 3/2$. **13.** $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, $x > 2$. **14.** $0 < x < \pi/24$, $5\pi/24 < x < \pi/4$. **15.** $1 < x < 2$. **16.** $(\sqrt{61}-9)/2 < x < 2$. **17.** $2k\pi-(\pi/4)+\operatorname{arc\,sen} 3/4 < x < (3\pi/4)-\operatorname{arc\,sen} 3/4+2k\pi$. **18.** $x < -3$, $-2 < x < -1$. **19.** $x < 1$, $3/2 < x < 2$, $x > 3$. **20.** $-\sqrt{(4-\pi)/\pi} \leqslant x \leqslant \sqrt{(4-\pi)/\pi}$. **21.** $(\pi/6)+k\pi < x < (5\pi/6)+k\pi$. **22.** $(\pi/4)+k\pi < x < (3\pi/4)+k\pi$. **23.** $0 < x < \pi/2$, $2 \operatorname{arc\,tg} [(1+\sqrt{5})/2] < x < \pi$. **24.** $x < \log_2 3$. **25.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **26.** $0 < x < 1$, $x \geqslant 2$. **27.** $1/2 < x < 1$. **28.** $x < -7$, $-5 < x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$. **29.** $x \leqslant -2/3$, $1/2 \leqslant x \leqslant 2$. **30.** $2k\pi-(\pi/4)+\operatorname{arc\,sen}(2\sqrt{2}/3) < x < 2k\pi+(3\pi/4)-\operatorname{arc\,sen}(2\sqrt{2}/3)$, $2k\pi-\pi < x < 2k\pi-(\pi/2)$. **31.** $-1 < x < (1-\sqrt{5})/2$; $(1+\sqrt{5})/2 < x < 2$. **32.** $-1 \leqslant x < 1-(\sqrt{31}/8)$. **33.** $(3-a)/(2-a) < x \leqslant 2$, si $0 < a < 1$; $2 \leqslant x < (3-a)/(2-a)$, si $1 < a < 2$; $x \geqslant 2$, si $a=2$; $x < (3-a)/(2-a)$, $x \geqslant 2$, si $a > 2$. **34.** $-1 < x < 0$, $2 < x < 3$. **35.** $1/2 < x < 1$. **36.** $-5/2 < x < -2$, $-3/2 < x < 3/2$, $3/2 < x < 8/3$. **37.** $-1-\sqrt{23/2} \leqslant x \leqslant \sqrt{23/2}-1$, si $a > 1$; $-\sqrt{24} < x \leqslant 1-\sqrt{23/2}$, $\sqrt{23/2}-1 \leqslant x < \sqrt{24}$, si $0 < a < 1$. **38.** $(14+\sqrt{7})/2 \leqslant x \leqslant 9$. **39.** $(\pi/4)+k\pi < x < (\pi/3)+k\pi$. **40.** $1 < x < 3/2$, $2 < x < 5/2$, $x > 3$. **41.** $-(\pi/2)+k\pi < x < -\operatorname{arc\,tg} 2+k\pi$, $-(\pi/4)+k\pi < x < (\pi/4)+k\pi$. **42.** $1/4+k \leqslant x < 1/2+k$, $1/2+k < x \leqslant 1+k$. **43.** $2k\pi < x < (\pi/6)+2k\pi$, $(\pi/6)+2k\pi < x < (2k+1)\pi$. **44.** $x \geqslant 1$. **45.** $1-\sqrt{6} < x \leqslant 2-\sqrt{10}$, $1+\sqrt{6} < x \leqslant 2+\sqrt{10}$. **46.** $(\pi/4)+k\pi < x \leqslant (\pi/3)+k\pi$. **47.** $x < -1$, $x > 1$. **48.** $0 < x < 1$. **49.** $-1/2 \leqslant x < -1/4$, $3/4 < x \leqslant 1$. **50.** $0 \leqslant x \leqslant 81$, $x \geqslant 1296$. **51.** $\operatorname{arc\,tg} 5+2k\pi < x < \pi+2k\pi$. **52.** $x = k\pi/3$. **53.** $-6 \leqslant x < 0$, $3 < x \leqslant 4$. **54.** $x \leqslant -2-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{3} \leqslant x$. **55.** $x < \log_5 3$. **56.** $-(3+\sqrt{5})/2 < x \leqslant 1$. **57.** $3 < x < \pi$, $\pi < x < 3\pi/2$, $3\pi/2 < x < 5$. **58.** $0 < x < 2$, $x > 4$. **59.** $-(\pi/4)+k\pi < x \leqslant k\pi$, $(\pi/4)+k\pi < x < (\pi/2)+k\pi$. **60.** $-(7\pi/6)+2k\pi \leqslant x \leqslant (\pi/6)+2k\pi$.

§ 11

1. $x=-4$, $y=6$. **2.** $x=7$, $y=5$. **3.** $x_1=1$, $y_1=1$; $x_2=16/81$, $y_2=4/9$. **4.** $x=2/3$, $y=27/8$, $z=32/3$. **5.** $x_1=1$, $y_1=6$; $x_2=2$, $y_2=7$; $x_3=3$, $y_3=8$. **6.** $x_1=4$, $y_1=32$; $x_2=-1$, $y_2=1$. **7.** $x=8$, $y=2$. **8.** $x_1=0$, $y_1=2\log_2 3-2$; $x_2=3$, $y_2=-1$. **9.** $x=5$, $y=0$. **10.** $x_1=\sqrt{3}$, $y_1=4$; $x_2=-\sqrt{3}$, $y_2=4$. **11.** $x=1$, $y=0$. **12.** $x=20$, $y=16$. **13.** No. **14.** $-2 < k < 4$. **15.** $m=0$. **16.** $\alpha \neq (\pi/2)+k\pi$.

§ 12

1. 20 km/h, 25 km/h, 15 km/h. **2.** 27, 18 y 12 años. **3.** 30 km. **4.** 1/6. **5.** 19π cm/s y 27π cm/s. **6.** No llegarán. **7.** 3 horas, 6 horas, 2 horas. **8.** 5 g y 20 g. **9.** En $5m(t-t_2)-5m^{-1}(t-t_1)$. **10.** El área del bosque es de 40 km². Hay que obtener la ecuación $AC=5+1/4\,BC^2+1/16\,AB^2$ según los datos del problema; además de esto, para cualesquiera de los tres puntos A, B y C se verifica la desigualdad $AC \leqslant AB+BC$. De aquí resulta que $5+1/4\,BC^2+1/16\,AB^2 \leqslant AB+BC$ ó $(1/2\,BC-1)^2+(1/4\,AB-2)^2 \leqslant 0$, lo que es posible sólo para $AB=8$ y $BC=2$. **11.** El número de calificaciones 2, 3, 4 y 5 es igual a 11, 7, 10 y 2, respectivamente. **12.** La velocidad de la motocicleta es de 40 km/h, la del "Moskvich" 60 km/h y la del «Volga», 80 km/h. **13.** El agua se suministra 2 veces más rápidamente. **14.** 1:3. **15.** 20 km/h y 80 km/h. **16.** No. **17.** No. **18.** La velocidad del ciclista es de 20 km/h, la del camión, 40 km/h y la del «Volga», 80 km/h. La distancia AD es igual a 60 km. **19.** No lo alcanzará. **20.** 60 m³. **21.** 2 minutos. **22.** 0,6 km/min. **23.** 12/7 días. **24.** 12 horas. **25.** 4 cajones del tercer tipo y 25 cajones del segundo tipo. **26.** 12 hojas. **27.** El primer tubo llenará el depósito en 2 horas, el segundo, en 4 horas. **28.** 4 horas. **29.** 16 horas 45 minutos. **30.** 18 horas.

