CAPITULO

CUARTO

DIVERSAS SERIES. RESIDUOS. FUNCIONES INVERSAS E IMPLICITAS

§ 1. PRINCIPIO DE COMPACIDAD

1.1. Como ya se sabe, de una sucesión arbitraria de puntos $\{z_n\}$ siempre se puede extraer una sucesión parcial convergente $\{z_{n_k}\}$. No obstante, el límite de esta última puede ser un número impropio, es decir, infinito. Para que el límite siempre sea finito es suficiente exigir que la sucesión $\{z_n\}$ esté acotada. ¿Se verifican proposiciones análogas para una sucesión arbitraria de funciones $\{f_n(z)\}$, analíticas en un recinto G? ¿Es posible afirmar, por ejemplo, que cualquier sucesión tal contiene alguna sucesión parcial de funciones uniformemente convergente en el interior del recinto G (la función límite, según el teorema de Weierstrass, tiene que ser analítica en el recinto G)? Unos ejemplos sencillos muestran que para una sucesión arbitraria de funciones analíticas puede no existir tal sucesión parcial.

Consideremos, por ejemplo, la sucesión de funciones: $z, 2z, \ldots$ $\ldots, nz, \ldots$ en el círculo unidad. Esta converge hacia cero si $z = 0$ y hacia ∞ si $z \neq 0$, y cada una de sus sucesiones parciales posee las mismas propiedades. Tomemos también la sucesión de funciones $z, z^2, z^3, \ldots, z^n, \ldots$ en el círculo $|z| < 2$. Esta converge uniformemente hacia cero en el interior del círculo unidad y hacia el infinito cuando $1 < |z| < 2$. Por consiguiente, cualquier sucesión parcial de la misma posee las mismas propiedades. Evidentemente, en cada uno de los ejemplos indicados no existe ninguna sucesión parcial que sea uniformemente convergente en el interior del recinto correspondiente (en el círculo $|z| < 1$ en el primer ejemplo, y en el círculo $|z| < 2$ en el segundo ejemplo).

Diremos que un conjunto infinito de funciones E (o una sucesión de funciones), analíticas en un recinto G, es c o m p a c t o en este recinto, si cualquier sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$, pertenecientes a E, posee una sucesión parcial $\{f_{n_k}(z)\}$ que es uniformemente convergente en el interior de G. Los ejemplos anteriores muestran que la sucesión $\{nz\}$ no es compacta en el círculo unidad y la sucesión $\{z^n\}$ no es compacta en el círculo $|z| < 2$.

Demostremos la proposición siguiente:

Lema. *Si la sucesión $\{f_n(z)\}$ está uniformemente acotada en el círculo K: $|z - z_0| < R$, o sea, que existe un número positivo M tal que para cualquier n se cumplen las desigualdades*

$$|f_n(z)| < M$$

en todos los puntos del círculo K, entonces esta sucesión es compacta en K.

Demostración. Consideremos los desarrollos de las funciones $f_n(z)$ en series de potencias:

$$f_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}(z - z_0) + \ldots + A_k^{(n)}(z - z_0)^k + \ldots \quad (1.1{:}1)$$

En virtud de las desigualdades de Cauchy para los coeficientes de una serie de potencias (véase el tercer cap., ap. 5.4), para cada ρ, $0 < \rho < R$, se tiene:

$$|A_k^{(n)}| \leqslant \frac{M_n(\rho)}{\rho^k},$$

donde

$$M_n(\rho) = \max_{|z - z_0| = \rho} |f_n(z)| < M.$$

Cuando ρ tiende al límite R, para cualquier entero no negativo k, obtenemos:

$$|A_k^{(n)}| \leqslant \frac{M}{R^k}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (1.1{:}2)$$

De aquí se deduce que cualquier sucesión de coeficientes homónimos de Taylor de las funciones $f_n(z)$ (es decir, de coeficientes de una potencia fija de z) está acotada.

Utilizando esta propiedad, tomemos en la sucesión $\{f_n(z)\}$ una sucesión parcial

$$f_{n_1'}(z), \; f_{n_2'}(z), \; \ldots, \; f_{n_m'}(z), \; \ldots, \quad (1.1{:}3)$$

tal, que converja hacia cierto límite la sucesión de términos independientes $\{A_0^{(n_m')}\}$ correspondientes a los desarrollos de Taylor. De la sucesión parcial obtenida extraemos una nueva:

$$f_{n_1''}(z), \; f_{n_2''}(z), \; \ldots, \; f_{n_m''}(z), \; \ldots \quad (1.1{:}4)$$

de modo que para ella sea convergente también la sucesión de los coeficientes de la primera potencia de $z - z_0$ en los desarrollos de Taylor de estas funciones. En general, si ya se ha elegido alguna sucesión parcial de funciones

$$f_{n_1^{(m)}}(z),\ f_{n_2^{(m)}}(z),\ \ldots,\ f_{n_m^{(m)}}(z),\ \ldots \tag{1.1:5}$$

de modo que para ella converjan hacia límites finitos las sucesiones de los coeficientes de los desarrollos de Taylor de las potencias $(z-z_0)^0, \ldots, (z-z_0)^{m-1}$, entonces extraemos de la misma una sucesión parcial

$$f_{n_1^{(m+1)}}(z),\ f_{n_2^{(m+1)}}(z),\ \ldots,\ f_{n_{m+1}^{(m+1)}}(z),\ \ldots$$

tal, que para ella converja también hacia un límite finito la sucesión de los coeficientes de $(z-z_0)^m$.

Supongamos que ya se han formado las sucesiones (1.1:5) para cualquier natural m, extraigamos de éstas una sucesión diagonal, formada por las funciones que ocupan el m-ésimo lugar en la sucesión de índice m. Obtendremos una sucesión

$$f_{\nu_1}(z),\ f_{\nu_2}(z),\ \ldots,\ f_{\nu_m}(z),\ \ldots, \tag{1.1:6}$$

donde se ha hecho $\nu_m = n_m^{(m)}$ y

$$f_{\nu_m}(z) = A_0^{(\nu_m)} + A_1^{(\nu_m)}(z-z_0) + \ldots + A_k^{(\nu_m)}(z-z_0)^k + \ldots$$

Evidentemente, (1.1:6) es una sucesión parcial de la sucesión inicial $\{f_n(z)\}$. Además, para cualquier entero no negativo k, todas las funciones (1.1:6), comenzando desde la $(k+1)$-ésima función $f_{\nu_{k+1}}$, pertenecen a la sucesión parcial

$$f_{n_1^{(k+1)}}(z),\ f_{n_2^{(k+1)}}(z),\ \ldots,\ f_{n_k^{(k+1)}}(z),\ \ldots$$

Por consiguiente, para las funciones (2.1:6) son convergentes las sucesiones de los coeficientes $\{A_k^{(\nu_m)}\}$ para cualquier número entero fijo no negativo k. Hagamos

$$\lim_{m\to\infty} A_k^{(\nu_m)} = A_k.$$

Como cada uno de los coeficientes $A_k^{\nu_m}$ satisface a la desigualdad (1.1:2), esta misma desigualdad se verifica también para los números A_k:

$$|A_k| \leqslant \frac{M}{R^k} \quad (k=0, 1, 2, \ldots). \tag{1.1:7}$$

De aquí se deduce que

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|A_k|} \leqslant \frac{1}{R}$$

y, en virtud de la fórmula de Cauchy-Hadamard (cap. 3, ap. 5.1), el radio de convergencia de la serie de potencias

$$A_0 + A_1(z-z_0) + \ldots + A_k(z-z_0)^k + \ldots \qquad (1.1{:}8)$$

no es menor que R. Por esta razón, la suma $f(z)$ de la serie (1.1:8) representa una función que es analítica en el círculo K. Demostremos que la sucesión (1.1:6) converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de K. Es suficiente convencerse que la convergencia uniforme tiene lugar en todo círculo cerrado $|z-z_0| \leqslant \rho < R$.

Sea ε un número positivo arbitrario, tomemos un número natural n_0, de modo que se cumpla la desigualdad

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} M\left(\frac{\rho}{R}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1.1{:}9)$$

Entonces, debido a las desigualdades (1.1:2) y (1.1:7),

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n^{(\nu_m)}|\rho^n \leqslant \sum_{n_0+1}^{\infty} M\left(\frac{\rho}{R}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3}$$

y

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n|\rho^n \leqslant \sum_{n_0+1}^{\infty} M\left(\frac{\rho}{R}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3},$$

y, por consiguiente, para $|z-z_0| \leqslant \rho$, tendremos:

$$|f_{\nu_m}(z) - f(z)| = \left|\sum_{0}^{\infty} (A_n^{(\nu_m)} - A_n)(z-z_0)^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0}^{n_0} |A_n^{(\nu_m)} - A_n|\rho^n + \sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n^{(\nu_m)}|\rho^n + \sum_{n_0+1}^{\infty} |A_n|\rho^n <$$

$$< \sum_{0}^{n_0} |A_n^{(\nu_m)} - A_n|\rho^n + \frac{2}{3}\varepsilon. \qquad (1.1{:}10)$$

Como n_0 está aquí fijado y $\lim\limits_{m\to\infty} A_n^{(\nu_m)} = A_n$, para $m > m_0$ suficientemente grande, se tiene:

$$\sum_{0}^{n_0} |A_n^{(\nu_m)} - A_n|\rho^n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por consiguiente,

$$|f_{\nu_m}(z) - f(z)| < \varepsilon \quad (|z-z_0| \leqslant \rho,\ m > m_0).$$

Por lo tanto, queda establecida la convergencia uniforme de la sucesión (1.1:6) en el interior del círculo K. Hemos demostrado que la sucesión (1.1:1) contiene una sucesión parcial (1.1:6), la cual es uniformemente convergente en el interior de K. Con esto, el lema queda demostrado.

Para enunciar la condición necesaria y suficiente para la compacidad en cualquier recinto G, convengamos en llamar a un conjunto de funciones E uniformemente acotado en el interior del recinto G, si para cualquier conjunto cerrado de puntos F del recinto G existe un número positivo $M(F)$ tal, que toda función $f(z) \in E$ satisface en todos los puntos del conjunto F a la desigualdad

$$|f(z)| \leqslant M(F).$$

Demostremos ahora la siguiente proposición:

Teorema de Montel. *Para que un conjunto E de funciones, analíticas en un recinto dado G, sea compacto en este recinto, es necesario y suficiente que esté uniformemente acotado en el interior de este recinto.*

La condición del teorema es necesaria para la compacidad del conjunto E. En efecto, supongamos que E es compacto y que no está uniformemente acotado en el interior de G. Entonces tiene que existir un conjunto cerrado F de puntos del recinto G, en el cual los módulos de las funciones pertenecientes a E pueden tomar valores arbitrariamente grandes. En otras palabras, para todo número natural n se pueden señalar una función $f_n(z) \in E$ y un punto $z_n \subset F$ tales, que en este punto se verifica la desigualdad.

$$|f_n(z_n)| > n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.1:11}$$

Como el conjunto E es compacto, de $\{f_n(z)\}$ se puede extraer una sucesión parcial $\{f_{n_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de G y, en particular, en F. La función límite $f(z)$ será analítica en G y, por consiguiente, continua en F. Designemos con M el $\max\limits_{F} |f(z)|$ $(< \infty)$. Como, en virtud de la convergencia uniforme, en todos los puntos del conjunto F tienen que verificarse las desigualdades

$$|f_{n_k}(z) - f(z) < 1 \text{ para } n_k > N,$$

se tiene:

$$|f_{n_k}(z)| \leqslant |f(z)| + 1 \leqslant M + 1$$

en todos los puntos del conjunto F y para todos $n_k > N$. Pero esto contradice al hecho de que los valores $|f_{n_k}(z_{n_k}|$ son arbitrariamente grandes (son superiores a n_k). De esta contradicción se deduce que la condición del teorema es necesaria para la compacidad.

Demostremos que ésta es también suficiente. Supongamos que el conjunto de funciones E está uniformemente acotado en el interior del recinto G. Cerciorémonos primero que, para cualquier conjunto cerrado F de puntos del recinto G, de una sucesión arbitraria de funciones $\{f_n(z)\}$ pertenecientes a E, se puede extraer una sucesión parcial que sea uniformemente convergente en F. Con este fin, para cada punto z del conjunto F consideremos algún entorno U_z, perteneciente a G junto con su frontera, y sea u_z un entorno con el mismo centro pero de menor radio (por ejemplo, dos veces menor). Debido al lema de Heine-Borel, existe un número finito de tales entornos: $u_{z_1}, u_{z_2}, \ldots, u_{z_q}$, que cubren a F. En cada uno de los entornos correspondientes U_{z_j} $(j = 1, \ldots, q)$ los módulos de las funciones de la sucesión $\{f_n(z)\}$ estarán uniformemente acotados:

$$|f_n(z)| < M_j, \quad z \in U_{z_j} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Por consiguiente, según el lema demostrado, se puede extraer de $\{f_n(z)\}$ una sucesión parcial $\{f_{\nu'_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de U_{z_1}, se puede extraer de $\{f_{\nu'_k}(z)\}$ una sucesión parcial $\{f_{\nu''_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de U_{z_2}, etc., finalmente, se puede extraer de $\{f_{\nu_k^{(q-1)}}(z)\}$ una sucesión parcial $\{f_{\nu_k^{(q)}}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de U_{z_q}. Por la construcción misma, la sucesión $\{f_{\nu_k^{(q)}}(z)\}$ converge uniformemente en el interior de cada uno de los entornos U_{z_j} $(j = 1, \ldots, q)$, en particular, converge uniformemente en el interior de cada uno de los entornos u_{z_j} $(j = 1, \ldots, q)$ y, por consiguiente, también en el conjunto F que está cubierto por los entornos u_{z_j} $(j = 1, \ldots, q)$.

Así, pues, para cualquier conjunto cerrado $E \subset G$, la sucesión $\{f_n(z)\}$ contiene una sucesión parcial que converge uniformemente en F.

Consideremos una sucesión de conjuntos cerrados $\{F_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, de los cuales cada F_ν está formado por todos los puntos del recinto G cuays distancias hasta la frontera no son menores que $\frac{1}{\nu}$ (la causa de que el conjunto F_ν sea cerrado se debe a que la distancia $\rho(z, \Gamma)$ desde el punto z hasta la frontera del recinto G es una función continua de z (ap. 3.8. cap. primero) y, por consiguiente, si z_0 es un punto de acumulación para F_ν, entonces para éste

$$\rho(z_0, \Gamma) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in F_\nu}} \rho(z, \Gamma) \geqslant \frac{1}{\nu} \Big) .$$

Está claro que si ν es suficientemente grande ($\nu \geqslant \nu_0$), todos los conjuntos F_ν no son vacíos; además, $F_{\nu+1} \supset F_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ y, finalmente, todo conjunto cerrado $F \subset G$ pertenece a todos los F_ν, comenzando desde cierto ν en adelante (si la distancia desde F hasta la frontera del recinto G es igual a $\rho > 0$, entonces es suficiente tomar $\frac{1}{\nu} < \rho$ para que sea $F \subset F_\nu$). En otras palabras, $\{F_\nu\}$ es una sucesión creciente de conjuntos cerrados que aproximan a G por el interior. Extraigamos de $\{f_n(z)\}$ una sucesión parcial $\{f_{n'_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en F_1, extraigamos luego de $\{f_{n'_k}(z)\}$ una sucesión parcial $\{f_{n''_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en F_2, etc. Resultan unas sucesiones parciales $\{f_{n_k^{(m)}}(z)\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, de las cuales, cada una (correspondiente al índice m) está contenida en la anterior y converge uniformemente en F_m. Evidentemente, la sucesión diagonal

$$f_{n'_1}(z), \quad f_{n''_2}(z), \ \ldots, \ f_{n_m^{(m)}}(z), \ \ldots$$

está contenida en $\{f_n(z)\}$ y para cualquier natural n todos sus términos, comenzando desde $f_{n_m^{(m)}}(z)$, pertenecen a la sucesión parcial $\{f_{n_k^{(m)}}(z)\}$. Por lo tanto, la misma converge uniformemente en cualquier conjunto F_m y, por consiguiente, converge uniformemente en el interior del recinto G (puesto que, como se observó anteriormente, todo conjunto cerrado $F \subset G$ está contenido en F_m para m suficientemente grande). En resumen, cualquier sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ del conjunto E contiene una sucesión parcial que es uniformemente convergente en el interior del recinto G. con lo cual se termina la demostración del teorema de Montel.

En una serie de cuestiones de la teoría de funciones se introduce un concepto más general que el concepto considerado aquí de compacidad.

Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$, analíticas en un recinto G, *converge uniformemente hacia el infinito en el interior del recinto G*, si para cualquier conjunto cerrado $F \subset G$ y para cualquier número positivo M, existe un número $N = N(M, F)$ tal, que en todos los puntos del conjunto F y para cada $n > N = N(M, F)$ se verifican las desigualdades

$$|f_n(z)| > M.$$

Un conjunto E de funciones, analíticas en un recinto G, se llama familia normal de funciones en este recinto, si cualquier sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$, pertenecientes a E, posee una sucesión parcial $\{f_{n_k}(z)\}$ que converge uniformemente en el interior del recinto G hacia una función analítica o hacia el infinito.

Debido a esta definición todo conjunto compacto de funciones analíticas es también una familia normal. Por esta razón, la condición de acotación uniforme en el interior del recinto G, siendo una condición suficiente para la compacidad, será también suficiente para la normalidad. Claro que ahora esta condición no es necesaria, como esto se ve en el ejemplo de la sucesión de funciones $\{z+n\}$, la cual converge uniformemente hacia ∞ en el círculo unidad y, por consiguiente, es normal. Al final del capítulo octavo volveremos a estudiar las familias normales.

1.2. Una propiedad importante de los conjuntos compactos de funciones analíticas viene dada por la siguiente proposición.

Teorema de Vitali. *Si una sucesión $\{f_n(z)\}$ de funciones analíticas en un recinto G, es compacta en este recinto y converge en un conjunto de puntos $e \subset G$, que tiene por lo menos un punto de acumulación perteneciente al recinto, entonces esta sucesión converge uniformemente en el interior de G.*

Demostración. Debido a la compacidad de la sucesión $\{f_n(z)\}$, de cualquier sucesión parcial de la misma $\{f_{n'_k}(z)\}$ se puede extraer otra sucesión parcial $\{f_{n''_k}(z)\}$ que es uniformemente convergente en el interior de G. Demostremos que todas las sucesiones parciales de la sucesión $\{f_n(z)\}$, uniformemente convergentes en el interior de G, convergen hacia una misma función límite $f(z)$. En efecto, supongamos que $\lim\limits_{k\to\infty} f_{\nu_k}(z) = f(z)$ y $\lim\limits_{k\to\infty} f_{\mu_k}(z) = \varphi(z)$, donde $\{f_{\nu_k}(z)\}$ y $\{f_{\mu_k}(z)\}$ son dos sucesiones parciales de la sucesión $\{f_n(z)\}$, uniformemente convergentes en el interior de G. Las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en el recinto G (debido al teorema de Weierstrass); además, éstas coinciden en el conjunto e, que tiene puntos de acumulación en el recinto G (en los puntos del conjunto e existe el $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$; por esta razón, también tienen este mismo límite en estos puntos las sucesiones parciales $\{f_{\nu_k}(z)\}$ y $\{f_{\mu_k}(z)\}$). Por consiguiente, según el teorema de unicidad (cap. tercero, ap. 6.1), las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden en todo el recinto G: $\varphi(z) = f(z)$.

Demostremos que toda la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente en el interior de G hacia la función $f(z)$. Suponiendo que no fuese cierta esta afirmación, tendría que haber un conjunto cerrado $F \subset G$, en el cual $\{f_n(z)\}$ no convergería uniformemente hacia $f(z)$. Por consiguiente, existirían un número positivo α y unos índices n_k y los puntos correspondientes z_k del conjunto F, tales que

$$|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| \geqslant \alpha\ (>0), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1.2:1}$$

Consideremos la sucesión $\{f_{n_k}(z)\}$. Esta contiene una sucesión parcial $\{f_{n'_k}(z)\}$ uniformemente convergente en F, para la cual, según lo demostrado anteriormente, la función límite es $f(z)$. Por lo tanto,

$$|f_{n'_k}(z) - f(z)| < \alpha \text{ para } z \in F, \quad n'_k > N$$

y, en particular,

$$|f_{n'_k}(z_k) - f(z_k)| < \alpha \tag{1.2:2}$$

para valores de k suficientemente grandes. Pero las desigualdades (1.2:2) contradicen a las desigualdades (1.2:1). Por consiguiente, la hipótesis de que la sucesión $\{f_n(z)\}$ no converge uniformemente en el interior de G hacia la función $f(z)$, no es cierta. Con esto se termina la demostración del teorema de Vitali.

Presentemos aquí una de las aplicaciones más simples del teorema de Vitali, a la cual haremos referencia a continuación. Sea G un recinto arbitrario del plano z y Γ, una curva rectificable del plano w. Consideremos una función de dos variables $F(z, w)$, analítica respecto de z en el recinto G para cada w perteneciente a Γ. Supongamos que esta función es continua respecto de w en Γ para cada $z \in G$ y está uniformemente acotada en valor absoluto en el interior del recinto G para todos los puntos $w \in \Gamma$. En estas condiciones, se puede afirmar que la función

$$f(z) = \int_\Gamma F(z, w)\, dw$$

es analítica en el recinto G, y que cualquier sucesión de sumas integrales

$$f_n(z) = \sum_0^n F(z, w_k^{(n)})\, (w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)}),$$

convergente hacia la integral para cada z perteneciente a G *), converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de G. En virtud

---

*) Si la ecuación de la curva Γ es $w = \varphi(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ y $w_k^{(n)} = \varphi(t_k^{(n)})$, es suficiente exigir que $\delta_n = \max\limits_{k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})$ tienda a cero cuando $n \to \infty$.

del teorema de Weierstrass sobre las series de funciones analíticas, es suficiente demostrar la última proposición. Pero ésta es consecuencia inmediata del teorema de Vitali, pues la sucesión $\{f_n(z)\}$ es convergente en el recinto G y está uniformemente acotada en cada conjunto cerrado acotado $E \subset G$:

$$|f_n(z)| \leqslant M_E \sum_0^n |w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)}| \leqslant M_E L,$$

donde M_E es el extremo superior de $|F(z, w)|$ para $z \in E$ y $w \in \Gamma$, y L es la longitud de la curva Γ. Del mismo teorema de Weierstrass se deduce que

$$f^{(m)}(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \frac{\partial^m F(z, w_k^{(n)})}{\partial z^m} (w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)}) = \int_\Gamma \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m} dw$$

para cualquier natural m.

Generalicemos la proposición obtenida para el caso muy importante en las aplicaciones en que Γ es una curva ilimitada: $w = \varphi(t)$, $\alpha \leqslant t < \beta$, $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = \infty$, para la cual cada arco Γ_τ: $\alpha \leqslant t \leqslant \tau < \beta$ es rectificable.

Sea $F(z, w)$ una función analítica respecto de z en un recinto G para cada w fijado en Γ, y continua respecto de w en Γ para cada z fijado en el recinto G. Supongamos luego que para cualquier $\tau < \beta$ esta función está uniformemente acotada en valor absoluto en el interior del recinto G para todos los puntos $w \in \Gamma_\tau$. En otras palabras, para cada conjunto cerrado y acotado $E \subset G$ y para cada τ, $\alpha \leqslant \tau < \beta$, existe un número $M_E(\tau) < \infty$ tal, que

$$|F(z, w)| \leqslant M_E(\tau) \text{ para } z \in E \text{ y } w \in \Gamma_\tau.$$

En estas condiciones, según lo anterior, las integrales

$$\int_{\Gamma_\tau} F(z, w)\, dw = f_\tau(z)$$

representan funciones analíticas en el recinto G.

Supongamos, finalmente, que estas integrales son absolutamente convergentes para $\tau \to \infty$, es decir, que para todo $z \in G$ existe un límite finito $\lim\limits_{\tau\to\beta} \int_{\Gamma_\tau} |F(z, w)|\, ds = \int_\Gamma |F(z, w)|\, ds$, y la función $\int_\Gamma |F(z, w)|\, ds$ está acotada en el interior del recinto G.

Entonces la familia de funciones analíticas $\{f_\tau(z)\}$ estará uniformemente acotada en el interior del recinto G (ya que $|f_\tau(z)| \leqslant$

$\leqslant \int\limits_{\Gamma_\tau} |F(z, w)| \, ds \leqslant \int\limits_{\Gamma} |F(z, w)| \, ds\Big)$, y, por consiguiente, y a ella o a cualquier sucesión $\{f_{\tau_n}(z)\}$, donde $\tau_n \to \beta$, puede aplicársele el teorema de Vitali.

Definitivamente, obtenemos que la integral impropia

$$\int\limits_{\Gamma} F(z, w) \, dw = f(z) = \lim_{\tau \to \beta} f_\tau(z),$$

bajo las hipótesis hechas, representa una función analítica en el recinto G.

Además, según lo anterior, para cada natural m y cada $\tau < \beta$, tendremos:

$$f_\tau^{(m)}(z) = \int\limits_{\Gamma_\tau} \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m} \, dw;$$

por lo tanto, basándose en la convergencia uniforme de la familia $\{f_\tau(z)\}$ en el interior del recinto G, obtenemos:

$$f^{(m)}(z) = \lim_{\tau \to \beta} f_\tau^{(m)}(z) = \lim_{\tau \to \beta} \int\limits_{\Gamma_\tau} \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m} \, dw = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial^m F(z, w)}{\partial z^m} \, dw.$$

Como ejemplo, consideremos la denominada transformación de Laplace de la función $\varphi(t)$:

$$\int\limits_0^\infty e^{-zt} \varphi(t) \, dt.$$

Aquí la integración se efectúa a lo largo de la parte positiva del eje real (Γ: $x = t$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$) y $\varphi(t)$ es una función de variable real, definida y continua para $0 \leqslant t < \infty$. Haciendo

$$F(z, t) = e^{-zt} \varphi(t),$$

vemos que $F(z, t)$ es una función analítica respecto de z en todo el plano. Además, de la igualdad

$$|F(z, t)| = e^{-xt} |\varphi(t)|$$

se deduce que $|F(z, t)|$ está acotada en todo recinto acotado del plano z, para todos los t pertenecientes a un intervalo finito arbitrario fijo. Si suponemos además que para cierto número real C y para un número positivo α se verifica la desigualdad

$$|\varphi(t)| < \alpha e^{Ct} \text{ para } t > T(\alpha, C),$$

entonces, para cada z perteneciente al semiplano $x = \operatorname{Re} z > C$, tendremos:

$$|F(z, t)| < \alpha e^{-t(x-C)} \text{ para } t > T(\alpha, C).$$

De aquí se deduce, ante todo, que la integral

$$\int_0^\infty |F(z, t)| dt$$

es absolutamente convergente en el semiplano $\operatorname{Re} z > C$ y también que esta integral está acotada en cada semiplano $\operatorname{Re} z \geqslant C + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$; si $x \geqslant C + \varepsilon$, entonces

$$\int_0^\infty |F(z, t)| dt < A + \alpha \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} dt = A + \frac{\alpha}{\varepsilon},$$

donde A es cualquier número positivo superior a

$$\int_0^{T(\alpha, C)} |F(z, t)| dt,$$

por ejemplo,

$$A = \int_0^{T(\alpha, C)} e^{-Ct} |\varphi(t)| dt.$$

Así, pues, de la condición

$$|\varphi(t)| < \alpha e^{Ct} \text{ para } t > T(\alpha, C)$$

se deduce que la *transformación de Laplace de la función* $\varphi(t)$

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \varphi(t) dt$$

representa una función uniforme y analítica en el semiplano $\operatorname{Re} z > C$. Para la derivada de orden m obtenemos en el mismo semiplano la fórmula:

$$f^{(m)}(z) = \int_0^\infty (-t)^m e^{-zt} \varphi(t) dt.$$

La comparación de la transformación de Laplace $\int_0^\infty e^{-zt} \varphi(t) dt$ con la serie de Dirichlet $\sum_1^\infty a_k e^{-\lambda_k z}$, que también representa una función analítica en el semiplano (véase a continuación en el ap. 2.2), muestra que la primera se puede considerar como la analogía integral de la segunda, del mismo modo que, por ejemplo, la transformación de Fourier $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\varphi(t)\,dt$ se puede considerar como la analogía integral de la serie de Fourier (escrita en forma compleja) $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikx}$.

§ 2. SERIE DE LAURENT. SERIES DE DIRICHLET. TEOREMA DE RUNGE

2.1. Entre las clases de series de funciones analíticas, distintas de las series de potencias, las más próximas a estas últimas por su origen son las series dispuestas según las potencias enteras negativas de $z - z_0$:

$$A_0 + A_1(z-z_0)^{-1} + A_2(z-z_0)^{-2} + \ldots + A_n(z-z_0)^{-n} + \ldots \quad (2.1:1)$$

Haciendo $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$, transformemos (2.1:1) a la forma

$$A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \ldots + A_n\zeta^n + \ldots \quad (2.1:2)$$

El radio de convergencia de la última serie es $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|}}$; si $R = 0$, la serie (2.1:2) converge solamente en el punto $\zeta = 0$; si $0 < R < \infty$, la serie es absolutamente convergente en el círculo $|\zeta| < R$ y es divergente fuera del mismo; finalmente, si $R = \infty$, la serie es absolutamente convergente en todo punto finito del plano. De aquí y de la relación $|\zeta| = \frac{1}{|z-z_0|}$ se deduce que, si $\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|} = \infty$, la serie (2.1:1) es divergente en todo punto finito; si $0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|} < \infty$, la serie es absolutamente convergente para $|z-z_0| > \overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}$ y es divergente para $|z - z_0| < \overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|}$; finalmente, si $\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|} = 0$, la serie es absolutamente convergente en todos los puntos del plano, a excepción del punto $z = z_0$. En otras palabras, el campo de convergencia de la serie (2.1:1) es el e x t e r i o r d e l c í r c u l o de radio $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|A_n|}$ con el centro en z_0, el cual, para $r = \infty$ degenera en el punto del infinito, para $0 < r < \infty$ es el exterior del círculo en el sentido propio de la palabra y, finalmente, para $r = 0$ se convierte en todo el plano, del cual se ha excluido el punto $z = z_0$. Supondremos que $r = \overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|} < \infty$; entonces, verdaderamente, existe un campo de convergencia de la serie (2.1:1) $|z - z_0| > r$, que designaremos mediante K. Como la serie (2.1:2) es uniformemente convergente en todo conjunto cerrado de puntos del círculo k: $|\zeta| < R$ y la transformación lineal $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$ transforma cualquier conjunto cerrado de puntos del círculo k en un conjunto cerrado de puntos del recinto K y viceversa, la serie (2.1:1) converge uniformemente en el interior del recinto K. En este recinto ésta determina una función $F(z)$:

$$F(z) = A_0 + A_1(z-z_0)^{-1} + \ldots + A_n(z-z_0)^{-n} + \ldots, \quad (2.1:1')$$

que es analítica (según el teorema de Weierstrass) en todos los puntos finitos del recinto K. En el punto del infinito, $F(z)$ toma el valor A_0: $F(\infty) = A_0$. Por definición, diremos que la función $F(z)$ es *analítica en el punto del infinito*. Por lo tanto, la analiticidad de la función en el punto del infinito también se caracteriza por la existencia de un desarrollo de la forma (2.1:1'), que es convergente en un entorno del punto del infinito.

Una serie que generaliza el concepto de serie dispuesta solamente según las potencias enteras no negativas de $z - z_0$ (la serie de potencias) o solamente según las potencias enteras no positivas de $z - z_0$, es la *serie de Laurent*. Así se llama la serie de la forma

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n. \quad (2.1:3)$$

Esta serie se entiende como la suma de dos series:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ y } \sum_{1}^{\infty} a_{-m} (z-z_0)^{-m} \quad (2.1:4)$$

y se considera convergente cuando, y sólo cuando, son convergentes ambas series (2.1:4). Así, pues, por definición:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{0}^{\nu} a_n (z-z_0)^n + \lim_{\mu\to\infty} \sum_{1}^{\mu} a_{-m} (z-z_0)^{-m},$$

o, lo que es lo mismo,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \lim_{\substack{\nu\to\infty \\ \mu\to\infty}} \sum_{-\mu}^{\nu} a_n (z-z_0)^n. \quad (2.1:5)$$

Aquí μ y ν tienden hacia el infinito independientemente uno del otro. La última expresión tiene el sentido siguiente: para cada $\varepsilon > 0$

existe un $N(\varepsilon)$ tal, pue para $\nu > N(\varepsilon)$ y $\mu > N(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad:

$$\left| \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n - \sum_{-\mu}^{\nu} a_n (z - z_0)^n \right| < \varepsilon.$$

En virtud de la definición, las propiedades de convergencia absoluta y uniforme de la serie de Laurent coinciden con las propiedades correspondientes do las series (2.1:4).

Designemos el $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ con λ y el $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{-m}|}$ con r. Entonces la primera de las series (2.1:4) es convergente absoluta y uniformemente en el interior del recinto G, que representa el interior de la circunferencia Γ: $|z - z_0| = \frac{1}{\lambda} = R$, y es divergente en el exterior de esta circunferencia; la segunda de las series (2.1:4) es convergente absoluta y uniformemente en el interior del recinto g que representa el exterior de la circunferencia γ: $|z - z_0| = r$, y es divergente en el interior de esta circunferencia.

Los recintos G y g tienen puntos comunes cuando, y sólo cuando, se cumple la desigualdad

$$r < R. \tag{2.1:6}$$

En este caso, la parte común de los recintos G y g representa un anillo circular D:

$$r < |z - z_0| < R. \tag{2.1:7}$$

En el interior del recinto (2.1:7) ambas series convergen absoluta y uniformemente; por consiguiente, en el interior de este recinto converge también la serie de Laurent (2.1:3), que representa en D una función analítica:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R. \tag{2.1:8}$$

En cada punto situado fuera del recinto D es divergente una de las series (2.1:4), mientras que la otra serie continúa siendo convergente; de aquí que la serie de Laurent es divergente fuera del recinto D. En resumen, *el campo de convergencia de la serie de Laurent es un anillo circular* (con la condición (2.1:6)). A continuación, hablando de las series de Laurent, siempre se supondrá que se cumple la condición (2.1:6), sin la cual no existe campo de convergencia de la serie.

Si $r < \rho < R$, la serie (2.1:8) es uniformemente en la circunferencia γ: $|z - z_0| = \rho$; ésta también será uniformemente convergente en γ después de que todos los términos se hayan multiplicado por $\frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^{-k-1}$, donde k es un número entero arbitrario. Integrando la serie obtenida sobre γ, resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(z-z_0)^{n-k-1}\,dz.$$

Como muestra un simple cálculo, todas las integrales del segundo miembro son iguales a cero, menos una de ellas, correspondiente a $n=k$ e igual a $2\pi i$ (hay que emplear la ecuación de la circunferencia γ: $z=z_0+\rho e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$). Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz=a_k\qquad(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).\qquad(2.1:9)$$

Hemos obtenido la expresión de los coeficientes de la serie de Laurent mediante la suma de esta serie. De aquí se deduce que, si las sumas de las series de Laurent:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k\ \text{ y }\ \varphi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}b_k(z-z_0)^k,$$

que son convergentes en los anillos circulares D y Δ y que contienen una misma circunferencia $|z-z_0|=\rho$, coinciden en los puntos de esta circunferencia, entonces los coeficientes de ambas series son iguales dos a dos:

$$a_k=b_k\qquad(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots),$$

es decir, las series son idénticas. En particular, las series serán idénticas si los anillos D y Δ coinciden entre sí y $f(z)=\varphi(z)$ en todos los puntos del anillo D. De lo expuesto se deduce que *los desarrollos en serie de Laurent poseen la propiedad de identidad* (*propiedad de unicidad*).

Basándose en la propiedad de identidad, del mismo modo que en el ap. 5.2 del cap. tercero obtendremos que, si el desarrollo $\sum_{-\infty}^{+\infty}a_kz^k$ representa una función par, entonces son iguales a cero todos los coeficientes de potencias impares de z, y si es una función impar, entonces son iguales a cero todos los coeficientes de potencias pares.

Demostremos la siguiente proposición importante:

Teorema de Laurent. *Toda función $f(z)$, uniforme y analítica en un anillo circular D: $r<|z-z_0|<R$, se expresa en este anillo por una serie de Laurent convergente:*

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

Obsérvese que en las condiciones de este teorema, el anillo puede degenerar en un círculo con el centro excluido ($r = 0$, $R < \infty$), en el exterior de un círculo con el punto del infinito excluido ($0 < r$, $R = \infty$) y, finalmente, en todo el plano con dos puntos excluidos: z_0 y ∞ ($r = 0$ y $R = \infty$). En la demostración ulterior no quedan excluidos los casos indicados.

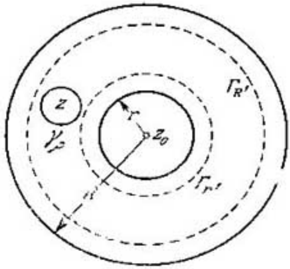

FIG. 66

Sea z algún punto del anillo D. Formemos un nuevo anillo D':

$$r' < |\zeta - z_0| < R',$$

situado en el interior del anillo inicial y que contiene el punto z (fig. 66). Para construirlo es suficiente tomar:

$$r < r' < |z - z_0| < R' < R.$$

Supongamos también que $|\zeta - z| = \rho$ es una circunferencia con el centro en z, situada en el interior de D'. Como

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

es una función analítica de ζ en el recinto D, a excepción del punto $\zeta = z$, según el teorema integral de Cauchy para un sistema de circuitos (ap. 2.5. cap. tercero), tendremos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad (2.1{:}10)$$

donde $\Gamma_{R'}$, $\Gamma_{r'}$ y γ_ρ denotan, respectivamente, las circunferencias:

$$|\zeta - z_0| = R', \qquad |\zeta - z_0| = r' \quad \text{y} \quad |\zeta - z| = \rho,$$

recorridas, al integrar, en sentido contrario al de las agujas del reloj. Pero la última integral en la fórmula (2.1:10) es la integral de

Cauchy y, por consiguiente, es igual a $f(z)$. Por lo tanto,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{r'}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (2.1{:}11)$$

Expresemos $\frac{1}{\zeta-z}$ bajo el signo de la primera integral ($\zeta\in\Gamma_{R'}$) en forma de serie geométrica de razón $\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$, cuyo módulo

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{R'}=\theta<1.$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_0^\infty\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}. \qquad (2.1{:}12)$$

Como para todos los puntos ζ pertenecientes a $\Gamma_{R'}$, el módulo del término general de la última serie es

$$\left|\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|=\frac{1}{R'}\,\theta^n \qquad (0<\theta<1),$$

la serie (2.1:12) es uniformemente convergente en $\Gamma_{R'}$ (respecto de ζ). También será uniformemente convergente la serie obtenida de (2.1:12) multiplicando ésta por $\frac{1}{2\pi i}f(\zeta)$ (acotada en valor absoluto en $\Gamma_{R'}$):

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_0^\infty\frac{1}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,(z-z_0)^n.$$

De aquí que esta última serie puede integrarse término a término sobre $\Gamma_{R'}$. Resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R'}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n, \qquad (2.1{:}13)$$

donde

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R'}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \qquad (n=0,\,1,2,\,\ldots). \qquad (2.1{:}14)$$

Así, pues, la primera de las integrales del segundo miembro de la igualdad (2.1:11) la hemos desarrollado en una serie convergente de potencias no negativas de $z-z_0$.

