

EDITORIAL MIR

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ТЕОРИЯ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ТОМ II ДАЛЬНЕЙШЕЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

A. MARKUSHEVICH

TEORIA
DE LAS
FUNCIONES ANALITICAS

TOMO II

TRADUCIDO DEL RUSO

POR

EMILIANO APARICIO BERNARDO

CANDIDATO A DOCTOR EN CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS.

CATEDRATICO DE MATEMATICAS SUPERIORES

EDITORIAL MIR

MOSCU

1970

CDU 517.5=60

Impreso en la URSS
Derechos reservados

На испанском языке

INDICE

CAPITULO QUINTO

TRANSFORMACIONES CONFORMES. APLICACION A LOS PROBLEMAS DE LA APROXIMACION DE LAS FUNCIONES POR POLINOMIOS

§ 1. Transformaciones mediante funciones analíticas. Criterio de univalencia	7
§ 2. Teoremas de existencia de Riemann y Hilbert. Propiedades de las funciones univalentes	27
§ 3. Correspondencia de las fronteras. Estructura de la frontera de un recinto simplemente conexo	63
§ 4. Teorema de S. Merguelián. Polinomios de Faber y teorema de S. Bernstein. Polinomios ortogonales sobre la superficie de un recinto	96

CAPITULO SEXTO

FUNCIONES ARMONICAS Y SUBARMONICAS. EL SIGNIFICADO DE LAS FUNCIONES ANALITICAS EN LA HIDROMECAICA. FUNCIONES DE FORMA ACOTADA

§ 1. Funciones armónicas. El problema de Dirichlet y la función de Green para un recinto simplemente conexo	149
§ 2. Significado de las funciones analíticas de variable compleja en la hidromecánica. Perfiles de Joukowski-Chapliguin	177
§ 3. Funciones subarmónicas. Principio generalizado del módulo máximo y sus aplicaciones	201
§ 4. Fórmula de Poisson-Jentzsch	222
§ 5. Funciones de forma acotada	235
§ 6. Propiedades de frontera de las funciones de forma acotada	243

CAPITULO SEPTIMO

FUNCIONES ENTERAS Y MEROMORFAS

§ 1.	Crecimiento de una función entera. Orden y tipo	252
§ 2.	Desarrollo en producto infinito. Relación entre el crecimiento de una función entera y sus ceros	281
§ 3.	Desarrollo de las funciones meromorfas en fracciones simples	301
§ 4.	Función Gamma	313
§ 5.	Funciones periódicas	334
§ 6.	Funciones elípticas y funciones ligadas con ellas. Theta-funciones	348
§ 7.	Función característica $T(\rho)$	422

CAPITULO OCTAVO

CONCEPTO DE SUPERFICIE DE RIEMANN.
PROLONGACION ANALITICA

§ 1.	Concepto de superficie. Superficie abstracta de Riemann	452
§ 2.	Triangulación de una superficie. Transformaciones interiores	462
§ 3.	Superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra	473
§ 4.	Prolongación analítica. Función analítica completa e imagen analítica	492
§ 5.	Prolongación a lo largo de una curva. Teorema de monodromía. Estrella rectilínea de un elemento. La imagen analítica como superficie de Riemann	502
§ 6.	Puntos singulares. Funciones algebraicas	540
§ 7.	Principio de simetría. Transformación de un semiplano en un polígono arbitrario	564
§ 8.	Función modular. Criterio de normalidad. Teorema grande de Picard y rectas de Julia	583
	Apéndice. Sobre la base en el espacio de las funciones analíticas	597
	Bibliografía para el segundo tomo	641
	Índice alfabético	644

CAPITULO

QUINTO

TRANSFORMACIONES CONFORMES.
 APLICACION A LOS PROBLEMAS
 DE LA APROXIMACION DE LAS
 FUNCIONES POR POLINOMIOS

§ 1. TRANSFORMACIONES MEDIANTE FUNCIONES ANALITICAS.
 CRITERIO DE UNIVALENCIA

1.1. Dedicuémonos al estudio de las transformaciones realizadas por funciones analíticas.

Teorema de la conservación del recinto en las transformaciones analíticas. *Si $f(z) \neq \text{const}$ es una función analítica en un recinto G a excepción, posiblemente, de polos, entonces la imagen $f(G)$ de este recinto también es un recinto del plano ampliado.*

Obsérvese que, sin duda, la imagen $f(G)$ es conexa, pues, si L es una curva continua que une los puntos z_1 y z_2 del recinto G y pertenece a G , entonces su imagen $f(L)$ también es una curva continua (del plano ampliado) que une $f(z_1)$ con $f(z_2)$ y pertenece a $f(G)$. O sea, $f(G)$ es un conjunto conexo (véase el ap. 4.1 del cap. primero). No queda más que demostrar que cada punto $w_0 = f(z_0)$, donde $z_0 \in G$, es un punto interior del conjunto $f(G)$.

Supongamos primero que $z_0 \neq \infty$ y $w_0 \neq \infty$. Examinemos un círculo cerrado $|z - z_0| \leq \rho_0$, perteneciente al recinto G , de un radio tan pequeño que en todos sus puntos, distintos de z_0 , los valores de $f(z)$ sean distintos de $w_0 = f(z_0)$. Designando con γ_0 la circunferencia $|z - z_0| = \rho_0$, tendremos que su imagen $f(\gamma_0)$ en el plano w estará situada a una distancia positiva δ del punto w_0 , donde $\delta = \min_{z \in \gamma_0} |f(z) - f(z_0)|$.

Demostremos que el entorno $|w - w_0| < \delta$ del punto w_0 pertenece completamente al conjunto $f(G)$. De aquí se deducirá que w_0 es un punto interior de este conjunto.

Sea w_1 un punto arbitrario del entorno indicado: $|w_1 - w_0| < \delta$. Entonces, en los puntos de la circunferencia γ_0 tendremos:

$$|f(z) - w_0| > |w_0 - w_1|$$

y, por consiguiente, según el teorema de Rouché (véase el ap. 3.5 del cap. cuarto), las ecuaciones

$$f(z) - w_0 = 0 \quad \text{y} \quad (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1) = f(z) - w_1 = 0$$

tienen una misma cantidad de raíces en el interior de γ_0 . Pero $f(z) - w_0 = 0$ tiene al menos una raíz en el interior de γ_0 ($z = z_0$). Por consiguiente, la ecuación $f(z) - w_1 = 0$ también tiene al menos una raíz en el interior de γ_0 , es decir, existe en el entorno de z_0 un punto z_1 tal que $f(z_1) = w_1$. Así, pues, w_1 pertenece a $f(G)$, con lo cual se termina la demostración para el caso en que z_0 y $w_0 = f(z_0)$ son puntos finitos.

Cuando $z_0 = \infty$ y $w_0 \neq \infty$, recurrimos a la transformación auxiliar $\zeta = 1/z$, la cual realiza una transformación biunívoca y continua de un entorno del punto del infinito en un entorno del origen de coordenadas; además, la función $f(z)$, que es analítica en un entorno de $z_0 = \infty$, se sustituye por la función $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = f^*(\zeta)$, que es analítica en un entorno de $\zeta = 0$ y toma aquí los mismos valores que toma la función $f(z)$ en el entorno del punto del infinito. Como el punto $f^*(0) = f(\infty) = w_0$ es interior para el conjunto de los valores $f^*(\zeta)$, este mismo punto será interior también para $f(G)$.

Cuando $z_0 \neq \infty$ y $w_0 = \infty$, $f(z)$ tiene un polo en el punto z_0 y, por consiguiente, la función $t = \frac{1}{f(z)}$ tiene aquí un cero. Aplicando la proposición demostrada a la función $\frac{1}{f(z)}$ y al punto z_0 , hallamos que $t = 0$ — que es el valor de $\frac{1}{f(z)}$ en el punto z_0 — es un punto interior para el conjunto de los valores $\frac{1}{f(z)}$. Pero, como la transformación auxiliar $t = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{w}$ transforma biunívoca y continuamente el entorno del punto $t = 0$ en un entorno del punto $w = \infty$, de aquí se deduce que $w = \infty$ es un punto interior para el conjunto $f(G)$.

Finalmente, cuando $z_0 = \infty$ y $w_0 = \infty$, es suficiente realizar la transformación auxiliar $\zeta = 1/z$ para reducir el problema al caso que acabamos de considerar.

Resumiendo, en todos los casos el punto $w_0 = f(z_0)$ es interior para el conjunto $f(G)$.

Un estudio escrupuloso de la demostración expuesta muestra que se pueden hacer unas cuantas conclusiones importantes.

Ante todo, del teorema demostrado obtenemos de nuevo el principio del módulo máximo. A saber, si $f(z) \neq \text{const}$ y el punto $z_0 \in G$ no es un polo de la función $f(z)$, entonces el módulo $|f(z)|$ no puede

tener un máximo en el punto z_0 . En efecto, la imagen de cualquier entorno del punto z_0 cubre un entorno del punto $w_0 = f(z_0)$; por consiguiente, en cualquier entorno del punto z_0 existen puntos z cuyas imágenes $f(z)$ distan del origen de coordenadas más que $f(z_0)$, o sea, $|f(z)| > |f(z_0)|$.

Suponiendo que $f(z_0) \neq 0$, se observa que en cualquier entorno del punto z_0 existen puntos z' cuyas imágenes $f(z')$ están más próximas del origen de coordenadas que $f(z_0)$. Por consiguiente, el módulo $|f(z)|$ no puede tener mínimo en el punto z_0 (si $f(z_0) \neq 0$). En resumen, el principio del módulo máximo (y mínimo) es una consecuencia simple del hecho de que una función analítica transforma los puntos interiores en puntos interiores.

Para obtener otras consecuencias, limitémonos a estudiar el caso en que z_0 y $w_0 = f(z_0)$ son puntos finitos. Los casos $z_0 = \infty$ o $w_0 = \infty$ o, finalmente, $z_0 = w_0 = \infty$, se reducen fácilmente a éste mediante una transformación homográfica elemental, así como se ha indicado anteriormente.

Supongamos que z_0 es un w_0 -punto k -múltiple ($k \geq 1$) de la función $f(z)$. Esto significa, para $k = 1$, que $f'(z_0) \neq 0$, y para $k > 1$, que $f'(z_0) = 0, \dots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$, pero $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Durante la demostración del teorema se había establecido que, si el número $\rho_0 > 0$ se ha tomado tan pequeño que la ecuación $f(z) - w_0 = 0$ no tiene otras raíces en el círculo $|z - z_0| \leq \rho_0$ más que $z = z_0$, o sea, que la cantidad de raíces en el interior de $\gamma_0: |z - z_0| = \rho_0$ coincide con k (lo cual será para valores de ρ_0 suficientemente pequeños), entonces, para δ igual a la distancia desde el punto w_0 hasta la curva $f(\gamma)$ y para cada punto w_1 perteneciente al entorno $|w - w_0| < \delta$, la ecuación $f(z) - w_1 = 0$ tiene tantas raíces en el interior de γ_0 , cuantas tiene la ecuación $f(z) - w_0 = 0$, o sea, también k raíces.

Sustituyamos ρ_0 por un número positivo menor ρ , de modo que la imagen del entorno $U_\rho: |z - z_0| < \rho$ esté comprendida completamente en el entorno $|w - w_0| < \delta$. Por lo demostrado, esta imagen es un recinto. Además, debido a la elección de los números δ y ρ , cada punto w_1 perteneciente a la imagen del entorno U_ρ posee una misma cantidad de preimágenes, precisamente k en el círculo $|z - z_0| < \rho_0$. Naturalmente, algunas de estas preimágenes pueden coincidir entre sí en un punto múltiple z_1 , en el cual necesariamente $f'(z_1) = 0$; pero si se elige ρ_0 tan pequeño que la derivada $f'(z)$ no se anule en los puntos del círculo $|z - z_0| < \rho_0$ distintos de z_0 , entonces las preimágenes de cada punto $w_1 \neq w_0$ serán todas distintas entre sí.

En resumen, se verifica la siguiente proposición:

T e o r e m a. Si, para una función analítica $f(z)$, el punto z_0 es un $f(z_0)$ -punto k -múltiple ($k \geq 1$), entonces existe un entorno

U_ρ : $|z - z_0| < \rho$ del punto z_0 , que se transforma por esta función en el recinto correspondiente $f(U_\rho)$, de modo que cada punto $w \in f(U_\rho)$ posee no más de k preimágenes en U_ρ , y los puntos suficientemente próximos a w_0 poseen k preimágenes en U_ρ (distintas, si $w \neq w_0$).

Recordemos (véase el ap. 5.1, cap. segundo) que una función $f(z)$ se llama univalente en el recinto G , si es uniforme y analítica en este recinto a excepción, posiblemente, de polos, y si en puntos distintos del recinto G ella toma valores distintos:

$$f(z_1) \neq f(z_2), \text{ si } z_1 \neq z_2; z_1, z_2 \in G.$$

De esta definición se deduce inmediatamente que una función univalente no puede tener más de un polo.

Del último teorema se deduce que, si $f'(z_0) \neq 0$, entonces $k = 1$ y $f(z)$ es una función univalente en cierto entorno del punto z_0 . Si $k > 1$, la función no será univalente o, como suele decirse, será *m u l t i v a l e n t e*, precisamente, *k*-*v a l e n t e* en cada entorno suficientemente pequeño del punto z_0 .

Señalemos la siguiente proposición, que se deduce del mismo teorema: *Si una función analítica $f(z)$ es univalente en el recinto G , entonces, todos los puntos del recinto G son puntos simples para la misma. En particular, tienen que ser simples su cero y su polo (si es que éstos existen en el recinto G), y la derivada $f'(z)$ no tiene que anularse en los puntos finitos del recinto G .*

La proposición recíproca no es justa. Como ejemplo, examinemos la función exponencial e^z , cuya derivada no se anula en ningún punto del plano y la cual, sin embargo, no es univalente en el plano, puesto que $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Demostremos que *toda función analítica que sea univalente en el plano finito, tiene que ser homográfica* (en particular, lineal entera).

En efecto, sea $f(z)$ tal función. En virtud de la univalencia, ella no tiene en el plano finito otro punto singular más que, posiblemente, un polo único (simple).

El punto del infinito puede ser para la misma un punto regular, un polo o un punto singular esencial. Demostremos que esto último es imposible. En efecto, esta función transforma el círculo unidad $|z| < 1$ en cierto recinto g del plano w . Si $w_0 \in g$ y U_ρ es un entorno del punto w_0 perteneciente a g , entonces, debido a la univalencia, $f(z)$ no puede tomar fuera del círculo unidad ningún valor que pertenezca a U_ρ . Por esta razón, no puede existir una sucesión $\{z_n\}$ que converja hacia ∞ , tal que $\lim f(z_n) = w_0$. De aquí, según el teorema de Sojotski — Weierstrass (ap. 3.1, cap. cuarto) se deduce que ∞ no es un punto singular esencial de la función $f(z)$.

Así, pues, el punto ∞ es un punto regular o un polo para $f(z)$. Pero si este punto es un polo, éste tiene que ser simple. En caso contrario, en cierto entorno del punto ∞ la función $f(z)$ tomaría

cada valor un número de veces, lo cual es incompatible con la univalencia. Cerciorémonos de que si $f(z)$ tiene un polo finito z_1 , entonces no puede tener un polo en el punto del infinito. En efecto, esta función transforma el entorno $|z - z_1| < 1$ del punto z_1 en un recinto g_1 que contiene al punto $w = \infty$, y si U_1 es un entorno del punto $w = \infty$ perteneciente a g_1 , entonces, debido a la univalencia, $f(z)$ no puede tomar fuera del círculo $|z - z_1| < 1$ valores que pertenezcan a U_1 y, por consiguiente, se mantiene acotada en valor absoluto. Por lo tanto, $f(z)$ no tiene en el plano ampliado más puntos singulares que un polo simple único, posiblemente. Evidentemente, este polo necesariamente tiene que existir; en caso contrario tendríamos que $f(z) \equiv \text{const}$, lo cual contradice a la univalencia de la función.

Si el polo está situado en el infinito, entonces $f(z)$ es una función entera con un polo simple en el infinito, es decir, $f(z) = az + b$ ($a \neq 0$) es una función lineal entera. Si el polo está situado en un punto finito z_1 y $\frac{a_1}{z - z_1}$ es la parte principal del desarrollo de Laurent correspondiente, entonces $f(z) - \frac{a_1}{z - z_1}$ no tiene singularidades en el plano ampliado y, por consiguiente, $f(z) - \frac{a_1}{z - z_1} \equiv \text{const} = b_1$, de donde se deduce que $f(z)$ es una función homográfica. Con esto se termina la demostración.

Demostremos también que la transformación de un recinto G , realizada mediante una función univalente arbitraria, es conforme en todos los puntos del recinto.

En efecto, si $z_0 \in G$ y $z_0 \neq \infty$, y, del mismo modo, $f(z_0) = w_0 \neq \infty$, entonces, según lo demostrado anteriormente, tiene que ser: $f'(z_0) \neq 0$, de donde se deduce que la transformación es conforme en el punto z_0 .

Si uno de los puntos z_0 y w_0 , o ambos, está situado en el infinito, recurrimos a la transformación auxiliar $\xi = \frac{1}{z}$ o sea $t = \frac{1}{w}$, las cuales, sin alterar la univalencia de la función y sin cambiar los ángulos, dan lugar al caso de puntos finitos que acabamos de considerar. De este modo, la proposición queda demostrada en todos los casos.

Si la función $w = f(z)$ no es univalente en el recinto G , de aquí no se deduce todavía que tiene que dejar de ser conforme en algún sitio. En efecto, para que sea conforme es suficiente que sea $f'(z_0) \neq 0$, y esta condición puede cumplirse también para funciones que no son univalentes como, por ejemplo, para la función e^z en todo el plano. Pero si $w_0 = f(z_0)$ es un valor k -múltiple de la función ($k > 1$), y, en particular (siendo z_0 y w_0 finitos), si $f'(z_0) = \dots =$

$= f^{(k-1)}(z_0) = 0$, pero $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, entonces necesariamente se vulnera la conformidad. Precisando, *el ángulo formado por dos curvas con el vértice en el punto z_0 se altera en la transformación $w = f(z)$, aumentando k veces.*

Demostremos esta proposición, suponiendo que z_0 y w_0 son finitos (que es el caso al que se reducen todos los demás mediante transformaciones homográficas). En efecto, en este caso, en un entorno del punto z_0 se tiene:

$$f(z) = w_0 + a_k (z - z_0)^k + \dots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0,$$

por consiguiente:

$$\text{Arg}[f(z) - w_0] \approx \text{Arg}(z - z_0)^k + \text{Arg}[a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots].$$

Si la ecuación de la curva L que pasa por el punto z_0 es

$$z = \varphi(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

de modo que $\text{Arg} \varphi'(t_0)$ representa el ángulo formado por la tangente a L en el punto z_0 y la parte positiva del eje real, entonces la ecuación de la imagen de esta curva $f(L)$ es:

$$w = f[\varphi(t)], \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Evidentemente, la derivada de esta función se anula en el punto $t = t_0$ (puesto que $f'(z_0) = 0$), por lo cual ésta no da la posibilidad de juzgar de la inclinación de la tangente a $f(L)$ en el punto w_0 , ni incluso de la existencia de esta tangente. No obstante, se puede escribir:

$$\text{Arg} \frac{w - w_0}{t - t_0} = \text{Arg} \frac{w - w_0}{(z - z_0)^k} + \text{Arg} \frac{(z - z_0)^k}{t - t_0} \rightarrow \text{Arg} a_k + k \text{Arg} \varphi'(t_0)$$

para $t \rightarrow t_0 \quad (t > t_0)$,

de donde se deduce que existe la tangente y el ángulo de inclinación para la misma es:

$$\text{Arg} a_k + k \text{Arg} \varphi'(t_0).$$

Si ahora L_1 y L_2 son dos curvas $z = \varphi_1(t)$ y $z = \varphi_2(t)$, que pasan por el punto z_0 y forman en el mismo el ángulo θ :

$$0 = \text{Arg} \varphi_2'(t_0) - \text{Arg} \varphi_1'(t_0) \quad (\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = z_0),$$

entonces las imágenes $f(L_1)$ y $f(L_2)$ de estas curvas pasan por el punto w_0 y forman en él el ángulo

$$[\text{Arg} a_k + k \text{Arg} \varphi_2'(t_0)] - [\text{Arg} a_k + k \text{Arg} \varphi_1'(t_0)] = k\theta + 2n\pi.$$

En resumen, en la transformación $w = f(z)$ todos los ángulos con el vértice en el punto z_0 aumentan k veces*.)

1.2. En muchas cuestiones resulta útil el siguiente teorema, que proporciona las condiciones suficientes de univalencia.

T e o r e m a. *Supongamos que la función $w = f(z)$, siendo continua en un dominio \bar{g} , donde g es la parte interior de una curva de Jordan γ , y analítica en el recinto g , transforma biunívocamente γ en una curva cerrada de Jordan Γ . Entonces $f(z)$ es univalente en el recinto g y transforma a éste en el interior Δ de la curva Γ .*

Con este enunciado el teorema se establecerá a continuación en el ap. 3.6 como resultado de la aplicación del principio generalizado del argumento. Aquí consideraremos ante todo un caso particular del mismo, cuando γ es una curva rectificable y $f(z)$ es analítica en cierto recinto $G' \supset \bar{g}$. Con estas restricciones, la demostración del teorema será consecuencia del principio del argumento en la forma en que éste fue demostrado en el ap. 3.5, cap. cuarto, tomo I.

D e m o s t r a c i ó n. En virtud de lo demostrado anteriormente (pág. 7 y siguientes), la imagen $f(g)$ del recinto g es un recinto. Demostremos que $\Delta \subset f(g)$. En efecto, si $w_1 \in \Delta$, entonces, al dar una vuelta el punto z por la curva γ en sentido positivo, el punto $w = f(z)$, en virtud de la hipótesis del teorema, realiza un recorrido simple de la curva Γ y, por consiguiente, el vector $w - w_1$ gira un ángulo $\pm 2\pi$ alrededor del punto w_1 . De aquí se deduce, debido al principio del argumento (ap. 3.5, cap. cuarto), que la diferencia entre el número de w_1 -puntos y el número de polos de la función $f(z)$ en el interior de γ es igual a ± 1 . Pero, según la condición, $f(z)$ no tiene polos en el interior de γ . Por esta razón, el número de w_1 -puntos de la función $f(z)$ en el interior de γ tiene que coincidir con ± 1 , es decir, tiene que ser igual a uno. Así, pues, el ángulo de rotación del vector $w - w_1$ es igual a 2π (y no a -2π), o sea, $f(z)$ necesariamente recorre Γ en sentido positivo cuando z recorre γ en sentido positivo, tomando $f(z)$ cada valor $w_1 \in \Delta$ en el interior de γ y, además, una sola vez.

Por consiguiente, queda demostrado que $f(g) \supset \Delta$. Demostremos que ningún punto w_2 , situado en la parte exterior de la curva Γ , puede pertenecer a $f(g)$. En efecto, si el punto z recorre una vez γ en sentido positivo, entonces, por lo demostrado, $w = f(z)$ también recorre una vez Γ en sentido positivo, y como w_2 pertenece a la parte exterior de Γ , el ángulo de rotación del vector $w - w_2$ alrededor del punto w_2 es igual a cero. De aquí se deduce, en virtud del principio del argumento y de que la función $f(z)$ carece de polos en el interior

*) En el ap. 3.2, cap. segundo, se llevaron a cabo los mismos razonamientos para el caso en que $f(z)$ es un polinomio.

de γ , que $f(z)$ no tiene w_2 -puntos en el interior de γ , es decir, $w_2 \notin f(G)$.

Así, pues, $f(g)$ contiene todos los puntos de la parte interior de Γ , pero no contiene ningún punto exterior a esta curva. De aquí se deduce luego que ningún punto de la curva Γ puede pertenecer a $f(g)$. En efecto, si algún punto $w \in \Gamma$ perteneciese al recinto $f(g)$, entonces a este último pertenecería también un entorno del punto w y, por consiguiente, el recinto $f(g)$ tendría que contener también aquellos puntos de la parte exterior de Γ que están situados en este entorno. Pero, como acabamos de ver, esto último es imposible.

Por lo tanto, hemos demostrado que $f(g)$ coincide con la parte interior Δ de la curva Γ .

Durante la demostración se vio que cada punto del recinto Δ tiene solamente una preimagen en el recinto g . Por consiguiente, la correspondencia entre g y Δ , establecida por la función $w = f(z)$, es biunívoca y $f(z)$ es una función univalente en el recinto g .

El teorema demostrado conserva su valor también cuando el recinto g es la parte exterior de la curva γ , con la condición de que esta parte exterior esté contenida en el recinto G en el cual la $f(z)$ es analítica. En efecto, tomemos en el interior de γ algún punto z_0 no perteneciente al recinto G (tal punto existe, puesto que el recinto G no coincide con el plano ampliado; en caso contrario, la función $f(z)$, siendo analítica en el plano ampliado, sería idénticamente constante).

La transformación $z' = \frac{1}{z-z_0}$ transforma el recinto G en el recinto G' , la curva γ en la curva cerrada rectificable γ' y el exterior g de la curva γ en el interior g' de la curva γ' . Haciendo $f(z) = f\left(z_0 + \frac{1}{z'}\right) = f^*(z')$ y observando que esta función es analítica en el recinto G' y que mediante la función $w = f^*(z')$ la curva γ' se transforma biunívocamente en la curva Γ (debido a que la función $w = f(z)$ transforma biunívocamente γ en Γ y la función $z = z_0 + \frac{1}{z'}$ transforma biunívocamente γ' en γ), sacamos la conclusión de que el teorema demostrado es aplicable a la función $f^*(z')$, de modo que esta función es univalente en el interior de γ' y transforma g' en el interior de la curva Γ . Como la función $z = z_0 + \frac{1}{z'}$ es univalente, de aquí se deduce que $f(z)$ es univalente en el exterior de γ y transforma el recinto g en la parte interior de Γ .

Supongamos ahora que γ es una curva cerrada de Jordan del plano ampliado y que g es uno de los dos recintos, limitados por esta curva, contenido en el recinto G . Si z_0 es un punto perteneciente al segundo recinto limitado por la curva γ y no contenido en el recin-

to G , entonces, aplicando la transformación $z' = \frac{1}{z-z_0}$ reducimos también este caso al teorema demostrado, suponiendo que la imagen γ' de la curva γ , obtenida como resultado de esta transformación, es una curva rectificable.

Veamos otras generalizaciones del caso particular demostrado del teorema. Para precisar, supongamos que γ es una curva cerrada rectificable de Jordan y que g es la parte interior a esta curva. La extensión de las proposiciones que se demuestran a continuación al caso en que g es la parte exterior de la curva γ , o al caso en que γ es una curva ilimitada y g es uno de los dos recintos con la frontera γ , se efectúa del mismo modo que se ha hecho anteriormente, y no nos detendremos más en tal generalización. La generalización va a consistir en que no se va a exigir que la curva γ esté situada completamente en el interior del recinto G , donde $f(z)$ es una función analítica, y supondremos que un número finito de puntos de la curva γ : ζ_1, \dots, ζ_m está situado en la frontera del recinto G . Además, supondremos que existen límites finitos de la función $f(z)$ cuando z , manteniéndose en el recinto cerrado \bar{g} , tiende a ζ_k ($k = 1, 2, \dots, m$):

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_k} f(z) = w_k.$$

Entonces, haciendo $f(\zeta_k) = w_k$ ($k = 1, \dots, m$), definimos $f(z)$ en todos los puntos del dominio \bar{g} de modo que ella sea continua en \bar{g} y analítica en todos los puntos del mismo, a excepción, posiblemente, de los puntos ζ_k . Supongamos, finalmente, que $w = f(z)$ transforma biunívocamente la curva γ en una curva cerrada de Jordan Γ del plano w . Entonces se puede afirmar que la función $f(z)$ es univalente en el recinto g y que transforma este recinto en un recinto Δ que es interior a la curva Γ^* .

Para la demostración, describamos con los centros en los puntos ζ_k unas circunferencias $|z - \zeta_k| = \rho$ de un radio tan pequeño, que cada una de ellas esté situada fuera de cada una de las demás. En cada una de estas circunferencias tendremos al menos un arco perteneciente al recinto g (a excepción de los extremos, situados en la frontera de este recinto). Designemos con $\sigma_{h,\rho}$ el arco de la circunferencia $|z - \zeta_h| = \rho$ que, junto con un arco $\gamma_{h,\rho}$ de la curva γ , limita un recinto $g_{h,\rho}$, situado en el recinto g y que contiene al punto ζ_h en su frontera.

Para precisar, en la elección de los arcos $\sigma_{h,\rho}$ y $\gamma_{h,\rho}$ exigiremos también que el recinto $g_{h,\rho}$ no contenga un punto fijado $z_0 \in g$ (fig. 1).

Evidentemente, $\sigma_{h,\rho}$ y $\gamma_{h,\rho}$ poseen extremos comunes, y cuando ρ tiende a cero, los arcos $\sigma_{h,\rho}$ y $\gamma_{h,\rho}$, y junto con ellos también el recinto $g_{h,\rho}$, se ciñen al punto ζ_h . Tomemos ρ tan pequeño, de modo que no sólo los círculos $|z - \zeta_k| \leq$

* El lector puede omitir los razonamientos que siguen, puesto que la aplicación del principio generalizado del argumento (véase más adelante al ap. 3.5) hace que éstos sean superfluos.

$\leq \rho$ sino también los dominios $\bar{g}_{h,\rho}$ no tengan dos a dos puntos comunes entre sí. Excluyamos de γ los arcos $\gamma_{h,\rho}$, sustituyéndolos por los arcos de la circunferencia $\sigma_{h,\rho}$. Entonces la curva γ se sustituirá por una nueva curva rectificable de Jordan γ_ρ situada completamente en el interior de G . Su parte interior g_ρ representa una parte del recinto g . La imagen Γ_ρ de la curva γ_ρ en la transformación mediante la función $w = f(z)$ se obtiene de Γ excluyendo los

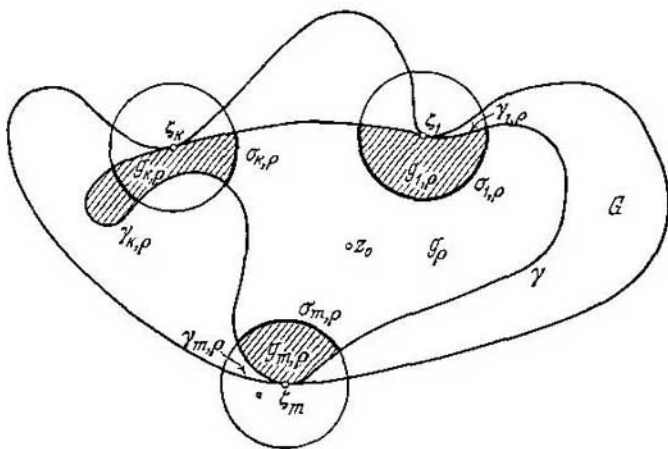


FIG. 1.

arcos $\Gamma_{h,\rho}$, que son las imágenes de los arcos $\gamma_{h,\rho}$, y sustituyéndolos por los arcos $\Sigma_{h,\rho}$, que son las imágenes de los arcos de las circunferencias $\sigma_{h,\rho}$.

Por ahora no podemos afirmar que la correspondencia entre los puntos $z \in \gamma_\rho$ y $w = f(z) \in \Gamma_\rho$ es biunívoca y, por consiguiente, no podemos basarnos en el teorema fundamental de este apartado.

Sea w' un punto arbitrario del recinto Δ y sean U_h unos entornos de los puntos w_h tan pequeños, que w' esté situado fuera de cualquiera de ellos. Para valores suficientemente pequeños de ρ los arcos $\Gamma_{h,\rho}$ y $\Sigma_{h,\rho}$ estarán contenidos en los entornos correspondientes U_h . Evidentemente, la variación del $\text{Arg} [f(z) - w']$, cuando z hace un recorrido simple por γ_ρ en sentido positivo, es igual a la suma de las variaciones del $\text{Arg} [w - w']$ en los arcos que quedan de Γ después de haber excluido los arcos $\Gamma_{h,\rho}$ y de las variaciones en los arcos $\Sigma_{h,\rho}$. Pero $\Gamma_{h,\rho}$ y $\Sigma_{h,\rho}$ tienen orígenes y extremos comunes y están comprendidos en el interior del entorno U_h del punto w_h ; por esta razón, para el punto w' , situado fuera de este entorno, tendremos:

$$\text{Var}_{z \in \sigma_{h,\rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] = \text{Var}_{z \in \gamma_{h,\rho}} \text{Arg} [f(z) - w'].$$

En efecto, la diferencia entre una y otra variaciones es un número entero múltiplo de 2π y cada una de estas variaciones es en valor absoluto menor que π ; por consiguiente, la diferencia indicada es igual a cero.

De aquí se deduce, finalmente, que

$$\text{Var}_{z \in \gamma_\rho} \text{Arg} [f(z) - w'] = \text{Var}_{z \in \gamma} \text{Arg} [f(z) - w'] = 2\pi,$$

o sea, la función $f(z)$ toma el valor w' en el interior de γ_ρ (para todos los valores de ρ suficientemente pequeños) y, además, una sola vez.

Tomando un punto w'' en la parte exterior a Γ , mediante un mismo razonamiento hallamos que

$$\text{Var Arg } [f(z) - w''] = \text{Var Arg } [f(z) - w'] = 0,$$

$$z \in \gamma_\rho$$

o sea, la función $f(z)$ no toma el valor w'' en el interior de γ_ρ (para todos los valores de ρ suficientemente pequeños).

Como cada uno de los puntos del recinto g_ρ pertenece al recinto g y cada punto del recinto g está contenido en todos los recintos g_ρ , comenzando desde un valor suficientemente pequeño de ρ , la función $f(z)$ toma en el recinto g (y además una sola vez) cualquier valor de la parte interior Δ de la curva Γ y no toma ninguno de los valores de la parte exterior a esta curva. Con esto queda terminada la demostración de nuestra proposición.

Como ejemplo, examinemos la función

$$w = f(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

donde $0 < k^2 < 1$ (integral elíptica de primera especie en la forma normal de Legendre). La función $\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ es biforme y tiene puntos de ramificación de primer orden para $t = \pm 1$ y $t = \pm \frac{1}{k}$. Como todos ellos están situados en el eje real, se pueden elegir en el semiplano superior dos ramas uniformes y analíticas de esta función que toman valores opuestos en cada punto. Aquí elegiremos aquella rama que en el intervalo $(0, 1)$ del eje real toma valores reales positivos. Entonces nuestra integral representará en el semiplano superior una función uniforme y analítica, que será continua en el semiplano cerrado y analítica en todos los sitios, a excepción de los puntos $\pm 1, \pm \frac{1}{k}$ (en el entorno $|z| > \frac{1}{k}$ del punto del infinito la función subintegral puede desarrollarse en la serie siguiente:

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} = k^{-1}t^{-2}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^{-2}t^{-2})^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \pm k^{-1}t^{-2} \left(1 + \frac{1}{2}t^{-2} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{2k^2}t^{-2} + \dots \right) =$$

$$= \pm \left[k^{-1}t^{-2} + \frac{1}{2}(k^{-1} + k^{-3})t^{-4} + \dots \right],$$

por lo cual, para $f(z)$ resulta:

$$f(z) = C_0 \mp \left[k^{-1}z^{-1} + \frac{1}{2 \cdot 3}(k^{-1} + k^{-3})z^{-3} + \dots \right],$$

de donde se ve que ambas ramas de la función $f(z)$ son analíticas en el punto del infinito).

Tomando el semiplano superior por recinto g , y el eje real por curva γ (ya se señaló anteriormente que la extensión del teorema

demostrado al caso de recintos y curvas no acotados, es lógicamente), consideremos la transformación de γ mediante la función $w = f(z)$. Cuando $z = x$ recorre el intervalo $0 < x < 1$, la función

$$w = f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}_+},$$

conservando valores reales, crece desde 0 hasta

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}_+}.$$

En el intervalo $1 < x < \frac{1}{k}$ la expresión subintegral toma la forma

$$\frac{1}{\pm i \sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}_+}.$$

En la última expresión el signo no puede elegirse arbitrariamente; éste debe concordar con la elección efectuada anteriormente de la rama de la raíz cuadrada, con el fin de garantizar la continuidad de esta rama en el semiplano superior. Escribiendo $(1-t^2)(1-k^2t^2)$ en la forma

$$k^2(t-1)[t-(-1)]\left(t-\frac{1}{k}\right)\left[t-\left(-\frac{1}{k}\right)\right] = \varphi(t),$$

se observa que al pasar de los puntos del intervalo $(0, 1)$ a los puntos del intervalo $\left(1, \frac{1}{k}\right)$, a lo largo de una semicircunferencia con el centro en 1, perteneciente al semiplano superior, la variación del $\text{Arg } \varphi(t)$, que se compone de la suma de las variaciones de los argumentos de los factores por separado, es igual a $-\pi$ (precisando: $\text{Arg}(t-1)$ disminuye en π , mientras que los argumentos de los demás factores no varían). Por lo tanto, $\text{Arg } \sqrt{\varphi(t)}$ varía en $-\frac{1}{2}\pi$ y, por consiguiente, adquiere el valor $-\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$. Vemos, pues, que entre dos valores $\pm i \sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}_+$ se debe tomar el valor $-i \sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}_+$. En resumen, para $1 < x < \frac{1}{k}$ se tiene:

$$\begin{aligned} w = f(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}_+} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}_+} + \\ &+ i \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}_+} = K + i \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}_+}. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que, cuando $z=x$ recorre el intervalo $1 < x < \frac{1}{k}$, el punto w recorre el intervalo rectilíneo paralelo al eje imaginario, desde el punto K hasta el punto $K + iK'$, donde

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

Esta última integral puede expresarse en una forma análoga a K mediante la sustitución

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2t'^2}}, \quad \text{donde } k'^2 = 1-k^2.$$

Resulta:

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}},$$

donde $k'^2 = 1-k^2$.

Pasemos del intervalo $1 < x < \frac{1}{k}$ al intervalo $\frac{1}{k} < x < +\infty$; el argumento de la expresión subradical

$$(t^2-1)(1-k^2t^2) = -k^2(t-1)(t+1)\left(t-\frac{1}{k}\right)\left(t+\frac{1}{k}\right)$$

disminuye en π (junto con $\text{Arg}\left(t-\frac{1}{k}\right)$). Por lo tanto, para $\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}$ resulta un valor cuyo argumento es igual a $-\frac{\pi}{2}$:

$$-i \sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}.$$

Resumiendo, para $\frac{1}{k} < x < +\infty$;

$$w = f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + i \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} - \\ - \int_{\frac{1}{k}}^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}} = K + iK' - \int_{\frac{1}{k}}^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}.$$

Si x aumenta desde $\frac{1}{k}$ hasta $+\infty$, la integral $\int_{\frac{1}{k}}^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}$ crece desde el valor 0 hasta el valor

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} = K$$

(aquí se hizo la sustitución $t = \frac{1}{k\tau}$). Por esta razón, el punto $w = f(x)$ describe el intervalo rectilíneo paralelo al eje real, desde el punto $K + iK'$ hasta el punto iK' .

De un modo análogo nos cercioramos que, cuando x recorre los intervalos desde 0 hasta -1 , desde -1 hasta $-\frac{1}{k}$ y desde $-\frac{1}{k}$ hasta $-\infty$, el punto $w = f(x)$ recorre consecutivamente los intervalos rectilíneos desde 0 hasta $-K$, desde $-K$ hasta $-K + iK'$ y, finalmente, desde $-K + iK'$ hasta iK' .

En resumen, la función $w = f(z)$ transforma biunívocamente el eje real γ en el contorno Γ del rectángulo con los vértices $-K$, K , $K + iK'$ y $-K + iK'$, donde

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

y $k'^2 = 1 - k^2$.

De aquí, según el teorema demostrado, sacamos la conclusión de que esta función es univalente en el semiplano superior y realiza una transformación conforme de este último en el rectángulo indicado.

La base del rectángulo es igual a $2K$, la altura es igual a K' ; por lo tanto,

$$\frac{K'}{2K} = \frac{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}}{2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}} = \lambda(k).$$

Si el parámetro k ($0 < k < 1$) crece desde 0 hasta 1, entonces el denominador de la fracción crece desde $2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$ hasta ∞ ; en este caso, k' ($k' = \sqrt{1-k^2}$) decrece desde 1 hasta 0 y, por consiguiente, el numerador de la fracción decrece desde ∞ hasta $\frac{\pi}{2}$. De este modo, la razón $\frac{K'}{2K} = \lambda(k)$, variando continuamente, decrece desde ∞ hasta 0, cuando k crece desde 0 hasta 1. Por esta razón, para cualquier rectángulo de base $2a$ y altura b se puede hallar

un valor de k ($0 < k < 1$) y solamente uno, para el cual

$$\frac{b}{2a} = \frac{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}}{2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}} = \frac{K'}{2K}.$$

Por lo tanto, la función

$$f(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

construida para el valor hallado de k , realiza una transformación conforme del semiplano superior en un rectángulo semejante al dado.