§13

1. $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$. **2.** La función es indeterminada para ninguno de los valores de x. **3.** $x=0$. **4.** $-(\pi/4)+k\pi \leqslant x \leqslant (\pi/4)+k\pi$. **5.** $x<0$, $0<x\leqslant 2$, $x \geqslant 3$. **6.** $x=k$. **16.** Nótese que $y=-2$ para todas $x \neq 3$. **24.** La gráfica está compuesta de los puntos del eje Ox con abscisas $x=(\pi/2)+2k\pi$. **25.** Nótese que $y=1$. **26.** Nótese que $y=-\cos 2x$. **27.** Introdúzcase el ángulo auxiliar. **32.** Utilícese el método de composición de gráficas. **36.** Nótese que $y=\sqrt{1-x^2}$; véase el § 5 de la Parte II. **40.** La gráfica de la función y_1 consta de dos ramas y la gráfica de la función y_2, solamente de una. **41.** La gráfica de la función y_1 es la bisectriz del primer ángulo de coordenadas (sin el origen de las coordenadas). **42.** La función y_1 es indeterminada para $x=k\pi/2$. **43.** Los segmentos de la parábola $y=(x-2)^2$ que corresponden a $x\leqslant 1$ y $x\geqslant 3$ y los segmentos de la parábola $y=-x^2+4x-2$ correspondientes a $x\leqslant 1$ y $x\geqslant 3$. **44.** La bisectriz del primer ángulo de coordenadas y el tercer ángulo de coordenadas (incluyendo los semiejes negativos de abscisas y ordenadas). **45.** El interior (incluso el límite del perímetro) del cuadrado con los vértices en los puntos $(2, 0)$, $(1, -1)$, $(2, -2)$, $(3, -1)$. **46.** El semiplano debajo de la recta $y=x-2$ y el semiplano encima de la recta $y=x+2$ (excepto las mismas rectas). **47.** El interior (sin líneas generatrices) del rectángulo con los vértices $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$, $(1, -2)$. **48.** Los segmentos de la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$, correspondientes a $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, y los segmentos simétricos a éstos respecto del eje de abscisas. **49.** Las rectas $y=2x+(2k+1)\pi$ e $y=-2x(2k+1)\pi$. **50.** Una parte del plano dispuesta a la derecha de la curva $x=\operatorname{sen}|y|$ (incluyendo esta recta). **51.** La faja $0<y<1$ sin segmentos verticales, trazados en los puntos $x=k\pi/2$. **52.** El ángulo curvilíneo, limitado por encima por la recta $y=x$, y por debajo, por la curva $y=-2^x$ (sin las mismas curvas), del cual está excluido el semieje positivo de abscisas. **53.** $y=1+(x-1)^{-1}$, $x>0$, $y>0$. **54.** $y=\sqrt{2}(x-x^{-1})$, $x>0$, $y>0$. **55.** $x=-y^2+(y/4)$, $y>x>0$.

PARTE II

§ 1

1. e) Véase § 5, Parte II. **2.** a) Teorema; b) definición; c) teorema; d) teorema. **3.** Teorema recíproco: "Si $\cos\varphi \leqslant 0$, el ángulo φ termina en el segundo cuadrante" es incorrecto. Teorema contrario: "Si el ángulo φ no termina en el segundo cuadrante, $\cos\varphi>0$" es incorrecto. Teorema contrario al recíproco: "Si $\cos\varphi>0$, el ángulo φ no termina en el segundo cuadrante" es correcto. **5.** a) $\operatorname{sen} 1^\circ < \operatorname{sen} 1$; b) $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{tg} 2$. **6.** a) $\alpha=(-1)^k\beta+k\pi$ ó, que es lo mismo, $\beta=(-1)^n\alpha+n\pi$. Es decir, si α y β son ángulos concretos, como $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$, entonces existe un número entero k tal que los ángulos α y β están entrelazados por la relación $\alpha=(-1)^k\beta+k\pi$; b) $\alpha=\pm\beta+2k\pi$; c) $\alpha=\beta+k\pi$, $\alpha\neq(\pi/2)+n\pi$, $\beta\neq(\pi/2)+m\pi$; d) $\alpha=(\pi/2)\pm\beta+2k\pi$. **7.** $\cos(\alpha/2)= -\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}=-\frac{1}{2}(\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}+\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha})$; $\operatorname{sen}(\alpha/2)= \pm\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$, con esto, el signo "más" se toma en el caso en que $270° \leqslant \alpha \leqslant 360°$ y el signo "menos", cuando $360° \leqslant \alpha \leqslant 450°$; para todas las del intervalo $270° \leqslant \alpha \leqslant 450°$ puede escribirse: $\operatorname{sen}(\alpha/2)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}-\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}\right)$. **8.** 1. **9.** $-1/8$. Multiplicar y dividir la expresión a examinar por $\operatorname{sen}(\pi/7)$.

§ 2

1. Convénzase de que el primer miembro es igual a $\cos 30°$. **2.** 1. **3.** $x=18°$. Hállese la raíz de la ecuación $\cos 4x=\operatorname{sen} x$ comprendida entre $0°$ y $90°$. **4.** $\cos(\alpha/2)=-1/2\sqrt{2+2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}=-1/2\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}+\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right)$, $\operatorname{sen}(\alpha/2)=\pm 1/2\sqrt{2-2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$ con esto el signo "más" se toma en el caso en que $270° \leqslant \alpha \leqslant 360°$ y el signo "menos", cuando $360° \leqslant \alpha \leqslant 450°$. La última igualdad para todas las α del intervalo $270° \leqslant \alpha \leqslant 450°$ puede escribirse en forma de $\operatorname{sen}(\alpha/2)=1/2\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}-\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}\right)$. **5.** Convénzase de que $y=\operatorname{sen}^2\alpha$ para cualquier x. **6.** $(1+\cos^2 x)^{-1/2}$. **7.** $(a+b\operatorname{sen}^3 x)^{-1}$. **8.** $\operatorname{tg}^{3/2} x$; $x=(\pi/3)+k\pi$. **9.** $\operatorname{sen} a/(\cos a\cos x-1)$. **12.** $\sqrt{2}\cos x\cos^{-1}(x/2)\operatorname{sen}[(\pi/4)-(x/2)]$. **13.** 0. **14.** $a+b=2ab$. **15.** $(p^2-q^2)^2=-pq$. **16.** $y=a$; $z=c$. **17.** $-1/8$. Multiplíquese y divídase la expresión considerada por $\operatorname{sen}(\pi/7)$. **18.** Multiplíquese ambos miembros de la igualdad a demostrar por $\operatorname{sen}(\pi/7)$. **19.** Utilícese la igualdad $142°30'=90°+45°+1/2\cdot 15°$. **20.** $\alpha+\beta\neq(\pi/2)+k\pi$, $\alpha\neq(\pi/2)+k\pi$, $\beta\neq\pi+2k\pi$. **22.** $(\sqrt{7}-2)/3$. **23.** Determínese que $0°<\alpha<30°$, $0°<\beta<30°$, es decir, $0°<\alpha+2\beta<90°$ y luego calcúlese $\operatorname{sen}(\alpha+2\beta)$. **24.** Tranfórmese la expresión $[(a/b)(A/B)+1]/[(a/b+(A/B)]$; la condición $aB-bA\neq 0$ significa que $\operatorname{sen}[2x-(\alpha+\beta)]\neq 0$. **25.** q. **26.** $(\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}2\beta+2\gamma)/4$. **27.** 2. **28.** 3. **29.** Al sustituir las cotangentes en la suma $\operatorname{cotg}(\alpha/2)+\operatorname{cotg}(\beta/2)+\operatorname{cotg}(\gamma/2)$ por los senos y cosenos, y reduciendo el resultado a un común denominador, transfórmese el denominador en el producto aplicando la igualdad $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

§ 3

1. a) $\alpha=(-1)^n\beta+n\pi$, donde n es un número entero o, que es lo mismo, $\beta=(-1)^k\alpha+k\pi$, donde k es un número entero. Hablando de otro modo: si α y β son ciertos ángulos concretos que dan $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta$, entonces existe tal número entero n que asegura que los ángulos α y β estén relacionados entre sí por medio de la correlación $\alpha=(-1)^n\beta+n\pi$. b) $\alpha=\pm\beta+2n\pi$. c) $\alpha=\beta+n\pi$ y $\alpha, \beta\neq(\pi/2)+k\pi$. d) $\alpha=(\pi/2)\pm\beta+2n\pi$. **2.** Si $|c|>\sqrt{a^2+b^2}$, en este caso no hay soluciones; si $c=\sqrt{a^2+b^2}$, entonces $x=(\pi/2)-\varphi+2k\pi$; si $c=-\sqrt{a^2+b^2}$, $x=-(\pi/2)-\varphi+2k\pi$; si $|c|<\sqrt{a^2+b^2}$, $x=(-1)^k\arcsen\left[c/\sqrt{a^2+b^2}\right]-\varphi+k\pi$. Aquí φ es el ángulo auxiliar determinado según las condiciones $\operatorname{sen}\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$. **3.** $x_1=(\pi/4)+k\pi$, $x_2=(5\pi/12)+k\pi$. **4.** $x_1=(\pi/30)+(2k\pi/5)$, $x_2=-(\pi/2)+2n\pi$. **5.** $x_1=(\pi/12)+(k\pi/7)$, $x_2=(\pi/4)+n\pi$. **6.** $x=\operatorname{arc}\cos 4/5+2k\pi$. Sustituir $\operatorname{sen}3x$ por $\operatorname{sen}x$. **7.** $x=1/4\operatorname{arc}\cos 3/5+(k\pi/2)$. Sustituir $\operatorname{sen}^2 2x$ por medio de $\cos 4x$. **8.** $z_1=-(\pi/3)+2k\pi$, $z_2=(\pi/9)+(2n\pi/3)$. **9.** $x_1=(\pi/2)+k\pi$, $x_2=\pm\operatorname{arc}\operatorname{sen}(1/\sqrt{5})+n\pi$. Obtener la ecuación $\cos(\pi\cos^2 x)=\cos(\pi\operatorname{sen}2x)$, de donde $2\operatorname{sen}2x-\cos 2x=1-4k$, ó $2\operatorname{sen}2x+\cos 2x=4k-1$, donde k es un número entero. En ambos casos $k=0$ es el valor único de k para el cual existen soluciones. **10.** $x=\pm(\pi/3)+2k\pi$. **11.** $x_1=(2k+1)\pi$, $x_2=(-1)^n(\pi/3)+n\pi$. **12.** $x_1=(\pi/4)+k\pi$, $x_2=-\operatorname{arc}\operatorname{tg}3+n\pi$. Demostrar que $\cos x\neq 0$, y dividir todos los miembros en $\cos^2 x$. **13.** $x_1=\operatorname{arc}\operatorname{tg}3/2+k\pi$, $x_2=-\operatorname{arc}\operatorname{tg}1/2+n\pi$. Pasar a la funciòn $\operatorname{tg}x$. **14.** $x_1=k\pi$, $x_2=(-1)^n(\pi/6)+n\pi$. Pasar a la función $\operatorname{sen}x$. **15.** $x_1=2(2k+1)\pi$, $x_2=(-1)^n(2\pi/3)+4n\pi$. **16.** $x_1=3k\pi$, $x_2=\pm(\pi/4)+3n\pi$. Designar $x/3$ por y, y expresar $\operatorname{tg}3y$ por $\operatorname{tg}y$. **17.** $x=$