Refiriéndonos a la segunda integral del segundo miembro de la igualdad (2.1;11), expresemos $-\frac{1}{\zeta-z}$ $(\zeta \in \Gamma_{r'})$ en forma de serie geométrica de razón $\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}$, cuyo módulo

$$\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r'}{|z-z_0|} = \vartheta < 1.$$

Obtenemos:

$$-\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}. \qquad (2.1:15)$$

Observando que esta serie también es uniformemente convergente en $\Gamma_{r'}$, multiplicando todos sus términos por $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ e integrando término a término, hallamos:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta = \sum_{1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}, \qquad (2.1:16)$$

donde

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}} \qquad (n-1,\ 2,\ \ldots). \qquad (2.1:17)$$

Resumiendo, la segunda integral en el segundo miembro de la igualdad (2.1:11) la hemos expresado en forma de una serie convergente de potencias negativas de $z-z_0$.

Sustituyendo los desarrollos obtenidos (2.1:13) y (2.1:16) en el segundo miembro de la igualdad (2.1:11), obtenemos el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Laurent para un punto arbitrario $z \in D$:

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n. \qquad (2.1:18)$$

Los coeficientes de este desarrollo se calculan, unos por las fórmulas (2.1:14), otros por las fórmulas (2.1:17). Tomando una circunferencia arbitraria Γ: $|z-z_0| = \lambda$, donde $r < \lambda < R$, nos convencemos mediante el teorema integral de Cauchy para el caso de un sistema de circuitos, que cada uno de ellos se puede calcular efectuando la integración sobre la circunferencia Γ:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \quad (2.1:19)$$

Este resultado concuerda con el obtenido anteriormente (véase la fórmula (2.1:9)).

2.2. Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \qquad (2.2:1)$$

donde a_n son coeficientes complejos y λ_n son números reales no negativos que satisfacen a las condiciones

$$\lambda_{n+1} > \lambda_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots), \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \qquad (2.2:2)$$

se llama serie de Dirichlet (general), y los números λ_n se llaman exponentes de la serie.

Haciendo, en particular, $\lambda_n = \ln n$, obtenemos: $e^{-\lambda_n Z} \frac{1}{n^z}$, y la serie toma la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z};$$

ésta es una serie de Dirichlet ordinaria (clásica), que tiene aplicaciones en la teoría de número.

Si en la serie general de Dirichlet se hace la sustitución $w = e^{-z}$, resulta la serie:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n w^{\lambda_n},$$

dispuesta según las potencias arbitrarias positivas e indefinidamente crecientes de w (por lo general, no enteras). Desde este punto de vista, la serie de Dirichlet puede considerarse como una generalización de la serie de potencias para el caso de exponentes arbitrarios que satisfacen a las condiciones (2.2:2).

Las series de Dirichlet poseen muchas propiedades análogas a las de las series de potencias. Solamente que aquí el campo de convergencia no es un círculo sino un semiplano.

Demostremos para ellas el siguiente teorema fundamental.

Teorema. *Si la serie* (2.2:1) *es convergente en un punto* $z_0 = x_0 + iy_0$, *entonces es convergente también en todos los puntos del semiplano* $x = \operatorname{Re} z > x_0$, *y la convergencia de la serie es uniforme en todo recinto* g_0 *de la forma*: $|\arg (z - z_0)| \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ (fig. 67).

El enunciado de este teorema recuerda el primer teorema de Abel. Solamente que aquí, como ya se indicó, en lugar del círculo aparece un semiplano, y después se demuestra que la convergencia, por lo general, no es absoluta.

Para demostrar el teorema, efectuemos una acotación de la magnitud $\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_k e^{-\lambda_k z}\right|$, aplicando el hecho de que la serie $\sum_{1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z_0}$ es convergente. Hagamos

$$\alpha_m = \sum_{n+1}^{m} a_k e^{-\lambda_k z_0} \ (m > n \quad \text{y} \quad \alpha_n = 0,$$

de modo que

$$a_k e^{-\lambda_k z_0} = \alpha_k - \alpha_{k-1} \qquad (k = n+1,\ n+2,\ \ldots);$$

haciendo también para abreviar

$$e^{-\lambda_k(z-z_0)} = b_k,$$

obtenemos:

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_k e^{-\lambda_k z} = \sum_{n+1}^{n+p} (\alpha_k - \alpha_{k-1})\, b_k = \alpha_{n+p} b_{n+p} - \sum_{n+1}^{n+p-1} \alpha_k\,(b_{k+1} - b_k). \quad (2.2:3)$$

Esta última identidad ha sido escrita basándose en la transformación de Abel (véase el cap. primero, ap. 3.4).

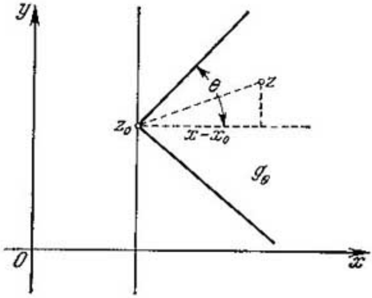

FIG. 67

Sea ε un número positivo arbitrario. En virtud de la convergencia de la serie (2.2:1), en el punto z_0 para $n > M(\varepsilon)$ y para cualquier $m \geqslant n$, tendremos:

$$|\alpha_m| = \left|\sum_{n+1}^{m} a_k e^{-\lambda_k z_0}\right| < \varepsilon \cos\theta. \quad (2.2:4)$$

Además,

$$|b_{n+p}| = |e^{-\lambda_{n+p}(z-z_0)}| = e^{-\lambda_{n+p}(x-x_0)} \quad (2.2:5)$$

y

$$|b_{k+1} - b_k| = \left|(z-z_0)\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-t(z-z_0)}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant |z-z_0| \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-t(x-x_0)}\,dt = \frac{|z-z_0|}{x-x_0}\,[e^{-\lambda_k(x-x_0)} - e^{-\lambda_{k+1}(x-x_0)}].$$

$$(2.2:6)$$

Si el punto z pertenece al recinto g_θ, entonces $x - x_0 > 0$ y $\frac{|z-z_0|}{x-x_0} < \frac{1}{\cos\theta}$. Por lo tanto, de (2.2:3) y de las desigualdades (2.2:4), (2.2:5) y (2.2:6) se deduce la siguiente desigualdad:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_k e^{-\lambda_k z}\right| \leqslant \varepsilon \cos\theta e^{-\lambda_{n+p}(x-x_0)} +$$

$$+\varepsilon\cos\theta \sum_{n+1}^{n+p-1} \frac{|z-z_0|}{x+x_0}\left[e^{-\lambda_k(x-x_0)} - e^{-\lambda_{k+1}(x-x_0)}\right] <$$

$$< \varepsilon e^{-\lambda_{n+1}(x-x_0)} < \varepsilon,$$

con lo cual queda demostrada la convergencia uniforme de la serie de Dirichlet en el recinto g_0 $\left(\text{para cualquier } \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ y a la vez, la convergencia ordinaria en todo el semiplano $x > x_0$.

Excluyendo el caso de una serie de Dirichlet que no converja en ningún punto del plano z, quedan todavía dos posibilidades:

la serie de Dirichlet converge en cualquier punto del plano;

existen puntos en los cuales la serie es convergente y también puntos en los cuales es divergente.

Detengámonos en este último caso. Sea $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto de convergencia de la serie de Dirichlet y $z_1 = x_1 + iy_1$ un punto de divergencia. De la proposición demostrada se deduce que $x_1 \leqslant x_0$. Por otra parte, la serie tiene que ser convergente en todos los puntos del semiplano $x > x_0$ y divergente en todos los puntos del semiplano $x < x_1$ (si fuese convergente en un punto z para el cual $x < x_1$, entonces, en virtud del teorema demostrado, tendría que converger también en el punto z_1, lo cual contradice a la hipótesis). Puede ocurrir que $x_1 = x_0$; entonces se tiene una recta $x = x_0$, a un lado de la cual la serie (2.2:1) es convergente y al otro lado, divergente. Sea $x_1 < x_0$; consideremos entonces el extremo inferior C de las partes reales de aquellos puntos z para los cuales la serie es convergente. Tendremos: $x_1 \leqslant C \leqslant x_0$.

Cerciorémonos que la serie es convergente para $x > C$ y divergente para $x < C$. En efecto, si $\operatorname{Re} z = x > C$, entonces en el semiintervalo (C, x), en virtud de la definición del número C, tiene que haber al menos un número ξ que es la parte real de un punto $\zeta = \xi + i\eta$ para el cual la serie es convergente. De aquí, por lo demostrado, se deduce que la serie converge también en el punto dado z. Si $\operatorname{Re} z = x < C$, entonces, suponiendo que la serie fuese convergente en el punto $z = x$, obtendríamos una contradicción con la definición del número C como extremo inferior.

Resumiendo, se puede decir que, para una serie de Dirichlet arbitraria, existen tres posibilidades:

a) la serie es divergente en todos los puntos;

b) existe una recta $x = C$ tal, que la serie es convergente en el semiplano $x > C$ y es divergente en el semiplano $x < C$;

c) la serie es convergente en todos los puntos;

Llamando al número C abscisa de convergencia y al semiplano $x > C$, semiplano de convergencia de la serie de Dirichlet, podemos considerar los casos a) y b) como casos límites, en los cuales $C = +\infty$ y $C = -\infty$, respectivamente.

Considerando solamente los casos b) y c), cuando $C < +\infty$, se puede afirmar, debido a la convergencia uniforme de la serie, que la suma de la serie de Dirichlet es una función analítica en el semiplano de convergencia. Sin embargo, no cualquier función, ni mucho menos, analítica en un semiplano, puede desarrollarse en serie de Dirichlet con unos exponentes dados $\{\lambda_n\}$. Así, por ejemplo, en el caso más simple en que todos los números λ_n son enteros, la suma de la serie

$$\sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

tiene que poseer período $2\pi i$. Incluso esta condición necesaria no es suficiente: respecto de una función cualquiera $f(z)$, analítica en un semiplano $\operatorname{Re} z > C$ y que posea en el mismo el período $2\pi i$, se puede afirmar solamente que ésta es desarrollable en una serie de la forma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-nz},$$

que es absoluta y uniformemente convergente en el interior de este semiplano. Para llegar a este desarrollo, que generaliza a la serie de Dirichlet en el mismo sentido en el que la serie de Laurent generaliza a la serie de Taylor, es suficiente realizar la transformación $\zeta = e^{-z}$. Como resultado, $f(z)$ se transformará en una función $f^*(\zeta)$, uniforme y analítica en el círculo $|\zeta| < e^{-C}$, a excepción, posiblemente, de su centro. En este círculo se tiene:

$$f^*(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n,$$

o bien, volviendo a la variable z:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-nz}.$$

Hasta ahora no dijimos nada de la convergencia absoluta de la serie de Dirichlet en el caso general.

Demostremos que *si la serie* (2.2:1) *es absolutamente convergente en un punto* $z_0 = x_0 + iy_0$, *entonces esta serie es absoluta y uniformemente convergente en el semiplano* $x \geqslant x_0$.

En efecto, si $x \geqslant x_0$, entonces

$$|a_n e^{-\lambda_n z}| = |a_n e^{-\lambda_n z_0}|\,|e^{-\lambda_n (z-z_0)}| = |a_n e^{-\lambda_n z_0}|\, e^{-\lambda_n (x-x_0)} \leqslant |a_n e^{-\lambda_n z_0}|.$$

De aquí que, en virtud de la convergencia de la serie $\sum_{1}^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n z_0}|$, de coeficientes constantes no negativos, la serie (2.2:1) es absoluta y uniformemente convergente en el semiplano $x \geqslant x_0$.

Razonando del mismo modo que se hizo para el caso de la convergencia simple, es fácil establecer que, en lo que se refiere a una serie arbitraria de Dirichlet, existen tres posibilidades:

a′) la serie no converge absolutamente en ningún punto del plano;

b′) existe una recta $x = A$, $A \geqslant C$, tal que en el semiplano $x > A$ la serie es absolutamente convergente mientras que en el semiplano $x < A$ la serie no converge absolutamente en ningún punto;

c′) la serie es absolutamente convergente en todos los puntos del plano.

Llamando al número A **abscisa de convergencia absoluta** de la serie de Dirichlet y al semiplano $x > A$, **semiplano de convergencia absoluta**, podemos considerar los casos a′) y c′) como casos límites, en los cuales $A = +\infty$ y $A = -\infty$, respectivamente.

Si los exponentes λ_n *satisfacen a la condición complementaria*

$$L = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} < +\infty \qquad (2.2:7)$$

(esta condición se cumple tanto en el caso de la serie ordinaria de Dirichlet, para la cual $\lambda_n = \ln n$ y $L = 1$, como en el caso correspondiente a la serie de potencias, para la cual $\lambda_n = n$ y $L = 0$), *entonces la abscisa de convergencia C y la abscisa de convergencia absoluta A satisfacen a la condición*

$$0 \leqslant A - C \leqslant L. \tag{2.2:8}$$

En efecto, sea $C < +\infty$. Tomemos un punto $x = C + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$; como x pertenece al semiplano de convergencia de la serie de Dirichlet, se tiene, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n e^{-\lambda_n(C+\varepsilon)} = 0$ y, por consiguiente, la sucesión $\{a_n e^{-\lambda_n(C+\varepsilon)}\}$ está acotada: $|a_n e^{-\lambda_n(C+\varepsilon)}| < M$. Por lo tanto, para los puntos $x_1 = C + L + 3\varepsilon$, tendremos:

$$|a_n e^{-\lambda_n(C+L+3\varepsilon)}| = |a_n e^{-\lambda_n(C+\varepsilon)}| \, e^{-\lambda_n(L+2\varepsilon)} < M e^{-\lambda_n(L+2\varepsilon)}.$$

Pero, para valores de $n > N$ suficientemente grandes, en virtud de (1.2:7), se tiene:

$$\frac{\ln n}{\lambda_n} < L + \varepsilon,$$

es decir,

$$\ln n < (L+\varepsilon)\,\lambda_n \quad \text{y} \quad e^{-\lambda_n(L+2\varepsilon)} = |e^{-\lambda_n(L+\varepsilon)}|^{\frac{(L+2\varepsilon)}{L+\varepsilon}} < \frac{1}{n^{1+\delta}},$$

donde $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L+\varepsilon} > 0$. Así, pues, para $n > N$ se verifican las desigualdades

$$|a_n e^{-\lambda_n(C+L+3\varepsilon)}| < \frac{M}{n^{1+\delta}},$$

de donde se deduce que la serie de Dirichlet es absolutamente convergente en el punto $x_1 = C + L + 3\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por consiguiente,

$$C + L + 3\varepsilon \geqslant A,$$

o bien, pasando a límites para $\varepsilon \to 0$:

$$A - C \leqslant L,$$

que es lo que se quería demostrar.

Los números A y C pueden ser, verdaderamente, distintos entre sí, como esto se deduce del ejemplo de la serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}. \tag{2.2:9}$$

Esta es una serie ordinaria de Dirichlet, para la cual $L = 1$, y, por consiguiente, en virtud de lo demostrado, tiene que ser:

$$A - C \leqslant 1.$$

Evidentemente, la serie (2.2:9) es divergente en el punto $z = 0$. Por otra parte, en cada punto $z = \delta > 0$ sus términos representan números reales, decrecientes en valor absoluto, que tienden a cero y son alternativamente positivos y negativos. Por consiguiente, (según el criterio de Leibniz), la serie es convergente. De aquí se deduce que la abscisa de convergencia de la serie es

$C = 0$. Pero en los puntos $z = x = \delta > 0$ para $\delta \leqslant 1$ la serie converge no absolutamente, puesto que la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\delta}$ es divergente si $\delta \leqslant 1$. Por otra parte, si $\delta > 1$, la serie de valores absolutos $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\delta}$ es convergente. Así, pues, la abscisa de convergencia absoluta de la serie (2.2:9) $A = 1$. Vemos, pues, que para la serie (2.2:9) existe una franja $0 < x < 1$, en la cual ésta es convergente pero no absolutamente.

Cuando $L = 0$ (como ya se indicó, la serie de Taylor corresponde a este caso), los números A y C coinciden, lo cual se deduce de la desigualdad (2.2:8).

Por lo tanto, para las series de Dirichlet que satisfacen a la condición

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln z}{\lambda_n} = 0, \tag{2.2:10}$$

el semiplano de convergencia es a la vez el semiplano de convergencia absoluta.

Demostremos que *con la condición* (2.2:10), *el valor común de los números A y C se expresa por la fórmula*

$$A = C = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}, \tag{2.2:11}$$

que es una analogía (y a la vez una generalización) de la fórmula de Cauchy — Hadamard.

En efecto, sea $\overline{\lim} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = \Lambda < +\infty$. Tomemos un punto arbitrario $z_0 = x_0 + iy_0$ en el semiplano $x > \Lambda$, y sea $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}(x_0 - \Lambda)$. Entonces, debido a la definición del número Λ, para $n > N_1(\varepsilon)$, se tiene:

$$\frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} < \Lambda + \varepsilon \quad \text{o sea} \quad |a_n| < e^{\lambda_n(\Lambda+\varepsilon)}.$$

Por consiguiente, para $n > N_1(\varepsilon)$ se verifican las desigualdades

$$|a_n e^{-\lambda_n z_0}| = |a_n| e^{-\lambda_n x_0} < e^{-\lambda_n (x_0 - \lambda - \varepsilon)} < e^{-2\lambda_n \varepsilon}.$$

Pero de la condición (2.2:10) se deduce que para $n > N_2(\varepsilon)$

$$\frac{\ln n}{\lambda_n} < \varepsilon, \text{ es decir, } n < e^{\lambda_n \varepsilon}, \text{ o sea, } e^{-\lambda_n \varepsilon} < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, si $n > N = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$, obtenemos:

$$|a_n e^{-\lambda_n z_0}| < \frac{1}{n^2},$$

lo cual significa que la serie de Dirichlet es absolutamente convergente en el punto z_0, el cual es un punto arbitrario del semiplano $x > \Lambda$; así, pues, $A = C \leqslant \Lambda$.

Por otra parte, si el punto $z_1 = x_1 + iy_1$ pertenece al semiplano $x < \Lambda$, o sea, si $x_1 < \Lambda$, entonces para ε, $0 < \varepsilon < \Lambda - x_1$, tiene que existir una sucesión de números naturales $\{n_h\}$ tales, que

$$\frac{\ln |a_{n_h}|}{\lambda_{n_h}} > \Lambda - \varepsilon > x_1, \quad \text{o sea,} \quad |a_{n_h}| > e^{\lambda_{n_h} x_1}.$$

Entonces tendremos:

$$|a_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} z_1}| = |a_{n_k}| e^{-\lambda_{n_k} x_1} > e^{\lambda_{n_k} x_1} e^{-\lambda_{n_k} x_1} = 1.$$

En resumen, la condición necesaria para la convergencia de la serie (2.2:1) no se cumple en ningún punto z_1 perteneciente al semiplano $x < \Lambda$. Por consiguiente, la serie de Dirichlet es divergente en este semiplano. Hemos obtenido que $\Lambda \leqslant A = C$. Confrontando los resultados obtenidos, hallamos finalmente que:

$$A = C = \Lambda.$$

La fórmula (2.2:11) queda establecida.

2.3. Sea E un conjunto infinito de puntos arbitrario, cuyos puntos son todos de acumulación para E (E *es un conjunto denso en sí*). Diremos que una función $f(z)$, definida y uniforme en E, es *localmente analítica en* E, si para cada punto $z_0 \in E$ existe una serie de potencias $\sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n$ y un entorno U_0 tales, que en todos los puntos de E pertenecientes a U_0, la función $f(z)$ se expresa en forma de una serie

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n.$$

Cuando E es un recinto, el concepto de función localmente analítica coincide con el concepto de función uniforme y analítica en el recinto.

Como ejemplo, consideremos una división del plano en cuadrados $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_n, \ldots$ con los lados paralelos a los ejes de coordenadas y de longitud igual a uno; supongamos que E es el conjunto de los puntos interiores de todos estos cuadrados. Entonces, haciendo $f(z) = z^n$ para $z \in \Delta_n$, obtenemos una función que es localmente analítica en E.

Sea $E = O$ un conjunto abierto arbitrario. Si es conexo, entonces O es un recinto; si es desconexo, entonces O consta de un conjunto finito o numerable de recintos que carecen de puntos comunes dos a dos. Consideremos alguna división del plano en cuadrados iguales, con los lados paralelos a los ejes coordenados, tal que el origen de coordenadas sea el vértice de uno de el los. Tomemos solamente aquellos cuadrados que pertenecen a O junto con los ocho cuadrados adyacentes al mismo. Los puntos situados en el interior de los cuadrados elegidos, los puntos de los lados que son comunes a dos cuadrados de este tipo y los vértices, comunes para cuatro cuadrados, forman un conjunto abierto O' tal, que $\overline{O'} \subset O$ (fig. 68).

Supongamos que la longitud del lado del cuadrado de la división es igual a $\frac{1}{3^n}$. Designemos con O_n la intersección del conjunto O' con el cuadrado $-3^n < x < 3^n$, $-3^n < y < 3^n$.

O_n es un conjunto abierto acotado tal, que $\overline{O}_n \subset O$. La frontera del conjunto O_n consta de un número finito de curvas cerradas de Jordan rectificables, cada una de las cuales está formada por un número finito de segmentos rectilíneos.

Además, evidentemente, se cumplen las siguientes propiedades:

1) O_n junto con su frontera está situado en el interior de O_{n+1};

2) para todo conjunto cerrado acotado F, $F \subset O$, se puede hallar un número positivo $N(F)$ tal, que para $n \geqslant N(F)$, $F \subset O_n$.

Expresando estas propiedades, diremos que $\{O_n\}$ es *una sucesión creciente de conjuntos abiertos que aproximan a* O.

Sea $f(z)$ una función localmente analítica en O. Designando con Γ_m la frontera del conjunto O_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, para $z \in \overline{O}_m$, tendremos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{m+1}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{2.3:1}$$

Aquí la integral sobre Γ_{m+1} se debe entender como la suma de integrales tomadas sobre las curvas cerradas de Jordan rectificables separadas, de las cuales se compone Γ_{m+1}. Si $z \in \overline{O}_m$, el punto z estará situado en el interior de una componente O_{m+1}, cuya frontera designaremos con γ. Entonces la integral $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} =$ $= f(z)$, mientras que las integrales análogas sobre las fronteras de las demás

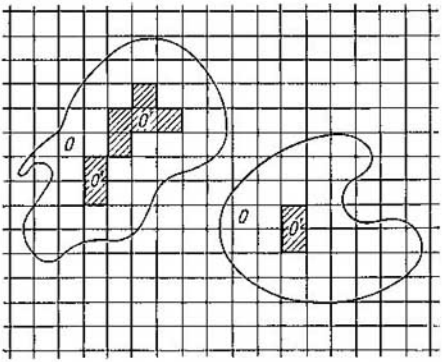

FIG. 68

componentes O_{m+1} serán iguales a cero. Sumándolas todas estas conjuntamente obtenemos la igualdad (2.3:1). Demostremos que para un $\varepsilon > 0$ arbitrario se puede hallar para la integral (2.3:1) una suma integral tal

$$S^{(m+1)}(z) = S^{(m+1)}(z, \varepsilon),$$

que para todos los puntos z del conjunto $\overline{Q}_m$ se cumpla la desigualdad:

$$|f(z) - S^{(m+1)}(z, \varepsilon)| < \varepsilon. \tag{2.3:2}$$

Esto se deduce del teorema de Vitali (ap. 1.2). En efecto, formemos para la integral (2.3:1) una sucesión de sumas integrales

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{n} \frac{f(\zeta_h')}{\zeta_h' - z} (\zeta_h'' - \zeta_h') \right\},$$

convergente hacia el mismo. Aquí ζ_h' y ζ_h'' son los puntos inicial y final, respectivamente, del arco σ_h perteneciente a la división de Γ_{m+1}. Generalmente, ζ_h'' coincide con ζ_h', pero esto no ocurre cuando σ_h y σ_{h+1} pertenecen a distintas curvas que forman Γ_{m+1} (no olvidemos que Γ_{m+1} puede ser un conjunto desconexo). Para que la sucesión de las sumas integrales sea uniformemente convergente en $\overline{O}_m$ es suficiente, según el teorema de Vitali, que esta sucesión esté uniformemente acotada en el interior de O_{m+1}. Pero esto, verdaderamente, es así, puesto que para cualquier conjunto cerrado $F \subset O_{m+1}$, se tiene:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\zeta_k')}{\zeta_k' - z} (\zeta_k'' - \zeta_k') \right| \leqslant \frac{M_{m+1}}{2\pi\delta(F)} L_{m+1} \quad (n = 1, 2 \ldots),$$

donde $M_{m+1} = \max |f(z)|$ en Γ_{m+1}, $\delta(F)$ es la distancia desde F hasta Γ_{m+1} y L_{m+1} es la longitud de Γ_{m+1}. Por esta razón, para todo $\varepsilon > 0$ se puede hallar un $N(\varepsilon)$ tal, que para $n \geqslant N(\varepsilon)$ cada una de las sumas integrales consideradas se puede tomar por $S^{(m+1)}(z, \varepsilon)$ en la desigualdad (2.3:2).

Haciendo $\varepsilon = \varepsilon_m$, $\varepsilon_m \to 0$ para $m \to \infty$, obtendremos una sucesión de funciones racionales $S^{(m+1)}(z) = S^{(m+1)}(z, \varepsilon_{m+1})$ que converge uniformemente hacia $f(z)$ en cada conjunto cerrado $\overline{O}_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) y que, por consiguiente, converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de O. En resumen, obtenemos el siguiente teorema:

Para cualquier conjunto abierto O y para cualquier función uniforme $f(z)$, localmente analítica en O, existe una sucesión de funciones racionales $R_n(z) = S^{(n+1)}(z)$ que converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de O.

L e m a. *Sea F un conjunto cerrado acotado y ζ, un punto situado fuera de F. Sea $R(z)$ una función racional con el único polo en ζ: $R(z) = \frac{P(z)}{(z-\zeta)^k}$* (el grado del polinomio $P(z)$ no es superior a k). *Si el punto $\mathfrak{z}$ pertenece al mismo recinto g, adjunto con F, al cual pertenece también el punto ζ, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede construir una función racional $\widetilde{R}(z)$: $\widetilde{R}(z) = \frac{\widetilde{P}(z)}{(z-\mathfrak{z})^{\widetilde{k}}}$* (el grado de $\widetilde{P}(z)$ no es superior a $\widetilde{k}$) *tal que* $|\widetilde{R}(z) - R(z)| < \varepsilon$ $(z \in F)$.

Para demostrar esto, unamos los puntos ζ y $\mathfrak{z}$ en el interior de g por una curva continua γ y designemos por ρ, $\rho > 0$, la distancia entre γ y F. Dividiendo γ en arcos $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, cuyos diámetros sean menores que $\frac{\rho}{2}$ y designando los puntos de división mediante $\zeta_0 = \zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_m = \mathfrak{z}$, formemos una función racional

$$R_1(z) = \frac{P(z)}{(z-\zeta)^k} \left[1 - \left(\frac{\zeta - \zeta_1}{z - \zeta_1}\right)^{n_1}\right]^k = \frac{P_1(z)}{(z-\zeta_1)^{n_1 k}}$$

(el grado de $P_1(z)$ no es superior a $k + n_1 k - k = n_1 k$). Para $z \in F$, tendremos:

$$|R_1(z) - R(z)| = |R(z)| \left| \left[1 - \left(\frac{\zeta - \zeta_1}{z - \zeta_1}\right)^{n_1}\right]^k - 1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \left[\binom{k}{1} \left(\frac{\frac{\rho}{2}}{\rho}\right)^{n_1} + \ldots \right] < M \frac{2^k}{2^{n_1}},$$

donde $M = \max\limits_F |R(z)|$.

Tomando n_1 suficientemente grande, obtendremos que

$$|R_1(z) - R(z)| < \frac{\varepsilon}{m} \quad (z \in F).$$

Reiterando este razonamiento, en la m-ésima vez obtendremos la función pedida $\widetilde{R}(z) = \widetilde{R}_m(z)$.

Teorema de Runge. *Sea O un conjunto (finito o numerable) de recintos simplemente conexos sin puntos comunes dos a dos, que no contienen al punto ∞. Para cada función $f(z)$, uniforme y localmente analítica en O, se puede construir una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$ que converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de O.*

Obsérvese que, en las condiciones del teorema, cada componente del conjunto O_n representa un recinto simplemente conexo, puesto que la frontera de

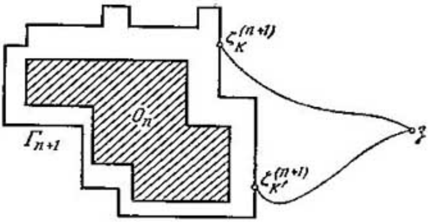

FIG. 69

tal componente es una curva cerrada de Jordan perteneciente a una de las componentes del conjunto O. Por lo tanto, cada punto de la frontera Γ_{n+1} del conjunto O_{n+1}, y, en particular, cada punto $\zeta_h'^{(n+1)}$, puede unirse mediante un arco de Jordan que no tenga puntos comunes con $\overline{O}_n$, con un mismo punto $\mathfrak{z}$ situado fuera del círculo $|z| < R_n$ que contiene a $\overline{O}_n$ (fig. 69). Aplicando el lema a las funciones racionales

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta_k'^{(n+1)})}{\zeta_k'^{(n+1)}-z}\,(\zeta_{k+1}''^{(n+1)}-\zeta_k'^{(n+1)}) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N^{(n+1)})$$

para $\varepsilon = \frac{\varepsilon_n}{N^{(n+1)}}$, construyamos una función racional $\widetilde{S}_n(z)$ con el único polo en $\mathfrak{z}$: $\widetilde{S}_n(z) = \frac{\widetilde{P}(z)}{(z-\mathfrak{z})^{\widetilde{n}}}$ (el grado de $\widetilde{P}(z)$ no es superior a $\widetilde{n}$), que satisfaga en todos los puntos del conjunto $\overline{O}_n$ a la desigualdad:

$$|\widetilde{S}_n(z) - S^{(n+1)}(z)| < \varepsilon_n$$

y, por consiguiente, a la desigualdad:

$$|f(z) - \widetilde{S}_n(z)| < 2\varepsilon_n.$$

Pero la función $\widetilde{S}_n(z)$ es analítica en el círculo $|z| < R_n$, y, por consiguiente, en el conjunto $\overline{O}_n$ situado en el interior de este círculo se la puede sustituir por una serie de potencias. Tomando un segmento $P_n(z)$ de la serie de potencias suficientemente grande, tendremos:

$$|f(z) - P_n(z)| < 3\varepsilon_n, \qquad z \in \overline{O}_n.$$

La sucesión $\{P_n(z)\}$ satisface a todas las condiciones del teorema.

C o r o l a r i o. *Sea P un conjunto perfecto acotado cuyo complemento C respecto del plano ampliado es conexo, es decir, es un recinto. Entonces, para cualquier función $f(z)$, uniforme y localmente analítica en P, y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $Q(z)$ tal, que*

$$|f(z)-Q(z)| < \varepsilon \qquad (z \in P).$$

D e m o s t r a c i ó n. Para cada punto z_0, $z_0 \in P$, existe un círculo K_{z_0} de radio ρ_{z_0} con el centro en z_0 tal, que en todos los puntos del conjunto P situados en el interior de este círculo, $f(z)$ se representa por una serie de potencias

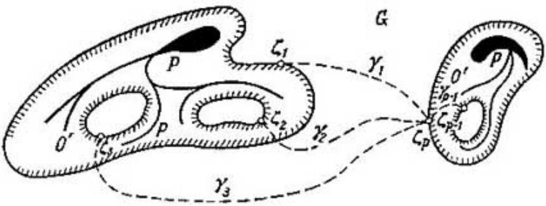

FIG. 70

de $z-z_0$. De un cubrimiento del conjunto P mediante círculos $\widetilde{K}_{z_0}: |z-z_0| < \frac{1}{2}\rho_{z_0}$ elegimos un subcubrimiento finito: $\widetilde{K}_{z_1}, \ldots, \widetilde{K}_{z_p}$. La unión de estos círculos forma un conjunto abierto O' que contiene a P. Si dos círculos $\widetilde{K}_{z_i}$ y $\widetilde{K}_{z_j}$ tienen una parte común, entonces, de la desigualdad $|z_i - z_j| < \frac{1}{2}(\rho_{z_i} + \rho_{z_j})$ se desprende que $|z_i - z_j| < \max(\rho_{z_i}, \rho_{z_j})$. Sea, por ejemplo, $\max(\rho_{z_i}, \rho_{z_j}) = \rho_{z_i}$. Entonces el círculo $K_{z_i}: |z - z_i| < \rho_{z_i}$ contiene en su interior a z_j y, por consiguiente, también un conjunto infinito de puntos de P. Las sumas de las series de potencias, dispuestas según $z - z_i$ y $z - z_j$, coinciden en el conjunto de puntos señalado y, por consiguiente, coinciden también en toda la parte común de los círculos $\widetilde{K}_{z_i}$ y $\widetilde{K}_{z_j}$. En resumen, las series de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_j^{(k)}(z-z_j)^k$ $(j = 1, \ldots, p)$, que representan a la función $f(z)$ en sus círculos correspondientes, determinan en O' una función uniforme analítica que coincide con $f(z)$ en P. Si O' es la unión de recintos simplemente conexos, sin puntos comunes dos a dos, entonces no queda más que aplicar el teorema de Runge al conjunto O' y a la función $f(z)$. Supongamos que entre las componentes del conjunto O' hay recintos múltiplemente conexos. La frontera del conjunto O' consta de una cantidad finita p de continuos, sin puntos comunes dos a dos y situados en el recinto G. Tomando un punto en cada uno de ellos —sean éstos $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$— unamos los puntos $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$ con ζ_p por el interior de G mediante arcos de Jordan $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}$. Entonces, $O' - O' \cap (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{p-1}) = O$ será un conjunto abierto, que contiene a P, cuyas componentes serán recintos simplemente conexos sin puntos comunes (fig. 70). No queda más que agregar que $P \subset O \subset O'$, y nos encontramos en condiciones de aplicación del teorema de Runge.

Basándose en el corolario demostrado, es fácil demostrar un teorema más fuerte que el de Runge:

T e o r e m a. *Sea O un conjunto abierto que no contenga al punto ∞ y que represente la unión de unos recintos simplemente conexos sin puntos comunes. Supongamos que P es un conjunto perfecto acotado, sin puntos comunes con O, cuyo complemento es conexo, es decir, es un recinto. Si $f(z)$ es una función uniforme y localmente analítica en O, y $\varphi(z)$ es una función uniforme y localmente analítica en P, entonces se puede construir una sucesión de polinomios que converge hacia $f(z)$ en O* y hacia $\varphi(z)$ en P, y que es uniformemente convergente en todo conjunto $F+P$, donde F es cualquier conjunto cerrado acotado contenido en O.

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $\{O_n\}$ es una sucesión de conjuntos abiertos, construídos para el conjunto O del modo que se indicó anteriormente en la pág. 405 En las condiciones del teorema, cada conjunto O_n es la unión de unos recintos simplemente conexos sin puntos comunes, $\overline{O}_n \subset O$ y, por consiguiente, $\overline{O}_n$ y P no tienen puntos comunes. Por lo tanto, la función $F(z)$, igual a $f(z)$ en $\overline{O}_n$ y a $\varphi(z)$ en P, es uniforme y localmente analítica en el conjunto perfecto $\overline{O}_n + P$. Además, el complemento de $\overline{O}_n + P$ es un conjunto conexo. Por consiguiente, para cualquier $\varepsilon_n > 0$ existe un polinomio $P_n(z)$ que satisface a la condición

$$|F(z) - P_n(z)| < \varepsilon_n, \qquad z \in \overline{O}_n + P.$$

La sucesión $\{P_n(z)\}$ es la buscada.

He aquí tres ejemplos que sirven de ilustración del teorema demostrado.

E j e m p l o 1. Sea dada alguna división del plano en cuadrados, con los lados paralelos a los ejes de coordenadas y de longitud igual a uno. Supongamos, para precisar, que el origen de coordenadas coincide con uno de los vértices de estos cuadrados.

Demostremos, basándose en el teorema de Runge, que se puede construir una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$, convergente en todo el plano, de modo que su límite sea igual a una función entera arbitraria $g(z)$ en el interior de cada cuadrado y sea igual a otra función entera $h(z)$ en los lados.

Consideremos un cuadrado $-n \leqslant x \leqslant n$, $-n \leqslant y \leqslant n$, para un valor natural n arbitrario, y sustituyamos cada uno de los cuadrados de la división considerada por el conjunto de cinco cuadrados y cuatro rectángulos, representados en la fig. 71, donde se muestran también las dimensiones de estas figuras. Evidentemente, cualquier punto del plano, para n suficientemente grande, caerá en el interior de una de estas figuras: el punto situado en los lados de uno de los cuadrados iniciales resultará en el interior de uno de los cuadrados pequeños con el centro en un vértice del cuadrado inicial o en el interior de uno de los rectángulos que se extienden a lo largo de los lados, mientras que el punto situado en el interior del cuadrado inicial resultará en el interior del cuadrado concéntrico con el mismo, cuya longitud del lado es igual a $1 - \dfrac{2}{3n}$.

El conjunto de las figuras construidas para un valor dado n, es un conjunto perfecto acotado F_n, cuyo complemento es conexo. Definamos en este conjunto una función uniforme y localmente analítica $f_n(z)$, haciendo $f_n(z) = g(z)$ en los cuadrados concéntricos con los iniciales, y $f_n(z) = h(z)$ en los demás cuadrados y rectángulos que están en la periferia respecto de los iniciales. En virtud del corolario del teorema de Runge, existe un polinomio $P_n(z)$ que satisface a la desigualdad

$$|f_n(z) - P_n(z)| < \frac{1}{n}, \qquad z \in F_n.$$

Evidentemente, la sucesión $\{P_n(z)\}$ satisface a todas las condiciones del problema planteado.