Si se desea obtener la transformación en el rectángulo dado, es suficiente introducir otro factor más $\mu = \frac{2a}{2K} = \frac{b}{K'}$; se tiene:

$$w = \mu \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Como resultado de la transformación, se obtiene un rectángulo con los vértices:

$$\begin{aligned} -\mu K &= -a, & \mu K &= a, & \mu K + i\mu K' &= a + bi, \\ -\mu K + i\mu K' &= -a + bi. \end{aligned}$$

En resumen, mediante la integral elíptica $\mu \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ se puede transformar el semiplano en un rectángulo arbitrariamente dado, eligiendo para esto los valores correspondientes de los parámetros k y μ .

1.3. Consideremos, finalmente, el caso en que para uno de los puntos ζ_0 de la curva γ , perteneciente a la frontera del recinto G , se cumple la relación

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in G}} f(z) = \infty.$$

Supongamos que, haciendo

$$f(\zeta_0) = \infty,$$

se obtiene una función $f(z)$, continua (en el sentido generalizado) en el recinto cerrado \bar{g} y analítica en todos los sitios, a excepción del punto ζ_0 y, posiblemente, de unos cuantos puntos más de la curva γ .

Supongamos de nuevo que $w = f(z)$ realiza una transformación biunívoca de la curva γ en una curva cerrada de Jordan Γ del plano ampliado (Γ necesariamente pasa por el punto del infinito). Ejemplos simples muestran que en este caso la función $f(z)$ puede ser no univalente en el recinto g y puede transformar g en un recinto distinto de Δ (distinto del interior de la curva Γ).

Examinemos, por ejemplo, la función

$$f(z) = i \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3,$$

la cual tiene un polo de tercer orden en el punto $z = -1$. Por recinto G se puede tomar aquí todo el plano, a excepción del punto $z = -1$. Sea γ la circunferencia unidad y sea g el círculo unidad. Como en γ $z = e^{i\theta}$ ($-\pi < \theta \leq \pi$), la función $f(z) = f(e^{i\theta}) = i \left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} \right)^3 = \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2}$ realiza una transformación biunívoca de γ en el eje real Γ del plano w . Para hallar la imagen del círculo unidad g , realicemos la transformación auxiliar

$$\zeta = -i \frac{z-1}{z+1},$$

la cual transforma biunívocamente el círculo unidad en el semiplano superior ζ . Con esto, la función $w = f(z)$ se convertirá en $w = f^*(\zeta) = \zeta^3$. Pero, evidentemente, esta última no es univalente en el semiplano superior, transformando a éste en todo el plano w , a excepción de los puntos $w = 0$ y $w = \infty$. De aquí se deduce que $f(z)$ tampoco es univalente en el recinto g y que transforma a éste en todo el plano w , a excepción de los puntos $w = 0$ y $w = \infty$, es decir, en todo caso resulta un recinto cuya frontera no coincide con Γ .

Este ejemplo muestra que, queriendo extender el teorema del ap. 1.2 al caso en que $f(z)$ se hace igual a ∞ en uno de los puntos de la curva γ , necesariamente tenemos que someter a esta función a condiciones complementarias. He aquí unas cuantas proposiciones sencillas que se pueden obtener en este sentido.

Sea $f(z)$ una función continua en el sentido generalizado en un recinto cerrado \bar{g} , limitado por una curva cerrada rectificable de Jordan γ , la cual toma el valor ∞ en uno de los puntos ζ_0 de esta curva y es analítica en todo el recinto \bar{g} , a excepción de una cantidad finita de puntos frontera.

Supongamos que $w = f(z)$ transforma biunívocamente γ en una curva cerrada de Jordan Γ del plano ampliado (que necesariamente pasa por el punto del infinito). Si existe un punto finito w_0 , no perteneciente al conjunto de los valores que toma la función $f(z)$ en el recinto \bar{g} , entonces la función $F(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$ es continua

en \bar{g} en el sentido ordinario, es analítica en todos los puntos, a excepción de un número finito de puntos frontera y realiza una transformación biunívoca de γ en una curva cerrada de Jordán Γ' del plano finito (Γ' es la imagen de la curva Γ en la transformación $w' = \frac{1}{w-w_0}$). Por lo tanto, a ella se le puede aplicar el teorema demostrado anteriormente, de donde se deduce que $F(z)$ y, por consiguiente, también $f(z)$, es univalente en el recinto G .

Señalemos ahora unas condiciones suficientes de otro tipo, en las cuales se va a tener en cuenta el comportamiento de la función $f(z)$ en un entorno arbitrariamente pequeño del punto ζ_0 (de aquel punto de la curva γ , en el cual la función $f(z)$ se hace infinita). Supongamos que en el punto ζ_0 la curva γ posee tangentes a la derecha y a la izquierda, las cuales forman entre sí un ángulo $\alpha\pi$ ($0 < \alpha < 2$), y que para un número real positivo λ , $0 < \lambda < \frac{3}{\alpha}$, se verifica la relación

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in \bar{g}}} f(z) (z - \zeta_0)^\lambda = c \quad (c \neq 0, c \neq \infty).$$

Entonces, si $w = f(z)$ realiza una transformación biunívoca de γ en el eje real Γ del plano w , la función $f(z)$ es univalente en el recinto g y transforma a éste en aquel semiplano Δ , limitado por la recta Γ , que queda a la izquierda del observador que se mueve junto con el punto $f(z)$, cuando z recorre la curva γ en sentido positivo.

Para comprobar mejor este enunciado, supongamos que $\alpha = 1$, es decir, que la curva γ posee tangente en el punto ζ_0 . Entonces, para λ se obtiene la desigualdad $\lambda < 3$. De aquí se deduce que la proposición será justa, en particular, cuando se sabe previamente que $f(z)$ posee en el punto ζ_0 un polo de orden no superior al segundo (se tiene, respectivamente:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0} f(z) (z - \zeta_0) = c_1 \quad (\lambda = 1)$$

o bien

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0} f(z) (z - \zeta_0)^2 = c_2 \quad (\lambda = 2).$$

No obstante, en el caso de un polo de tercer orden, esto deja de ser cierto, como se ve en el ejemplo expuesto anteriormente. En resumen, si $\alpha = 1$ no se puede sustituir en la condición $\lambda < 3$ el signo de la desigualdad por el de la igualdad.

Pasando a demostrar el teorema, describamos las circunferencias $|z - \zeta_k| = \rho$ ($k = 0, \dots, m$) con los centros en el punto ζ_0 y en los demás puntos ζ_k de la curva γ , en los cuales $f(z)$ no es analítica. Conservando las notaciones de la pág. 15, hallemos los arcos $\sigma_{k, \rho}$ de las circunferencias $|z - \zeta_k| = \rho$, que junto con los arcos $\gamma_{k, \rho}$ de la curva γ limitan los recintos $g_{k, \rho}$ que están situados en el recinto g y tienen en sus fronteras los puntos ζ_k ($k = 0, \dots, m$), respectivamente. Sea ρ tan pequeño que los dominios $g_{k, \rho}$ no tengan puntos comunes dos a dos. Como anteriormente, designemos con γ_ρ la curva que se obtiene de γ sustituyendo los arcos $\gamma_{k, \rho}$ por los arcos $\sigma_{k, \rho}$, y con Γ_ρ la curva que se obtiene del eje real sustituyendo los segmentos $\Gamma_{k, \rho} = f(\gamma_{k, \rho})$ por los arcos $\Sigma_{k, \rho} = f(\sigma_{k, \rho})$. Tomemos un punto arbitrario w' en el semiplano Δ y calculemos la variación del $\text{Arg} [f(z) - w']$ cuando el punto z recorre la curva γ_ρ en sentido positivo. Fijando unos entornos U_k de los puntos w_k que

no contengan a w' , tomemos ρ tan pequeño que los arcos $\Gamma_{k, \rho}$ y $\Sigma_{k, \rho}$ estén contenidos en U_k ($k = 0, \dots, m$). Entonces, para $k \neq 0$, tendremos:

$$\text{Var}_{z \in \sigma_{k, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] = \text{Var}_{z \in \gamma_{k, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'];$$

por consiguiente, sumando todas las variaciones, menos aquellas que corresponden al recorrido por los arcos $\sigma_{0, \rho}$ y $\gamma_{0, \rho}$, obtendremos:

$$\text{Var}_{z \in \gamma - \gamma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] = \text{Var}_{z \in \gamma_{\rho} - \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'].$$

Designemos con a_{ρ} y b_{ρ} los puntos inicial y final comunes de los arcos $\Gamma_{0, \rho}$ y $\Sigma_{0, \rho}$ (en el sentido del recorrido positivo). Evidentemente, a_{ρ} y b_{ρ} son pun-

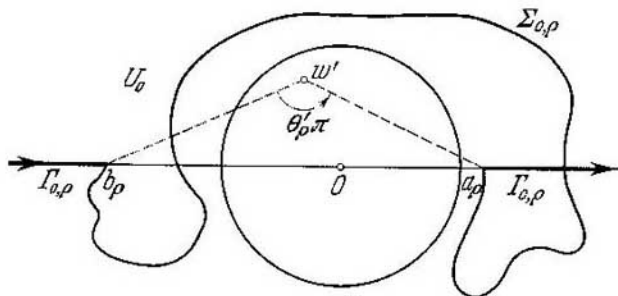


FIG. 2

tos del eje real y $\Gamma_{0, \rho}$ representa un segmento infinito del mismo con el origen a_{ρ} y el extremo b_{ρ} , mientras que $\Gamma - \Gamma_{0, \rho}$ es el segmento finito con el origen b_{ρ} y el extremo a_{ρ} (fig. 2.). Por esta razón, la variación de $\text{Arg} [f(z) - w']$

es igual a la variación de $\text{Arg} (w - w')$ cuando w recorre el segmento $[b_{\rho}, a_{\rho}]$

de modo que el vector $w - w'$ gire alrededor de w' en sentido positivo (w' se mantiene a la izquierda cuando el punto w recorre el segmento $[b_{\rho}, a_{\rho}]$), y, por consiguiente, esta variación es igual al ángulo $\theta'_{\rho} \pi$, $0 < \theta'_{\rho} < 1$, bajo el cual se ve el segmento $[b_{\rho}, a_{\rho}]$ desde el punto w' . Así, pues,

$$\text{Var}_{z \in \gamma_{\rho} - \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] = \text{Var}_{w \in [b_{\rho}, a_{\rho}]} \text{Arg} (w - w') = \theta'_{\rho} \pi.$$

Pero $\text{Var}_{w \in [b_{\rho}, a_{\rho}]} \text{Arg} (w - w')$ es uno de los valores de la diferencia

$$\text{Arg} (a_{\rho} - w') - \text{Arg} (b_{\rho} - w') = \text{Arg} \frac{a_{\rho} - w'}{b_{\rho} - w'}.$$

Por lo tanto,

$$\arg \frac{a_{\rho} - w'}{b_{\rho} - w'} = \theta'_{\rho} \pi$$

y, luego,

$$\text{Var}_{z \in \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] = \text{Var}_{w \in \Sigma_{0, \rho}} \text{Arg} (w - w') = -\arg \frac{a_{\rho} - w'}{b_{\rho} - w'} + 2k\pi = 2k\pi - \theta'_{\rho} \pi$$

donde k es un número entero. Por otra parte, en un entorno del punto ξ_0 la función $f(z)$ puede expresarse en la forma

$$f(z) = \frac{c[1 + \varepsilon(z)]}{(z - \xi_0)^\lambda},$$

donde $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \xi_0$. Por esta razón,

$$f(z) - w' = \frac{c}{(z - \xi_0)^\lambda} \left[1 + \varepsilon(z) - \frac{w'(z - \xi_0)^\lambda}{c} \right] = \frac{c}{(z - \xi_0)^\lambda} [1 + \eta(z)],$$

donde $\eta(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \xi_0$. Por consiguiente,

$$\text{Var}_{z \in \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] = -\lambda \text{Var}_{z \in \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} (z - \xi_0) + \text{Var}_{z \in \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [1 + \eta(z)].$$

Como las tangentes en el punto ξ_0 a la curva γ forman entre sí, un ángulo $\alpha\pi$, todos los puntos del arco $\gamma_{0, \rho}$ para valores suficientemente pequeños de ρ están situados en el interior de dos ángulos de magnitud arbitrariamente pequeña, simétricos respecto de sus tangentes respectivas. Debido a esto, el ángulo $\alpha\rho\pi$ bajo el cual se ve el arco $\sigma_{0, \rho}$ desde el punto ξ_0 , se puede suponer arbitrariamente próximo a $\alpha\pi$. Observando que z recorre $\sigma_{0, \rho}$ de tal modo que el interior del recinto g_ρ (situado fuera de la circunferencia $|z - \xi_0| = \rho$, uno de cuyos arcos es $\sigma_{0, \rho}$) se mantiene a la izquierda de z , hallamos:

$$\text{Var}_{h \in \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} (z - \xi_0) = -\alpha\rho\pi$$

y, por consiguiente,

$$\text{Var}_{z \in \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] = \lambda\alpha\rho\pi + \beta\rho\pi,$$

donde

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha\rho = \alpha \text{ y } \lim_{\rho \rightarrow 0} \beta\rho = 0 \quad (\beta\rho\pi = \text{Var}_{z \in \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [1 + \eta(z)]).$$

Comparando esta expresión con la hallada anteriormente, obtenemos:

$$2k = \theta'_\rho + \lambda\alpha\rho + \beta\rho.$$

Si $\rho \rightarrow 0$, el ángulo $\pi\theta'_\rho$ tiende a π , puesto que los puntos a_ρ y b_ρ tienden a $\pm \infty$. Por esta razón, el segundo miembro de la igualdad tiende hacia el límite $1 + \lambda\alpha$ y, además, según la condición,

$$1 < 1 + \lambda\alpha < 4.$$

De aquí se deduce que $k=1$ para todos los valores de ρ suficientemente pequeños*). Debido a esto

$$\text{Var}_{z \in \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] = 2\pi - \theta'_\rho\pi$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned} \text{Var}_{z \in \gamma_\rho} \text{Arg} [f(z) - w'] &= \text{Var}_{z \in \gamma_\rho - \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] + \\ &+ \text{Var}_{z \in \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] = \theta'_\rho\pi + (2\pi - \theta'_\rho\pi) = 2\pi. \end{aligned}$$

*) Y, por consiguiente, $\lambda = \frac{1}{\alpha}$.

En resumen, la función $f(z)$ toma cualquier valor $w' \in \Delta$ en el recinto g_ρ y, además, una sola vez, para todos los valores suficientemente pequeños de ρ . Del mismo modo, para cualquier punto w'' , perteneciente al semiplano limitado por la recta Γ y que queda a la derecha durante el recorrido de Γ por el punto $w = f(z)$, correspondiente al recorrido del punto z por la curva γ en sentido positivo, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Var}_{z \in \gamma_\rho} \text{Arg} [f(z) - w'] &= \text{Var}_{z \in \gamma - \gamma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w'] - \theta_\rho^0 \pi, \\ \text{Var}_{z \in \sigma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w''] &= \text{Var}_{z \in \gamma_{0, \rho}} \text{Arg} [f(z) - w''] = \theta_\rho^0 \pi, \end{aligned}$$

v, por lo tanto,

$$\text{Var}_{z \in \gamma_\rho} \text{Arg} [f(z) - w''] = 0.$$

Aquí $\theta_\rho^0 \pi$ designa el ángulo bajo el cual se ve el segmento $[b_\rho, a_\rho]$ desde el punto w'' . Así, pues, la función $f(z)$ no toma en el recinto g_ρ el valor w'' , situado fuera del semiplano Δ , para todos los valores suficientemente pequeños de ρ . De los hechos establecidos se deduce la justeza de nuestra proposición.

Proponemos al lector demostrar como ejercicio el siguiente teorema:

Supongamos que el recinto g está limitado por una curva cerrada de Jordan γ del plano ampliado (cualquier arco finito de la cual es rectificable) y está contenido en una franja $A < y < A + h\pi$, $0 < h < 2$, cuyos lados son asíntotas para γ ; para precisar supondremos que ambas ramas infinitas de la curva γ se extienden en la dirección de las x crecientes (el recinto g tiene la forma de una semifranja curvilínea). Sea $f(z)$ una función continua en el sentido generalizado en el recinto \bar{g} , la cual se hace igual a ∞ en el punto $z = \infty$ y es analítica en todos los puntos finitos del recinto \bar{g} . Si ésta realiza una transformación biunívoca de la curva γ en el eje real Γ y se pueden señalar unos números reales μ y λ , $-\infty < \mu < +\infty$, $0 < \lambda < \frac{3}{h}$, tales que existe el límite $\lim_{z \rightarrow \infty} [z^\mu e^{-\lambda z} f(z)] = C$ ($C \neq 0$, $C \neq \infty$), entonces $f(z)$ es univalente en el recinto g y transforma a éste en uno de los dos semiplanos limitados por la recta Γ .

1.4. Ejemplos sencillos muestran que la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones univalentes en un recinto dado pueden no ser funciones univalentes. Del mismo modo, la derivada y la integral de una función univalente, por lo general, no son funciones univalentes. Sin embargo, la superposición de dos funciones univalentes $f|\varphi(z)|$ es, evidentemente, una función univalente; más de una vez se utilizó anteriormente esta observación. Hay que tener cuidado solamente de que los valores de la función $\varphi(z)$ descansen en aquel recinto del plano w en el cual $f(w)$ es una función univalente.

Es de gran importancia el teorema que afirma que el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones univalentes

es una función univalente (salvo una excepción evidente). Precisando, se verifica la siguiente proposición:

T e o r e m a. *Si una sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$, que son univalentes en un recinto G , es uniformemente convergente en este recinto y $f(z) = \lim f_n(z)$ no es idénticamente constante, entonces $f(z)$ es univalente en el recinto G .*

Como, en virtud del teorema de Weierstrass sobre las sucesiones (o series) uniformemente convergentes, $f(z)$ es analítica en el recinto G , solamente se necesita demostrar que $f(z_1) \neq f(z_2)$, si $z_1 \neq z_2$.

Supongamos lo contrario, y sea

$$f(z_1) = f(z_2) = a, \quad z_1 \neq z_2.$$

Entonces, para la función $f(z) - a$, que es el límite de la sucesión uniformemente convergente de funciones univalentes $\{f_n(z) - a\}$, tendremos al menos dos ceros z_1 y z_2 en el recinto G . Por consiguiente, según el teorema del ap. 3.5, cap. cuarto (teorema de Hurwitz), todas las funciones $f_n(z) - a$, comenzando desde cierto índice en adelante, tienen que tener cada una de ellas al menos un cero en cualquier entorno del punto z_1 y en cualquier entorno del punto z_2 . Tomando estos entornos tan pequeños que no tengan puntos comunes, sacamos la conclusión de que todas las funciones, comenzando desde una de ellas en adelante, toman el valor a al menos en dos puntos distintos del recinto G , lo cual contradice a la propiedad de univalencia de las funciones $f_n(z)$. El teorema queda demostrado.

§ 2. TEOREMAS DE EXISTENCIA DE RIEMANN Y HILBERT. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES UNIVALENTES

2.1. Ocupémonos del problema fundamental en la teoría de las transformaciones conformes relativo a la posibilidad de transformar biunívoca y conformemente (tal transformación se llamará a continuación, simplemente, conforme) un recinto en otro. Nos basaremos en el hecho de que toda transformación conforme (de primera especie) se realiza mediante una función analítica*).

Como la transformación examinada es homeomorfa, la condición necesaria para que exista una transformación conforme es que exista alguna transformación homeomorfa de los recintos, o sea, que los mismos recintos sean homeomorfos. De aquí que un recinto múltiplemente conexo, por ejemplo, no se pueda transformar en uno simplemente conexo.

No obstante, la condición de homeomorfismo siendo necesaria para la existencia de la transformación conforme, no es por lo gene-

*) Véase la demostración en D. M e n s h o f f, « Les conditions de monogénéité », Paris, 1936, pág. 39 y siguientes.

ral, suficiente. Supongamos, por ejemplo, que G es todo el plano finito z y que D es un círculo: $|w| < R < \infty$. Si existiese una función $w = f(z)$ que transformase conformemente G sobre D , ésta sería unívoca, analítica y acotada en valor absoluto en el plano finito. Pero de aquí, según el teorema de Liouville, se deduce que: $f(z) = \text{const}$, lo cual contradice a la univalencia de la función $f(z)$. Así, pues, no existe una transformación conforme del plano finito G sobre un círculo D (de radio finito). No obstante, estos recintos son homeomorfos; en efecto, la función $w = \frac{2R}{\pi} \frac{z}{|z|} \operatorname{arctg} |z|$ ($w(0) = 0$) realiza una transformación homeomorfa de G sobre D , perteneciente al conjunto infinito de transformaciones de éstas.

Agreguemos, que el plano finito admite una transformación conforme solamente sobre el plano ampliado, del cual se ha excluido un punto finito, o sobre sí mismo. Esto se deduce de que cada función univalente en el plano finito tiene que ser homográfica (en particular, lineal entera (véase el ap. 1.1)).

Consideremos también el caso de recintos biconexos simples. Sea G un anillo circular: $0 < r_1 < |z| < r_2 < \infty$ y sea D también un anillo circular: $0 < R_1 < |w| < R_2 < \infty$.

Supongamos que la función $w = f(z)$ realiza una transformación conforme de G sobre D , y sea $z = \varphi(w)$ la función inversa. Designemos con Γ_ρ la imagen de la circunferencia $\gamma_\rho: z = \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$; $r_1 < \rho < r_2$). Γ_ρ es una curva cerrada de Jordan; su ecuación tiene la forma $w = f(\rho e^{i\theta})$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

De la igualdad

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z} = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} dw = \pm \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{\Gamma_\rho} \operatorname{Arg} \varphi(w),$$

donde ambas curvas γ_ρ y Γ_ρ se recorren en la integración en sentido positivo, y se pone el signo más o menos según que el punto $w = f(z)$ recorra la curva Γ_ρ en el mismo sentido que el punto z recorre la curva γ_ρ , o que estos sentidos sean opuestos entre sí, se deduce, ante todo, que el origen de coordenadas está situado en el interior de Γ_ρ .

Por otra parte, la integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} dw$ es una función continua

de ρ , la cual toma solamente valores enteros (± 1). De aquí se deduce que esta integral conserva un valor constante y, por consiguiente, el signo ante la integral (+ o -) no depende de ρ . Esto significa que el sentido del recorrido del punto $w = f(z)$ a lo largo de cualquier curva Γ_ρ o coincide para todos los valores de ρ , $r_1 < \rho < r_2$, con el sentido del recorrido del punto z a lo largo de la curva γ_ρ , o es para todos los valores de ρ opuesto a este último sentido. Supongamos primero que los sentidos de los recorridos de las curvas Γ_ρ y γ_ρ

coinciden, y calculemos el área limitada por la curva Γ_ρ . Según la fórmula conocida*), este área S_ρ se expresa por la siguiente integral:

$$S_\rho = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\rho} (u dv - v du) > 0,$$

donde la curva Γ_ρ se recorre en sentido positivo. Transformando esta integral, tendremos:

$$S_\rho = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\rho} \operatorname{Im} [(u - iv)(du + i dv)] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \left[\overline{f(\rho e^{i\theta})} \frac{\partial f(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta} \right] d\theta.$$

Aquí no hemos cambiado el signo ante la integral, precisamente porque al crecimiento de θ desde 0 hasta 2π corresponde el recorrido de la curva Γ_ρ en sentido positivo. Desarrollando $f(\rho e^{i\theta})$ en serie de Laurent, resulta:

$$f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \rho^n e^{in\theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i n a_n \rho^n e^{in\theta},$$

de donde, basándose en la convergencia absoluta y uniforme (para un valor fijo de ρ) de estos desarrollos, tendremos:

$$\begin{aligned} S_\rho &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{a_n} \rho^n e^{-in\theta} \sum_{-\infty}^{+\infty} i n a_n \rho^n e^{in\theta} \right\} d\theta = \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} i n |a_n|^2 \rho^{2n} 2\pi \right\} = \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} n |a_n|^2 \rho^{2n} = \\ &= \pi \sum_1^{\infty} n |a_n|^2 \rho^{2n} - \pi \sum_1^{\infty} n |a_{-n}|^2 \rho^{-2n} > 0. \end{aligned}$$

Como la curva Γ_ρ está situada en el interior de la circunferencia $|w| = R_2$ y, por otra parte, contiene en su interior a la circunferencia $|w| = R_1$, tendremos que tener para todos los valores de ρ , $r_1 < \rho < r_2$:

$$\pi R_1^2 < \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} n |a_n|^2 \rho^{2n} < \pi R_2^2.$$

*) Véase, por ejemplo, J. R. Pastor, P. P. Calieja, C. A. Trejo, Análisis matemático, Volumen II, XXIII, 88-5, pág. 482. (Nota del T.)

De aquí se deduce ante todo que las series $\sum_{-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 r_1^{2n}$ y $\sum_{-\infty}^{+\infty} n |a_n|^2 r_2^{2n}$ son convergentes. Demostremos esto para la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 r_2^{2n} = \sum_1^{\infty} n |a_n|^2 r_2^{2n} - \sum_1^{\infty} n |a_{-n}|^2 r_2^{-2n}.$$

De la última desigualdad deducimos que

$$\sum_1^{\infty} n |a_n|^2 \rho^{2n} < R_2^2 + \sum_1^{\infty} n |a_{-n}|^2 \rho^{-2n}$$

para $r_1 < \rho < r_2$. Por esta razón, para cualquier natural N se verifica la desigualdad

$$\sum_1^N n |a_n|^2 \rho^{2n} \leq R_2^2 + \sum_1^{\infty} n |a_{-n}|^2 \rho^{-2n},$$

o bien, pasando al límite para $\rho \rightarrow r_2$:

$$\sum_1^N n |a_n|^2 r_2^{2n} \leq R_2^2 + \sum_1^{\infty} n |a_{-n}|^2 r_2^{-2n},$$

de donde se deduce la convergencia de la serie $\sum_1^{\infty} n |a_n|^2 r_2^{2n}$ y a la vez la desigualdad

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 r_2^{2n} \leq R_2^2.$$

De un modo análogo se demuestra la convergencia de la serie $\sum_1^{\infty} n |a_{-n}|^2 r_2^{-2n}$ y la desigualdad:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n |a_n|^2 r_1^{2n} \geq R_1^2.$$

De aquí se desprende que

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 r_2^{2n}}{\sum_{-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 r_1^{2n}} \leq \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

Observando que

$$\lambda^2 - \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1^2 r_2^2 \sum_{-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 (r_2^{2n-2} - r_1^{2n-2})}{r_1^2 \sum_{-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 r_1^{2n}} \geq 0,$$

puesto que $n(r_2^{2n-2} - r_1^{2n-2}) \geq 0$ para todos los valores enteros de n , sacamos la conclusión de que

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} \leq \lambda^2 \leq \frac{R_2^2}{R_1^2},$$

es decir,

$$\frac{R_2}{R_1} \geq \frac{r_2}{r_1}.$$

Evidentemente, en nuestros razonamientos se podían cambiar de sitio los planos z y w y los recintos G y D . Entonces obtenemos la desigualdad:

$$\frac{R_2}{R_1} \leq \frac{r_2}{r_1}.$$

Por consiguiente, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}$, es decir, los anillos circulares G y D tienen que ser semejantes entre sí. Luego obtenemos que

$$\lambda^2 - \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1^2 r_2^2 \sum_{-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 (r_2^{2n-2} - r_1^{2n-2})}{r_1^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} n |a_n|^2 r_1^{2n}} = 0,$$

de donde se deduce que

$$a_n = 0 \quad \text{para } n \neq 0 \text{ y } n \neq 1.$$

Por lo tanto

$$f(z) = a_0 + a_1 z,$$

es decir, es una función lineal entera.

Consideremos ahora el caso en que el sentido del recorrido del punto $w = f(z)$ por la curva Γ_ρ es opuesto al sentido del recorrido del punto z por la circunferencia γ_ρ . Entonces la transformación $w' = \frac{1}{w}$ convierte el anillo D en un nuevo anillo D' : $\frac{1}{R_2} < |w'| < \frac{1}{R_1}$, de modo que la función $w' = \frac{1}{f(z)}$ transforma conformemente el anillo G : $r_1 < |z| < r_2$ en el anillo D' .

Como $\text{Arg } w' = -\text{Arg } f(z) = -\text{Arg } w$, resulta que la curva Γ'_ρ , que es la imagen de la circunferencia γ_ρ en la transformación

$w' = \frac{1}{f'(z)}$, queda recorrida por el punto w' en el sentido opuesto al recorrido de la curva Γ_p realizado por el punto $w = f(z)$ y, por consiguiente, en el mismo sentido en que el punto z recorre la circunferencia γ_p . Según lo demostrado, obtenemos:

$$\frac{1:R_1}{1:R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1},$$

o sea, resulta que los anillos G y D son de nuevo semejantes entre sí. Además, para la función $\frac{1}{f(z)}$ obtenimos:

$$\frac{1}{f'(z)} = a_0 + a_1 z,$$

es decir, $f(z)$ es una función homográfica.

Haciendo un resumen de los resultados obtenidos, llegamos al siguiente teorema:

Para que exista una transformación conforme del anillo circular G : $r_1 < |z| < r_2$ sobre el anillo circular D : $R_1 < |w| < R_2$ es necesario y suficiente que estos anillos sean semejantes entre sí, es decir, que se cumpla la condición $\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}$. Cumpliéndose esta condición la transformación puede realizarse solamente mediante una función homográfica (en particular, lineal entera).

Por lo tanto, los anillos circulares que son recintos homeomorfos entre sí, por lo general (o sea, sin una condición especial), no pueden transformarse conformemente uno en el otro. (El hecho de que dos anillos G y D son verdaderamente homeomorfos, se deduce considerando la función

$$w = \left(R_2 \frac{|z| - r_1}{r_2 - r_1} + R_1 \frac{r_2 - |z|}{r_2 - r_1} \right) \frac{z}{|z|},$$

la cual transforma G sobre D).

Tanto más admirable es el hecho de que para cualesquiera dos recintos simplemente conexos del plano ampliado, cuyas fronteras contengan más de un punto cada una, siempre existe una transformación conforme de uno de ellos sobre el otro. Para demostrar esta proposición, es suficiente establecer que para cada recinto G de este tipo existe una transformación conforme sobre un círculo K_R : $|w| < R$ con el centro en el origen de coordenadas. En efecto, si la función $w = f(z)$ transforma conformemente G sobre K_R y la función $w' = F(z')$ transforma conformemente otro recinto D sobre el círculo $K_{R'}$: $|w'| < R'$, entonces la función $w' = \frac{R'}{R} w$ transforma conformemente el círculo K_R sobre $K_{R'}$, la función $z' = F^{-1}(w')$ transforma conformemente el círculo $K_{R'}$

sobre D y, por consiguiente, la función

$$z' = F^{-1} \left[\frac{R'}{R} f(z) \right]$$

transforma conformemente el recinto G sobre D .

2.2. Teorema de existencia de la transformación conforme (Riemann). *Todo recinto simplemente conexo G del plano ampliado, cuya frontera contenga más de un punto, se puede transformar conformemente sobre un círculo con el centro en el origen de coordenadas.*

Demostremos primero que entre las funciones univalentes en el recinto dado (pueden servir de ejemplos de funciones univalentes en el recinto G las funciones homográficas), existen funciones que son acotadas en valor absoluto.

Si el mismo recinto G está acotado, entonces tal función es, por ejemplo, $f(z) = z$.

Si G no está acotado, pero existe un punto z_0 exterior a G , entonces existe también un círculo $|z - z_0| < \rho$ situado fuera de G . En este caso, $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ es un ejemplo de función univalente en G y acotada ($|f(z)| < \frac{1}{\rho}$ para $z \in G$).

Supongamos, finalmente, que el recinto G no está acotado y no tiene puntos exteriores. Según la condición, existen al menos dos puntos frontera de G distintos: α y β . Como el recinto G es simplemente conexo, los puntos α y β pertenecen al continuo Γ que representa la frontera de este recinto. Consideremos la función $F(z) = \sqrt{\frac{z - \alpha}{z - \beta}}$. Esta función biforme posee dos puntos de ramificación: α y β . Como el recinto G se obtiene del plano excluyendo un continuo que liga α y β , la función $F(z)$ se descompone en el recinto G en dos ramas uniformes analíticas $F_1(z)$ y $F_2(z)$, cuyos valores en cada punto del recinto G se distinguen entre sí solamente en el signo. Estas funciones son univalentes en el recinto G , puesto que de la igualdad

$$\sqrt{\frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta}} = \sqrt{\frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta}}$$

se deduce que

$$\frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} = \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta},$$

y, por consiguiente,

$$z_1 = z_2.$$

Por esta razón, las funciones $w = F_1(z)$ y $w = F_2(z)$ transforman conformemente G en dos recintos: G_1 y G_2 . Evidentemente, G_1 y G_2

no tienen puntos comunes, puesto que la existencia de un punto común $w = F(z_1) = F(z_2)$, debido al cálculo que acabamos de hacer, significaría la igualdad $z_1 = z_2 = z$, lo cual contradice al hecho de que $F_1(z) = -F_2(z)$ y de que las funciones $F_1(z)$ y $F_2(z)$ no toman en ningún punto los valores 0 y ∞ . Por consiguiente, cada punto w_0 del recinto G_2 es exterior para G_1 , de modo que existe un círculo $|w - w_0| < \rho$ perteneciente al exterior del recinto G_1 . Formando la función

$$\frac{1}{w - w_0} = \frac{1}{F_1(z) - w_0} = f(z),$$

hallamos que ésta es univalente en el recinto G y está acotada $(|f(z)| < \frac{1}{\rho})$.

En resumen, en todos los casos existen en el recinto G funciones univalentes y acotadas. Sea $f(z)$ una de tales funciones y sea z_0 un punto finito fijado del recinto G . Entonces $f'(z_0) \neq 0$ (debido a la univalencia de $f(z)$) y, por consiguiente,

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(z_0)}$$

es una función acotada y univalente en el recinto G , la cual se anula en el punto z_0 y posee en este punto derivada, igual a 1.

Designemos con E_{z_0} el conjunto de todas las funciones que poseen en el recinto G las propiedades indicadas. Para cada función $F(z) \in E_{z_0}$ existe el extremo superior finito del módulo en el recinto G :

$$M(F) = \sup_G |F(z)| > 0.$$

Está claro que $M(F)$ significa geoméricamente el radio del círculo mínimo con el centro en el origen de coordenadas que contiene a la imagen del recinto G en la transformación $w = F(z)$. Para funciones distintas $F(z) \in E_{z_0}$, por lo general, resultarán diferentes números $M(F)$.

Ahora demostraremos que en el conjunto E_{z_0} existe una función $f(z)$, para la cual $M(F)$ alcanza el valor mínimo R_{z_0} :

$$R_{z_0} = \inf_{F(z) \in E_{z_0}} M(F).$$

Precisamente esta función transformará conformemente el recinto G en el círculo $|w| < R_{z_0}$.

Consideremos una sucesión de funciones $F_n(z)$ del conjunto E_{z_0} , para las cuales se cumpla la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(F_n) = \inf_{F(z) \in E_{z_0}} M(F) = R_{z_0}$$

(tal sucesión existe, debido a la definición misma de extremo inferior $\inf M(F)$). Esta sucesión estará uniformemente acotada en el recinto G , puesto que está acotada la sucesión convergente de números $\{M(F_n)\}$:

$$M(F_n) = \sup_G |F_n(z)| < M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Según el teorema de Montel, la sucesión $\{F_n(z)\}$ es compacta en el recinto G , de modo que de ella se puede extraer una sucesión parcial $\{F_{n_k}(z)\}$ uniformemente convergente en el interior de G hacia una función analítica $f(z)$. Para esta función tendremos:

$$f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} F'_{n_k}(z_0) = 1,$$

de donde se deduce que $f(z) \neq \text{const.}$, y, por consiguiente, según el teorema del ap. 1.4, es univalente. Luego, de las relaciones

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(z) \quad \text{y} \quad |F_{n_k}(z)| < M(F_{n_k}) \rightarrow R_{z_0}$$

se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$

$$|f(z)| < |F_{n_k}(z)| + \frac{\varepsilon}{2} < R_{z_0} + \varepsilon$$

para todos los valores de n_k suficientemente grandes, de donde, debido a la arbitrariedad de ε , sacamos la conclusión de que

$$|f(z)| \leq R_{z_0} \quad (z \in G).$$

Pero, como $f(z)$ es univalente y acotada en el recinto G y satisface a las condiciones

$$f(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f'(z_0) = 1,$$

resulta que $f(z) \in E_{z_0}$ y $\sup |f(z)| \geq R_{z_0}$.

Confrontando las desigualdades obtenidas, obtenemos:

$$\sup_G |f(z)| = R_{z_0}.$$

Demostremos que la función $w = f(z)$ transforma conformemente el recinto G en el círculo $K_0: |w| < R_{z_0}$. Como de las propiedades obtenidas de la función $f(z)$ se deduce que la imagen $f(G)$ del recinto G está contenida en el círculo $|w| < R_{z_0}$, es suficiente cerciorarse de que cada punto del círculo K_0 pertenece a $f(G)$. Supongamos que esto no es así; entonces dentro de K_0 tienen que estar situados algunos puntos frontera del conjunto $f(G)$. Designemos uno de ellos con w_0 ($0 < |w_0| < R_{z_0}$) y formemos, consecutivamente, las funciones:

$$w = f(z), \quad w_1 = R_{z_0}^2 \frac{w - w_0}{R_{z_0}^2 - \overline{w_0} w} = f_1(z), \quad w_2 = \sqrt{R_{z_0} w_1} = f_2(z)$$

(se fija una de las dos ramas de esta función),

$$w_3 = R_{z_0}^2 \frac{w_2 - f_2(z_0)}{R_{z_0}^2 - \overline{f_2(z_0)} \cdot w_2} = f_3(z) \quad \text{y} \quad w_4 = \frac{w_2}{f_3'(z_0)}.$$

Cada una de las funciones $w_j = f_j(z)$, considerada como función de w_{j-1} ($w_0 = w$), es univalente en el recinto $f_{j-1}(G)$ ($f_0(G) = f(G)$). Por lo tanto, todas estas funciones, consideradas como funciones de z , son univalentes en el recinto G .

La función $w_1(w)$ transforma el círculo K_0 en sí mismo, de modo que lleva el punto w_0 al origen de coordenadas. En este caso $f(G)$ se transforma en un recinto $f_1(G)$ contenido en K_0 ; el punto $w_1 = 0$ es un punto frontera para $f_1(G)$. La función $w_2(w_1)$ tiene dos ramas uniformes y analíticas en el recinto $f_1(G)$. Fijando una de ellas y observando que sus valores pertenecen al círculo K_0 , y que al punto $w_1 = 0$ le corresponde el punto $w_2 = 0$, hallamos que $f_2(G)$ de nuevo pertenece al círculo K_0 y el punto $w_2 = 0$ es un punto frontera para $f_2(G)$. La función $w_3(w_2)$ transforma el círculo K_0 en sí mismo y lleva el punto $f_2(z_0)$ al origen de coordenadas. Por consiguiente, la función univalente $f_3(z)$ se anula en el punto z_0 y transforma el recinto G en un recinto $f_3(G)$, perteneciente al círculo K_0 .

Para su derivada $f_3'(z_0)$ obtenemos el valor:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} \Big|_{z=z_0} \cdot \frac{dw_1}{dw} \Big|_{w=f(z_0)=0} \cdot \frac{dw_2}{dw_1} \Big|_{w_1=f_1(z_0)=-w_0} \cdot \frac{dw_3}{dw_2} \Big|_{w_2=f_2(z_0)=0} &= \\ &= 1 \cdot \frac{R_{z_0}^2 - |w_0|^2}{R_{z_0}^2} \cdot \frac{\sqrt{R_{z_0}}}{2\sqrt{-w_0}} \cdot \frac{R_{z_0}^2}{R_{z_0}^2 - R_{z_0}|w_0|} = \frac{R_{z_0} + |w_0|}{2\sqrt{-R_{z_0}w_0}}. \end{aligned}$$

Como $|w_0| < R_{z_0}$, se tiene que $|f_3'(z_0)| > 1$. Por esto, $f_3(z)$ no pertenece al conjunto E_{z_0} . Dividiéndola por $f_3'(z_0)$, obtenemos una función $f_4(z)$ del conjunto E_{z_0} ($f_4(z)$ es univalente en el recinto G y satisface a las condiciones: $f_4(z_0) = 0$ y $f_4'(z_0) = 1$). Pero esta última transforma el recinto G en un recinto $f_4(G)$ contenido en el círculo

$$|w_4| < \frac{R_{z_0}}{|f_3'(z_0)|} < R_{z_0},$$

y, por consiguiente,

$$\sup_G |f_4(z)| < \frac{R_{z_0}}{|f_3'(z_0)|} < R_{z_0};$$

esto contradice a la definición del número R_{z_0} como extremo inferior del conjunto de números $\sup_{z \in G} |F(z)|$, $F(z) \in E_{z_0}$. El teorema queda demostrado. \square

Durante la demostración hemos hallado que la función que realiza la transformación conforme del recinto en el círculo, se puede

someter a las condiciones complementarias:

$$f(z_0) = 0 \text{ y } f'(z_0) = 1,$$

donde z_0 es un punto finito arbitrario del recinto.