$=(-1)^n(\pi/20)-(6/5)+(n\pi/5)$. Designar $5x+6$ por y. **18.** $x_1=\dfrac{1-2n}{2n+3}$, $x_2=\dfrac{7-6k}{6k+5}$, $x_3=-\dfrac{(m-1)\pi-\text{arc cotg } 2\sqrt{3}}{(m+1)\pi+\text{arc cotg } 2\sqrt{3}}$. Sustituir $\dfrac{\pi-\pi x}{1+x}$ por y. **19.** $x=$ $=\pm(\pi/3)+k\pi$. Hay que pasar a la función $\cos 2x$. **20.** $t_1=k\pi$, $t_2=\pm(\pi/6)+n\pi$. Es necesario pasar a la función $\cos 2t$. **21.** $x=\pm(2\pi/3)+2k\pi$. Hay que cerciorarse de que $\text{sen}^4(x/2)-\cos^4(x/2)=-\cos x$. **22.** $x=(\pi/8)+(k\pi/4)$. Hay que cerciorarse de que $\text{sen}^8 x+\cos^8 x=2+12\cos^2 2x+2\cos^4 2x$ y después pasar a $\cos 4x$. **23.** $x=\pm(\pi/6)+(k\pi/2)$. Utilizar la fórmula de la suma de cubos. **24.** $x_1=$ $=2(2k+1)\pi$, $x_2=(2n+1)\pi$, $x_3=(2\pi/5)+(4m\pi/5)$. Hay que liberarse de los cuadrados de cosenos y transformar la suma obtenida en el producto. **25.** $y_1=2k\pi$, $y_2=(3\pi/8)+(n\pi/2)$, $y_3=-(\pi/2)+2m\pi$. **26.** $x_1=k\pi/4$, $x_2=$ $=\pm 1/4 \text{ arc cos}\left[(1+\sqrt{5})/4\right]+(n\pi/2)$, $x_3=\pm 1/4\text{ arc cos}\left[(1-\sqrt{5})/4\right]+$ $+(m\pi/2)$. **27.** $x=2\beta\pm(2\pi/3)+2k\pi$. Es necesario transformar el producto de cosenos en la suma. **28.** $x=2k\pi/[n(n+1)]$, siendo k cualquier número entero. Hay que transformar los productos de senos en las diferencias de cosenos. **29.** $x_1=(2k+1)\pi$, $x_2=(\pi/2)+n\pi$, $x_3=2m\pi/5$. **30.** $x_1=n\pi/3$, $x_2=2m\pi/9$. **31.** $x_1=k\pi$, $x_2=\pm\text{ arc tg }\sqrt{5/7}+n\pi$. **32.** $x_1=(\pi/4)+k\pi$, $x_2=(\pi/2)+2n\pi$, $x_3=(2m+1)\pi$. Emplear las fórmulas: $\cos 2x=(\cos x+\text{sen } x)(\cos x-\text{sen } x)$ y $1-\text{sen } 2x=(\cos x-\text{sen } x)^2$. **33.** $x_1=2k\pi$, $x_2=(\pi/2)+n\pi$, $x_3=-(\pi/4)+m\pi$. Es necesario transformar el primer miembro de la ecuación en la forma siguiente: $2\cos x(\text{sen } x+\cos x)^2$. **34.** $x_1=\pm(\pi/4)+k\pi$, $x_2=-(\pi/6)+(n\pi/2)$. Designar $\text{tg } x-\text{cotg } x$ por y; indicar que $\text{tg } x-\text{cotg } x=-2\text{ cotg } 2x$. **35.** $x_1=\pm(\pi/6)+2k\pi$, $x_2=(-1)^{n+1}\text{ arc sen } 1/4+n\pi$. Es necesario representar la expresión subradical en la forma del cuadrado completo. **36.** $-(\pi/3)+k\pi\leqslant x\leqslant-(\pi/6)+k\pi$, $(\pi/6)+k\pi\leqslant x\leqslant(\pi/3)+k\pi$. **37.** $x=\log_2 p$, donde $p=1, 2, \ldots$ **38.** $x_1=\log_4 p$, $x_2=\log_4(4p-1)-1$, $x_3=\log_4(4p-3)-3/2$, donde $p=1, 2, \ldots$ **39.** $x_1=$ $=\pm 1/2\text{ arc cos } 1/3+k\pi$, $x_2=\pm 1/2\text{ arc cos}(-1/4)+k\pi$. Hay que escribir la ecuación en otra forma: $5(\text{tg } x+\text{cotg } 3x)=\text{tg } 2x-\text{tg } x$ y pasar a senos y cosenos. **40.** $x=(\pi/4)+2k\pi$. Escribir la ecuación en la forma siguiente: $4(\text{sen } x+\cos x)+$ $+(\text{sen } x+\text{sen } 3x)+(\cos x-\cos 3x)=2\sqrt{2}(2+\text{sen } 2x)$. **41.** $x=13\pi/4$. **42.** $x_1=\pi/6$, $x_2=3\pi/10$, $x_3=7\pi/6$, $x_4=13\pi/10$. **43.** $x=(2p+1)\pi/18$, donde p es cualquier número entero, además de los números de la forma: $9m+4$, $m=0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots$ **44.** $x_1=\pi/3$, $x_2=5\pi/3$. **45.** $x_1=5\pi/6$, $x_2=13\pi/6$. **46.** $x=(\pi/2)+2k\pi$. **47.** No hay soluciones. **48.** No hay soluciones. **49.** $x=(2k+1)\pi$. **50.** $x=$ $=-(\pi/6)+k\pi$. **51.** $x=4$. **52.** No hay soluciones. **53.** $x=k\pi$. Utilizar la fórmula de la diferencia de tangentes y obtener la ecuación $\cos x\cos 2x=-1$. **54.** Es necesario demostrar que la igualdad $\text{sen } 2x=\text{sen } 3x=1$ es imposible para todo valor de x. **55.** $x=\pm 1/2\text{ arc cos}\{(a^2-2)/2\}+k\pi$ para $|a|\leqslant 2$. **56.** $a=1$, $x=k$. Hay que transformar la ecuación en la siguiente: $\cos^2\pi(a+x)=1/(2a-a^2)$. **57.** $x_1=7\pi/6$, $x_2=11\pi/6$ para $a=-1/4$; $x_1=\pi+\text{arc sen}\left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2$, $x_2=2\pi-\text{arc sen}\left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2$, $x_3=\pi+\text{arc sen}\left(1-\sqrt{1+4a}\right)/2$, $x_4=2\pi-$ $-\text{arc sen}\left(1-\sqrt{1+4a}\right)/2$ para $-1/4<a<0$; $x_1=0$, $x_2=\pi$, $x_3=3\pi/2$ para $a=0$; $x_1=\text{arc sen}\left(\sqrt{1+4a}-1\right)/2$, $x_2=\pi-\text{arc sen}\left(\sqrt{1+4a}-1\right)/2$ para $0<a<2$; $x=\pi/2$ si $a=2$; no hay soluciones si $a<-1/4$ y cuando $a>2$. Escribir las condiciones para las cuales la ecuación $z^2+z-a=0$ tenga las raíces reales; la raíz menor no es menor de -1, y la mayor no supera a la unidad. **58.** $x=k\pi$ para todo $m>0$; además de esto, $x=\pm 1/2\cdot\text{arc cos}\left(\sqrt{1+2m}-1\right)/2+n\pi$ si $0<m\leqslant 4$. Pasar a las funciones del ángulo $2x$. **59.** $x=(-1)^k\text{ arc sen}[b/(b-1)]+k\pi$ si $b<1/2$, $b\neq-1$, $b\neq 1/3$, $b\neq 0$. Reducir la ecuación a la forma siguiente: $\text{sen } x=b/(b-1)$ y tomar en consideración las limitaciones: $\text{tg } x\neq 0$, $\cos x\neq 0$, $2\cos 2x\neq 1$, $\text{tg}^2 x\neq 1/3$. **60.** $x=\pm\text{ arc sen }\sqrt{2/(1+a^2)}+k\pi$ si $|a|>1$, $|a|\neq\sqrt{3}$. Reducir la ecuación a la forma siguiente: $\text{sen}^2 x=2/(1+a^2)$ y tomar en consideración las limitaciones $\text{tg}^2 x\neq 1$, $\cos 2x\neq 0$, $\cos x\neq 0$.