E j e m p l o 2. Construyamos mediante el teorema de Runge una función entera $f(z)$ que posea las propiedades siguientes: cualquiera que sea el recinto acotado simplemente conexo G y la función analítica en el mismo $\varphi(z)$, se puede hallar una sucesión de números naturales $\{n_k\}$ tal, que la sucesión $\{f(z+n_k)\}$ converge uniformemente hacia $\varphi(z)$ en el interior de G. En otras palabras, la función entera buscada es una función universal, mediante la cual (efectuando

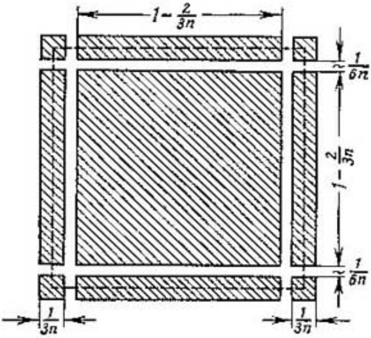

FIG. 71

solamente traslaciones del plano z en las magnitudes respectivas n_k) se pueden aproximar en cualquier recinto simplemente conexo cualesquiera funciones analíticas.

Para la construcción, consideremos todos los polinomios posibles con coeficientes cuyas partes reales e imaginarias sean todas números racionales. Evidentemente, el conjunto de todos estos polinomios es numerable, de modo que puede disponerse en forma de una sucesión: $\{\Pi_n(z)\}$.

Consideremos ahora una sucesión de círculos cerrados K_n: $|z-n^3|\leqslant n$. Estos no tienen puntos comunes y cada uno de ellos, para $n>1$, está contenido en el anillo circular

$$(n-1)^3+(n-1)^2+(n-1)+1<|z|<n^3+n^2+n+1.$$

Tomemos ahora un polinomio arbitrario $P_1(z)$; suponiendo que ya está definido el polinomio $P_{n-1}(z)$ $(n>1)$, definiremos el siguiente polinomio $P_n(z)$ mediante el teorema de Runge, de modo que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$|P_n(z)-P_{n-1}(z)|<\frac{1}{2^n} \quad \text{para} \quad |z|<(n-1)^3+(n-1)^2+(n-1)+1,$$

$$|P_n(z)-\Pi_n(z-n^3)|<\frac{1}{2^n} \quad \text{para} \quad |z-n^3|\leqslant n.$$

Evidentemente, la serie de polinomios

$$P_1(z)+\sum_{2}^{\infty}[P_n(z)-P_{n-1}(z)]=f(z)$$

es uniformemente convergente en cualquier círculo $|z|<R$, puesto que los módulos de sus términos, comenzando desde uno de ellos, es menor que los términos de la serie convergente $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Por consiguiente, $f(z)$ es una función analítica en el plano finito, es decir, es entera. En cada círculo K_n ésta satisface a la desigualdad

$$|f(z)-\Pi_n(z-n^3)| \leqslant |f(z)-P_n(z)|+|P_n(z)-$$
$$-\Pi_n(z-n^3)| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} |P_k(z)-P_{k-1}(z)|+|P_n(z)-$$
$$-\Pi_n(z-n^3)| < \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

(Aquí hemos utilizado el hecho de que K_n está situado en el interior del círculo $|z|<n^3+n^2+n+1$). Por lo tanto, en el círculo $|z|<n$ tiene que verificarse la desigualdad

$$|f(z+n^3)-\Pi_n(z)|<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Sea G un recinto acotado arbitrario, simplemente conexo y $\varphi(z)$, una función analítica en el mismo. Según el teorema de Runge, existe una sucesión de polinomios $\{p_m(z)\}$, uniformemente convergente hacia $\varphi(z)$ en el interior de G. Pero, para cada polinomio $p_m(z)$ se puede señalar un conjunto infinito de polinomios $\Pi(z)$ con coeficientes cuyas partes reales e imaginarias son números racionales, que satisfacen a la desigualdad

$$|p_m(z)-\Pi(z)|<\frac{1}{m}, \qquad z\in\overline{G}.$$

Los polinomios $\Pi(z)$ pertenecen a la sucesión $\{\Pi_n(z)\}$; como hay una infinidad de ellos, sus índices en esta sucesión son arbitrariamente grandes. Tomemos $\Pi(z)=\Pi_{n_m}(z)$ de modo que el índice n_m sea mayor que m. Obtendremos:

$$|p_m(z)-\Pi_{n_m}(z)|<\frac{1}{m}, \qquad z\in\overline{G}.$$

Evidentemente, la sucesión de polinomios $\{\Pi_{n_m}(z)\}$ converge uniformemente hacia $\varphi(z)$ en el interior de G. No queda más que observar que, si n_m es tan grande que G está contenido en el círculo $|z|<n_m$, entonces, según la construcción misma de la función entera $f(z)$, en el recinto cerrado $\overline{G}$ tiene que cumplirse la desigualdad:

$$|\Pi_{n_m}(z)-f(z+n_m^3)|<\frac{1}{2^{n_m-1}}.$$

Por consiguiente, la sucesión $\{f(z+n_m^3)\}$ también converge uniformement hacia $\varphi(z)$ en el interior de G, de donde se deduce que ésta satisface a todo lo que se pedía en el problema.

Ejemplo 3. Construyamos una función $f(z)$, analítica en el círculo unidad y que no tenga límite en ninguno de los radios al aproximarse al punto correspondiente de la circunferencia unidad (respecto de las funciones de este

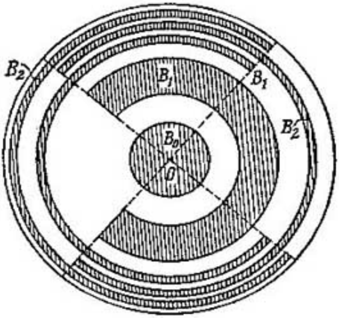

FIG. 72

género, se dice que en ningún sitio tienen **valores frontera radiales**).

Sea

$$0 < r_0 < r_1 < \ldots, < r_n < \ldots, \lim r_n = 1.$$

Definamos los conjuntos abiertos:

$$B_0(|z| < r_0),$$

$$B_1\left(r_1 < |z| < r_2 \quad \text{y} \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}, \quad \text{o bien} \quad r_3 < |z| < \right.$$

$$\left. < r_4 \quad \text{y} \quad |\arg z| > \frac{\pi}{4}\right),$$

$$B_2\left(r_5 < |z| < r_6 \quad \text{y} \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}, \quad \text{o bien} \quad r_7 < |z| < \right.$$

$$\left. < r_8 \quad \text{y} \quad |\arg z| > \frac{\pi}{4}\right)$$

y, en general, B_n:

$$r_{4n-3} < |z| < r_{4n-2} \quad \text{y} \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4},$$

o sea,

$$r_{4n-1} < |z| < r_{4n} \quad \text{y} \quad |\arg z| > \frac{\pi}{4} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(fig. 72). Construyamos ahora una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$ haciendo $P_0(z) = 0$ y sometiendo $P_{2n-1}(z)$ y $P_{2n}(z)$ (suponiendo que ya se han construido $P_0(z), \ldots, P_{2n-2}(z)$) a las condiciones siguientes:

$$|P_{2n-1}(z) - P_{2n-2}(z) < \frac{1}{2^{2n-1}} \quad \text{para} \quad |z| < r_{8n-8}$$

y

$$|P_{2n-1}(z)-1|<\frac{1}{2^{2n-1}} \quad \text{para} \quad z\in B_{2n-1};$$

$$|P_{2n}(z)-P_{2n-1}(z)|<\frac{1}{2^{2n}} \quad \text{para} \quad |z|<r_{8n-4}$$

y

$$|P_{2n}(z)|<\frac{1}{2^{2n}} \quad \text{para} \quad z\in B_{2n}.$$

La sucesión $\{P_n(z)\}$ es uniformemente convergente en todo conjunto cerrado de puntos situado en el círculo unidad. En efecto, tal conjunto F pertenece al círculo $|z|<r_{4n}$ para $n\geqslant N(F)$. Por lo tanto, para $n>N(F)$, se tiene: $|P_{n+1}(z)-P_n(z)|<\frac{1}{2^{n+1}}$ $(z\in F)$. El límite de la sucesión $\{P_n(z)\}$ representa una función $F(z)$ uniforme y analítica en el círculo unidad, que satisface a la condición

$$|F(z)-1|\leqslant|F(z)-P_{2n-1}(z)|+$$

$$+|P_{2n-1}(z)-1|=\left|\sum_{j=2n-1}^{\infty}[P_{j+1}(z)-P_j(z)]\right|+$$

$$+|P_{2n-1}(z)-1|<\sum_{j=2n-1}^{\infty}\frac{1}{2^{j+1}}+\frac{1}{2^{2n-1}}=\frac{1}{2^{2n-2}}$$

donde $z\in B_{2n-1}$, y a la condición

$$|F(z)|\leqslant|P_{2n}(z)|+\left|\sum_{j=2n}^{\infty}[P_{j+1}(z)-P_j(z)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{2n}}+\sum_{j=2n}^{\infty}\frac{1}{2^{j+1}}=\frac{1}{2^{2n-1}} \quad \text{para} \quad z\in B_{2n}$$

Debido a estas desigualdades y a la posición relativa de los conjuntos B_n, sacamos la conclusión de que $F(z)$ no tiene valores frontera al aproximarse a los puntos de la circunferencia unidad por los radios.

Sea O un conjunto abierto que no contenga al punto del infinito, y supongamos que entre las componentes del conjunto O hay al menos un recinto múltiplemente conexo. Entonces, entre los puntos frontera del conjunto O hay tales puntos ζ que pertenecen al interior de alguna curva cerrada de Jordan Γ contenida en O. Si $\{P_n(z)\}$ es la sucesión de polinomios que converge uniformemente en cada conjunto cerrado de puntos contenido en O, entonces, ella converge uniformemente en Γ y, por consiguiente, también en el interior de Γ. Por lo tanto, la función $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(z)$ tiene que ser analítica en el punto ζ.

De aquí sacamos la conclusión de que toda función $f(z)$ que pueda expresarse por una sucesión de polinomios uniformemente convergente en cada conjunto cerrado de puntos de O, necesariamente tiene que ser uniforme y analítica en el conjunto $\widetilde{O}$, el cual representa la unión de todos los recintos mínimos simplemente conexos que contienen a las componentes del conjunto abierto O.

En virtud del teorema demostrado al principio de este apartado, para cada función $f(z)$ localmente analítica en O, existe una sucesión de funciones racionales $\{R_n(z)\}$ (no polinomios) que converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de O. Según la construcción de la función $R_n(z)$, todos sus polos están situados en la frontera Γ_{n+1} del conjunto abierto O_{n+1} que contiene a $\overline{O}_n$ y que está contenido en O. El complemento de $\overline{O}_n$ respecto del plano ampliado consta de un número finito de recintos $D_1^{(n)}, \ldots, D_{\nu_n}^{(n)}$. Cada uno de éstos contiene al menos un punto frontera o exterior a O y, por consiguiente, contiene al menos una poligonal cerrada que forma parte de Γ_{n+1}. Fijemos en los recintos $D_j^{(n)}$ sendos puntos $\alpha_j^{(n)}$ que sean puntos exteriores o puntos frontera de O. Entonces, debido al lema que nos sirvió para demostrar el teorema de Runge, la función $R_n(z)$ se puede sustituir por otra función racional $\widetilde{R}_n(z)$, cuyos polos se agotan todos con los puntos $\alpha_j^{(n)}$ $(j = 1, 2, \ldots, \gamma_n)$, y que satisface a la condición $|\widetilde{R}_n(z) - R_n(z)| < \frac{1}{n}$ en el conjunto $\overline{O}_n$. De aquí se deduce que para la función $f(z)$ existe una sucesión de funciones racionales $\{\widetilde{R}_n(z)\}$, uniformemente convergente hacia $f(z)$ en el interior de O, cuyos polos son todos puntos exteriores o puntos frontera de O y, como se ve de lo anterior, en cierta medida se eligen arbitrariamente. Para apreciar claramente el grado de arbitrariedad, supongamos, en particular, que O es un recinto de conexión finita cuya frontera consta de $p \geqslant 2$ curvas de Jordan, sin puntos comunes dos a dos. Cada una de estas curvas γ_j es la frontera de un recinto sin puntos comunes con O. Tomemos en estos recintos sendos puntos α_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$. Entonces se puede exigir que todos los polos de la función $\widetilde{R}_n(z)$ estén contenidos entre los puntos α_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

Si, por ejemplo, O es un anillo circular: $0 < r < |z - z_0| < R < \infty$, entonces $p = 2$ y se puede hacer: $\alpha_1 = z_0$ y $\alpha_2 = \infty$. La función $\widetilde{R}_n(z)$ tendrá que tener la forma

$$\widetilde{R}_n(z) = \frac{A_0^{(n)} + A_1^{(n)}(z - z_0) + \ldots + A_{\mu_n}^{(n)}(z - z_0)^{\lambda_n}}{(z - z_0)^{\mu_n}} = \sum_{j=-\mu_n}^{\lambda_n - \mu_n} A_j^{(n)}(z - z_0)^j.$$

Por lo tanto, cada función $f(z)$, uniforme y analítica en el anillo circular, puede expresarse en la forma siguiente:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{R}(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-\mu_n}^{\lambda_n-\mu_n} A_j^{(n)}(z - z_0)^j.$$

Ya sabemos que el teorema de Laurent permite afirmar en este caso algo más, pues, según éste, se puede considerar que los coeficientes $A_j^{(n)}$ no dependen de n, de modo que para $f(z)$ resulta el desarrollo:

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j(z - z_0)^j.$$

Teorema de Montel. *Sea O un conjunto abierto arbitrario que no contenga al punto $z = \infty$, y sea $f(z)$ una función uniforme y localmente analítica en este conjunto. Entonces existe una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$ convergente hacia $f(z)$ en O* (por lo general, no uniformemente).

Demostración. Sea $\{O_n\}$ la sucesión creciente de conjuntos abiertos construida anteriormente. Representemos O_n en la forma

$$O_n = O_1 + (O_2 - O_1) + \ldots + (O_n - O_{n-1}) = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n.$$

Debido a la construcción, ω_j está formado por cuadrados iguales de lado $\frac{1}{3^j}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Cada uno de estos cuadrados los sustituimos por nueve rectángulos, señalados en la fig. 71 (sustituyendo la longitud del lado del cuadrado por $\frac{1}{3^j}$). Considerando cada rectángulo como un conjunto cerrado, designemos por R_n la unión de todos los rectángulos correspondientes a los cuadrados $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Fácilmente se ve que R_n es un conjunto perfecto, que no contiene al punto del infinito y cuyo complemento es conexo. Además, $R_n \subset O$ (e incluso $R_n \subset O_{n+1}$), debido a lo cual para cualquier $\varepsilon_n > 0$ se puede hallar un polinomio $P_n(z)$ que satisfaga en R_n a la desigualdad

$$|P_n(z) - f(z)| < \varepsilon_n$$

(véase el corolario del teorema de Runge en la pág. 409).

La sucesión $\{P_n(z)\}$ satisface a todas las condiciones del teorema, si la sucesión $\{\varepsilon_n\}$ tiende a cero.

En efecto, cada punto z, $z \in O$, pertenece a alguno de los conjuntos ω_n. Supongamos que $z \in \omega_j$. Entonces z pertenece a uno de los cuadrados de lado $\frac{1}{3^j}$ que forman ω_j, y si z está situado en uno de los vértices del cuadrado, entonces este punto pertenece a todos los R_n para $n \geqslant j$; si z es distinto de los vértices, pero está situado en la periferia del cuadrado, entonces caerá en el interior de uno de los rectángulos de la periferia para n suficientemente grande y en adelante se mantendrá en el interior de este rectángulo, es decir, pertenecerá de nuevo a todos R_n, comenzando desde uno de ellos; finalmente, si z está situado en el interior del cuadrado principal, entonces caerá en un cuadrado concéntrico para n suficientemente grande y se mantendrá en su interior, es decir, pertenecerá también a todos R_n, comenzando desde uno de ellos. En resumen, en cualquier punto z, $z \in O$, para n suficientemente grande, $n > N(z)$, se verifica la desigualdad: $|P_n(z) - f(z)| < \varepsilon_n$, y, por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(z) = f(z)$ (puesto que $\varepsilon_n \to 0$ para $n \to \infty$).

§ 3. PUNTOS SINGULARES AISLADOS. RESIDUOS. PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

3.1. Consideremos una función uniforme $f(z)$, analítica en un entorno de un punto z_0, a excepción, posiblemente, de este mismo punto. Entonces $f(z)$ es analítica en cierto recinto D:

$$0 < |z - z_0| < R.$$

Sea z_1 un punto del recinto D que satisfaga a la condición: $0 < |z_1 - z_0| < \frac{R}{2}$. En el círculo k_{z_1}: $|z - z_1| < |z_0 - z_1|$,

$f(z)$ es una función uniforme analítica y, por consiguiente, representa un elemento $\varphi_{z_1}(z)$ (cap. tercero, ap. 6.3). Todos los puntos de la circunferencia γ_{z_1}: $|z - z_1| = |z_0 - z_1|$ serán regulares para éste, a excepción, posiblemente, del punto z_0. Demostremos que si el punto z_0 también es regular para el elemento considerado, entonces será también regular para cualquier otro elemento $\varphi_{z_2}(z)$ de la función $f(z)$, correspondiente a un punto cualquiera z_2, $0 < |z_2 - z_0| < \frac{R}{2}$. En efecto, en estas condiciones, todos los puntos de la circunferencia γ_{z_1} serán regulares para $\varphi_{z_1}(z)$, por lo cual la serie de potencias $\sum\limits_0^\infty \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n$ será convergente en cierto círculo K_{z_1}: $|z - z_1| < \rho_1$ cuyo radio $\rho_1 > |z_0 - z_1|$, y por consiguiente, el punto z_0 será interior para K_{z_1}. Como la suma de la serie $\psi(z)$ coincide con $\varphi_{z_1}(z) = f(z)$ en el círculo k_{z_1}, según el teorema de unicidad, ésta tiene que coincidir también con $f(z)$ en todos los puntos comunes a K_{z_1} y D. En particular, ésta coincide con $f(z)$ en todos los puntos de un entorno U del punto z_0 (a excepción del mismo punto z_0, en el cual por ahora la función $f(z)$ no está definida). Tomemos ahora un punto cualquiera $z_2 \neq z_1$, $|z_2 - z_0| < \frac{R}{2}$, el círculo que le corresponde k_{z_2}: $|z - z_2| < |z_2 - z_0|$ y el elemento $\varphi_{z_2}(z)$ (que no representa otra cosa más que la función $f(z)$ en el círculo k_{z_2}). Entonces z_0 está situado en la curcunferencia γ_{z_2}: $|z - z_2| = |z_2 - z_0|$. Como en su entorno U existe una función analítica $\psi(z)$ que coincide con $f(z)$ en todos los puntos de U distintos de z_0, ella coincide con $\varphi_{z_2}(z)$ en los puntos comunes para U y k_{z_2}, de donde se deduce que z_0 es un punto regular para $\varphi_{z_2}(z)$.

Resumiendo, si se consideran todos los elementos que representan la función $f(z)$ en el interior de las circunferencias que pasan por z_0, y el punto z_0 es regular para uno de estos elementos $\varphi_{z_1}(z)$, entonces éste es regular también para cualquier otro elemento $\varphi_{z_2}(z)$. En este caso, llamamos a la función $f(z)$ regular en el punto z_0 y completamos su definición haciendo $f(z_0) = \psi(z_0)$ De este modo, la función resulta analítica en todos los puntos del círculo $|z - z_0| < R$ y, por consiguiente, es desarrollable en serie de Taylor, dispuesta según las potencias de $z - z_0$, convergente en el interior de este círculo.

Consideremos ahora el caso en que el punto z_0 sea singular para algún elemento $\varphi_{z_1}(z)$. Entonces, en nuestras condiciones, éste tiene que ser también singular para cualquier otro elemento $\varphi_{z_2}(z)$. En efecto, suponiendo que fuese regular para $\varphi_{z_2}(z)$, según lo demostrado, tendríamos que sacar la conclusión de que sería también regular para $\varphi_{z_1}(z)$, en contra de lo supuesto.

En resumen, si z_0 es un punto singular para uno de los elementos $\varphi_{z_1}(z)$ que representan nuestra función uniforme $f(z)$ en el interior de una circunferencia que pasa por el punto z_0, entonces será también un punto singular para cualquier otro elemento $\varphi_{z_2}(z)$. En este caso, diremos que la función $f(z)$ posee un punto singular $z=z_0$, o mejor dicho, que posee un **punto singular aislado de carácter uniforme**.

La serie de Laurent es el instrumento principal para la representación y estudio de una función analítica en el entorno de un punto singular aislado z_0. Apliquemos el teorema de Laurent a la función $f(z)$ en el recinto D: $0<|z-z_0|<R$. Este recinto es una degeneración de un anillo circular con el radio interior $r=0$. Obtenemos:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad z\in D, \tag{3.1:1}$$

donde

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

y γ_ρ es una circunferencia de radio ρ, $0<\rho<R$, con el centro en el punto z_0. El desarrollo (3.1:1) puede utilizarse también cuando z_0 es un punto regular. En este caso, la serie de Laurent se convierte en la serie de Taylor, y se tiene: $a_{-1}=a_{-2}=\ldots=0$.

Demostremos la siguiente proposición fundamental.

Teorema. *Para que una función $f(z)$, uniforme y analítica en el recinto D: $0<|z-z_0|<R$, sea regular en el punto z_0, es necesario y suficiente que exista un entorno U del punto z_0 en el cual $f(z)$ esté acotada en valor absoluto.*

Demostración. Supongamos que el punto z_0 es regular para $f(z)$. Entonces, en cierto entorno del punto z_0, $f(z)$ coincide con una función $\psi(z)$ que es analítica en este entorno. Tomando el entorno U de modo que éste quede situado junto con su frontera en el interior del recinto donde $\psi(z)$ es analítica, y teniendo en cuenta que esta última es por lo tanto continua, hallaremos que existe un $M<\infty$ tal, que

$$|f(z)=|\psi(z)|<M, \qquad z\in U.$$

Por lo tanto, queda demostrado que la condición del teorema es necesaria.

Demostremos ahora que es suficiente. Supongamos que existen un entorno U del punto z_0 y un número positivo $M<\infty$ tal, que

$$|f(z)|<M \text{ para todos los puntos } z\in U.$$

Entonces, eligiendo ρ, $0 < \rho < R$, de modo que la circunferencia γ_ρ pertenezca a U, para los módulos de los coeficientes a_n de la serie de Laurent (3.1:1) obtenemos las siguientes acotaciones:

$$|a_n| < \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}}, \quad \text{o sea,} \quad |a_n| < \frac{M}{\rho^n}.$$

Consideremos aquí solamente los coeficientes de las potencias negativas de $z - z_0$, o sea, supongamos que $n < 0$. Evidentemente, cuando ρ tiende a cero (con la única condición de que $0 < \rho < R$), obtenemos:

$$a_n = 0, \quad \text{para} \quad n = -1, \ -2, \ -3, \ \ldots$$

Así, pues, la serie de Laurent se convierte en la serie de Taylor:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n,$$

de donde se deduce que $f(z)$ coincide en el recinto D con una función que es analítica en un entorno del punto z_0 (con la suma de la serie de potencias hallada), es decir, el punto z_0 es regular para $f(z)$.

Del teorema demostrado se deduce que, para que z_0 sea un punto singular aislado de la función $f(z)$, es necesario y suficiente que en cualquier entorno del mismo no esté acotado el módulo $|f(z)|$, es decir, se cumpla la condición

$$\overline{\lim_{z \to z_0}} |f(z)| = \infty. \tag{3.1:2}$$

De aquí que, *a priori*, hay dos posibilidades para el comportamiento de $f(z)$ en un entorno de un punto singular aislado:

a) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;

b) no existe ningún límite (ni finito ni infinito) de la función $f(z)$ cuando z tiende hacia z_0.

Cada uno de estos casos subsiste en la realidad.

Hagamos $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n}$, donde n es un número natural. Evidentemente, esta función es analítica para $0 < |z - z_0|$ y $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Por lo tanto, en este ejemplo se verifica el caso a).

Como segundo ejemplo, tomemos $f(z) = e^{\frac{1}{z - z_0}}$. Esta función también es analítica para $0 < |z - z_0|$, pero, a diferencia del ejemplo anterior, el $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ no existe. En efecto, si, por ejemplo, el punto z está situado en la recta que pasa por el punto z_0 y es paralela al eje real, de modo que $z - z_0 = x - x_0$ es un número real, entonces, para $x > x_0$ y $x \to x_0$, se tiene $e^{\frac{1}{x-x_0}} \to \infty$, y para $x < x_0$ y $x \to x_0$, se tiene, $e^{\frac{1}{x-x_0}} \to 0$. Por lo tanto, en este ejemplo se verifica el caso b). En la fig. 73 está representada la superficie $u = \left|\exp \frac{1}{z}\right|$, que es el relieve de la función considerada (para $z_0 = 0$) *).

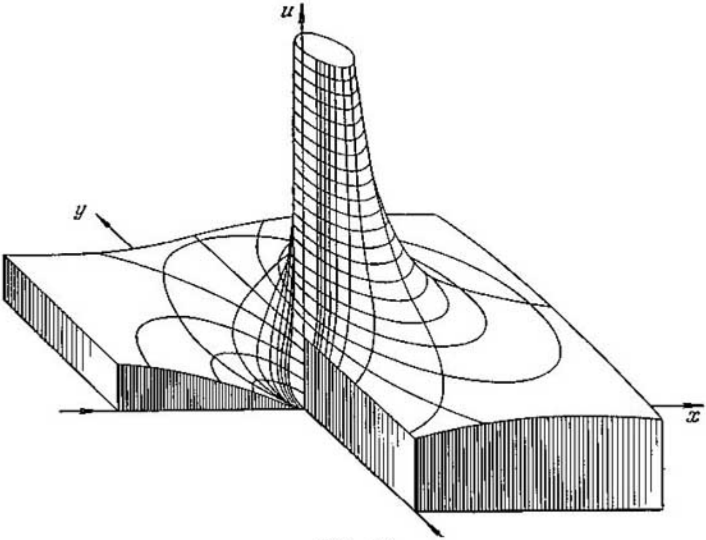

FIG. 73

Un punto singular aislado z_0 de carácter uniforme, para el cual se cumple la condición a): $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, se llama **polo de la función analítica**. En el segundo capítulo ya nos encontramos con los polos de las funciones elementales.

Un punto singular aislado z_0 de carácter uniforme, para el cual se cumple la condición b): $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe (ni finito ni infinito), se llama **punto singular esencial de la función**.

---

*) El dibujo ha sido adoptado de las «Tablas de funciones» de Jahnke y Emde.

Estudiemos detalladamente cada uno de estos dos tipos de puntos singulares.

Sea z_0 un polo de la función $f(z)$. Entonces $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ y, por consiguiente, existe un entorno $|z - z_0| < \delta < R$ del punto z_0, en el cual $f(z)$ satisface a la desigualdad $|f(z)| > 1$. Evidentemente, la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ es analítica en todo este entorno, a excepción, posiblemente, del punto z_0. Pero, como $|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < 1$, de aquí según el teorema de este apartado, se deduce que z_0 es un punto regular de $\varphi(z)$. El valor de esta función en el punto z_0 es igual a $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Por lo tanto, el punto z_0 es un cero de la función $\varphi(z)$.

Recíprocamente; si se sabe que $\varphi(z)$ es una función uniforme y analítica en un entorno del punto z_0, y z_0 es un cero de esta función, siendo $\varphi(z) \not\equiv 0$, entonces se puede señalar un $\Delta > 0$ tan pequeño, que $\varphi(z)$ no posea en el círculo $|z - z_0| < \Delta$ otros ceros, a excepción del punto z_0 (véase el ap. 6.1, cap. tercero). Formemos la función $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$; ésta es uniforme y analítica para $0 < |z - z_0| < \Delta$ y tiende a ∞ cuando z tiende hacia z_0. Por consiguiente, z_0 es un polo de $f(z)$.

Así, pues, queda demostrada la siguiente proposición: *para que el punto z_0 sea un polo de la función $f(z)$ es necesario y suficiente que este punto sea un cero de la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Debido a esta propiedad, la cual establece una correspondencia entre los ceros y los polos, se crea la posibilidad de introducir el concepto de m u l t i p l i c i d a d u o r d e n d e m u l t i p l i c i d a d (abreviadamente, o r d e n) de un polo. Se dirá que z_0 es un polo de orden de multiplicidad k ($k \geqslant 1$) de la función $f(z)$, si este punto es un cero de orden k de la función $\frac{1}{f(z)}$. Cuando $k = 1$, el polo se llamará s i m p l e; cuando $k > 1$, se dirá que es m ú l t i p l e.

En un entorno de un polo de orden k el desarrollo de Laurent tiene un carácter determinado, que observaremos inmediatamente. Demostremos, precisamente, la siguiente proposición:

Para que el punto z_0 sea un polo de orden k de la función $f(z)$, es necesario y suficiente que el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en un entorno del punto z_0 no contenga miembros con potencias inferiores a $-k$, y que el coeficiente de $(z - z_0)^{-k}$ sea distinto de cero. En otras palabras, el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ tiene que tener la forma

$$f(z)=a_{-k}(z-z_0)^{-k}+\ldots+a_{-1}(z-z_0)+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots, \quad (3.1{:}3)$$

donde $a_{-k}\neq 0$.

En efecto, sea z_0 un polo de la función $f(z)$ de orden k. Entonces para $\frac{1}{f(z)}$ tenemos que tener en este punto un cero de orden k, de donde

$$\frac{1}{f(z)}=A_k(z-z_0)^k+A_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots, \qquad A_k\neq 0,$$

en cierto entorno del punto z_0. Por lo tanto,

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^k}\,\frac{1}{A_k+A_{k+1}(z-z_0)+\ldots}. \quad (3.1{:}4)$$

La serie de potencias $A_k+A_{k+1}(z-z_0)+\ldots$ representa una función analítica que no se anula en cierto entorno del punto z_0 (puesto que $A_k\neq 0$). Por esta razón, la función $\frac{1}{A_k+A_{k+1}(z-z_0)+\ldots}$ es analítica en un entorno del punto z_0 y admite un desarrollo de la forma $\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\ldots$, donde $\alpha_0=\frac{1}{A_k}\neq 0$. Poniendo esta última serie en la fórmula (3.1:4), obtenemos para $f(z)$ el desarrollo:

$$f(z)=\alpha_0(z-z_0)^{-k}+\alpha_1(z-z_0)^{-k+1}+\ldots \qquad (\alpha_0\neq 0),$$

el cual, en virtud de la unicidad del desarrollo en serie de Laurent, representa el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$. Este coincide con (3.1:3) salvo las designaciones ($\alpha_n=a_{n-k}$, $n=0, 1, 2, \ldots$).

Así, pues, la condición del teorema demostrado es necesaria. Demostremos ahora que ésta es suficiente. Supongamos que $f(z)$ posee en un entorno del punto z_0 un desarrollo de la forma (3.1:3), donde $a_{-k}\neq 0$. Escribiéndolo en la forma

$$f(z)=\frac{a_{-k}+a_{-k+1}(z-z_0)+\ldots}{(z-z_0)^k},$$

sacamos la conclusión de que

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^k\,\frac{1}{a_{-k}+a_{-k+1}(z-z_0)+\ldots},$$

o bien, sustituyendo la función $\frac{1}{a_{-k}+a_{-k+1}(z-z_0)+\ldots}$ por su desarrollo en serie de Taylor según las potencias de $z-z_0$:

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^k[\beta_0+\beta_1(z-z_0)+\ldots]=$$
$$=\beta_0(z-z_0)^k+\beta_1(z-z_0)^{k+1}+\ldots,$$

donde $\beta_0=\frac{1}{a_{-k}}\neq 0$.

Hemos obtenido que el punto z_0 es un cero de orden k de la función $\frac{1}{f(z)}$. Por consiguiente, este mismo punto es un polo de orden k de la función $f(z)$. El teorema queda demostrado.

Examinemos el caso de un punto singular esencial. El comportamiento de la función en un entorno de un punto singular esencial se caracteriza por la siguiente proposición:

Teorema de Sojotski-Cassorati-Weierstrass *). *Cualquiera que sea el número complejo A* (propio o impropio), *existe una sucesión de puntos $\{z_n\}$, convergente hacia un punto singular esencial z_0, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

Demostración. Si $A=\infty$, el teorema es cierto, puesto que la función $f(z)$ no está acotada en valor absoluto en cualquier entorno del punto singular esencial. Supongamos ahora que $A \neq \infty$; demostremos el teorema por reducción a lo absurdo. Si en un entorno arbitrario del punto z_0 no se pueden hallar puntos en los cuales los valores de la función sean arbitrariamente próximos a A, entonces tienen que existir un entorno $0 < |z - z_0| < \delta$ y un número $\alpha > 0$ tales, que $|f(z) - A| > \alpha$ para $0 < |z - z_0| < \delta$. Examinemos la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$; ésta es analítica en el entorno $0 < |z - z_0| < \delta$. Además, satisface en este entorno a la desigualdad

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} < \frac{1}{\alpha}.$$

Por consiguiente, según el primer teorema de este apartado, $\varphi(z)$ es regular en el punto z_0 y su valor en este punto tiene que ser igual al límite $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)-A}$. Pero $f(z)$ no está acotada en ningún entorno del punto z_0. Por lo tanto, el límite indicado solamente puede ser cero, o sea, $\varphi(z_0) = 0$. En resumen, la función $\frac{1}{f(z)-A}$ tiene un cero en el punto z_0, de donde se deduce que la función $f(z) - A$ y, por consiguiente, también $f(z)$, tiene un polo en este punto. Esto contradice a la condición del teorema, de donde se deduce que este último es cierto.

Ilustremos este teorema con dos ejemplos.

---

*) Este teorema fue publicado, independientemente uno del otro, por Sojotski y el matemático italiano Cassorati, en el año 1868, y por Weierstrass en el año 1876; a continuación, para abreviar, lo llamaremos teorema de Sojotski.

E j e m p l o 1. $f(z) = \operatorname{sen}\frac{1}{z}$. Aquí, el origen de coordenadas es un punto singular esencial. En efecto, si z tiende a cero, $\operatorname{sen}\frac{1}{z}$ no tiende a ningún límite, ni finito ni infinito, lo cual se observa inmediatamente considerando solamente los valores reales de z.

Si $A = \infty$, entonces haciendo, por ejemplo, $z_n = \frac{i}{n}$ y, por consiguiente, $\frac{1}{z_n} = -in$, obtenemos: $\operatorname{sen}\frac{1}{z_n} = -i \operatorname{sh} n \to \infty$ para $n \to \infty$.

Supongamos ahora que $A \neq \infty$. Para obtener la sucesión $\{z_n\}$, de la que se trata en el teorema de Sojotski, resolvamos la ecuación.

$$\operatorname{sen}\frac{1}{z} = A.$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{z} = \operatorname{Arcsen} A = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(iA + \sqrt{1-A^2}),$$

de donde

$$z = \frac{i}{\operatorname{Ln}(iA+\sqrt{1-A^2})} = \frac{i}{\ln|iA+\sqrt{1-A^2}|+2k\pi i}.$$

Haciendo

$$z_n = \frac{i}{\ln|iA+\sqrt{1-A^2}|+2n\pi i}$$

y asignando a n los valores 1, 2, 3, ..., obtenemos una sucesión $\{z_n\}$ que converge hacia cero y satisface a la condición

$$f(z_n) = A \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

E j e m p l o 2. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. En este caso, el origen de coordenadas también es un punto singular esencial, puesto que de nuevo no existe el límite $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$.

Si $A = \infty$, tomamos $z_n = \frac{1}{n}$. Resulta: $f(z_n) = e^n \to \infty$ para $n \to \infty$ es decir, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ satisface a la tesis del teorema de Sojotski para $A = \infty$. Supongamos ahora que $A = 0$. Entonces, haciendo $z_n = -\frac{1}{n}$, tendremos: $f(z_n) = e^{-n}$ para $n \to \infty$, o sea, queda también comprobada la tesis del teorema en este caso. Supongamos, finalmente, que $A \neq 0$, $A \neq \infty$. Aquí es más sencillo elegir los puntos correspondientes z_n resolviendo la ecuación

$$e^{\frac{1}{z}} = A.$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{z} = \operatorname{Ln} A,$$

de donde

$$z = \frac{1}{\operatorname{Ln} A} = \frac{1}{\ln |A| + 2k\pi i}.$$

Haciendo

$$z_n = \frac{1}{\ln |A| + 2n\pi i} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

tendremos una sucesión $\{z_n\}$ que converge hacia cero y satisface a la condición $f(z_n) = A$; por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Del teorema de Sojotski se deduce que, si z_0 es un punto singular esencial de la función $f(z)$ y E_δ es el conjunto de valores que toma la función en un entorno arbitrariamente pequeño $|z - z_0| < \delta$ de este punto, entonces la clausura del conjunto E_δ (es decir, E_δ junto con todos los puntos de acumulación de este conjunto) coincide con el plano complejo ampliado.

En efecto, todo punto A del plano complejo es el límite para una sucesión $\{f(z_n)\}$ de puntos pertenecientes a E_δ, y, por consiguiente, A pertenece a la clausura del conjunto E_δ.

En los ejemplos 1 y 2 se vio que, salvo ciertas excepciones ($A = \infty$ en el primer ejemplo, $A = \infty$ y $A = 0$, en el segundo), en lugar de la sucesión de puntos $\{z_n\}$, para la cual se verifica la igualdad límite

$$\lim_{z_n \to z_0} f(z_n) = A,$$

se consiguen hallar tales sucesiones para las cuales se verifican las igualdades exactas:

$$f(z_n) = A, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Resulta que, en el caso general, también tiene lugar una situación análoga. De esto trata la proposición siguiente:

Teorema grande de Picard. *Si z_0 es un punto singular esencial de la función $f(z)$, entonces para todo $A \neq \infty$, a excepción, posiblemente, de un valor $A = A_0$, existe una sucesión infinita de A-puntos de la función $f(z)$ que converge hacia z_0.*

En el ejemplo $f(z) = \operatorname{sen}\frac{1}{z}$ no hay ningún valor excepcional, en el ejemplo $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ éste es igual a 0, puesto que la función $e^{\frac{1}{z}}$ siempre es distinta de cero.

Este teorema lo demostraremos más adelante (cap. octavo). Señalemos aquí que, como fácilmente se comprueba, el teorema de Sojotski está contenido en las tesis del teorema de Picard.

Del último teorema se deduce que el conjunto de los valores que toma la función $f(z)$ en un entorno arbitrario $|z - z_0| < \delta$ de un punto singular esencial z_0, coincide con todo el plano finito $|z| < \infty$, excluyendo del mismo a lo sumo un punto A_0 (A_0 no depende de δ).

El desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno de un punto singular esencial z_0 tiene que tener, indispensablemente, un conjunto infinito de términos de potencias negativas de $z - z_0$ (se sobrentiende que los coeficientes de éstas son distintos de cero). En efecto, si en este desarrollo no hubiese tales términos, entonces el punto z_0 sería regular para $f(z)$, y si solamente hubiese un número finito de ellos, entonces el punto z_0 sería un polo de $f(z)$ (según el teorema de la pág. 421). Recíprocamente: cada vez que el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno de cierto punto z_0 contenga un conjunto infinito de términos con potencias negativas de $z - z_0$, z_0 será un punto singular esencial de la función $f(z)$. En efecto, éste no puede ser ni regular para $f(z)$ (puesto que no tiene que haber términos con potencias negativas), ni polo (puesto que en este caso tendría que haber solamente un número finito de tales términos).

Como ejemplo, consideremos la función $\exp \frac{1}{z^4}$; ésta admite el siguiente desarrollo, convergente para cualquier $z \neq 0$:

$$\exp \frac{1}{z^4} = 1 + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{2!\, z^8} + \frac{1}{3!\, z^{12}} + \ldots$$

Evidentemente, puede considerarse que éste es el desarrollo de Laurent de la función en el entorno del punto $z = 0$. Como este desarrollo contiene un conjunto infinito de potencias negativas de z, $z = 0$ es un punto singular esencial de la función. Naturalmente, esto mismo puede demostrarse observando el comportamiento de esta función en un entorno del origen de coordenadas. El lector comprobará fácilmente que ella tiende a ∞, cuando z se aproxima al origen de coordenadas manteniéndose en los ejes coordenados, y a 0, cuando z se aproxima al origen de coordenadas, manteniéndose en las bisectrices de los ángulos coordenados. Por consiguiente, $\lim\limits_{z \to 0} \exp \frac{1}{z^4}$ no existe y $z = 0$ es un punto singular esencial de la función $\exp \frac{1}{z^4}$.

De todo lo expuesto se deduce que, para caracterizar un punto singular, desempeña un papel definitivo el conjunto de los términos de potencias negativas en el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno de este punto. Por esta razón, la serie $\sum_{1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}$ se llama **parte principal del desarrollo de Laurent** $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ en el entorno del punto z_0. La serie $\sum_{0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, que consta de todos los términos del desarrollo cuyas potencias son no negativas, representa una función regular en el punto z_0 y, por lo tanto, se llama **parte regular** de la serie de Laurent.

Aplicando las proposiciones enunciadas debe tenerse en cuenta que en ellas se trata solamente de aquellos desarrollos de Laurent que son convergentes en cierto entorno $0 < |z-z_0| < R$ del punto que se estudia.

Como ejemplo, veamos la serie de Laurent:

$$\ldots + \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \ldots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \ldots$$

Esta contiene un conjunto infinito de términos con potencias negativas de z. No obstante, antes de afirmar que $z = 0$ es un punto singular esencial para la suma de la serie, hay que aclarar si es convergente o no lo es en algún entorno de este punto. Obsérvese que la serie considerada representa una suma de dos progresiones: $\sum_{1}^{\infty} z^{-n}$ y $\sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$. La primera de éstas es convergente para $|z| > 1$ y representa la función $\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}$; la segunda es convergente para $|z| < 2$ y representa la función $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2-z}$. Por consiguiente, el recinto de convergencia de la serie dada es el anillo $1 < |z| < 2$, el cual, naturalmente, no es un entorno del origen de coordenadas. La suma de la serie en este anillo es igual a $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z} = \frac{1}{z^2-3z+2}$; para esta función el origen de coordenadas es un punto regular y todos los puntos singulares se reducen a dos polos simples: $z = 1$ y $z = 2$.

3.2. Para determinar rápidamente la posición y el carácter de los puntos singulares de una función en casos concretos conviene tener en cuenta las siguientes proposiciones elementales que se deducen de los teoremas del ap. 3.1.

a) Si $f(z)$ y $\varphi(z) \not\equiv 0$ son dos funciones uniformes y analíticas en un recinto dado G, entonces la función $F(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$ puede tener puntos singulares en el recinto G, precisamente polos, solamente en los ceros de la función $\varphi(z)$. Sea ζ un cero de orden k de la función $\varphi(z)$ $(k \geqslant 1)$ y un cero de orden l de la función $f(z)$ $(l \geqslant 0)$ (si ζ no es un cero de la función $f(z)$, hacemos $l = 0$). Entonces, en un entorno del punto ζ se tiene:

$$F(z) = \frac{\frac{f^{(l)}(\zeta)}{l!}(z-\zeta)^l + \ldots}{\frac{\varphi^{(k)}(\zeta)}{k!}(z-\zeta)^k + \ldots} = (z-\zeta)^{l-k}\,\frac{\frac{f^{(l)}(\zeta)}{l!} + \ldots}{\frac{\varphi^{(k)}(\zeta)}{k!} + \ldots},$$

donde $f^{(l)}(\zeta \neq) \neq 0$ y $\varphi^{(k)}(\zeta) \neq 0$. De esto se deduce que $F(z)$ tiene en el punto ζ un polo de orden $k - l$ si $k > l$, y un punto regular si $k \leqslant l$; además, este último será un cero de la función $F(z)$ de orden $l - k$ si $k < l$.

b) Si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son dos funciones que no tienen en el recinto G otros puntos singulares más que polos, entonces su suma, diferencia, producto y cociente (este último se forma solamente cuando $\varphi(z) \not\equiv 0$) tampoco tienen otros puntos singulares más que polos.

En particular, consideremos la diferencia de estas funciones $f(z) - \varphi(z)$, y sea ζ un punto en cuyo entorno los desarrollos de Laurent de las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ tienen la forma

$$f(z) = \frac{a_{-l}}{(z-\zeta)^l} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-\zeta} + a_0 + a_1(z-\zeta) + \ldots,$$

$$\varphi(z) = \frac{b_{-k}}{(z-\zeta)^k} + \ldots + \frac{b_{-1}}{z-\zeta} + b_0 + b_1(z-\zeta) + \ldots$$

Aquí l y k designan el orden del punto ζ, considerado respectivamente como polo de una u otra función. Para mayor generalidad, supondremos que $l \leqslant 0$ (o bien $k \leqslant 0$) cuando ζ sea un punto regular de $f(z)$ (o bien de $\varphi(z)$), comenzando en este caso el desarrollo con términos de potencias no negativas de $z - \zeta$.

Restando término a término el desarrollo de $\varphi(z)$ del desarrollo de $f(z)$, obtenemos el desarrollo de $f(z) - \varphi(z)$. Evidentemente, el punto ζ será un polo de esta diferencia cuando, y sólo cuando, éste sea un polo de al menos una de las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ ($k \geqslant 1$ o bien $l \geqslant 1$) y no coincidan entre sí las partes principales de los desarrollos de $f(z)$ y $\varphi(z)$. Cuando las partes principales son iguales (es decir, $k = l$, $a_{-k} = b_{-k}$, $\ldots$, $a_{-1} = b_{-1}$), para la diferencia obtenemos el desarrollo:

$$f(z)-\varphi(z)=a_0-b_0+(a_1-b_1)(z-\zeta)+\ldots,$$

de donde se deduce que ζ es un punto regular para $f(z)-\varphi(z)$.

Consideremos ahora la función

$$F(z)=\frac{f(z)}{\varphi(z)} \qquad (\varphi(z)\neq 0).$$

Esta puede tener puntos singulares solamente en los ceros de la función $\varphi(z)$ o en los polos de la función $f(z)$. Sea ζ un cero o un polo de las funciones $f(z)$ o $\varphi(z)$. En cualquier caso podemos escribir:

$$f(z)=(z-\zeta)^l\,[a_0+a_1(z-\zeta)+\ldots],$$
$$\varphi(z)=(z-\zeta)^k\,[b_0+b_1(z=\zeta)+\ldots],$$

donde l y k son números enteros (positivos, negativos o ceros), y entre corchetes figuran series de potencias que son convergentes en cierto entorno del punto ζ y cuyos términos independientes son diferentes de cero ($a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$). En estas condiciones, $k>0$ corresponde al caso en que $\varphi(z)$ tiene un cero de orden k en el punto ζ, $k=0$ significa que $z=\zeta$ es un punto regular en el cual $\varphi(z)\neq 0$, y, finalmente, $k<0$ significa que $z=\zeta$ es un punto singular de la función $\varphi(z)$, precisamente, es un polo de orden $-k$.

Pongamos los desarrollos de $f(z)$ y $\varphi(z)$ en la fórmula para $F(z)$. Tendremos:

$$F(z)=(z-\zeta)^{l-k}\,\frac{a_0+a_1(z-\zeta)+\ldots}{b_0+b_1(z-\zeta)+\ldots}$$

Evidentemente, para $l\geqslant k$ el punto ζ será regular para $F(z)$ (en particular, para $l>k$ será un cero de orden $l-k$), mientras que para $l<k$ será un polo de la función $F(z)$ de orden $k-l$.

c) Sea $f(z)$ una función uniforme que no tenga en el recinto G otras singularidades más que polos. Entonces la derivada de esta función $f'(z)$ no puede tener tampoco en el recinto G otras singularidades más que polos. Precisando, $f'(z)$ tiene un polo en cada polo de la función $f(z)$, cuyo orden es una unidad mayor que el orden del polo de $f(z)$.

En efecto, sea ζ un polo de la función $f(z)$ de orden $k\geqslant 1$. Entonces, en un entorno U del punto ζ, $0<|z-\zeta|<R$, la función $f(z)$ admite el desarrollo:

$$f(z)=\frac{A_{-k}}{(z-\zeta)^k}+\ldots+\frac{A_{-1}}{z-\zeta}+A_0+A_1(z-\zeta)+\ldots \qquad (A_{-k}\neq 0).$$

Como los términos de este desarrollo son funciones analíticas en U y el desarrollo mismo es uniformemente convergente en el interior del recinto U (debido a la propiedad de la serie de Laurent), éste puede derivarse término a término en U. Resulta:

$$f'(z) = -\frac{kA_{-k}}{(z-\zeta)^{k+1}} - \ldots - \frac{A_{-1}}{(z-\zeta)^2} + A_1 + \ldots \qquad (kA_{-k} \neq 0).$$

Hemos obtenido para $f'(z)$ el desarrollo de Laurent en un entorno del punto ζ, de donde se ve que ζ es un polo de orden $k+1$ para la derivada $f'(z)$.

d) Sea $f(z) \not\equiv$ const una función uniforme que no tenga en el recinto G otros puntos singulares más que polos, y sea $A \neq \infty$ un número complejo arbitrario. Entonces, la derivada l o g a r í t m i c a de la función $f(z) - A$

$$\frac{d\{\mathrm{Ln}[f(z)-A]\}}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)-A}$$

no tiene en el recinto G otros puntos singulares más que polos; precisando, ésta tiene polos simples en todos los polos de la función $f(z)$ y en todos los A-puntos de esta última (es decir, en todos los ceros de la función $f(z) - A$).

Para comprobar esta proposición, podemos aludir al caso general considerado anteriormente en b). Ya vimos que el cociente de dos funciones puede tener polos en los ceros del denominador o en los polos del numerador. Sea $z = \zeta$ un cero de orden k del denominador, es decir, un A-punto de la función $f(z)$ de orden k. Entonces

$$f(z) - A = a_0(z-\zeta)^k + a_1(z-\zeta)^{k+1} + \ldots \qquad (k \geqslant 1,\ a_0 \neq 0).$$

De aquí se deduce que

$$f'(z) = ka_0(z-\zeta)^{k-1} + a_1(k+1)(z-\zeta)^k + \ldots,$$

es decir, el punto ζ es un cero de orden $k-1$ del numerador de la fracción. De esto se deduce que este punto es un polo simple de la derivada logarítmica.

Por otra parte, sea $z = \zeta$ un polo del numerador $f'(z)$. Esto es posible solamente si ζ es un polo de la función $f(z) - A$; además, como ya se vio en el caso c), el orden de multiplicidad del polo para $f'(z)$ será una unidad mayor que el orden del mismo polo para $f(z) - A$. Por consiguiente, para la derivada logarítmica obtenemos de nuevo un polo simple en el punto ζ.

e) Si ζ es un punto regular o un polo para la función $f(z) \not\equiv 0$, y para la función $\varphi(z)$ ζ es un punto singular esencial, entonces ζ será también un punto singular esencial para cada una de las funciones $\varphi(z) \pm f(z)$, $f(z)\,\varphi(z)$ y $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$.

En efecto, designemos estas últimas funciones mediante $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ y $\psi_3(z)$, respectivamente. Entonces tendremos:

$$\varphi(z)=\psi_1(z)\pm f(z), \quad \varphi(z)=\frac{\psi_2(z)}{f(z)}, \quad \varphi(z)=\psi_3(z)f(z).$$

Si se supone que $\psi_j(z)$ $(j=1,\ 2,\ 3)$ tiene un punto regular o un polo para $z=\zeta$, entonces la función $\varphi(z)$ también tendrá un punto regular o un polo para $z=\zeta$, lo cual contradice a la hipótesis. Así, pues, el punto $z=\zeta$ no puede ser regular para las funciones $\psi_j(z)$. Como estas funciones son uniformes y analíticas en cierto entorno del punto ζ, a excepción de este punto, éste tiene que ser un punto singular aislado de carácter uniforme para $\psi_j(z)$. Pero como ya comprobamos, el punto ζ no puede ser un polo para $\psi_j(z)$. Por consiguiente, éste es un punto singular esencial para cada una de estas funciones.

f) Si ζ es un punto singular esencial para la función $\varphi(z)$, entonces la función $\frac{1}{\varphi(z)}$ tendrá en ζ, o bien un punto singular esencial, o bien un *punto singular no aislado: un punto de acumulación de polos*.

En efecto, hay dos posibilidades: o bien existe un entorno del punto ζ en el cual $\varphi(z)$ no se anula, o bien tal entorno no existe. En el primer caso, la función $\psi(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ será analítica en cierto entorno del punto ζ, a excepción del mismo punto ζ. Este punto no puede ser para $\psi(z)$ ni regular ni polo; en caso contrario ζ sería polo o un punto regular para $\varphi(z)=\frac{1}{\psi(z)}$, en contra de la hipótesis. Por consiguiente, ζ es un punto singular esencial para $\psi(z)$.

En el segundo caso, en cada entorno del punto ζ existen ceros de la función $\varphi(z)$ y, por consiguiente, en el mismo entorno existen polos de la función $\psi(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$. De aquí se deduce que cualquier entorno del punto ζ contiene puntos singulares (precisamente, polos) de la función $\psi(z)$. Por lo tanto, ζ es en el caso considerado un punto singular no aislado para $\psi(z)$. Este es un punto de acumulación de polos.

3.3. Consideremos una función uniforme $f(z)$, analítica en todos los puntos del exterior $|z|>r$ de cierto círculo con el centro en el origen de coordenadas, a excepción, posiblemente, del punto del infinito. Realizando la transformación $z=\frac{1}{\zeta}$ reducimos el estudio de tal función al estudio de la función $f^*(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, la cual es analítica en todos los puntos de un entorno del origen de coordenadas, a excepción, posiblemente, del origen de coordenadas. La imagen del punto del infinito $z=\infty$ será el punto $\zeta=0$, y a cada sucesión de puntos $\{z_n\}$, convergente hacia el punto del infinito, corresponderá una sucesión de puntos $\left\{\zeta_n = \frac{1}{z_n}\right\}$ convergente hacia cero, y recíprocamente.

El punto $z = \infty$ se llamará regular, polo de orden k o punto singular esencial, según que el punto $\zeta = 0$ sea regular, polo de orden k o punto singular esencial para $f^*(\zeta)$. Como en los casos indicados $f^*(\zeta)$ admite en un entorno del punto $\zeta = 0$ un desarrollo de Laurent de la forma

$$f^*(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots,$$
$$f^*(\zeta) = a_k\zeta^{-k} + \ldots + a_1\zeta^{-1} + a_0 + a_{-1}\zeta + \ldots, \qquad (a_k \neq 0)$$
$$f^*(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\zeta^{-n}$$

respectivamente, (en el último caso, un conjunto infinito de coeficientes a_n de potencias negativas de ζ es diferente de cero), la función $f(z) = f^*\left(\frac{1}{z}\right)$ admitirá en un entorno del punto del infinito un desarrollo de Laurent de la forma

$$f(z) = a_0 + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \ldots + a_{-n}z^{-n} + \ldots,$$
$$f(z) = a_kz^k + \ldots + a_1z + a_0 + a_{-1}z^{-1} + \ldots, \qquad (a_k \neq 0)$$
$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_nz^n$$

según que este punto sea regular, polo de orden k o punto singular esencial (en el último caso, un conjunto infinito de coeficientes de potencias positivas de z es diferente de cero).

Por lo tanto, la relación entre el carácter del punto con respecto a la función y el desarrollo correspondiente de Laurent resulta ser aquí igual que en el caso de un punto finito, cambiándose solamente los papeles que desempeñan las potencias positivas y negativas. De acuerdo a esto, la parte principal del desarrollo de Laurent en un entorno del punto del infinito es el conjunto de términos de potencias positivas, mientras que la parte regular es el conjunto de términos de potencias no positivas.

Ya sabemos que se puede distinguir un punto regular, un polo y un punto singular esencial para $\zeta = 0$ sin examinar el desarrollo correspondiente de Laurent, sino averiguando solamente cuál de las tres posibilidades tiene lugar:

1) $f^*(\zeta)$ está acotada en un entorno del origen de coordenadas;

2) el límite de $f^*(\zeta)$, cuando ζ tiende a cero, es infinito;

3) cuando ζ tiende a cero, la función $f^*(\zeta)$ no tiene ningún límite, ni finito, ni infinito.

Del hecho de que $f(z) = f^*(\zeta)$ y $z = \frac{1}{\zeta}$, se deduce que para el punto del infinito son válidos estos mismos criterios, y que la función tendrá en $z = \infty$ un punto regular, un polo o un punto singular esencial según que ella esté acotada en cierto entorno del punto del infinito, tienda al infinito cuando z tiende al infinito, o, finalmente, no tenga ningún límite, ni finito ni infinito, cuando z tiende al infinito.

Consideremos una función entera $f(z)$. Esta, en virtud de su definición, es uniforme y analítica en todos los puntos finitos del plano y admite un desarrollo que es convergente en todos los puntos:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Como éste es convergente en cualquier entorno del punto del infinito, se le puede considerar como el desarrollo de Laurent de la función en un entorno del punto del infinito. De aquí sacamos la conclusión que:

a) una función entera es regular en el punto del infinito cuando, y sólo cuando, ella es idénticamente igual a una constante:

$$f(z) \equiv a_0;$$

b) una función entera tiene un polo de orden $k \geqslant 1$ en el punto del infinito cuando, y sólo cuando, ella es un polinomio de grado k:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k, \qquad a_k \neq 0;$$

c) una función trascendente entera puede definirse como una función entera con un punto singular esencial en el punto del infinito. Por consiguiente, para una función trascendente entera no existe el límite: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ (ni finito ni infinito).

3.4. En este párrafo nos ocuparemos del cálculo de las integrales de las funciones uniformes analíticas sobre curvas cerradas, suponiendo que en un recinto que contiene al circuito de integración no haya otros puntos singulares más que puntos singulares aislados de carácter uniforme. Estando planteado el problema de esta manera, la curva podrá contener en su interior solamente una cantidad finita de puntos singulares (en caso contrario, los puntos singulares tendrían al menos un punto de acumulación, que sería también un punto singular de la función, pero no aislado). Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ situados en el interior de la curva cerrada rectificable Γ. Describamos alrededor de cada uno de los puntos z_k una circunferencia γ_k: $|z - z_k| = \rho_k$ de un radio ρ_k tan pequeño que ésta quede situada en el interior de Γ y que cada una de ellas esté situada en el exterior de todas las demás.

Entonces, en virtud del teorema integral para un sistema de circuitos, tendremos:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

Por lo tanto, el problema se reduce al cálculo de la integral $\int_{\gamma_k} f(z)\,dz$ sobre la circunferencia $|z - z_k| = \rho_k$, situada en un entorno del punto singular aislado z_k de la función $f(z)$.

Sustituyendo $f(z)$ por su desarrollo de Laurent en un entorno del punto z_k e integrando término a término (lo cual es posible debido a la convergencia uniforme de la serie de Laurent sobre γ_k), hallamos:

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \int_{\gamma_k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(k)} (z - z_k)^m\,dz = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^{(k)} \int_{\gamma_k} (z - z_k)^m\,dz = a_{-1}^{(k)} 2\pi i.$$

En efecto, de todas las integrales $\int_{\gamma_k} (z - z_k)^m\,dz$, es distinta de cero solamente una, la que corresponde al valor $m = -1$, y ésta es igual a $2\pi i$.

En resumen,

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left(a_{-1}^{(1)} + a_{-1}^{(2)} + \ldots + a_{-1}^{(n)}\right). \qquad (3.4:1)$$

La fórmula (3.4:1) resuelve por completo el problema planteado. Vemos, pues, que en nuestras condiciones, el valor de la integral de una función analítica depende solamente de los coeficientes de las potencias de exponente igual a menos uno en los desarrollos de Laurent de la función en los entornos de los puntos singulares. Estos coeficientes se llaman *residuos de la función*.

Por lo tanto, se llama *residuo* de la función $f(z)$, respecto de un punto singular aislado a de carácter uniforme, al coeficiente de $(z - a)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de la función en un entorno del punto a *).

---

*) El concepto de residuo pertenece a Cauchy. El mismo señaló también numerosas aplicaciones de este concepto a diversos problemas del análisis. Por lo visto, la denominación *residuo* (*résidu*) es debida a que Cauchy llegó a este concepto buscando la *diferencia* entre las integrales tomadas sobre dos caminos (con orígenes y extremos comunes), entre los cuales están comprendidos los polos de la función. De esta forma se pueden encontrar todavía los residuos en la «Memoria sobre las integrales definidas» (1814). El mismo vocablo «residuo» aparece por primera vez en el artículo «Sobre un género de

La fórmula (3.4:1) expresa el siguiente teorema:

Teorema de los residuos. *La integral de una función $f(z)$, tomada sobre un circuito cerrado Γ, contenido en un recinto donde la función es uniforme y analítica, a excepción de puntos singulares aislados de carácter uniforme, y que no pase por los puntos singulares, es igual al producto de la suma de los residuos de la función respecto de todos los puntos singulares comprendidos en el interior de Γ, por $2\pi i$.*

Para aplicar este teorema hay que saber calcular los residuos. Estos últimos se hallan sin dificultad alguna cuando el punto singular de la función es un polo. Supongamos primero que a es un polo simple de la función. Entonces, en cierto entorno del punto a el desarrollo de la función es de la forma:

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\ldots,$$

de donde

$$f(z)(z-a)=a_{-1}+a_0(z-a)+a_1(z-a)^2+\ldots$$

y, por consiguiente,

$$a_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}[f(z)(z-a)]. \qquad (3.4:2)$$

El cálculo del residuo se simplifica más, si $f(z)$ tiene la forma

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

donde $\varphi(a)\neq 0$, y $\psi(z)$ tiene un cero simple para $z=a$ (es decir, si $\psi(a)=0$ y $\psi'(a)\neq 0$). Entonces $z=a$ es un polo simple de la función $f(z)$, y según la fórmula (3.4:2) obtenemos

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)(z-a)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \qquad (3.4:3)$$

cálculo, análogo al cálculo de infinitesimales», incluido en el primer tomo de «Exercices de mathématique» de Cauchy (1826). He aquí cómo introduce Cauchy este concepto: «Si, después de haber hallado los valores de x que hacen infinita a la función $f(x)$, se agrega a uno de estos valores, designado mediante x_1 una cantidad infinitésima ε, y luego se desarrolla $f(x_1+\varepsilon)$ según las potencias crecientes de esta misma cantidad, los primeros términos del desarrollo contendrán potencias negativas de ε y uno de ellos será el producto de $\frac{1}{\varepsilon}$ por un coeficiente finito, al cual llamaremos residuo de la función $f(x)$, respecto del valor particular x_1 de la variable x». Después de este artículo, Cauchy publica muchos otros, incluidos en el primer tomo y en los tres siguientes tomos de «Exercices» (1826-1829), en los cuales consideraba las aplicaciones de la teoría de los residuos al cálculo de integrales, al desarrollo de las funciones en productos infinitos, a la teoría de las ecuaciones, etc.

Si a es un polo de orden $k\,(k>1)$, en un entorno del punto a tendremos el desarrollo:

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-a)^k}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\ldots,$$

de donde

$$f(z)(z-a)^k=a_{-k}+a_{-k+1}(z-a)+\ldots+a_{-1}(z-a)^{k-1}+\ldots$$

Derivando término a término $k-1$ veces, resulta:

$$\frac{d^{k-1}[f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}}=(k-1)!\,a_{-1}+k(k-1)\ldots 2a_0(z-a)+\ldots$$

y, finalmente, para $z\to a$:

$$(k-1)!\,a_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}[f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}}$$

o bien

$$a_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}[f(z)(z-a)^k]}{dz^{k-1}}. \qquad (3.4:4)$$

Fácilmente se comprueba que esta fórmula conserva su valor también cuando el orden de multiplicidad del polo es menor que k.

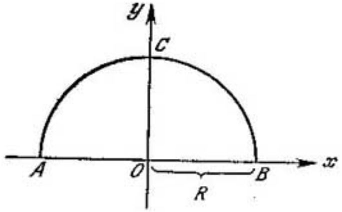

FIG. 74

Ejemplo 1. Calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$, donde $F(x)$ es una función racional: $F(x)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, que no tiene polos en el eje real y tal, que el grado del denominador $Q(x)$ es al menos dos unidades mayor que el grado del numerador $P(x)$.

Consideremos el circuito de integración representado en la fig. 74, donde BCA es una semicircunferencia de radio R con el centro en el origen de coordenadas. Tomemos el radio R tan grande, de modo que todos los polos de la función $F(z)$ situados en el semiplano superior queden comprendidos en el interior de dicho circuito. Entonces tendremos:

$$\int_{-R}^{+R} F(x)\,dx + \int_{BCA} F(z)\,dz = 2\pi i \Sigma \operatorname{Res} F(z),$$

donde la suma se extiende a todos los polos de la función $F(z)$ pertenecientes al semiplano superior.

Como

$$|F(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{a_m z^m + \ldots + a_0}{b_n z^n + \ldots + b_0}\right| = \left|\frac{a_m}{b_n z^{n-m}}\right| \left|\frac{1 + \ldots + \frac{a_0}{a_m z^m}}{1 + \ldots + \frac{b_0}{b_n z^n}}\right|$$

y $n - m \geqslant 2$, para valores de $|z| = R$ suficientemente grandes, tendremos:

$$|F(z)| < \frac{2|a_m|}{|b_n| R^2} = \frac{C}{R^2}.$$

Por esta razón,

$$\left|\int_{BCA} F(z)\,dz\right| < \frac{C}{R^2}\pi R = \frac{\pi C}{R} \to 0 \text{ cuando } R \to \infty.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} F(x)\,dx = 2\pi i \Sigma \operatorname{Res} F(z).$$

En resumen, la integral de una función racional, sin polos en el eje real y que posea en el punto del infinito un cero al menos de segundo orden (esto es equivalente a la condición $n - m \geqslant 2$), es igual al producto de $2\pi i$ por la suma de los residuos de la función $F(z)$ respecto de los polos situados en el semiplano superior.

Supongamos, en particular, que

$$F(z) = \frac{z^{2p} - z^{2q}}{1 - z^{2r}},$$

donde p, q y r son números enteros no negativos, siendo $p < r$ y $q < r$.

Aquí el grado del denominador $2r$ es superior al grado del numerador al menos en dos unidades. Todos los polos de la función $F(z)$ están comprendidos en la fórmula

$$z = e^{\frac{k\pi i}{r}} \qquad (k = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, 2r-1)$$

(los puntos ± 1 no son polos de la función $F(z)$, puesto que el numerador y denominador de la fracción tienen un factor común $1 - z^2$; si $p - q$ y r no son primos entre sí, entonces algunos de los puntos indicados tampoco serán polos de $F(z)$). Entre ellos, en el semiplano superior están situados los polos

$$z = e^{\frac{k\pi i}{r}} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1).$$

Todos ellos son simples y, por consiguiente,

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\frac{k\pi i}{r}}} F(z) = \frac{e^{\frac{k\pi i}{r}2p} - e^{\frac{k\pi i}{r}2q}}{-2re^{\frac{k\pi i}{r}(2r-1)}} = \frac{1}{2r}\left[e^{(2q+1)\frac{k\pi i}{r}} - e^{(2p+1)\frac{k\pi i}{r}}\right].$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p} - x^{2q}}{1 - x^{2r}}\,dx = \frac{\pi i}{r}\sum_{1}^{r-1}\left[e^{(2q+1)\frac{k\pi i}{r}} - e^{(2p+1)\frac{k\pi i}{r}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{r}\left[i\,\frac{1+e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}}}{1-e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}}} - i\,\frac{1+e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}}}{1-e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{r}\left(\operatorname{cotg}\frac{2p+1}{2r}\pi - \operatorname{cotg}\frac{2q+1}{2r}\pi\right).$$

Observando que la función subintegral es par, obtenemos:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2p} - x^{2q}}{1 - x^{2r}}\,dx = \frac{\pi}{2r}\left(\operatorname{cotg}\frac{2p+1}{2r}\pi - \operatorname{cotg}\frac{2q+1}{2r}\pi\right).$$

Si $r = 2n$ y $q = p + n$ $(p < n)$, la última fórmula toma la forma

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{1 + x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n \operatorname{sen}\frac{2p+1}{2n}\pi}.$$

E j e m p l o 2. Sea $\Phi(z)$ una función analítica, a excepción de un número finito de polos, en un recinto que contenga al semiplano superior cerrado (excluyendo el punto del infinito). Si ella no tiene polos en el eje real y tiende a cero cuando z tiende a ∞ en el semiplano superior, entonces para cualquier $\mu > 0$ es válida la fórmula

$$\int_{0}^{\infty} \left[e^{\mu i x}\Phi(x) + e^{-\mu i x}\Phi(-x)\right] dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left[e^{\mu i z}\Phi(z)\right],$$

donde la suma se extiende a todos los polos de la función $\Phi(z)$ situados en el semiplano superior.

Tomando el mismo circuito de integración que en el ejemplo 1, obtenemos:

$$\int_{-R}^{R} e^{\mu i x}\Phi(x)\,dx+\int_{BCA} e^{\mu i z}\Phi(z)\,dz=2\pi i\sum \operatorname{Res}\left[e^{\mu i z}\Phi(z)\right].$$

Elijamos el radio R tan grande, de modo que todos los polos de la función $e^{\mu i z}\,\Phi(z)$, pertenecientes al semiplano superior (éstos coinciden con los polos de la función $\Phi(z)$), estén situados en el interior del circuito de integración.

Demostremos que en estas condiciones

$$\lim_{R\to\infty}\int_{BCA} e^{\mu i z}\Phi(z)\,dz=0.$$

En efecto,

$$|J_R|=\left|\int_{BCA} e^{\mu i z}\Phi(z)\,dz\right|=$$

$$=\left|\int_0^{\pi}\exp(\mu i R\cos\varphi-\mu R\operatorname{sen}\varphi)\,\Phi(Re^{i\varphi})\,iRe^{i\varphi}\,d\varphi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{\pi} e^{-\mu R\operatorname{sen}\varphi}\,|\Phi(Re^{i\varphi})|\,R\,d\varphi.$$

Según la condición, $\max\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi}|\Phi(Re^{i\varphi})|=\varepsilon(R)\to 0$ para $R\to\infty$. Por lo tanto,

$$|J_R|<\varepsilon(R)\int_0^{\pi} Re^{-\mu R\operatorname{sen}\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\varepsilon(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\mu R\operatorname{sen}\varphi}\,d\varphi<2\varepsilon(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\frac{2}{\pi}\mu R\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{\pi\varepsilon(R)}{\mu}(1-e^{-\mu R})<\frac{\pi\varepsilon(R)}{\mu}\to 0 \text{ cuando } R\to\infty.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} e^{\mu i x}\Phi(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_0^{R}\left[e^{\mu i x}\Phi(x)+e^{-\mu i x}\Phi(-x)\right]dx=$$

$$=\int_0^{\infty}\left[e^{\mu i x}\Phi(x)+e^{-\mu i x}\Phi(-x)\right]dx=2\pi i\sum\operatorname{Res}\left[e^{\mu i z}\Phi(z)\right].$$

Este es el resultado que se pedía. Si $\Phi(z)$ es una función par, la fórmula toma la forma

$$\int_0^\infty \cos\mu x\Phi(x)\,dx=\pi i\sum \operatorname{Res}\,[e^{\mu iz}\Phi(z)].$$

Si $\Phi(z)$ es una función impar, resulta la fórmula:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}\mu x\Phi(x)\,dx=\pi\sum \operatorname{Res}\,[e^{\mu iz}\Phi(z)].$$

Por ejemplo,

$$\int_0^\infty \frac{\cos\mu x}{a^2+x^2}\,dx=\pi i\operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{e^{\mu iz}}{a^2+z^2}=\frac{\pi e^{-\mu a}}{2a},$$

$$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}\mu x}{a^2+x^2}\,dx=\pi\operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{ze^{\mu iz}}{a^2+z^2}=\frac{\pi e^{-\mu a}}{2}.$$

3.5. Como una de las aplicaciones importantes de la teoría de los residuos, hallemos el valor de la integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz$, donde $f(z)$ es una función uniforme en un recinto G, la cual no tiene puntos singulares en el mismo, a excepción, posiblemente, de polos; A es un número complejo arbitrario, $\varphi(z)$ es una función uniforme y analítica en el mismo recinto y Γ es una curva cerrada rectificable de Jordan, perteneciente al recinto G junto con la parte encerrada por la misma, la cual no pasa por ningún polo ni por los A-puntos de la función $f(z)$.

Los únicos puntos singulares que puede tener la función $F(z)=\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}$ en el recinto G son polos, originados por los A-puntos o por los polos de la función $f(z)$. Sean $a_1, \ldots, a_m$ los A-puntos de la función $f(z)$ situados en el interior de Γ, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, los órdenes de multiplicidad de estos A-puntos; sean $b_1, \ldots, b_n$ los polos de la función $f(z)$ situados en el interior de Γ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$, los órdenes de estos polos. En los entornos de los puntos a_j las funciones $\varphi(z)$ y $f(z)$ admiten los siguientes desarrollos:

$$\varphi(z)=\varphi(a_j)+\ldots,$$
$$f(z)-A=c_{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}+\ldots$$

Por consiguiente, $f'(z) = c_{\alpha_j}\alpha_j (z-a_j)^{\alpha_j-1} + \dots$ y

$$F(z) = [\varphi(a_j) + \dots] \frac{c_{\alpha_j}\alpha_j (z-a_j)^{\alpha_j-1} + \dots}{c_{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j} + \dots} =$$

$$= \frac{\alpha_j}{z-a_j} [\varphi(a_j) + \dots] \frac{1+\dots}{1+\dots} = \frac{\alpha_j}{z-a_j} [\varphi(a_j) + \dots] =$$

$$= \frac{\alpha_j \varphi(a_j)}{z-a_j} + \dots$$

Los términos no escritos contienen potencias superiores de $z - a_j$. En particular, después del término que contiene $(z - a_j)^{-1}$ tiene que figurar el término independiente del desarrollo de Laurent, después, el término que contiene $z - a_j$, etc. De aquí se deduce que $z = a_j$ es un polo simple de la función $F(z)$, cuyo residuo es igual a $\alpha_j \varphi(a_j)$. Este residuo puede ser igual a cero, si $\varphi(a_j) = 0$; en este caso, en la realidad, el punto a_j no es un polo de la función $F(z)$.

Consideremos ahora algún polo b_j de la función $f(z)$. En un entorno del mismo se tienen los desarrollos:

$$\varphi(z) = \varphi(b_j) + \dots,$$

$$f(z) - A = d_{-\beta_j} (z-b_j)^{-\beta_j} + \dots,$$

$$f'(z) = -\beta_j d_{-\beta_j} (z-b_j)^{-\beta_j-1} - \dots,$$

de donde

$$F(z) = [\varphi(b_j) + \dots] \frac{-\beta_j d_{-\beta_j} (z-b_j)^{-\beta_j-1} - \dots}{d_{-\beta_j}(z-b_j)^{-\beta_j} + \dots} =$$

$$= \frac{-\beta_j}{z-b_j} [\varphi(b_j) + \dots] \frac{1+\dots}{1+\dots} =$$

$$= -\frac{\beta_j}{z-b_j} [\varphi(b_j) + \dots] = -\frac{\beta_j \varphi(b_j)}{z-b_j} - \dots$$

Por consiguiente, $F(z)$ tiene un polo simple en el punto $z = b_j$, cuyo residuo es igual a $-\beta_j \varphi(b_j)$ (éste es igual a cero, si $\varphi(b_j) = 0$).

Aplicando el teorema de los residuos a la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)-A} dz,$$

obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(z) \frac{f'(z)\, dz}{f(z)-A} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi(a_j) - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(b_j). \qquad (3.5:1)$$

La primera suma del segundo miembro representa la suma de los valores que toma la función $\varphi(z)$ en los A-puntos de la función $f(z)$, donde cada uno de ellos se repite tantas veces cual sea el orden de multiplicidad del A-punto correspondiente. Si se considera que entre todos los A-puntos situados en el interior de Γ, cada uno de ellos se escribe una cantidad de veces igual a su orden de multiplicidad, entonces la suma $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi(a_j)$ se puede llamar simplemente suma de los valores que toma la función $\varphi(z)$ en los A-puntos de la función $f(z)$. Una observación análoga subsiste también para la segunda suma, donde la sumación se extiende a los polos de la función $f(z)$. Definitivamente, llegamos al siguiente enunciado:

La integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz$ *es igual a la diferencia entre la suma de los valores que toma la función* $\varphi(z)$ *en los* A*-puntos de la función* $f(z)$*, situados en el interior de* Γ*, y la suma de los valores que toma la misma función* $\varphi(z)$ *en los polos de la función* $f(z)$*, situados en el interior de* Γ.

Señalemos unos casos particulares de esta proposición:

a) $\varphi(z) = z$. En este caso obtenemos la fórmula:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j a_j - \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j, \tag{3.5:2}$$

es decir, la integral resulta ser igual a la diferencia entre la suma de los A-puntos de la función $f(z)$, situados en el interior de Γ, y la suma de los polos de esta función, situados en el interior de Γ.

b) $\varphi(z) \equiv 1$. En este caso obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum_{j=1}^{n} \beta_j, \tag{3.5:3}$$

es decir, la integral resulta ser igual a la diferencia entre el número de A-puntos de la función $f(z)$, situados en el interior de Γ, y el número de sus polos, situados en el interior de Γ.