El círculo K_0 obtenido tiene el centro en el origen de coordenadas y un radio R_{z_0} completamente determinado. Este se llama radio de conformidad del recinto G respecto del punto z_0 .

Tomando en lugar de $f(z)$ la función $F(z) = \frac{1}{R_{z_0}} f(z)$, obtendremos la transformación del recinto G en el círculo unidad $|w| < 1$. La función que realiza la transformación satisface a las condiciones:

$$F(z_0) = 0, \quad F'(z_0) > 0.$$

Geoméricamente, esto significa que el punto z_0 del recinto G se traslada al centro del círculo unidad y que las tangentes a todas las curvas que pasan por el punto z_0 no observan rotación alguna al pasar a las imágenes de estas curvas, las cuales pasan por el centro del círculo.

Demostremos que se verifica el siguiente teorema de unicidad para las transformaciones conformes.

T e o r e m a. *Existe solamente una función $F(z)$ que transforma conformemente el recinto G en el círculo $|w| < 1$ y que satisface a las condiciones:*

$$F(z_0) = 0 \text{ y } F'(z_0) > 0,$$

donde z_0 es un punto finito dado del recinto G .

En efecto, sea $w_1 = F_1(z)$ una función que satisfaga a las mismas condiciones. Entonces la función $w_1 = F_1 F^{-1}(w) = \Phi(w)$, que es uniforme y analítica en el círculo unidad, satisface a las condiciones:

$$\Phi(0) = F_1 F^{-1}(0) = F_1(z_0) = 0, \quad \Phi'(0) = \frac{1}{F'(z_0)} F_1'(z_0) > 0$$

y transforma conformemente este círculo en sí mismo. En virtud del lema de Schwarz (ap. 6.2, cap. tercero), se tiene:

$$|w_1| = |\Phi(w)| \leq |w|.$$

Pero este mismo razonamiento puede aplicarse también a la función inversa

$$w = F F_1^{-1}(w_1) = \Phi^{-1}(w_1).$$

Por esto, se tiene:

$$|w| = |\Phi^{-1}(w_1)| \leq |w_1|,$$

de donde se deduce que se verifica la igualdad

$$|\Phi(w)| = |w|, \quad |w| < 1,$$

es decir, según el lema de Schwarz,

$$\Phi(w) = e^{i\alpha} w.$$

Como $\Phi'(0) > 0$, se deduce que $e^{i\alpha} = 1$, por consiguiente:

$$\Phi(w) = w, \quad F_1 F^{-1}(w) = w,$$

o sea

$$F_1(z) = F(z)$$

en el recinto G , con lo cual se termina la demostración.

2.3. Sea $\{G_n\}$ una sucesión de recintos simplemente conexos del plano finito z , que contienen un círculo fijado k con el centro en z_0 . Consideremos el conjunto E de todos los puntos del plano, cada uno de los cuales posee un entorno perteneciente a todos los recintos G_n , comenzando desde cierto índice n . Evidentemente, todos los puntos del círculo k pertenecen a E . Por esta razón, E es un conjunto no vacío. Además, éste es abierto y, por consiguiente, representa un conjunto finito o numerable de recintos que no tienen puntos comunes dos a dos (véase el ap. 4.2, cap. primero). Aquel que contiene al punto z_0 y, por consiguiente, al círculo k , llamaremos núcleo de la sucesión de los recintos $\{G_n\}$ (respecto del punto z_0) y lo designaremos con G_{z_0} . El núcleo G_{z_0} es el recinto máximo entre los que contienen a z_0 y poseen la propiedad de que cualquier conjunto cerrado F de puntos del mismo pertenece a todos los recintos G_n , comenzando desde uno de ellos. En otras palabras, todo recinto g que contiene al punto z_0 y posee la propiedad indicada, está contenido en G_{z_0} . En efecto, si $F \subset G_{z_0}$, entonces para cada punto $\xi \in F$ se puede señalar un entorno U_ξ , perteneciente a los recintos G_n para $n > \nu(\xi)$. Cubriendo F con un número finito de tales entornos U_{ξ_j} ($j = 1, \dots, m$) (lo cual es posible según el lema de Heine-Borcl) y eligiendo el mayor de los números $\nu(\xi_j)$ ($j = 1, \dots, m$) — sea éste el número ν —, hallaremos que para $n > \nu$ todos los entornos U_{ξ_j} y, por consiguiente, también todo el conjunto F , estarán contenidos en G_n . Si alguno de los recintos g posee una propiedad análoga, entonces para cada uno de sus puntos tiene que existir un entorno perteneciente a todos los recintos G_n , comenzando desde uno de ellos. Por esta razón $g \subset E$, y si g contiene al punto z_0 , entonces g pertenece a aquella componente conexa del conjunto E que contiene a este punto, es decir, $g \subset G_{z_0}$. En la fig. 3 están representados los recintos G_n , cada uno de los cuales consta de dos rectángulos fijados D' y D'' , unidos entre sí por el rectángulo δ_n de base constante l y cuya altura h_n decrece indefinidamente. En este ejemplo el conjunto E consta

de los rectángulos D' y D'' . El núcleo de la sucesión $\{G_n\}$ respecto del punto $z'_0 \in D'$ es el rectángulo D' , el núcleo de esta misma sucesión respecto del punto $z''_0 \in D''$ es el rectángulo D'' .

Diremos que la sucesión $\{G_n\}$ converge hacia su núcleo o G_{z_0} , si cualquier sucesión parcial de estos recintos posee el mismo núcleo respecto del punto z_0 que toda la sucesión.

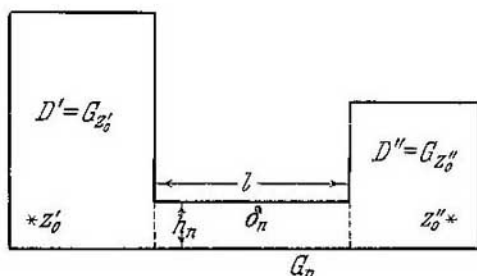


FIG. 3.

En nuestro ejemplo la sucesión $\{G_n\}$ converge hacia el núcleo D' (respecto del punto z'_0), y también hacia el núcleo D'' (respecto del punto z''_0).

En la fig. 4 se muestra un ejemplo de sucesión divergente de recintos $\{G_n\}$. En este caso, cada uno de los recintos G_{2m-1} coincide con

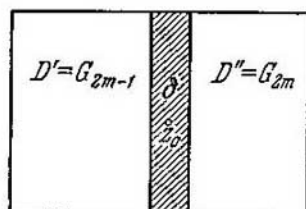


FIG. 4.

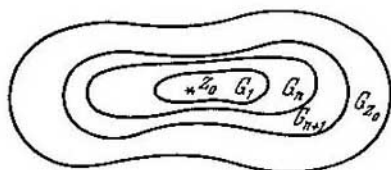


FIG. 5.

un mismo rectángulo D' , y cada recinto G_{2m} coincide con el rectángulo D'' , distinto de D' , pero que tiene una parte común con D' : el rectángulo δ . El núcleo de la sucesión $\{G_n\}$ respecto de cualquier punto $z_0 \in \delta$ es el rectángulo δ . Sin embargo, el núcleo de la sucesión parcial $\{G_{2m-1}\}$ respecto de este mismo punto es D' , y el núcleo

de la sucesión parcial $\{G_{2m}\}$ respecto del punto z_0 es D'' . De aquí se deduce que en este ejemplo la sucesión $\{G_n\}$ es divergente.

El siguiente teorema pone de relieve el valor de los conceptos introducidos aquí para la teoría de las transformaciones conformes.

Teorema de los recintos de fronteras variables (Carathéodory). Sea $\{G_n\}$ una sucesión de recintos contenidos en un círculo fijado K : $|z| < R$ (es decir, uniformemente acotados) y que contienen en su interior a un círculo k : $|z - z_0| < \rho$. Designemos con $w = f_n(z)$ las funciones que transforman conformemente los recintos G_n en el círculo unidad Δ : $|w| < 1$ y que satisfacen a las condiciones $f_n(z_0) = 0$, $f'_n(z_0) > 0$, y con $w = f(z)$, la función que transforma conformemente el núcleo G_{z_0} de la sucesión $\{G_n\}$ en el círculo unidad y que satisface a las condiciones $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, y sean $z = \varphi_n(w)$ y $z = \varphi(w)$ las funciones inversas a las indicadas. En estas condiciones, de la convergencia de la sucesión de los recintos $\{G_n\}$ a su núcleo G_{z_0} se deduce la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en el interior de G_{z_0} hacia la función $f(z)$ y de la sucesión $\{\varphi_n(w)\}$ en el interior de Δ hacia la función $\varphi(w)$. Recíprocamente, la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ hacia la función $f(z)$ (o $\{\varphi_n(w)\}$ hacia $\varphi(w)$) implica la convergencia de la sucesión $\{G_n\}$ hacia su núcleo G_{z_0} .

Demostración. Sin hacer por ahora ninguna suposición acerca de la convergencia de la sucesión $\{G_n\}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$. Cada una de éstas está definida en su recinto G_n , y puede ocurrir que para cualquiera de ellas existan tales puntos del núcleo G_{z_0} , en los cuales la función dada no esté definida (es suficiente figurarse una sucesión creciente de recintos $\{G_n\}$: $\bar{G}_n \subset G_{n+1}$, que aproximan al recinto G por el interior, el cual es, en este caso, el núcleo de la sucesión $\{G_n\}$ (fig. 5)). No obstante, cada conjunto cerrado de puntos del recinto G_{z_0} , en particular, cada círculo cerrado perteneciente a G_{z_0} , está contenido en todos los recintos G_n , comenzando desde uno de ellos, y, por consiguiente, todas las funciones $\{f_n(z)\}$, comenzando desde una de ellas, están definidas y son analíticas en este conjunto. Como todos los conceptos y teoremas, relativos a la compacidad de las familias de las funciones analíticas, tratan solamente del comportamiento de las funciones en los conjuntos cerrados de puntos del recinto dado, podemos aplicarlos en el caso considerado a la sucesión $\{f_n(z)\}$ y al recinto G_{z_0} .

Fijemos una sucesión arbitraria de números naturales $\{n_k\}$, creciente indefinidamente, y sea G'_{z_0} el núcleo de la sucesión de recintos $\{G_{n_k}\}$; como las funciones $\{f_{n_k}(z)\}$ están uniformemente acotadas ($|f_{n_k}(z)| < 1$), de $\{n_k\}$ se puede extraer una sucesión parcial de índices $\{n'_k\}$ tal, que la sucesión de funciones $\{f_{n'_k}(z)\}$

sea uniformemente convergente en el interior de G'_{z_0} . Extraigamos de $\{n_k\}$ una nueva sucesión parcial $\{\tilde{n}_k\}$ de modo que la sucesión de funciones $\{\varphi_{\tilde{n}_k}(w)\}$ sea uniformemente convergente en el interior del círculo unidad (lo cual es posible, puesto que las funciones $\varphi_n(w)$ están uniformemente acotadas en el círculo unidad: $|\varphi_n(w)| < R$). Evidentemente, la sucesión $\{f_{\tilde{n}_k}(z)\}$, como anteriormente, será uniformemente convergente en el interior de G'_{z_0} . Sin embargo, el núcleo \tilde{G}_{z_0} de la sucesión de recintos $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ puede diferenciarse de G'_{z_0} ; en todo caso, $\tilde{G}_{z_0} \supset G'_{z_0}$ (puesto que la sucesión $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ está contenida en la sucesión $\{G'_{n_k}\}$).

Como la sucesión de funciones $\{f_{\tilde{n}_k}(z)\}$ está uniformemente acotada y es convergente en la parte G'_{z_0} del recinto \tilde{G}_{z_0} , resulta, según el teorema de Vitali, que la misma es uniformemente convergente en el interior de G_{z_0} . En resumen, hemos establecido que de cualquier sucesión de números naturales $\{n_k\}$ se puede extraer una sucesión parcial $\{\tilde{n}_k\}$ tal, que la sucesión de funciones $\{f_{\tilde{n}_k}(z)\}$ converja uniformemente en el interior del núcleo \tilde{G}_{z_0} de la sucesión de recintos $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ hacia una función analítica $\tilde{f}(z)$, y las funciones inversas a ellas $\{\varphi_{\tilde{n}_k}(w)\}$ converjan uniformemente en el interior del círculo $|w| < 1$ hacia una función analítica $\tilde{\varphi}(w)$. Evidentemente,

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{\tilde{n}_k \rightarrow \infty} f_{\tilde{n}_k}(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{f}'(z_0) = \lim_{\tilde{n}_k \rightarrow \infty} f'_{\tilde{n}_k}(z_0) \geq 0,$$

y exactamente igual

$$\tilde{\varphi}(0) = \lim_{\tilde{n}_k \rightarrow \infty} \varphi_{\tilde{n}_k}(0) = z_0 \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}'(0) = \lim_{\tilde{n}_k \rightarrow \infty} \varphi'_{\tilde{n}_k}(0) \geq 0.$$

Así, pues, existen límites finitos tanto para los números $f'_{\tilde{n}_k}(z_0)$, como para los números inversos a ellos $\varphi'_{\tilde{n}_k}(0) = \frac{1}{f'_{\tilde{n}_k}(z_0)}$. De aquí se deduce que ambos límites son distintos de cero, o sea, $\tilde{f}'(z_0) > 0$ y $\tilde{\varphi}'(0) > 0$, siendo, además, $\tilde{f}'(z_0) \cdot \tilde{\varphi}'(0) = 1$. Luego, $\tilde{f}(z) \neq \text{const}$ y $\tilde{\varphi}(w) \neq \text{const}$, de donde, según el teorema del ap. 1.4, sacamos la conclusión de que $\tilde{f}(z)$ y $\tilde{\varphi}(w)$ son univalentes en los recintos correspondientes \tilde{G}_{z_0} y Δ .

Como $|f_{\tilde{n}_k}(z)| < 1$, se tiene, $|\tilde{f}(z)| \leq 1$, es decir, la imagen $\tilde{f}(\tilde{G}_{z_0})$ está contenida en el círculo unidad Δ ; además, $\tilde{f}(\tilde{G}_{z_0})$ contiene

al punto 0. La imagen $\tilde{\varphi}(\Delta)$ contiene al punto z_0 ; demostremos que ella está contenida en el recinto \tilde{G}_{z_0} . Sea $\tilde{w} \in \Delta$; entonces $\tilde{z} = \tilde{\varphi}(\tilde{w})$ es un punto del recinto $\tilde{\varphi}(\Delta)$. Cerciorémonos de que existe un entorno del punto \tilde{z} que está contenido en todos los recintos $G_{\tilde{n}_k}$, comenzando desde uno de ellos. La función $z = \tilde{\varphi}(w)$ transforma la circunferencia $\delta: |w - \tilde{w}| = \tilde{\rho}$, contenida en Δ , en una curva cerrada de Jordan γ , contenida en $\tilde{\varphi}(\Delta)$. Además, la parte interior de la curva γ pertenece a $\tilde{\varphi}(\Delta)$ y contiene al punto \tilde{z} . Construyamos un círculo cerrado $C: |z - \tilde{z}| \leq \tilde{r}$, situado en el interior de γ , y designemos con ε la distancia entre C y γ ; evidentemente, $\varepsilon > 0$. Para $w \in \delta$ y $\xi \in C$, se tiene:

$$|\tilde{\varphi}(w) - \xi| \geq \varepsilon;$$

por otra parte, para todos los valores $\tilde{n}_k > N$ en la circunferencia δ tiene que verificarse la desigualdad

$$|\varphi_{\tilde{n}_k}(w) - \tilde{\varphi}(w)| < \varepsilon.$$

De aquí, según el teorema de Rouché (véase el ap. 3.5, cap. cuarto), sacamos la conclusión de que las funciones $\tilde{\varphi}(w) - \xi$ y $\varphi_{\tilde{n}_k}(w) - \xi = [\tilde{\varphi}(w) - \xi] + [\varphi_{\tilde{n}_k}(w) - \tilde{\varphi}(w)]$ poseen una misma cantidad de ceros en el interior de γ , es decir, cada punto ξ del círculo C pertenece a la imagen $\varphi_{\tilde{n}_k}(\Delta) = G_{\tilde{n}_k}$ para $\tilde{n}_k > N$. Así, pues, cada punto $\tilde{z} \in \tilde{\varphi}(\Delta)$ posee un entorno $\{|z - \tilde{z}| < \tilde{r}\}$, perteneciente a todos los recintos $G_{\tilde{n}_k}$, comenzando desde uno de ellos. Como $\tilde{\varphi}(\Delta)$ es un recinto que contiene a z_0 , de aquí, en virtud de la propiedad fundamental del núcleo de la sucesión $\{G_{\tilde{n}_k}\}$, se deduce que $\tilde{\varphi}(\Delta) \subset \tilde{G}_{z_0}$. Esto es lo que se afirmaba.

Como $z = \tilde{\varphi}(w)$ transforma conformemente Δ en $\tilde{\varphi}(\Delta) \subset \tilde{G}_{z_0}$ y $w = \tilde{f}(z)$ transforma conformemente \tilde{G}_{z_0} en el recinto $\tilde{f}(\tilde{G}_{z_0}) \subset \Delta$, sacamos la conclusión de que la función $\psi(w) = \tilde{f}\tilde{\varphi}(w)$ transforma conformemente Δ en el recinto $\tilde{f}(\tilde{G}_{z_0})$, el cual está contenido en Δ . Observando que $\psi(0) = \tilde{f}\tilde{\varphi}(0) = \tilde{f}(z_0) = 0$ y $\psi'(0) = \tilde{f}'(0) \cdot \tilde{\varphi}'(z_0) = 1$, deducimos, según el lema de Schwarz, que $\psi(w) = e^{i\alpha}w$, siendo $e^{i\alpha} = \psi'(0) = 1$. En resumen,

$$\psi(w) = \tilde{f}\tilde{\varphi}(w) = w \quad \text{o bien} \quad \tilde{\varphi}(w) = \tilde{f}^{-1}(w),$$

es decir, $\tilde{\varphi}(w)$ es una función inversa respecto de la función $\tilde{f}(z)$. Si, por consiguiente, w es un punto arbitrario del círculo Δ y $z =$

$= \tilde{\varphi}(w) \in \tilde{\varphi}(\Delta) \subset \tilde{G}_{z_0}$, se tiene $\tilde{f}(z) = w \in \tilde{f}(\tilde{G}_{z_0})$. Por esta razón, el recinto $\tilde{f}(\tilde{G}_{z_0})$, el cual está contenido en Δ , contiene cualquier punto de Δ , es decir, coincide con Δ . Del mismo modo, $\tilde{\varphi}(\Delta)$ coincide con \tilde{G}_{z_0} . Hemos hallado que las funciones $w = \tilde{f}(z)$ y $z = \tilde{\varphi}(w)$ son inversas entre sí y la primera de ellas realiza una transformación conforme del núcleo \tilde{G}_{z_0} de la sucesión $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ en el círculo unidad; además, se cumplen las condiciones $\tilde{f}(z_0) = 0$ y $\tilde{f}'(z_0) > 0$.

Después de haber establecido esto, la demostración de la primera parte del teorema se termina del modo siguiente.

Supongamos que la sucesión dada de recintos $\{G_n\}$ converge hacia su núcleo G_{z_0} . Entonces para cualquier sucesión parcial de recintos $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ el núcleo queda el mismo: $\tilde{G}_{z_0} = G_{z_0}$. Por consiguiente, la función límite $f(z) = \lim f_{n_k}(z)$ transforma en el círculo unidad un mismo recinto G_{z_0} en las condiciones invariables $\tilde{f}(z_0) = 0$ y $\tilde{f}'(z_0) > 0$. De aquí, según el teorema de unicidad para las transformaciones conformes, se deduce que todas las sucesiones parciales posibles de funciones $\{f_{\tilde{n}_k}(z)\}$, uniformemente convergentes, poseen un mismo límite $f(z) = \tilde{f}(z)$. Suponiendo que la sucesión $\{f_n(z)\}$ no converge hacia $f(z)$ uniformemente en el interior de G_{z_0} , tendríamos que tener un conjunto cerrado $F \subset G_{z_0}$ en el cual no tendría lugar la convergencia uniforme. Esto significaría la existencia de un número $\alpha > 0$, de una sucesión de puntos $\{z_k\}$, pertenecientes a F , y de unos números naturales n_k , crecientes indefinidamente, tales que

$$|f(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \geq \alpha \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Pero, debido a la compacidad, de la sucesión $\{f_{n_k}(z)\}$ se puede extraer una sucesión parcial $\{f_{n_{k_m}}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de G_{z_0} y, en particular, en el conjunto F . En este caso, la función límite de la sucesión parcial será $f(z)$. De aquí se deduce que, para todos los valores suficientemente grandes de k_m , en el conjunto F se verifica la desigualdad

$$|f(z) - f_{n_{k_m}}(z)| < \alpha.$$

Pero esto contradice al hecho de que en los puntos z_{k_m} tiene que verificarse la desigualdad

$$|f(z_{k_m}) - f_{n_{k_m}}(z_{k_m})| \geq \alpha.$$

De la contradicción obtenida se deduce que la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de G_{z_0} .

La proposición recíproca (la segunda parte del teorema) se demuestra del siguiente modo.

Supongamos que la sucesión de recintos $\{G_n\}$ no converge a su núcleo G_{z_0} . Entonces existe una sucesión parcial $\{G_{n_k}\}$, cuyo núcleo es distinto de G_{z_0} (contiene a G_{z_0} como parte propia). Extraigamos de $\{f_{n_k}(z)\}$ una nueva sucesión parcial $\{f_{\tilde{n}_h}(z)\}$, que sea uniformemente convergente en el interior del núcleo \tilde{G}_{z_0} de la sucesión parcial de recintos $\{G_{\tilde{n}_h}\}$ correspondiente. La función límite $\tilde{f}(z) = \lim_{\tilde{n}_h \rightarrow \infty} f_{\tilde{n}_h}(z)$ transforma conformemente el recinto \tilde{G}_{z_0} en el círculo $|w| < 1$ y, por consiguiente, no coincide con la función $f(z)$, la cual transforma conformemente a G_{z_0} , o sea, a la parte propia de este recinto, en el mismo círculo. De aquí se deduce que $\{f_{n_k}(z)\}$ no puede converger hacia $f(z)$, si la sucesión de recintos $\{G_n\}$ no converge a su núcleo G_{z_0} . Con esto se termina la demostración del teorema.

Para ilustrar este teorema, volvamos a examinar la sucesión de recintos $\{G_n\}$ representados en la fig. 3. Designemos con $f_n(z)$ y $F_n(z)$ las funciones que transforman conformemente G_n en el círculo unidad y satisfacen, respectivamente, a las condiciones siguientes:

$$f_n(z'_0) = 0, f'_n(z'_0) > 0 \quad \text{y} \quad F_n(z''_0) = 0, F'_n(z''_0) > 0.$$

Entonces la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente en el interior del rectángulo D' hacia la función $f(z)$ que transforma D' en el círculo unidad, y la sucesión $\{F_n(z)\}$ converge uniformemente en el interior de D'' hacia la función $F(z)$ que transforma D'' en el círculo unidad.

2.4. En este apartado estudiaremos algunas de las propiedades generales de las funciones univalentes.

Teorema 1. (Teorema de las áreas). Sea

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \alpha_1 \zeta^{-1} + \alpha_2 \zeta^{-2} + \dots + \alpha_n \zeta^{-n} + \dots$$

una función univalente fuera del círculo unidad. Entonces

$$\sum_1^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leq 1. \quad (2.4:1)$$

Demostración. La función $w = F(\zeta)$ transforma la circunferencia $|\zeta| = \rho > 1$ en una curva cerrada de Jordan γ_ρ , la cual limita un recinto de área σ_ρ ; además, a un recorrido simple de la circunferencia en sentido positivo corresponde un recorrido simple de la curva γ_ρ también en sentido positivo. Para el área σ_ρ

obtenemos la expresión (compárense los cálculos del ap. 2.1):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{2} \int_{|\xi|=\rho} (u dv - v du) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \left[\overline{F(\rho e^{i\theta})} \frac{\partial F(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta} \right] d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \{ [\rho e^{-i\theta} + \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 \rho^{-1} e^{i\theta} + \bar{\alpha}_2 \rho^{-2} e^{2i\theta} + \dots] \times \\ &\quad \times i [\rho e^{i\theta} - \alpha_1 \rho^{-1} e^{-i\theta} - 2\alpha_2 \rho^{-2} e^{-2i\theta} - \dots] \} d\theta = \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{2\pi i}{2} (\rho^2 - |\alpha_1|^2 \rho^{-2} - 2|\alpha_2|^2 \rho^{-4} - \dots - n|\alpha_n|^2 \rho^{-2n} - \dots) \right\} = \\ &= \pi \left(\rho^2 - \sum_1^\infty n |\alpha_n|^2 \rho^{-2n} \right) > 0. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$\sum_1^\infty n |\alpha_n|^2 \rho^{-2n} < \rho^2$$

para cualquier $\rho > 1$. Como $\sum_1^N n |\alpha_n|^2 \rho^{-2n} < \rho^2$, pasando al límite para $\rho \rightarrow 1$ obtenemos: $\sum_1^N n |\alpha_n|^2 \leq 1$ y, finalmente, para $N \rightarrow \infty$:

$$\sum_1^\infty n |\alpha_n|^2 \leq 1.$$

Teorema 2. *Sea*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

una función univalente en el círculo unidad. Entonces

$$|a_2| \leq 2, \quad (2.4:2)$$

y se alcanza la igualdad solamente en el caso de la función

$$f(z) = \frac{z}{(1 - z e^{i\alpha})^2} = z + 2e^{i\alpha} z^2 + 3e^{2i\alpha} z^3 + \dots,$$

la cual transforma conformemente el círculo unidad en un recinto cuya frontera es un rayo rectilíneo y que representa la prolongación del vector $-\frac{1}{4} e^{-i\alpha}$ desde el extremo de este vector hasta el infinito.

Demostración. Consideremos la función

$$\varphi(z) = \frac{f(z^2)}{z^2} = 1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots + a_n z^{2n-2} + \dots$$

Esta es uniforme y analítica en el círculo unidad y no se anula en el mismo. En efecto, $\varphi(0) = 1 \neq 0$, y si $z \neq 0$, entonces $\varphi(z) = \frac{f(z^2)}{z^2}$, y como $f(z^2) \neq 0$ para $z \neq 0$ (en virtud de la univalencia), también $\varphi(z) \neq 0$ para $z \neq 0$. Por esta razón, la función biforme $\psi(z) = \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ posee dos ramas uniformes y analíticas en el círculo unidad. Elegiremos aquella que se hace igual a la unidad para $z = 0$. Entonces tendremos:

$$\begin{aligned}\psi(z) &= [1 + (a_2 z^2 + \dots)]^{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(a_2 z^2 + \dots) - \frac{1}{8}(a_2 z^2 + \dots)^2 + \dots = 1 + \frac{a_2}{2} z^2 + \dots\end{aligned}$$

Como la función $\psi(z)$ es analítica, este desarrollo tiene que ser convergente en el círculo unidad.

Obsérvese que $\psi(z)$ es una función par.

Formemos ahora una función impar:

$$\chi(z) = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \dots = z\psi(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = \sqrt{f(z^2)} \quad (2.4:3)$$

y cerciorémonos de que ésta es univalente en el círculo unidad. En efecto, si $\chi(z_1) = \chi(z_2)$, entonces $f(z_1^2) = f(z_2^2)$, o sea, $z_1 = \pm z_2$. Pero si $z_1 = -z_2 \neq 0$, entonces $\chi(z_1) = -\chi(z_2)$ y, por consiguiente, la igualdad $\chi(z_1) = \chi(z_2)$ resulta imposible (la función $\chi(z)$ se anula junto con $f(z^2)$, es decir, sólo cuando $z = 0$). En resumen, tiene que ser $z_1 = z_2$, de donde se deduce que $\chi(z)$ es una función univalente.

Sustituiremos, finalmente, z por $\frac{1}{\zeta}$ y $\chi(z) = \chi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ por $F(\zeta) = \frac{1}{\chi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$. Como solamente se utilizan transformaciones

homográficas (univalentes), la función $F(\zeta)$ también resulta univalente en el exterior del círculo unidad (si $|z| < 1$, entonces $|\zeta| > 1$).

Para ella se obtiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}F(\zeta) &= \frac{1}{\frac{1}{\zeta} + \frac{a_2}{2} \frac{1}{\zeta^3} + \dots} = \zeta \frac{1}{1 + \frac{a_2}{2} \frac{1}{\zeta^2} + \dots} = \\ &= \zeta \left(1 - \frac{a_2}{2} \frac{1}{\zeta^2} + \dots \right) = \zeta - \frac{a_2}{2} \zeta^{-1} - \dots\end{aligned}$$

Por consiguiente, según el teorema 1:

$$\left| \frac{a_2}{2} \right|^2 + \dots \leq 1$$

y, finalmente,

$$|a_2| \leq 2.$$

Si en esta relación se verifica la igualdad

$$|a_2| = 2, \text{ es decir, } a_2 = 2e^{i\alpha},$$

entonces todos los coeficientes del desarrollo de $F(\zeta)$, comenzando desde el coeficiente de ζ^{-2} en adelante, tienen que anularse. Por consiguiente,

$$F(\zeta) = \zeta - e^{i\alpha}\zeta^{-1},$$

de donde

$$\chi(z) = \chi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{F(\zeta)} = \frac{1}{\zeta - e^{i\alpha}\zeta^{-1}} = \frac{z}{1 - e^{i\alpha}z^2},$$

$$f(z^2) = [\chi(z)]^2 = \frac{z^2}{(1 - e^{i\alpha}z^2)^2}$$

y, finalmente,

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2}.$$

Para esta función el desarrollo de Taylor es:

$$f(z) = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + \dots + ne^{(n-1)i\alpha}z^n + \dots$$

El carácter de la transformación que se obtiene mediante esta función se puede apreciar sencillamente realizando sucesivamente las transformaciones elementales:

$$z_1 = -e^{i\alpha}z, \quad z_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right), \quad z_3 = -2e^{i\alpha}(z_2 + 1), \quad w = \frac{1}{z_3} = f(z).$$

Teorema 3. *El recinto G del plano w , en el cual la función univalente*

$$f(z) = z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$$

transforma el círculo unidad, siempre contiene al círculo de radio $\frac{1}{4}$ con el centro en el origen de coordenadas.

Demostración. Sea w_0 un punto frontera arbitrario del recinto G . Entonces la función

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{1}{w_0}f(z)}$$

es también univalente en el círculo unidad. Esta posee el siguiente desarrollo:

$$\varphi(z) = \frac{z + a_2z^2 + \dots}{1 - \frac{1}{w_0}z - \frac{a_2}{w_0}z^2 - \dots} = z + \left(a_2 + \frac{1}{w_0}\right)z^2 + \dots$$

Según el teorema 2, tendremos que tener:

$$\left| a_2 + \frac{1}{w_0} \right| \leq 2;$$

por lo cual

$$\left| \frac{1}{w_0} \right| \leq 2 + |a_2| \leq 4 \text{ y } |w_0| \geq \frac{1}{4}.$$

Así, pues, en el círculo $|w| < \frac{1}{4}$ no hay ningún punto frontera del recinto G . Como el centro de este círculo ($w = 0$) está situado en el recinto G , todo el círculo está contenido en el recinto G .

En el caso de la función $w = \frac{z}{(1 - e^{ia_2z})^2}$, el punto $-\frac{1}{4} e^{-ia}$ es un punto frontera para el recinto correspondiente G . Por consiguiente, en las condiciones del teorema 3, el número $\frac{1}{4}$ no se puede sustituir por un número más grande.

Teorema 4 («Teorema de la desfiguración») *Si la función*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

es univalente en el círculo unidad, entonces la dilatación $|f'(z)|$ (la «desfiguración») en la transformación $w = f(z)$ satisface en cada punto z , $|z| < 1$, a las desigualdades

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}. \quad (2.4.4)$$

En estas relaciones se alcanzan los signos de igualdad en los puntos $z \neq 0$ solamente para la función $f(z) = \frac{z}{(1 - e^{ia_2z})^2}$.

Demostración. Sea $z = re^{i\theta}$ un punto arbitrario del círculo unidad. Efectuemos la transformación del círculo unidad $|\xi| < 1$ sobre sí mismo, de modo que este punto vaya al origen de coordenadas. Obtendremos:

$$\xi' = \frac{\xi - z}{\xi \bar{z} - 1} \text{ o bien } \xi = \frac{\xi' - z}{\xi' \bar{z} - 1}.$$

En esta transformación la función $f(\xi)$ se convertirá en la función

$$\varphi(\xi') = f\left(\frac{\xi' - z}{\xi' \bar{z} - 1}\right),$$

la cual también es univalente en el círculo unidad $|\xi'| < 1$. Se tiene:

$$\varphi(0) = f(z), \quad \varphi'(0) = -f'(z)(1 - |z|^2),$$

$$\varphi''(0) = f''(z)(1 - |z|^2)^2 - 2\bar{z}f'(z)(1 - |z|^2), \dots,$$

de donde

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta') &= f(z) - f'(z)(1 - |z|^2)\zeta' + \\ &+ \frac{1}{2}[f''(z)(1 - |z|^2)^2 - 2\bar{z}f'(z)(1 - |z|^2)]\zeta'^2 + \dots, \end{aligned}$$

o bien

$$\psi(\zeta') = \frac{\varphi(\zeta') - f(z)}{-f'(z)(1 - |z|^2)} = \zeta' - \frac{1}{2} \left[\frac{f''(z)}{f'(z)} (1 - |z|^2) - 2\bar{z} \right] \zeta'^2 + \dots$$

Aplicando el teorema 2 a la función univalente $\psi(\zeta')$, resulta:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} (1 - |z|^2) - 2\bar{z} \right| \leq 2, \quad (2.4:5)$$

o bien

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}. \quad (2.4:5')$$

De aquí que

$$\begin{aligned} -\frac{4r}{1-r^2} &\leq \operatorname{Re} \left[z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right] \leq \frac{4r}{1-r^2}, \\ -\frac{4r}{1-r^2} &\leq \operatorname{Im} \left[z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right] \leq \frac{4r}{1-r^2}. \end{aligned}$$

Observando que

$$z \frac{f''(z)}{f'(z)} = z \frac{d \operatorname{Ln} f'(z)}{dz} = r \left[\frac{\partial \ln |f'(z)|}{\partial r} + i \frac{\partial \operatorname{Arg} f'(z)}{\partial r} \right]$$

(véase el tomo I, fórmula (1.3:9) del cap. segundo), hallamos:

$$\begin{aligned} -\frac{4r}{1-r^2} &\leq r \frac{\partial \ln |f'(z)|}{\partial r} - \frac{2r^2}{1-r^2} \leq \frac{4r}{1-r^2}, \\ -\frac{4r}{1-r^2} &\leq r \frac{\partial \operatorname{Arg} f'(z)}{\partial r} \leq \frac{4r}{1-r^2}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial \ln |f'(z)|}{\partial r} \leq \frac{2r+4}{1-r^2} \quad (2.4:6)$$

y

$$-\frac{4}{1-r^2} \leq \frac{\partial \operatorname{Arg} f'(z)}{\partial r} \leq \frac{4}{1-r^2}. \quad (2.4:7)$$

Integrando las relaciones (2.4:6) respecto de r desde 0 hasta $r = |z|$, obtenemos:

$$\ln \frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \ln |f'(z)| \leq \ln \frac{1+r}{(1-r)^3},$$

o bien

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \quad (2.4:8)$$

Este es el resultado que se pedía.

El signo de igualdad en el primero o segundo miembro para algún valor $z \neq 0$ supone el signo de igualdad en el miembro correspondiente de las relaciones (2.4:6) para todos los puntos del segmento rectilíneo que une 0 y z . Por esta razón, tiene que valer también el signo de igualdad en los puntos correspondientes para las relaciones (2.4:5). Haciendo en éstas $z = 0$ y observando que $f'(0) = 1$, hallamos:

$$|a_2| = \frac{1}{2} |f''(0)| = 2,$$

de donde, según el teorema 2, se deduce que $f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2}$.

Para esta función verdaderamente se alcanzan los signos de igualdad en las relaciones (2.4:8), pues,

$$f'(z) = \frac{1 + e^{i\alpha}z}{(1 - e^{i\alpha}z)^3},$$

y para $z = |z|e^{-i\alpha}$ se tiene:

$$f'(z) = \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3},$$

y para $z = -|z|e^{-i\alpha}$ se tiene:

$$f'(z) = \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3}.$$

Las desigualdades (2.4:7) obtenidas en la demostración, permiten acotar $\text{Arg } f'(z)$, es decir, el ángulo de rotación de las tangentes a las curvas en la transformación $w = f(z)$.

Integrando las relaciones (2.4:7) desde 0 hasta $r = |z|$ y observando que $f'(0) = 1$, hallamos:

$$|\text{Arg } f'(z)| \leq 2 \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|}. \quad (2.4:9)$$

Aquí $\text{Arg } f'(z)$ denota aquella rama de la función multiforme en el círculo unidad que se anula en el punto $z = 0$. Esta cota no es la mejor posible. En forma definitiva la cota de $\text{Arg } f'(z)$ fue obtenida por otros medios más complicados por G. M. Goluziu. Esta se expresa por las siguientes desigualdades:

$$|\text{Arg } f'(z)| \leq \begin{cases} 4 \arcsen |z| & \text{si } |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi + \ln \frac{|z|^2}{1 - |z|^2} & \text{si } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| < 1. \end{cases} \quad (2.4:10)$$

Estas desigualdades forman el contenido del teorema de rotación en la teoría de las funciones univalentes. Estas son exactas en el sentido de que existen funciones univalentes (distintas

de $\frac{z}{(1-e^{i\alpha z})^2}$), para las cuales $|\text{Arg } f'(z)|$ toma valores arbitrariamente próximos a los valores de los segundos miembros de las relaciones (2.4:10) en un punto previamente dado del círculo unidad.

Volvamos a examinar las desigualdades (2.4:6), obtenidas anteriormente, para deducir de la primera de ellas una propiedad geométrica sencilla de las transformaciones conformes. Observando que

$$r \frac{\partial \ln |f'(z)|}{\partial r} = \frac{\partial \text{Arg } f'(z)}{\partial \theta} = \text{Re} \left[z \frac{d \text{Ln } f'(z)}{dz} \right] = \text{Re} \left[z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right]$$

(véase t. I, fórmulas (1.3:9) y (1.3:10), cap. segundo), de (2.4:6) resulta:

$$\frac{\partial \text{Arg } f'(z)}{\partial \theta} \geq \frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2}. \quad (2.4:11)$$

Sea $\Gamma: w = f(re^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, la imagen de la circunferencia $\gamma: |z| = r$ en la transformación $w = f(z)$. Como la tangente a γ en el punto $z = re^{i\theta}$ forma con el eje real el ángulo $\theta + \frac{\pi}{2}$, la tangente a Γ en el punto correspondiente $f(re^{i\theta})$ formará con el eje real el ángulo $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + \text{Arg } f'(re^{i\theta})$ y el signo de la derivada $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 1 + \frac{\partial \text{Arg } f'(re^{i\theta})}{\partial \theta}$ determinará el carácter de variación del ángulo de inclinación de la tangente a Γ en el punto $f(re^{i\theta})$ al recorrer Γ en el sentido positivo (creciendo θ). En particular, el cumplimiento de la relación $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} > 0$ en un intervalo $\theta' < \theta < \theta''$ significa que el arco correspondiente de Γ tiene la concavidad dirigida hacia el punto $w = 0$ (o sea, es convexa por la parte del exterior a Γ), y el cumplimiento de la relación $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} < 0$ significa que este arco tiene dirigida su concavidad hacia el punto $w = 0$ (o sea, es cóncava desde fuera). Pero de la desigualdad (2.4:11) podemos enterarnos acerca del signo de la derivada $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 1 + \frac{\partial \text{Arg } f'(re^{i\theta})}{\partial \theta}$, pues

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \geq \frac{r^2 - 4r + 1}{1 - r^2} = \frac{(r - 2 + \sqrt{3})(r - 2 - \sqrt{3})}{1 - r^2}.$$

De aquí se deduce que $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} > 0$ para todos los valores de $\theta \in [0, 2\pi]$, si $r < 2 - \sqrt{3} = 0,2678\dots$ ($r > 0$), de modo que la imagen Γ de cada una de las circunferencias $|z| = r < 2 - \sqrt{3}$ es una curva convexa en cualquier transformación conforme de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Para la función $f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$ se tiene:

$$z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2(e^{i\alpha}z)^2 + 4e^{i\alpha}z}{1-(e^{i\alpha}z)^2};$$

esta expresión para $z = -re^{-i\alpha}$ toma los valores reales $\frac{2r^2-4r}{1-r^2}$, de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= 1 + \frac{\partial \operatorname{Arg} f'(z)}{\partial \theta} = 1 + \operatorname{Re} \left[z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] = \frac{r^2-4r+1}{1-r^2} = \\ &= \frac{(r-2+\sqrt{3})(r-2-\sqrt{3})}{1-r^2}. \end{aligned}$$

Evidentemente, estos valores de $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ son negativos si $r > 2 - \sqrt{3}$ ($r < 1$), es decir, las imágenes de las circunferencias $|z| = r > 2 - \sqrt{3}$ ($r < 1$) en la transformación $w = \frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$ ya no son curvas convexas.