§ 4

1. $x_1=(7\pi/36)+k\pi$, $y_1=(5\pi/36)+k\pi$; $x_2=-(11\pi/36)+k\pi$, $y_2=-(13\pi/36)+k\pi$. **2.** $x=(\pi/2)+k\pi$, $y=(\pi/6)-k\pi$. **3.** $x=-(\pi/6)+(-1)^k/2 \operatorname{arc\,sen}\frac{2-3\sqrt{3}}{6}+\frac{k\pi}{2}$, $y=(\pi/6)+(-1)^k/2 \operatorname{arc\,sen}\frac{2-3\sqrt{3}}{2}+\frac{k\pi}{2}$. **4.** $x_1=(\pi/4)+k\pi$, $y_1=\operatorname{arc\,tg} 2+n\pi$, $z_1=(3\pi/4)-\operatorname{arc\,tg} 2-(k+n)\pi$; $x_2=-(\pi/4)+k\pi$, $y_2=-\operatorname{arc\,tg} 2+n\pi$, $z_2=(5\pi/4)+\operatorname{arc\,tg} 2-(k+n)\pi$. **5.** $x=(-1)^k \operatorname{arc\,sen}\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k\pi$, $y=\pm\arccos(2-\sqrt{2})+2n\pi$. **6.** $x=\frac{1}{2}\times\left[(-1)^k \operatorname{arc\,sen}\frac{2}{5}+(-1)^n \operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}+(k+n)\pi\right]$, $y=\frac{1}{2}\left[(-1)^k \operatorname{arc\,sen}\frac{2}{5}-(-1)^n \operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}+(k-n)\pi\right]$. **7.** $x=2$, $y=1$. **8.** $x_1=\pi/3$, $y_1=\pi/6$; $x_2=0$, $y_2=\pi/2$. **9.** $x_1=\pi_1$, $y_1=\pi$ para todo $a>0$; si $1\leqslant a\leqslant 2$, $x_2=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3}$, $y_2=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3a^2}$; $x_3=\pi-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3}$, $y_3=\pi-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3a^2}$, $x_4=\pi+\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3}$, $y_4=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/(3a^2)}$; $x_5=2\pi-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/3}$, $y_5=\pi-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{(4-a^2)/(3a^2)}$, son también las soluciones. **10.** $x_1=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{a}+k\pi$, $y_1=\pm\arccos\frac{2\sqrt{a}}{b(1-a)}+2n\pi$; $x_2=-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{a}+k\pi$, $y_2=\pm\arccos\frac{2\sqrt{a}}{b(a-1)}$, si $a\geqslant 0$, $a\neq 1$, $2\sqrt{a}\leqslant|b(1-a)|$.

§ 5

1. $-\pi/3$, $\pi/2$. **2.** $5\pi/6$, π, $\pi/2$. **3.** $-\pi/6$, $-\pi/4$. **4.** $2\pi/3$, $3\pi/4$, $\pi/2$. **5.** $5-2\pi$, $4\pi-10$, $2\pi-6$, $4\pi-10$. **6.** $-\operatorname{arc\,sen}\frac{4\sqrt{15}-3}{20}$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13}$, $\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}$. **13.** $x\geqslant 0$. **14.** $x>0$. **15.** No hay soluciones. **16.** $x=1$. **17.** $x=0$. **18.** $x=\sqrt{3}/2$.

PARTE III

§ 1

1. e) Si se intersecan dos planos, en la recta que es su línea de intersección se forman cuatro ángulos diedros (dos pares de ángulos diedros verticales); cualquiera de éstos puede tomarse por ángulo entre los planos. f) Hay que prestar atención a las dos posibilidades siguientes: si uno de los radios del sector circular, con cuya rotación se obtiene el sector esférico, coincide con el eje de rotación (en este caso el sector esférico es una figura convexa, la base del sector esférico es una superficie de segmento); cuando el eje de rotación no interseca el arco de este sector circular (en este caso el sector esférico no es una figura convexa, su base es una banda esférica). **2.** a) Es un teorema. b) Es una definición. c) Es un axioma. d) Es un teorema. **3.** Teorema inverso: "Si la recta L es paralela al plano π, la recta L será paralela a la recta l" no es válido. Teorema contrario: "Si la recta L no es paralela a la recta l, la recta L no será paralela al plano π" no es válido. Es válido el teorema que es contrario al inverso: "Si la recta L no es paralela al plano π, la recta L no es paralela a la recta l". **4.** Se deduce del teorema inverso al teorema de Pitágoras. **5.** a) No se puede. Por ejemplo, inscribamos el triángulo ABC en la circunferencia y vamos a analizar los polígonos inscritos, para los cuales las cuerdas AB y BC son siempre sus lados (es decir, todos los vértices, excepto B, se eligen en el arco AC); b) No se puede. Por ejemplo, tomemos la sucesión de los triángulos inscritos $A_nB_nC_n$, para los cuales los arcos AB y BC son iguales a $2\pi/n$ (¿A qué es igual el límite de sucesión de los perímetros de estos polígonos?). **6.** Hay que comparar la longitud de la circunferencia con el perímetro del hexágono regular inscrito en ésta y con el perímetro del cuadrado circunscrito a la misma. **7.** No es válida. La demostración es errónea y puede ser válida únicamente en el caso en que AB y AB_2 ó BC y CB_2 no componen una recta; en este caso los triángulos son realmente iguales. Pero es posible también aquella configuración en la que AB y AB_2 (ó BC y CB_2) se hallan en una misma recta. **8.** Son posibles dos configuraciones distintas: las tres rectas son paralelas entre sí o las tres se intersecan en un punto.