Si $A = 0$, entonces los A-puntos serán ceros de la función $f(z)$. Designando con N la cantidad de ellos que hay en el interior de Γ y con P, el número de polos que tiene la función $f(z)$ en el interior de Γ, hallamos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P. \tag{3.5:4}$$

La integral que figura en el primer miembro se llama r e s i d u o l o g a r í t m i c o de la función $f(z)$ respecto del circuito Γ (obsérvese que bajo el signo integral figura la derivada logarítmica de la función $f(z)$). Resumiendo, llegamos al siguiente teorema:

La diferencia entre la cantidad de ceros y polos que tiene la función $f(z)$ en el interior del circuito Γ (en ambas cantidades se tienen en cuenta los órdenes de multiplicidad de los ceros y polos) *es igual al residuo logarítmico de la función respecto de este circuito.*

El residuo logarítmico tiene un significado sencillo. Para revelarlo, escribamos la integral en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d}{dz}\{\mathrm{Ln}\,[f(z)]\}\,dz.$$

Señalemos en la curva Γ un punto arbitrario z_0, al cual consideraremos punto inicial y final del camino de integración. Al recorrer el punto z la curva Γ en la dirección positiva, la función $\mathrm{Ln}\,f(z)$ variará continuamente, y después del recorrido de toda la curva su valor en el punto z_0 se diferenciará generalmente del valor inicial en el mismo punto. Pero, para un mismo valor de $f(z_0)$, los valores $\mathrm{Ln}\,f(z_0)$ podrán diferenciarse solamente por ser distintos los valores que se asignan a $\mathrm{Arg}\,f(z_0)$ antes y después del recorrido. Designando con Φ_0 el valor inicial de $\mathrm{Arg}\,f(z_0)$ y con Φ_1 el valor de $\mathrm{Arg}\,f(z_0)$ después del recorrido, hallamos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\{[\ln|f(z_0)|+i\Phi_1]-$$
$$-[\ln|f(z_0)|+i\Phi_0]\}=\frac{\Phi_1-\Phi_0}{2\pi}.$$

Por consiguiente, según la fórmula (3.5:4),

$$N-P=\frac{\Phi_1-\Phi_0}{2\pi}. \qquad (3.5:5)$$

Esta relación expresa el denominado **principio del argumento**.

La diferencia entre la cantidad de ceros y polos de la función $f(z)$, comprendidos en el interior de una curva cerrada Γ, es igual a la variación del $\mathrm{Arg}\,f(z)$ *al recorrer el punto z el circuito Γ en dirección positiva, dividida por 2π.*

Señalemos también la interpretación geométrica de la proposición obtenida. Al recorrer el punto z la curva cerrada Γ en dirección positiva, el extremo del vector $w=f(z)$ describirá una curva cerrada Γ'. Designemos con ν la cantidad de vueltas completas que da el vector w en torno del origen de coordenadas en el recorrido indicado. Convengamos en contar cada vuelta con $+1$, si se efectúa en dirección positiva, y con -1, si se efectúa en dirección negativa. Entonces, para la variación de $\mathrm{Arg}\,f(z)$ obtenemos la magnitud $2\pi\nu$, de donde se deduce el siguiente enunciado del principio del argumento:

La diferencia entre el número de ceros y polos de una función uniforme $f(z)$, comprendidos en el interior de una curva cerrada Γ, es igual al número de vueltas completas ν que da en torno del origen de coordenadas el vector que representa $f(z)$, mientras el punto z describe el circuito Γ en la dirección positiva.

En el caso particular en que $f(z)$ no tenga polos en el interior de Γ, obtenemos:

el número de ceros de la función $f(z)$, comprendidos en el interior de la curva cerrada Γ, es igual al número de vueltas completas que da el vector $f(z)$ en torno del origen de coordenadas al recorrer una vez el punto z el circuito Γ en la dirección positiva.

Del principio del argumento se desprende el siguiente teorema:

Teorema de Rouché. *Si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son dos funciones uniformes y analíticas en los puntos de una curva cerrada rectificable Γ y en el interior de la misma, y si en los puntos de esta curva se cumple la condición $|f(z)| > |\varphi(z)|$, entonces en el interior de Γ la suma $f(z) + \varphi(z)$ posee tantos ceros cuantos tiene la función $f(z)$.*

Demostración. Para averiguar el número de ceros de la función $f(z) + \varphi(z)$ aplicaremos el principio del argumento. Escribiendo $f(z) + \varphi(z)$ para los puntos de la curva Γ en la forma

$$f(z) + \varphi(z) = f(z)\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$$

($|f(z)|$ es mayor que $|\varphi(z)|$ en los puntos de la curva Γ y, por consiguiente, no se anula), hallamos:

$$\operatorname{Arg}[f(z) + \varphi(z)] = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg}\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right].$$

Pero $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$; por lo tanto, el extremo del vector que representa $1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ describe una curva cerrada comprendida enteramente en el interior del círculo de radio 1 con el centro en el punto 1. Por consiguiente, el vector correspondiente no da ninguna vuelta alrededor del origen de coordenadas, y la variación del $\operatorname{Arg}\left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$ al recorrer el punto z la curva Γ es igual a cero. Así, pues, la variación del $\operatorname{Arg}[f(z) + \varphi(z)]$ en el recorrido indicado coincide con la variación del $\operatorname{Arg} f(z)$ en el mismo recorrido, de donde, según el principio del argumento, se deduce la igualdad de los números de ceros de las funciones $f(z) + \varphi(z)$ y $f(z)$.

La proposición que sigue es una aplicación útil de este teorema:

Teorema de Hurwitz. *Si $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de funciones analíticas en un recinto G, uniformemente convergente en el* *interior de este recinto hacia una función $f(z) \not\equiv 0$, entonces, para cualquier curva cerrada rectificable γ, perteneciente a G junto con su parte interior y que no pasa por los ceros de la función $f(z)$, se puede señalar un número $\nu = \nu(\gamma)$ tal, que para $n > \nu(\gamma)$ cada una de las funciones $f_n(z)$ tendrá en el interior de γ un mismo número de ceros, igual al número de ceros de la función $f(z)$ situados en el interior de esta curva.*

D e m o s t r a c i ó n. Designemos con μ el mínimo de $|f(z)|$ en los puntos de la curva γ: en virtud de la condición, $\mu > 0$. Por consiguiente, debido a la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en γ, se puede señalar un $\nu(\gamma)$ tal, que para $n > \nu(\gamma)$ en todos los puntos de la curva γ se cumple la desigualdad

$$|f_n(z) - f(z)| < \mu \leqslant |f(z)|.$$

Pero de aquí, según el teorema de Rouché, se deduce que las funciones $f(z)$ y $f(z) + [f_n(z) - f(z)] = f_n(z)$ $(n > \nu(\gamma))$ tienen un mismo número de ceros en el interior de γ, con lo cual se termina la demostración.

E j e m p l o 1. Hallar el número de raíces de la ecuación $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$, cuyos módulos son menores que 1.

Apliquemos el teorema de Rouché.

Para esto, representemos $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ en la forma $f(z) + \varphi(z)$, donde $f(z) = -4z^5$ y $\varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$. Como para $|z| = 1$

$$|\varphi(z)| = |z^8 + z - 1| \leqslant |z^8| + |z^2| + 1 = 3$$

y

$$|f(z)| = |4z^5| = 4,$$

se tiene

$$|\varphi(z)| < |f(z)|.$$

Por consiguiente, según el teorema de Rouché, la función $f(z) + \varphi(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ tiene en el interior de la circunferencia $|z| = 1$ tantos ceros cuantos tiene la función $f(z) = -4z^5$. Pero esta última tiene un cero de quinto orden en el origen de coordenadas y, por consiguiente, el número de ceros que tiene en el círculo unidad es igual a 5. Por esta razón, la ecuación $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ tiene cinco raíces en el interior del círculo unidad, es decir, tiene cinco raíces cuyos módulos son menores que la unidad.

E j e m p l o 2. Demostrar que la ecuación

$$a_0 + a_1 \cos\vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + \ldots + a_n \cos n\vartheta = 0,$$

donde $0 < a_0 < a_1 \ldots < a_n$, tiene $2n$ raíces distintas en el intervalo $0 < \vartheta < 2\pi$. Además, la ecuación dada no tiene raíces imaginarias.

Demostremos primero que todos los ceros del polinomio

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

están situados en el interior del círculo unidad. Evidentemente, este polinomio no tiene raíces reales positivas. Si z no es un número positivo, se tiene:

$$\begin{aligned} |p(z)(z-1)| &= |a_n z^{n+1} - [a_0 + (a_1 - a_0) z + \ldots + (a_n - a_{n-1}) z^n]| \geqslant \\ &\geqslant |a_n z^{n+1}| - |a_0 + (a_1 - a_0) z + \ldots + (a_n - a_{n-1}) z^n| > \\ &> a_n |z|^{n+1} - [a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \ldots + (a_n - a_{n-1})|z|^n]. \end{aligned}$$

En efecto, como los números $a_0, a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_{n-1}$ son positivos y el número z no es positivo, los vectores $a_0, (a_1 - a_0) z, \ldots$ $\ldots, (a_n - a_{n-1}) z^n$ no pueden llevar una misma dirección y, por consiguiente,

$$|a_0 + (a_1 - a_0) z + \ldots + (a_n - a_{n-1}) z^n| < a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \ldots \\ \ldots + (a_n - a_{n-1})|z|^n.$$

Si, además, $|z| \geqslant 1$, entonces

$$\begin{aligned} a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \ldots + (a_n - a_{n-1})|z|^n &\leqslant \\ \leqslant a_0 |z|^{n+1} + (a_1 - a_0)|z|^{n+1} + \ldots + (a_n - a_{n-1})|z|^{n+1} &= \\ = [a_0 + (a_1 - a_0) + \ldots + (a_n - a_{n-1})]|z|^{n+1} &= a_n |z|^{n+1}. \end{aligned}$$

Así, pues, para $|z| \geqslant 1$ y z no positivo, se tiene:

$$|p(z)(z-1)| > a_n |z|^{n+1} - a_n |z|^{n+1} = 0, \quad \text{o sea} \quad p(z)(z-1) \neq 0.$$

Pero de aquí se deduce que para z no positivo y en valor absoluto no menor que 1, $p(z) \neq 0$. Esto último es cierto también para z positivo y, por consiguiente, $p(z)$ no tiene ceros fuera del círculo unidad ni tampoco en su circunferencia. Por esta razón, todos los n ceros del polinomio $p(z)$ están situados estrictamente *en el interior* del círculo unidad.

Supongamos ahora que el punto z describe la circunferencia $|z| = 1$ en la dirección positiva. Entonces el vector que representa $p(z)$, según el principio del argumento, tiene que dar en torno del origen de coordenadas un número de vueltas igual al número de ceros del polinomio $p(z)$, es decir, n. Como en cada vuelta la curva que describe el extremo del vector se corta con el eje imaginario al menos dos veces (una vez por encima y otra por debajo), tendremos al menos $2n$ intersecciones de éstas. Cada una de ellas corresponde a una posición determinada del punto z en la circunferencia $|z| = 1$, es decir, a un valor determinado del argumento ϑ, el cual varía en el intervalo $(0, 2\pi)$ al dar una vuelta.

Por consiguiente, tenemos al menos $2n$ valores distintos del argumento ϑ en el intervalo $0 < \vartheta < 2\pi$, para los cuales el punto que representa $p(z) = p(e^{i\vartheta})$ se sitúa en el eje imaginario. Para cada uno de estos valores de ϑ

$$\operatorname{Re}[p(e^{i\vartheta})] = \operatorname{Re}(a_0 + a_1 e^{i\vartheta} + \ldots + a_n e^{in\vartheta}) =$$
$$= \operatorname{Re}[a_0 + a_1(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) + \ldots + a_n(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)] =$$
$$= a_0 + a_1 \cos\vartheta + \ldots + a_n \cos n\vartheta$$

se anula; por consiguiente, queda demostrada la existencia de al menos $2n$ raíces de la ecuación

$$a_0 + a_1 \cos\vartheta + \ldots \ a_n \cos n\vartheta = 0$$

en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Demostremos que el número de todas las raíces situadas en este intervalo es exactamente igual a $2n$. Con este fin, hagamos $e^{i\vartheta} = \zeta$; entonces, tendremos:

$$\cos k\vartheta = \frac{e^{ik\vartheta} + e^{-ik\vartheta}}{2} = \frac{\zeta^k + \zeta^{-k}}{2},$$

y, por consiguiente,

$$a_0 + a_1 \cos\vartheta + \ldots + a_n \cos n\vartheta =$$
$$= \frac{1}{2}\zeta^{-n}(a_n + a_{n-1}\zeta + \ldots + a_1\zeta^{n-1} + 2a_0\zeta^n + a_1\zeta^{n+1} + \ldots \ a_n\zeta^{2n}).$$

Si $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2n}$ son los ceros del polinomio que figura en el segundo miembro, entonces todos los ceros del polinomio trigonométrico que figura en el primer miembro satisfacen a la condición

$$e^{i\vartheta_j} = \zeta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n).$$

De aquí se deduce, ante todo, que la cantidad de ceros reales distintos del polinomio trigonométrico considerado en el intervalo $(0, 2\pi)$ no es superior a $2n$. Como ya se había demostrado que existen no menos de $2n$ ceros reales distintos de este polinomio en el intervalo $(0, 2\pi)$, el número total de ellos es igual a $2n$. Obsérvese que los módulos de los números $\zeta_j = e^{i\vartheta_j}$ son todos iguales a 1; por lo tanto, entre los ceros del polinomio trigonométrico dado no puede haber ninguno imaginario.

E j e m p l o 3. Sea $\varphi(t)$ una función de variable real, positiva, continua y creciente en el segmento $[0, 1]$. Consideremos la integral

$$\int_0^1 \varphi(t) \cos zt \, dt.$$

Basándose en la observación hecha en el ap. 1.2 (pág. 388), a ésta se la puede considerar en cualquier recinto acotado del plano como el límite de una sucesión de sumas integrales:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{k}{n} z.$$

uniformemente convergentes en este recinto *).

Por consiguiente, esta integral representa una función $f(z)$, analítica en cualquier recinto del plano, o sea, es una función entera. Evidentemente, $f(z) \not\equiv 0$ (por ejemplo, $f(0) = \int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt > 0$) Por lo tanto, a la sucesión $\{f_n(z)\}$ y a la función $f(z)$ se les puede aplicar el teorema de Hurwitz. Si z_0 es algún cero de la función $f(z)$, entonces en cualquier entorno fijado del punto z_0 todas las funciones $f_n(z)$, comenzando desde una de ellas, tienen que tener tantos ceros cuantos tiene $f(z)$, es decir, al menos un cero. Pero las funciones $f_n(z)$ son polinomios trigonométricos que satisfacen a las condiciones del ejemplo 2 $\left((\text{en este caso } 0 < a_k = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) < a_{k+1} = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right.$ y $\left.\vartheta = \frac{z}{n}\right)$. Por esta razón, las funciones $f_n(z)$ no tienen ceros imaginarios. Por consiguiente, la función entera $f(z) = \int\limits_0^1 \varphi(t) \cos zt\,dt$ tampoco tiene ceros imaginarios: todos sus ceros son números reales.

3.6. Si $f(z)$ es una función uniforme y analítica en cierto entorno $|z| > R$ del punto del infinito (a excepción, posiblemente, de este mismo punto), entonces en este entorno es válido el desarrollo:

$$f(z) = \ldots + A_{-m}z^{-m} + \ldots + A_{-1}z^{-1} + A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n + \ldots$$

Hallemos la integral de $f(z)$ sobre la circunferencia $C_\sigma : |z| = \sigma$, donde $\sigma > R$ y la dirección del recorrido es tal que el entorno $|z| > \sigma$ del punto del infinito queda a la izquierda del observador. Es natural considerar positiva tal dirección con respecto al recorrido en torno del punto del infinito. Mas con respecto al interior del círculo $|z| < \sigma$, es decir, con respecto al entorno del punto finito $z = 0$, ésta es negativa. Integrando término a término la serie de Laurent, resulta:

$$\int\limits_{C_\sigma} f(z)\,dz = A_{-1}(-2\pi i) = 2\pi i\,(-A_{-1}).$$

*) En el caso dado, esta proposición es fácil comprobarla directamente.

Para que en el caso de integración alrededor del punto del infinito la integral de la función también sea igual al producto del residuo de la función por $2\pi i$, es conveniente dar la siguiente definición:

Se llama residuo de una función, uniforme y analítica en cierto entorno del punto $z = \infty$, respecto de este punto, al coeficiente de z^{-1}, tomado con signo menos, en el desarrollo de Laurent de la función en este entorno.

Entonces

$$\int_{C_\sigma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z),$$

donde la integral se toma en la dirección positiva con respecto del punto del infinito, es decir, en el sentido según el cual la parte exterior de la curva queda a la izquierda (y no la parte interior como ordinariamente se hace).

Aplicando esta definición, obtenemos el siguiente teorema: *La suma de todos los residuos de una función uniforme y analítica que solamente tiene puntos singulares aislados, es igual a cero.*

En efecto, el número de puntos singulares de tal función es finito (en caso contrario, existiría un punto de acumulación, finito o infinito, del conjunto de los puntos singulares, el cual sería, por lo tanto, un punto singular no aislado de la función). Describamos una circunferencia $|z| = \sigma$, con el centro en el origen de coordenadas, de modo que en ella y en su parte exterior (a excepción, posiblemente, del punto $z = \infty$) no haya puntos singulares de la función. Entonces, todos los puntos singulares finitos: $z_1, z_2, \ldots, z_n$ estarán situados en el interior de esta circunferencia, por lo cual, según el teorema de los residuos, se tiene:

$$\int_{C_\sigma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Aquí se toma la integral en la dirección positiva ordinaria, es decir, de tal modo que el interior de la circunferencia quede a la izquierda. Pero esta misma dirección será negativa con respecto al punto del infinito. Por lo tanto, la misma integral será igual a

$$\int_{C_\sigma} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Restando la segunda relación de la primera, obtenemos definitivamente:

$$2\pi i\,[\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \ldots + \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)] = 0,$$

o bien

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \ldots + \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

El teorema queda demostrado.

En particular, este teorema es cierto para cualquier función racional, puesto que una función racional tiene solamente puntos singulares aislados de carácter uniforme (precisamente, polos).

Obsérvese que el residuo de una función respecto del punto del infinito se determina mediante el coeficiente de uno de los términos de la parte regular del desarrollo de Laurent, mientras que el residuo respecto de un punto finito se determina mediante el coeficiente de uno de los términos de la parte principal (es menester recordar que el conjunto de las potencias negativas del desarrollo de Laurent representa la parte regular para el punto $z = \infty$ y la parte principal para un punto finito). De aquí se deduce que el residuo respecto del punto $z = \infty$ puede ser distinto de cero, incluso cuando este punto no sea singular, es decir, cuando es regular, mientras que el residuo respecto de un punto regular finito siempre es igual a cero. Así, por ejemplo, para la función $f(z) = \frac{1}{z}$ el punto $z = \infty$ es regular (es un cero de primer orden). Sin embargo, aquí $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1 \neq 0$.

§ 4. APLICACION DE LA TEORIA DE LOS RESIDUOS AL DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES. INTERPOLACION

4.1. Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica que no tenga en el plano finito otros puntos singulares más que polos.

Designemos con C una curva cerrada rectificable de Jordan cualquiera que no pase por los polos de la función $f(z)$, y sea z un punto situado en el interior de C, distinto del origen de coordenadas y de los polos. Calculemos la integral de tipo Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}.$$

Evidentemente, los polos de la función $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ en el interior de C son: el punto $\zeta = z$ y todos los polos de la función $f(z)$ situados en el interior de C. Designemos con $\beta_1, \ldots, \beta_n$ todos aquellos polos que son distintos de cero, y con $G_1(z), \ldots, G_n(z)$ las partes principales correspondientes de los desarrollos de Laurent de la función $f(z)$. Hagamos también $\beta_0 = 0$, suponiendo que $G_0(z)$ es la parte principal del desarrollo de Laurent de la función $f(z)$

en un entorno del punto $z = 0$, de modo que $G_0(z)$ es idénticamente igual a cero, si $z = 0$ es un punto regular de $f(z)$, y $G_0(z)$ es una función racional con el único polo en el origen, si $z = 0$ es un polo de la función $f(z)$.

Calculemos los residuos de la función $\varphi(\zeta)$ respecto de los puntos $\zeta = z, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Ante todo, obtenemos:

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=z} \varphi(\zeta) = f(z).$$

Sustituyendo luego $f(\zeta)$ en un entorno del punto β_k por el desarrollo de Laurent correspondiente

$$f(\zeta) = \frac{A_{-\nu_k}^{(k)}}{(\zeta-\beta_k)^{\nu_k}} + \ldots + \frac{A_{-1}^{(k)}}{\zeta-\beta_k} + A_0^{(k)} + A_1^{(k)}(\zeta-\beta_k) + \ldots$$
$$\ldots = G_k(\zeta) + P_k(\zeta),$$

donde $G_k(\zeta)$ y $P_k(\zeta)$ son las partes principal y regular del desarrollo, respectivamente, y observando que para $|\zeta-\beta_k| < |z-\beta_k|$

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{(z-\beta_k)-(\zeta-\beta_k)} =$$
$$= -\frac{1}{z-\beta_k} - \frac{\zeta-\beta_k}{(z-\beta_k)^2} - \ldots - \frac{(\zeta-\beta_k)^{\nu_k-1}}{(z-\beta_k)^{\nu_k}} - \ldots,$$

hallamos que el término que contiene $(\zeta-\beta_k)^{-1}$ en el desarrollo de $\varphi(\zeta) = f(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}$ es igual a

$$-\left[\frac{A_{-1}^{(k)}}{z-\beta_k} + \frac{A_{-2}^{(k)}}{(z-\beta_k)^2} + \ldots + \frac{A_{-\nu_k}^{(k)}}{(z-\beta_k)^{\nu_k}}\right]\frac{1}{\zeta-\beta_k} = -G_k(z)\frac{1}{\zeta-\beta_k}.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=\beta_k} \varphi(\zeta) = -G_k(z).$$

Así, pues,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} = f(z) - \sum_0^n G_k(z),$$

o sea,

$$f(z) = \sum_0^n G_k(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \tag{4.1:1}$$

Esta fórmula podría haber sido obtenida de otro modo. Obsérvese para esto, que $\sum\limits_0^n G_k(\zeta)$ es una función racional que se anula en el infinito; todos sus polos están situados en el interior de C. La función $\dfrac{\sum_{0}^{n} G_k(\zeta)}{\zeta - z}$ (z está situado en el interior de C) posee las mismas propiedades y en el punto del infinito tiene un cero al menos de segundo orden. Por esta razón, su residuo respecto del punto del infinito es igual a cero, y, por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\sum_{0}^{n} G_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

de donde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\zeta) - \sum_{0}^{n} G_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Pero la función $f(\zeta) - \sum_{0}^{n} G_k(\zeta)$ es analítica en todos los puntos interiores a C; por lo cual, a la última integral se la puede aplicar la fórmula de Cauchy, obteniendo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\zeta) - \sum_{0}^{n} G_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) - \sum_{0}^{n} G_k(z),$$

es decir, resulta la fórmula (4.1:1).

Supongamos que existe una sucesión de curvas cerradas rectificables de Jordan $\{C_m\}$ que no pasan por los polos de la función $f(z)$, donde cada una de las curvas $\{C_m\}$ está contenida en el interior de la siguiente (C_{m+1}) y cuyas partes interiores, para m suficientemente grande, contienen a un círculo dado cualquiera $|z| < R$, cumpliéndose para las curvas C_m la siguiente condición:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_m} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = 0. \qquad (4.1:2)$$

Entonces, el número de polos de la función $f(z)$, situados en el interior de C_m, dependerá de m: $n = n_m$, y de la fórmula (4.1:1) hallamos:

$$f(z) \lim_{m \to \infty} \sum_{0}^{n_m} G_k(z). \qquad (4.1:3)$$

es decir, la función $f(z)$ se expresa en forma del límite de la sucesión de la suma de las partes principales de sus desarrollos de Laurent, respecto de los polos situados en el interior de C_m.

La condición (4.1:2) queda satisfecha si, por ejemplo,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \int_{C_m} |f(\zeta)|\, ds < \infty. \tag{4.1:4}$$

En efecto, designando con r_m la distancia desde el origen de coordenadas hasta C_m ($r_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$) y suponiendo que z pertenece al círculo $|z| < R$, para $r_m > R$ tendremos:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} \right| < \frac{1}{2\pi(r_m - R)} \int_{C_m} |f(\zeta)|\, ds \to 0$$

cuando $m \to \infty$.

De esta acotación se ve que, con la condición (4.1:4), el término complementario de la fórmula (4.1:1) tiende a cero uniformemente respecto de z, perteneciente a un círculo arbitrario $|z| < R$. Por esta razón, la sucesión (4.1:3) converge uniformemente hacia $f(z)$ en cualquier círculo $|z| < R$.

Se puede obtener una expresión para $f(z)$ análoga a (4.1:3) en condiciones más generales. Supongamos para esto que en lugar de (4.1:4) para la sucesión de curvas $\{C_m\}$ y un número entero no negativo p se cumple la relación

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \int_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}}\, ds < \infty. \tag{4.1:5}$$

Si se supone que las longitudes l_m de las curvas C_m crecen no más rápidamente que λr_m, donde λ es una constante (así será siempre que C_m sean curvas homotéticas respecto del origen de coordenadas), entonces hallamos que

$$\int_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}}\, ds < \max_{C_m} |f(\zeta)| \frac{l_m}{r_m^{p+1}} < \lambda \frac{\max\limits_{C_m} |f(\zeta)|}{r_m^p}.$$

De aquí se ve que la condición (4.1:5) quedará cumplida si se verifica la condición más simple

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\max\limits_{C_m} |f(\zeta)|}{r_m^p} < \infty, \tag{4.1:6}$$

que admite un crecimiento infinito del $\max\limits_{C_m} |z(\zeta)|$, pero no más rápido que el de r_m^p.

Haciendo la suposición de que se cumple la condición (4.1:5) o (4.1:6), volvamos a considedar la relación (4.1:1) y sustituyamos en la misma $(\zeta - z)^{-1}$ bajo el signo de la integral, por la expresión

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \ldots + \frac{z^p}{\zeta^{p+1}} + \frac{1}{(\zeta - z)}\,\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}} .$$

Entonces tendremos:

$$f(z) = \sum_0^n G_k(z) + \sum_0^p \frac{z^j}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}\, d\zeta. \qquad (4.1{:}7)$$

Observando que los puntos $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ son polos de la función $\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}$ situados en el interior de C, hagamos:

$$\operatorname*{Res}_{z=\beta_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} = A_k^{(j)} \quad (j = 0, 1, \ldots, p).$$

Entonces obtenemos:

$$\sum_{j=0}^p \frac{z^j}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}\, d\zeta = \sum_{j=0}^p (A_0^{(j)} + \ldots + A_n^{(j)})\, z^j = \sum_{h=0}^n P_k(z),$$

donde $P_k(z)$ son polinomios de grado no superior a p:

$$P_k(z) = A_k^{(0)} + A_k^{(1)} z + \ldots + A_k^{(p)} z^p. \qquad (4.1{:}8)$$

En resumen, la fórmula (4.1:7) puede escribirse en la forma

$$f(z) = \sum_0^n [G_k(z) + P_k(z)] + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}\, d\zeta. \qquad (4.1{:}9)$$

Sustituyendo aquí C por C_m y, por consiguiente, n por n_m, aplicando la condición (4.1:5), obtenemos que el término complementario de esta fórmula

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}\, d\zeta$$

tiende a cero, y además, uniformemente con respecto de los puntos z, pertenecientes a cualquier círculo fijado: $|z| < R$. En efecto, si m es tan grande que $r_m > R$, se tiene:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}\, d\zeta \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta| - |z|}\,\frac{|z|^{p+1}}{|\zeta|^{p+1}}\, ds <$$

$$< \frac{R^{p+1}}{2\pi (r_m - R)} \int_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}}\, ds.$$

Pero, en virtud de la condición (4.1:5), las integrales $\int\limits_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}} ds$ están acotadas:

$$\int\limits_{C_m} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}} ds < M < \infty .$$

Por consiguiente,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}} d\zeta \right| < \frac{MR^{p+1}}{2\pi (r_m - R)} \to 0 \text{ cuando } m \to \infty ,$$

y de la fórmula (4.1:9) resulta el desarrollo

$$f(z) = \lim_{n_m \to \infty} \sum_{0}^{n_m} [G_k(z) + P_k(z)]. \tag{4.1:10}$$

que converge uniformemente hacia $f(z)$ en cada círculo $|z| < R$. Este desarrollo puede escribirse en forma de serie

$$f(z) = [G_0(z) + P_0(z)] + \sum_{m+0}^{\infty} \{[G_{n_m+1}(z) + P_{n_m+1}(z)] + \ldots + \\ + [G_{n_{m+1}}(z) + P_{n_{m+1}}(z)]\}, \tag{4.1:11}$$

donde n_0 se debe hacer igual a cero.

Obsérvese que los primeros términos de la sucesión (4.1:10) o de la serie (4.1:11) se hacen infinitos en los puntos $\beta_0, \ldots, \beta_{n_m}$, es decir, allí donde se hace infinita la función $f(z)$. Por esta razón, la convergencia uniforme de la serie (4.1:10) se debe entender como la convergencia uniforme de aquella serie que se obtiene de la dada después de despreciar unos cuantos primeros términos que tienen polos en el círculo $|z| < R$. Los desarrollos de la forma (4.1:10) (en particular, (4.1:3) o (4.1:11)) se llaman desarrollos de $f(z)$ en fracciones simples.

4.2. El método expuesto de desarrollo de las funciones en series pertenece a Cauchy. Apliquémoslo a unos cuantos ejemplos particulares de gran importancia.

1) Desarrollo de $\sec z$. Tomemos por C_m los contornos de los cuadrados con los centros en el punto $z = 0$ y con los lados paralelos a los ejes de coordenadas y de longitudes $2m\pi$. En los lados de los cuadrados, paralelos al eje imaginario, se tiene: $z = \pm m\pi + iy$, y, por consiguiente:

$$|\sec z| = \frac{1}{|\cos(\pm m\pi + iy)|} = \frac{1}{|\cos iy|} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} .$$

En los lados de los cuadrados, paralelos al eje real, se tiene: $z = x \pm im\pi$, y, por consiguiente (véase la fórmula (3.6:11), cap.

segundo),

$$|\sec z| = \frac{1}{|\cos(x \pm im\pi|} \leqslant \frac{1}{\operatorname{sh} m\pi}.$$

De estas desigualdades obtenemos para la integral $\int\limits_{C_m} |\sec \zeta|\, ds$ la siguiente acotación:

$$\int\limits_{C_m} |\sec \zeta|\, ds < 2 \int\limits_{-m\pi}^{m\pi} \frac{dy}{\operatorname{ch} y} + 4m\pi \frac{1}{\operatorname{sh} m\pi}.$$

Como la integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\operatorname{ch} y}$ es convergente y $\frac{4m\pi}{\operatorname{sh} m\pi} \to 0$ para $m \to \infty$, se cumple la condición (4.1:4) y, por consiguiente, también la condición (4.1:2). Por esta razón, en el caso dado se puede utilizar la fórmula (4.1:3).

En el interior de C_m la función $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ tiene polos de la forma $(2j-1)\frac{\pi}{2}$, donde $-m+1 \leqslant j \leqslant m$; todos ellos son simples, puesto que los ceros de $\cos z$ son simples. Evidentemente,

$$\operatorname*{Res}_{z=(2j-1)\frac{\pi}{2}} \sec z = -\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{2j-1}{2}\pi\right)} = (-1)^j,$$

y, por consiguiente, la parte principal de $\sec z$ en el entorno del punto $z = (2j-1)\frac{\pi}{2}$ es $G_j(z) = \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}$. Obsérvese también que $z = 0$ no es un polo para $\sec z$ y, por consiguiente, se debe suponer que la parte principal correspondiente es igual a cero. De la fórmula (4.1:3) hallamos:

$$\sec z = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m+1}^{m} \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}} + \sum_{j=-m+1}^{0} \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}} \right].$$

Sustituyamos en la segunda de las sumas que figuran bajo el signo del límite j por $1-k$. Obtenemos que k variará entre los límites desde 1 hasta m, y, por consiguiente,

$$\sum_{-m+1}^{0} \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{z+(2k-1)\frac{\pi}{2}}.$$

Por esta razón, cambiando la notación k por j, hallamos:

$$\sec z = \lim_{m\to\infty}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}+\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^{j+1}}{z+(2j-1)\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\frac{(2j-1)\pi}{z^2-(2j-1)^2\frac{\pi^2}{4}}.$$

Hemos obtenido el desarrollo de $\sec z$ en serie

$$\sec z=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{(2j-1)\pi}{z^2-(2j-1)^2\frac{\pi^2}{4}}. \qquad (4.2:1)$$

Del método de obtención de esta serie (un caso particular de la fórmula (4.1:3) con la condición (4.1:4)) se deduce que ella es uniformemente convergente en cada círculo $|z|<R$ (además, para hablar de la convergencia de la serie se deben excluir de la misma unos cuantos primeros términos, que tienen polos en el círculo dado).

2) D e s a r r o l l o d e $\operatorname{cotg} z$. Tomemos por C_m los contornos de los cuadrados con los centros en el punto $z=0$ y con los lados paralelos a los ejes de coordenadas y de longitudes $(2m+1)\pi$. Entonces, en los lados de los cuadrados, paralelos al eje imaginario,

$$z=\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+iy,$$

y, por consiguiente,

$$|\operatorname{cotg} z|=\left|\frac{\cos\left[\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+iy\right]}{\operatorname{sen}\left[\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+iy\right]}\right|=\left|\frac{\operatorname{sen}(iy)}{\cos(iy)}\right|=\left|\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\right|<1.$$

En los lados de los cuadrados, paralelos al eje real,

$$z=x\pm i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

y, por consiguiente, (véase la fórmula (3.6:11) del cap. segundo),

$$|\operatorname{cotg} z|=\left|\frac{\cos\left[x\pm i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{\operatorname{sen}\left[x\pm i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}\right|\leqslant\frac{\operatorname{ch}\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}{\operatorname{sh}\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}=$$

$$=\frac{1+e^{-(2m+1)\pi}}{1-e^{-(2m+1)\pi}}\leqslant\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}.$$

En resumen, en los lados de los cuadrados C_m el módulo $|\operatorname{cotg} z|$ satisface a la desigualdad

$$|\operatorname{cotg} z| \leqslant \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}.$$

Por esta razón, se cumple la condición (4.1:6) y, por consiguiente, también la condición (4.1:5) para $p=0$, y podemos aplicar la fórmula (4.1:10).

En el interior de C_m la función $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ tiene los polos siguientes: $0, \pm\pi, \ldots, \pm m\pi$, los cuales todos son simples, puesto que todos los ceros de $\operatorname{sen} z$ son simples. Evidentemente,

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} \operatorname{cotg} z = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1,$$

por lo cual, la parte principal $G_k(z)$ del desarrollo de $\operatorname{cotg} z$ en el entorno del punto $z=k\pi$ es igual a $\frac{1}{z-k\pi}$.

En el caso dado, los polinomios $P_k(z)$ (véase la fórmula (4.1:8) son de grado no superior a $p=0$:

$$P_k(z) = A_k^{(0)} = \operatorname*{Res}_{\zeta=k\pi} \frac{\operatorname{cotg}\zeta}{\zeta}.$$

Pero, evidentemente, la función $\frac{\operatorname{cotg}\zeta}{\zeta}$ es par. Por esto, su desarrollo en serie de Laurent en el entorno del origen de coordenadas contiene solamente potencias pares de ζ y, por consiguiente,

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=0} \frac{\operatorname{cotg}\zeta}{\zeta} = 0.$$

Por otra parte, los puntos $\zeta = k\pi$ $(k \neq 0)$ son polos simples para $\frac{\operatorname{cotg}\zeta}{\zeta}$. Por lo tanto,

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=k\pi} \frac{\operatorname{cotg}\zeta}{\zeta} = \frac{\cos k\pi}{k\pi\cos k\pi} = \frac{1}{k\pi}.$$

En resumen,

$$P_0(z) = 0, \quad P_k(z) = \frac{1}{k\pi} \qquad (k \neq 0),$$

y, por consiguiente, según la fórmula (4.1:10):

$$\operatorname{cotg} z = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right) + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{z+k\pi}-\frac{1}{k\pi}\right)\right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{z+k\pi}\right)\right] = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{z+k\pi}\right). \tag{4.2:2}$$

Hemos obtenido el desarrollo de $\operatorname{cotg} z$ en fracciones simples. Del mismo modo de obtención de esta fórmula se deduce (de la fórmula general (4.1:10)) que la serie (4.2:2) es uniformemente convergente en cualquier círculo $|z| < R$, si se excluye de la misma un número finito de términos que tienen polos en este círculo.

Escribiendo la relación (4.2:2) en la forma

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} \right),$$

integrémosla término a término a lo largo de una curva arbitraria L que parta del origen de coordenadas y no pase por los puntos $k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Obtenemos:

$$\int_{0}^{z} \left(\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} \right) dz = \sum_{1}^{\infty} \operatorname{Ln} \left(\frac{k\pi - z}{k\pi} \frac{k\pi + z}{k\pi} \right) = \sum_{1}^{\infty} \operatorname{Ln} \left(1 - \frac{z^2}{k\pi^2} \right),$$

donde en el segundo miembro figuran unos valores de los logaritmos completamente determinados; precisamente los valores de las integrales correspondientes:

$$\int_{L} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} \right) dz.$$

La integral del primer miembro es igual a uno de los valores de $\operatorname{Ln} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$. Así, pues,

$$\operatorname{Ln} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} \operatorname{Ln} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right),$$

de donde

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{n\to\infty} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right),$$

lo cual, ordinariamente, se escribe mediante el símbolo del producto infinito:

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right). \qquad (4.2:3)$$

Hemos obtenido el desarrollo de $\operatorname{sen} z$ en producto infinito. Este desarrollo se obtendrá de nuevo en el cap. séptimo, partiendo de unos razonamientos más generales.

3) Desarrollos de $\operatorname{cosec} z$ y $\operatorname{tg} z$. De los desarrollos de las funciones $\sec z$ y $\operatorname{cotg} z$ se obtienen inmediatamente los desarrollos de las funciones $\operatorname{cosec} z$ y $\operatorname{tg} z$. En efecto, $\operatorname{cosec} z = \sec\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. Por lo tanto, de la fórmula hallada anteriormente

$$\sec z = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m+1}^{m} \frac{(-1)^j}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}$$

hallamos:

$$\operatorname{cosec} z = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m+1}^{m} \frac{(-1)^j}{\frac{\pi}{2}-z-(2j-1)\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m+1}^{m} \frac{(-1)^j}{-\pi(j-1)-z} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=-m+1}^{m} \frac{(-1)^{j-1}}{\pi(j-1)+z}.$$

Sustituyendo $j-1$ por k, obtendremos:

$$\operatorname{cosec} z = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m-1} \frac{(-1)^k}{z+k\pi} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{z} - \left(\frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi}\right) + \left(\frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi}\right) - \dots + \right.$$
$$\left. + (-1)^{m-1}\left(\frac{1}{z-(m-1)\pi} + \frac{1}{z+(m-1)\pi}\right) + (-1)^m \frac{1}{z-m\pi}\right].$$

Agreguemos dentro de los corchetes un término más: $(-1)^m \times \times \frac{1}{z+m\pi}$ cuyo límite es igual a cero (uniformemente respecto de z, perteneciente a un círculo arbitrario $|z| < R$). Obtenemos:

$$\operatorname{cosec} z = \lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{z} - \frac{2z}{z^2-\pi^2} + \frac{2z}{z^2-(2\pi)^2} - \dots + (-1)^m \frac{2z}{z^2-(m\pi)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} (-1)^k \frac{2z}{z^2-(k\pi)^2}.$$

Este es el resultado pedido.