Teorema 5. Una función

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

que es univalente en el círculo unidad, satisface a las desigualdades:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \quad (2.4:12)$$

En estas relaciones, los signos de igualdad pueden alcanzarse para $z \neq 0$ solamente para la función

$$f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}.$$

Demostración. Integrando ambos miembros de la desigualdad obtenida en el teorema 4

$$|f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

a lo largo del radio que une 0 con z , hallamos:

$$|f(z)| = \left| \int_0^z f'(z) dz \right| \leq \int_0^{|z|} |f'(z)| d|z| \leq \int_0^{|z|} \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} d|z| = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Esta es la segunda de las desigualdades pedidas.

Para obtener la primera de estas desigualdades, consideremos la imagen Γ de la circunferencia $|z| = r$ en la transformación $w = f(z)$. Γ es una curva cerrada de Jordan del plano w que contiene en su interior al origen de coordenadas. Si $R > 0$ es la distancia desde el punto $w = 0$ hasta la curva Γ , entonces en Γ tiene que haber al

menos un punto $w_1 = f(z_1)$ ($|z_1| = r$) tal, que $|f(z_1)| = R$. El segmento Δ de la recta que une los puntos 0 y $f(z_1)$ pertenece a la imagen del círculo unidad en la transformación $w = f(z)$; por esta razón, la preimagen δ de este segmento pertenece al círculo unidad. Para $|z| = r$ se tiene (aplicando la primera de las desigualdades establecidas en el teorema 4):

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq R = |f(z_1)| = \\ &= \int_{\Delta} |dw| = \int_{\delta} |f'(z)| |dz| = \int_{\delta} |f'(z)| \left| \frac{dz}{d|z|} \right| d|z| \geq \\ &\geq \int_0^{|z|} |f'(z)| d|z| \geq \int_0^{|z|} \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} d|z| = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}. \end{aligned}$$

Las desigualdades (2.4:12) quedan demostradas. Evidentemente, en ellas puede alcanzarse la igualdad para algún $z \neq 0$ solamente cuando esto tiene lugar en la desigualdad correspondiente (2.4:4) del teorema precedente.

En este caso, como ya sabemos, $f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$.

Teorema 6. *El área del recinto G , en el cual la función univalente*

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

transforma el círculo unidad, tiene el valor

$$S = \pi [1 + 2|a_2|^2 + \dots + n|a_n|^2 + \dots] \geq \pi. \quad (2.4:13)$$

Esta es igual a π solamente cuando $f(z) = z$.

Demstración. Sea Γ_r la imagen de la circunferencia $|z| = r$ ($r < 1$); en la transformación considerada Γ_r es una curva cerrada de Jordan cuya parte interior G_r pertenece al recinto G . Por esta razón, designando con S_r el área del recinto G_r , se tiene: $S_r \leq S$.

Cerciorémonos de que cualquier conjunto acotado y cerrado $F \subset G$ pertenece a G_r si $r > r(F)$, es decir, que los recintos G_r aproximan a G por el interior. Sea $\{r_n\}$ una sucesión de valores crecientes de radios, convergente hacia 1. Supongamos, en contra de lo que se afirma, que para cada n existe un punto $w_n \in F$ que no pertenece a G_{r_n} . La sucesión $\{w_n\}$ posee un punto de acumulación w_0 perteneciente a F y, por consiguiente, al recinto G . Su preimagen z_0 está situada en el círculo unidad, y junto con cierto entorno U_0 de la misma pertenece a todos los círculos $|z| < r_n$ para $n > N$. Por esta razón, $f(U_0)$ pertenece a todos los recintos G_{r_n} para $n > N$. Pero el punto w_0 pertenece a $f(U_0)$ junto con un entorno del mismo,

y en este último tienen que estar situados los puntos w_n con subíndices arbitrariamente grandes. De aquí se deduce que existen puntos w_n pertenecientes a los recintos correspondientes G_{r_n} , lo cual contradice a la definición de estos puntos. De la contradicción obtenida se deduce que el conjunto F está situado en uno de los recintos $G_{r_{n_0}}$ (y en todos los siguientes a éste). Si (como se hace ordinariamente) definimos el área S del recinto G (interior) como el extremo superior de las sumas de las áreas de los cuadrados que están comprendidos en el recinto G junto con sus contornos y que pertenecen a subdivisiones arbitrariamente pequeñas del plano en cuadrados, tendremos, de la propiedad demostrada del recinto G_r , que

$$\lim S_r \geq S.$$

En efecto, para cualquier conjunto finito de los cuadrados mencionados de una misma división se puede hallar un número $r_0 < 1$ tal, que para $r > r_0$ los recintos G_r contienen en el interior a estos cuadrados.

Confrontando las desigualdades obtenidas para S , resulta:

$$S = \lim_{r \rightarrow \infty} S_r.$$

Pero, para las áreas S_r se tienen las expresiones:

$$S_r = \iint_{|z| \leq r} \left| \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right| dx dy = \iint_{|z| \leq r} |f'(z)|^2 r dr d\theta$$

(puesto que, en virtud de las ecuaciones de D'Alembert-Euler,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = |f'(z)|^2).$$

Sustituyendo $f'(z)$ por su desarrollo en serie

$$f'(z) = f'(re^{i\theta}) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta},$$

hallamos:

$$\begin{aligned} S_r &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} \right] \times \\ &\quad \times \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} k \bar{a}_k r^{k-1} e^{-i(k-1)\theta} \right] r dr d\theta = \\ &= \int_0^r 2\pi \left[r + \sum_{k=2}^{\infty} k^2 |a_k|^2 r^{2k-1} \right] dr = \pi \left[r^2 + \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2 r^{2k} \right]. \end{aligned}$$

Cerciorémonos, finalmente, de que

$$\lim_{r \rightarrow 1} S_r = \pi \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2 \right].$$

Esta proposición se deduce del segundo teorema de Abel (t. 1, ap. 7.3, cap. tercero), aplicándolo a la serie de potencias:

$$\pi [z^2 + 2|a_2|^2 z^4 + \dots + n|a_n|^2 z^{2n} + \dots],$$

suponiendo que esta serie es convergente para $z=1$. Si ésta es divergente, es decir, si $\pi [1 + \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2] = \infty$, entonces para un

valor $A > 0$ arbitrariamente grande, se tiene: $\pi [1 + \sum_{k=2}^n k |a_k|^2] > A$ para $n > N(A)$; por lo tanto, también $\pi [r^2 + \sum_{k=2}^n k |a_k|^2 r^{2k}] > A$ para n fijo y para todos los valores de r suficientemente próximos a 1. De aquí que

$$S_r = \pi [r^2 + \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2 r^{2k}] > A$$

para todos los valores de r suficientemente próximos a 1, es decir, $\lim_{r \rightarrow 1} S_r = \infty$.

Por consiguiente, en todos los casos, el área finita o infinita del recinto G se expresa por la fórmula

$$S = \pi (1 + 2|a_2|^2 + \dots + n|a_n|^2 + \dots) \geq \pi.$$

En el caso de igualdad

$$S = \pi$$

tiene que ser:

$$a_2 = \dots = a_n = \dots = 0,$$

es decir,

$$f(z) = z.$$

Resumiendo, en las transformaciones conformes del círculo $|z| < 1$ mediante la función inivalente

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

en todos los casos resulta un recinto de área mayor que la del círculo; forma una excepción solamente el caso único de la transformación idéntica. Naturalmente, este resultado se extiende inmediatamente a las transformaciones conformes de un círculo con cualquier centro

y radio, suponiendo que la derivada de la función en el centro del círculo es igual a la unidad.

Sea G un recinto simplemente conexo arbitrario del plano finito cuya frontera contenga más de un punto, y sea $z = \varphi(w)$ una función que transforme conformemente G en un círculo K con el centro en el origen de coordenadas, de modo que sea $\varphi(w_0) = 0$ y $\varphi'(w_0) = 1$ ($w_0 \in G$); el radio de K , igual a R_{w_0} , es el radio de conformidad del recinto G respecto del punto w_0 (ap. 2.2). Designemos con d_{w_0} la distancia desde el punto w_0 hasta la frontera del recinto G . El área de la imagen del círculo $|w - w_0| < d_{w_0}$ tiene que ser, por una parte, no menor que el área $\pi d_{w_0}^2$ de este círculo, y por otra, no mayor que el área $\pi R_{w_0}^2$ de todo el círculo K . Por esta razón,

$$R_{w_0} \geq d_{w_0}.$$

Aplicando el teorema 3 a la transformación considerada, en cuyas condiciones se debe sustituir el círculo unidad por el círculo $|z| < R_{w_0}$ y el punto $w=0$ por el punto w_0 , hallaremos que el recinto G contiene un círculo con el centro en w_0 de radio $\frac{R_{w_0}}{4}$. Por lo tanto,

$$d_{w_0} \geq \frac{R_{w_0}}{4}.$$

En resumen, el radio de conformidad R_{w_0} está ligado con la distancia d_{w_0} por las desigualdades

$$4d_{w_0} \geq R_{w_0} \geq d_{w_0}.$$

En particular, R_{w_0} tiende a cero cuando d_{w_0} tiende a cero.

L e m a. Si $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$ es una función univalente en el círculo unidad, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{r}{1-r} \quad \text{si } r < 1. \quad (2.4:14)$$

D e m o s t r a c i ó n. Introduzcamos la función univalente impar $\chi(z)$ utilizada en la demostración del teorema 2:

$$\chi(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \dots$$

Esta función transforma conformemente cada círculo $|z| \leq r < 1$ en un recinto D_r de área

$$\sum_r = \pi [r^2 + 3|b_3|^2 r^6 - 5|b_5|^2 r^{10} + \dots]$$

(véase la demostración del teorema precedente).

Hagamos la notación: $\mu(r) = \max_{|z| \leq r} |\chi(z)|$. Entonces tendremos:

$$\pi [\mu(r)]^2 \geq \sum_r = \pi [r^2 + 3|b_3|^2 r^6 - 5|b_5|^2 r^{10} + \dots].$$

Pero

$$[\mu(r)]^2 = \max_{|z| \leq r} |\chi(z)|^2 = \max_{|z| \leq r} |f(z)|^2 = \max_{|z| \leq r^2} |f(z)| \leq \frac{r^2}{(1-r^2)^2}$$

(según el teorema 5), por lo cual

$$\pi [r^2 + 3|b_3|^2 r^6 + 5|b_5|^2 r^{10} + \dots] \leq \frac{\pi r^2}{(1-r^2)^2},$$

de donde

$$r + 3|b_3|^2 r^4 + 5|b_5|^2 r^8 + \dots \leq \frac{r}{(1-r^2)^2}$$

o bien, integrando desde 0 hasta $r < 1$:

$$r^2 + |b_3|^2 r^6 + |b_5|^2 r^{10} + \dots \leq \frac{r^2}{(1-r^2)^2}.$$

El primer miembro de esta relación es igual a la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\chi(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

(véase el t. I, ap. 5.3, cap. tercero). Se tiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\chi(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r^2 e^{2i\theta})| d\theta.$$

Sustituyendo en la última integral 2θ por θ' , resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r^2 e^{2i\theta})| d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} |f(r^2 e^{i\theta'})| d\theta'.$$

Pero, como $f(r^2 e^{i\theta'})$, considerada como función de θ' , es periódica, se tiene:

$$\int_0^{4\pi} |f(r^2 e^{i\theta'})| d\theta' = \int_0^{2\pi} |f(r^2 e^{i\theta'})| d\theta'.$$

De aquí que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\chi(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r^2 e^{i\theta'})| d\theta'.$$

Así, pues,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r^2 e^{i\theta'})| d\theta' \leq \frac{r^2}{1-r^2}.$$

Sustituyendo, finalmente, r^2 por r' , tendremos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r'e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{r'}{1-r'}, \quad 0 < r' < 1,$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema 7. Si

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

es una función univalente en el círculo unidad, entonces, para cualquier natural n se verifica la desigualdad

$$|a_n| < en.$$

Demostración. Se tiene:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}} \quad (r < 1).$$

De aquí, en virtud del lema:

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{r^n} \frac{r}{1-r} = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{1}{1-r}.$$

Haciendo aquí $r = 1 - \frac{1}{n}$, resulta:

$$|a_n| \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} \cdot n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot n < en,$$

como se quería demostrar.

Este resultado está muy lejos de ser definitivo. Para los coeficientes $|a_3|$ y $|a_4|$ se puede obtener una cota que ya no admite mayor precisión:

$$|a_3| \leq 3, \quad |a_4| \leq 4.$$

Para los demás coeficientes la mejor de las cotas hasta ahora conocidas fue obtenida por L. M. Milin; ésta es:

$$|a_n| < 1,243n.$$

Existe la hipótesis (L. Bieberbach) de que para todos los valores naturales de n se verifican las desigualdades:

$$|a_n| \leq n.$$

Si esto es cierto, entonces entre las funciones univalentes de la forma $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, la que posee los coeficientes

mayores en valor absoluto es la función

$$\frac{z}{(1 - e^{i\alpha_2} z)^2} = z + 2e^{i\alpha_2} z^2 + 3e^{2i\alpha_2} z^3 + \dots + ne^{(n-1)i\alpha_2} z^n + \dots$$

W. Hayman demostró que para cada función univalente $f(z)$, distinta de la expuesta, existe el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{n} = \alpha_f < 1$. Por esta razón, para cada función de éstas y para todos los valores naturales de n suficientemente grandes se verifican las desigualdades:

$$|a_n| \leq n \quad (n > N_f).$$

Para el estudio ulterior de la teoría de las funciones univalentes véase: G. M. Goluzin, Teoría geométrica de las funciones de variable compleja (Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966); J. A. Jenkins, Univalent functions and conformal mapping, Springer, Berlín, 1958 y W. K. Hayman, Multivalent Functions, Cambridge University Press, 1958.

2.5. Aquí demostraremos el teorema de Hilbert sobre la posibilidad de la transformación conforme de cualquier recinto múltiplemente conexo en un recinto canónico que se obtiene del plano excluyendo segmentos rectilíneos paralelos al eje real y, posiblemente, algunos puntos.*).

Lema 1. Sea G un recinto arbitrario que contenga un entorno $U_R: |z| > R$ del punto del infinito. Consideremos la familia Σ de todas las funciones analíticas y univalentes en $G \setminus \infty$ que posean en U_R un desarrollo de la forma:

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (2.5:1)$$

Entonces: a) la familia $\{f(z) - z, f(z) \in \Sigma\}$, es compacta en el recinto G y b) el conjunto de los coeficientes $\{a_1\}$ está acotado.

Demostración. Si $f(z) \in \Sigma$, entonces

$$f^*(\zeta) = \frac{1}{R} f(R\zeta) = \zeta + \frac{a_1}{R^2 \zeta} + \frac{a_2}{R^3 \zeta^2} + \dots$$

*). Para el estudio de la teoría de las transformaciones conformes de los recintos múltiplemente conexos, recomendamos al lector que consulte el artículo de M. V. Keldish, Transformaciones conformes de los recintos múltiplemente conexos en recintos canónicos (М. В. Келдыш, Конформные отображения многосвязных областей на канонические области, Успехи математических наук, т. VI (1939), стр. 90—119) y la monografía de G. M. Goluzin, Teoría geométrica de las funciones de variable compleja (Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966 (гл. V и VI)).

es univalente en el exterior del círculo unidad. Aplicando a ésta el teorema de las áreas (ap. 2.4), obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |a_n|^2}{R^{2n+2}} \leq 1 \quad \text{o bien} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |a_n|^2}{R^{2n}} \leq R^2 \quad (2.5:2)$$

por lo cual,

$$|a_1| \leq R^2. \quad (2.5:3)$$

Por otra parte, en la circunferencia $|z| = R' > R$:

$$\begin{aligned} |f(z) - z| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{R'^n} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |a_n|^2}{R^{2n}}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{n R'^{2n}} < \\ &< R \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{R'^{2n}}} = \frac{R^2}{\sqrt{R'^2 - R^2}} = R'' \quad (2.5:3') \end{aligned}$$

(se ha aplicado la conocida desigualdad de Buniakovski-Schwarz y la desigualdad (2.5:2)). De aquí que

$$|f(z)| < R' + R'' = R''', \quad |z| = R'. \quad (2.5:4)$$

Como $w = f(z) \in \Sigma$ es univalente en U_R y lleva el punto $z = \infty$ al punto $w = \infty$, la circunferencia $|z| = R'$ se transforma en una curva cerrada de Jordan $\Gamma_{R'}$ cuya parte exterior está contenida completamente en $f(U_R)$. Por esta razón, debido a (2.5:4), la circunferencia $|w| = R'''$ pertenece a $f(U_R)$ y los valores que toma $f(z)$ en la intersección del círculo $V_{R'}: |z| < R'$ con el recinto G , no pueden pertenecer al recinto $|w| > R'''$. En otras palabras, la familia $\{f(z)\}$ (y, por consiguiente, también $\{f(z) - z\}$) está uniformemente acotada en cada recinto $V_{R'} \cap G$. De (2.5:3') se deduce también que la familia $\{f(z) - z\}$ está uniformemente acotada en el interior de cada recinto $U_{R'}, R' > R$. Por lo tanto, según el teorema de Montel, la familia $\{f(z) - z\}$ es compacta en el recinto G . El lema queda demostrado.

De lo demostrado se deduce que, de cualquier sucesión $\{f_n(z)\} \subset \Sigma$ se puede extraer una sucesión parcial $\{f_{n_h}(z)\}$ tal, que $\{f_{n_h}(z) - z\}$ es uniformemente convergente en el interior de U_R y $\{f_{n_h}(z)\}$ es uniformemente convergente en cada conjunto cerrado y acotado de puntos del recinto G . Según el teorema de Hurwitz, la función límite

$$\varphi(z) = \lim_{n_h \rightarrow \infty} f_{n_h}(z)$$

es univalente en el recinto G . Además, en U_R ésta admite un desarrollo de la forma:

$$\varphi(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots$$

Por consiguiente, $\varphi(z) \in \Sigma$.

Lema 2. Si la función $f(z)$ es univalente en el exterior de un segmento $[-\lambda, \lambda]$ ($\lambda > 0$) y en el entorno de $z = \infty$ admite un desarrollo de la forma:

$$f(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots,$$

entonces $\operatorname{Re} b_1 \leq 0$; aquí se alcanza la igualdad solamente cuando $f(z) = z + b_0$.

Demostración. Sin restringir la generalidad se puede suponer que $\lambda = 2$ (se llega a este caso sustituyendo z por $\frac{\lambda}{2} z^*$ y $f(z)$ por $\frac{2}{\lambda} f\left(\frac{\lambda}{2} z^*\right) = f^*(z^*)$).

Hagamos $z = \zeta + \frac{1}{\zeta}$; entonces la función

$$\psi(\zeta) = f\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \zeta + b_0 + \frac{1+b_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots$$

será analítica y univalente en el exterior del círculo unidad. Aplicando a ella el teorema de las áreas, obtenemos:

$$|1 + b_1|^2 + \sum_2^{\infty} n |c_n|^2 \leq 1. \quad (2.5:5)$$

De aquí que

$$\begin{aligned} |1 + b_1|^2 &\leq 1, & |1 + b_1| &\leq 1, & (2.5:6) \\ |\operatorname{Re}(1 + b_1)| &\leq 1, & \operatorname{Re} b_1 &\leq 0. \end{aligned}$$

Si $\operatorname{Re} b_1 = 0$, entonces $b_1 = \beta i$, $|1 + b_1| = \sqrt{1 + \beta^2}$ y, debido a (2.5:6), $\beta = 0$, o sea, $b_1 = 0$. Por lo tanto, de (2.5:5) se deduce que

$$c_2 = c_3 = \dots = 0,$$

de donde

$$f\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \zeta - \frac{1}{\zeta} + b_0 \quad \text{y} \quad f(z) = z - b_0.$$

Teorema de Hilbert. Para todo recinto G que contenga al punto $z = \infty$, existe una transformación conforme $w = \varphi(z)$ en un recinto canónico D , cuyos continuos frontera que no degeneran en un punto, son todos segmentos rectilíneos paralelos al eje real. En un entorno del punto $z = \infty$ la función $\varphi(z)$ admite un desarrollo de la

forma:

$$\varphi(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots$$

D e m o s t r a c i ó n. Consideremos la familia Σ de todas las funciones $f(z)$ que son univalentes en el recinto G y admiten en el entorno $U_R: |z| > R$ del punto $z = \infty$ desarrollos de la forma:

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

En virtud del lema 1, la familia $\{f(z)\}$ es compacta: además, el conjunto $\{a_1\}$ está acotado; hagamos la notación

$$\sup_{f \in \Sigma} \operatorname{Re} a_1 = \alpha.$$

Razonando del mismo modo que en la demostración del teorema de Riemann (ap. 2.2), hallaremos una sucesión de funciones $\{f_n(z)\} \subset \Sigma$ que converge a una función $\varphi(z) \in \Sigma$ uniformemente en cada conjunto cerrado y acotado de puntos del recinto G ; además, su desarrollo en un entorno del punto $z = \infty$ tendrá la forma:

$$w = \varphi(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots, \quad (2.5:7)$$

donde

$$\operatorname{Re} \alpha_1 = \alpha. \quad (2.5:8)$$

Demostremos que el recinto $D = \varphi(G)$ del plano ampliado w satisface a las condiciones del teorema. Supongamos lo contrario, y sea distinto de un segmento rectilíneo paralelo al eje real uno de los continuos frontera δ no degenerados del recinto D . Consideremos el recinto simplemente conexo Δ que es el complemento de δ respecto del plano ampliado. Transformemos primero Δ en el recinto Δ_1 mediante $w_1 = w^{-1}$; en este caso, el homólogo de $w = \infty$ será $w_1 = 0$. Transformemos después Δ_1 , según el teorema de Riemann, en el círculo unidad $|t| < 1$ mediante $w_1 = \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots$ ($\beta_1 > 0$) y, finalmente, mediante $\zeta = \beta_1^{-1}(t + t^{-1})$ o $t = 2\beta_1^{-1} \times [\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\beta_1^2}]^{-1}$ transformemos el círculo unidad en el exterior del segmento $[-2\beta_1^{-1}, 2\beta_1^{-1}]$ del eje real. Como resultado, obtendremos la transformación de Δ en el exterior del último segmento, donde el homólogo de $w = \infty$ será $\zeta = \infty$. Esta transformación tiene la forma

$$\begin{aligned} w = w_1^{-1} &= (\beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots)^{-1} = \frac{1}{\beta_1 t} + c_0 + c_1 t + \dots \\ &\dots = \zeta + b_0 + b_1 \zeta^{-1} + b_2 \zeta^{-2} + \dots = \psi(\zeta), \end{aligned} \quad (2.5:9)$$

donde, en virtud del lema 2:

$$\operatorname{Re} b_1 < 0. \quad (2.5:10)$$

En efecto, suponiendo que $\operatorname{Re} b_1 = 0$, debido a este lema, tendríamos que $w \equiv \zeta + b_0$, o sea, en contra de la hipótesis, el continuo δ sería un segmento rectilíneo paralelo al eje real. Pero de (2.5:9) obtenemos:

$$\zeta = \psi^{-1}(w) = w - b_0 - \frac{b_1}{w} + \dots,$$

por lo cual, en virtud de (2.5:7):

$$\zeta = F(z) = \psi^{-1}[\varphi(z)] + b_0 = z + \frac{\alpha_1 - b_1}{z} + \dots \quad (2.5:11)$$

Es evidente que la función $F(z) \in \Sigma$. Pero, para ésta, debido a (2.5:8) y (2.5:10):

$$\operatorname{Re}(\alpha_1 - b_1) = \alpha - \operatorname{Re} b_1 > \alpha,$$

lo cual contradice a la definición del número α como el extremo superior. De esta contradicción se deduce que el teorema de Hilbert es justo.

§ 3. CORRESPONDENCIA DE LAS FRONTERAS. ESTRUCTURA DE LA FRONTERA DE UN RECINTO SIMPLEMENTE CONEXO

3.1. Consideremos una función arbitraria $z = \lambda(t)$, definida y continua en el semiintervalo $\alpha \leq t < \beta$, la cual satisface a la condición $\lambda(t') \neq \lambda(t'')$ para $t' \neq t''$.

Se dirá que una función tal define un **semiintervalo curvilíneo** γ . A los valores $z = \lambda(t)$ los llamaremos puntos del semiintervalo γ , al punto $z = \lambda(\alpha) = z_0$ lo llamaremos punto inicial, y al conjunto E_γ de los puntos de acumulación de todas las sucesiones posibles $z_n = \lambda(t_n)$, donde $t_n \rightarrow \beta$, lo llamaremos **conjunto límite** del semiintervalo curvilíneo γ . Dos semiintervalos curvilíneos γ y γ' : $z = \lambda(t)$, $\alpha \leq t < \beta$ y $z = \lambda'(t')$, $\alpha' \leq t' < \beta'$, se identificarán cuando, y sólo cuando, existe una función creciente y continua $t' = \mu(t)$ que transforma $[\alpha, \beta)$ en $[\alpha', \beta')$ y $\lambda(t)$ en $\lambda'(t')$.

Puede servir de ejemplo de semiintervalo curvilíneo cualquier curva de Jordan, de la cual se ha excluido su punto final z' . Para ella, el conjunto límite consta del punto único z' .

Evidentemente, todo semiintervalo, cuyo conjunto límite consta de un punto z' , puede convertirse en una curva de Jordan si se le une este punto, haciendo $\lambda(\beta) = z'$. A este tipo de semiintervalo curvilíneo lo llamaremos de **Jordan**, y al punto z' lo llamaremos extremo del semiintervalo de Jordan.

El semiintervalo curvilíneo γ :

$$z = t + i \operatorname{sen} \frac{1}{t} \quad (\alpha \leq t < 0)$$

(o sea, la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $x \in [\alpha, 0)$) representa un ejemplo de otro tipo. Para éste, el conjunto límite es el segmento del eje imaginario $-1 \leq y \leq 1$. Agregándole a γ obtenemos un continuo que, sin embargo, no es una curva continua.

Señalemos dos teoremas referentes a las transformaciones conformes de los recintos (por cierto, referentes también a cualquier transformación homeomorfa).

Teorema 1. *Si $\{z_n\}$ es una sucesión de puntos de un recinto G , cuyos puntos de acumulación están situados todos en la frontera Γ de este recinto, entonces todos los puntos de acumulación de la sucesión $\{w_n = f(z_n)\}$, donde $w = f(z)$ transforma conformemente G en un recinto D del plano w , están situados en la frontera Δ de este último recinto.*

Demostración. Como $w_n \in D$ ($n = 1, 2, \dots$), los puntos de acumulación de la sucesión $\{w_n\}$ tienen que pertenecer a \bar{D} . Supongamos que uno de ellos, w_0 , no está situado en Δ ; entonces $w_0 \in D$ y existe un entorno cerrado \bar{U}_0 del punto w_0 que pertenece a D . Su preimagen en el plano z representa un dominio $\bar{g}_0 \subset G$. Como \bar{U}_0 contiene un conjunto infinito de términos de la sucesión $\{w_n\}$, \bar{g}_0 tiene que contener un conjunto infinito de términos de la sucesión $\{z_n\}$ que son las preimágenes de los puntos w_n . Por esta razón, tienen que existir puntos de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ situados en \bar{g}_0 , es decir, situados en el interior del recinto G , lo cual contradice a la hipótesis del teorema. Con esto se termina la demostración.

Teorema 2. *Si γ es un semiintervalo curvilíneo de un recinto G , cuyo conjunto límite pertenece a la frontera Γ de este recinto, y $w = f(z)$ es una función que transforma conformemente el recinto G en un recinto $D = f(G)$, entonces $f(\gamma)$ es un semiintervalo curvilíneo del recinto D cuyo conjunto límite está situado en su frontera Δ .*

Demostración. Supongamos que γ se determina por la ecuación $z = \lambda(t)$, $\alpha \leq t < \beta$, donde $\lambda(t)$ es una función continua del parámetro real t que satisface a la condición $\lambda(t') \neq \lambda(t'')$ para $t' \neq t''$. Entonces para la imagen $f(\gamma)$ en la transformación conforme $w = f(z)$ obtenemos la ecuación $w = f[\lambda(t)]$, $\alpha \leq t < \beta$, donde, para $t' \neq t''$, se tiene $\lambda(t') \neq \lambda(t'')$ y, por consiguiente, $f[\lambda(t')] \neq f[\lambda(t'')]$; de aquí se deduce que $f(\gamma)$ es un semiintervalo curvilíneo del recinto $D = f(G)$. Para una sucesión arbitraria $\{t_n\}$ de valores t , convergente hacia β , la sucesión de los puntos correspondientes $\{z_n = \lambda(t_n)\}$, según la condición, tiene todos sus puntos de acumulación en Γ . Debido a esto, según el teorema 1, todos los

puntos de acumulación de la sucesión $\{w_n = f[\lambda(t_n)]\}$ tienen que estar situados en Δ , con lo cual se termina la demostración.

Como ya se ha señalado, en las proposiciones demostradas no hay nada específico para las transformaciones conformes. En la demostración solamente nos basábamos en el hecho de que la transformación conforme $w = f(z)$ es homeomorfa. Pasando a considerar unos teoremas más complicados que utilizan la conformidad, tendremos que examinar previamente dos lemas que son de interés particular.

3.2. L e m a 1. Sea $\gamma: z = \lambda(t), t \in [\alpha, \beta)$ un semiintervalo curvilíneo contenido en el círculo unidad, cuyo conjunto límite esté situado en la circunferencia unidad y conste de más de un punto. Si la función $w = f(z)$ es analítica y está acotada en valor absoluto en el círculo unidad, y tiende en γ hacia cierto límite c

$$\lim_{t \rightarrow \beta} f[\lambda(t)] = c,$$

entonces esta función es constante: $f(z) \equiv c$.

D e m o s t r a c i ó n. Demostraremos este lema por reducción a lo absurdo. Sea $f(z) - c \neq 0$; si $f(z) - c = \delta z^k + \dots$, donde $\delta \neq 0$, entonces $\varphi(z) = \frac{f(z) - c}{z^k} = \delta + \dots$ está acotada en valor absoluto en el círculo unidad*) y tiende en γ a cero, siendo su valor en el origen de coordenadas $\varphi(0) = \delta$ distinto de cero. Consideremos dos puntos a y b , pertenecientes al conjunto límite del semiintervalo γ , y sean $a'_n = \lambda(t'_n)$ y $b'_n = \lambda(\tau'_n)$ dos sucesiones de puntos en γ , convergentes hacia a y b ($\lim_{n \rightarrow \infty} t'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau'_n = \beta$). Pasando en caso de necesidad a sucesiones parciales, se puede suponer que $t'_1 < \tau'_1 < t'_2 < \dots < t'_n < \tau'_n < \dots$. Designemos con σ'_n los arcos de Jordan situados en γ que se determinan por las desigualdades $t'_n \leq t \leq \tau'_n$. Para cualquier $r, 0 < r < 1$, se puede indicar un $N(r)$ tal, que para $n > N(r)$ todos los arcos σ'_n van a estar situados en el anillo $r < |z| < 1$.

Sea σ' el arco más pequeño de los dos arcos de la circunferencia unidad con los extremos en a y b (en caso de que estos últimos sean iguales, se toma uno cualquiera de ellos. *Nota del T.*). Fijemos en éste un arco \widehat{AB} con los extremos distintos de a y b , y de longitud $\frac{\pi}{m}$,

*) Si $0 < |z| \leq r < 1$, entonces, según el principio del módulo máximo:

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{r^k} [\max_{|z|=r} |f(z)| + |c|] \leq \frac{M + c}{r^k},$$

donde $M = \sup |f(z)|$. Fijando z y pasando al límite cuando $r \rightarrow 1$, resulta

$$|\varphi(z)| \leq M + |c| \quad \text{para } |z| < 1.$$

donde m es un número natural mayor que la unidad, y tracemos los diámetros AOD y BOC (fig. 6). Para valores suficientemente grandes de $n > N'$ el punto a_n estará situado en el interior del recinto g' (AA_1C_1CaA), el punto b_n en el interior del recinto d' (BB_1D_1DbB) y el arco σ_n en el anillo $r < |z| < 1$. Demostremos que para cada valor de $n > N'$ en el arco σ_n existe un arco σ_n , uno de cuyos extremos está situado en el diámetro AD , y el otro, en el diámetro BC ; además, σ_n está completamente situado, a excepción de sus extremos, en uno de los recintos AA_1B_1B o CDD_1C_1 .

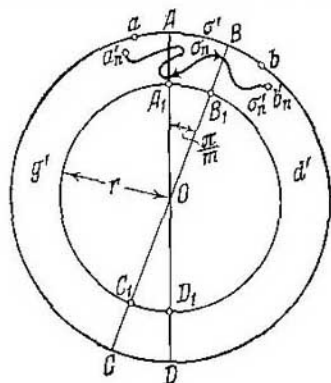


FIG. 6.

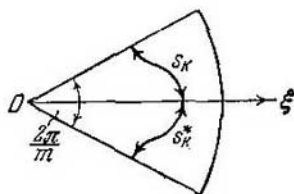


FIG. 7.

En efecto, cuando t crece desde t_n hasta τ_n , el punto $z = \lambda(t)$ recorre continuamente el arco σ_n desde el punto a_n hasta el punto b_n ; además, a_n y b_n pertenecen a unos recintos g' y d' tales, que \bar{g}' y \bar{d}' no tienen puntos comunes. Por lo tanto, tiene que existir un valor de t_n , $t_n < t_n < \tau_n$, tal que $a_n = \lambda(t_n)$ pertenece al recinto cerrado \bar{g}' , mientras que $\lambda(t)$ para $t_n < t \leq \tau_n$ ya no pertenece a \bar{g}' , y un valor τ_n , $t_n < \tau_n < \tau_n$, tal que $b_n = \lambda(\tau_n)$ pertenece a \bar{d}' , mientras que $\lambda(t)$ para $t_n \leq t < \tau_n$ todavía no pertenece a \bar{d}' . Evidentemente, los puntos a_n y b_n están situados en las fronteras de los recintos g' y d' , precisamente, en los segmentos de los diámetros A_1A o C_1C (para el punto a_n) y BB_1 o DD_1 (para el punto b_n). El arco de Jordan $\sigma_n: t_n \leq t \leq \tau_n$ con los extremos a_n y b_n pertenece a uno de los dos recintos AA_1B_1B o CDD_1C_1 y solamente sus extremos están situados en la frontera del recinto, mientras que todos los demás son interiores. Como n toma un conjunto infinito de valores, al menos uno de los dos últimos recintos — sea éste AA_1B_1B — contiene un conjunto infinito de arcos distintos $\sigma_n: \sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \dots, \sigma_{n_k}, \dots, n_1 < n_2 < \dots$

... $< n_h < \dots$. Hagamos la sustitución de la variable $\zeta = e^{i\theta}z$, de modo que uno de los diámetros AD o BC se transforme en el eje real del plano ζ y que la imagen del recinto AA_1B_1B pertenezca al primer cuadrante coordenado. Designaremos las imágenes de los arcos $\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \dots, \sigma_{n_h}, \dots$ mediante $s_1, s_2, \dots, s_h, \dots$. En la sustitución indicada la función $\varphi(z)$ se transforma en la función $\varphi(e^{-i\theta}\zeta) = \psi(\zeta)$, la cual es analítica y está acotada en el círculo unidad, satisfaciendo a las condiciones: $\psi(0) = \delta \neq 0$, $\lim_{\zeta \in s_h, h \rightarrow \infty} \psi(\zeta) = 0$. Haciendo la notación $\mu_h = \max_{\zeta \in s_h} |\psi(\zeta)|$, se puede escribir

la última condición en la forma:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mu_h = 0.$$

Si el desarrollo de Taylor de la función $\psi(\zeta)$ es

$$\psi(\zeta) = \delta + \delta_1 \zeta + \dots + \delta_n \zeta^n + \dots,$$

entonces introducimos otra función analítica más:

$$\psi^*(\zeta) = \bar{\delta} + \bar{\delta}_1 \zeta + \dots + \bar{\delta}_n \zeta^n + \dots$$

Evidentemente, en los puntos que son simétricos respecto del eje real, $\psi(\zeta)$ y $\psi^*(\zeta)$ toman valores conjugados. Por esta razón

$$\sup_{|\zeta| < 1} |\psi(\zeta)| = \sup_{|\zeta| < 1} |\psi^*(\zeta)| = M < \infty \quad \text{y} \quad \psi^*(0) = \overline{\psi(0)} \neq 0;$$

designando con s_h^* el arco que es simétrico a s_h respecto del eje real, tendremos también:

$$\max_{\zeta \in s_h} |\psi(\zeta)| = \max_{\zeta \in s_h^*} |\psi^*(\zeta)| = \mu_h.$$

Los arcos s_h y s_h^* tienen un punto único común situado en el eje real y conjuntamente forman un arco de Jordan S_h , que es simétrico respecto del eje real y une dos lados del ángulo $|\arg \varphi| < \frac{\pi}{m}$ (fig. 7). Para la función analítica $\chi(\zeta) = \psi(\zeta)\psi^*(\zeta)$ se tiene:

$$|\chi(\zeta)| \leq M^2 \quad \text{cuando} \quad |\zeta| < 1, \quad \chi(0) = \psi(0)\psi^*(0) = |\delta|^2 \neq 0$$

y

$$\max_{\zeta \in S_h} |\chi(\zeta)| \leq M\mu_h \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad h \rightarrow \infty.$$

Sometiendo al arco S_h a rotaciones de la forma

$$\zeta' = e^{i \frac{2\pi}{m} j} \zeta \quad (j = 1, 2, \dots, m-1),$$

se obtienen de él los arcos $S_h^1, \dots, S_h^{(m-1)}$, que junto con S_h forman una curva cerrada de Jordan Γ_h , la cual contiene en su interior

al origen de coordenadas y está situada ella misma en el círculo unidad. Si ζ es un punto arbitrario de la curva Γ_k , entonces todos los m puntos: $\zeta, e^{i\frac{2\pi}{m}}\zeta, \dots, e^{i\frac{2\pi(m-1)}{m}}\zeta$ también están situados en Γ_k y, además, al menos uno de ellos pertenece al arco S_k . Debido a esto, en el punto $\zeta \in \Gamma_k$ al menos uno de los m números

$$\chi(\zeta), \chi(e^{i\frac{2\pi}{m}}\zeta), \dots, \chi(e^{i\frac{2\pi(m-1)}{m}}\zeta)$$

será en valor absoluto no superior a $M\mu_k$, mientras que cada uno de los demás no superará a M^2 . Por consiguiente, para el producto

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \cdot \chi(e^{i\frac{2\pi}{m}}\zeta) \dots \chi(e^{i\frac{2\pi(m-1)}{m}}\zeta)$$

en cualquier punto $\zeta \in \Gamma_k$ se verificará la desigualdad

$$|F(\zeta)| \leq M\mu_k M^{2(m-1)},$$

y como la función $F(\zeta)$ es analítica, en el punto $\zeta=0$ también se tendrá:

$$|F(0)| = |\delta|^{2m} \leq \mu_k M^{2m-1}.$$

Finalmente, pasando aquí al límite para $k \rightarrow \infty$, obtenemos $\delta = 0$, lo cual contradice a la hipótesis hecha. Con esto se termina la demostración.

O b s e r v a c i ó n. De la demostración efectuada se ve que la proposición conserva su valor en las condiciones siguientes: sea $\{\gamma_n\}$ una sucesión de arcos de Jordan pertenecientes al círculo unidad, a excepción, posiblemente, de los puntos iniciales y finales, y tal que para cualquier sucesión de puntos $\{z_n\}$, $z_n \in \gamma_n$, todos los puntos de acumulación están situados en la circunferencia unidad; supondremos también que en γ_n se pueden hallar sendos pares de puntos a_n y b_n , tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Entonces, si una función $f(z)$, analítica y acotada en valor absoluto, satisface a la condición

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ z_n \in \gamma_n}} f(z_n) = c,$$

se tiene: $f(z) \equiv c$. Para cerciorarse de esto, es suficiente observar que en la sucesión de arcos $\{\gamma_n\}$ se puede construir una sucesión de arcos $\{\sigma_m\}$ exactamente iguales que los que se utilizaron en la demostración del lema 1.