§ 2

1. a) Hay que trazar las rectas L^* y L^{**} que sean paralelas a L y separadas de la misma a la distancia a, y las rectas l^* y l^{**} que sean paralelas a l y disten de ésta a a. Examinar las bisectrices de los ángulos formados en los puntos de intersección de L con l^* y l^{**} y también de l con L^* y L^{**}. b) Es necesario unir el punto arbitrario M del lugar geométrico desconocido con los puntos A y B; construir a base del $\triangle\, AMB$ un paralelogramo con la diagonal AB y convencerse de que $MO^2=2a-AB^2=\text{const.}$, por consiguiente, siendo $2a \geqslant AB^2$, el lugar geométrico desconocido es la circunferencia con el centro en el punto O (para $2a=AB^2$ ésta se degenera en el punto). No hay tales puntos de M para $2a < AB^2$. **2.** Es la circunferencia con el diámetro AB, siempre que se excluyan los puntos A y B. Trazar una tangente común en el punto M y aplicar el teorema sobre la igualdad de los segmentos de las tangentes trazadas desde un punto a una misma circunferencia. **3.** Es todo el plano. Demostrar que desde cualquier punto del plano, como desde el centro, es siempre posible trazar una circunferencia que interseque las tres rectas. **4.** Es la circunferencia construida en el segmento AB como en el diámetro. **5.** Es la circunferencia construida en el segmento OA (donde O es el centro de la circunferencia) como en el diámetro. **6.** Es una circunferencia concéntrica a la dada y de radio r cosec $(\alpha/2)$, donde r es el radio de la circunferencia dada. **7.** Es una circunferencia cuyo centro se encuentra en el punto medio del segmento OA (donde O es el centro de la circunferencia dada) y el radio es dos veces menor que el de la circunferencia dada. **8.** Es la circunferencia con el centro O en el punto medio del segmento AB y con el radio AB. Demostrar que $MO=AB$. **9.** a) Es la recta que es perpendicular al plano del triángulo ABC y pasa por el centro de la circunferencia circunscrita a este triángulo; b) tales puntos no existen. **10.** Son las cuatro rectas, obtenidas en la intersección de los planos bisectrales de los ángulos diedros entre los planos Π y π con dos planos que son paralelos a Π y están alejados de éste a la distancia a. **11.** Son las cuatro rectas que son perpendiculares al plano π y pasan por los centros de la circunferencia inscrita y de las inscritas al triángulo formado por las líneas de intersección de los tres planos dados con el plano π. **12.** Es la esfera construida a base del segmento AB como su diámetro. **13.** Es la circunferencia del círculo mayor obtenida por el corte de la esfera construida en el segmento AP (donde P es la base de la perpendicular bajada desde el punto A a la recta l) como en el diámetro, por medio del plano que pasa por AP perpendicularmente a la recta l. **14.** Son todos los puntos situados dentro del ángulo diedro dado. Demostrar lo siguiente: si por cualquier punto interno M se traza un plano que es perpendicular a la arista del ángulo diedro, en este caso, en los lados del ángulo lineal formado es siempre posible elegir los puntos A y B de tal modo que M sea el punto medio del segmento AB. **15.** Son todos los puntos del plano Π que pasa por la recta L en paralelo a l, excepto los puntos de la propia L, así como todos los puntos del plano π que pasa por la recta l en paralelo a L, salvo los puntos de la propia recta l. **16.** Se necesita examinar por separado los casos en que $l > a/\sqrt{2}$, $l = a/\sqrt{2}$, $l < a/\sqrt{2}$. **17.** Es una circunferencia. Después de trazar un plano que pasa por la recta AB y el punto de tangencia M, debe calcularse la distancia KM, donde K es el punto de intersección de la recta AB con el plano π. **18.** Si $l > a$, el lugar geométrico buscado lo constituyen todos los puntos de la circunferencia de radio $1/2\sqrt{l^2-a^2}$, cuyo centro está en el centro del cubo. La circunferencia se encuentra en el plano horizontal que pasa por el centro del cubo. Si $l = a$, el lugar geométrico buscado es el único punto: el centro del cubo. Si $l < a$, ninguno de los puntos del espacio posee la propiedad necesaria. **19.** Se señalará que $\sqrt[4]{a^4+b^4} = \sqrt{c\sqrt{(ac/b)^2+(bc/a)^2}}$, donde $c = \sqrt{ab}$. **20.** Recúrrase al hecho de que en caso de ser O el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC y OM la perpendicular bajada desde el punto O al lado $BC = a$, será $BM = MC = a/2$; por lo tanto, es fácil construir el triángulo OBM y luego, el vértice C. **21.** Si las rectas AB y l se intersecan en el punto C, hay que utilizar la igualdad $AC \cdot BC = CD^2$, donde D es el punto de tangencia de la circunferencia desconocida con la recta l. **22.** El centro de la circunferencia buscada equidista del centro O de la circunferencia dada y también del punto dispuesto en la perpendicular trazada a la recta l desde el punto A, y separada del punto A a una distancia que es igual al radio de la circunferencia dada. **23.** Valiéndose de la relación entre las áreas, expresar AC por medio de AB y trazar el segmento AC según esta fórmula. **24.** Componer la ecuación para el segmento BD y expresarlo por medio del lado AB y la altura h del triángulo ABC bajada al lado AB. Trazar el segmento h y construir, luego, el segmento BD según la fórmula obtenida. **25.** Valiéndonos de la igualdad de los volúmenes de la pirámide y del prisma, expresar el cateto del triángulo rectángulo isósceles buscado mediante el segmento h y el lado de la base de la pirámide, y efectuar la construcción según esta fórmula.

§ 3

1. $\sqrt{(bc-l^2)(b+c)^2/bc}$. **2.** $1/2\, h \operatorname{cosec}\alpha \sqrt{-\cos 2\alpha}$. **3.** $\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C = \sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3$. **4.** $1/16$. **5.** $\operatorname{arc\,tg}[24va^{-3}n^{-1}\operatorname{sen}^2(\pi/n)\sec(\pi/n)]$. **6.** b/a. **7.** $1/6\pi a^3 \operatorname{sen} 2\alpha \sec^2 2\alpha$. **8.** $2\operatorname{arc\,tg} 1/4$. **9.** $1/3\pi bc(b+c)\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha/2)$. Cabe señalar que el eje de giro es perpendicular a la bisectriz del ángulo A. **10.** $R^2 \operatorname{arc\,sen}[r/(R-r)]$. **11.** $1/2a\sec(\alpha/2)$. **12.** $\operatorname{arc\,cos}(-\cos^2\alpha)$. **13.** $[bc/(b+c)]^2$. **14.** $2m\cos\alpha\operatorname{cotg}(\alpha/2)$; $1/4m\operatorname{cosec}^2(\alpha/2)$. **15.** $R[(\pi/2)+\alpha-\beta]$, $R[(\pi/2)-\alpha+\beta]$, $R[-(\pi/2)+\alpha+\beta]$, $R[(3\pi/2)-\alpha-\beta]$, donde $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(18/\sqrt{445})$, $\beta = \operatorname{arc\,sen}(21/\sqrt{445})$. **16.** S/l. **17.** $2/3r$. **18.** $\dfrac{2p(p+q)R^2\operatorname{sen}2\varphi\cos^3\varphi}{p^2+q^2+2pq\cos 2\varphi}$. **19.** $\operatorname{tg}^2(\varphi/2)$. **20.** $\sqrt{4/3(a^2-a+1)}$. **21.** $3+2\sqrt{3}$. **22.** $2ab/(a+b)$. **23.** $8\operatorname{sen}(\alpha/2)\times\operatorname{sen}(\beta/2)\operatorname{sen}(\gamma/2)$. **24.** $2\operatorname{arc\,sen}\dfrac{h_a h_b}{l(h_a+h_b)}$. **25.** $9/4$. **26.** $12/5$. **27.** $1/2b\times[\cos(3\alpha/2)]\sec(\alpha/2)\operatorname{cosec}\alpha$. Cabe señalar que para $\alpha < \pi/3$ el centro de la circunferencia circunscrita está más próximo a la base del triángulo que el centro de la circunferencia inscrita, mientras que para $\alpha > \pi/3$, está más lejos. **28.** $(a-r)/(a+r)$. Trazar la recta $APOQ$ que pasa por el punto A y el centro O de la circunferencia y señalar que la magnitud buscada es igual a la relación entre las áreas de los triángulos BPC y BQC. A continuación se calcula la relación de las alturas de los triángulos, bajadas al lado BC. **29.** $2\operatorname{sen}^2\alpha/[\alpha\times(1+\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)]$, donde α es la medida del ángulo AOB en radianes. **30.** $2\operatorname{arc\,sen}[(1-m)/\sqrt{m^2+2m}]$ siendo $1/4 < m < 1$. **31.** $-2S\cos 2\alpha\cos^2\alpha$.

32. $1/4a^2 \mid \cos^2\alpha \mid \operatorname{tg}\alpha\,(1+2\cos\alpha)^{-1}$. 33. $a\sqrt{1+4\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^4\dfrac{\alpha+\beta}{2}}}$.

34. $\dfrac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2b\operatorname{sen}\alpha}$, $\dfrac{|a^2-b^2|}{b}$. 35. 2m y 2m. 36. 2 cm, 1/2 cm y 5/2 cm. 37. 3 y 4. 38. $2(1-\alpha)$. 39. $(1-\alpha)/\beta$. 40. Unicamente el triángulo equilátero. 41. No serán suficientes. 42. No en todos los casos Bastarán dos segundos, si la base de la pirámide es cuadrática. 43. $\cos\alpha=2/3$. Demostrar que el ángulo del vértice A del triángulo ha de ser agudo y el punto H de la intersección de las alturas, diametralmente opuesto al punto de tangencia de la circunferencia inscrita con la base del triángulo. Cabe señalar a continuación que $\angle HBC = 90°-\alpha$ y obtener la igualdad $\operatorname{cotg}\alpha=2\operatorname{tg}(\alpha/2)$. 44. Es 4:1. 45. $\operatorname{sen}^2\times\times[(\pi/4)-(\alpha/4)]\operatorname{cosec}^2[(\pi/4)+(3\alpha/4)]$. 46. $1/4h\operatorname{sen}^2(\beta-\alpha)\operatorname{cosec}^2\alpha\operatorname{cosec}^2\beta\times\times[a-1/2\,h\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta]$. 47. $(\pi/4)\pm\arccos\left[(1+2\sqrt{2})/4\right]$. 48. $\arccos\left(1/\sqrt[4]{2}\right)$. 49. $AB=BC=2$, $CD=1$, $AD=\sqrt{3}$, $S=3\sqrt{3}/2$. 50. $6\sqrt{7}$.