Análogamente, para $\operatorname{tg} z$ tenemos: $\operatorname{tg} z = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, por lo cual, de la fórmula obtenida anteriormente

$$\operatorname{cotg} z = \lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi}\right)\right]$$

obtenemos:

$$\operatorname{tg} z = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z}+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z-k\pi}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z+k\pi}\right)\right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-z}+\frac{1}{-\frac{\pi}{2}-z}\right)+\left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}-z}+\frac{1}{-\frac{3\pi}{2}-z}\right)+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left(\frac{1}{(2m-1)\frac{\pi}{2}-z}+\frac{1}{-(2m-1)\frac{\pi}{2}-z}\right)+\frac{1}{(2m+1)\frac{\pi}{2}-z}\right].$$

Despreciando entre corchetes el término $\frac{1}{(2m+1)\frac{\pi}{2}-z}$, cuyo límite es igual a cero, hallamos:

$$\operatorname{tg} z = \lim_{m\to\infty}\sum_{1}^{m}\frac{2z}{z^2-\frac{(2k-1)^2}{4}\pi^2} = \sum_{1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\frac{(2k-1)^2}{4}\pi^2}.$$

Este es el desarrollo buscado de $\operatorname{tg} z$.

4) En particular, de los desarrollos buscados fácilmente se obtienen los desarrollos de Laurent de las funciones trigonométricas en el entorno del origen de coordenadas que fueron hallados anteriormente mediante división de series (cap. tercero, ap. 7.2).

Consideremos $\sec z$. Esta función es analítica en el círculo $|z| < \frac{\pi}{2}$ y, por consiguiente, admite en el mismo un desarrollo en serie de Taylor. La fórmula (4.2:1) expresa esta función en forma de serie:

$$\sec z = \sum_{1}^{\infty}(-1)^j\frac{(2j-1)\pi}{z^2-(2j-1)^2\frac{\pi^2}{4}} =$$

$$= \sum_{1}^{\infty}(-1)^j\left[\frac{1}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{z+(2j-1)\frac{\pi}{2}}\right],$$

la cual es uniformemente convergente en cada círculo y, en particular, en el interior del círculo $|z| < \frac{\pi}{2}$. Por esta razón, basándose en el teorema de Weierstrass sobre las series uniformemente convergentes de funciones analíticas, se pueden obtener los coeficientes de Taylor de $\sec z$ sumando los coeficientes correspondientes de los desarrollos de Taylor de cada una de las funciones que figuran entre corchetes en el segundo miembro de la última fórmula (véase cap. 3, ap. 7.1). Pero

$$(-1)^j\left[\frac{1}{z-(2j-1)\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{z+(2j-1)\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=-(-1)^j\left[\sum_0^\infty\frac{z^k}{\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}\right]^{k+1}}+\sum_0^\infty\frac{(-1)^k z^k}{\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}\right]^{k+1}}\right]=$$

$$=2(-1)^{j-1}\sum_0^\infty\frac{z^{2m}}{\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}\right]^{2m+1}}\qquad\left(|z|<(2j-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Aquí, los coeficientes de potencias impares son iguales a cero, mientras que el coeficiente de z^{2m} $(m=0, 1, 2, \ldots)$ es igual a

$$\frac{2(-1)^{j-1}}{\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}\right]^{2m+1}}=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}}.$$

Por lo tanto, los coeficientes de Taylor de las potencias impares de z en el desarrollo de sec z, son iguales a cero (lo cual, evidentemente, se podría haber observado inmediatamente, puesto que la función sec z es par), mientras que los coeficientes de las potencias pares z^{2m} se expresan en forma de series:

$$2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}\sum_1^\infty\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}}.$$

Así, pues,

$$\sec z=\sum_0^\infty\left[2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}\sum_1^\infty\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}}\right]z^{2m}.$$

Recuérdese que en el cap. 3, ap. 7.2, se obtuvo este mismo desarrollo en otra forma:

$$\sec z=\sum_0^\infty(-1)^m\frac{E_{2m}}{(2m)!}z^{2m},$$

donde E_{2m} son enteros, denominados números de Euler ($E_0=1$, $E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6=-61, \ldots$). Comparando los coeficientes de ambas series, obtenemos las igualdades:

$$2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}\sum_1^\infty\frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{2m+1}}=(-1)^m\frac{E_{2m}}{(2m)!}\qquad(m=0, 1, 2, \ldots)$$

y, en particular:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} = \frac{E_0}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^3} = -\frac{E_2}{2\cdot 2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{32},$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^5} = \frac{E_4}{2\cdot 4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = \frac{5\pi^5}{1536},$$

. . . .

Consideremos también la función $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$, la cual es analítica en el círculo $|z| < \pi$. Para calcular los coeficientes de su desarrollo de Taylor, apliquemos la fórmula (4.2:2), de la cual se deduce la siguiente expresión de esta función en forma de serie:

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-j\pi} + \frac{1}{z+j\pi} \right).$$

Para cada término de esta suma se tiene el siguiente desarrollo de Taylor:

$$\frac{1}{z-j\pi} + \frac{1}{z+j\pi} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(j\pi)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(j\pi)^{k+1}} =$$

$$= -2 \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{2m-1}}{(j\pi)^{2m}} \qquad (|z| < \pi j).$$

Por lo tanto, los coeficientes de potencias pares de z en el desarrollo de Taylor de la función $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$ son iguales a cero (lo cual se observa inmediatamente, puesto que esta función es impar), mientras que los coeficientes de potencias impares z^{2m-1}, se expresan en forma de series:

$$-2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j\pi)^{2m}} = -\frac{2}{\pi^{2m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m}} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{\pi^{2m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m}} \right] z^{2m-1}.$$

En el cap. tercero, ap. 7.2, se obtuvo este mismo desarrollo en otra forma:

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} z^{2m-1}.$$

Comparando los dos desarrollos se deduce que

$$\frac{2}{\pi^{2m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m} B_{2m}}{(2m)!} .$$

Como el primer miembro de esta igualdad es positivo, el segundo también tiene que ser positivo, es decir, $(-1)^{m-1} B_{2m} > 0$. De aquí se deduce que los números de Bernoulli B_{2m} $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ tienen que alternar de signo $\Big($ya se vio en el cap. 3, ap. 7.2, que $B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42}, \ \ldots\Big)$.

De la relación obtenida se deducen, en particular, las siguientes igualdades:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{B}{2\cdot 2!} (2\pi)^2 = \frac{\pi^2}{6} ,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = -\frac{B}{2\cdot 4!} (2\pi)^4 = \frac{\pi^4}{90} ,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^6} = \frac{B_6}{2\cdot 6!} (2\pi)^6 = \frac{\pi^6}{945} ,$$

. . . .

4.3. Examinemos el problema de la construcción del polinomio de interpolación para una función analítica dada $f(z)$. El problema consiste en que, dado un sistema de puntos

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m,$$

pertenecientes a un recinto G, y dados otros tantos números naturales

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m,\quad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n\geq m,$$

se puede construir un polinomio $\Pi(z)$, del menor grado posible, que satisfaga a las condiciones:

$$\Pi(z_j)=f(z_j),\ \ldots,\ \Pi^{(\alpha_j-1)}(z_j)=f^{(\alpha_j-1)}(z_j) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

El polinomio $\Pi(z)$ que satisface a estas condiciones se llama **polinomio de interpolación** de la función $f(z)$, correspondiente a los puntos de interpolación z_j, con los órdenes de multiplicidad α_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$.

Si $\Pi(z)$ es tal polinomio, entonces para la diferencia

$$R(z) = f(z) - \Pi(z)$$

que, evidentemente, representa una función analítica en el recinto G, se tiene:

$$R(z_j) = \ldots = R^{(\alpha_j - 1)}(z_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Por consiguiente, $R(z)$ tiene un cero en cada uno de los puntos z_j de orden α_j por lo menos. Supongamos que $\Pi_1(z)$ es otro polinomio que satisface a las condiciones del problema. La función correspondiente

$$R_1(z) = f(z) - \Pi_1(z)$$

también tendrá los ceros $z_1, \ldots, z_m$, cuyos órdenes serán no menores que $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; lo mismo será cierto también para

$$R(z) - R_1(z) = \Pi_1(z) - \Pi(z).$$

En resumen, $\Pi_1(z) - \Pi(z)$ es un polinomio que tiene al menos n ceros: $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de órdenes no menores que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, de donde se deduce que $\Pi_1(z) - \Pi(z)$ es divisible por el polinomio

$$(z - z_1)^{\alpha_1} \ldots (z - z_m)^{\alpha_m} = \omega(z)$$

de grado n. Por esta razón, si cada uno de los polinomios $\Pi(z)$ y $\Pi_1(z)$ es de grado menor que n, su diferencia tiene que ser idénticamente igual a cero, es decir, entre los polinomios de grado menor que n existe no más de un polinomio que resuelve el problema planteado.

Demostremos que tal polinomio verdaderamente existe y puede expresarse en forma de una integral

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{4.3:1}$$

donde γ es una curva cerrada rectificable de Jordan cualquiera, situada en e recinto G junto con su parte interior, la cual contiene en su parte interior lo puntos $z_1, \ldots, z_m$. En efecto si $\omega(z) = \sum\limits_0^n A_k z^k$, resulta

$$\frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z} = \frac{\sum\limits_0^n A_k(\zeta^k - z^k)}{\zeta - z} =$$

$$= A_1 + A_2(\zeta + z) + \ldots + A_n(\zeta^{n-1} + \ldots + z^{n-1}) =$$

$$= A_1 + A_2\zeta + \ldots + A_n\zeta^{n-1} + (A_2 + A_3\zeta + \ldots + A_n\zeta^{n-2}) z + \ldots + A_n z^{n-1} =$$

$$= B_{n-1}(\zeta) + B_{n-2}(\zeta) z + \ldots + B_0(\zeta) z^{n-1},$$

donde $B_{n-1}(\zeta)$, $B_{n-2}(\zeta)$, $\ldots$, $B_0(\zeta)$ son polinomios respecto de ζ, cuyos grados coinciden con sus índices. Por consiguiente, $\Pi(z)$ se puede expresar en la forma

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \sum_{h=0}^{n-1} B_{n-1-h}(\zeta) z^h d\zeta =$$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} B_{n-1-h}(\zeta) d\zeta \right) z^h = \sum_{h=0}^{n-1} P_h z^h,$$

donde

$$P_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}B_{n-1-k}(\zeta)\,d\zeta \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

En resumen, la expresión (4.3:1) representa un polinomo de grado no superior a $n-1$. Formemos la diferencia $R(z)=f(z)-\Pi(z)$. Si el punto z está situado en el interior de γ, entonces $f(z)$ se puede expresar en la forma $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$, y, por consiguiente, $R(z)$ se puede transformar del modo siguiente:

$$R(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}\,\frac{\omega(\zeta)-\omega(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\frac{\omega(z)}{\omega(\zeta)}\,d\zeta \tag{4.3:2}$$

o bien, finalmente,

$$R(z)=\omega(z)\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\omega(\zeta)}\,. \tag{4.3:2'}$$

Evidentemente, la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\omega(\zeta)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

es una integral de tipo Cauchy y, por consiguiente, representa una función analítica en el interior de γ. Como $\omega(z)=(z-z_1)^{\alpha_1}\ldots(z-z_m)^{\alpha_m}$, la función

$$\frac{R(z)}{(z-z_j)^{\alpha_j}}=(z-z_1)^{\alpha_1}\ldots(z-z_{j-1})^{\alpha_{j-1}}(z-z_{j+1})^{\alpha_{j+1}}\ldots$$

$$\ldots(z-z_m)^{\alpha_m}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta$$

es analítica en un entorno del punto z_j (o incluso en toda la parte interior a γ). Por esta razón, $z=z_j$ es para $R(z)$ un cero de orden α_j al menos, y, posiblemente, de orden superior. Pero esto significa que

$$R(z_j)=0,\ \ldots\ R^{(\alpha_j-1)}(z_j)=0,$$

es decir,

$$f(z_j)=\Pi(z_j),\ \ldots,\ f^{(\alpha_j-1)}(z_j)=\Pi^{(\alpha_j-1)}(z_j) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Así, pues, hemos hallado el polinomio de interpolación (4.3:1) de grado no superior a $n-1$ que resuelve el problema planteado. En virtud de la observación hecha anteriormente, éste es el único polinomio de grado inferior a n que satisface a las condiciones del problema.

La fórmula (4.3:1), que proporciona el polinomio de interpolación, y la fórmula (4.3:2), que expresa la diferencia $f(z)-\Pi(z)$, es decir, que proporciona el **término complementario** $R(z)$ **de la fórmula de interpolación**

$$f(z)=\Pi(z)+R(z),$$

se llaman **fórmulas de Hermite**.

4.4. Ilustremos la importancia de las fórmulas obtenidas en unos cuantos ejemplos.

1) Supongamos primero que $m=1$, de modo que solamente se tiene un punto de interpolación z_1 de orden $\alpha_1=n$. Se trata de buscar el polinomio $\Pi(z)=t_{n-1}(z)$ de grado no superior a $n-1$ que satisfaga a las condiciones:

$$t_{n-1}(z_1)=f(z_1),\quad t'_{n-1}(z_1)=f'(z_1),\ \ldots,\ t_{n-1}^{(n-1)}(z_1)=f^{(n-1)}(z_1).$$

En el caso considerado $\omega(z)=\omega_n(z)=(z-z_1)^n$ y la fórmula (4.3:1) nos da:

$$t_{n-1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)^n}\,\frac{(\zeta-z_1)^n-(z-z_1)^n}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Pero

$$\frac{1}{(\zeta-z_1)^n}\,\frac{(\zeta-z_1)^n-(z-z_1)^n}{\zeta-z}=$$

$$=\frac{1}{(\zeta-z_1)^n}\left[(\zeta-z_1)^{n-1}+(\zeta-z_1)^{n-2}(z-z_1)+\ldots+(z-z_1)^{n-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_1}+\frac{1}{(\zeta-z_1)^2}(z-z_1)+\ldots+\frac{1}{(\zeta-z_1)^n}(z-z_1)^{n-1}. \qquad (4.4:1)$$

Obtenemos:

$$t_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta\,(z-z_1)^k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(z_1)}{k!}(z-z_1)^k. \qquad (4.4:2)$$

Hemos obtenido el **polinomio de interpolación de Taylor**, es decir, la suma parcial de la serie de Taylor (lo cual se debía de esperar desde el principio). El término complementario (4.3:2′) tiene la forma

$$R(z)=R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\frac{(z-z_1)^n}{(\zeta-z_1)^n}\,d\zeta. \qquad (4.4:3)$$

Este es el **término complementario de la fórmula de Taylor**. En virtud del teorema integral para un sistema de circuitos, su valor no varía si la integración se efectúa sobre una circunferencia cualquiera C_ρ: $|\zeta-z_1|=\rho$, donde ρ es menor que la distancia Δ desde el punto z_1 hasta la frontera del recinto G (en el cual $f(z)$ es analítica). Por esta razón, para los puntos z situados en el interior de C_ρ, se tiene:

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\frac{(z-z_1)^n}{(\zeta-z_1)^n}\,d\zeta$$

y

$$|R_n(z)|<\frac{\rho}{2\pi}\,\frac{M(\rho)}{\rho-|z-z_1|}\left(\frac{|z-z_1|}{\rho}\right)^n.$$

Como $\frac{|z-z_1|}{\rho}<1$, resulta que $R_n(z)$ tiende a cero cuando $n\to\infty$, de donde se obtiene de nuevo que la sucesión de polinomios de Taylor $\{t_{n-1}(z)\}$

converge hacia $f(z)$ en el interior del círculo $|z - z_1| < \Delta$, perteneciente al recinto de analiticidad de la función $f(z)$.

2) Sea $m = n$, de modo que se tienen n puntos de interpolación $z_1, z_2, \ldots, z_n$, cada uno de orden 1 ($\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$). Se trata de buscar el polinomio $\Pi(z) = l_{n-1}(z)$ de orden no superior a $n - 1$, que satisfaga a las condiciones:

$$l_{n-1}(z_1) = f(z_1), \quad l_{n-1}(z_2) = f(z_2), \ \ldots, \ l_{n-1}(z_n) = f(z_n).$$

En el caso dado,

$$\omega(z) = \omega_n(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n),$$

y por la fórmula (4.3:1), resulta:

$$l_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} \, \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z} \, d\zeta \tag{4.4:4}$$

Para calcular esta integral, lo más fácil es aplicar el teorema de los residuos. La función subintegral $\varphi(z)$, considerada como función de ζ, tiene polos simples en los puntos z_k ($k = 1, \ldots, n$). El punto $\zeta = z$ no es singular para la misma, puesto que el polinomio $\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)$ es divisible por $\zeta - z$. Para los residuos de $\varphi(\zeta)$ en los puntos z_k resultan las expresiones:

$$\operatorname*{Res}_{\zeta = z_k} \varphi(\zeta) = \frac{f(z_k)}{\omega_n'(z_k)} \, \frac{\omega_n(z)}{z - z_k}.$$

donde $\dfrac{\omega_n(z)}{z - z_k} = (z - z_1) \ldots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \ldots (z - z_n)$ es un polinomio en z de grado $n - 1$.

Por consiguiente,

$$l_{n-1}(z) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\zeta = z_k} \varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(z_k)}{\omega_n'(z_k)} \, \frac{\omega_n(z)}{z - z_k}. \tag{4.4:5}$$

Hemos obtenido el polinomio de interpolación de Lagrange de grado $n - 1$. El término complementario de la fórmula de interpolación correspondiente tiene la forma:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\zeta)} \, d\zeta. \tag{4.4:6}$$

El comportamiento del mismo para $n \to \infty$ depende de la relación entre la distribución de los puntos de interpolación $\{z_n\}$ en el interior del recinto G y el carácter de la función $f(z)$.

3) El polinomio de interpolación de Lagrange puede escribirse de otra forma. Transformemos la expresión

$$\sigma_n = \frac{1}{\omega_n(\zeta)} \, \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z},$$

que, como ya sabemos, representa un polinomio en z de grado $n - 1$.

Para, $n = 1$ se tiene:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\zeta - z_1} \, \frac{(\zeta - z_1) - (z - z_1)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_1}.$$

Consideremos la diferencia

$$\delta_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k = \frac{1}{\omega_{k+1}(\zeta)} \frac{\omega_{k+1}(\zeta) - \omega_{k+1}(z)}{\zeta - z} - \frac{1}{\omega_k(\zeta)} \frac{\omega_k(\zeta) - \omega_k(z)}{\zeta - z};$$

como

$$\omega_{k+1}(\zeta) = (\zeta - z_{k+1})\, \omega_k(\zeta) \text{ y}$$
$$\omega_{k+1}(z) = (z - z_{k+1})\, \omega_k(z),$$

esta diferencia puede representarse en la forma siguiente:

$$\delta_k = \frac{(\zeta - z_{k+1})\,\omega_k(\zeta) - (z - z_{k+1})\,\omega_k(z) - (\zeta - z_{k+1})\,\omega_k(\zeta) + (\zeta - z_{k+1})\,\omega_k(z)}{\omega_{k+1}(\zeta)(\zeta - z)} =$$
$$= \frac{(\zeta - z)\,\omega_k(z)}{\omega_{k+1}(\zeta)(\zeta - z)} = \frac{\omega_k(z)}{\omega_{k+1}(\zeta)}.$$

Haciendo $\delta_0 = \sigma_1 = \dfrac{1}{\zeta - z_1} = \dfrac{1}{\omega_1(\zeta)}$, formemos la suma $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \delta_k(\zeta)$; obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k(\zeta) = \sigma_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\sigma_{k+1} - \sigma_k) = \sigma_n = \frac{1}{\omega_1(\zeta)} + \frac{\omega_1(z)}{\omega_2(\zeta)} + \ldots + \frac{\omega_{n-1}(z)}{\omega_n(\zeta)}.$$

En resumen,

$$\frac{1}{\omega_n(\zeta)} \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{\omega_1(\zeta)} + \frac{\omega_1(z)}{\omega_2(\zeta)} + \ldots + \frac{\omega_{n-1}(z)}{\omega_n(\zeta)}. \qquad (4.4:7)$$

Evidentemente, haciendo aquí $z_1 = \ldots = z_n$, se obtiene de aquí la identidad (4.4:1).

De la igualdad (4.4:7) se deduce que el polinomio de interpolación de Lagrange $l_{n-1}(z)$ se puede representar en la forma

$$l_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_0^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)}\, d\zeta\, \omega_k(z). \qquad (4.4:8)$$

En esta forma, éste se llama *polinomio de interpolación de Newton*. La ventaja de la fórmula (4.4:8) ante la fórmula (4.4:5) consiste en que, según la fórmula (4.4:8), para pasar de $l_{n-1}(z)$ a $l_n(z)$ es suficiente agregar (solamente) a $l_{n-1}(z)$ un término de la forma $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{n+1}(\zeta)}\, d\zeta \cdot \omega_n(z)$, mientras que la fórmula (4.4:5) no sólo exige el aumento de un término, sino también la sustitución de cada término anterior por uno nuevo distinto.

En particular, si la sucesión $\{l_{n-1}(z)\}$ converge hacia la función $f(z)$, teniendo en cuenta la fórmula (4.4:8), en lugar de la relación

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} l_{n-1}(z)$$

se puede emplear la serie

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)}\, d\zeta\, \omega_k(z). \qquad (4.4:9)$$

Esta se llama serie de interpolación de Newton. Evidentemente, para $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = \ldots$, $\omega_{k+1}(\zeta)$ se hace igual a $(\zeta - z_1)^{k+1}$, $\omega_k(z)$ se hace igual a $(z - z_1)^k$, y resulta la serie de Taylor como un caso particular de la serie de Newton:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)^{k+1}} d\zeta \, (z - z_1)^k, \tag{4.4:10}$$

Obsérvese, por cierto, que ya establecimos las condiciones para la convergencia de la serie (4.4:10), mientras que el problema general de la convergencia de la serie de Newton, es decir, el problema de las condiciones según las cuales el término complementario de la serie de Newton (4.4:6) (que es también el término complementario de la serie de Lagrange) tiende a cero cuando $n \to \infty$, exige un estudio particular, que tenga en cuenta también la distribución de los puntos de interpolación y el comportamiento de la función $f(z)$. Este problema ha sido tratado por A. Guelfond.

Detengámonos también a examinar los coeficientes de la serie de Newton:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} d\zeta \qquad (k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots).$$

En el caso particular de la serie de Taylor estos coeficientes se expresan mediante las derivadas de $f(z)$, precisamente se representan en la forma $\dfrac{f^{(k)}(z_1)}{k!}$. En el caso general, ellos se expresan mediante las diferencias divididas de la función $f(z)$ respecto de los puntos $\{z_n\}$.

Para obtener la expresión debida de estos coeficientes, apliquemos el teorema de los residuos. Tendremos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} d\zeta = \sum_{j=1}^{k+1} \operatorname*{Res}_{\zeta = z_j} \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{f(z_j)}{\omega'_{k+1}(z_j)}, \tag{4.4:11}$$

donde

$$\omega_{k+1}(z_j) = (z_j - z_1) \ldots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \ldots (z_j - z_{k+1}).$$

En particular, para $k = 1$ obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_2(\zeta)} d\zeta = \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1} = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}.$$

Llamemos a esta expresión diferencia dividida primera de la función $f(z)$ respecto de los puntos z_1 y z_2 y designémosla por $\Delta^{(1)}[f;\ z_1,\ z_2]$. En general, si ya se ha definido la diferencia dividida de orden $k-1$, llamaremos diferencia dividida de orden k de la función $f(z)$ respecto de los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}$, a la expresión

$$\frac{\Delta^{(k-1)}[f;\ z_2,\ \ldots,\ z_{k+1}] - \Delta^{(k-1)}[f;\ z_1,\ \ldots,\ z_k]}{z_{k+1} - z_1} = \Delta^{(k)}[f;\ z_1,\ \ldots,\ z_k,\ z_{k+1}].$$

Supongamos que ya se ha demostrado que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_k(\zeta)} d\zeta = \Delta^{(k-1)}[f(z);\ z_1,\ \ldots,\ z_k]$$

para cualquier sistema de puntos $z_1, \ldots, z_k$; demostremos que entonces,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)}\,d\zeta = \Delta^{(k)}[f(z);\ z_1, \ldots, z_k,\ z_{k+1}]. \tag{4.4:12}$$

En efecto, debido a la hipótesis hecha, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_k)}\,d\zeta = \Delta^{(k-1)}[f(z);\ z_1, \ldots, z_{k+1}],$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_{k+1})}\,d\zeta = \Delta^{(k-1)}[f(z);\ z_2, \ldots, z_{k+1}].$$

Por consiguiente,

$$\Delta^{(k)}\left[f(z);\ z_1, \ldots, z_{k+1}\right]=$$

$$=\frac{\Delta^{(k-1)}[f(z);\ z_2, \ldots, z_{k+1}]-\Delta^{(k-1)}[f(z);\ z_1, \ldots, z_k]}{z_{k+1}-z_1}=$$

$$=\frac{1}{z_{k+1}-z_1}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_{k+1})}-\frac{1}{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_k)}\right]d\zeta=$$

$$=\frac{1}{z_{k+1}-z_1}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\frac{(\zeta-z_1)-(\zeta-z_{k+1})}{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_{k+1})}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{k+1}(\zeta)}\,d\zeta,$$

como se quería demostrar. Haciendo también

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\omega_1(\zeta)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=f(z_1)=\Delta^{(0)}[f;\ z_1],$$

representamos el polinomio de interpolación de Newton (4.4:8) en la forma

$$l_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^k[f(z);\ z_1, \ldots, z_{k+1}]\,\omega_k(z).$$

De acuerdo a esto, la serie de interpolación de Newton toma la forma siguiente:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta^k[f(z);\ z_1, \ldots, z_{k+1}]\,\omega_k(z).$$

4) Finalmente, examinemos el problema de interpolación en el que se dan m puntos distintos: $z_1, \ldots, z_m$, de órdenes iguales $\alpha_1=\ldots=\alpha_m=p$; a continuación aumentaremos indefinidamente el número p, sin cambiar los mismos puntos de interpolación. Se trata de buscar un polinomio $i_{mp-1}(z)$ de grado no superior a $mp-1$ que satisfaga a las condiciones:

$$i_{mp-1}(z_k)=f(z_k),\ i'_{mp-1}(z_k)=f'(z_k), \ldots,$$

$$\ldots, i^{(p-1)}_{mp-1}(z_k)=f^{(p-1)}(z_k)$$

$(k=1, 2, \ldots, m)$. Haciendo

$$(z-z_1)\ldots(z-z_m)=q(z),$$

se tiene:

$$\omega_{mp}(z)=(z-z_1)^p \ldots (z-z_m)^p=[q(z)]^p,$$

y, por consiguiente,

$$j_{mp-1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^p}\,\frac{[q(\zeta)]^p-[q(z)]^p}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Transformemos la expresión

$$\frac{1}{[q(\zeta)]^p}\,\frac{[q(\zeta)]^p-[q(z)]^p}{\zeta-z}$$

del modo siguiente:

$$\frac{1}{[q(\zeta)]^p}\,\frac{[q(\zeta)]^p-[q(z)]^p}{\zeta-z}=$$
$$=\frac{1}{[q(\zeta)]^p}\,\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}\,\{[q(\zeta)]^{p-1}+[q(\zeta)]^{p-2}\,q(z)+$$
$$+\ldots+[q(z)]^{p-1}\}=\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}\left\{\frac{1}{q\zeta}+\frac{q(z)}{[q(\zeta)]^2}+\ldots+\frac{[q(z)]^{p-1}}{[q(\zeta)]^p}\right\}.$$

Entonces tendremos:

$$j_{mp-1}(z)=\sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^{n+1}}\,\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\,[q(z)]^n. \tag{4.4:13}$$

Para las transformaciones ulteriores, apliquemos la fórmula (4.4:7), sustituyendo en la misma $\omega_n(z)$ por $q(z)$. Resulta:

$$\frac{1}{[q(\zeta)]^{n+1}}\,\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}=\frac{1}{[q(\zeta)]^n}\left\{\frac{1}{q(\zeta)}\,\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}\right\}=$$
$$=\frac{1}{[q(\zeta)]^n}\left[\frac{1}{\zeta-z_1}+\frac{z-z_1}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}+\ldots+\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_{m-1})}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_m)}\right]$$

de donde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^{n+1}}\,\frac{q(\zeta)-q(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$
$$=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^n}\,\frac{d\zeta}{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_{j+1})}\,(z-z_1)\ldots(z-z_j).$$

Hemos obtenido un polinomio $Q_n(z)$ de grado no superior a $m-1$, cuyos coeficientes son integrales de la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^n}\,\frac{d\zeta}{(\zeta-z_1)\ldots(\zeta-z_{j+1})}.$$

Mediante el teorema de los residuos se podrían haber hallado sus expresiones mediante los valores de la función $f(z)$ y sus derivadas en los puntos $z_1, \ldots, z_m$.

Volviendo a examinar la fórmula (4.4:13), hallamos:

$$f_{mp-1}(z)=\sum_{n=0}^{p-1} Q_n(z)\,[q(z)]^n;$$

este último se llama polinomio de interpolación de Jacobi.

Consideremos el término complementario de la fórmula de interpolación correspondiente

$$R_{mp}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\frac{[q(z)]^p}{[q(\zeta)]^p}\,d\zeta.$$

Para hallar una cota, obsérvese que, desde el principio, a la curva γ solamente se la han impuesto las siguientes restricciones: γ junto con su parte interior pertenece al recinto G en el cual la función $f(z)$ es analítica y contiene en su interior a todos los puntos $z_1, \ldots, z_m$. Tomemos como curva γ la lemniscata Λ_ρ con los focos en los puntos $z_1, \ldots, z_m$:

$$|q(z)|=\rho^m$$

(véase el cap. 3, ap. 6.2). Ya sabemos que ella encierra en su interior los puntos $z_1, \ldots, z_m$, cualquiera que sea $\rho>0$. Supongamos ahora que $\rho_0>0$ es un valor del radio tal, que $f(z)$ es uniforme y analítica en el interior de Λ_{ρ_0}, y sea $\rho>0$ un número positivo arbitrario, menor que ρ_0. Entonces, para cualquier ρ' que satisfaga a las desigualdades $\rho<\rho'<\rho_0$ la lemniscata $\Lambda_{\rho'}$ pertenece al interior de Λ_{ρ_0} y contiene el conjunto cerrado $\overline{G}_\rho$, constituido por la parte interior de la lemniscata Λ_ρ y la lemniscata misma. Como en todos los puntos $z\in\overline{G}_\rho$ se cumple la desigualdad

$$|q(z)|\leqslant\rho^m,$$

y en los puntos $\zeta\in\Lambda_{\rho'}$ se verifica la igualdad

$$|q(\zeta)|=\rho'^m,$$

tomando por γ la lemniscata $\Lambda_{\rho'}$ y designando con $M(\rho')$ el máximo del módulo de $f(z)$ en los puntos de la misma, tendremos:

$$|R_{mp}(z)|<\frac{1}{2\pi}\,\frac{M(\rho')}{\delta(\rho,\rho')}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{mp}\operatorname{long}\Lambda_{\rho'}\ (z\in G_\rho),$$

donde se ha designado con $\delta(\rho,\rho')$ la distancia entre Λ_ρ y $\Lambda_{\rho'}$.

De esta fórmula se ve que $R_{mp}(z)$ tiende a cero uniformemente en el conjunto $\overline{G}_\rho$, cuando p crece indefinidamente. Como

$$R_{mp}(z)=f(z)-f_{mp-1}(z)$$

y ρ se puede tomar arbitrariamente próximo a ρ_0, de aquí se deduce que la sucesión de polinomios $f_{mp-1}(z)$ converge uniformemente en el interior de Λ_{ρ_0} hacia la función $f(z)$:

$$f(z)=\lim_{p\to\infty} f_{mp-1}(z)=\lim_{p\to\infty}\sum_{n=0}^{p-1} Q_n(z)\,[q(z)]^n,$$

es decir, resulta el desarrollo en serie

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} Q_n(z)\,[q(z)]^n. \tag{4.4:14}$$

Esta se llama **serie de interpolación de Jacobi.**

En resumen, *toda función $f(z)$, analítica en el interior de la lemniscata Λ_{ρ_0},* con los focos $z_1, \ldots, z_m$, puede desarrollarse en serie de Jacobi (4.4:14), *la cual converge uniformemente en el interior de Λ_{ρ_0}.*

Recordemos que $q(z) = (z-z_1)\ldots(z-z_m)$ y

$$Q_n(z) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{[q(\zeta)]^n} \frac{d\zeta}{(\zeta - z_1)\ldots(\zeta - z_{j+1})} (z-z_1)\ldots(z-z_j).$$

En el caso particular en que $m=1$, se tiene $q(z) = z - z_1$,

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!},$$

y la serie de Jacobi se convierte en la serie de Taylor; la lemniscata Λ_{ρ_0} se convierte en la circunferencia $|z - z_1| = \rho_0$.

Cuando $m = 2$, se tiene: $q(z) = (z-z_1)(z-z_2)$ y

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)^{n+1}(\zeta - z_2)^n} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)^{n+1}(\zeta - z_2)^{n+1}} d\zeta \,(z - z_1).$$

Aplicando a cada una de las integrales el teorema de los residuos y efectuando después unas transformaciones sencillas, resulta:

$$Q_0(z) = \frac{f(z_1)(z-z_2) - f(z_2)(z-z_1)}{z_1 - z_2},$$

y para $n \geqslant 1$

$$Q_n(z) = \frac{1}{n!(z_1 - z_2)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{(z_1 - z_2)^k} \left[(-1)^k f^{(n-k)}(z_1) \left(z - \frac{kz_1 + nz_2}{k+n}\right) - (-1)^n f^{(n-k)}(z_2) \left(z - \frac{nz_1 + kz_2}{k+n}\right)\right],$$

donde

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = n(n+1), \quad \lambda_k = \frac{n(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2](n+k)}{k!} \quad (k \geqslant 2).$$

En particular, haciendo $z_1 = -z_2 = a$, hallaremos que toda función $f(z)$, analítica en el interior de la lemniscata Λ_{ρ_0}:

$$|(z-a)(z+a)| = \rho_0^2,$$

se desarrolla en serie:

$$f(z) = \frac{f(a)(z+a) - f(-a)(z-a)}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2-a^2)}{n!(2a)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{(2a)^k} \left[(-1)^k f^{(n-k)}(a) \left(z + \frac{n-k}{n+a} a\right) - (-1)^n f^{(n-k)}(-a) \left(z - \frac{n-k}{n+k} a\right)\right].$$

Es conveniente observar que mientras el interior de la lemniscata Λ_{ρ_0} no sea conexo (lo cual ocurrirá para valores suficientemente pequeños de ρ_0), la función analítica $f(z)$ podrá definirse en cada componente del conjunto abierto, cuya frontera es Λ_{ρ_0}, independientemente de como se defina en las demás componentes del mismo conjunto. Así, por ejemplo, si $m=2$ y $\rho_0 \leqslant |a|$, la lemniscata $|(z-a)(z+a)| = \rho_0^2$ limita dos recintos simplemente conexos, sin puntos comunes. Hagamos $f(z)$ igual a una constante A en aquel recinto de éstos que contiene al punto $-a$, e igual a una constante B en aquel recinto que contiene al punto a. Entonces, obtenemos la serie:

$$\frac{B+A}{2}+z\,\frac{B-A}{2a}+\frac{B-A}{2a}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)\,\ldots\,(2n-1)\,2n}{n!}\,\frac{z\,(z^2-a^2)^n}{2^{2n}a^{2n}},$$

la cual converge en uno de los dos recintos limitados por la lemniscata hacia la constante A y en el otro, hacia B.

Por cierto, el último resultado se puede obtener mediante el desarrollo binómico. En efecto, sustituyendo en la fórmula

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)\,\ldots\,(2n-1)\,2n}{n!\,2^{2n}}\,t^n, \quad |t|<1$$

t por $\dfrac{z^2-a^2}{a^2}$, en el interior de la lemniscata $|z^2-a^2|=|a|^2$ se tiene

$$|t|=\frac{|z^2-a^2|}{|a|^2}<1.$$

Por consiguiente,

$$\pm\frac{a}{z}=1+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)\,\ldots\,(2n-1)\,2n}{n!\,2^{2n}}\,\frac{(z^2-a^2)^n}{a^{2n}},$$

donde el signo en el primer miembro se debe elegir de modo que para $z=\pm a$ resulte la unidad; por esta razón, en el recinto limitado por la lemniscata y que contiene al punto $-a$ (una mitad del «ocho»), se debe tomar el signo menos, y en el recinto limitado por la lemniscata y que contiene al punto a (la otra mitad del «ocho»), el signo más. Del desarrollo obtenido se deduce que

$$\pm\frac{B-A}{2}=\frac{B-A}{2a}\,z+\frac{B-A}{2a}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+1)\,\ldots\,(2n-1)\,2n}{n!\,2^{2n}}\,\frac{z\,(z^2-a^2)^n}{a^{2n}},$$

de donde, finalmente, se deduce el resultado indicado anteriormente.

Para estudiar la teoría de interpolación recomendamos al lector leer los libros V. G o n c h a r o v, Teoría de la interpolación y aproximación de las funciones, (cap. I. Interpolación por puntos) (В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, М., Гостехиздат, 1954 (гл. I. Точечное интерполирование) y A. G u e l f o n d, Cálculo de diferencias finitas. (А. О. Г е л ь ф о н д, Исчисление конечных разностей, изд., 3, «Наука», 1966).