L e m a 2. Sea g un recinto limitado por una curva de Jordan γ y perteneciente al círculo unidad conjuntamente con γ , a excepción del único punto frontera ζ , situado en la circunferencia $|z| = 1$. Vamos a considerar la curva γ como compuesta de dos semiintervalos

de Jordan

$$\gamma_1: z = \lambda_1(t), \quad \alpha_1 \leq t < \beta_1 \quad \text{y} \quad \gamma_2: z = \lambda_2(t), \quad \alpha_2 \leq t < \beta_2$$

con el origen común $\lambda_1(\alpha_1) = \lambda_2(\alpha_2)$ y el extremo común ξ , y del mismo punto ξ .

Si $f(z)$ es una función analítica y acotada en el círculo unidad, y tiende hacia unos límites determinados c_1 y c_2 en γ_1 y γ_2 :

$$\lim_{t \rightarrow \beta_1} f[\lambda_1(t)] = c_1, \quad \lim_{t \rightarrow \beta_2} f[\lambda_2(t)] = c_2,$$

entonces necesariamente $c_1 = c_2 = c$ y, además, $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \bar{g}}} f(z) = c$.

D e m o s t r a c i ó n. Examinemos primero el caso en que $c_1 = c_2 = c$, y demostremos la última parte de la tesis del lema: $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \bar{g}}} f(z) = c$. Evidentemente, podemos no examinar los puntos situados en la frontera del recinto, puesto que para ellos se cumple la relación $f(z) \rightarrow 0$ debido a la hipótesis hecha. Así, pues, sea

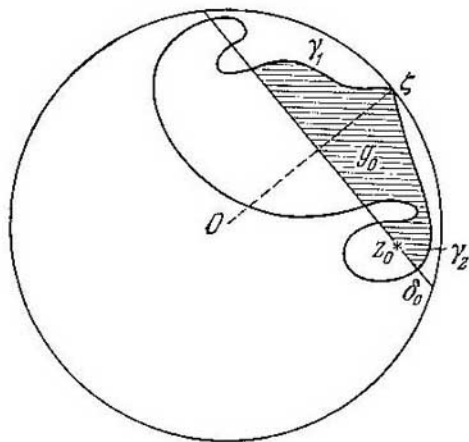


FIG. 8.

z_0 un punto interior del recinto g ; tracemos por él una cuerda δ_0 perpendicular al radio $O\xi$ (fig. 8). Esta cuerda dividirá al recinto g en subrecintos, de los cuales consideraremos solamente aquellos que están hacia un mismo lado de δ_0 que el punto ξ . Un recinto de ellos y solamente uno, g_0 , contiene en la frontera el punto z_0 . Si ξ no es un punto frontera para g_0 , entonces el dominio \bar{g}_0 está contenido en

el círculo unidad; en la fig. 8 está representado el caso en que el punto ζ pertenece a la frontera del recinto g_0 .

La frontera de g_0 consta solamente de las partes de los semi-intervalos curvilíneos γ_1 y γ_2 que están situados en el mismo lado de δ_0 en que está situado el punto ζ , y de los segmentos de la cuerda (que pueden degenerar en puntos). Como, según la hipótesis, $f(z)$ tiende a cero en γ_1 y γ_2 , para cualquier $\varepsilon > 0$ y para z_0 suficientemente próximo a ζ , los valores del módulo $|f(z)|$ en las partes de la frontera de g_0 que están situadas en γ_1 y γ_2 serán menores que ε .

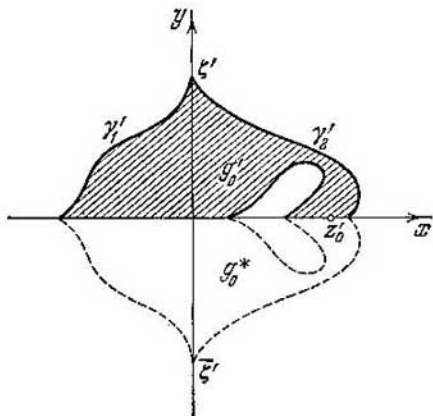


FIG. 9.

Hagamos la sustitución de la variable $z' = e^{i\theta}z + a$ (rotación y traslación), eligiendo θ y a de modo que la cuerda δ se transforme en un segmento del eje real, y el punto ζ ocupe la posición ζ' en la parte positiva del eje imaginario (fig. 9). Entonces el recinto g_0 se transformará en un recinto g'_0 situado en el semiplano superior, $z = 0$ se convertirá en el punto a de la parte negativa del eje imaginario, el círculo unidad $|z| < 1$ en el círculo $|z' - a| < 1$, γ_1 y γ_2 en γ'_1 y γ'_2 , y el punto z_0 en un punto z'_0 del eje real situado en la frontera de g'_0 . Designemos $f(z) = f(|z' - a| e^{-i\theta})$ mediante $\varphi(z')$. Esta función es analítica en el círculo $|z' - a| < 1$, está acotada en valor absoluto, satisface a la desigualdad $|\varphi(z')| < \varepsilon$ en los puntos frontera del recinto g'_0 situados en γ'_1 y γ'_2 , y tiende a cero cuando z' tiende a ζ' manteniéndose en γ'_1 o en γ'_2 . Si se hace

$$\varphi(z)' = \sum_0^{\infty} a_n (z' - a)^n,$$

entonces la función

$$\varphi^*(z') = \sum_0^{\infty} \bar{a}_n (z' - \bar{a})^n,$$

la cual toma en cada punto z' un valor conjugado con el valor $\varphi(\bar{z}')$:

$$\varphi^*(z') = \overline{\varphi(\bar{z}')},$$

será analítica en el círculo $|z' - \bar{a}| < 1$, estará acotada en valor absoluto y en los puntos z' situados debajo del eje real, que son puntos frontera del recinto g_0^* que es simétrico a g_0' respecto del eje real, satisface a las condiciones:

$$|\varphi^*(z')| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \lim_{z' \rightarrow \bar{z}'} \varphi^*(z') = 0.$$

Compongamos con los recintos g_0' y g_0^* un recinto G_0 , incluyendo en él todos los puntos de los intervalos del eje real que son fronteras de g_0' y g_0^* . El punto z_0' será interior para G_0 . Sea

$$\sup_{|z' - a| < 1} |\varphi(z')| = \sup_{|z| < 1} |f(z)| = M < \infty;$$

entonces también $\sup_{|z' - \bar{a}| < 1} |\varphi^*(z')| = M$, por consiguiente, la función $\varphi(z') \varphi^*(z')$, que es analítica en el recinto G_0 , satisface en el mismo a la desigualdad:

$$|\varphi(z') \varphi^*(z')| \leq M^2.$$

Si el punto ζ no está situado en la frontera del recinto g_0 , entonces $\bar{\zeta}'$ tampoco estará situado en la frontera del recinto g_0' , por consiguiente, \bar{g}_0' estará contenido en el círculo $|z' - a| < 1$ y \bar{g}_0^* en el círculo $|z' - \bar{a}| < 1$. Por esta razón, la función $\varphi(z') \varphi^*(z')$ será analítica y, por lo tanto, también continua en el dominio \bar{G}_0 . En la frontera del recinto G_0 ésta satisface a la desigualdad $|\varphi(z') \varphi^*(z')| \leq M\varepsilon$, de donde, en virtud del principio del módulo máximo, se tiene:

$$|\varphi(z_0') \varphi^*(z_0')| \leq M\varepsilon,$$

o bien, observando que $\varphi^*(z_0') = \overline{\varphi(\bar{z}_0')} = \overline{\varphi(z_0')}$ ($\bar{z}_0' = z_0'$, puesto que z_0' es número real):

$$|\varphi(z_0')|^2 = |f(z_0)|^2 \leq M\varepsilon.$$

Supongamos ahora que ζ está situado en la frontera del recinto g_0 ; entonces $\bar{\zeta}'$ también estará situado en la frontera de g_0' ; por lo tanto, los puntos frontera $\bar{\zeta}'$ y $\bar{\zeta}'$ del recinto G_0 no serán interiores

para los círculos $|z' - a| < 1$ y $|z' - \bar{a}| < 1$, de modo que no se puede afirmar que $\varphi(z') \varphi^*(z')$ es una función continua en el dominio \bar{G}_0 . Para reducir este caso al de una función continua en el dominio, formemos el producto

$$\psi(z') = \varphi(z') \varphi^*(z') (z' - \zeta')^\mu (z' - \bar{\zeta}')^\mu,$$

donde μ es un número positivo arbitrario y $(z' - \zeta')^\mu$ y $(z' - \bar{\zeta}')^\mu$ son unas ramas uniformes cualesquiera de las funciones analíticas correspondientes en el recinto G_0 . La función $\psi(z')$ es uniforme y analítica en el recinto G_0 y está acotada en valor absoluto $|\psi(z')| < M^2 2^\mu \cdot 2^\mu = 4^\mu M^2$. Además, resulta continua en el dominio \bar{G}_0 si se hace:

$$\psi(\zeta') = \lim_{z' \rightarrow \zeta'} \varphi(z') \varphi^*(z') (z' - \zeta')^\mu (z' - \bar{\zeta}')^\mu = 0 \quad \text{y} \quad \psi(\bar{\zeta}') = 0.$$

Como en la frontera del recinto G_0 la función satisface a la desigualdad

$$|\psi(z')| < M \cdot \varepsilon \cdot 2^\mu \cdot 2^\mu = 4^\mu M \cdot \varepsilon,$$

en virtud del principio del módulo máximo, esta desigualdad se satisface también en el punto $z'_0 \in G_0$:

$$|\psi(z'_0)| = |\varphi(z'_0)|^2 |z'_0 - \zeta'|^{2\mu} < 4^\mu M \varepsilon,$$

de donde, pasando al límite para $\mu \rightarrow 0$:

$$|\varphi(z'_0)|^2 \leq M \varepsilon \quad \text{o sea,} \quad |f(z_0)|^2 \leq M \varepsilon.$$

Resumiendo, en todos los casos se cumple la desigualdad

$$|f(z_0)|^2 \leq M \varepsilon$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ y z_0 suficientemente próximo a ζ . De aquí se deduce que

$$\lim_{z_0 \rightarrow \zeta} f(z_0) = 0.$$

No queda más que demostrar la primera parte del lema, o sea que de

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \gamma_1}} f(z) = c_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \gamma_2}} f(z) = c_2$$

se deduce que $c_1 = c_2$. Formemos el producto

$$F(z) = [f(z) - c_1] [f(z) - c_2].$$

Este satisface a las condiciones del teorema y, además,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \gamma_1}} F(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \gamma_2}} F(z) = 0.$$

Supongamos que $c_1 \neq c_2$, y sea $|c_1 - c_2| = \rho > 0$.

Tomemos un entorno U del punto ζ tan pequeño, que en el mismo se cumplan las desigualdades:

$$|F(z)| = |f(z) - c_1| |f(z) - c_2| < \frac{\rho^2}{4} \quad (z \in \bar{g}) \quad (3.2:1)$$

(esto es posible debido a la parte demostrada del lema),

$$|f(z) - c_1| < \frac{\rho}{2} \quad (z \in \gamma_1), \quad |f(z) - c_2| < \frac{\rho}{2} \quad (z \in \gamma_2). \quad (3.2:2)$$

La parte del recinto g que cae en U consta de recintos, de los cuales uno, g_0 , contiene en la frontera al punto ζ . Sean ζ_1 y ζ_2 dos puntos frontera del recinto g_0 situados en el interior de U , en γ_1 y γ_2 , respectivamente. Como en ellos se cumplen las desigualdades (3.2:2) (la primera para $z = \zeta_1$ y la segunda para $z = \zeta_2$), y como la función $f(z)$ es continua, se pueden señalar unos puntos z_1 y z_2 del recinto g_0 que están suficientemente próximos a ζ_1 y ζ_2 , respectivamente, y tales que se tiene:

$$|f(z_1) - c_1| < \frac{\rho}{2}, \quad |f(z_2) - c_2| < \frac{\rho}{2},$$

de donde

$$|f(z_2) - c_1| \geq |c_2 - c_1| - |f(z_2) - c_2| > \frac{\rho}{2}.$$

Unamos z_1 y z_2 por el interior de g_0 mediante una curva γ . La imagen $f(\gamma)$ de esta curva unirá los puntos $f(z_1)$ y $f(z_2)$, y como el primero de estos puntos está situado en el interior del círculo $|w - c_1| < \frac{\rho}{2}$, y el segundo fuera del mismo, en γ tiene que existir un punto z_0 , en el cual

$$|f(z_0) - c_1| = \frac{\rho}{2}$$

y, por consiguiente,

$$|f(z_0) - c_2| \geq |c_2 - c_1| - |f(z_0) - c_1| = \frac{\rho}{2}$$

Así, pues, hemos hallado un punto $z_0 \in g_0$ tal que

$$|f(z_0) - c_1| |f(z_0) - c_2| \geq \frac{\rho^2}{4}.$$

Pero esto contradice a la desigualdad (3.2:1). De aquí se deduce que la suposición hecha no es válida, y el lema queda completamente demostrado.

§ 3.3. Apliquemos lo expuesto anteriormente al estudio de la estructura de la frontera Γ de un recinto acotado G simplemente conexo y al problema de la correspondencia de las fronteras en las transformaciones conformes.

Vamos a examinar el conjunto E de todos los semiintervalos de Jordan γ que están contenidos en un recinto dado G y tales que sus extremos están situados en Γ . En el caso general no cualquier punto puede servir de extremo para los semiintervalos de E . En la fig. 10 está representado un recinto G_1 obtenido del cuadrado $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, excluyendo un conjunto infinito de semiintervalos rectilíneos de la forma $x = \frac{1}{2^n}$, $0 < y \leq \frac{3}{4}$, y $x = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{4} \leq y < 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Evidentemente, ninguno de los puntos frontera ζ situados en el eje imaginario puede ser extremo de un semiintervalo de Jordan situado en el recinto G_1 .

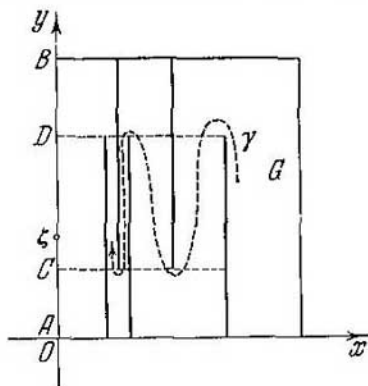


FIG. 10.

No obstante, es fácil observar que, para cualquier recinto G , el conjunto de aquellos puntos que son extremos de los semiintervalos $\gamma \in E$, es denso en todo sobre Γ . En efecto, supongamos que $\zeta_0 \in \Gamma$ y sea U_0 un entorno arbitrario del punto ζ_0 ; unamos el punto ζ_0 mediante un segmento rectilíneo δ con un punto cualquiera z_0 del recinto G , situado en este entorno. Entonces el punto del segmento δ que es punto frontera para G y que está más próximo a z_0 (tal punto puede ser el mismo punto ζ_0), sirve de extremo de un semiintervalo del conjunto E , precisamente del semiintervalo rectilíneo con el punto inicial en z_0 .

Respecto de cada semiintervalo γ del conjunto E diremos que él determina un punto alcanzable de la frontera Γ (respecto del recinto G). Dos semiintervalos $\gamma_1 \in E$ y $\gamma_2 \in E$ determinarán un mismo punto alcanzable cuando, y sólo cuando, se cumplan las dos condiciones siguientes:

- 1) γ_1 y γ_2 tienen un extremo común ζ ;

2) existe un semiintervalo $\gamma_3 \in E$ con el extremo ζ , que tiene puntos comunes tanto con γ_1 como con γ_2 en cualquier entorno del punto ζ .

En la fig. 11 está representado un recinto G_2 , cuya frontera consta de una circunferencia y de uno de sus radios. Los semiintervalos γ_1 y γ_2 representados aquí determinan un mismo punto alcanzable de la frontera, mientras que γ_1 y γ' o γ_2 y γ' determinan distintos puntos alcanzables de la frontera.

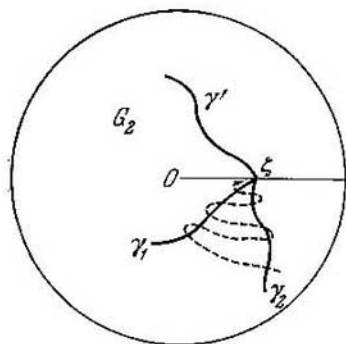


FIG. 11.

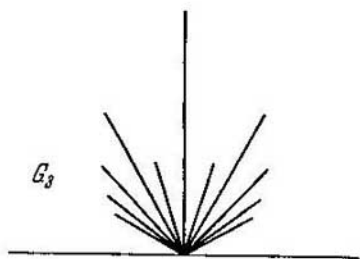


FIG. 12.

El extremo ζ del semiintervalo γ lo vamos a considerar como representante de un punto alcanzable. Es necesario tener en cuenta que un mismo punto ζ puede representar unos cuantos puntos alcanzables distintos de la frontera. Así, en la fig. 11 el punto ζ representa dos puntos alcanzables. En la fig. 12 está representado esquemáticamente un recinto G_3 que se obtiene del semiplano superior excluyendo un conjunto infinito de segmentos rectilíneos que parten del origen de coordenadas bajo todos los ángulos posibles de la forma $\frac{p}{q}\pi$ ($\frac{p}{q}$ son fracciones propias irreducibles), y donde las longitudes de los segmentos son iguales a $\frac{1}{q}$, respectivamente. En este ejemplo, el punto O representa un conjunto infinito no numerable de puntos alcanzables distintos, precisamente, un conjunto de la potencia del continuo.

En efecto, todo semiintervalo rectilíneo: $0 < |z| \leq 1$, $\arg z = \alpha\pi$, donde $0 < \alpha < 1$, y α es un número irracional, determina un punto alcanzable, representado por el punto O . A distintos valores de α corresponden, evidentemente, distintos puntos alcanzables.

Veamos cómo se transforman los semiintervalos de Jordan del conjunto E al hacer una transformación conforme del recinto G en un círculo (para precisar, en el círculo unidad).

T e o r e m a 1. *En la transformación conforme $w = f(z)$ de un recinto G en el círculo unidad K , todos los semiintervalos de Jordan del conjunto E que determinan un mismo punto alcanzable de la frontera Γ , se transforman en semiintervalos de Jordan que están contenidos en el círculo unidad K y poseen un extremo común σ situado en la circunferencia unidad.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que el semiintervalo $\gamma \in E$ con el extremo en el punto $\zeta \in \Gamma$, determina algún punto alcanzable de la frontera Γ . Según el teorema 2, ap. 3.1, $\delta = f(\gamma)$ es un semiintervalo curvilíneo situado en el círculo unidad, además, todos los puntos de acumulación de este semiintervalo δ están situados en la circunferencia unidad. Si se supone que δ no es un semiintervalo de Jordan, entonces éste tiene que tener al menos dos puntos de acumulación en la circunferencia. Pero entonces a él y a la función $z = f^{-1}(w)$, que es la inversa de la función $w = f(z)$, se les puede aplicar el lema 1, ap. 3.2. Precisando, como

$$\lim_{\delta} f^{-1}(w) = \zeta,$$

según el lema indicado tiene que ser $f^{-1}(w) \equiv \zeta$, lo cual es imposible.

Así, pues, δ es un semiintervalo de Jordan, cuyo extremo σ está situado en la circunferencia unidad.

Supongamos que $\gamma_1 \in E$ y $\gamma_2 \in E$ determinan un mismo punto alcanzable. Designemos los extremos de los semiintervalos $\delta_1 = f(\gamma_1)$ y $\delta_2 = f(\gamma_2)$ mediante σ_1 y σ_2 . En virtud de la definición de punto alcanzable, existe un semiintervalo $\gamma_3 \in E$ que tiene un conjunto infinito de puntos comunes con γ_1 y γ_2 en cualquier entorno de su extremo común. Su imagen $\delta_3 = f(\gamma_3)$ tiene que ser un semiintervalo de Jordan con un conjunto infinito de puntos comunes con δ_1 y δ_2 ; además, los puntos σ_1 y σ_2 serán puntos de acumulación para ellos (véase el teorema 1, ap. 3.1) y, por consiguiente, serán puntos de acumulación del semiintervalo de Jordan δ_3 . De aquí se deduce que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, con lo que se termina la demostración.

En virtud de este teorema, en la transformación conforme de un recinto G en un círculo, a cada punto alcanzable de la frontera del recinto G le corresponde un punto σ de la circunferencia.

T e o r e m a 2. *En la transformación conforme $w = f(z)$ de un recinto G en un círculo, a distintos puntos alcanzables de la frontera Γ del recinto G les corresponden distintos puntos de la circunferencia.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $\gamma_1 \in E$ y $\gamma_2 \in E$, con los extremos ζ_1 y ζ_2 , determinan dos puntos alcanzables distintos de la

frontera Γ . Designemos con σ_1 y σ_2 los extremos de los semiintervalos $\delta_1 = f(\gamma_1)$ y $\delta_2 = f(\gamma_2)$. Supongamos, en contra de la tesis del teorema, que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Entonces son posibles dos casos:

a) δ_1 y δ_2 tienen un conjunto infinito de puntos comunes en cualquier entorno del punto σ . Entonces γ_1 y γ_2 tienen que tener un conjunto infinito de puntos comunes con los puntos de acumulación en Γ (véase el teorema 1, ap. 3.1). De aquí se deduce que ellos tienen un extremo común y que determinan un mismo punto alcanzable de la frontera Γ . Pero esto contradice a la hipótesis del teorema.

b) δ_1 y δ_2 tienen solamente un número finito de puntos comunes en cierto entorno del punto σ . Despreciando algunas partes iniciales de los semiintervalos δ_1 y δ_2 , obtendremos unos semiintervalos de Jordan δ'_1 y δ'_2 sin puntos comunes y con el mismo extremo común σ . Las preimágenes de los semiintervalos δ'_1 y δ'_2 en el recinto G serán los semiintervalos de Jordan γ'_1 y γ'_2 que se obtienen de γ_1 y γ_2 despreciando algunas de sus partes iniciales.

Evidentemente, γ'_1 y γ'_2 determinan los mismos puntos alcanzables de la frontera Γ que γ_1 y γ_2 . Teniendo presente la aplicación del lema 2, ap. 3.2, unamos los puntos $w'_1 \in \delta'_1$ y $w'_2 \in \delta'_2$ con un arco de Jordan δ'_0 perteneciente al círculo. Recorriendo δ'_0 desde w'_1 hasta w'_2 , despreciemos su parte inicial desde w'_1 hasta el último punto w_1 de intersección con δ'_1 y la parte final desde el primer punto w_2 de intersección con δ'_2 hasta w'_2 ; se obtiene un arco de Jordan $\tilde{\delta}_0$ que une $w_1 \in \delta_1$ con $w_2 \in \delta_2$ y que no tiene otros puntos comunes con δ_1 y δ_2 . Despreciemos también las partes iniciales de los semiintervalos δ_1 y δ_2 hasta los puntos w_1 y w_2 , respectivamente. Resultan unos semiintervalos de Jordan $\tilde{\delta}_1$ y $\tilde{\delta}_2$, los cuales junto con su extremo común σ y el arco $\tilde{\delta}_0$ forman una curva cerrada de Jordan que encierra un subrecinto g del círculo unidad. Debido a la construcción, las preimágenes de los semiintervalos de Jordan $\tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1$ y $\tilde{\delta}_2$ en el recinto G son también semiintervalos de Jordan $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ con los extremos ζ_1 y ζ_2 , los cuales determinan los mismos puntos alcanzables que los semiintervalos iniciales γ_1 y γ_2 . Para la función $z = f^{-1}(w)$ se tiene:

$$\lim_{\tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1} f^{-1}(w) = \zeta_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\tilde{\delta}_2} f^{-1}(w) = \zeta_2.$$

Según el lema 2, ap. 3.2, de aquí se deduce que $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, o sea, $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ tienen un extremo común.

Construyamos en el dominio \bar{g} un arco de Jordan $\tilde{\delta}_3$ con el extremo en σ y que tenga en cualquier entorno del punto σ un conjunto infinito de puntos comunes con $\tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1$ y $\tilde{\delta}_2$. Este puede formarse con arcos de circunferencias concéntricas con el centro en σ y de

radios ε_n , $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ y con arcos, pertenecientes alternativamente a $\tilde{\delta}_1$ y $\tilde{\delta}_2$, que unen puntos de dos circunferencias vecinas. (Los detalles de la construcción los dejamos a cuenta del lector; véase la fig. 13, donde las partes del semiintervalo $\tilde{\delta}_3$ están representadas por líneas de trazos.) La función $z = f^{-1}(w)$ transforma $\tilde{\delta}_3$ en un semiintervalo curvilíneo $\tilde{\gamma}_3$, situado en el recinto G , con los

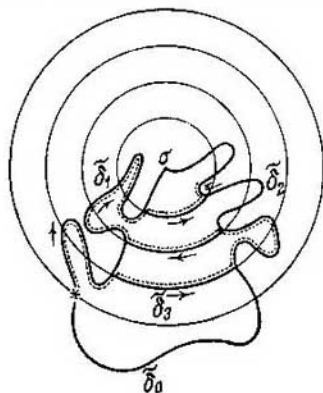


FIG. 13.

puntos de acumulación en Γ (teorema 2, ap. 3.1). En virtud del lema 2, ap. 3.2, el punto z que describe $\tilde{\gamma}_3$ tiene que tender hacia el límite $\zeta \in \Gamma$. Por ello $\tilde{\gamma}_3$ es un semiintervalo de Jordan con el extremo ζ . Además, $\tilde{\gamma}_3$ tiene que tener un conjunto infinito de puntos comunes con $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ en cualquier entorno del punto ζ . De aquí se deduce que $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ determinan un mismo punto alcanzable de la frontera Γ , lo cual contradice a la condición. Con esto se termina la demostración.

Así, pues, en la transformación conforme de un recinto G en un círculo, el conjunto de los puntos alcanzables de la frontera de este recinto se transforma en un conjunto e de puntos de la circunferencia unidad; además, la correspondencia entre los puntos alcanzables y los puntos del conjunto e es biunívoca. En particular, en el caso representado en la fig. 11, a los dos puntos alcanzables representados por ζ en la transformación conforme del recinto G_2 en un círculo les tienen que corresponder dos puntos distintos de la circunferencia, y en el caso representado en la fig. 12, a los puntos alcanzables representados por O les tienen que corresponder un conjunto infi-

nito de puntos distintos de la circunferencia (que posee la potencia del continuo).

Teorema 3. *El conjunto e de las imágenes de los puntos alcanzables es denso en todo sobre la circunferencia.*

Demostración. Sea $\{w_n\}$ una sucesión de puntos de la circunferencia unidad, convergente hacia un punto w_0 , $|w_0| = 1$, y sea $z_n = f^{-1}(w_n)$ la sucesión de los puntos que les corresponden en el recinto G . Según el teorema 1, ap. 3.1, todos los puntos de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ pertenecen a Γ . Elijamos en $\{z_n\}$

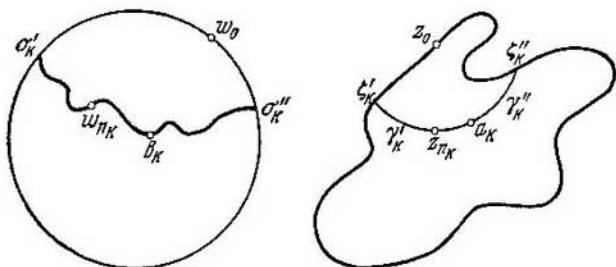


FIG. 14.

una sucesión parcial $\{z_{n_k}\}$ que converja hacia un punto $z_0 \in \Gamma$. Además, exigiremos que las distancias $|z_{n_k} - z_0|$ sean decrecientes. La sucesión $\{w_{n_k}\}$ de las imágenes de los puntos $\{z_{n_k}\}$ converge como anteriormente hacia el punto w_0 . Tracemos por los puntos z_{n_k} unos arcos de circunferencias con centro en z_0 y prolonguemos cada uno de ellos a ambos lados hasta los primeros puntos ζ'_k y ζ''_k de encuentro con Γ . Tal arco consta de un par de semiintervalos de Jordan γ'_k y γ''_k con origen común z_{n_k} y con los extremos ζ'_k y ζ''_k (fig. 14). Según el teorema 1, las imágenes de estos semiintervalos son también unos semiintervalos de Jordan δ'_k y δ''_k con el origen común w_{n_k} y con los extremos σ'_k y σ''_k situados en la circunferencia unidad.

Evidentemente, σ'_k y σ''_k son imágenes de puntos alcanzables, determinados por los semiintervalos γ'_k y γ''_k . Como el punto de acumulación de cualquier sucesión $\{a_h\}$, $a_h \in \gamma'_h + \gamma''_h$ es $z_0 \in \Gamma$, los puntos de acumulación de cualquier sucesión $\{b_h\}$, $b_h \in \delta'_h + \delta''_h$ están situados en la circunferencia unidad. Pero la sucesión $\{w_{n_k}\}$, $w_{n_k} \in \delta'_k + \delta''_k$ converge hacia el punto w_0 ; por ello, cualquier sucesión $\{b_h\}$, $b_h \in \delta'_h + \delta''_h$ tiene que converger hacia el mismo punto. En caso contrario, en virtud de la observación al lema 1, ap. 3.2,

deduciríamos de la relación $\lim_{h \rightarrow \infty} f(b_h) = z_0$, que $f^{-1}(w) \equiv z_0$. De aquí que las sucesiones $\{\sigma'_h\}$ y $\{\sigma''_h\}$ de los extremos de los semiintervalos δ'_h y δ''_h también convergen hacia w_0 , o sea, w_0 — que es un punto arbitrario de la circunferencia unidad — es un punto de acumulación para las imágenes de los puntos alcanzables de la frontera Γ . Con esto se termina la demostración.

3.4. En este apartado introduciremos el concepto de elementos frontera de un recinto simplemente conexo (o extremos simples, según la terminología de Carathéodory). Sean γ_1 y γ_2 dos semiintervalos de Jordan que determinan dos puntos alcanzables distintos de la frontera Γ de un recinto (acotado) G simplemente conexo. Es evidente que el conjunto de los puntos que son comunes a γ_1 y γ_2 no puede tener puntos de acumulación en Γ . Suponiendo lo contrario, obtendríamos: 1) que γ_1 y γ_2 tienen un extremo común ξ , y 2) que en cualquier entorno del punto ξ tiene que haber puntos de intersección de γ_1 y γ_2 . Pero entonces, mediante arcos, tomados alternativamente en γ_1 y γ_2 , se podría construir un semiintervalo de Jordan γ_3 , perteneciente a G y con puntos comunes con γ_1 y γ_2 en cualquier entorno del punto ξ , lo cual es imposible (debido a que γ_1 y γ_2 determinan puntos alcanzables distintos). Por esta razón, despreciando en caso de necesidad algunos arcos iniciales de los semiintervalos γ_1 y γ_2 , podemos suponer a continuación que estos semiintervalos no tienen puntos comunes (a excepción, posiblemente, del punto final común). Unamos sus puntos iniciales z_1 y z_2 por el interior de G mediante un arco de Jordan γ . Si z'_1 es el último punto del semiintervalo γ_1 que es común con γ , entonces despreciamos las partes de los arcos de γ_1 y γ que preceden al punto z'_1 . Del mismo modo, si z'_2 es el primer punto del semiintervalo γ_2 que es común con γ , entonces despreciamos la parte del semiintervalo γ_2 que precede a z'_2 y la parte del arco γ que sigue después de z'_2 . Como resultado, obtendremos dos semiintervalos de Jordan γ'_1 y γ'_2 que determinan los mismos puntos alcanzables que γ_1 y γ_2 , y también un arco de Jordan γ' que une el punto inicial del semiintervalo γ'_1 con el punto inicial del semiintervalo γ'_2 ; además, $\gamma'_1 + \gamma' + \gamma'_2$ representará un intervalo de Jordan $\tilde{\gamma}$ perteneciente al recinto G . Uniéndole los extremos, resulta un arco de Jordan con los extremos en Γ . Como resultado de la transformación conforme del recinto G en un círculo, γ'_1 y γ'_2 se transformarán en semiintervalos de Jordan δ'_1 y δ'_2 con extremos distintos en la circunferencia (estos extremos serán imágenes de los puntos alcanzables correspondientes), y el arco γ' en cierto arco δ' . De esto se deduce que la imagen del intervalo de Jordan $\tilde{\gamma}$ será también un intervalo de Jordan $\tilde{\delta}$ con extremos distintos en la circunferencia unidad. Evidentemente, sus extremos dividen a la circunferencia en dos

arcos: Σ_1 y Σ_2 ; junto con $\tilde{\delta}$ éstos forman dos curvas cerradas de Jordan, cuyas partes interiores Δ_1 y Δ_2 pertenecen al círculo unidad y representan aquel par de recintos en los cuales $\tilde{\delta}$ divide el círculo unidad.

Las preimágenes de los recintos Δ_1 y Δ_2 en el recinto G son dos recintos simplemente conexos g_1 y g_2 , en los cuales $\tilde{\gamma}$ divide a G . Si γ_3 es un semiintervalo de Jordan del recinto G , que determina un punto alcanzable de la frontera Γ , distinto de los puntos determinados por los semiintervalos γ_1 y γ_2 , entonces, despreciando su parte inicial, se puede suponer que él no tiene puntos comunes con $\tilde{\gamma}$, por lo cual está situado en g_1 o en g_2 y determina un punto alcanzable de la frontera de uno de estos recintos.

Por consiguiente, todos los puntos alcanzables de la frontera Γ del recinto G , a excepción de dos, determinados por los semiintervalos γ_1 y γ_2 , se dividen en dos clases, los cuales se pueden considerar como los puntos alcanzables de las fronteras de los recintos g_1 y g_2 , respectivamente. En la transformación conforme del recinto G en un círculo, a los puntos alcanzables de la primera clase les corresponden puntos del arco Σ_1 , y a los de la segunda clase, puntos del arco Σ_2 . Los últimos arcos se determinan completamente por sus extremos y, por lo tanto, por dos puntos alcanzables dados de la frontera Γ ; por esta razón, la división de todo el conjunto de puntos alcanzables en clases, caracterizada anteriormente, se determina completamente por dos puntos distintos dados de este conjunto y no depende de los semiintervalos de Jordan γ_1 y γ_2 que se utilicen para esto ni del arco de Jordan γ con que se unan sus puntos iniciales.

A las clases H_1 y H_2 que se determinan por los puntos alcanzables η_1 y η_2 , las llamaremos intervalos complementarios entre sí del conjunto de todos los puntos alcanzables de la frontera Γ , a los puntos η_1 y η_2 los llamaremos extremos de los intervalos H_1 y H_2 , y a los recintos g_1 y g_2 , a cuyas fronteras pertenecen H_1 y H_2 , respectivamente, los llamaremos recintos adyacentes a H_1 y H_2 . De lo expuesto se deduce que en la transformación conforme $w = f(z)$, a cada par de intervalos complementarios entre sí H_1 y H_2 les corresponden un par de arcos complementarios entre sí Σ_1 y Σ_2 de la circunferencia, y a los recintos g_1 y g_2 adyacentes y H_1 y H_2 les corresponden los recintos Δ_1 y Δ_2 adyacentes a Σ_1 y Σ_2 . Consideremos ahora un sistema de intervalos encajados de puntos alcanzables $\{H^{(n)}\}$. Supondremos que $H^{(n+1)} \subset H^{(n)}$, que los extremos del intervalo $H^{(n+1)}$ son distintos de los extremos del intervalo $H^{(n)}$ y que no existen dos puntos alcanzables distintos pertenecientes a todos los inter-

valos del sistema. En la circunferencia unidad al sistema $\{H^{(n)}\}$ le va a corresponder en la transformación conforme un sistema de arcos encajados $\{\Sigma^{(m)}\}$.

Debido a las hipótesis hechas, este sistema va a ceñirse en el sentido ordinario de la palabra hacia un punto w_0 de la circunferencia (si existiese un arco entero que estuviese contenido en cada uno de los $\Sigma^{(m)}$, entonces existiría también un conjunto infinito de puntos alcanzables que serían comunes a todos los $H^{(n)}$). Si w_0 es la imagen de algún punto alcanzable de la frontera Γ , entonces los intervalos $\{H^{(n)}\}$ tienen un punto alcanzable común único. Pero w_0 puede no ser la imagen de un punto alcanzable; en este caso no existe ningún punto alcanzable que sea común para todos los $H^{(n)}$.

Respecto de cada sistema de intervalos encajados $\{H^{(n)}\}$ diremos que éste determina un elemento frontera del recinto G . El punto w_0 se considerará como la imagen del elemento frontera en la transformación $w = f(z)$. Dos sistemas $\{H_1^{(n)}\}$ y $\{H_2^{(n)}\}$ determinan un mismo elemento frontera cuando, y sólo cuando, cada intervalo $H_1^{(m)}$ contiene todos los intervalos $H_2^{(n)}$, comenzando desde uno de ellos en adelante, y cada intervalo $H_2^{(n)}$ contiene todos los intervalos $H_1^{(m)}$, comenzando desde uno de ellos en adelante. Es obvio que en estas condiciones se puede conservar solamente una parte, exigiendo, por ejemplo, que $H_2^{(n)} \subset H_1^{(m)}$ para $n > N(m)$ ($m = 1, 2, \dots$). En efecto, en este caso cada uno de los arcos $\Sigma_1^{(m)}$ de la circunferencia unidad, correspondiente al intervalo $H_1^{(m)}$, contendrá todos los arcos $\Sigma_2^{(n)}$, correspondientes a $H_2^{(n)}$ para $n > N(m)$. Por consiguiente, los sistemas de arcos $\{\Sigma_1^{(m)}\}$ y $\{\Sigma_2^{(n)}\}$ van a ceñirse hacia un mismo punto w_0 de la circunferencia unidad, situado dentro de cualquiera de estos arcos. Por ello, $\Sigma_2^{(n)}$ va a contener a $\Sigma_1^{(m)}$ para todos $m > M(n)$, y, por consiguiente, $H_2^{(n)}$ va a contener a $H_1^{(m)}$ para todos $m > M(n)$.

De este razonamiento se ve que la condición de identidad de dos elementos frontera, determinados por los sistemas de intervalos $\{H_1^{(m)}\}$ y $\{H_2^{(n)}\}$, es equivalente a la condición de la coincidencia de los puntos de la circunferencia hacia los que se ciñen los sistemas de arcos $\{\Sigma_1^{(m)}\}$ y $\{\Sigma_2^{(n)}\}$ que representan a estos intervalos.

Sea η un elemento frontera del recinto G , dado por un sistema de intervalos $\{H^{(n)}\}$. Construyamos para cada $H^{(n)}$ un recinto $g^{(n)}$ que esté contenido en G y sea adyacente a $H^{(n)}$. Exijamos que se cumplan las dos condiciones siguientes: 1) $g^{(n+1)} \subset g^{(n)}$ y 2) no existe ningún punto del recinto G que sea común para todos los recintos cerrados $\bar{g}^{(n)}$. A una sucesión tal la llamaremos *c a d e n a*

de recintos que conduce hacia η . Para convencerse de la posibilidad de esta construcción, lo más fácil es pasar al círculo unidad mediante una transformación conforme $w = f(z)$.