§ 4

1. a) $\arccos(\sqrt{3}/3)$; b) 60°; c) 90°; d) $a/\sqrt{2}$; e) $a/\sqrt{3}$. 2. 90°; $\arccos 1/3$; $a/\sqrt{2}$. 3. Es válida. Sin embargo, la demostración no es correcta ya que no está demostrado que el plano construido π no depende de la elección del punto A en la recta L. Además, es necesario demostrar que en caso de tomar otro punto en la recta L y efectuar las mismas construcciones, el plano obtenido coincidirá con el plano π. 4. Sólo si $L \perp l$. 5. No siempre. Dicha recta existe únicamente en el caso en que las tres rectas dadas que se cruzan son paralelas a un plano. 6. Sí, siempre. Por una de las rectas l_1 y el punto A en la otra recta l_2 debe trazarse el plano π; demostrar que el punto A se puede elegir de tal manera que el plano π y la tercera recta l_3 no sean paralelos. Trazar la recta L que pase por el punto A y el punto de intersección de la recta l_3 con el plano π; demostrar que el punto A puede elegirse de tal modo que las rectas L y l_1 no sean paralelas. 7. No existen. 8. $1/3a\sqrt{2}$ y $2/3a\sqrt{2}$. Señalar que la perpendicular común es igual a la altura de la pirámide de base triangular cortada del cubo por el plano que pasa por los extremos de sus tres aristas que convergen en un vértice. 10. Sí, pueden. 11. Desde 0 hasta π, cualquiera que sea la magnitud del ángulo diedro dado. 12. Paralelogramo. 14. $\operatorname{arc sen}\times\times(\operatorname{sen}\varphi\operatorname{cosec}\alpha)$. 15. $\operatorname{arc tg}(\sqrt{2}/3)$ y $\operatorname{arc tg}(5\sqrt{2}/7)$. 16. $2\operatorname{arc sen}\times\times\left(b/\sqrt{4b^2-a^2}\right)$. 17. $\operatorname{arc sen}\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta}$. 18. $\arccos(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)$. 19. $2\arccos 3/4$ y $\arccos 3/4$. 20. $\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$. 21. $2/3R\sqrt{3+6\cos\alpha}$. 22. Los dos ángulos son iguales a $\operatorname{arc sen}\cdot\left[\operatorname{sen}\alpha/\sqrt{2}\right]$. 23. $\operatorname{arc sen}(\operatorname{sen}\beta\sec\alpha)$. 24. b/c. 25. $BD=1/5\cdot\sqrt{9a^2+4b^2+25c^2-12ab\cos\alpha}$, $BC=1/5\cdot\sqrt{9a^2+9b^2+25c^2+18ab\cos\alpha}$. 26. $\arccos\dfrac{c^2-d^2}{\sqrt{(c^2+d^2)^2-4(a^2-b^2)^2}}$. 27. $\operatorname{arc sen}\left[(2/\sqrt{3})\operatorname{sen}(\alpha/2)\right]$. 28. $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{7}$; $a\sqrt{3/7}$. 29. $9a^3\cos^2(\alpha/2)\times\times\operatorname{cotg}(\alpha/2)/[3-4\operatorname{sen}^2(\alpha/2)]$. 30. $1/8p^3\sqrt{3}\operatorname{cotg}^2\alpha\,(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}$. 31. $2\operatorname{sen}(\varphi/2)\times\times\sqrt{\operatorname{sen}(\varphi/2)\operatorname{sen}(3\varphi/2)}$. 32. $\operatorname{sen}\varphi=2\sqrt{2}/3$. 33. $\arccos(\operatorname{cotg}^2\gamma)$. 34. 45° ó 60°. Por una de las rectas que se cruzan hay que trazar un plano que sea paralelo a la otra recta y proyectar esta última sobre el plano construido. Según sea obtuso o agudo el ángulo formado por el segmento que une las proyecciones de

los puntos A y B sobre este plano, son posibles dos casos. **35.** $\sqrt{9m^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - l^2} + \sqrt{9m^2 \operatorname{cosec}^2 \beta - l^2}$, si son agudos los dos ángulos al lado AB del triángulo ABM; $\left| \sqrt{9m^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - l^2} - \sqrt{9m^2 \operatorname{cosec}^2 \beta - l^2} \right|$, si uno de estos ángulos es obtuso. **36.** $2 \operatorname{arc\,sen} [1/2 \operatorname{tg} (\alpha/2)]$.

§ 5

4. Se aprovecha la semejanza de los triángulos obtenidos en la construcción con el fin de sustituir las relaciones de la igualdad a demostrar del miembro de la izquierda por otras nuevas, en cuyo denominador haya un mismo lado del triángulo ABC. **13.** Se aplica la fórmula del seno del ángulo triple. **16.** 4:9. **21.** $3/4a^2$; $\arccos \sqrt{1/3}$. **29.** $1/2b \operatorname{tg} (\alpha/2) [3 - 4 \operatorname{sen}^2 (\alpha/2)]^{-1/2}$. **30.** $\dfrac{2\sqrt{3}h \operatorname{tg} [(\alpha-\pi)/6]}{9 \operatorname{tg}^2 [(\alpha-\pi)/6] - 3}$. **31.** $3\sqrt[3]{\dfrac{48V \operatorname{sen} (\alpha/2)}{\sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^2 (\alpha/2)}}}$.

§ 6

1. Tomar dos rectas l_1 y l_2 de las tres dadas, construir los planos paralelos π_1 y π_2 que contengan a l_1 y l_2 respectivamente. Sean A y B los puntos de intersección de la tercera recta l_3 con los planos π_1 y π_2. Por el punto A en el plano π_1 trazar la recta k_1 paralela a l_2 y, por el punto B en el plano π_2, la recta k_2 paralela a l_1. Construir a continuación paralelogramos iguales: en el plano π_1 con el vértice A y diagonales situadas en las rectas l_1 y k_1; en el plano π_2 con el vértice B y diagonales situadas en las rectas l_2 y k_2. **2.** No es válido. **3.** No es cierta. **4.** Sí, se puede. El plano secante se tomará paralelo a las líneas de intersección de las caras opuestas del ángulo tetraédrico dado. **5.** Es imposible. **8.** Es un cuadrado. **9.** Es un hexágono regular. **10.** Construir la sección del cubo por el plano que pase por los puntos A, B, C, D que dividen las aristas correspondientes del cubo en la relación 1:3 (fig. 170). Convencerse de que $ABCD$ es un cuadrado con el lado $3\sqrt{2}/4 \approx 1{,}06$ (si la arista del cubo se toma por 1). En calidad de orificio buscado puede tomarse un cuadrado de lado 1 situado dentro del cuadrado $ABCD$. **11.** $1/3a \times (3+2\sqrt{3})$. **12.** $2a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **13.** $a(3-\sqrt{3})$. **14.** $1/2a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. **15.** Es posible. **16.** $4\pi/27$. **17.** $\operatorname{arc\,tg} [\sqrt{2} \operatorname{cotg} (\alpha/2)]$. **18.** $a/\sqrt{2}$. **19.** $2Rl^{-1} \times \sqrt{l^2 - R^2} \operatorname{sen} (\pi/n)$; $2 \operatorname{arcsen} [Rl^{-1} \operatorname{sen} (\pi/n)]$. **20.** $2/3\pi h^3$. **21.** $a\sqrt{3/2}$. **22.** $l \cos^2 (\alpha/2) \operatorname{sen} (\alpha/2)$. **23.** $a^3b^3c^3 (ab+bc+ca)^{-3}$. **24.** $1/12\pi a^3 [1 + 2 \operatorname{cotg}^2 \times (\alpha/2)]$. **25.** $1/2c \operatorname{sen} B \operatorname{cosec} A$, $1/2c \operatorname{sen} A \operatorname{cosec} B$, $1/2c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{cosec}^2 (A+B)$. Expresar los lados del triángulo por medio de los radios de las esferas. **26.** $1/3\pi b^3 \cos \beta \cos (\alpha/2) \operatorname{sen}^2 (\alpha/2)$. **27.** $\operatorname{arctg} [\operatorname{sen} \alpha / \sqrt{\cos 2\alpha}]$. Si $2\alpha > \pi/2$, los conos no tienen planos tangentes comunes (que no pasan por la generatriz común). **28.** $2l \sec (\alpha/2) \sec \beta \sqrt{\operatorname{sen} (\alpha-\beta) \operatorname{sen} \beta}$. **29.** $(2+\sqrt{3})/4$.