§ 5. FUNCIONES INVERSAS E IMPLICITAS

5.1. Supongamos que

$$w = f(z) = w_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (5.5:1)$$

donde $a_1 = f'(z_0) \neq 0$. Consideremos un círculo $|z - z_0| < \rho_0$, cuyo radio sea menor que el radio de convergencia de la serie (5.1:1) y en cuyos puntos, distintos de z_0, la función $f(z)$ tome valores distintos de $f(z_0) = w_0$ (véase el cap. 6.1, cap. 3). Designando con δ la distancia desde el punto w_0 hasta la imagen de la circunferencia γ: $|z - z_0| = \rho_0$ en la transformación $w = f(z)$, para cada punto w_1 perteneciente al entorno $|w - w_0| < \delta$ tendremos:

$$|f(z) - w_0| > |w_0 - w_1| \qquad (z \in \gamma),$$

de donde, en virtud del teorema de Rouché (véase el ap. 3.5), se deduce que la ecuación

$$f(z) - w_0 = 0$$

y

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1) = 0$$

tienen un mismo número de raíces en el interior de γ. Pero la primera de ellas solamente tiene una raíz z_0; por consiguiente, la segunda también tendrá solamente una raíz z_1:

$$f(z_1) = w_1.$$

En resumen, en el entorno $|w - w_0| < \delta$ está definida una función uniforme $z = \varphi(w)$, cuyos valores pertenecen al entorno $|z - z_0| < \rho_0$ y la cual es inversa con respecto de la función $w = f(z)$

Aquí obtendremos para la misma un desarrollo en serie de potencias de $w - w_0$, convergente en el círculo $|w - w_0| < \delta$, de donde se deducirá que la función $\varphi(z)$ es analítica en el círculo indicado. La serie que obtendremos representará la i n v e r s i ó n d e l a s e r i e (5.1:1). Queriendo establecer un resultado más general, consideremos una función arbitraria $F(z)$, analítica en un recinto que contenga al círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant \rho_0$, y formemos el desarrollo en serie para la función $F[\varphi(w)]$. En particular, haciendo $F(z) = z$, obtendremos el desarrollo de $\varphi(w)$.

Si w es un punto arbitrario del círculo $|w - w_0| < \delta$, entonces, como ya se ha observado, la función $f(z) - w$ tiene un cero simple único $z = \varphi(w)$ en el interior de γ: $|z - z_0| = \rho_0$. Por consiguiente, la función $F(\zeta)\dfrac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}$ tiene un polo simple único $\varphi(w)$ en el interior de γ, con el residuo igual a $F[\varphi(w)]$, de donde se deduce que

$$F[\varphi(w)] = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w} d\zeta. \tag{5.1:2}$$

Está claro, que la fórmula obtenida es un caso particular de la fórmula (3.5:1). Para obtener de aquí el desarrollo en serie pedido, apliquemos a la integral (5.1:2) un método análogo al que se empleó para obtener de la integral de Cauchy la serie de potencias para una función analítica.

Como $|w-w_0| < \delta$, mientras que $|f(\zeta)-w_0| \geqslant \delta$ $(\zeta \in \gamma)$, la fracción $\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}$ es desarrollable en serie de potencias de $\frac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}$:

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w} = \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w_0-(w-w_0)} = \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w_0} \left[\frac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}\right]^n .$$

Haciendo $\max_\gamma |f'(\zeta)| = M$, hallaremos que el módulo del término general de la serie obtenida no es superior en los puntos de la circunferencia γ al número $\frac{M}{\delta}\left(\frac{|w-w_0|}{\delta}\right)^n$, de donde se deduce que la serie es uniformemente convergente en γ y puede integrarse término a término. Poniendo este desarrollo en la fórmula (5.1:2), obtenemos:

$$F[\varphi(w)] = \frac{1}{2\pi i} \int F(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w_0} \left[\frac{w-w_0}{f(\zeta)-w_0}\right]^n d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\zeta) f'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^{n+1}} d\zeta \, (w-w_0)^n. \tag{5.1:3}$$

Hemos obtenido una serie de potencias para $F[\varphi(w)]$, convergente para $|w-w_0| < \delta$. En particular, si $F(z) = z$, resulta:

$$z = \varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\zeta f'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^{n+1}} d\zeta \, (w-w_0)^n. \tag{5.1:4}$$

Esta es la inversión de la serie (5.1:1). Transformemos los coeficientes de los desarrollos hallados. Para $n = 0$ obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\zeta) f'(\zeta)}{f(\zeta)-w_0} d\zeta = F(z_0),$$

puesto que en el interior de γ la función subintegral tiene un polo (simple) único en el punto $\zeta = z_0$ con el residuo igual a $F(z_0)$.

Supongamos ahora que $n \geqslant 1$. Entonces, empleando el método de integración por partes (el cual, evidentemente, es aplicable a las integrales de las funciones analíticas de variable compleja), obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F(\zeta)\,f'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^{n+1}}\,d\zeta=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i n}\int\limits_{\gamma}F(\zeta)\,d\left\{\frac{1}{[f(\zeta)-w_0]^n}\right\}=\frac{1}{2\pi i n}\int\limits_{\gamma}\frac{F'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^n}\,d\zeta.$$

La función $\dfrac{F'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^n}$ tiene en el interior de γ un polo de orden n en el punto $\zeta = z_0$ (puesto que el denominador de la fracción $[f(\zeta) - w_0]^n$ tiene un cero de orden n en este punto). Por esta razón (véase el ap. 3.4),

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{F'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^n}\right\}=\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left\{\frac{F'(\zeta)\,(\zeta-z_0)^n}{[f(\zeta)-w_0]^n}\right\}_{\zeta=z_0}.$$

Haciendo, para abreviar,

$$\frac{z-z_0}{f(z)-w_0}=\chi(z), \tag{5.1:5}$$

donde, en virtud de las hipótesis hechas respecto de $f(z)$, la función $\chi(z)$ es analítica en el círculo $|z-z_0|<\rho_0$, resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F(\zeta)\,f'(\zeta)}{[f(\zeta)-w_0]^{n+1}}\,d\zeta=\frac{1}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\{F'(\zeta)\,[\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0}. \tag{5.1:6}$$

Por consiguiente, la serie (5.1:3) puede escribirse definitivamente en la forma

$$F[\varphi(w)]=F(z_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\{F'(\zeta)\,[\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0}(w-w_0)^n. \tag{5.1:7}$$

Esta serie, así como su caso particular (para $F(z)=z$):

$$z=\varphi(w)=z_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\{[\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta=z_0}(w-w_0)^n, \tag{5.1:8}$$

se llama *serie de Lagrange*.

5.2. Examinemos el problema de la inversión de una serie de potencias de la forma

$$w=f(z)=w_0+a_k(z-z_0)^k+a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots, \tag{5.2:1}$$

donde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0 \text{ y } k > 1.$$

Consideremos el círculo K: $|z-z_0| < \rho_0$, en el cual se verifica la relación

$$|a_{k+1}(z-z_0) + a_{k+2}(z-z_0)^2 + \ldots| = |\lambda(z)| < |a_k|.$$

Entonces, en este entorno, para $z \neq z_0$, se tiene:

$$|f(z) - w_0| = |z-z_0|^k\, |a_k + \lambda(z)| \geqslant |z-z_0|^k\, (|a_k| - |\lambda(z)|) > 0,$$

es decir, $f(z)$ no toma el valor w_0 en los puntos distintos de z_0.

Introduzcamos ahora la función

$$\left[1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right]^{\frac{1}{k}}.$$

Como $\lambda(z)$ es analítica en el círculo K y en éste se cumple la desigualdad $\left|\frac{\lambda(z)}{a_k}\right| < 1$, esta función posee en este círculo una rama uniforme analítica $\psi(z)$, que se expresa por la fórmula

$$\psi(z) = \sqrt[k]{\left|1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right|}_{+} \left\{\cos\left[\frac{1}{k}\arg\left(1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + i \operatorname{sen}\left[\frac{1}{k}\arg\left(1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right)\right]\right\}$$

y se caracteriza por completo en que toma el valor 1 en el punto $z = z_0$, donde $\lambda(z) = 0$.

La función $\psi(z)$ es desarrollable en el círculo K en serie de potencias

$$\psi(z) = 1 + \alpha_1(z-z_0) + \alpha_2(z-z_0)^2 + \ldots,$$

el cual se puede obtener, por ejemplo, poniendo la serie

$$\frac{\lambda(z)}{a_k} = \frac{a_{k+1}}{a_k}(z-z_0) + \frac{a_{k+2}}{a_k}(z-z_0)^2 + \ldots$$

en la serie binómica

$$\psi(z) = \left[1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right]^{\frac{1}{k}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{k}\frac{\lambda(z)}{a_k} + \frac{1}{2!}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\left[\frac{\lambda(z)}{a_k}\right]^2 + \ldots$$

Mediante las funciones introducidas aquí, se puede representar la transformación $w = f(z)$ en el círculo K del modo siguiente:

$$w = f(z) = w_0 + a_k(z-z_0)^k\left[1 + \frac{\lambda(z)}{a_k}\right] =$$
$$= w_0 + a_k(z-z_0)^k\,[\psi(z)]^k. \tag{5.2:2}$$

Sustituyámosla por dos transformaciones, realizadas sucesivamente, una tras otra:

$$t = \sqrt[k]{f(z) - f(z_0)} = \sqrt[k]{a_k}\,(z - z_0)\,\psi(z) =$$
$$= \sqrt[k]{a_k}\,(z - z_0) + \sqrt[k]{a_k}\,\alpha_1 (z - z_0)^2 + \ldots, \tag{5.2:3}$$
$$w = w_0 + t^k. \tag{5.2:4}$$

En virtud de los resultados del apartado anterior, la ecuación (5.2:3) determina z en un entorno del punto $t = 0$, como una función uniforme y analítica de t (el valor $\sqrt[k]{a_k}$ está fijado):

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{[\chi(\zeta)]^n\}_{\zeta = z_0} t^n,$$

donde

$$\chi(\zeta) = \frac{\zeta - z_0}{a_k^{\frac{1}{k}} (\zeta - z_0)\,\psi(\zeta)} = \frac{\zeta - z_0}{[f(\zeta) - f(z_0)]^{\frac{1}{k}}}.$$

Observando que $t = (w - w_0)^{\frac{1}{k}}$ es una función k-forme de w, la cual es analítica para $w \neq w_0$, sacamos la conclusión de que la función $z = \varphi(w)$, inversa con respecto de (5.2:1), es una función k-forme de w, analítica en un entorno $\varkappa$ del punto w_0, a excepción del mismo punto w_0. En este entorno, ésta se expresa por una serie dispuesta según las potencias fraccionarias de $w - w_0$:

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{\chi[(\zeta)]^n\}_{\zeta = z_0} (w - w_0)^{\frac{n}{k}}. \tag{5.2:5}$$

Si en el entorno indicado $\varkappa$ del punto w_0 se traza algún radio, entonces la función $t = (w - w_0)^{\frac{1}{k}}$ tendrá en el recinto que se obtiene de $\varkappa$ excluyendo los puntos pertenecientes a este radio, k ramas uniformes analíticas. A cada una de ellas la corresponde una rama uniforme y analítica determinada de la función $z = \varphi(w)$ (5.2:5).

A un recorrido 1-ple del punto w por una circunferencia con el centro en w_0 le corresponderá el paso de una de las ramas de $(w - w_0)^{\frac{1}{k}}$ a otra y, debido a esto, el paso de una de las ramas de la función $z = \varphi(w)$ a otra. Como resultado de un recorrido k-ple alrededor del punto w_0, cada rama de la función $(w - w_0)^{\frac{1}{k}}$ pasará a sí misma; por esto, también cada rama de la función $z = \varphi(w)$ pasará a sí misma, de donde se deduce que el punto $w = w_0$ es un punto de ramificación algebraico de la función $\varphi(w)$ de orden $k-1$.

En resumen, como resultado de invertir la serie de potencias (5.2:1) resulta una función analítica k-forme con un punto de ramificación algebraico de orden $k-1$ en el punto $w = w_0$.

El lector extenderá fácilmente los resultados precedentes al caso en que las series estén dispuestas según las potencias negativas de z, o al caso en que cada una de las series, estando dispuesta según las potencias enteras de $z - z_0$, contenga un número finito de potencias negativas de $z - z_0$.

5.3. Examinemos unos cuantos ejemplos de aplicación de la serie de Lagrange.

Ejemplo 1. Sea

$$w = ze^{-az} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} z^{n+1} = f(z),$$

donde $a \neq 0$.

Designando la función inversa como anteriormente, mediante $z = \varphi(w)$, tomando $F(z) = e^{bz}$ $(b \neq 0)$ y observando que en el caso dado $z_0 = w_0 = 0$ y $\chi(z) = \frac{z}{f(z)} = e^{az}$, según la fórmula (5.1:7), obtenemos:

$$F[\varphi(w)] = e^{b\varphi(w)} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} [be^{(b+an)\zeta}]_{\zeta=0} w^n$$

$$= 1 - b \sum_{1}^{\infty} \frac{(b+an)^{n-1}}{n!} w^n.$$

El radio de convergencia de esta serie se puede determinar por la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|b+an|^{n-1}}{n!}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e|b+an|^{1-\frac{1}{n}}}{n}} = \frac{1}{e|a|}.$$

Haciendo $b = a$, obtenemos para $z = \varphi(w)$:

$$F(z) = e^{az} = \frac{z}{w}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\varphi(w)}{w} = 1 + \sum_{1}^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^n$$

y

$$\varphi(w) = w + \sum_{1}^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^{n+1} = \sum_{0}^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^{n+1}$$

Ejemplo 2. Polinomios de Legendre. Sea

$$w = 2\frac{z-t}{z^2-1} = f(z) \qquad (t \neq \pm 1).$$

Aquí

$$z_0 = t, \quad w_0 = 0, \quad \chi(z) = \frac{z - z_0}{f(z)} = \frac{z^2-1}{2},$$

y, por consiguiente, según la fórmula (5.1:8), en cierto entorno del punto $w = 0$ tiene que verificarse el desarrollo

$$z = \varphi(w) = t + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \left(\frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n \right\}_{\zeta=t} w^n. \qquad (5.3:1)$$

Demostremos que esta serie es uniformemente convergente respecto del parámetro t en todo círculo $|t| < R$, si w es, respectivamente, suficientemente pequeño en valor absoluto. En efecto, los coeficientes de la serie se pueden expresar en forma de integrales:

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \left(\frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n \right\}_{\zeta=t} = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - t| = 1} \frac{\left(\frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n}{(\zeta - t)^n} d\zeta,$$

de donde, para todos los $|t| < R$, se tiene:

$$|\alpha_n| < \frac{1}{2\pi} \frac{(R+2)^{2n}}{2^n} 2\pi = \left[\frac{(R+2)^2}{2} \right]^n.$$

Si, por consiguiente, $|w| \leqslant \frac{2\theta}{(R+2)^2}$, donde $0 < \theta < 1$, entonces,

$$|\alpha_n w^n| < \theta^n,$$

de donde se deduce la convergencia uniforme de la serie.

Teniendo esto en cuenta, derivemos término a término la serie obtenida respecto de t, manteniendo w fijo. Resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left\{ \left(\frac{\zeta^2-1}{2} \right)^n \right\}_{\zeta=t} w^n.$$

Por otra parte, de la ecuación propuesta se puede expresar fácilmente $z = \varphi(w)$ mediante las funciones elementales. Se tiene:

$$z = \varphi(w) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2tw + w^2}}{w},$$

donde se debe tomar aquel valor de la raíz cuadrada que se hace igual a 1 cuando $w = 0$ (entonces, como fácilmente se comprueba, obtenemos: $\varphi(0) = t$, como tenía que ser). De aquí hallamos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}} .$$

Comparando las dos expresiones para $\frac{\partial z}{\partial t}$, obtenemos el desarrollo:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}} = \sum_0^\infty \frac{1}{2^n n!} \left\{ \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2-1)^n \right\}_{\zeta=t} w^n, \qquad (5.3:2)$$

el cual es uniformemente convergente respecto de t en cualquier círculo $|t| < R$ y respecto de w en el círculo correspondiente de radio suficientemente pequeño. Para determinar el radio de convergencia de la serie para un valor fijado $t = t_0$, es suficiente observar que la función que figura en el primer miembro de la igualdad sigue siendo analítica en un entorno del origen de coordenadas mientras en este entorno no haya puntos en los que se anule la expresión subradical. Para los puntos indicados tiene que verificarse la igualdad

$$t_0 = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) .$$

Pero es sabido (véase el ap. 4.9 del segundo capítulo) que la función $t = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$ transforma el interior del círculo $|w| < \rho < 1$ en el exterior de la elipse E_ρ con los focos ± 1 y los semiejes $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \rho\right)$ y $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)$. Si el punto t_0 está situado en la elipse E_{ρ_0} (en el caso en que t_0 está situado en el intervalo $(-1, +1)$ del eje real, se debe tomar $\rho_0 = 1$), entonces, para todos los w pertenecientes al círculo $|w| < \rho_0$, los valores $t = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$ estarán situados en el exterior de la elipse E_{ρ_0} y, por consiguiente, no puede verificarse la igualdad $t_0 = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$. En resumen, la función $\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}}$ es analítica en el interior de la circunferencia $|w| = \rho_0 < 1$, cuya imagen en la transformación $t = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$ (la elipse E_{ρ_0}) pasa por el punto t_0. En el interior de esta circunferencia es convergente la serie de potencias que hemos obtenido.

Los coeficientes de la serie son funciones del parámetro t. Como $(\zeta^2 - 1)^n$ es un polinomio en ζ de grado $2n$, $\frac{d^n}{d\zeta^n}(\zeta^2 - 1)^n$ también es un polinomio en ζ de grado n, y, por consiguiente, las funciones

$$\frac{1}{2^n n!}\left\{\frac{d^n}{d\zeta^n}(\zeta^2-1)^n\right\}_{\zeta=t}$$

son polinomios en t de grado n. Estos se llaman **polinomios de Legendre** y se designan mediante $P_n(t)$.

Así, pues,

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\left\{\frac{d^n}{d\zeta^n}(\zeta^2-1)^n\right\}_{\zeta=t}. \tag{5.3:3}$$

Estos polinomios poseen muchas propiedades admirables. Señalemos algunas de ellas.

a) Hagamos $(t^2-1)^n=s$; entonces, calculando la derivada logarítmica, tendremos:

$$\frac{2nt}{t^2-1}=\frac{s'}{s}, \text{ o bien } (t^2-1)s'=2nts,$$

de donde, derivando $n+1$ veces:

$$(t^2-1)s^{(n+2)}+2(n+1)ts^{(n+1)}+(n+1)ns^{(n)}=$$
$$=2nts^{(n+1)}+2n(n+1)s^{(n)}.$$

Sustituyendo aquí $\frac{1}{2^n n!}s^{(n)}$ por $P_n(t)$, obtenemos:

$$(t^2-1)\frac{d^2P_n(t)}{dt^2}+2t\frac{dP_n(t)}{dt}-n(n+1)P_n(t)=0.$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, a la cual satisface $P_n(t)$.

b) Derivando término a término el desarrollo (5.3:2) respecto de w, obtenemos:

$$\frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)w^{n-1}.$$

De aquí que

$$\frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{1}{2}}}=(1-2tw+w^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)w^{n-1}=$$
$$=P_1(t)+2[P_2(t)-tP_1(t)]w+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(t)-2ntP_n(t)+$$
$$+(n-1)P_{n-1}(t)]w^n.$$

Por otra parte,

$$\frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{1}{2}}}=(t-w)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\,w^n=$$

$$=t+[tP_1(t)-1]\,w+\sum_{n=2}^{\infty}[tP_n(t)-P_{n-1}(t)]\,w^n.$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales w^n en los desarrollos obtenidos de la función $\frac{t-w}{(1-2tw+w^2)^{\frac{1}{2}}}$, hallaremos:

$$P_1(t)=t,\qquad 2P_2(t)-3tP_1(t)+1=0,$$

$$(n+1)\,P_{n+1}(t)-(2n+1)\,tP_n(t)+nP_{n-1}(t)=0\qquad(n\geqslant 2).$$

Estas relaciones permiten calcular los polinomios de Legendre uno tras otro.

He aquí los polinomios de Legendre de grados inferiores:

$$P_0(t)=1,\qquad P_1(t)=t,\qquad P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2},\qquad P_3(t)=\frac{5t^3-3t}{2},$$

$$P_4(t)=\frac{35t^4-30t^2+3}{8},\ \ldots$$

c) Señalemos, finalmente, la propiedad importante de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, que se expresa por las relaciones siguientes:

$$\int_{-1}^{+1}P_n(t)\,P_m(t)\,dt=0,\quad \text{si}\quad n\neq m.$$

Para demostrar estas relaciones, apliquemos las ecuaciones diferenciales a las que satisfacen $P_n(t)$ y $P_m(t)$. Se tiene:

$$(1-t^2)\,P_n''(t)-2tP_n'(t)+n\,(n+1)\,P_n(t)=0,$$

$$(1-t^2)\,P_m''(t)-2tP_m'(t)+m\,(m+1)\,P_m(t)=0.$$

Multiplicando la primera de ellas por $P_m(t)$, la segunda por $P_n(t)$ y restando, obtenemos:

$$(1-t^2)\,[P_n''(t)\,P_m(t)-P_m''(t)\,P_n(t)]-2t\,[P_n'(t)\,P_m(t)-$$

$$-P_m'(t)\,P_n(t)]+(n-m)\,(n+m+1)\,P_n(t)\,P_m(t)=0.$$

Observando que dos términos del primer miembro de esta relación representan la derivada del producto

$$(1-t^2)\,[P_n'(t)\,P_m(t)-P_m'(t)\,P_n(t)],$$

e integrando la relación obtenida en el segmento $[-1, +1]$, hallamos:

$$\{(1-t^2)\,[P_n'(t)\,P_m(t)-P_m'(t)\,P_n(t)]\}_{-1}^{+1}+$$
$$+(n-m)\,(n+m+1)\int_{-1}^{+1}P_n(t)\,P_m(t)\,dt=0.$$

Como la expresión que figura entre llaves se anula para $t=\pm 1$ y $(n-m)\,(n+m+1)\neq 0$ para $n\neq m$, resulta:

$$\int_{-1}^{+1}P_n(t)\,P_m(t)\,dt=0.$$

Por lo tanto, queda demostrada la ortogonalidad de los polinomios de Legendre en el segmento $[-1, +1]$.

Ejemplo 3. Ecuación de Kepler. Esta ecuación desempeña un papel importante en la astronomía, en la determinación de la denominada anomalía excéntrica del planeta. Esta tiene la forma

$$E-e\,\mathrm{sen}\,E=\frac{t-T}{U}\,2\pi,$$

donde E es la anomalía excéntrica del planeta, e es la excentricidad de la órbita del planeta, $t-T$ es el tiempo transcurrido desde el momento del último paso del planeta por el perihelio, y U es el período de rotación total del planeta alrededor del Sol. Sustituyendo aquí E por z, e por w y $\frac{t-T}{U}\,2\pi$ por τ, escribamos la ecuación de Kepler en la forma

$$w=\frac{z-\tau}{\mathrm{sen}\,z}=f(z).$$

Aquí $z_0=\tau\neq k\pi$ (k es un número entero) y, por consiguiente,

$$w_0=0,\quad \chi(\zeta)=\frac{\zeta-z_0}{f(\zeta)}=\mathrm{sen}\,\zeta.$$

Por esto, según la fórmula (5.1:8), para la función $z=\varphi(w)$, tendremos

$$z=\tau+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}(\mathrm{sen}\,\zeta)^n\right\}_{\zeta=\tau}w^n. \tag{5.3:4}$$

Esta serie resuelve el problema planteado, puesto que permite calcular $z=E$ siendo dados $w=e$ y $\tau=\frac{t-T}{U}\,2\pi$.

Para determinar el radio de convergencia de esta serie debe recordarse que, cuando se deducía la serie de Lagrange, se partía de un círculo $|z - z_0| \leqslant \rho$, en el cual $f(z)$ era analítica y no tomaba el valor $w_0 = 0$ en los puntos distintos de z_0, y después se determinaba el número

$$\delta = \min_{|z-z_0|=\rho} |f(z) - f(z_0)| > 0.$$

La deducción hecha garantizaba la convergencia de la serie precisamente en el círculo $|w - w_0| < \delta$. Evidentemente, entre los números distintos δ que satisfacen a las condiciones impuestas, nos interesa el mayor posible. En el ejemplo dado se puede tomar por ρ un número positivo arbitrario, que no sea superior a la distancia desde el punto τ hasta el cero de sen z más próximo al mismo, el cual representa un polo de la función $f(z)$. Hagamos, para precisar, $\tau = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{por su mismo sentido, } \tau = \frac{t-T}{U}\, 2\pi \text{ varía desde 0 hasta } 2\pi\right)$; entonces se puede hacer variar ρ desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, puesto que los ceros de sen z próximos a τ ($z = 0$ y $z = \pi$) están a la distancia $\frac{\pi}{2}$ de τ. Si ρ está fijado entre estos límites, entonces el correspondiente δ es:

$$\min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |f(z)| = \min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} \left|\frac{z-\tau}{\operatorname{sen} z}\right| =$$
$$= \min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} \frac{\rho}{|\operatorname{sen} z|} = \frac{\rho}{\max\limits_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |\operatorname{sen} z|}.$$

Pero el valor z que satisface a la condición $\left|z-\frac{\pi}{2}\right| = \rho$ puede expresarse en la forma $z = \frac{\pi}{2} + \rho e^{i\varphi}$. Por consiguiente, (véase la fórmula (3.6:11), cap. segundo),

$$|\operatorname{sen} z| = |\cos(\rho e^{i\varphi})| = |\cos(\rho\cos\varphi + i\rho\operatorname{sen}\varphi)| \leqslant |\operatorname{ch}(\rho\operatorname{sen}\varphi)| \leqslant \operatorname{ch}\rho.$$

Como para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ se tiene:

$$|\operatorname{sen} z| = |\cos(i\rho)| = \operatorname{ch}\rho,$$

sacamos la conclusión de que

$$\max_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |\operatorname{sen} z| = \operatorname{ch}\rho,$$

y, por consiguiente,

$$\delta = \min_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=\rho} |f(z)| = \frac{\rho}{\operatorname{ch}\rho} = \delta(\rho).$$

No queda más que elegir ρ de modo que $\delta(\rho)$ tome el valor máximo. Igualando a cero la derivada logarítmica de $\delta(\rho)$, obtenemos la ecuación:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{e^{\rho}-e^{-\rho}}{e^{\rho}+e^{-\rho}} = 0 \quad \text{o bien} \quad e^{2\rho} = \frac{\rho+1}{\rho-1},$$

de donde se puede deducir que $\rho = 1{,}1997... < \frac{\pi}{2}$.

Para este valor, $\delta(\rho)$ verdaderamente alcanza el máximo, igual a $\sqrt{\rho^2-1} = 0{,}6627... = \delta$.

En resumen, si $\tau = \frac{\pi}{2}$, el desarrollo (5.3:4) es convergente para $|w| < 0{,}6627$. Se puede demostrar que el valor hallado de δ coincide con el radio de convergencia de la serie (5.3:4).

5.4. Los resultados obtenidos al resolver el problema de inversión de series, pueden considerarse como casos particulares de los teoremas de las funciones implícitas. El final de este capítulo está dedicado a estos teoremas.

Previamente daremos unas nociones sobre las funciones analíticas de dos variables, limitándonos solamente a lo más imprescindible.

Consideraremos una función $F(z, w)$ de dos variables complejas z y w, uniforme y continua respecto del conjunto de las variables para $z \in G$ y $w \in D$, donde G y D son dos recintos pertenecientes a los planos z y w, respectivamente. Diremos que ésta es analítica en el recinto de cuatro dimensiones $G \times D$*), si la función $F(z, w_0)$ es analítica en el recinto G para cada $w_0 \in D$, y la función $F(z_0, w)$ es analítica en el recinto D para cada $z_0 \in G$.

Para precisar, supongamos que G y D son recintos simplemente conexos, y C y Γ son dos curvas cerradas rectificables de Jordan, pertenecientes a G y D, respectivamente.

Consideremos la integral reiterada de segundo orden:

$$I \int_C d\zeta \int_\Gamma \frac{F(\zeta, \tau)\, d\tau}{(\zeta-z)(\tau-w)},$$

donde z está situado en el interior de C y w, en el interior de Γ, y cada uno de los circuitos se recorre en sentido positivo.

Entonces, observando que según la fórmula integral

$$\int_\Gamma \frac{F(\zeta, \tau)\, d\tau}{\tau - w} = 2\pi i F(\zeta, w),$$

*) Es de cuatro dimensiones porque cada uno de sus puntos se determina por cuatro números reales: las partes real e imaginaria de la variable z y las partes real e imaginaria de la variable w. La notación $\times$ designa el *producto* de dos conjuntos, es decir, el conjunto de todos los pares de elementos posibles, tomados cada elemento de uno de los conjuntos dados.

podemos representar I en la forma

$$I = 2\pi i \int_C \frac{F(\zeta, w)\, d\zeta}{\zeta - z} = -4\pi^2 F(z, w).$$

De aquí se deduce que

$$F(z, w) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_C d\zeta \int_\Gamma \frac{F(\zeta, \tau)\, d\tau}{(\zeta - z)(\tau - w)}.$$

El lector comprobará fácilmente que se obtiene el mismo resultado partiendo de la integral

$$\int_\Gamma d\tau \int_C \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\tau - w)}.$$

Por lo tanto, es indiferente el orden de integración en la fórmula hallada, y se puede escribir:

$$F(z, w) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{C\times\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau}{(\zeta - z)(\tau - w)}. \qquad (5.4:1)$$

Esta fórmula es análoga a la fórmula integral de Cauchy.

Basándose en esta fórmula, de un modo análogo al empleado en el ap. 3.3 del tercer capítulo para las integrales de tipo Cauchy, se puede demostrar la existencia de derivadas parciales de cualquier orden, las cuales se expresan por las fórmulas:

$$\frac{\partial^{k+m} F(z, w)}{\partial z^k\, \partial w^m} = -\frac{k!m!}{4\pi^2} \iint_{C\times\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau}{(\zeta - z)^{k+1}(\tau - w)^{m+1}}. \qquad (5.4:2)$$

Estas fórmulas muestran que las derivadas parciales de $F(z, w)$ no dependen del orden de derivación. Además, cada una de las derivadas parciales es continua en el recinto que representa el producto de las partes interiores de las curvas C y Γ. En efecto, si $M = \max |F(\zeta, \tau)|$ en $C \times \Gamma$, $|z' - z| \leqslant r$ y $|w' - w| \leqslant \rho$ son dos círculos cerrados situados dentro de C y Γ, respectivamente, R es el mayor diámetro de las curvas C y Γ y, finalmente, δ (>0) es la menor de las dos distancias entre $|z' - z| = r$ y C y $|w' - w| = \rho$ y Γ, entonces, para z' y w' pertenecientes a los círculos indicados, se verifica la desigualdad

$$\left| \frac{\partial^{k+m} F(z' w')}{\partial z^k\, \partial w^m} - \frac{\partial^{k+m} F(z, w)}{\partial z^k\, \partial w^k} \right| =$$

$$= \frac{k!m!}{4\pi^2} \left| \iint_{C\times\Gamma} F(\zeta, \tau) \frac{(\zeta - z')^{k+1}(\tau - w')^{m+1} - (\zeta - z)^{k+1}(\tau - w)^{m-1}}{(\zeta - z)^{k+1}(\tau - w)^{m+1}(\zeta - z')^{k+1}(\tau - w')^{m+1}}\, d\zeta\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!m!}{4\pi^2} \left| \iint_{C\times\Gamma} F(\zeta, \tau) \left[\frac{(\zeta - z')^{k+1}[(\tau - w')^{m+1} - (\tau - w)^{m+1}]}{(\zeta - z)^{k+1}(\tau - w)^{m+1}(\zeta - z')^{k+1}(\tau - w')^{m+1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(\tau - w)^{m+1}[(\zeta - z')^{k+1} - (\zeta - z)^{k+1}]}{(\zeta - z)^{k+1}(\tau - w)^{m+1}(\zeta - z')^{k+1}(\tau - w')^{m+1}} \right] d\zeta\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!m!}{4\pi^2} M \frac{R^{k+1}\rho\,(m+1)\,R^m + R^{m+1} r\,(k+1)\,R^k}{\delta^{2k+2m+4}} \operatorname{long} C \operatorname{long} \Gamma.$$

Evidentemente, el segundo miembro de esta desigualdad puede hacerse menor que cualquier $\varepsilon > 0$ para valores suficientemente pequeños de r y ρ. Por consiguiente, la función $\frac{\partial^{k+m}F(z, w)}{\partial z^k\, \partial w^m}$ es continua. Además, ésta es analítica respecto de z para w fijado y respecto de w para z fijado, puesto que existen las derivadas $\frac{\partial^{k+1+m}F(z, w)}{\partial z^{k+1}\, \partial w^m}$ y $\frac{\partial^{k+m+1}F(z, w)}{\partial z^k\, \partial w^{m+1}}$. Por lo tanto, la derivada parcial de cualquier orden de la función $F(z, w)$ es analítica en el producto de las partes interiores de las curvas C y Γ. Como éstas son unas curvas arbitrarias situadas dentro de los recintos G y D, sacamos la conclusión de que

$$\frac{\partial^{k+m}F(z, w)}{\partial z^k\, \partial w^m}$$

es analítica en todo el recinto de cuatro dimensiones $G \times D$.

Mediante la fórmula (5.4:1) se puede obtener el desarrollo de una función analítica de dos variables en serie de potencias doble: serie de Taylor de la función $F(z, w)$. Con este fin, desarrollemos en serie de potencias la función $\frac{1}{(\zeta - z)(\tau - w)}$, donde

$$|\zeta - z_0| = r, \quad |\tau - w_0| = \rho, \quad |z - z_0| < r \quad \text{y} \quad |w - w_0| < \rho.$$

Como

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \ldots,$$

y

$$\frac{1}{\tau - w} = \frac{1}{\tau - w_0 - (w - w_0)} = \frac{1}{\tau - w_0} + \frac{w - w_0}{(\tau - w_0)^2} + \ldots,$$

y ambas series son absolutamente convergentes, el desarrollo de la función $\frac{1}{(\zeta - z)(\tau - w)}$ puede obtenerse multiplicando término a término estas series:

$$\frac{1}{(\zeta - z)(\tau - w)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k (w - w_0)^m}{(\zeta - z_0)^{k+1} (\tau - w_0)^{m+1}}, \tag{5.4:3}$$

donde los términos de la serie obtenida, en virtud de su convergencia absoluta, se pueden escribir en cualquier orden.

Como para z y w fijos, cuando ζ y τ recorren las circunferencias $|\zeta - z_0| = r$ y $|\tau - w_0| = \rho$, los módulos de los términos de la última serie conservan valores constantes, esta serie es uniformemente convergente respecto de ζ y τ y se puede integrarla término a término. Poniendo el desarrollo (5.4:3) en la fórmula (5.4:1), donde C y Γ designan las circunferencias $|\zeta - z_0| = r$ y $|\tau - w_0| = \rho$, e integrando, hallamos el desarrollo:

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{C \times \Gamma} \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau}{(\zeta - z_0)^{k+1} (\tau - w_0)^{m+1}} (z - z_0)^k (w - w_0)^m. \tag{5.4:4}$$

Si $M(r, \rho)$ es el max $|F(\zeta, \tau)|$ en $C\times\Gamma$, entonces para los coeficientes A_{km} de la serie obtenemos la acotación:

$$|A_{km}| = \left| -\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{C\times\Gamma} \frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau}{(\zeta-z_0)^{k+1}(\tau-w_0)^{m+1}} \right| \leqslant \frac{M 2\pi r 2\pi\rho}{4\pi^2 r^{k+1}\rho^{m+1}} = \frac{M}{r^k\rho^m},$$

de donde

$$|A_{km}(z-z_0)^k(w-w_0)^m| < M\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)\left(\frac{|w-w_0|}{\rho}\right)^m.$$

Como la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{|z-z_0|^k}{r^k}\frac{|w-w_0|^m}{\rho^m}$ es convergente para $|z-z_0|<r$ y $|w-w_0|<\rho$, de aquí se deduce que la serie (5.4:4) converge absoluta y uniformemente en el interior del recinto de cuatro dimensiones que representa el producto de los dos círculos $|z-z_0|<r$ y $|w-w_0|<\rho$. Los coeficientes A_{km}, según las fórmulas (5.4:2), pueden expresarse en la forma

$$A_{km} = -\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{C\times\Gamma}\frac{F(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau}{(\zeta-z_0)^{k+1}(\tau-w_0)^{m+1}} = \frac{1}{k!m!}\frac{\partial^{k+m}F(z_0, w_0)}{\partial z^k\,\partial w^m}.$$

Así, pues, definitivamente, para una función analítica de dos variables z y w obtenemos el desarrollo de Taylor:

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{k!m!}\frac{\partial^{k+m}F(z_0, w_0)}{\partial z^k\,\partial w^m}(z-z_0)^k(w-w_0)^m. \qquad (5.4:5)$$

Debido a la convergencia absoluta de esta serie, ésta puede expresarse también en una de las dos formas siguientes:

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\sum_{m=0}^{m}\frac{1}{m!}\frac{\partial^{k+m}F(z_0, w_0)}{\partial z^k\,\partial w^m}(w-w_0)^m\right](z-z_0)^k =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k+m}F(z_0, w_0)}{\partial z^k\,\partial w^m}(z-z_0)^k\right](w-w_0)^m.$$

Evidentemente, las expresiones entre corchetes representan las derivadas parciales de la función $F(z, w)$:

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^{k+m}F(z_0, w_0)}{\partial z^k\,\partial w^m}(w-w_0)^m = \frac{\partial^k F(z_0, w)}{\partial z^k}$$

y

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k+m}F(z, w_0)}{\partial z^k\,\partial w^m}(z-z_0)^k = \frac{\partial^m F(z, w_0)}{\partial w^m}.$$

Por esta razón, los desarrollos hallados también pueden escribirse en la forma

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k F(z_0, w)}{\partial z^k}(z-z_0)^k = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m F(z, w_0)}{\partial w^m}(w-w_0)^m.$$

Indudablemente, cada uno de éstos podría haberse obtenido también directamente, considerando a $F(z, w)$ como una función analítica de z (para w fijo) o bien como una función analítica de w (para z fijo).

5.5. Considerando la teoría de las funciones implícitas, examinemos la ecuación

$$F(z, w)=0, \tag{5.5:1}$$

donde $F(z, w)$ es una función de dos variables, analítica en el recinto $|z-z_0|<r$, $|w-w_0|<\rho$. Supongamos que se sabe que

$$F(z_0, w_0)=0 \quad \text{y} \quad F(z_0, w) \not\equiv 0.$$

En estas condiciones, es válida la siguiente proposición, conocida por el nombre de teorema preparatorio de Weierstrass.

Existe un entorno $|z-z_0|<r'<r$, $|w-w_0|<\rho'<\rho$, *en el cuál* $F(z, w)$ *se expresa en la forma*

$$F(z, w)=[A_0(z)+\ldots+A_{k-1}(z)w^{k-1}+w^k]\,\Phi(z, w), \tag{5.5:2}$$

donde $A_0(z), \ldots, A_{k-1}(z)$ *son funciones analíticas para* $|z-z_0|<r'$, k *es un número natural que coincide con el orden menor de las derivadas* $\dfrac{\partial^n F(z_0, w_0)}{\partial w^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ *que son distintas de cero, y* $\Phi(z, w)$ *es una función analítica en el recinto* $|z-z_0|<r'<r$, $|w-w_0|<\rho'<\rho$, que no se anula aquí.