¶ Sea $\{\Sigma^{(n)}\}$ un sistema de arcos de la circunferencia unidad, correspondiente a los intervalos $\{H^{(n)}\}$, y sean $\delta_1^{(n)}$ y $\delta_2^{(n)}$ los semiintervalos de Jordan que son imágenes de los semiintervalos $\gamma_1^{(n)}$ y $\gamma_2^{(n)}$ que determinan los extremos de los intervalos $H^{(n)}$. Construyamos un recinto $\Delta^{(n)}$ que sea adyacente al arco $\Sigma^{(n)}$ y que esté limitado por el arco $\Sigma^{(n)}$, por un arco de una circunferencia

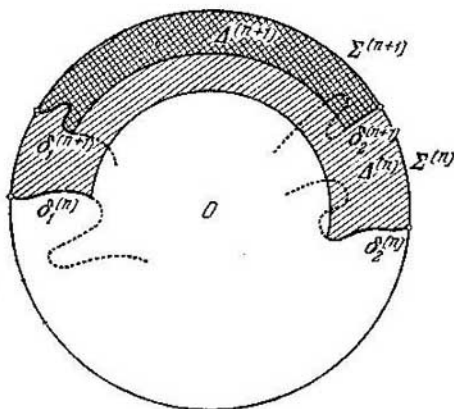


FIG. 15.

concéntrica $|w| = r_n < 1$ y por las dos partes de los semiintervalos $\delta_1^{(n)}$ y $\delta_2^{(n)}$ que se obtienen al despreciar algunos arcos iniciales de estos semiintervalos (fig. 15). Al valor r_n lo someteremos a la condición $r_n > 1 - \frac{1}{n}$. Como el arco $\Sigma^{(n+1)}$ está situado en el arco $\Sigma^{(n)}$ y los extremos de los arcos $\Sigma^{(n+1)}$ son distintos de los extremos de los arcos $\Sigma^{(n)}$, los semiintervalos $\delta_1^{(n+1)}$ y $\delta_2^{(n+1)}$ estarán contenidos en el recinto $\Delta^{(n)}$, por lo menos si se desprecian algunas de sus partes iniciales. Eligiendo $r_{n+1} > r_n$ y $r_{n+1} > 1 - \frac{1}{n+1}$ de modo que la circunferencia $|w| = r_{n+1}$ tenga puntos comunes con $\delta_1^{(n+1)}$ y $\delta_2^{(n+1)}$, construyamos un recinto $\Delta^{(n+1)}$ de un modo semejante al que se empleó al construir el recinto $\Delta^{(n)}$. Evidentemente, tendremos: $\Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)}$. Comenzando desde el recinto $\Delta^{(1)}$ se puede construir de esta manera una sucesión de recintos $\{\Delta^{(n)}\}$, adyacentes

a $\Sigma^{(n)}$, y tales que $\Delta^{(n+1)}$ esté contenido en el anillo $1 - \frac{1}{n} < |w| < 1$ y en el recinto $\Delta^{(n)}$ ($n=1, 2, \dots$). Las preimágenes de $\Delta^{(n)}$ en el recinto G serán los recintos $g^{(n)}$, adyacentes a los intervalos $H^{(n)}$, y tales que $g^{(n+1)} \subset g^{(n)}$. En este caso, los dominios $\bar{g}^{(n)}$ no tienen ningún punto común que esté situado en el recinto G ; esto se deduce de que sus imágenes $\bar{\Delta}^{(n)} = f(\bar{g}^{(n)})$ no tienen ningún punto común que esté situado en el círculo unidad. Así, pues, queda demostrada la existencia de una cadena de recintos $\{g^{(n)}\}$ que conduce a un elemento frontera η dado.

Como los dominios $\bar{g}^{(n)}$ son continuos, y $\bar{g}^{(n+1)} \subset \bar{g}^{(n)}$, la intersección de todos los $\bar{g}^{(n)}$ también es un continuo K (véase el t. I, ap. 4.1, cap. primero). Es obvio que éste consta solamente de puntos frontera del recinto G . Respecto de los puntos del continuo K , diremos que todos ellos pertenecen al elemento frontera considerado, y también que K representa al elemento frontera η^*). Para justificar esta definición es necesario convencerse de que el conjunto K no depende de la elección de la cadena de los recintos que conducen a η .

Sean $\{H^{(n)}\}$ y $\{H'^{(n)}\}$ dos sistemas de intervalos que determinan a η , y sean $\{g^{(n)}\}$ y $\{g'^{(n)}\}$ las cadenas que les corresponden. En el círculo unidad a ellos les van a corresponder dos sistemas de arcos $\{\Sigma^{(n)}\}$ y $\{\Sigma'^{(n)}\}$ que se ciñen hacia un mismo punto w_0 , y dos cadenas de recintos $\{\Delta^{(n)}\}$ y $\{\Delta'^{(n)}\}$ adyacentes a estos arcos. Cierremos de que $\{\Delta^{(n)}\}$ y $\{\Delta'^{(n)}\}$ se ciñen hacia el punto w_0 . En efecto, la intersección de los dominios $\bar{\Delta}^{(n)}$ es un continuo que no contiene puntos interiores del círculo unidad. Por ello, éste coincide con la intersección de los arcos frontera $\Sigma^{(n)}$, es decir, con el punto w_0 . De aquí se deduce también que cada recinto $\Delta^{(n)}$ contiene todos los recintos $\Delta'^{(n)}$, comenzando desde uno de ellos en adelante, y, por consiguiente, $g^{(n)}$ contiene todos los $g'^{(n)}$, comenzando desde uno de ellos en adelante. Por esta razón, la intersección K' de todos los $\bar{g}'^{(n)}$ está contenida en la intersección K de todos los $\bar{g}^{(n)}$. Como K y K' pueden cambiarse de sitio, K coincide con K' , que es lo que se afirmaba.

3.5. Ocupémonos del estudio de la estructura de los elementos frontera y de su clasificación. Para ello tendremos que estudiar las propiedades del continuo K que representa al elemento frontera dado η . Son posibles los casos siguientes: a) K consta de un solo punto; b) K contiene más de un punto.

*) Aquí no identificamos el elemento frontera con el conjunto de puntos que le representa, puesto que un mismo conjunto puede representar distintos elementos frontera.

Sea $\{g^{(n)}\}$ una cadena cualquiera de recintos que conduce a η , sean $\{\Delta^{(n)}\}$ las imágenes de estos recintos en el círculo unidad, y supongamos que w_0 es el punto de la circunferencia unidad que es la imagen del elemento η . Entonces la intersección de los dominios $\{\bar{g}^{(n)}\}$ coincide con K , y la intersección de los dominios $\{\bar{\Delta}^{(n)}\}$ con w_0 . Como los puntos de cualquier sucesión $\{w_n\}$ ($|w_n| < 1$) que converja hacia w_0 pertenecen al recinto $\Delta^{(m)}$ para $n > N(m)$, sus imágenes $\{z_n\}$ tienen que pertenecer al recinto $g^{(m)}$, de donde se deduce que todos los puntos de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ pertenecen al continuo K .

En el caso a), o sea, cuando K consta de un solo punto z_0 , se tiene: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$. Así, pues, en este caso existe el límite $\lim_{w \rightarrow w_0} f^{-1}(w)$ y éste es igual a z_0 . Consideremos, en particular, la preimagen γ de cualquier semiintervalo de Jordan δ situado en el círculo unidad y que termine en el punto w_0 . Como γ es un semiintervalo curvilíneo y $\lim_{w \rightarrow w_0} f^{-1}(w) = \lim_{w \rightarrow w_0} z(w) = z_0$, éste es un semiintervalo de Jordan que termina en el punto z_0 . Vemos, pues, que en el caso a), la imagen w_0 del elemento frontera η es a la vez la imagen de un punto alcanzable de la frontera Γ , representado por el punto z_0 . A este punto alcanzable lo identificaremos con el elemento frontera. El elemento frontera correspondiente se llama elemento (extremo simple) de primera especie.

Consideremos ahora el caso b), o sea, cuando el continuo K contiene más de un punto y, por consiguiente, contiene un conjunto infinito de puntos; entonces no existe el límite $\lim_{w \rightarrow w_0} f^{-1}(w)$. Sin embargo, puede ocurrir que w_0 , siendo la imagen del elemento frontera η , sea a la vez la imagen de un punto alcanzable de la frontera Γ . Entonces existe un semiintervalo de Jordan δ que termina en el punto w_0 y es la imagen de un semiintervalo de Jordan γ que termina en el punto $z_0 \in K$. Es obvio que $\lim_{w \rightarrow w_0} f^{-1}(w) = z_0$ determina un punto

alcanzable de la frontera Γ , representado por el punto z_0 . En este caso diremos que el punto alcanzable correspondiente está contenido en el elemento frontera y z_0 se llamará punto alcanzable del elemento η . Entonces, todos los puntos del continuo K , distintos de z_0 , serán puntos no alcanzables del elemento frontera. En este caso η se llama elemento frontera de segunda especie. En la figura 16 el elemento de segunda especie está representado por el segmento de recta AB . En la misma están representados también dos recintos $g^{(n)}$ y $g^{(n+1)}$ de la cadena que conduce a este elemento. A es un punto alcanzable del elemento; todos los puntos del segmento AB distintos de A son sus puntos no alcanzables. Obsérvese que estos mismos puntos representan, además, elementos frontera

de primera especie. Así, el punto C representa uno de tales elementos.

Supongamos, finalmente, que w_0 no es la imagen de ningún punto alcanzable. En este caso no existe ningún punto alcanzable de la frontera Γ que pertenezca al elemento frontera dado. Cualquiera que sea el semiintervalo de Jordan δ que termine en el punto w_0 , su preimagen γ no será semiintervalo de Jordan, es decir, el $\lim f^{-1}(w)$, $w \in \delta$, no existirá. A su vez, todos los puntos de acumulación del semiintervalo curvilíneo γ pertenecerán al continuo K . Se distinguen dos casos: Uno es cuando el conjunto de todos los

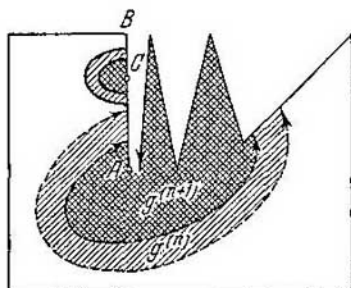


FIG. 16.

puntos de acumulación de $\gamma = f^{-1}(\delta)$ coincide con K . En este caso η se llama elemento frontera de tercera especie. Otro es cuando para algunos δ el conjunto de los puntos de acumulación de la preimagen $\gamma = f^{-1}(\delta)$ forma solamente una parte propia del continuo K . En este caso se tiene un elemento frontera de cuarta especie. Para reconocer a los elementos de tercera y cuarta especie no hay necesidad de recurrir a la transformación conforme f^{-1} . Es suficiente fijar alguna cadena de recintos $\{g^{(n)}\}$ que conduzca a η y considerar todos los semiintervalos curvilíneos posibles γ , con los puntos de acumulación en Γ , que están contenidos en cada uno de los recintos $g^{(n)}$, comenzando desde uno de sus puntos. Precisamente estos semiintervalos serán las preimágenes de todos los δ posibles que terminan en el punto w_0 , que es la imagen del elemento η . Todo se reduce luego a comparar los conjuntos de los puntos de acumulación del semiintervalo γ con el continuo K .

En la fig. 17 el segmento AB representa un elemento frontera de tercera especie. La curva de trazos representa uno de los semiintervalos curvilíneos γ . Evidentemente, el conjunto de sus puntos de acumulación coincide con AB . El segmento AB de la fig. 10

Al aplicar este teorema, se debe tener presente que la convergencia de la sucesión de puntos a un elemento frontera del recinto no significa, ni mucho menos, la convergencia en el sentido ordinario. El conjunto de los puntos de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ que converge hacia el elemento frontera η puede coincidir con cualquier subconjunto cerrado (no vacío) F del continuo K que representa a η . Solamente cuando η es un elemento frontera de primera especie y, por consiguiente, K contiene solamente un punto z_0 , de la convergencia de $\{z_n\}$ hacia η se deduce la convergencia de $\{z_n\}$ hacia el punto z_0 . Sin embargo, lo recíproco no es justo. Una sucesión de puntos $\{z_n\}$ que converge hacia el punto z_0 , puede no converger hacia el elemento frontera que representa este punto. Como ejemplo, consideremos la sucesión de puntos pertenecientes alternativamente a los semiintervalos γ_1 y γ' , representados en la fig. 11. Aunque tal sucesión converja hacia el punto ζ , que representa en el caso dado dos elementos frontera distintos de primera especie, ella no converge hacia ninguno de estos elementos. Conservando en la misma solamente los puntos que están situados en γ_1 , resulta una sucesión que converge hacia uno de los elementos frontera indicados; los puntos que están situados en γ' forman una sucesión que converge hacia el otro elemento.

Supongamos que cada elemento frontera del recinto G es un elemento de primera especie (en las figuras 11 y 12 están representados ejemplos de tales recintos). Entonces, en la transformación conforme $z = f^{-1}(w)$ del círculo $|w| < 1$ en tal recinto, a cada sucesión de puntos $\{w_n\}$ del círculo unidad que converja hacia un punto arbitrario w_0 de la circunferencia unidad le corresponderá una sucesión de puntos $\{z_n\}$ del recinto G , convergente hacia un punto frontera z_0 (y a la vez, hacia uno de los elementos frontera que representa este punto). Haciendo $f^{-1}(w_0) = z_0$, se define la función $f^{-1}(w)$ en el círculo unidad cerrado. Demostremos que esta función es continua en el círculo cerrado. Suponiendo lo contrario, tendríamos que para alguna sucesión de puntos $\{w'_n\}$, $|w'_n| \leq 1$, convergente hacia un punto w_0 , $|w_0| = 1$, el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(w'_n)$

o no existe, o existe pero es diferente de $f^{-1}(w_0)$. Para cada uno de los puntos w'_n que no son interiores al círculo, se puede señalar un punto interior w''_n tal, que $|f^{-1}(w'_n) - f^{-1}(w''_n)| < \frac{1}{n}$ y $|w'_n - w''_n| < \frac{1}{n}$.

Haciendo $w''_n = w'_n$ cuando w'_n está situado en el interior del círculo unidad, hallaremos una sucesión de puntos $\{w''_n\}$ tal, que $|w''_n| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w''_n = w_0$, y, sin embargo, el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(w''_n)$ o no existe, o es diferente de $f^{-1}(w_0)$. Pero esto con-

tradice a que: $f^{-1}(w_0) = \lim_{\substack{w \rightarrow w_0 \\ |w| < 1}} f^{-1}(w)$. Así, pues, $f^{-1}(w)$ es continua en el círculo cerrado.

Fácilmente se observa que, cuando al menos uno de los elementos frontera del recinto G no es un elemento de primera especie, la función $f^{-1}(w)$ no puede ser continua para $|w| \leq 1$. En efecto, si K es el continuo que representa el elemento frontera η y que contiene más de un punto, entonces en el círculo se puede indicar una sucesión $\{w_n\}$, convergente hacia algún punto w_0 ($|w_0| = 1$), tal que la sucesión correspondiente $\{z_n = f^{-1}(w_n)\}$ tiene, no obstante, más de un punto de acumulación (estos últimos pertenecen a K), es decir, es divergente.

En resumen, queda demostrada la siguiente proposición:

T o r e m a 2. *Para que una función $z = f^{-1}(w)$, que transforma conformemente el círculo unidad en un recinto G , sea continua en el círculo cerrado $|w| \leq 1$ (o, lo que se reduce a lo mismo, sea uniformemente continua para $|w| < 1$), es necesario y suficiente que todos los elementos frontera del recinto G sean elementos de primera especie.*

Cuando se cumple esta condición, la frontera Γ del recinto G se puede expresar por la ecuación

$$z = f^{-1}(w) = f^{-1}(e^{it}), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

donde $f^{-1}(e^{it})$ es una función continua del parámetro t . Por consiguiente, la frontera Γ , cuyos elementos son todos de primera especie, es una curva continua.

Consideremos ahora las condiciones, según las cuales la función $w = f(z)$ que transforma conformemente un recinto simplemente conexo G en el círculo unidad es continua en el dominio \bar{G} (es decir, puede definirse en todos los puntos de la frontera Γ , de modo que sea continua en \bar{G}). La condición necesaria para esto consiste en que cada punto de la frontera Γ tiene que pertenecer solamente a un elemento frontera o, como suele decirse, sea un punto simple de la frontera Γ . En efecto, si $z_0 \in \Gamma$ pertenece al menos a dos elementos frontera distintos η' y η'' , entonces a la sucesión $\{z'_n\}$ que converge hacia η' y a la vez hacia el punto z_0 le corresponde una sucesión $\{w'_n = f(z'_n)\}$ que converge hacia un punto w'_0 de la circunferencia unidad, y a la sucesión $\{z''_n\}$ que converge hacia η'' y hacia z_0 , le corresponde una sucesión $\{w''_n = f(z''_n)\}$ que converge hacia otro punto w''_0 de la circunferencia unidad. De aquí se deduce que el límite $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in G}} f(z)$ no existe.

Demostremos que esta condición necesaria también es suficiente para que la función $w = f(z)$ sea continua en \bar{G} . Sea z_0 un punto

arbitrario de la frontera Γ y sea $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera de puntos del recinto G que converja hacia z_0 . Si se supone que la sucesión $\{w_n = f(z_n)\}$ es divergente, entonces tienen que existir al menos dos puntos de acumulación w' y w'' situados en la circunferencia unidad. Sean $\{w'_n\}$ y $\{w''_n\}$ dos sucesiones parciales de $\{w_n\}$, convergentes hacia w' y w'' , respectivamente. Sean $\{z'_n\}$ y $\{z''_n\}$ sus preimágenes en el recinto G ; éstas convergen hacia el punto z_0 y a la vez convergen hacia los elementos frontera η' y η'' , cuyas imágenes son w' y w'' . De aquí que z_0 pertenece a η' y a η'' , lo cual contradice a la hipótesis. Así, pues, para cualquier punto $z_0 \in \Gamma$ existe el límite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$; haciendo $f(z_0) = w_0$, se obtiene una función continua en el dominio \bar{G} . Los resultados demostrados pueden expresarse en la forma siguiente:

Teorema 3. *Para que una función $w = f(z)$, que transforma conformemente un recinto G en el círculo $|w| < 1$, sea continua en el dominio \bar{G} (es decir, uniformemente continua en G), es necesario y suficiente que todos los puntos frontera del recinto G sean simples.*

De los teoremas 2 y 3 se obtiene luego el importante

Corolario. *Para que una función $w = f(z)$, que transforma conformemente un recinto simplemente conexo G en el círculo $|w| < 1$, realice una transformación homeomorfa de \bar{G} en $|w| \leq 1$, es necesario y suficiente que todos los elementos frontera de G sean de primera especie y que todos los puntos de la frontera Γ sean simples.*

En efecto, en éste, y sólo en este caso, la función $w = f(z)$ y su inversa $z = f^{-1}(w)$ son simultáneamente continuas en \bar{G} y $|w| \leq 1$, respectivamente.

Antes al recinto simplemente conexo G se le habían impuesto las condiciones siguientes: a) todos sus elementos frontera son de primera especie, y b) todos los puntos de su frontera son simples. Estas se pueden sustituir por una sola que es equivalente: el recinto G está limitado por una curva cerrada de Jordan. En efecto, si se cumplen a) y b), entonces, según lo anterior, la frontera del recinto G es la imagen homeomorfa de la circunferencia unidad ($z = f^{-1}(e^{it})$, $0 \leq t \leq 2\pi$), por lo cual Γ es una curva de Jordan. Pero también es cierto lo recíproco.

Supongamos que Γ es una curva cerrada de Jordan.

Sea η un elemento frontera del recinto G y sea $\{g^{(n)}\}$ una cadena de recintos que conduce hacia η . La frontera del recinto $g^{(n)}$ representa una curva cerrada de Jordan, compuesta de un arco de Jordan $\Gamma^{(n)} \subset \Gamma$ (nos basamos en que Γ es una curva de Jordan) y de un intervalo de Jordan $\gamma^{(n)} \subset G$ que tiene los extremos comunes con $\Gamma^{(n)}$. De aquí se deduce que el continuo K que representa η coincide con la intersección del sistema de arcos de Jordan encajados

$\{\Gamma^{(n)}\}$ ($\Gamma^{(n+1)} \subset \Gamma^{(n)}$), es decir, representa o un punto de la frontera Γ , o un arco de Jordan $\Gamma' \subset \Gamma$. Pero esto último es imposible. En efecto, si z_0 es un punto del arco Γ' , distinto de los extremos de este arco, entonces la distancia $\rho = \rho(z_0, \Gamma'')$, donde $\Gamma'' = \Gamma \setminus \Gamma'$, es un número positivo (de nuevo empleamos el hecho de que Γ es una curva de Jordan). Consideremos un punto $z' \in G$ tal, que $|z' - z_0| < \varepsilon \leq \rho$. Es obvio que el punto $\zeta \in \Gamma$ más próximo a z' y situado en el segmento rectilíneo que une z' con z_0 , no puede pertenecer a Γ'' ; por ello, $\zeta \in \Gamma'$. A la vez, obtenemos un punto alcanzable del recinto G , determinado por el segmento con los extremos z' y ζ y representado por el punto $\zeta \in \Gamma'$. Como la parte del segmento contigua a su extremo, pertenece a cualquiera de los recintos $g^{(n)}$, resulta que cada uno de éstos también contiene a este punto alcanzable. Pero se puede hallar un conjunto infinito de tales puntos alcanzables (debido a la arbitrariedad del punto $z_0 \in \Gamma'$ y del número ε , $0 < \varepsilon \leq \rho$). Por consiguiente, existe un conjunto infinito de puntos alcanzables distintos, pertenecientes al elemento frontera η , lo cual es imposible.

Así, pues $K = \Gamma'$ consta solamente de un punto, es decir, η es un elemento de primera especie.

Sean ahora η' y η'' dos elementos frontera distintos del recinto G , y sean $\{g^{(n)}\}$ y $\{g''^{(n)}\}$ las cadenas de recintos que conducen a ellos. Como sus imágenes en el círculo tienen que cerrarse hacia dos puntos distintos w' y w'' y, por consiguiente, para valores suficientemente grandes de n no tienen puntos comunes, $g^{(n)}$ tampoco tiene puntos comunes con $g''^{(n)}$ para todos los valores suficientemente grandes de n . Pero la frontera del recinto $g^{(n)}$ consta de dos arcos de Jordan con extremos comunes, uno de los cuales $\Gamma'^{(n)}$ está situado en Γ y el otro $\gamma'^{(n)}$ pertenece a G (a excepción de los extremos); además, el punto z'_0 , que representa a η' , está situado en $\Gamma'^{(n)}$ y es distinto de los extremos de este arco.

El recinto $g''^{(n)}$ tiene que estar situado en el exterior del recinto $g^{(n)}$, por consiguiente, pertenece al subrecinto del recinto G que está limitado por el arco $\gamma'^{(n)}$ y el arco $\Gamma \setminus \Gamma'^{(n)}$, que no tiene otros puntos comunes con $\Gamma'^{(n)}$ más que los extremos. Por ello, la frontera del recinto $g''^{(n)}$ consta de un arco $\Gamma''^{(n)} \subset \Gamma \setminus \Gamma'^{(n)}$ y de un arco $\gamma''^{(n)}$ perteneciente a G (a excepción de los extremos). De aquí se deduce que el punto z'_0 que representa a η' , no está situado en la frontera de $g''^{(n)}$ y, por consiguiente, no puede representar a η'' . En resumen, cada punto de la frontera Γ pertenece solamente a un elemento frontera. Hemos obtenido la siguiente proposición:

Teorema 4. Todos los elementos frontera de un recinto simplemente conexo G son elementos de primera especie y todos los puntos de la frontera son simples cuando, y sólo cuando, la frontera del recinto G es una curva cerrada de Jordan.

En otras palabras, la propiedad característica de una curva cerrada de Jordan Γ es que, cada punto de ella representa un punto frontera alcanzable y sólo uno (del recinto G , limitado por la curva Γ). Esta propiedad se expresa abreviadamente diciendo, que *todos los puntos de una curva de Jordan son alcanzables por el interior y son simples*. El teorema 4 permite formular el corolario anteriormente indicado de los teoremas 2 y 3 de la forma siguiente:

Teorema 5. *Una función $w = f(z)$ que transforma conformemente un recinto G en el círculo $|w| < 1$, establece una correspondencia homeomorfa entre G y $|w| \leq 1$ y, por consiguiente, también entre Γ y $|w| = 1$ cuando, y sólo cuando, Γ es una curva cerrada de Jordan.*

Corolario. *En la transformación conforme uno en otro de recintos simplemente conexos G_1 y G_2 , limitados por curvas cerradas de Jordan Γ_1 y Γ_2 , entre los puntos de estas curvas se establece una correspondencia homeomorfa.*

Para observar esto, es suficiente sustituir la transformación conforme del recinto G_1 en G_2 por las transformaciones conformes de G_1 en el círculo $|w| < 1$ y del círculo $|w| < 1$ en el recinto G_2 , realizadas sucesivamente.

Como una aplicación importante del teorema 5, establezcamos el principio del argumento en su forma general:

Principio generalizado del argumento.
Sea $f(z)$ una función continua en el sentido generalizado en el dominio \bar{g} , donde g es la parte interior de una curva cerrada de Jordan γ , y analítica en el recinto g , a excepción, posiblemente, de polos. Si $f(z)$ no toma los valores 0 y ∞ en γ , entonces la diferencia entre las cantidades de ceros y polos de $f(z)$, pertenecientes al recinto g , es igual a la variación del $\text{Arg } f(z)$ al hacer un recorrido simple (de una vuelta) por la curva γ en sentido positivo, dividida por 2π , es decir, es igual al número de vueltas que da la curva continua $\Gamma = f(\gamma)$ alrededor del punto $w = 0$, tomado con el signo correspondiente.

En comparación con el enunciado del principio del argumento examinado en el ap. 3.5, cap. cuarto, t. I, lo nuevo es: en primer lugar, que no se exige que la curva γ sea rectificable y, en segundo lugar, que no se supone que la función $f(z)$ sea analítica en los puntos de γ .

Para la demostración, obsérvese primero que las cantidades de ceros (N) y polos (P) en el recinto g son finitas. Suponiendo lo contrario, hallaríamos en γ un punto de acumulación de ceros o polos, en el cual $f(t)$, debido a la continuidad, tomaría el valor 0 o ∞ , respectivamente.

Transformemos conformemente el recinto g en el círculo unidad $|t| < 1$ mediante una función $z = \varphi(t)$. Como la transformación

es biunívoca, la función $f(z)$ se convertirá entonces en la función $f^*(t) = f\varphi(t)$, la cual tiene en el círculo $|t| < 1$ la misma cantidad de ceros N y polos P que la función $f(z)$ en el recinto g . En virtud del teorema 5, la función $f^*(t)$ es continua (en el sentido generalizado) en el círculo cerrado $|t| \leq 1$ y, al hacer un recorrido simple de la circunferencia $|t| = 1$ en el sentido positivo, el punto $w = f^*(t)$ describe la curva precedente Γ en el sentido de antes. Por esta razón, la demostración del teorema se reduce al caso en que γ es la circunferencia unidad y g es el círculo unidad.

Supongamos que el círculo $|t| < r_0 < 1$ contiene todos los ceros y polos de la función $f^*(t)$. Entonces, en virtud del principio del argumento, en su forma establecida anteriormente, el vector $f^*(t)$ dará $N - P$ vueltas completas alrededor del punto $w = 0$, cuando t describa una vez la circunferencia $|t| = r > r_0$ en sentido positivo; esto significa que

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} \operatorname{Arg} f^*(re^{i\alpha}).$$

Si $\rho > 0$ es la distancia desde $w = 0$ hasta la curva Γ , o sea,

$$\rho = \min_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} |f^*(e^{i\alpha})|,$$

entonces, como $f^*(t)$ es uniformemente continua en el anillo circular cerrado $r_0 \leq |t| \leq 1$, existe r_1 , $0 < r_1 < 1$, tal que

$$|f^*(re^{i\alpha}) - f^*(e^{i\alpha})| < \rho, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad r_1 < r < 1.$$

Representemos $f^*(re^{i\alpha})$ en la forma:

$$f^*(re^{i\alpha}) = f^*(e^{i\alpha}) \left[1 + \frac{f^*(re^{i\alpha}) - f^*(e^{i\alpha})}{f^*(e^{i\alpha})} \right] = f^*(e^{i\alpha}) [1 + \lambda_r(\alpha)].$$

Para $r > r_1$,

$$|\lambda_r(\alpha)| = \frac{|f^*(re^{i\alpha}) - f^*(e^{i\alpha})|}{|f^*(e^{i\alpha})|} < 1,$$

por lo cual

$$\operatorname{Var}_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} \operatorname{Arg} [1 + \lambda_r(\alpha)] = 0.$$

Por consiguiente, para $r > \max(r_0, r_1)$

$$\begin{aligned} N - P &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} \operatorname{Arg} f^*(re^{i\alpha}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} \operatorname{Arg} \{f^*(e^{i\alpha}) [1 + \lambda_r(\alpha)]\} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} \operatorname{Arg} f^*(e^{i\alpha}). \end{aligned}$$

El teorema queda demostrado.

El principio generalizado del argumento permite obtener inmediatamente el teorema fundamental del ap. 1.2 en su forma completa

(pág. 13). En este caso, en los razonamientos que se hicieron al comienzo del ap. 1.2 no hay que cambiar nada.

Demostremos, finalmente, un teorema referente al comportamiento de la transformación conforme en la parte de la frontera del recinto G que representa un arco de Jordan.

Llamemos a un arco de Jordan Γ' , perteneciente a la frontera Γ de un recinto arbitrario G , a arco alcanzable de la frontera Γ o arco de Jordan libre, si existe un arco de Jordan γ' que tiene los extremos comunes con Γ' y pertenece al recinto G (a excepción de sus extremos); además la parte interior g de la curva de Jordan formada por γ' y Γ' pertenece al recinto G . Para elucidar este concepto, es suficiente comparar los segmentos rectilíneos AB en las figuras 16 y 17. En la primera de ellas AB es un arco alcanzable de la frontera, mientras que en el segundo caso no es alcanzable.

Teorema 6. *Si Γ' es un arco alcanzable de Jordan de la frontera Γ de un recinto simplemente conexo G (posiblemente, no acotado), entonces en la transformación conforme $w = f(z)$ del recinto G en el círculo $|w| < 1$ se establece una correspondencia homeomorfa entre los puntos del arco Γ' y los puntos de un arco de la circunferencia unidad, con la condición complementaria de que los valores de $w = f(z)$ se consideren solamente en el recinto $g \subset G$ que es adyacente a Γ' .*

Demostración. En la transformación conforme del recinto G en el círculo, el arco γ' que figuraba anteriormente en la definición de punto alcanzable de la frontera, se transformará en un arco de Jordán no cerrado δ' con los extremos en la circunferencia unidad (esto se deduce de que γ' determina dos puntos alcanzables distintos de la frontera Γ). El recinto g que está limitado por la curva de Jordan $\gamma' + \Gamma'$, se transforma en un recinto Δ limitado por una curva de Jordan, compuesta de δ' y de uno de los dos arcos de la circunferencia con los extremos comunes con δ' . Debido al corolario del teorema 5, la función $w = f(z)$ que transforma conformemente el recinto g en el recinto Δ establece una correspondencia homeomorfa entre las fronteras de estos recintos, y como la imagen del arco γ' es δ' , la imagen del arco Γ' será un arco de la circunferencia, como se quería demostrar.

Como ilustración a los teoremas demostrados en este apartado, consideremos la transformación conforme del recinto G representado en la fig. 18, en el círculo unidad. La frontera de este recinto consta de dos circunferencias: $|z| = 1$ y $|z| = 3$ y de la espiral comprendida entre ellas (por ejemplo, $r = 2 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \theta$), la cual se aproxima indefinidamente a las circunferencias indicadas en dos direcciones. Cada punto de la espiral representa dos elementos fron-

tera de primera especie: dos puntos frontera alcanzables. Las circunferencias $|z| = 1$ y $|z| = 3$ representan cada una un elemento frontera de tercera especie. Para convencerse de esto, consideremos los segmentos rectilíneos representados en la figura y situados en la parte positiva del eje real. Cada uno de ellos pertenece al recinto y divide el conjunto de los puntos alcanzables del recinto G en dos intervalos complementarios entre sí, a los cuales son adyacentes dos subrecintos del recinto G , respectivamente: uno de ellos —llamémosle inferior— se enrolla desde el segmento considerado,

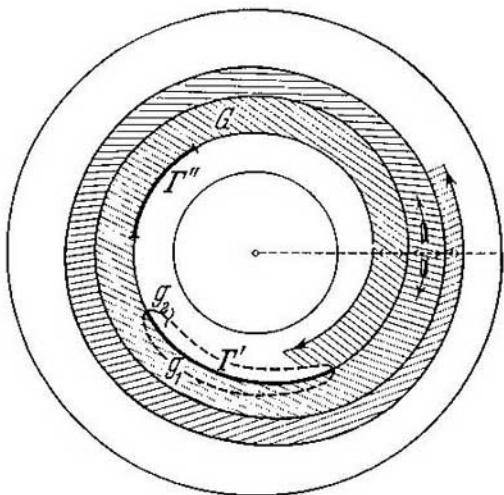


FIG. 48.

en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, y se dirige hacia la circunferencia menor, mientras que el otro —llamémosle superior— se desenrolla, en sentido contrario, hacia la circunferencia mayor.

Si se considera, por ejemplo, la sucesión de segmentos que se aproximan a la circunferencia menor, y se toman cada vez aquellos intervalos de puntos alcanzables a los cuales son adyacentes los subrecintos inferiores correspondientes, entonces se obtiene una sucesión de intervalos encajados de puntos alcanzables, que determina un elemento frontera del recinto G . Como la intersección de los subrecintos inferiores cerrados es la circunferencia $|z| = 1$, ésta representa a este elemento frontera. De un modo análogo halla-

remos que la otra circunferencia representa a otro elemento frontera. Es obvio, inmediatamente, que ambos elementos son de tercera especie (véase la definición).

En virtud de lo expuesto anteriormente, en la transformación conforme del recinto G en un círculo, cada punto de la espiral se representará por dos puntos distintos, y cada una de las circunferencias, por un punto. Cualquier arco Γ' de la espiral es un arco de Jordan libre; como a éste son adyacentes dos recintos $g_1 \subset G$ y $g_2 \subset G$, los cuales no tienen puntos comunes, resulta que, en la transformación conforme, Γ' se transformará en dos arcos de la circunferencia sin puntos comunes (de acuerdo con el hecho de que cada punto del arco Γ' representa un par de elementos frontera distintos). Obsérvese también que a dos arcos cualesquiera Γ' y Γ'' de la espiral les corresponden sendos pares de arcos de la circunferencia, los cuales tendrán puntos comunes cuando, y sólo cuando, Γ' y Γ'' tengan puntos comunes. De lo dicho se deduce que toda la espiral se representa en la transformación conforme por un par de arcos (intervalos) complementarios entre sí de la circunferencia unidad con extremos comunes A y B ; además, uno de estos extremos representará a toda la circunferencia $|z| = 1$ y el otro, a toda la circunferencia $|z| = 3$. Como no todos los puntos de la frontera Γ son simples en este ejemplo (son simples solamente los puntos de las dos circunferencias) y no todos los elementos son de primera especie, la función $w = f(z)$, así como la función $z = f^{-1}(w)$, no serán continuas en los dominios correspondientes. La primera tiene puntos de discontinuidad en cada punto de la espiral y la segunda solamente tiene dos puntos de discontinuidad: A y B .

§ 4. TEOREMA DE S. MERGUELIAN. POLINOMIOS DE FABER Y TEOREMA DE S. BERNSTEIN. POLINOMIOS ORTOGONALES SOBRE LA SUPERFICIE DE UN RECINTO

4.1. Los primeros cuatro apartados del presente párrafo están dedicados al estudio de las condiciones para la aproximación uniforme de las funciones de variable compleja mediante polinomios. A S. Merguelián le pertenece un resultado terminante sobre este tema. El ap. 4.4, el cual puede consultar el lector directamente, dejando de un lado los ap. 4.1-4.3, está dedicado a su exposición. En estos últimos apartados se demuestran unos resultados de un carácter más particular, que precedían históricamente al teorema de Merguelián. En este libro se conservan estos resultados, puesto que representan un ejemplo de aplicación del teorema sobre los recintos de fronteras variables, perteneciente a R. Courant, el cual tiene un interés particular.

T e o r e m a. Sea $\{G_n\}$ una sucesión de recintos encajados simplemente conexos ($\bar{G}_{n+1} \subset \bar{G}_n$), convergente hacia su núcleo G ; se supone que el recinto G está limitado por una curva cerrada de Jordan Γ . Entonces la sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$, que transforman conformemente los recintos $\{G_n\}$ en el círculo $|w| < 1$ y satisfacen a las condiciones $f_n(z_0) = 0$, $f'_n(z_0) > 0$ ($z_0 \in G$), converge uniformemente en el dominio \bar{G} hacia una función $f(z)$, la cual transforma conformemente G en el mismo círculo (evidentemente, $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$).

D e m o s t r a c i ó n. En virtud del teorema de Carathéodory (ap. 2.3), la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de G . Demostremos, por reducción a lo absurdo, que las funciones $f_n(z)$, siendo uniformemente continuas en \bar{G} ($\bar{G} \subset G_n$), son equicontinuas en \bar{G} , es decir, que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \varepsilon$$

para cualquier par de puntos z' y z'' del recinto G , tales que $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$ ($n = 1, 2, \dots$). Supongamos que esto no es cierto. Entonces tienen que existir: $\varepsilon_0 > 0$, una sucesión de números naturales crecientes $\{n_k\}$ y dos sucesiones de puntos $\{z_k\}$, $\{z_k''\}$, pertenecientes al recinto G , tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k - z_k'') = 0$ y, no obstante

$$|f_{n_k}(z_k) - f_{n_k}(z_k'')| \geq \varepsilon_0.$$

Pasando a sucesiones parciales, se puede suponer que existen los límites para $\{z_k\}$ y $\{z_k''\}$ (necesariamente iguales entre sí):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k'' = \zeta.$$

Vamos a exigir desde el principio que se cumpla esta condición. Obsérvese que el punto $\zeta \in \bar{G}$ tiene que estar situado en Γ . En efecto, si éste fuese interior a G , entonces de la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en un entorno de este punto se deduciría que

$$\begin{aligned} & |f_{n_k}(z_k) - f_{n_k}(z_k'')| \leq \\ & \leq |f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| + |f(z_k) - f(z_k'')| + |f(z_k'') - f_{n_k}(z_k'')| < \varepsilon_0 \end{aligned}$$

para todos los valores suficientemente grandes de k .

Pasando a sucesiones parciales, si esto fuese necesario, pero sin cambiar las notaciones admitidas anteriormente, exigimos también

que todos los puntos z'_k y z''_k ($k = 1, 2, \dots$) estén contenidos en un círculo $|z - \zeta| < R$, donde $R < |\zeta - z_0|$, y que sea convergente cada una de las sucesiones $\{w'_k = f_{n_k}(z'_k)\}$ y $\{w''_k = f_{n_k}(z''_k)\}$. Sus límites w' y w'' distan uno del otro no menos que ε_0 y están situados en la circunferencia unidad. En efecto, si se supone, por ejemplo, que $|w'| < 1$, entonces cierto entorno del punto w' se transforma en un entorno arbitrariamente pequeño del punto $z' = f^{-1}(w') \in G$. Pero, como la sucesión $\{f_{n_k}^{-1}(w')\}$ es uniformemente convergente en un entorno del punto w' (véase el ap. 2.3), los puntos $z'_k = f_{n_k}^{-1}(w'_k)$, comenzando desde cierto subíndice en adelante, también pertenecen a un entorno arbitrariamente pequeño del punto z' , es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} z'_k = z' \neq \zeta$, lo cual es imposible.

Describamos una circunferencia $\sigma: |w| = r < 1$ con el centro en el punto $w = 0$. Si r es suficientemente pequeño, entonces $f^{-1}(\sigma)$ está contenido en el interior de un entorno arbitrariamente pequeño del punto z_0 . Por consiguiente, para cierto r y todos los valores de n suficientemente grandes, las curvas $f_n^{-1}(\sigma)$ estarán situadas en el interior de una circunferencia s con el centro en el punto z_0 . Respecto de s , exijamos que ésta pertenezca al recinto G y esté situada fuera de la circunferencia $|z - \zeta| < R$.

Los puntos $w_k = f_{n_k}(z'_{n_k})$ y $w''_k = f_{n_k}(z''_{n_k})$, para valores suficientemente grandes de k , están situados en entornos arbitrariamente pequeños de los puntos w' y w'' fuera de σ . Por ello, existe un $\alpha > 0$ tal, que la distancia entre los dos segmentos de radios δ'_k y δ''_k comprendidos entre σ y los puntos w'_k y w''_k (fig. 19), será mayor que α para todos los $k > K$. A los segmentos δ'_k y δ''_k en la transformación $z = f_{n_k}^{-1}(w)$ les corresponden en el recinto G_{n_k} unos arcos de Jordan γ'_k y γ''_k que no tienen puntos comunes; los puntos iniciales de los arcos γ'_k y γ''_k están situados en el interior de s , y los puntos finales son z'_k y z''_k .

Obsérvese ahora que existe una sucesión de números positivos $\{\rho_k\}$, $\rho_k < R$, convergente hacia cero, tal que los puntos z'_k y z''_k están situados en el círculo $|z - \zeta| < \rho_k$ y éstos pueden unirse en el interior del mismo círculo por un arco de Jordan λ_k , contenido en el recinto G . En efecto, como $z'_k \in G$, $z''_k \in G$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} z'_k = \lim_{k \rightarrow \infty} z''_k = \zeta$, resulta: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z'_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z''_k) = w_0$. Pero los puntos $f(z'_k)$ y $f(z''_k)$

pueden unirse en el interior del círculo unidad por un segmento rectilíneo μ_k ; su preimagen $f^{-1}(\mu_k) = \lambda_k$ unirá los puntos z'_k y z''_k en el recinto G , y como la función $f^{-1}(w)$ es continua en el círculo cerrado $|w| \leq 1$ (véase el teorema 2, ap. 3.6; la frontera del recinto G es una curva de Jordan), resulta que para valores suficientemente grandes de k el arco λ_k estará contenido en un entorno arbi-

trariamente pequeño del punto ζ . De aquí se deduce la existencia de la sucesión $\{\rho_k\}$ que se necesita.