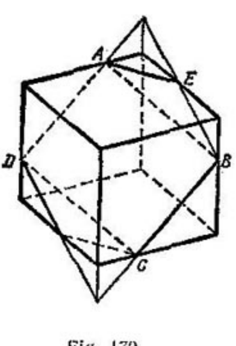

Fig. 170

§ 7

1. $a^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha \cos\alpha \operatorname{cosec}^2 3\alpha$. 2. $1/4a^2 \sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$. 3. $a^3 \cos^3\alpha$. 4. 1:15. 5. $a^3\sqrt{3}/2$. 6. $\sqrt{2}+1$. 7. $3/4\sqrt{3}h^2(l^2-h^2)(h-a)^{-2}$. 8. $(3\sqrt{3}+1)/26$. 9. $3/\sqrt{14}$. 10. $\sqrt{3}V^{2/3}\cos^{-1/3}\alpha\operatorname{sen}^{-2/3}\alpha$. 11. $a(1+2\cos\varphi)^{-1}$. 12. $d^2\sqrt{2}\operatorname{cosec}\varphi$. 13. $3+2\sqrt{2}$. 14. $\sqrt[4]{3}S^{1/2}\cos^{1/2}\alpha\operatorname{sen}\alpha$. 15. 13:23. 16. 1:47. 17. $3a$. 18. $3\sqrt{3}a^2/4$. 19. $1/4(2a+b)^2$. 20. $3a^2/2\sqrt{2}$. 21. $a^2\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)$. 22. $23V/24$. 23. $2/5a$. 24. $12h^3/247$. 25. $25a\sqrt{4h^2+3a^2}/64$. 26. $5S/4$. 27. $25S/16$. 28. 100/69. 29. $4\sqrt{6}h^2/9$. 30. $\arccos 3/4$. 31. $(a/3)\sqrt{15+9\sqrt{3}}$, $(a/12)\sqrt{15+9\sqrt{3}}$. 32. $3\sqrt{3}/32$. 33. $\dfrac{3d^2}{4}$. 34. $3\sqrt{3}/4\,\text{dm}^2$. 35. $3\sqrt{7}/16\,\text{dm}^2$.

§ 8

1. $\pi h\sqrt{2R(2R-h)}$. 2. $a\sqrt{6}/8$. 3. $4\pi rR^2(2R-r)^{-1}$. 4. $\arccos\sqrt{\dfrac{4V-2\pi R^3}{3V+2\pi R^3}}$. 5. 4:21. 6. $2\pi/3$. 7. $10\pi h^3/9$. 8. 16:9. 9. $8\sqrt{3}a^3/27$. 10. $6\sqrt{3}/\pi$. 11. $b\cos(\alpha/2)\operatorname{tg}(\alpha/4)$. 12. $\sqrt{3}r^3\operatorname{cotg}^3(\alpha/2)\operatorname{tg}\alpha$. 13. $1/2\,l\operatorname{sen}^3\alpha$. 14. $2r\operatorname{cosec}2\varphi(1+\operatorname{sen}\varphi)$. 15. $a\sqrt{6}/2$. 16. $1/3(1+2\sqrt{2})^3\pi R^3$. 17. Los datos del problema se satisfacen por dos esferas de radios $r\left[1+2\operatorname{tg}^2(\alpha/2)\pm\operatorname{tg}(\alpha/2)\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}\right]$. 18. $S_{\text{lat}}=1/3\pi l^2$, $R=3l/4\sqrt{2}$. 19. $\sqrt{2}\pi a^3/36$. 20. $V=a^2h/2$, donde para $a/2\leqslant r<a/\sqrt{2}$ $h=\dfrac{r\pm\sqrt{r^2-a^2/4}}{1-2r^2/a^2}$; para $r=a/\sqrt{2}$ $h=a/4$; para $r>a/\sqrt{2}$ $h=\dfrac{r-\sqrt{r^2-a^2/4}}{1-2r^2/a^2}$. 21. $1/4a(\sqrt{3}-1)^3$. 22. $b\sqrt{4a^2-b^2}/(4a+10b)$. 23. $1/18\pi a^3\sqrt{3}$. 24. $r(1+\sqrt{3}+2/3\sqrt{6})$. 25. $1/3r\left(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}\right)$. 26. $1/2r(2+\sqrt{6})$. 27. 2. 28. $\dfrac{9a^2h^2}{a^2+12h^2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{a^2+12h^2}}{a\sqrt{3}}$. 29. $\dfrac{a(2b-a)\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$. 30. $5a^3\sqrt{2}/96$.

PARTE IV

§ 1

1. No hay soluciones. 2. $x=0$. 3. No hay soluciones. 4. No hay soluciones. El segundo miembro para $\cos x\leqslant 1/2$ no es negativo; sin embargo, estos valores de x satisfacen la desigualdad $|x|\geqslant\pi/3$, es decir, $x^2\geqslant\pi^2/9>1$, por lo tanto $3x^2>3\geqslant 1-2\cos x$. 5. $x=0$. 7. $x=2$. Hay que reducir la ecuación a la forma: $x2^x=8$ y por medio de la selección encontrar la raíz $x=2$; es imposible hallar otras raíces, ya que en el caso de $x\geqslant 0$ el primer miembro de esta ecuación crece con monotonía, mientras que para $x<0$, este miembro no es positivo. 8. $x_1=1/4$, $x_2=2$. Reducir la ecuación a la forma $(\log_2 x+2)\times(\log_2 x+x-3)=0$. La ecuación $\log_2 x=3-x$ tiene la única raíz $x=2$; si $x>2$, su primer miembro es mayor que 1, mientras que el segundo, menor que 1; para $x<2$, (admisibles) viceversa. 9. $x_1=0$, $x_2=2$. Reducir la ecuación a la forma $(x-2)2^x=(x-2)(1-x)$. 10. $x=1$. Para $x>1$ tenemos $x^2>1$; por otro lado, para estas x tenemos $x-x^2<0$, es decir, $10^{x-x^2}<1$. Para $0<x<1$, viceversa, $x^x<1$, mientras que $10^{x-x^2}>1$. 11. $x_1=-1$, $x_2=1$. Reducir la ecuación a la forma $2(x+1)\operatorname{sen}(\pi x/6)=(x+1)(3-2x)$. Si $-2\leqslant x\leqslant 2$,

entonces $-\pi/3 \leqslant \pi x/6 \leqslant \pi/3$, y por lo tanto el primer miembro de la ecuación $2\,\text{sen}\,(\pi x/6)=3-2x$ crece, mientras el segundo decrece, por consiguiente $x=1$ es la única raíz de la última ecuación. **12.** $x=1/2$. Reducir la ecuación a la forma $4x-1=2\cos(2\pi x/3)$; su raíz $x=1/2$. No hay otras raíces, ya que para $0\leqslant x<1/2$ tenemos $4x-1<2\cos(2\pi x/3)$, y para $1/2<x\leqslant 1$ tenemos $4x-1>2\cos(2\pi x/3)$. **13.** $x=-1$, $y=1$. **14.** $x_1=2$, $y_1=(\pi/2)+k\pi$; $x_2=-2$, $y_2=k\pi$. **15.** $x=(2k+1)\pi/4$, $y=1$. **16.** $x=k\pi$, $y=1$. **17.** $x=1$, $y=(2k-3)/4$. **18.** $x=\pm 3/\pi$, $y=[(4k+1)\pi/2]\mp(3/\pi)$. **19.** $x_1=-\text{arctg}\sqrt{2}+k\pi$, $y_1=(\pi/4)+2n\pi$; $x_2=\text{arctg}\sqrt{2}+k\pi$, $y_2=(5\pi/4)+2n\pi$. Reducir la ecuación a la forma $[\text{tg}\,x+(\text{sen}\,y+\cos y)]^2+(1-\text{sen}\,2y)=0$. **20.** $x_1=(\pi/4)+2k\pi$, $y_1=(2n+1)\pi$; $x_2=(5\pi/4)+2k\pi$, $y_2=2n\pi$. Sustituyendo $\cos y=z$, reducir la ecuación a la forma $z^2-2z\ \text{sen}\,[x+(\pi/4)]+1=0$, ó $[z-\text{sen}\,[x+(\pi/4)]]^2+[1-\text{sen}^2[x+(\pi/4)]]=0$. **21.** $x=0$, $y=1$. Si la desigualdad es válida, entonces $y\geqslant x^2+1\geqslant 1$; por otro lado, $\cos x\geqslant y^2+\sqrt{y-x^2-1}\geqslant y^2$, es decir, $\cos x\geqslant 1$. Por lo tanto, todas las desigualdades expuestas se convierten en las igualdades: $y=x^2+1=1$, de donde $x=0$, $y=1$. La verificación muestra que este par de números satisface realmente la desigualdad. **22.** $x=1$, $y=0$. **23.** $x=\arccos 1/3+(2k+1)\pi$. **24.** No hay soluciones. **25.** $x_{1,2}=\pm 1$, $y_{1,2}=\pm\sqrt{3/2}$; $x_{3,4}=\pm 1$, $y_{3,4}=\mp\sqrt{3/2}$. **26.** $x=2$, $y=2$, $z=-2$. **27.** $x_1=a$, $y_1=0$, $z_1=0$; $x_2=0$, $y_2=a$, $z_2=0$; $x_3=0$, $y_3=0$, $z_3=a$. **28.** $a=-1/2$. **29.** a es cualquier número, $b=(2k+1)\pi-a$.