De este teorema se deduce que en cierto entorno del punto dado (z_0, w_0), la ecuación (5.5:1) es equivalente a la ecuación

$$A_0(z)+A_1(z)w+\ldots+A_{k-1}(z)w^{k-1}+w^k=0, \tag{5.5:3}$$

la cual es algebraica respecto de w.

De este modo, el teorema preparatorio de Weierstrass reduce el estudio local del caso general de una función implícita $w(z)$ al caso de una función implícita dada por una ecuación algebraica respecto de w (pero no respecto de z).

Pasando a demostrarlo, establezcamos primero la existencia de k soluciones de la ecuación (5.5:1) en un entorno del punto (z_0, w_0), y demostremos después que todas estas soluciones satisfacen a una misma ecuación de la forma (5.5:3).

Consideremos la función $F(z_0, w)$. Como ésta no es idénticamente igual a cero, entre las derivadas $\dfrac{\partial^n F(z_0, w_0)}{\partial w^n}$ hay distintas de cero. Sea k $(k \geqslant 1)$ el orden menor de las derivadas distintas de cero. Entonces la función $F(z_0, w)$ tendrá un cero de orden k en el punto w_0. Tomemos un entorno cerrado $|w-w_0| \leqslant \rho' < \rho$ del punto w_0 tan pequeño, que $F(z_0, w)$ no tenga ceros en el mismo, distintos de w_0. El módulo $|F(z_0, w)|$ en los puntos de la circunferencia γ': $|w-w_0|=\rho'$ tiene un mínimo positivo m. Si $|z-z_0| \leqslant r' < r$ es un entorno cerrado del punto z_0 tan pequeño, que para uno cualquiera de sus puntos y para cualquier $w \in \gamma'$ se verifica la desigualdad

$$|F(z, w)-F(z_0, w)|<m,$$

entonces, en virtud del teorema de Rouché (véase el ap. 3.5), las ecuaciones

$$F(z_0, w)=0 \quad \text{y} \quad F(z_0, w)+[F(z, w)-F(z_0, w)]=F(z, w)=0$$

(en la última, z está fijada arbitrariamente en el círculo cerrado $|z-z_0| \leqslant r'$) tienen que tener un mismo número de raíces en el interior de γ', precisamente k raíces. Así, pues, hemos establecido la existencia de unos entornos $|z-z_0| \leqslant r'$, $|w-w_0|<\rho'$ tales, que para cada z perteneciente al primero de ellos, la ecuación

$$F(z, w)=0$$

posee k raíces (teniendo en cuenta los órdenes de multiplicidad) en el interior del segundo entorno (es natural, que puede poseer también otras raíces, situadas en el exterior a la circunferencia $|w-w_0|=\rho'$). Designando estas raíces con $w_j(z)$ $(j=1, 2, \ldots, k)$, formemos un polinomio respecto de w, cuyos ceros sean $w_j(z)$:

$$\prod_1^k [w-w_j(z)]=w^k-[w_1(z)+\ldots+w_k(z)]\,w^{k-1}+[w_1(z)\,w_2(z)+\ldots$$
$$\ldots+w_{k-1}(z)\,w_k(z)]\,w^{k-1}-\ldots+(-1)^k w_1(z)\ldots w_k(z)=$$
$$=w^k+A_{k-1}(z)\,w^{k-1}+A_{k-2}w^{k-2}+\ldots+A_k(z)=P(z, w). \qquad (5.5:4)$$

Como es sabido del álgebra *), los coeficientes $A_j(z)$ están ligados con las sumas de potencias

$$s_m(z)=w_1^m(z)+\ldots+w_k^m(z)$$

mediante las siguientes relaciones:

$$s_m+s_{m-1}A_{k-1}+s_{m-2}A_{k-2}+\ldots+mA_{k-m}=0 \quad (m=1, 2, \ldots, k).$$

De aquí se deduce que cada coeficiente $A_j(z)$ se expresa mediante las sumas de potencias $s_m(z)$ en forma de un polinomio de coeficientes numéricos. Así, por ejemplo,

$$A_{k-1}(z)=-s_1(z), \quad A_{k-2}(z)=\frac{1}{2}[s_1(z)]^2-\frac{1}{2}s_2(z) \text{ etc.}$$

Por esta razón, la analiticidad de las funciones $A_j(z)$ en un entorno del punto z_0 será consecuencia de la analiticidad de las funciones $s_m(z)$ en el mismo entorno.

Para calcular estas últimas funciones, apliquemos la fórmula (3.5:1). Según ésta, la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} w^m \frac{\dfrac{\partial F(z, w)}{\partial w}}{F(z, w)}\,dw \qquad (5.5:5)$$

aquí z está fijado en el círculo cerrado $|z-z_0|\leqslant r'$) es igual a la suma

$$w_1^m(z)+\ldots+w_k^m(z)=s_m(z),$$

puesto que $w_j(z)$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ son todos los ceros de la función $F(z, w)$ en el interior de γ', y ésta no tiene polos (en el interior de γ').

Pero $F(z, w)$ y $\dfrac{\partial F(z, w)}{\partial w}$ son funciones analíticas de z en el círculo $|z-z_0|\leqslant r'$ para w arbitrariamente fijado en γ'. Además, en este caso, $F(z, w)$ no se anula (puesto que $|F(z, w)-F(z_0, w)|<m$, mientras que $|F(z_0, w)|\geqslant m$, si $|z-z_0|\leqslant r'$ y $|w-w_0|=\rho'$). Debido a esto, $w^m\dfrac{\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}}{F(z, w)}$ es una función analítica de z en el círculo $|z-z_0|<r'$, que está, además, uniformemente acotada en valor absoluto, puesto que ella es continua con respecto al conjunto de las variables z y w en el conjunto cerrado $|z-z_0|\leqslant r'$, $|w-w_0|=\rho'$. De aquí (véase el corolario del teorema de Vitali, ap. 1.2) se deduce que la integral (5.5:5), y, por lo tanto, la suma de

---

*) Véase A. K u r o s c h, Curso de álgebra superior, Editorial Mir, 1968, § 52.

potencias $s_m(z)$, son funciones analíticas de z en el círculo $|z-z_0|<r'$. Por esta razón, $A_j(z)$ $(j=0, 1, \ldots, k-1)$ son funciones analíticas en el mismo círculo, es decir, todos los coeficientes del polinomio (5.5:4) son funciones analíticas de z en el círculo indicado.

No queda más que demostrar que el cociente

$$\Phi(z, w)=\frac{F(z, w)}{P(z, w)}$$

es una función analítica de dos variables z y w en el recinto $|z-z_0|<r'$, $|w-w_0|<\rho'$. Con este fin, obsérvese que siendo fijo z ($|z-z_0|<r'$), $F(z, w)$ y $P(z, w)$ son funciones analíticas de w en el círculo $|w-w_0|<\rho'$, que poseen en éste unos mismos ceros: $w_j(z)$ $(j=1, 2, \ldots, k)$. Por consiguiente, $\Phi(z, w)$ para cualquier z ($|z-z_0|<r'$) es una función analítica de w en el círculo $|w-w_0|<\rho'$, que no se anula.

Como, para $|z-z_0|\leqslant r'$, las raíces $w_j(z)$ $(j=1, \ldots, k)$ de la ecuación $F(z, w)=0$ están situadas en el interior del círculo $|w-w_0|<\rho'$, es decir, $|w_j(z)-w_0|<\rho'$, la función $P(z, w)$ no se anula si $|z-z_0|<r'$ y $|w-w_0|=\rho'$. Fijemos arbitrariamente r'', $0<r''<r'$. Las funciones $A_j(z)$ $(j=0, 1, \ldots, k-1)$ son analíticas en el círculo $|z-z_0|<r'$; por lo tanto, ellas son continuas en el círculo cerrado $|z-z_0|\leqslant r''$ y, por consiguiente, la función $P(z, w)$ es continua en el conjunto cerrado $|z-z_0|\leqslant r''$, $|w-w_0|\leqslant\rho'$. De aquí se deduce que existe un anillo circular $\rho_1\leqslant|w-w_0|\leqslant\rho'$, tan estrecho, que $P(z, w)$ no se anula para ningún z y w pertenecientes al conjunto $|z-z_0|\leqslant r''$, $\rho_1\leqslant|w-w_0|\leqslant\rho'$.

Sea ρ'' un número arbitrario, comprendido entre ρ_1 y ρ'. Entonces,

$$\Phi(z, w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau-w_0|=\rho''}\frac{\Phi(z, \tau)}{\tau-w}\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau-w_0|=\rho''}\frac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau-w)}\,d\tau$$

para $|z-z_0|\leqslant r''$ y $|w-w_0|<\rho''$. La función $\dfrac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau-w)}$, para τ y w fijados, representa el cociente de dos funciones analíticas de z y, por consiguiente, también es una función analítica de z ($P(z, \tau)\neq 0$). Estando de nuevo w fijado en el círculo $|w-w_0|<\rho''$, si z recorre el círculo cerrado $|z-z_0|\leqslant r''$ y τ recorre la circunferencia $|\tau-w_0|=\rho'$, el numerador y el denominador de la fracción considerada serán funciones continuas de z y τ, y como el denominador de la fracción no se anula, el módulo de esta última se mantendrá acotado. De aquí, en virtud del conocido corolario del teorema de Vitali (ap. 1.2), se deduce que $\Phi(z, w)$ es una función analítica de z en el círculo $|z-z_0|<r''$ para cada w del círculo $|w-w_0|<\rho''$.

Demostremos, finalmente, que ésta es continua con respecto del conjunto de las variables z y w en los círculos indicados. Para esto, obsérvese que la función $\dfrac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau-w)}$ es continua con respecto del conjunto de las variables z, τ y w, si $|z-z_0|\leqslant r''$, $|\tau-w_0|=\rho''$ y $|w-w_0|\leqslant\rho_2<\rho''$. Las últimas condiciones caracterizan el conjunto cerrado (del espacio de seis dimensiones); por esta razón, la función considerada será también uniformemente continua, puesto que para cualquier $\varepsilon>0$ se tendrá:

$$\left|\frac{F(z', \tau)}{P(z', \tau)(\tau-w')}-\frac{F(z, \tau)}{P(z, \tau)(\tau-z)}\right|<\frac{2\pi\varepsilon}{\rho''},$$

si

$$|z-z_0|<r'', \quad |w-w_0|<\rho_2, \; |\tau-w_0|=\rho''$$

y

$$|z'-z|<\delta(\varepsilon), \quad |w'-w)<\delta(\varepsilon).$$

Por lo tanto, en las condiciones indicadas:

$$|\Phi(z', w') - \Phi(z, w)| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - w_0| = \rho''} \left[\frac{F(z', \tau)}{P(z', \tau)(\tau - w')} - \frac{F(z - \tau)}{P(z - \tau)\,\tau - w)} \right] d\tau \right| < \varepsilon.$$

Resumiendo, $\Phi(z, w) = \dfrac{F(z, w)}{P(z, w)}$ es una función continua con respecto del conjunto de las variables en el recinto $|z - z_0| < r''$ $|w - w_0| < \rho''$ y analítica respecto de cada una de las variables z y w. Por consiguiente, ésta es una función analítica de dos variables: z y w. No queda más que observar que r'' y ρ'' pueden tomarse arbitrariamente próximos a r' y ρ, respectivamente.

En fin de cuentas, hemos obtenido que, para $|z - z_0| < r'$ y $|w - w_0| < \rho'$, la función $F(z, w)$ se expresa en la forma

$$F(z, w) = [A_0(z) + A_1(z)\,w + \ldots + A_{k-1}(z)\,w^{k-1}]\,\Phi(z, w),$$

donde $A_j(z)$ son funciones analíticas en el círculo $|z - z_0| < r'$, y $\Phi(z, w)$ es una función de dos variables que es analítica en el recinto $|z - z_0| < r'$, $|w - w_0| < \rho'$ y no se anula. El teorema preparatorio de Weierstrass queda demostrado. De este mismo se deduce inmediatamente la siguiente proposición importante.

T e o r e m a d e l a s f u n c i o n e s i m p l í c i t a s. *Si $F(z, w)$ es una función de dos variables analítica en el recinto $|z - z_0| < r$, $|w - w_0| < \rho$ y satisface a las condiciones*

$$F(z_0, w_0) = 0, \qquad \frac{\partial F(z_0, w_0)}{\partial w_0} \neq 0,$$

entonces, en cierto entorno $|z - z_0| < r' < r$, $|w - w_0| < \rho' < \rho$ del punto (z_0, w_0), la ecuación $F(z, w) = 0$ tiene para cada z una raíz $w(z)$, y sólo una. Esta raíz es una función uniforme y analítica en el círculo $|z - z_0| < r'$ y representa una función implícita, determinada por la ecuación $F(z, w) = 0$ y por la condición complementaria $w(z_0) = w_0$.

Para demostrarlo es suficiente referirse al teorema preparatorio de Weierstrass, en virtud del cual $F(z, w)$ tiene en el caso dado ($k = 1$) la forma

$$F(z, w) = [A_0(z) + w]\,\Phi(z, w),$$

donde $\Phi(z, w) \neq 0$. Por consiguiente, para $|z - z_0 < r'$ y $|w - w_0| < \rho'$ (los números r' y ρ' se obtienen de la demostración del teorema precedente), la ecuación

$$F(z, w) = 0$$

es equivalente a la siguiente:

$$A_0(z) + w = 0,$$

de donde resulta:

$$w = w(z) = -A_0(z).$$

Como la ecuación inicial dada se satisface para $z = z_0$ y $w = w_0$, la última ecuación también tiene que satisfacerse para estos valores, es decir, se tiene:

$$w_0 = w(z_0) = -A_0(z_0).$$

El teorema queda demostrado.

Volviendo a estudiar el caso general, consideremos la ecuación

$$P(z, w) = A_0(z) + A_1(z)\,w + \ldots + w^k = 0 \quad (k > 1).$$

Ya sabemos que para cada z, $|z - z_0| < r'$, esta ecuación posee k raíces $w_j(z)$ (distintas o algunas de ellas iguales), pertenecientes al círculo $|w - w_0| < \rho'$.
Si para un $z_1 \neq z_0$ dado y para uno de los valores $w_j(z_1) = w_1$ la derivada parcial $\frac{\partial P(z_1, w_1)}{\partial w_1}$ es distinta de cero, entonces, basándose en el teorema de las funciones implícitas, hallaremos una función $w(z)$, analítica en un entorno del punto z_1, que satisface a la ecuación $P(z, w) = 0$ (y, por consiguiente, también a la ecuación inicial $F(z, w) = 0$), y toma el valor w_1 para $z = z_1$.

Calculando $\frac{\partial P(z, w)}{\partial w}$, hallamos:

$$\frac{\partial P(z, w)}{\partial w} = A_1(z) + 2A_2(z)w + \ldots + kw^{k-1}.$$

Por consiguiente, no se puede aplicar el teorema de las funciones implícitas solamente para aquellos pares de valores z y w, para los cuales se cumplen simultáneamente las dos ecuaciones:

$$A_0(z) + A_1(z)w + \ldots + w^k = 0,$$
$$A_1(z) + 2A_2(z)w + \ldots + (k-1)A_{k-1}(z)w^{k-2} + kw^{k-1} = 0.$$

Eliminando entre éstas w, obtenemos el discriminante de la ecuación $P(z, w) = 0$ en la forma*)

$$D = D(z) = \begin{vmatrix} k & s_1 & s_2 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix} = 0,$$

donde $s_m = s_m(z)$ son las sumas de potencias que, como se vio anteriormente, representan funciones analíticas de z en el entorno considerado.

De aquí se deduce que el teorema de las funciones implícitas puede aplicarse a cualquier punto z_1 para el cual $D(z_1) \neq 0$ y a cualquiera de los valores respectivos $w_j(z_1)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$.

A priori hay dos posibilidades: $D(z) \equiv 0$ y $D(z) \neq 0$. En el primer caso no podemos basarnos directamente en el teorema de las funciones implícitas para ningún par de puntos z, $w_j(z)$. En el segundo caso se puede señalar un entorno del punto z_0 tan pequeño, en el cual $D(z) \neq 0$ en todos los puntos, a excepción del punto mismo z_0. Para cualquier punto z_1 de este entorno todas las raíces $w_j(z_1)$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ serán distintas, y en el entorno del punto z_1 tendremos k funciones analíticas $w_j(z)$ (que son las ramas uniformes de la función $w(z)$) que satisfacen a la ecuación dada y toman los valores $w_j(z_1)$, respectivamente, para $z = z_1$.

Aquí nos limitaremos a estas observaciones. A continuación (véase el cap. octavo) se hará un estudio más detallado, ligado con el estudio de las funciones algebraicas. Ahora ilustraremos la teoría que acabamos de exponer en un ejemplo sencillo, cuando $k = 2$, es decir,

$$F(z_0, w_0) = 0, \quad \frac{\partial F(z_0, w_0)}{\partial w_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(z_0, w_0)}{\partial w_0^2} \neq 0.$$

Para mayor sencillez, tomemos $z_0 = w_0 = 0$ (sustituyendo z por $z' + z_0$ y w por $w' + w_0$ resulta precisamente este caso). Entonces, según el teorema preparatorio de Weierstrass, la ecuación $F(z, w) = 0$ será equivalente a la

*) Véase A. K u r o s c h, Curso de álgebra superior, Editorial Mir, 1968, § 54.

siguiente:

$$A_0(z) + A_1(z)\,w + w^2 = 0,$$

donde $A_0(z)$ y $A_1(z)$ son funciones analíticas en cierto entorno del punto $z = 0$: $|z| < r'$.

Para $z = 0$ esta ecuación tiene que tener una raíz doble, igual a cero, por lo cual,

$$A_0(0) = 0 \quad \text{y} \quad A_1(0) = 0.$$

El discriminante de la ecuación se obtiene eliminando w entre las dos ecuaciones:

$$A_0(z) + A_1(z)\,w + w^2 = 0$$

y

$$A_1(z) + 2w = 0,$$

y tiene la forma

$$D(z) = [A_1(z)]^2 - 4A_0(z) = 0.$$

Si $D(z) \equiv 0$, el teorema general de las funciones implícitas no es aplicable. Pero en este caso la ecuación dada puede escribirse en la forma

$$\left[w + \frac{1}{2} A_1(z)\right]^2 = 0,$$

de donde $w = -\frac{1}{2} A_1(z)$. Hemos obtenido aquí una función uniforme analítica.

Supongamos ahora que $D(z) \not\equiv 0$. Como $D(0) = [A_1(0)]^2 - 4A_0(0) = 0$, se puede señalar un entorno del origen de coordenadas, $|z| < r$, de modo que en el mismo $D(z)$ no tendrá ceros para $z \neq 0$. Si z_1 es un punto de este entorno, que para precisar supondremos que satisface a la condición $|z_1| < \frac{r}{2}$, entonces en el círculo $|z - z_1| < |z_1|$ los coeficientes $A_0(z)$ y $A_1(z)$ serán funciones analíticas, $D(z) \neq 0$ y, por consiguiente, obtendremos dos ramas uniformes y analíticas de la función $w(z)$ que se expresan por la fórmula

$$w_{1,2}(z) = -\frac{1}{2} A_1(z) \pm \frac{1}{2} \sqrt{D(z)},$$

donde cada rama $w_1(z)$ y $w_2(z)$ corresponde a una rama determinada de la raíz $\sqrt{D(z)}$. En lo que se refiere al comportamiento de $w(z)$ en el origen de coordenadas, aquí son posibles dos casos, según que el origen de coordenadas sea un cero de orden par o impar de la función $D(z)$.

En el primer caso, el desarrollo de $D(z)$ tiene la forma

$$D(z) = a_{2m} z^{2m} + a_{2m+1} z^{2m+1} + \ldots \; (a_{2m} \neq 0),$$

de donde

$$\sqrt{D(z)} = \sqrt{a_{2m}}\,(z^m + \ldots)$$

y

$$w(z) = -\frac{1}{2} A_1(z) + \sqrt{a_{2m}}\,(z^m + \ldots).$$

Hemos obtenido dos ramas uniformes y analíticas de la función $w(z)$ en el entorno del origen de coordenadas.

En el segundo caso

$$D(z) = a_{2m-1}z^{2m-1} + a_{2m}z^{2m} + \ldots (a_{2m-1} \neq 0),$$

de donde

$$\sqrt{D(z)} = \sqrt{a_{2m-1}}\, z^{\frac{2m-1}{2}}\,(1 + \ldots)$$

y

$$w(z) = -\frac{1}{2} A_1(z) + \sqrt{a_{2m-1}}\, z^{\frac{2m-1}{2}}\,(1 + \ldots).$$

Resulta una función biforme en un entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas, para la cual el origen de coordenadas es un punto algebraico de ramificación de primer orden.

APENDICE

DEL TRADUCTOR HECHO PARA LA EDICION
ESPAÑOLA DE ESTE LIBRO

Extracto del artículo E. Aparicio Bernardo, «Sobre la inclinación mínima a cero de los seudopolinomios de coeficientes enteros algebraicos» (Э. Апарисио Бернардо «О наименьшем отклонении от нуля квазимногочленов с целыми алгебраическими коэффициентами». Вестник МГУ, № 2. 1962, § 1, 21—24).

SEUDOPOLINOMIOS ORTOGONALES

Sea $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots \left(\operatorname{Re} \lambda_k > -\frac{1+\tau}{2}\right)$ una sucesión de números complejos distintos, numerada en el orden de crecimiento de sus módulos, y en caso de números de igual módulo, en el orden de crecimiento del argumento; $\tau \geqslant 0$ es un número real.

Examinemos los seudopolinomios de la forma

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} x^{\lambda_k}, \qquad x \in (0, 1), \tag{1}$$

de coeficientes complejos $a_{k,n}$. Se supone que $x^{\lambda_k} = e^{\lambda_k \ln x}$, donde $\ln x$ significa el valor principal ($\ln 1 = 0$).

Hagamos

$$\overline{E}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{k,n} x^{\overline{\lambda}_k}$$

($\overline{\alpha}$ designa el número conjugado con α).

Hallemos una sucesión de seudopolinomios $E_n(x)$ ortonormales respecto del núcleo x^τ en el intervalo (0, 1) del eje real, es decir, que satisfagan a la condición

$$\int_0^1 x^{\tau} E_n(x)\, \overline{E}_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ 1 \text{ si } n = m. \end{cases} \tag{2}$$

Obsérvese que las condiciones de ortogonalidad de los seudopolinomios (1) quedarán aseguradas si

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_{k,n} x^{\lambda_k} \right) x^{\overline{\lambda}_q + \tau}\, dx = 0, \quad q = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{3}$$

Después de integrar resulta el sistema de ecuaciones

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k,n}}{1+\lambda_k+\overline{\lambda}_q+\tau} = 0, \quad q = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \tag{4}$$

del cual se hallan los coeficientes $a_{k,n}$ del seudopolinomio $E_n(x)$. Con este fin, consideremos las funciones racionales

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k,n}}{1+\lambda_k+\tau+z} = \frac{\varepsilon_n P_n(z)}{Q_{n+1}(z)}, \tag{5}$$

donde

$$P_n(z) = z^n + \ldots \text{ y } Q_{n+1}(z) = \prod_{k=0}^{n} (z+\lambda_k+1+\tau)$$

son polinomios ordinarios de grados n y $n+1$, respectivamente, y $\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}$. Entonces, en virtud de (4),

$$P_n(\overline{\lambda}_q) = 0, \qquad q = 0,\ 1,\ \ldots, \qquad n-1,$$

por lo cual

$$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z-\overline{\lambda}_k).$$

Para determinar $a_{m,n}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ multipliquemos ambos miembros de (5) por $z+1+\tau+\lambda_m$ y pongamos después $z = -1-\tau-\lambda_m$; entonces tendremos:

$$a_{m,n} = \varepsilon_n \frac{P_n(-1-\tau-\lambda_m)}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k\neq m}}^{n} (\lambda_k - \alpha_m)}, \qquad m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{6}$$

Hagamos ahora

$$\overline{Q}_{n+1}(z)=\prod_{k=0}^{n}(z+1+\tau+\overline{\lambda}_k), \quad \overline{P}_n(z)=\prod_{k=0}^{n-1}(z-\lambda_k), \tag{7}$$

entonces la expresión (6) para los coeficientes $a_{m,n}$ puede escribirse en la forma

$$a_{m,n}=\frac{\varepsilon_n}{1+\tau+\lambda_m+\overline{\lambda}_n}\cdot\frac{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_m)}{\overline{P}'_{n+1}(\lambda_m)}, \quad m=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{8}$$

El factor ε_n lo hallaremos ahora de la condición

$$\int_0^1 E_n(x)\,\overline{E}_n(x)\,x^{\tau}\,dx=1,$$

la cual, en virtud de (3), se puede sustituir por la condición

$$a_{n,n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{a}_{k,n}}{1+\tau+\overline{\lambda}_k+\lambda_n}=1. \tag{9}$$

Similarmente a (5) se puede obtener también la identidad

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{a}_{k,n}}{1+\tau+\overline{\lambda}_k+z}=\overline{\varepsilon}_n\frac{\overline{P}_n(z)}{\overline{Q}_{n+1}(z)},$$

de la cual, haciendo $z=\lambda_n$, hallamos que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{a}_{k,n}}{1+\tau+\overline{\lambda}_k+\lambda_n}=\overline{\varepsilon}_n\frac{\overline{P}_n(\lambda_n)}{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_n)}.$$

De aquí, teniendo en cuenta (9), obtenemos que

$$\overline{\varepsilon}_n=\frac{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_n)}{a_{n,n}\overline{P}_n(\lambda_n)}. \tag{10}$$

Por otra parte, haciendo $m=n$ en (8), hallamos que

$$\varepsilon_n=\frac{a_{n,n}(1+\tau+\lambda_n+\overline{\lambda}_n)\,\overline{P}'_{n+1}(\lambda_n)}{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_n)}. \tag{11}$$

Multiplicando (10) por (11) y teniendo en cuenta que

$$\overline{P}'_{n+1}(\lambda_n)=\overline{P}_n(\lambda_n),$$

obtenemos la igualdad

$$|\varepsilon_n|^2=1+\tau+\lambda_n+\overline{\lambda}_n,$$

de la cual hallamos definitivamente que

$$\varepsilon_n = \sqrt{1+\tau+\lambda_n+\overline{\lambda}_n},$$

puesto que ε_n se puede suponer real y positivo. Los coeficientes $a_{m,n}$ se puede hallar ahora de la fórmula (8):

$$a_{m,n} = \frac{\sqrt{1+\tau+\lambda_n+\overline{\lambda}_n}}{1+\tau+\lambda_m+\overline{\lambda}_n}\cdot\frac{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_m)}{\overline{P}'_{n+1}(\lambda_m)}. \tag{12}$$

En particular, para el coeficiente superior resulta

$$a_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau+\lambda_n+\overline{\lambda}_n}}\cdot\frac{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_n)}{\overline{P}_n(\lambda_n)}. \tag{13}$$

Por lo tanto, queda demostrado el siguiente teorema.

Teorema. Los seudopolinomios

$$E_n(x) = \sqrt{1+\tau+\lambda_n+\overline{\lambda}_n}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{1+\tau+\lambda_m+\overline{\lambda}_n}\cdot\frac{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_m)}{\overline{P}'_{n+1}(\lambda_m)}\cdot x^{\lambda_m}, \tag{14}$$
$$n=0,\ 1,\ \ldots,$$

donde $\overline{P}_{n+1}(z)$ y $\overline{Q}_{n+1}(z)$ están definidos por las fórmulas (7), forman un sistema ortogonal y normal en el intervalo (0, 1) respecto del núcleo x^{τ} $(\tau \geqslant 0)$ *).

Fácilmente se comprueba que los seudopolinomios (14) pueden expresarse en las siguientes formas integrales:

$$E_n(x) + \frac{\sqrt{1+\tau+2\operatorname{Re}\lambda_n}}{2\pi i\ln\frac{1}{x}}\int_C x^z\frac{d}{dz}\left[\frac{\overline{Q}_{n+1}(z)}{(z+\overline{\lambda}_n+1+\tau)\,\overline{P}_{n+1}(z)}\right]dz$$

y

$$E_n(x) = \frac{\sqrt{1+\tau+2\operatorname{Re}\lambda_n}}{2\pi i}\int_C x^z\,\frac{\overline{Q}_{n+1}(z)}{(z+\overline{\lambda}_n+1+\tau)\,\overline{P}_{n+1}(z)}\,dz,$$

donde el circuito cerrado simple C está situado en el semiplano $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ y encierra los puntos $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$.

De la teoría de los polinomios ortogonales se deduce que entre

---

*) El caso $\tau = 0$, siendo λ_k números complejos arbitrarios $\left(\operatorname{Re}\lambda_k > -\frac{1}{2}\right)$, fue estudiado por el autor del presente apéndice en la tesis defendida por él en el año 1954.

todos los seudopolinomios de la forma

$$P(x) = x^{\lambda_n} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{\lambda_k}$$

el seudopolinomio

$$P_n(x) = \frac{1}{a_{n,n}} E_n(x)$$

proporciona el valor mínimo de la integral

$$\int_0^1 |P(x)|^2 x^{\tau} dx.$$

Según (2) y (12), este valor mínimo es igual a

$$\sigma = \frac{1}{|a_{n,n}|^2} \int_0^1 |E_n(x)|^2 x^{\tau} dx = (1 + \tau + 2\mathrm{Re}\,\lambda_n) \left| \frac{\overline{P}_n(\lambda_n)}{\overline{Q}_{n+1}(\lambda_n)} \right|^2 .$$

Para $\tau = 0$ y $\lambda_k = k$ los seudopolinomios (14) son los polinomios de Legendre.

BIBLIOGRAFIA

I. TRATADOS Y LIBROS DE PROBLEMAS DE TEORIA DE LAS FUNCIONES ANALITICAS DE UNA VARIABLE

1. Behnke H., und Sommer F., Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen veränderlichen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1962.
2. Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. I. Elemente der Funktionentheorie, 3 Aufl., Leipzig — Berlin, 1930.
3. Caratheodory C., Funktionentheorie, B. I., Basel, 1950.
4. Courant R., Geometrische Funktionentheorie, Springer, Berlin, 3ª ed., 1929.
5. Dienes P., The Taylor series. An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford, 1931.
6. Dinghas A., Vorlesungen über Funktionentheorie, Berlin — Göttingen — Geidelberg, 1961.
7. Evgráfov M., Funciones analíticas.
(Евграфов М. А., Аналитические функции, М., 1965.)
8. Favard J., Cours d'analyse de l'École polytechnique, t. II. Représentations. Functions analytiques, Paris, 1960.
9. Fuks B. y Shabat B., Funciones de variable compleja y algunas aplicaciones.
(Фукс Б. А. и Шабат Б. В., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, изд. 3-е, М., 1964.)
10. Goursat E., Cours d'analyse mathématique, Vol II, 7ª ed., 1949.
11. Hermite C., Cours d'analyse.
12. Hurwitz A., Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, Berlin, 3ª ed., 1929.
13. Jordan C., Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, 3 éd, t. II, Calcul intégral, Paris, 1913 (ch. VI—VIII).
14. Knopp K., 1) Funktionentheorie, T. I., Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen, 6 Aufl., Berlin, 1944; 2) lo mismo T. II. Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie, 6 Aufl., Berlin, 1944; 3) Aufgabensammlung zur Funktionentheorie, T. I, Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie, 3 Aufl., Berlin, 1944; 4) lo mismo T. II. Aufgaben zur höheren Funktionentheorie, 3 Aufl., Berlin, 1944.
15. Lavréntiev M. y Shabat B. Métodos de la teoría de funciones de variable compleja.
(Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3-е, испр., М., 1965.)

16. Littlewood J. E., Lectures on the theory of functions Oxford, 1944
17. Markushévich A., Elementos de la teoría de funciones analíticas. (Маркушевич А. И., Элементы теории аналитических функций, М., 1944.)
18. Markushévich A., Curso breve de la teoría de funciones analíticas. (Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, 3 изд., испр. и доп., М., 1966.)
19. Milloux H., Principes methodes générales, t. I, F. 1 [Traité de théorie des fonctions poublié sous la direction de M. Gaston Julia], Paris, 1953.
20. Osgood W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. I, 4 Aufl Leipzig — Berlin, 1923.
21. Picard E., Traité d'analyse, t. II, Fonctions harmoniques et fonctions analytiques, Introduction à la théorie des équation différentielles, Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann, 3 éd., Paris, 1927.
22. Pólya C. und Szegö G., Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Erster band., Berlin. Verlag von Julius Springer, 1925.
23. Priválov I., Introducción a la teoría de funciones de variable compleja. (Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 10-е, М., 1960.)
24. Saks S. and Zygmund A., Analytic Functions, transl. by E. J. Scott. Warszawa — Wroclaw, 1952.
25. Smirnov V., Curso de matemáticas superiores, t. III, 2ª parte. (Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, изд. 6-е, М., 1956.)
26. Stoilow S., Teoria functiilor de o variabila complexa, vol. I, Ed. Acad. Rep. Popul., Române, 1954.
27. Titchmarsh E., The theory of functions. 2ª ed., Univ. de Oxford. 1939.
28. Valiron G., Cours d'analyse mathématique, t. I, Théorie des fonctions, 2 éd., Paris, 1948.
29. Volkowiski L., Lunts G., Aramanóvich I., Problemas de teoría de funciones de variable compleja. (Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., Сборник задач по теории функций комплексного переменного, М., 1961.)
30. Whittaker E. and Watson G., A course of modern analysis, 4ª ed., Universidad de Cambridge, 1927.

II. MONOGRAFIAS SOBRE CUESTIONES ESPECIALES

A. Historia de la teoría de las funciones analíticas

Markushévich A., Bosquejo de historia de la teoría de las funciones analíticas. (Маркушевич А. И., Очерки по истории теории аналитических функций, М.—Л., 1951)

B. Transformaciones homográficas

1. Fatou P. Fonctions automorphes (Théorie des fonstions algébriques d'une variable et des transcendantes qui s'y rattachent, par MM. P. Appell, É. Goursat, 2 éd., t. II), Paris, 1930 (ch. XIII, ch. XIV).
2. Ford L. Automorphic functions, Mcgraw — Hill Book Company, 1929.
3. Julia G., Principes géométriques d'analyse, t. I, Paris, 1932.

C. Práctica de las transformaciones conformes

1. Kantoróvich L. y Krilov V., Métodos aproximados del análisis superior.
(Approximate methods of higler analysys, Interscience, Nueva York, 1958.)
(Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, М.—Л., 1962.)
2. W. Koppenfels und F. Stallmann, Praxis der Konformen Albildung, Springer — Vorlag, Berlin, Göttingen Heidelberg, 1959.

D. Integral de tipo Cauchy

1. Gólubiev V., Funciones uniformes analíticas. Funciones automorfas. (Голубев В. В., Однозначные аналитические функции, Автоморфные функции, М., 1961.)
2. Musjelishvili N., Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics. (Dep. of Supply and Development, Aer. Res. Lab., Melbourne, Australia, 1949; Noordhoff, Groningen, 1953.
(Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике, изд. 2-е, М., 1962.)
3. Priválov I., Propiedades de frontera de las funciones analíticas. (Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М.—Л., 1950.)

E. Series de potencias. Series de Dirichlet

1. Bernstein V., Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.
2. Hadamard J. et Mandelbrojt S., La série de Taylor et son prolongement analytique, 2 éd., Paris, 1926.
3. Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2 Aufl., Berlin, 1929.
4. Zygmund A., Trigonometric series. 2ª ed., 2 vols., Cambridg Univ. Press., 1959.

F. Principio de compacidad

Montel P., Familles normales de fonctions analytiques, Paris, 1927.

G. Teorema de Runge

1. Montel P., Leçons sur les séries de pôlynomes à une variable complexe, Paris, 1926.
2. Painlevé P., Sur le développement des fonctions analytiques (Note I al libro: É. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réalles et le développement en séries de polynomes, 2 éd., Paris, 1928.)
3. Smirnov V. y Liébediev N., Teoría constructiva de las funciones de variable compleja.
(Смирнов В. И. и Лебедев Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1964.)
4. Walsch J., Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Publ. by the American Mathem. Society, Second ed., 1960.

H. Teoría de los residuos

Lindelöf E., Le calcul de résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Paris, 1905.

I. Interpolación

1. Guelfond A., Calcul des differences finies, Paris, Dunod, 1963 (Coll. Univ. Math.)
(Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, изд. 3-е, М., 1966.)
2. Goncharov V., Teoría de interpolación y aproximación de las funciones.
(Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М., 1954.)

J. Funciones de varias variables

1. Bójner S. y Martin U., Funciones de varias variables complejas. (Бохнер С. и Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, М., 1951.)
2. Hervé M., Several complex variables, Oxford Univ. Press. Bombay, 1963.
3. Fuks B., Teoría de funciones analíticas de varias variables complejas. (Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962.)
4. Osgood W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. II, 1-e Lieferung, 2 Aufl., 1929, Leipzig und Berlin.
5. Vladímirov V., Métodos de la teoría de las funciones de varias variables complejas.
(Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.)

INDICE ALFABETICO

LA EDITORIAL MIR PREPARA
LA EDICION DE LOS LIBROS

Elsgolz L.

ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO DE VARIACIONES

Este libro se debe al profesor L. Elsgolz, doctor en ciencias físico-matemáticas; está dedicado a las ecuaciones diferenciales y cálculos de variaciones.
El autor examina las ecuaciones diferenciales de primer orden y de orden superior, sistemas de ecuaciones diferenciales, teoría de la estabilidad, ecuaciones de derivadas parciales de primer orden, métodos de variaciones en los problemas con límites fijos, problemas de variaciones con límites móviles, condiciones suficientes del extremo, problemas de variaciones del extremo complejo y métodos directos en los problemas de variaciones.
Está destinado para los estudiantes de las facultades físico-matemáticas de los centros de enseñanza superior y especialistas que estudian los problemas de matemáticas indicados.

Kiselev A., Krasnov M., Makarenko G.

ECUACIONES INTEGRALES

El libro del docente del Instituto energético de Moscú Alexandr Kiselev, candidato a doctor en ciencias físicas y matemáticas Mijail Krasnov y Grigori Makarenko, contiene 322 problemas con respuestas referentes a los aspectos principales del curso de ecuaciones integrales. Consta de tres capítulos: «Ecuaciones integrales de Walterr», «Ecuaciones integrales de Fredholm» y «Métodos aproximativos».
En cada párrafo se ilustran los resultados pricipales, fórmulas y ejemplos típicos examinados detalladamente. El apéndice contiene un resumen de los principales métodos de solución de las ecuaciones integrales.
El libro está destinado para los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior e ingenieros.