Conservemos en λ_k solamente el arco $\bar{\lambda}_k$, desde el último punto ζ'_k de intersección de λ_k con γ_k hasta el primer punto ζ''_k de intersección con γ_k (en la figura, $\zeta'_k = z'_k$ y $\zeta''_k = z''_k$) y en γ_k y γ''_k , los arcos $\tilde{\gamma}'_k$ y $\tilde{\gamma}''_k$ desde los últimos puntos de intersección con s hasta ζ'_k y ζ''_k ,

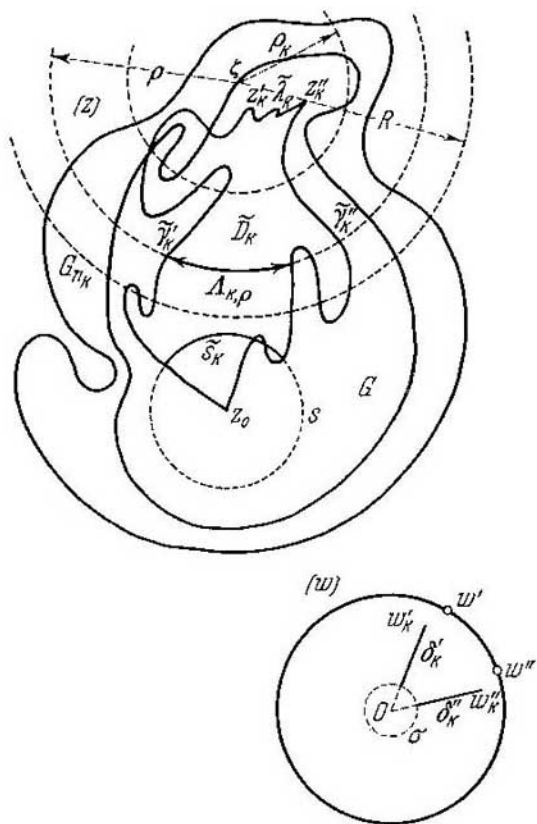


FIG. 19.

respectivamente. Entonces el arco \tilde{s}_k de la circunferencia s y los arcos $\tilde{\gamma}'_k$, $\bar{\lambda}_k$, $\tilde{\gamma}''_k$ formarán conjuntamente una curva cerrada de Jor-

dan perteneciente al recinto G_{n_k} . De aquí que la parte interior \tilde{D}_h a esta curva pertenece a G_{n_k} . Cada circunferencia $|z - \zeta| = \rho$, donde $\rho_h < \rho < R$, se corta con \tilde{D}_h por un conjunto de arcos, entre los cuales al menos uno $\Lambda_{h, \rho}$ une los puntos $z_{h, \rho} \in \tilde{\gamma}_h$ y $z'_{h, \rho} \in \tilde{\gamma}'_h$.

Para convencerse de la existencia de los arcos $\Lambda_{h, \rho}$, unamos algún punto de \tilde{s}_h con algún punto de $\tilde{\lambda}_h$ mediante un arco de Jordan $\tilde{\tau}_h$ perteneciente al recinto \tilde{D}_h , a excepción de sus extremos (esto es posible, puesto que la frontera del recinto \tilde{D}_h es una curva de Jordan y todos los puntos de una curva de Jordan son alcanzables). Como el punto inicial del arco $\tilde{\tau}_h$ está situado fuera de la circunferencia $|z - \zeta| = \rho$ y el punto final está situado en el interior de la misma, el arco $\tilde{\tau}_h$ se cortará con esta circunferencia; precisamente, se cortará con sus arcos situados en el recinto \tilde{D}_h . Entre ellos pueden haber arcos cuyos extremos ambos pertenezcan a $\tilde{\gamma}_h$ o a $\tilde{\gamma}'_h$. Llamemos a éstos, arcos con extremos homónimos. Cada uno de ellos, junto con el arco con los mismos extremos y situado en $\tilde{\gamma}_h$ o en $\tilde{\gamma}'_h$, respectivamente, forma una curva cerrada de Jordan, la cual limita un subrecinto del recinto \tilde{D}_h . Evidentemente, ζ no pertenece a la clausura de tal subrecinto, por lo cual el arco τ_h no puede mantenerse en el mismo, pero entrando, éste tiene que salir de él para continuar luego hacia su fin. Señalemos en τ_h su primero y último puntos de intersección con cada arco de la circunferencia con extremos homónimos. Los puntos del arco $\tilde{\tau}_h$ que preceden directamente al primero o siguen directamente después del último, pertenecen simultáneamente a la parte exterior a la circunferencia $|z - \zeta| = \rho$ o a su parte interior. Si se supone que todos los arcos situados en $|z - \zeta| = \rho$, pertenecientes a \tilde{D}_h , tienen extremos homónimos, entonces $\tilde{\tau}_h$, aproximándose hacia el primer punto de intersección con esta circunferencia por fuera de la circunferencia $|z - \zeta| = \rho$, se alejará del último punto de intersección con la misma, manteniéndose también fuera de $|z - \zeta| = \rho$. Pero entonces su punto final tiene que estar situado fuera de $|z - \zeta| = \rho$, lo cual es imposible. De aquí se deduce que en $|z - \zeta| = \rho$ tiene que existir al menos un arco con extremos no homónimos $\Lambda_{h, \rho}$ que se corta con el arco $\tilde{\tau}_h$.

Designemos con τ_h la parte del arco $\tilde{\tau}_h$ desde el último punto de su intersección con $|z - \zeta| = R$ hasta el primer punto de intersección con $|z - \zeta| = \rho_h$; entre los subrecintos del recinto \tilde{D}_h que forman la intersección del recinto \tilde{D}_h con el anillo circular $\rho_h < < |z - \zeta| < R$, designemos con D_h aquel que contiene el arco τ_h (a excepción de sus extremos). Evidentemente, los arcos $\Lambda_{h, \rho}$ que se cortan con el arco $\tilde{\tau}_h$ se cortan también con el arco τ_h y, por

consiguiente, pertenecen a D_k . Observando que

$$f_{n_k}(z'_{k,\rho}) = w'_{k,\rho} \in \delta'_k \quad \text{y} \quad f_{n_k}(z''_{k,\rho}) = w''_{k,\rho} \in \delta''_k,$$

obtenemos:

$$0 < \alpha < |w'_{k,\rho} - w''_{k,\rho}| = \left| \int_{z'_{k,\rho}}^{z''_{k,\rho}} f'_{n_k}(z') dz \right| \leq \int_{\Delta_{k,\rho}} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})| \rho d\theta,$$

de donde, en virtud de la desigualdad de Buniakovski-Schwarz

$$\alpha^2 < \int_{\Delta_{k,\rho}} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})|^2 \rho^2 d\theta \int_{\Delta_{k,\rho}} d\theta < 2\pi \int_{\Delta_{k,\rho}} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})|^2 \rho^2 d\theta.$$

Multiplicando ambos miembros de la última desigualdad por $\frac{d\rho}{\rho}$ e integrando desde ρ_k hasta R , obtendremos:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \cdot \ln \frac{R}{\rho_k} &< 2\pi \int_{\rho_k}^R \rho d\rho \int_{\Delta_{k,\rho}} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \\ &\leq 2\pi \int_{D_k} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta. \end{aligned}$$

Pero

$$\int_{D_k} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta$$

es el área de la imagen del recinto D_k en la transformación $w = f_{n_k}(z)$ y, por consiguiente, no es superior a π . Resulta la desigualdad

$$\alpha^2 \ln \frac{R}{\rho_k} < 2\pi^2,$$

lo cual es imposible, debido a que $\rho_k \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$. De aquí se deduce que es justa la afirmación de la equicontinuidad de las funciones $f_n(z)$ en el dominio \bar{G} .

Elijamos para un $\varepsilon > 0$ arbitrario un número $\delta(\varepsilon) > 0$ de modo que se cumplan las desigualdades

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{y} \quad |f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para cualquier par de puntos z' y z'' del dominio \bar{G} que satisfagan a la condición $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$. Supongamos ahora que el dominio $\bar{g} \subset G$ es tal que cada punto de \bar{G} dista de \bar{g} no más que $\delta(\varepsilon)$. Para construir \bar{g} , hallemos un $\eta(\varepsilon)$ tal que para $|w' - w''| <$

$< \eta(\varepsilon)$ ($|w'| \leq 1$, $|w''| \leq 1$) se cumpla la desigualdad

$$|f^{-1}(w') - f^{-1}(w'')| < \delta(\varepsilon),$$

y tomemos por g la preimagen del círculo $|w| < 1 - \eta(\varepsilon)$ en la transformación $w = f(z)$. Si a es un punto de $\bar{G} \setminus \bar{g}$ y $b = f(a)$, entonces el punto

$$\beta = \frac{b}{|b|} [1 - \eta(\varepsilon)]$$

está situado en la circunferencia $|w| = 1 - \eta(\varepsilon)$ y además $|b - \beta| < \eta(\varepsilon)$. Observando que $\alpha = f^{-1}(\beta) \in \bar{g}$, obtenemos: $|a - \alpha| = |f^{-1}(b) - f^{-1}(\beta)| < \delta(\varepsilon)$, o sea, la distancia desde el punto a hasta el conjunto \bar{g} es menor que $\delta(\varepsilon)$. En virtud de la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en el conjunto cerrado \bar{g} , se tiene:

$$|f(\zeta) - f_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \zeta \in \bar{g}, \quad n > N(\varepsilon).$$

Si z es cualquier punto de \bar{G} y ζ es un punto de \bar{g} que diste de z menos que $\delta(\varepsilon)$, entonces

$$|f_n(z) - f_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(z) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

y, por consiguiente,

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |f(z) - f(\zeta)| + |f(\zeta) - f_n(\zeta)| + |f_n(\zeta) - f_n(z)| < \varepsilon$$

para $n > N(\varepsilon)$, con lo cual se termina la demostración del teorema.

4.2. Teorema. Sea G la parte interior de una curva cerrada de Jordan Γ y sea $F(z)$ una función continua en \bar{G} y analítica en el recinto G . Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un polinomio $P(z)$ tal, que

$$|F(z) - P(z)| < \varepsilon, \quad z \in \bar{G}.$$

Demostración. Transformemos conformemente el recinto G en el círculo $|w| < 1$ mediante una función $w = f(z)$ que satisfaga a las condiciones: $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$. Como la función $z = f^{-1}(w)$ es continua en el círculo cerrado $|w| \leq 1$ (definiéndola de un modo adecuado en los puntos de la circunferencia unidad), la función $F^*(w) = F[f^{-1}(w)]$ también lo es en el mismo círculo cerrado. Además, ésta es analítica en el círculo unidad. Sea ε un número positivo arbitrario, entonces, como la función $F^*(z)$ es continua uniformemente, se tiene:

$$|F^*(e^{i0}) - F^*(re^{i0})| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{si } r \geq \rho(\varepsilon).$$

Por otra parte, debido a la convergencia uniforme de la serie de Taylor de la función $F^*(w)$ en el interior del círculo unidad, resulta:

$$\left| F^*[\rho(\varepsilon)e^{i\theta}] - \sum_0^n \frac{F^{*(h)}(0)}{k!} [\rho(\varepsilon)]^k e^{ki\theta} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para $n \geq N(\varepsilon)$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Haciendo $e^{i\theta} = w$ y $\frac{F^{*(h)}(0)}{k!} [\rho(\varepsilon)]^k = a_k$, tendremos:

$$\left| F^*(w) - \sum_0^{N(\varepsilon)} a_k w^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todos los puntos w situados en la circunferencia unidad.

Volviendo al recinto G mediante la transformación conforme $z = f^{-1}(w)$, obtenemos:

$$\left| F(z) - \sum_0^{N(\varepsilon)} a_k [f(z)]^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

en todos los puntos z de la frontera Γ del recinto G .

En virtud del principio del módulo máximo, esta desigualdad también se cumple en el interior de G . No queda más que demostrar que la función $\sum_0^{N(\varepsilon)} a_k [f(z)]^k$ puede aproximarse en el dominio \bar{G} mediante polinomios con una exactitud arbitraria. Aquí nos basaremos en el teorema del ap. 4.1 y en el teorema de Runge (t. 1, ap. 2.3, cap. cuarto). Ante todo, construyamos una sucesión decreciente de recintos

$$\{G_n\}: \bar{G} \subset G_{n+1} \subset \bar{G}_{n+1} \subset G_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

convergente hacia G como a su núcleo. Consideremos para cualquier número natural n el conjunto G'_n de todos los puntos del plano cuyas distancias hasta \bar{G} son menores que $\frac{1}{n}$. Evidentemente, éste es un conjunto abierto y conexo, es decir, es un recinto, y además, $\bar{G} \subset G'_n$.

Entre los recintos que son complementarios a \bar{G}'_n , uno de ellos $G'_{n,\infty}$ contiene al punto del infinito, y los demás son acotados; sus fronteras forman una parte de la frontera del recinto G'_n . Agreguemos a G'_n todos los puntos de los recintos complementarios acotados y todos los puntos frontera del recinto G'_n , a excepción de los puntos frontera del recinto $G'_{n,\infty}$.

El recinto obtenido $G_n \subset G'_n$ será simplemente conexo, pues su frontera coincide con la frontera de $G'_{n, \infty}$ la cual es un continuo. Evidentemente, la sucesión de recintos $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ satisface a las condiciones:

$$\bar{G} \subset G_{n+1} \subset \bar{G}_{n+1} \subset G_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Como $\bar{G} \subset G_n$ ($n = 1, 2, \dots$), el recinto G está contenido en el núcleo de la sucesión $\{G_n\}$. Pero ningún punto z' que sea exterior a G puede pertenecer al núcleo indicado. En efecto, unamos z' con el punto ∞ mediante un arco γ situado en el exterior del recinto G . Si $\rho > 0$ es la distancia entre γ y \bar{G} , entonces para $n > \frac{1}{\rho}$ este arco estará contenido en el recinto $G'_{n, \infty}$ y, por consiguiente, no pertenecerá a G_n . Por ello, el punto z' no pertenece al núcleo de la sucesión $\{G_n\}$. Por lo tanto, G coincide con este núcleo. Como un razonamiento análogo es aplicable a cualquier sucesión parcial $\{G_{n_k}\}$, resulta que $\{G_n\}$ converge hacia G como hacia el núcleo.

Designemos con $w = f_n(z)$ la función que transforma conformemente G_n en un círculo y satisface a las condiciones: $f_n(z_0) = 0$, $f'_n(z_0) > 0$. En virtud del ap. 4.1, la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente hacia $f(z)$ en el dominio \bar{G} . Aplicando el teorema de Runge, construyamos para cada n un polinomio $p_n(z)$ que satisfaga a la condición:

$$|f_n(z) - p_n(z)| < \frac{1}{n}, \quad z \in \bar{G}$$

(aquí nos basamos en el hecho de que $f_n(z)$ es una función analítica en el recinto simplemente conexo G_n , el cual contiene a \bar{G}). Evidentemente, la sucesión $\{p_n(z)\}$ también converge uniformemente hacia $f(z)$ en el dominio \bar{G} y, por consiguiente, también la sucesión $\left| \sum_{h=0}^{N(\varepsilon)} a_h [p_h(z)]^h \right|$ converge uniformemente hacia $\left| \sum_{h=0}^{N(\varepsilon)} a_h [f(z)]^h \right|$. Tomemos $\nu(\varepsilon)$ de modo que para $n \geq \nu(\varepsilon)$ y todos los $z \in \bar{G}$ se cumpla la relación

$$\left| \sum_{h=0}^{N(\varepsilon)} a_h [f(z)]^h - \sum_{h=0}^{N(\varepsilon)} a_h [p_{\nu(\varepsilon)}(z)]^h \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, designando con $P(z)$ el polinomio $\sum_{h=0}^{N(\varepsilon)} a_h [p_{\nu(\varepsilon)}(z)]^h$ tendremos:

$$|F(z) - P(z)| < \varepsilon, \quad z \in \bar{G},$$

con lo cual se termina la demostración

Como aplicación del teorema obtenido, deduzcamos el teorema integral de Cauchy en la siguiente forma generalizada:

Teorema integral generalizado. *Sea G la parte interior de una curva cerrada rectificable de Jordan Γ y sea $F(z)$ una función continua en \bar{G} y analítica en G . Entonces*

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = 0.$$

Demostración. Sea ε un número positivo arbitrario y sea L la longitud de la curva Γ . Según el teorema anterior, existe un polinomio $P(z)$ tal, que

$$|F(z) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{L}, \quad z \in \bar{G}.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_{\Gamma} F(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma} [F(z) - P(z)] dz \right| < \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon,$$

y como ε es arbitrariamente pequeño, resulta:

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = 0,$$

como se quería demostrar.

Corolario. *En las mismas condiciones, se verifica la fórmula integral de Cauchy*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\Gamma} \frac{F(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G.$$

La demostración es igual que en el ap. 3.1, cap. tercero (t. I).

El teorema fundamental de este apartado es solamente un caso particular del siguiente teorema general:

Teorema de M. V. K é l d i s h. *Para que toda función continua en un dominio \bar{G} y analítica en el interior de G , pueda aproximarse en \bar{G} mediante polinomios con una exactitud arbitraria, es necesario y suficiente que el complemento de \bar{G} esté compuesto de un solo recinto G_{∞} que contenga al punto ∞ *).*

Claro, a este enunciado satisfacen todos los recintos que están limitados por curvas de Jordan, pero no sólo ellos. En la fig. 16 está representado un recinto cuya frontera no es una curva de Jor-

*) M. V. K é l d i s h, Determinación de las funciones de variable compleja por series de polinomios en los dominios (M. B. K é l d i s h, Определение функций комплексного переменного рядами полиномов в замкнутых областях, Математический сборник, т. 16 (58), стр. 249—258 (1945).

dan y para el cual, sin embargo, se cumplen las condiciones del teorema.

La necesidad de la condición del teorema es casi evidente. En efecto, si ésta no se cumple, entonces existe un recinto G_1 contiguo con \bar{G} y distinto de G_∞ . Sea $z_0 \in G_1$, entonces $\frac{1}{z-z_0}$ es continua en \bar{G} y analítica en el interior de \bar{G} . Si existe una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$ que converge uniformemente hacia $\frac{1}{z-z_0}$ en \bar{G} , entonces ésta converge uniformemente en la frontera del recinto G_∞ (la cual pertenece a la frontera del recinto \bar{G}) y, por consiguiente, converge uniformemente en todo el complemento de G_∞ —el cual representa un conjunto abierto que contiene a G y G_1 — hacia una función localmente analítica $\Phi(z)$. Como esta función coincide con $\frac{1}{z-z_0}$ en los puntos del recinto G , ella tiene que coincidir también con esta última función en los puntos del recinto G_1 , lo cual, sin embargo, contradice a la analiticidad de $\Phi(z)$. La demostración de que la condición del teorema es suficiente se basa en un teorema de M. A. Lavréntiev, cuyo enunciado se expone en el siguiente apartado.

4.3. Sea Γ una curva cerrada de Jordan y sea $\varphi(z)$ una función continua, definida en Γ . Transformemos conformemente el interior de Γ en el interior del círculo unidad mediante una función $w = f(z)$. Como $z = f^{-1}(w)$ es una función continua para $|w| \leq 1$, $\varphi(z)$ se transforma en la función $\varphi^*(w) = \varphi[f^{-1}(w)]$, la cual es uniforme y continua en la circunferencia unidad. Escribamos $\varphi^*(w)$ en la forma

$$\varphi^*(w) = \varphi^*(e^{i\theta}) = \psi(\theta) + i\chi(\theta),$$

donde $\psi(\theta)$ y $\chi(\theta)$ son funciones continuas de θ de período 2π que toman valores reales. Según el conocido teorema *) del análisis, para cualquier $\varepsilon > 0$ se pueden indicar unos polinomios trigonométricos $\tau(\theta)$ y $\sigma(\theta)$ tales, que para todos los valores de θ se cumplen las desigualdades:

$$|\psi(\theta) - \tau(\theta)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad |\chi(\theta) - \sigma(\theta)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Introduciendo, en caso de necesidad, coeficientes nulos, se pueden escribir $\tau(\theta)$ y $\sigma(\theta)$ en forma de polinomios de un mismo grado:

$$\begin{aligned} \tau(\theta) &= a_0 + \sum_{\substack{1 \\ -N}}^N (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \sum_{-N}^N \alpha_n e^{in\theta}, \\ \sigma(\theta) &= c_0 + \sum_{\substack{1 \\ -N}}^N (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) = \sum_{-N}^N \beta_n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

*) Este mismo teorema se demostrará más adelante (ap. 1.5, cap. sexto) de otro modo, que no depende de los resultados de este capítulo.

Sustituyendo $e^{i\theta}$ por w , obtenemos:

$$|\Psi(\theta) + i\chi(\theta) - [\tau(\theta) + i\sigma(\theta)]| = \left| \varphi^*(w) - \sum_{-N}^N \gamma_n w^n \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

o bien, volviendo al plano z mediante la transformación $w = f(z)$, resulta:

$$\left| \varphi(z) - \sum_{-N}^N \gamma_n [f(z)]^n \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in \Gamma.$$

Según el teorema del ap. 4.2, $f(z)$ se puede sustituir en Γ por un polinomio $P(z)$ con una exactitud arbitraria. Como $|f(z)| = 1 \neq 0$ en Γ , se puede utilizar un polinomio que no se anule en Γ ; resulta una función racional $R(z) = \sum_{-N}^N \gamma_n [P_1(z)]^n$ que no tiene polos en Γ y satisface a la desigualdad

$$|\varphi(z) - R(z)| < \frac{3}{4} \varepsilon, \quad z \in \Gamma.$$

Evidentemente, se puede indicar un recinto biconexo (de forma de anillo) D que contenga a Γ y no contenga ningún polo de la función $R(z)$. Si z_0 es un punto cualquiera del interior a Γ , podemos exigir también que z_0 esté contenido en el recinto limitado por el contorno interior del recinto D . Por ello, según el teorema del ap. 2.3, cap. cuarto (t. I), $R(z)$ puede aproximarse con una exactitud hasta de $\frac{\varepsilon}{4}$ por otra función racional $T(z)$, cuyos polos sean z_0 y ∞ ; esta función tiene la forma

$$T(z) = \sum_{-v}^v A_n (z - z_0)^n.$$

Resulta:

$$|\varphi(z) - T(z)| < \varepsilon, \quad z \in \Gamma.$$

Queda demostrado el siguiente teorema:

T e o r e m a 4. Si $\varphi(z)$ es una función continua en una curva cerrada de Jordan Γ y z_0 es un punto interior a Γ , entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede construir una función racional $T(z) = \sum_{-v}^v A_n (z - z_0)^n$, que en todos los puntos de la curva Γ satisfaga a la relación

$$|\varphi(z) - T(z)| < \varepsilon.$$

Para cualquier arco $\gamma \subset \Gamma$, cuyo punto inicial no coincida con el final, en virtud del teorema de Runge, se puede construir un poli-

nomio $S(z) = \sum_0^{\mu} B_n z^n$ tal, que en todos los puntos del arco γ se cumpla la desigualdad

$$|T(z) - S(z)| < \varepsilon.$$

Resulta la siguiente proposición:

T e o r e m a 2. Si $\varphi(z)$ es una función continua en una curva cerrada de Jordan Γ , entonces para cualquier arco $\gamma \subset \Gamma$, cuyo punto inicial no coincida con el final, y para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede construir un polinomio $S(z) = \sum_0^{\mu} B_n z^n$ que satisfaga en todos los puntos del arco γ a la relación

$$|\varphi(z) - S(z)| < \varepsilon.$$

En esta proposición es esencial que γ no es una curva cerrada. Precizando, la función $\varphi(z)$, siendo continua en la curva cerrada de Jordan Γ , tiene que satisfacer también a unas condiciones necesarias para que se la pueda aproximar con la exactitud deseada mediante polinomios. Señalemos tales condiciones en el caso en que Γ sea una curva cerrada rectificable de Jordan.

Supongamos que $\varphi(z)$ es una función continua en Γ y que

$$\varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z),$$

donde $\{S_n(z)\}$ es una sucesión de polinomios uniformemente convergente en Γ . Entonces, evidentemente, tendremos:

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} S_n(z) dz = 0.$$

Esta es una condición necesaria. Pero siempre se pueden deducir también otras; fijando un número natural arbitrario m , obtenemos:

$$\varphi(z) z^m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) z^m,$$

de donde

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) z^m dz = 0 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Una función continua arbitraria no satisface a todas estas condiciones.

El teorema 2 de este apartado generaliza el conocido teorema de Weierstrass y, a su vez, representa solamente un caso muy especial del siguiente teorema general:

T e o r e m a de M. A. L a v r é n t i e v. Para que toda función $\varphi(z)$, continua en un continuo K , pueda aproximarse en K mediante polinomios con una exactitud arbitraria, es necesario y suficiente

que este continuo esté acotado, carezca de puntos interiores (es decir, sea un continuo lineal) y que su complemento sea conexo (es decir, que el continuo no divida el plano en unos cuantos recintos distintos)*).

Un arco no cerrado de Jordan γ representa el ejemplo más sencillo de continuo que satisface a las condiciones del teorema. La necesidad de estas condiciones es casi evidente. En efecto, si K posee puntos interiores, entonces el límite de una sucesión de polinomios uniformemente convergente en K , tiene que ser una función analítica en un entorno de cada uno de ellos; por consiguiente, una función continua que no sea analítica en ningún punto (por ejemplo, $\varphi(z) = \bar{z}$) no puede ser aproximada mediante polinomios en K con una exactitud arbitraria. Supongamos ahora que el continuo acotado K carece de puntos interiores, pero divide al plano. Esto significa que entre los recintos contiguos con K existe al menos un recinto acotado g . Evidentemente, $\varphi(z) = \frac{1}{z-z_0}$, donde $z_0 \in g$, es una función continua en K . Si existe una sucesión de polinomios que converge uniformemente en K hacia $\frac{1}{z-z_0}$, entonces esta sucesión es uniformemente convergente en la frontera del recinto g (perteneciente a K) y, por consiguiente, es uniformemente convergente en el dominio \bar{g} . Por esta razón, el límite de la sucesión es una función $\psi(z)$, que es continua en \bar{g} , analítica en el interior de g y coincide con $\frac{1}{z-z_0}$ en la frontera del recinto g . De aquí que $\psi(z) - \frac{1}{z-z_0}$ tiene un polo simple en el punto $z = z_0 \in g$ y se anula en la frontera del recinto g . Por consiguiente,

$$\chi(z) = (z - z_0) \left[\psi(z) - \frac{1}{z - z_0} \right] = (z - z_0) \psi(z) - 1$$

es una función continua en \bar{g} , analítica en el interior de g , la cual se anula en la frontera del recinto g . En virtud del principio del módulo máximo, tendremos que tener: $\chi(z) \equiv 0$, lo cual es imposible, puesto que $\chi(z_0) = -1$.

De la contradicción obtenida se deduce que las condiciones del teorema de M. A. Lavréntiev son, verdaderamente, necesarias.

4.4. S. N. Merguelián demostró en el año 1951 el teorema más general sobre la aproximación uniforme de las funciones de variable

*) M. Лаврентьев. En relación a la teoría de las transformaciones conformes (М. Лаврентьев, К теории конформных отображений. Труды физико-математического института им. В. А. Стеклова. Отдел математический, V. Издание АН СССР, Ленинград, 1934 г., стр. 159—245). Las páginas 218—245 están dedicadas al teorema enunciado aquí.

compleja mediante polinomios, que contiene los resultados de M. A. Lavréntiev y M. V. Kéldish como casos particulares.

T e o r e m a de S. N. M e r g u e l i á n. *Sea E un conjunto cerrado y acotado, cuyo complemento G respecto del plano complejo sea conexo, y sea $f(z)$ una función continua en E y localmente analítica en el conjunto O de todos los puntos interiores de E . Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $P(z)$ tal, que en todos los puntos de E se verifica la desigualdad:*

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon_0.$$

Es obvio, que si el conjunto O es vacío y E es conexo, resulta el teorema de Lavréntiev, y si O es conexo (O es un recinto) y E coincide con \bar{O} , resulta el teorema de Kéldish.

Demostremos primero tres lemas*):

L e m a 1. *Supongamos que un recinto d , limitado por una curva de Jordan γ , está contenido en el círculo $|z| < 4\delta$ y su diámetro es mayor que δ ($0 < \delta < 1$). Designemos con $z = \lambda(w) = aw + b + a_1w^{-1} + a_2w^{-2} + \dots$ una función que transforme conformemente el recinto $|w| > 4\delta$ en la parte exterior a γ , de modo que $\lambda(\infty) = \infty$, y sea $w = \mu(z)$ la función inversa. Entonces se cumplen las siguientes relaciones:*

a) $|z| < |\mu(z)|$ en el exterior de γ ;

b) $\frac{1}{16} < |a| < 1$;

c) $|b| < 8\delta$;

d) $\left| \frac{1}{z-b} - \frac{1}{a\mu(z)} \right| < \frac{A\delta^2}{|z^3|}$, si $|z| > 10\delta$;

aquí A es una constante absoluta.

D e m o s t r a c i ó n. Obsérvese que $\frac{\lambda(w)}{w} = a + \frac{b}{w} + \frac{a_1}{w^2} + \dots$ es una función analítica en el recinto $|w| > 4\delta$, y regular en el punto $w = \infty$, donde su valor es igual a a . Además, es continua en la circunferencia $|w| = 4\delta$ (teorema 2, ap. 3.6) y toma en ésta valores que son en valor absoluto menores que 1 ($\lambda(w) \in \gamma$, si $|w| = 4\delta$). Aplicando a ella el principio del módulo máximo, obtenemos: $\frac{|\lambda(w)|}{|w|} < 1$, si $4\delta < |w|$, o sea, $|z| < |\mu(z)|$ en el exterior de γ ; además, $|a| < 1$.

*) Además del artículo de S. N. M e r g u e l i á n «Aproximaciones uniformes de las funciones de variable compleja» (С. П. М е р г е л я н, «Разномерные приближения функций комплексного переменного», «Успехи математических наук», т. VII, вып. 2(48), 1952, гл. I, стр. 32—55), utilizamos la exposición contenida en el libro de J. L. Walsh «Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain», Amer. Math. Soc., 1960.

Para hallar una cota inferior de $|a|$, observemos que d tiene que contener un par de puntos z_1 y z_2 tal, que $|z_1 - z_2| = \delta$. Mediante una traslación y una rotación del plano z se puede llevar uno de ellos al punto $z = 0$ y el otro al punto $z = \delta$. Claro, con esto pueden alterarse los coeficientes de $z = \lambda(w)$, pero el módulo del coeficiente a se conserva. Apliquemos ahora la transformación auxiliar: $t = \frac{4a\delta}{z}$. Como resultado de esto, γ se transformará en una curva de Jordan Γ y el exterior de γ en la parte interior Δ de la curva Γ ; además, el punto $t = 4a$, que es la imagen del punto $z = \delta$, no pertenecerá a $\bar{\Delta}$. Efectuemos también la transformación $s = \frac{4\delta}{w}$; entonces el recinto $|w| > 4\delta$ se transformará en el círculo unidad: $|s| < 1$.

Como la función

$$t = \frac{4a\delta}{z} = \frac{4a\delta}{\lambda\left(\frac{4\delta}{s}\right)} = s + b_2s^2 + \dots$$

transforma conformemente el círculo unidad en la parte interior a la curva Γ , según el teorema 3, ap 2.4 del presente capítulo, tiene que ser $4|a| > \frac{1}{4}$, o sea $|a| > \frac{1}{16}$. Así, pues, quedan demostradas las relaciones a) y b). Para demostrar c), obsérvese que para la función

$$\lambda(w) - aw = b + a_1w^{-1} + \dots,$$

siendo regular en el punto $w = \infty$, se cumple la desigualdad

$$|\lambda(w) - aw| < |\lambda(w)| + |w| < 8\delta \quad \text{si } |w| = 4\delta.$$

En virtud del principio del módulo máximo, se tiene:

$$|\lambda(w) - aw| < 8\delta \quad \text{si } |w| \geq 4\delta.$$

Apliquando las desigualdades de Cauchy para los coeficientes de una serie de potencias (con este fin se puede sustituir w^{-1} por s), obtenemos:

$$|b| < 8\delta$$

(es decir, la relación c)) y luego:

$$|a_n| \leq 8\delta \cdot 4^n \delta^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

De aquí que

$$|\lambda(w) - aw - b| < \frac{8\delta}{|w|} \sum_1^{\infty} \frac{(4\delta)^n}{(8\delta)^{n-1}} = \frac{64\delta^2}{|w|} \quad \text{si } |w| > 8\delta.$$

Haciendo aquí $z = \lambda(w)$, $w = \mu(z)$ y observando que, según lo demostrado, $|z| < |\mu(z)|$, resulta:

$$|z - a\mu(z) - b| < \frac{64\delta^2}{|z|},$$

y, por consiguiente:

$$\left| \frac{1}{z-b} - \frac{1}{a\mu(z)} \right| \leq \frac{|z - a\mu(z) - b|}{|a||\mu(z)||z| \left(1 - \frac{|b|}{|z|}\right)} < \frac{A\delta^2}{|z|^3} \quad \text{si } |z| > 10\delta,$$

donde A es una constante absoluta.

L e m a 2. Sea R_δ un subconjunto de puntos de E , cuyas distancias hasta G (o sea, hasta $\Gamma = E \setminus \bar{O}$) no sean superiores a δ . Para cada punto de $\zeta_0 \in R_\delta$ existe un entorno $U_0: |\zeta - \zeta_0| < \rho_0$ y un polinomio $\Pi_0(z)$ tales que

$$a) \quad |\Pi_0(z - \zeta)| < \frac{B}{\delta}, \quad |\zeta - \zeta_0| < \rho_0, \quad z \in E;$$

$$b) \quad \left| \Pi_0(z - \zeta) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < \frac{C\delta^2}{|\zeta - z|^3}, \quad |\zeta - \zeta_0| < \rho_0, \\ |z - \zeta| > 10\delta, \quad z \in E.$$

D e m o s t r a c i ó n. Sin restringir generalidad, hagamos $\zeta_0 = z = 0$. Construyamos el círculo $K: |z| < 4\delta$; su intersección con el

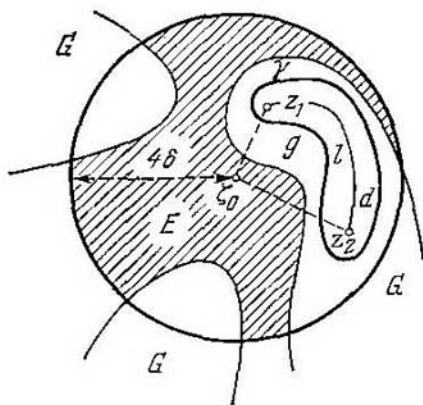


FIG. 20.

complemento de E , o sea, con el recinto G , es un conjunto no vacío. Sea z_1 uno de sus puntos, tal que $|z_1| = 2\delta$. Designemos con g aquella de las componentes conexas $K \cap G$ que contiene a z_1 ; entonces en el recinto g existe un punto z_2 tal, que $|z_2| = 3\delta$. Unamos

z_1 y z_2 por el interior de g mediante un arco de Jordan l y sea γ una curva cerrada de Jordan, perteneciente a g y que contenga en su interior a l (fig. 20). Aplicaremos el lema 1 a su parte interior d .

Designemos con $2\rho_0$ la distancia entre E y \bar{d} (o sea, entre E y γ). Entonces el conjunto E_0 de todos los puntos del plano cuyas distancias hasta E no son superiores a ρ_0 , será un conjunto acotado y cerrado que contiene a E y está situado en la parte exterior a la curva γ . En virtud de la definición, cualquier traslación del conjunto E en el vector c , $|c| < \rho_0$, no nos sacará de los límites del conjunto E_0 .

Como $w = \mu(z)$ transforma la parte exterior a γ en el recinto $|w| > 4\delta$ y $|a| > \frac{1}{16}$, en los puntos de E_0 se verifica la desigualdad

$$\left| \frac{1}{a\mu(z)} \right| < \min \left(\frac{4}{\delta}, \frac{16}{|z|} \right). \quad (4.4:1)$$

A la función $\frac{1}{a\mu(z)}$, siendo analítica en el conjunto acotado y cerrado E_0 , se la puede aproximar, según el corolario conocido del teorema de Runge (t. I, cap. cuarto, ap. 2.3), mediante un polinomio con una precisión arbitraria. Sea $Q_0(z)$ un polinomio tal, que en todos los puntos de E_0 se cumpla la desigualdad

$$\left| \frac{1}{a\mu(z)} - Q_0(z) \right| < \min \left(\frac{4}{\delta}, \frac{16}{|z|}, \frac{A\delta^2}{|z|^3} \right), \quad (4.4:2)$$

donde A es la constante de la relación d) del lema 1. Entonces, en virtud de d) y de las desigualdades (4.4:1), (4.4:2), tendremos:

$$|Q_0(z)| < \min \left(\frac{8}{\delta}, \frac{32}{|z|} \right), \quad z \in E_0, \quad (4.4:3)$$

$$\left| \frac{1}{z-b} - Q_0(z) \right| < \frac{2A\delta^2}{|z|^3}, \quad z \in E_0 \text{ y } |z| > 10\delta. \quad (4.4:4)$$

Empleemos ahora la identidad

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-b} - \frac{b}{(z-b)^2} + \frac{b^2}{z(z-b)^2}. \quad (4.4:5)$$

Como $|b| < 8\delta$ (relación c) del lema 1), para $|z| > 10\delta$ se tiene:

$$\left| \frac{b^2}{z(z-b)^2} \right| < \frac{A_1\delta^2}{|z|^3}.$$

En virtud de (4.4:3) y (4.4:4), para $z \in E_0$ y $|z| > 10\delta$:

$$\left| \frac{b}{(z-b)^2} - b \{Q_0(z)\}^2 \right| < 8\delta \left(\frac{1}{|z-b|} + |Q_0(z)| \right) \left| \frac{1}{z-b} - Q_0(z) \right| < \frac{A_2\delta^2}{|z|^3}.$$

Por ello, para $z \in E_0$ y $|z| > 10\delta$ (en virtud de (4.4:5)):

$$\left| \frac{1}{z} - \{Q_0(z) - b[Q_0(z)]^2\} \right| \leq \left| \frac{1}{z-b} - Q_0(z) \right| + \\ + \left| \frac{b}{(z-b)^2} - b[Q_0(z)]^2 \right| + \left| \frac{b^2}{z(z-b)^2} \right| < \frac{C\delta^2}{|z|^3}.$$

Hagamos, finalmente, $\Pi_0(z) = b[Q_0(z)]^2 - Q_0(z)$, entonces

$$|\Pi_0(z)| < \frac{B}{\delta}, \quad z \in E_0$$

y

$$\left| \Pi_0(z) + \frac{1}{z} \right| < \frac{C\delta^2}{|z|^3}, \quad z \in E_0 \text{ y } |z| > 10\delta,$$

o bien, recordando que el punto ξ_0 desempeñaba el papel del origen de coordenadas, sustituyendo z por $z - \xi_0$ y limitando los valores de ξ por el entorno U_0 , resulta:

$$|\Pi_0(z - \xi_0)| < \frac{B_1}{\delta}, \quad z \in E, \quad |\xi - \xi_0| \leq \rho_0, \quad (4.4:6)$$

$$\left| \Pi_0(z - \xi_0) - \frac{1}{z - \xi_0} \right| < \frac{C\delta^2}{|z|^3}, \quad z \in E, \quad |z - \xi_0| > 10\delta, \\ |\xi - \xi_0| \leq \rho_0. \quad (4.4:7)$$

El lema 2 queda demostrado.