§ 2

1. No hay soluciones. Conviene hacer uso del hecho de que la suma de dos expresiones positivas recíprocamente inversas no puede ser menor que 2. **2.** $x=-2/3$. Es necesario utilizar el hecho de que la suma de dos expresiones positivas, recíprocamente inversas, es igual a 2 sólo cuando ambas expresiones son iguales a 1. **3.** No hay soluciones. En función del signo ante x, uno de los sumandos es mayor de 2. **4.** $-1\leqslant x\leqslant 1$. **5.** $4/5\leqslant x<1$. Para $x<1$ (y $x\geqslant 4/5$, de las condiciones, para que todas las raíces tengan sentido) cada sumando del primer miembro es mayor que cada sumando en el segundo miembro; para $x>1$ la situación es inversa. **6.** $x_1=(\pi/2)+k\pi$, $x_2=2k\pi$. **7.** $x_1=(\pi/4)+k\pi$, $x_2=k\pi$. **8.** No hay soluciones. Ya que $\sqrt{\text{sen}^3 x}\leqslant \text{sen}\,x$ y $\sqrt{\cos^3 x}\leqslant\cos x$, el primer miembro no supera a $\text{sen}\,x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$; pero $\text{sen}\ x+\cos x=\sqrt{2}$ solamente para $\text{sen}\,x=\cos x=\sqrt{2}/2$, pero para tales x tiene lugar estricta desigualdad $\sqrt{\text{sen}^3 x}<\text{sen}\,x$. **9.** $x=(5\pi/4)+2m\pi$. **10.** No hay soluciones.

§ 3

1. Si primera ecuación no tiene soluciones, $c^2>a^2+b^2$ en particular, $c\neq 0$; hay que representar la segunda ecuación en la forma $(2a\,\text{tg}^2 x+2c\,\text{tg}\,x+b)\,\text{cotg}\,x=0$. Si $a\neq 0$, el discriminante del trinomio $2ay^2+2cy+b$ es igual a $c^2-2ab>a^2+b^2-2ab\geqslant 0$, es decir, la segunda ecuación tiene dos distintas raíces reales; por lo menos, una de ellas es distinta de cero y por lo tanto $\text{cotg}\,x$ tiene sentido. Si $a=0$, entonces $\text{tg}\,x=-b/2c$; para $b\neq 0$ tenemos $\text{tg}\,x\neq 0$, es decir, la segunda ecuación tiene solución. **2.** $a<\pi^2/2$. **3.** a) $a_1=1$, $a_2=-2$. b) $a=1$. **4.** $a<-1$, $a=0$. **5.** $a=4$, $a>5$. **6.** $a=0$, $0<b\leqslant 1$. **7.** $a=-1$. **8.** $a=-1$, $a=1$. **9.** a) Para ninguna a. b) Para toda a. c) $a\neq 0$. d) Para toda a. e) $a=0$. f) $a\neq 0$.

§ 4

1. $d\geqslant 11/9$. **2.** $2\sqrt{2}\leqslant a<11/9$. **3.** Para ninguna. **4.** $a<-2$. **5.** $a<-3$, $a>0$. **6.** $-1/2\leqslant a<0$. **7.** $m>1$. **8.** $a\leqslant -3$, $a\geqslant -1$. **9.** $y<-2\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}<y<0$, $0<y<1/\sqrt{2}$, $y>2\sqrt{2}$. **10.** $0<y<1$. **11.** $1/2\leqslant a\leqslant 1$. **12.** $-3\leqslant a\leqslant 3$. **13.** Para ninguna. **14.** $x=(2a+1-\sqrt{1+4a})/2$ para $a\geqslant 0$;

no hay soluciones para $a < 0$. **15.** $x_{1,2} = (\sqrt{a^2-1} - a \pm \sqrt{2a^2-5-2a\sqrt{a^2-1}})^2$ para $a < -5/4$; $x=1$ para $a=-5/4$; para $a > -5/4$ ho hay soluciones. Conviene hallar las raíces del trinomio $f(y)=y^2+2ay+1$ que satisfacen la condición $y \geqslant 2$. Si $D=a^2-1<0$, entonces, en general, no hay raíces reales; por lo tanto deberá ser $a^2-1 \geqslant 0$. Si $f(2)=4a+5<0$, en este caso será mayor de 2 la raíz máxima $y=-a+\sqrt{a^2-1}$. Si $f(2) \geqslant 0$ y $-a \geqslant 2$, en este caso son válidas ambas raíces, sin embargo este caso no tiene lugar para ninguna a. **16.** $x=\log_2(2m+\sqrt{4m^2-2m-2})$ para $m<-1$; $x=1$ para $m=1$; $x_{1,2}=\log_2(2m \pm \sqrt{4m^2-2m-2})$ para $m>1$; para las demás m no hay soluciones. Es necesario hallar las raíces positivas del trinomio $y^2-4my+2m+2$. El discriminante $D=4m^2-2m-2$ no es negativo para $m \leqslant -1/2$, $m \geqslant 1$. Para $m \geqslant 1$ tenemos $y_{1,2}=2m+\sqrt{4m^2-2m-2}$, para $-1 \leqslant m \leqslant -1/2$ no hay raíces positivas, mientras que para $m<-1$, la raíz mayor es positiva $y=2m+\sqrt{4m^2-2m-2}$. **17.** $x=(-1)^k \arcsen \log_2[(-m+\sqrt{4-3m^2})/2]+k\pi$. Conviene hallar las raíces del trinomio $f(y)=y^2+my+m^2-1$ que satisfacen la condición $1/2 \leqslant y \leqslant 2$. Debido a $-1<m<1$ el discriminante $D=4-3m^2>0$, y el término independiente es negativo, por lo tanto es de interés sólo la raíz mayor. Esta última no supera a 2 cuando y sólo cuando $f(2) \geqslant 0$, que se satisface para cualquier m. **18.** $x_1=(-1)^k \arcsen 10^{a+\sqrt{2a^2-2}}+k\pi$, $x_2=(-1)^k \arcsen \times$ $\times 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}+k\pi$ para $-\sqrt{2} \leqslant a < 1$; $x=x_2$ para $a<-\sqrt{2}$, $a=-1$, $a \geqslant \sqrt{2}$, para las demás x, no hay soluciones. **19.** $x=(-1)^k \arcsen a^{(\sqrt{1+4a}-1)/2}+k\pi$ para $0<a<1$, $x=(-1)^k \arcsen a^{-(\sqrt{1+4a}+1)/2}+k\pi$ para $a>1$. **20.** $x_{1,2}=$ $=\pm(1-a^2)^2/4a^2$ para $0<a<1$, $x=0$ para $a=1$, para otras a, no hay soluciones. **21.** $x=\log_2 a$ para $0<a \leqslant 1$, para otras a no hay soluciones. **22.** $x=1/10$ para $a=10$; $x_1=1/10$; $x_2=10^{2-\sqrt{1+8\lg a}}$ para $10<a<1000$; $x_1=1/10$, $x_2=1/1000$ para $a \geqslant 1000$; para las demás a; no hay soluciones. **23.** $x=a^4$ para $1<a \leqslant \sqrt[4]{2}$; $x=a^{\sqrt{8\log_a 2+4}-2}$ para $a>\sqrt[4]{2}$; para otras a, no hay soluciones. **24.** $x_1=10^{1-\sqrt{3}}$, $x_2=10^{-1+\sqrt{4\lg a+3}}$ para $10^{1-\sqrt{3}} \leqslant a \leqslant 10^{1+\sqrt{3}}$; $x_{1,2}=10^{1\pm\sqrt{3}}$ para $a>10^{1+\sqrt{3}}$, para otras a, ho hay soluciones. **25.** $x=a^2$ para $1<a \leqslant 2$, $x=a^{-1+\sqrt{4+\log_a 2}}$ para $a>\sqrt{2}$, para otras a, no hay soluciones. **26.** $x_1=a^{1/\left(\log_2 a+\sqrt{\log_2^2 a-2\log_2 a}\right)}$, $x_2=a^{1/(2\log_a 2-2)}$ para $0<a<1$; $x=x_2$ para $1<a<2$ y $2<a<4$; $x=x_1$ para $a \geqslant 4$. **27.** Se reduce a la desigualdad $\operatorname{sen} x-\cos y>0$. **28.** Se reduce a la desigualdad $-1/2<\cos(x-y)<1/2$. **29.** Se reduce a la desigualdad $\cos x-\cos y>0$. **30.** Se reduce a la desigualdad $|\operatorname{sen}(x+y)|>1/2$. **31.** Se reduce a la desigualdad $\cos 2x+\cos y<0$.

CONTENIDO

PARTE I
ARITMETICA Y ALGEBRA

PARTE II
TRIGONOMETRIA

PARTE III
GEOMETRIA

PARTE IV

PROBLEMAS «NO TIPICOS»

A NUESTROS
LECTORES:

«MIR» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial «MIR», I. Rizhski per., GSP1—110 129 820, Moscú, URSS.