L e m a 3. *Supongamos que la función $f(z)$, satisfaciendo a las condiciones de Merguelián, se ha prolongado como una función continua a todo el plano complejo. Sea $|z| < R_0$ ($R_0 > 1$) un círculo contenido en E , y sea $\omega(\delta)$ el módulo de continuidad de $f(z)$ en este círculo *).*

Hagamos:

$$K(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r}{\delta}\right) \frac{3}{\pi\delta^2}, & 0 < r \leq \delta, \\ 0, & r > \delta; \end{cases}$$

$$\Phi_\delta(z) = \iint_{|\xi| < 2R_0} f(\xi) K_\delta(|\xi - z|) d\xi d\eta, \quad \xi = \xi + i\eta, \quad z = x + iy.$$

Entonces se cumplen las relaciones:

* Se llama módulo de continuidad $\omega(\delta)$ de una función $f(z)$ en un conjunto F

$$\omega(\delta) = \sup_{z', z'' \in F, |z' - z''| \leq \delta} |f(z') - f(z'')|.$$

Evidentemente, $\omega(\delta) \rightarrow 0$ para $\delta \rightarrow 0$ cuando, y sólo cuando $f(z)$ es uniformemente continua en F .

a) $\Phi_\delta(z) = f(z)$ en todos los puntos de $O_\delta = E \setminus R_\delta$, o sea, en todos los puntos de E que distan de \bar{G} más que δ ;

$$b) \quad |\Phi_\delta(z) - f(z)| < \delta, \quad z \in E;$$

$$c) \quad \left| \frac{\partial \Phi_\delta}{\partial \bar{z}} \right| < \frac{2\omega(\delta)}{\delta}.$$

Demostración. En virtud de la definición de $K(r)$, en cada punto $z \in O_\delta$, se tiene:

$$\Phi_\delta(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \left(1 - \frac{r}{\delta}\right) \cdot \frac{3}{\pi\delta^2} \cdot f(z + re^{i\theta}) r dr d\theta, \text{ donde } \zeta = re^{i\theta}.$$

Escribamos esta fórmula en la forma:

$$\Phi_\delta(z) = \frac{3}{\pi\delta^2} \int_0^\delta \left[\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta \right] \left(r - \frac{r^2}{\delta}\right) dr.$$

Debido a la analiticidad local de $f(z)$ en Q_δ , se tiene:

$$\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(z)$$

(propiedad de la media aritmética). Por esta razón

$$\Phi_\delta(z) = f(z). \quad (4.4:8)$$

Apliquemos la fórmula (4.4:8), en particular, al caso

$$f(z) \equiv 1;$$

resulta:

$$\iint_{|\zeta| < 2R_0} K(|\zeta - z|) d\xi d\eta = 1. \quad (4.4:9)$$

De aquí que

$$\begin{aligned} |f(z) - \Phi_\delta(z)| &= \left| \iint_{|\zeta| < 2R_0} [f(z) - f(\zeta)] K(|\zeta - z|) d\xi d\eta \right| \leq \\ &\leq \omega(\delta) \iint_{|\zeta| < 2R_0} K(|\zeta - z|) d\xi d\eta = \omega(\delta). \end{aligned} \quad (4.4:10)$$

De (4.4:9) se deduce ahora que

$$\iint_{|\zeta| < 2R_0} K'_x(|\zeta - z|) d\xi d\eta = \iint_{|\zeta| < 2R_0} K'_y(|\zeta - z|) d\xi d\eta = 0$$

y, por consiguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_\delta(z)}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_\delta}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi_\delta}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{|\xi| < 2R_0} f(\xi) [K'_x(|\xi - z|) + iK'_y(|\xi - z|)] d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{|\xi| < 2R_0} [f(\xi) - f(z)] [K'_x(|\xi - z|) + iK'_y(|\xi - z|)] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Phi_\delta(z)}{\partial z} \right| &< \frac{1}{2} \iint_{|\xi| < 2R_0} |f(\xi) - f(z)| [|K'_x(|\xi - z|)| + \\ &+ |K'_y(|\xi - z|)|] d\xi d\eta < \frac{\omega(\delta)}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta [|K'_x(r)| + |K'_y(r)|] r dr d\theta = \\ &= \frac{3\omega(\delta)}{2\pi\delta^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta (|\cos \theta| + |\sin \theta|) r dr d\theta = \frac{6\omega(\delta)}{\pi\delta} < \frac{2\omega(\delta)}{\delta}. \quad (4.4:11) \end{aligned}$$

El lema 3 queda demostrado.

Veamos ahora la demostración del teorema de Merguelián. El primer paso para la demostración consiste en prolongar $f(z)$ conservando la continuidad en todo el plano*) y en aproximarla mediante las funciones $\Phi_\delta(z)$ del lema 3.

La ventaja que tiene $\Phi_\delta(z)$ ante $f(z)$ consiste en que ella es una función con derivadas parciales continuas de primer orden, cuya derivada formal se acota según la fórmula (4.4:11). Además $\Phi_\delta(z)$ coincide con $f(z)$ en el conjunto O_δ , donde $f(z)$ es localmente analítica. Por lo tanto, el problema queda reducido a la aproximación de la función $\Phi_\delta(z)$ mediante polinomios. El siguiente paso va a consistir en representar $\Phi_\delta(z)$ por la fórmula que generaliza la fórmula integral de Cauchy al caso de funciones no analíticas (t. I, cap. tercero, ap. 3.5). Recordemos que esta fórmula se dedujo para un recinto Δ limitado por un número finito de curvas de Jordan lisas a trozos (curvas elementales) Γ (el contorno exterior), $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (los contornos interiores), y para una función $F(z)$ que sea continua y tenga derivadas parciales continuas de primer orden en $\bar{\Delta}$. Esta

*) Véase, por ejemplo, P. S. A l e x á n d r o v, Introducción a la teoría general de los conjuntos y de las funciones (П. С. А л е к с а н д р о в, Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948, стр. 284—287).

tiene la forma:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \sum_1^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{F(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} d\eta, \quad z \in \Delta. \quad (4.4:12)$$

Es obvio que esta fórmula reduce el problema de la aproximación de $F(z)$ mediante polinomios al problema correspondiente para el núcleo de Cauchy: $\frac{1}{\zeta - z}$. Precisamente aquí emplearemos el lema 2.

Pero primero se debe construir de un modo racional el recinto Δ . Obsérvese que para la validez de la fórmula (4.4:12) no es esencial la conexión de Δ . La fórmula sigue siendo válida también cuando Δ representa la unión de unos cuantos recintos sin puntos comunes dos a dos.

Para obtener el conjunto abierto, al cual aplicaremos la fórmula (4.4:12), examinemos el lema 2. En este último, para cada punto $\zeta_0 \in R_\delta = E \setminus O_\delta$ se había construido un entorno U_δ : $|\zeta - \zeta_0| < \rho_\delta$, que figura en la tesis del lema. Elijamos un sistema finito de tales entornos U_j : $|z - z_j| < \rho_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, que cubran todo el conjunto $E \setminus O_\delta$, y formemos el conjunto cerrado $E \cup \bar{U}_1 \cup \dots \cup \bar{U}_m$. Evidentemente, éste es la clausura de cierto conjunto abierto D_δ que contiene a E ; su frontera L_δ está formada por un número finito de arcos de circunferencias. Al conjunto D_δ y a la función $\Phi_\delta(z)$ aplicaremos la fórmula (4.4:12). Pero la suma de todas las integrales de tipo Cauchy que figuran en el segundo miembro de la fórmula la escribiremos convencionalmente en forma de una integral, extendida a L_δ . Obtendremos:

$$\Phi_\delta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\delta} \frac{\Phi_\delta(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_{D_\delta} \frac{\partial \Phi_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} d\eta.$$

Obsérvese ahora que en los puntos de O_δ la función $\Phi_\delta(\zeta) = f(\zeta)$ es analítica y, por consiguiente, en estos puntos se anula la derivada formal $\frac{\partial \Phi_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}$ (t. I, cap. 2, ap. 1.3). Por esta razón,

$$\Phi_\delta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\delta} \frac{\Phi_\delta(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_{D_\delta \setminus O_\delta} \frac{\partial \Phi_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} d\eta.$$

La suma de las integrales de tipo Cauchy $I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\delta} \frac{\Phi_\delta(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$

es una función localmente analítica en el conjunto cerrado y acotado E , cuyo complemento es conexo. Por consiguiente, existe un poli-

nomio $P_1(z)$ tal que

$$|I_1(z) - P_1(z)| < \omega(\delta), \quad z \in E. \quad (4.4:13)$$

Para la aproximación de la integral

$$I_1(z) = - \iint_{D_\delta \setminus O_\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} d\eta$$

mediante un polinomio, apliquemos el lema 2. Según la construcción, el conjunto $D_\delta \setminus O_\delta$ está contenido en $\bigcup_{j=1}^m U_j$. Según el lema 2, a cada entorno $U_j: |\zeta - \zeta_j| < \rho_j$ le corresponde su polinomio $\Pi_j(z)$ que satisface a las condiciones a) y b) de este lema. Evidentemente, para un punto $\zeta \in D_\delta \setminus O_\delta$, perteneciente a unos cuantos entornos U_{j_1}, \dots, U_{j_h} , en las relaciones a) y b) se puede utilizar cualquiera de los polinomios $\Pi_{j_1}(z), \dots, \Pi_{j_h}(z)$. Para que la elección sea unívoca, a tal punto pondremos en correspondencia el polinomio de menor subíndice $j(\zeta)$, el cual designaremos con la notación $\Pi_\zeta(z)$. Así, pues,

$$\Pi_z(z) = \Pi_{j(\zeta)}(z) \text{ y } \Pi_\zeta(z - \zeta) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \Pi_{j(\zeta)}^{(n)}(-\zeta) z^n = \sum_{n=0}^N C_n(\zeta) z^n.$$

Los coeficientes $C_n(\zeta)$ son funciones continuas a trozos (o incluso analíticas a trozos) en $D_\delta \setminus O_\delta$.

Definamos el polinomio

$$P_2(z) = - \frac{1}{\pi} \iint_{D_\delta \setminus O_\delta} \frac{\partial \Phi_\delta}{\partial \bar{\zeta}} \Pi_\zeta(z - \zeta) d\bar{\zeta} d\eta.$$

En virtud de la relación c) del lema 3, en el conjunto E se tiene

$$\begin{aligned} |I_2(z) - P_2(z)| &= \left| \frac{1}{\pi} \iint_{D_\delta \setminus O_\delta} \left[\Pi_\zeta(z - \zeta) - \frac{1}{\zeta - z} \right] \frac{\partial \Phi_\delta}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} d\eta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{\omega(\delta)}{\delta} \iint_{D_\delta \setminus O_\delta} \left| \Pi_\zeta(z - \zeta) - \frac{1}{\zeta - z} \right| d\bar{\zeta} d\eta. \end{aligned}$$

En la parte M_1 del conjunto $D_\delta \setminus O_\delta$, perteneciente al círculo $K: |\zeta - z| \leq 10\delta$, utilizamos para $\Pi_\zeta(z - \zeta) = \Pi_{j(\zeta)}(z - \zeta)$ la acotación a) del lema 2. Obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{\omega(\delta)}{\delta} \iint_{M_1} \left| \Pi_\zeta(z - \zeta) - \frac{1}{\zeta - z} \right| d\bar{\zeta} d\eta &< \\ &< \frac{1}{\pi} \frac{\omega(\delta)}{\delta} \left[\frac{B}{\delta} \pi (10\delta)^2 + 2\pi \cdot 10\delta \right] = B_1 \omega(\delta). \end{aligned}$$

En la parte M_2 del conjunto $D_\delta \setminus O_\delta$, situada fuera del círculo K , utilizamos la acotación b) del mismo lema. Resulta:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\omega(\delta)}{\delta} \iint_{M_2} \left| H_z(z - \zeta) - \frac{1}{\zeta - z} \right| d\zeta d\eta < \frac{C}{\pi} \delta \omega(\delta) \iint_{M_2} \frac{1}{|\zeta - z|^3} d\zeta d\eta < \\ < \frac{C}{\pi} \delta \omega(\delta) \int_0^{2\pi} \int_{1/\delta}^{2R_0} \frac{1}{r^2} dr d\theta < C_1 \omega(\delta).$$

Así, pues, en el conjunto E :

$$|I_2(z) - P_2(z)| < (B_1 + C_1) \omega(\delta). \tag{4.4:14}$$

Haciendo $P_1(z) + P_2(z) = P(z)$ y confrontando las relaciones (4.4:10), (4.4:13) y (4.4:14), obtenemos:

$$|f(z) - P(z)| < (B_1 + C_1 + 2) \omega(\delta) = A_0 \omega(\delta), \quad z \in E, \tag{4.4:15}$$

donde A_0 es una constante absoluta. No queda más que elegir δ tan pequeño para que $A_0 \omega(\delta)$ se haga menor que el número ε dado.

4.5. Sea K un continuo acotado que contenga más de un punto, y sea G_∞ aquel recinto, entre los contiguos con él, que contiene al punto $z = \infty$. Este es un recinto simplemente conexo del plano ampliado cuya frontera Γ_∞ es una parte del continuo K . Transformemos conformemente G_∞ en la parte exterior de un círculo con el centro en el punto $w = 0$ mediante una función $w = \Phi(z)$. Exigiremos que se cumplan las dos condiciones siguientes:

$$\Phi(\infty) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1,$$

las cuales determinan a $\Phi(z)$ de un modo unívoco.

Las condiciones señaladas verdaderamente pueden ser satisfechas. Con este fin, efectuemos primero la transformación del recinto G_∞ en un recinto G_1 mediante la función $z_1 = \frac{1}{z - z_0}$, $z_0 \in K$, según la cual el punto ∞ irá al origen de coordenadas; hagamos luego la transformación $w_1 = \varphi(z_1)$ del recinto G_1 en un círculo con el centro en el origen de coordenadas, de modo que sea $\varphi(0) = 0$ y $\varphi'(0) = 1$, es decir, $\lim_{z_1 \rightarrow 0} \frac{w_1}{z_1} = 1$, y, finalmente, hagamos la transformación $w = \frac{1}{w_1}$, según la cual la parte interior del círculo se transformará en la parte exterior de cierto círculo: $|w| > \rho > 0$. Fácilmente se observa que la transformación resultante

$$w = \Phi(z) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z - z_0}\right)}$$

satisface a las condiciones impuestas. En efecto,

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ y } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \lim_{z_1 \rightarrow 0} \frac{1}{z_0 z_1 + 1} \frac{z_1}{w_1} = 1.$$

De aquí se deduce que, en un entorno del punto del infinito, la función $\Phi(z)$ admite el siguiente desarrollo de Laurent:

$$\Phi(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \dots,$$

y la función $[\Phi(z)]^n$ (n es un número entero no negativo) un desarrollo de la forma:

$$[\Phi(z)]^n = z^n + \alpha_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)} + \frac{\alpha_{-1}^{(n)}}{z} + \dots.$$

Los polinomios

$$\Phi_n(z) = z^n + \alpha_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)},$$

que representan el conjunto de los términos con potencias no negativas de z en los desarrollos de Laurent de las funciones $[\Phi(z)]^n$, se llaman **polinomios de Faber**, engendrados por el continuo K (abreviadamente, polinomios de Faber para K). Evidentemente,

$$\Phi_0(z) = 1, \quad \Phi_1(z) = z + \alpha_0, \quad \Phi_2(z) = z^2 + 2\alpha_0 z + \alpha_0^2 + 2\alpha_{-1}, \dots$$

Ejemplos:

1) K es un círculo $|z - z_0| \leq r_0$. En este caso $w = \Phi(z) = z - z_0$, y, por consiguiente, $\Phi_n(z) = (z - z_0)^n$.

2) K es la parte interior cerrada de una lemniscata de k focos:

$$|z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \dots + A_0| \leq \mu_0.$$

Como fácilmente puede convencerse el lector, aquí

$$\Phi(z) = z \left(1 + \frac{A_{k-1}}{z} + \dots + \frac{A_0}{z^k} \right)^{\frac{1}{k}}$$

(para la función multiforme $\left(1 + \frac{A_{k-1}}{z} + \dots + \frac{A_0}{z^k} \right)^{\frac{1}{k}}$ se toma la rama que es igual a 1 en el punto $z = \infty$). Por lo tanto,

$$[\Phi(z)]^{mh} = (z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \dots + A_0)^m \quad (m = 0, 1, \dots),$$

y, por consiguiente,

$$\Phi_{mh}(z) = (z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \dots + A_0)^m.$$

En particular, para la lemniscata de dos focos $|z^2 - 1| \leq 1$, se tiene:

$$\Phi(z) = z(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Aquí

$$\Phi_0(z) = 1, \quad \Phi_1(z) = z, \quad \Phi_2(z) = z^2 - 1, \quad \Phi_3(z) = z^3 - \frac{3}{2}z,$$

$$\Phi_4(z) = z^4 - 2z^2 + 1, \quad \Phi_5(z) = z^5 - \frac{5}{2}z^3 + \frac{15}{8}z, \dots$$

3) K es el segmento del eje real: $-1 \leq x \leq +1$. Aquí $w = \Phi(z) = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ transforma K en el recinto $|w| > \frac{1}{2}$ (se toma la rama de $\sqrt{z^2 - 1}$ que satisface a la condición $\frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z} \rightarrow 1$ para $z \rightarrow \infty$). Evidentemente, el desarrollo de Laurent de la función $\frac{1}{4}[\Phi(z)]^{-1} = \frac{1}{2}(z - \sqrt{z^2 - 1})$ en un entorno del punto $z = \infty$ no contiene potencias no negativas de z . Por ello, los conjuntos de potencias no negativas de z en los desarrollos de

$$\begin{aligned} [\Phi(z)]^n \text{ y } [\Phi(z)]^n + \frac{1}{4^n} [\Phi(z)]^{-n} = \\ = \left[\frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right]^n + \left[\frac{1}{2}(z - \sqrt{z^2 - 1}) \right]^n \end{aligned}$$

son iguales. Pero la última función es un polinomio de grado n , de donde

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2^n} [(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Haciendo aquí $z = \cos t$, obtenemos:

$$\Phi_n(\cos t) = \frac{1}{2^n} [(\cos t + i \sin t)^n + (\cos t - i \sin t)^n] = \frac{1}{2^{n-1}} \cos nt.$$

Por lo tanto,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arc} \cos z) = T_n(z).$$

Vemos, pues, que cuando K es el segmento $[-1, +1]$, los polinomios de Faber coinciden con los polinomios clásicos de Chebichev de separación mínima del cero en este segmento.

Volvamos a examinar el caso general. Si $|\xi| = R$ es una circunferencia cualquiera, dentro de la cual está situado K , entonces para cualquier punto z , $|z| < R$, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{[\Phi(\xi)]^n - \Phi_n(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.5:1)$$

En efecto, la función que figura bajo el signo integral es analítica para $|\xi| \geq R$ y posee en el punto del infinito un cero de orde

no inferior al segundo (puesto que $|\Phi(\zeta)|^n - \Phi_n(\zeta)$ posee en el punto del infinito un cero de orden no inferior al primero). Por esto, el residuo de la función respecto del punto del infinito es igual a cero y la integral también es igual a cero.

De la fórmula (4.5:1) se deduce que

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{|\Phi(\zeta)|^n}{\zeta-z} d\zeta. \quad (4.5:2)$$

Aquí se puede sustituir la circunferencia $|\zeta| = R$ por cualquier curva cerrada rectificable γ que esté situada en el recinto G_∞ y que contenga en su interior al punto z . Tomemos por γ una **i m a g e n c i r c u l a r** cualquiera C_R , o sea, la preimagen de la circunferencia $|w| = R > \rho$ en la transformación $w = \Phi(z)$. Tendremos:

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{|\Phi(\zeta)|^n}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{\Psi'(w) w^n}{\Psi(w)-z} dw, \quad (4.5:3)$$

donde $\Psi(w) = \Phi^{-1}(w)$ y z es cualquier punto del interior de C_R (en particular, cualquier punto del continuo K). De las fórmulas obtenidas se deduce que los polinomios de Faber $\Phi_n(z)$ son los coeficientes de w^{-n-1} en el desarrollo de Laurent de la función

$$\chi(w; z) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}$$

en un entorno del punto del infinito (z está fijado). Como $z = \Psi(w)$ tiene un polo simple en ∞ y $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\Psi'(w)}{w} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\Phi(z)} = 1$, se tiene:

$$\Psi(w) = w + \beta_0 + \frac{\beta_{-1}}{w} + \dots, \quad \Psi'(w) = 1 - \frac{\beta_{-1}}{w^2} + \dots,$$

de donde se deduce que la función $\chi(w, z)$ (considerada como función de w) posee un cero simple en el punto del infinito. Así, pues, para $|w| \geq R$ obtenemos un desarrollo uniformemente convergente:

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_0^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}}. \quad (4.5:4)$$

Vemos que $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}$ es la función generadora de los polinomios de Faber.

Designemos con $E_{R'}$ el conjunto de los puntos del recinto G_∞ que pertenecen a la parte exterior cerrada de la imagen circular $C_{R'}$, y sea r un número que satisfaga a la desigualdad $\rho < r < R'$. Para cualquier punto $z \in E_{R'}$ ($z \neq \infty$) y para un R suficientemente

grande, de la fórmula (4.5:3), tendremos:

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta = [\Phi(z)]^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.5:5)$$

Para la integral $I_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta$ obtenemos la cota

$$|I_r| < \frac{L_r}{2\pi\delta_{r,R'}} \cdot r^n,$$

donde L_r es la longitud de C_r y $\delta_{r,R'}$, es la distancia entre C_r y $C_{R'}$. Por lo tanto,

$$I_r = \frac{L_r}{2\pi\delta_{r,R'}} r^n \vartheta_n(z; r, R'),$$

donde $|\vartheta_n(z; r, R')| < 1$, y

$$\Phi_n(z) = [\Phi(z)]^n + \frac{L_r \cdot r^n}{2\pi\delta_{r,R'}} \cdot \vartheta_n(z; r, R'), \quad z \in E_{R'}. \quad (4.5:6)$$

Eligiendo $N(r, R')$ de modo que para todos los valores de $n > N(r, R')$ se cumpla la desigualdad

$$\frac{L_r}{2\pi\delta_{r,R'}} \cdot \frac{r^n}{R'^n} < \frac{1}{2},$$

y observando que $|\Phi(z)| \geq R'$ en el conjunto $E_{R'}$, obtenemos

$$\frac{1}{2} |\Phi(z)|^n < |\Phi_n(z)| < \frac{3}{2} |\Phi(z)|^n, \quad z \in E_{R'}, \quad (4.5:7)$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Phi_n(z)|} = |\Phi(z)| \quad (4.5:8)$$

para cualquier $z \in G_\infty$ y uniformemente en el interior del recinto $G_\infty \setminus \infty$.

4.6. En este apartado estudiaremos las series de polinomios de Faber:

$$\sum_0^\infty a_n \Phi_n(z). \quad (4.6:1)$$

Obsérvese, ante todo, que si

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_0} < \frac{1}{\rho}, \quad (4.6:2)$$

entonces la serie (4.6:1) es absoluta y uniformemente convergente en el interior del recinto limitado por la curva C_{R_0} , y es divergente en el exterior de la curva C_{R_0} . En efecto, sea $\rho < R' < R_0$; entonces,

en virtud de la segunda de las desigualdades (4.5:7), tendremos en $C_{R'}$:

$$|\Phi_n(z)| < \frac{3}{2} |\Phi(z)|^n = \frac{3}{2} R'^n \quad \text{para } n > N(R')$$

(r se puede tomar igual a $\frac{\rho+R'}{2}$). Por otra parte, para cualquier ε , $0 < \varepsilon < R_0 - R'$, obtenemos:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R_0 - \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{1}{R' + \frac{\varepsilon}{2}}$$

para $n > N'$. Por lo tanto, para $n > v = \max(N, N')$ tendremos en C_R (y, por consiguiente, también en el interior de $C_{R'}$):

$$|a_n| |\Phi_n(z)| < \frac{3}{2} \left(\frac{R'}{R' + \frac{\varepsilon}{2}} \right)^n,$$

de donde se deduce la convergencia absoluta y uniforme de la serie (4.5:1).

Si z está situado en el exterior a la curva C_{R_0} , entonces $|\Phi(z)| > R_0$ y, por consiguiente (debido a las fórmulas (4.5:8) y (4.6:2)), tendremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n \Phi_n(z)|} = \frac{|\Phi(z)|}{R_0} > 1,$$

o sea, la serie es divergente.

De la proposición demostrada se deduce que la suma de la serie (4.6:1) representa una función analítica en el interior de C_{R_0} (con la condición (4.6:2)). Demostremos que es cierta la proposición inversa: toda función $f(z)$ que sea analítica en el interior de C_{R_0} ($R_0 > \rho$) puede expresarse en este recinto en forma de una serie de la forma (4.6:1).

En efecto, para cualquier R , $\rho < R < R_0$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f[\Psi(w)] \cdot \Psi'(w)}{\Psi(w) - z} dw$$

(z está situado en el interior de C_R). Sustituyendo $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$ por su desarrollo (4.5:4), el cual es uniformemente convergente respecto de w en la circunferencia $|w| = R$, obtenemos:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n \Phi_n(z), \quad (4.6:1')$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} f[\Psi(w)] \frac{dw}{w^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z) \Phi'(z) dz}{[\Phi(z)]^{n+1}}. \quad (4.6:3)$$

Haciendo la notación $M_R = \max_{C_R} |f(z)|$, hallamos:

$$|a_n| < \frac{M_R}{R^n}, \quad (4.6:4)$$

de donde

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R},$$

y como R es cualquier número menor que R_0 , resulta:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R_0}.$$

Por esta razón, la serie (4.6:1') es absoluta y uniformemente convergente en el interior del recinto limitado por la curva C_{R_0} .

Demostremos que los desarrollos en serie de polinomios de Faber poseen la propiedad de unicidad (o identidad). En efecto, supongamos que las sumas de dos series de la forma (4.6:1) coinciden en el interior de C_{R_0} , $R_0 > \rho$. Entonces, formando la diferencia de estas series, obtenemos:

$$\sum_0^{\infty} a_n \Phi_n(z) = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R_0}. \quad (4.6:5)$$

Pero, para cualquier R' , $\rho < R' < R_0$, para $r = \frac{\rho + R'}{2}$ y z perteneciente a $E_{R'}$, tendremos en virtud de la fórmula (4.5:6):

$$|\Phi_n(z) - [\Phi(z)]^n| < \frac{L_r r^n}{2\pi \delta_{r,R}}$$

y, debido a la condición impuesta sobre a_n :

$$|a_n| |\Phi_n(z) - [\Phi(z)]^n| < \frac{L_r r^n}{2\pi \delta_{r,R} R^n}$$

para $n > N'$. De aquí se deduce que la serie

$$\sum_0^{\infty} a_n \{[\Phi(z)]^n - \Phi_n(z)\}$$

es uniformemente convergente en el conjunto $E_{R'}$ y, por consiguiente, representa una función analítica. Esta se anula en el punto del infinito, puesto que en este punto se anulan todos los términos de la serie. Efectuando la transformación $w = \Phi(z)$, hallaremos

que la función

$$\sum_0^{\infty} a_n \{w^n - \Phi_n[\Psi(w)]\} = \varphi(w) \quad (4.6:6)$$

es analítica para $|w| > R'$ (y, por consiguiente, también para $|w| > \rho$) y se anula en el punto del infinito. Pero $\sum_0^{\infty} a_n \Phi_n[\Psi(w)] = 0$ para $\rho < |w| < R_0$, o sea,

$$\varphi(w) = \sum_0^{\infty} a_n w^n. \quad (4.6:7)$$

Observando que la última serie es convergente para $|w| < R_0$ (en virtud de (4.6:5)), sacamos la conclusión de que la función, definida mediante la serie (4.6:6) para $|w| > \rho$ y mediante la serie (4.6:7) para $|w| < R_0$, es uniforme y analítica en todo el plano y se anula en el punto $z = \infty$. De aquí se deduce que $\varphi(w) \equiv 0$, y, por consiguiente, en virtud del desarrollo (4.6:7), se tiene: $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, que es lo que se quería demostrar.

En el caso particular en que K es un círculo $|z - z_0| \leq r_0$, los polinomios de Faber tienen la forma $\Phi_n(z) = (z - z_0)^n$ y las imágenes circulares C_r son las circunferencias $|z - z_0| = r$. En este caso las series de polinomios de Faber se convierten en las series de Taylor: $\sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Cuando K es el segmento del eje real $-1 \leq x \leq 1$, los polinomios de Faber coinciden con los polinomios de Chébishev:

$$\Phi_n(z) = T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arc} \cos z),$$

y las imágenes circulares C_r son las elipses

$$\frac{x^2}{\left(r + \frac{1}{4r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r - \frac{1}{4r}\right)^2} = 1$$

con los focos ± 1 , siendo $\rho = \frac{1}{2}$.

De las proposiciones demostradas se deduce que toda función analítica $f(z)$ en el interior de la elipse

$$\frac{x^2}{\left(R_0 + \frac{1}{4R_0}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R_0 - \frac{1}{4R_0}\right)^2} = 1,$$

es desarrollable en serie de polinomios de Chébishev

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n T_n(z),$$

la cual es uniformemente convergente dentro del recinto limitado por esta elipse, y además, este desarrollo es único.

4.7. Aplicando los polinomios de Faber se pueden obtener teoremas referentes al orden de aproximación de las funciones analíticas en cierto continuo K , mediante polinomios. Para el caso en que K es un segmento del eje real, tales teoremas fueron obtenidos por primera vez por S. N. Bernstein en su conocida tesis*).

L e m a d e B e r n s t e i n - W a l s h. Sea K un continuo; supongamos que G_∞ es aquel recinto contiguo con K que contiene al punto ∞ , y sean C_R las imágenes circulares en la transformación conforme del círculo $|w| > \rho$ en G_∞ mediante la función

$$\Psi(w) = w + \beta_0 + \frac{\beta_{-1}}{w} + \dots$$

Si $\Pi_n(z)$ es un polinomio de grado no superior a n que satisface en K a la desigualdad

$$|\Pi_n(z)| \leq M,$$

entonces en C_R (y en el interior de C_R) este polinomio satisface a la desigualdad

$$|\Pi_n(z)| \leq M \left(\frac{R}{\rho}\right)^n.$$

Demostración. Consideremos la función

$$\varphi(z) = \frac{\Pi_n(z)}{[\Phi(z)]^n} (\Phi(z) = \Psi^{-1}(w)).$$

Esta es analítica en el recinto G_∞ y

$$\varphi(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Pi_n(z)}{[\Phi(z)]^n} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{z}{\Phi(z)} \right]^n \frac{\Pi_n(z)}{z^n} \right\} = A_n,$$

donde A_n es el coeficiente de z^n en el polinomio $\Pi_n(z)$. Apliquemos el principio del módulo máximo a la función $\varphi(z)$ en el dominio E_r compuesto de todos los puntos de la parte exterior a la curva C_r , $r > \rho$ y de la misma curva C_r (para pasar del recinto no acotado a uno acotado, para el cual se demostró este principio, es suficiente realizar la transformación $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$, donde z_0 es un punto cualquiera del continuo K). Hallaremos que en cada punto $z \in E_r$ se cumple la

*) S. N. B e r n s t e i n. Sobre la aproximación óptima de las funciones continuas mediante polinomios de un grado dado. (С. Н. Б е р н ш т е й н, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщения Харьковского математического общества, вторая серия, XIII, 1912, стр. 49—194). Las proposiciones que nos interesan se hallan en las págs. 86—87 y 178—179. Véase también S. N. B e r n s t e i n, Obras completas, t. 1. Teoría constructiva de las funciones (С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, т. 1. Конструктивная теория функций, Изд-во АН СССР, 1952, стр. 21, 41 и 93).

desigualdad

$$|\varphi(z)| \leq \max_{\zeta \in C_r} |\varphi(\zeta)| = \frac{\max_{C_r} |\Pi_n(\zeta)|}{r^n}.$$

o bien, haciendo $|\Phi(z)| = R > r$:

$$|\Pi_n(z)| \leq \max_{C_r} |\Pi_n(\zeta)| \left(\frac{R}{r}\right)^n < \max_{C_r} |\Pi'_n(\zeta)| \left(\frac{R}{\rho}\right)^n.$$

Sea $\max_{C_r} |\Pi_n(\zeta)| = |\Pi_n(\zeta_r)|$, $\zeta_r \in C_r$; cuando r , decreciendo, tiende a ρ , el $\max_{C_r} |\Pi_n(\zeta)|$, sin crecer, tiende hacia un límite determinado μ . Es obvio que resulta este mismo límite cuando r recorre una sucesión $\{r_k\}$, convergente hacia ρ . Los puntos de acumulación de la sucesión $\{\zeta_{r_k}\}$ pertenecen todos a la frontera del recinto G_∞ (véase el teorema 1, ap. 3.1) y, por consiguiente, al continuo K ; pasando a sucesiones parciales se puede exigir que exista el límite: $\lim_{r_k \rightarrow \rho} \zeta_{r_k} = z_0 \in K$.

Entonces tendremos:

$$\mu = \lim_{r_k \rightarrow \rho} |\Pi_n(\zeta_{r_k})| = |\Pi_n(z_0)| \leq M,$$

y, por consiguiente,

$$|\Pi_n(z)| \leq \mu \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \leq M \left(\frac{R}{\rho}\right)^n,$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema de S. N. Bernstéin. Una función $f(z)$ de variable compleja z , definida en un continuo K , admite, para cada $\varepsilon > 0$ y para todos los valores naturales de n , aproximaciones mediante polinomios $\Pi_n(z)$ de grado no superior a n , que satisfacen a las desigualdades

$$|f(z) - \Pi_n(z)| < C(\varepsilon)(q + \varepsilon)^n \quad (q < 1), \quad (4.7:1)$$

cuando y sólo cuando, ella es analítica en el recinto limitado por la curva C_{R_0} , donde $R_0 = \frac{\rho}{q}$. En este caso, la sucesión $\{\Pi_n(z)\}$ converge hacia $f(z)$ uniformemente en el interior del recinto indicado.

Demostración. Supongamos primero que $f(z)$ es una función analítica en el interior de C_{R_0} , donde $R_0 = \frac{\rho}{q}$ y $q < 1$. Entonces, según al apartado precedente, ella se expresa por una serie de polinomios de Faber, uniformemente convergente en el

interior de C_{R_0} :

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_k \Phi_k(z).$$

Las sumas parciales de esta serie

$$\sum_0^n a_k \Phi_k(z) = \Pi_n(z)$$

son polinomios de grado no superior a n (puesto que el grado de cada $\Phi_k(z)$ es igual a k). Cerciorémonos de que estos polinomios satisfacen a las condiciones del teorema. Aquí es suficiente demostrar la desigualdad (4.7:1). Sea ε un número positivo arbitrario, menor que $1 - q$. Elijamos los números R' y R : $\rho < R' < R < R_0$, de modo que se cumpla la relación

$$\frac{R'}{R} = q + \varepsilon \left(> \frac{\rho}{R_0} \right),$$

lo cual, evidentemente, siempre es posible. Según la fórmula (4.6:4), se tiene:

$$|a_k| < \frac{M_R}{R^k},$$

donde $M_R = \max_{C_R} |f(z)|$, luego, en virtud de (4.5:7), en todos los puntos de la curva C_R , se cumple la desigualdad

$$|\Phi_k(z)| < \frac{3}{2} |\Phi(z)|^k = \frac{3}{2} R'^k \quad \text{para } n > N(\varepsilon)$$

(para precisar, se puede tomar r igual a $\frac{R'+\rho}{2}$). Por lo tanto, para $n > N(\varepsilon)$ en todos los puntos de la curva C_R tendremos:

$$\begin{aligned} |f(z) - \Pi_n(z)| &= \left| \sum_{n+1}^{\infty} a_k \Phi_k(z) \right| < \frac{3}{2} M_R \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{R'}{R} \right)^k = \\ &= \frac{3}{2} M_R \frac{\left(\frac{R'}{R} \right)^{n+1}}{1 - \frac{R'}{R}} = \frac{3}{2} M_R \frac{q + \varepsilon}{1 - (q + \varepsilon)} (q + \varepsilon)^n. \end{aligned}$$

Debido al principio del módulo máximo esta desigualdad se cumplirá también en todos los puntos del continuo K . Sustituyendo, en caso de necesidad, el número $\frac{3}{2} M_R \frac{q + \varepsilon}{1 - (q + \varepsilon)}$ por uno mayor, podemos conseguir que se cumpla también la desigualdad obtenida para $n \leq N(\varepsilon)$.

Así, pues, para cierto $C = C(\varepsilon)$ tendremos:

$$|f(z) - \Pi_n(z)| < C(\varepsilon)(q + \varepsilon)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad z \in K,$$

con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

Demostremos ahora la segunda parte del teorema. Supongamos que para una función $f(z)$, definida en K , existen unos polinomios $\Pi_n(z)$ que satisfacen a las desigualdades (4.7:1). Entonces, evidentemente, tendremos en todos los puntos del continuo K (uniformemente):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(z) = f(z).$$

Demostremos que la sucesión $\{\Pi_n(z)\}$ es uniformemente convergente en el interior del recinto limitado por la curva

$C_{R_0} \left(R_0 - \frac{\rho}{q} \right)$. En efecto, de (4.7:1) se deduce que

$$|\Pi_n(z) - \Pi_{n-1}(z)| < C(\varepsilon)(q + \varepsilon)^n \left(1 + \frac{1}{q + \varepsilon} \right) = C'(\varepsilon)(q + \varepsilon)^n$$

en todos los puntos del continuo K . Vamos a suponer que $\varepsilon < \frac{1-q}{2}$,

y hagamos $R = \frac{\rho}{q + 2\varepsilon}$ ($> \rho$). Entonces, aplicando el lema de Bernstein-Walsh al polinomio $\Pi_n(z) - \Pi_{n-1}(z)$ de grado no superior a n , hallaremos que en todos los puntos de la curva C_R se cumplen las desigualdades:

$$|\Pi_n(z) - \Pi_{n-1}(z)| < C'(\varepsilon)(q + \varepsilon)^n \frac{R^n}{\rho^n} = C'(\varepsilon) \left(\frac{q + \varepsilon}{q + 2\varepsilon} \right)^n.$$

De aquí se deduce que la serie

$$\Pi_0(z) + (\Pi_1(z) - \Pi_0(z)) + \dots + (\Pi_n(z) - \Pi_{n-1}(z)) + \dots,$$

o la sucesión $\{\Pi_n(z)\}$, es uniformemente convergente en el interior de C_R . Pero $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R = R_0$, por lo cual la sucesión $\{\Pi_n(z)\}$ es uni-

formemente convergente en el interior del recinto limitado por la curva C_{R_0} , y, por consiguiente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(z)$ es una función analítica

en el interior de C_{R_0} que en todos los puntos del continuo K coincide con $f(z)$. Con esto se termina la demostración del teorema.

Aplicando el teorema demostrado al caso en que K es un círculo $|z - z_0| \leq r_0$, hallaremos que la existencia, para cualquier $\varepsilon > 0$, de polinomios $\Pi_n(z)$ de grado no superior a n , que satisfagan a las desigualdades

$$|f(z) - \Pi_n(z)| < C(\varepsilon)(q + \varepsilon)^n \\ (0 < q < 1), \quad z \in K,$$

es necesaria y suficiente para que $f(z)$ sea analítica en el interior de la circunferencia $|z - z_0| < \frac{r_0}{q}$; y cuando K es el segmento $-1 \leq x \leq 1$, la condición análoga (que debe cumplirse en los puntos de este segmento) es necesaria y suficiente para que la función $f(z)$ sea analítica en el interior de la elipse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2q} + \frac{q}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2q} - \frac{q}{2}\right)^2} = 1$$

(o sea, la elipse con los focos ± 1 y cuya suma de semiejes es igual a $\frac{1}{q}$).

4.8. Aquí y hasta el final de este capítulo, nos dedicaremos al estudio de las series de polinomios ortogonales sobre la superficie

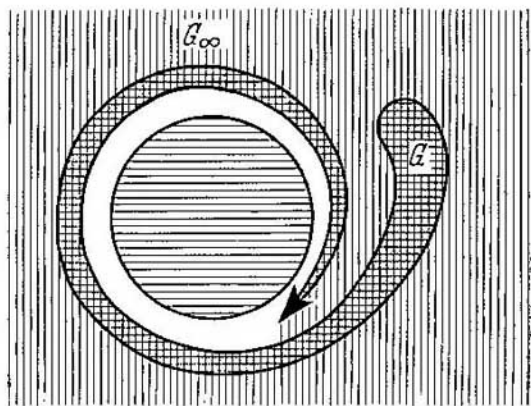


FIG. 21.

de un recinto. Sea G un recinto acotado simplemente conexo que posea la propiedad de que su frontera coincida con la frontera de recinto G_∞ , o sea, de aquel recinto contiguo con \bar{G} que contiene al punto ∞ . Los recintos de este tipo se llaman **recintos de Carathéodory**. Tales son todos los que están limitados por curvas de Jordan, pero no sólo ellos. En la fig. 21 está representado un recinto de Carathéodory cuya frontera divide el plano en tres recintos distintos. En la fig. 22 están representados dos recintos que no son de Carathéodory.

La propiedad característica de los recintos de Carathéodory consiste en que cada uno de ellos se puede representar en forma del núcleo de una sucesión convergente decreciente de recintos simplemente conexos $\{G_n\}$:

$$\bar{G} \subset G_{n+1} \subset \bar{G}_{n+1} \subset G_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La construcción de tal sucesión coincide totalmente con la construcción descrita en el apartado 4.2 para el caso en que G está limitado por una curva de Jordan. Pero en lugar de afirmar que ningún punto que sea exterior a G pertenece al núcleo de la sucesión $\{G_n\}$, podemos decir ahora solamente que ninguno de los puntos del recinto

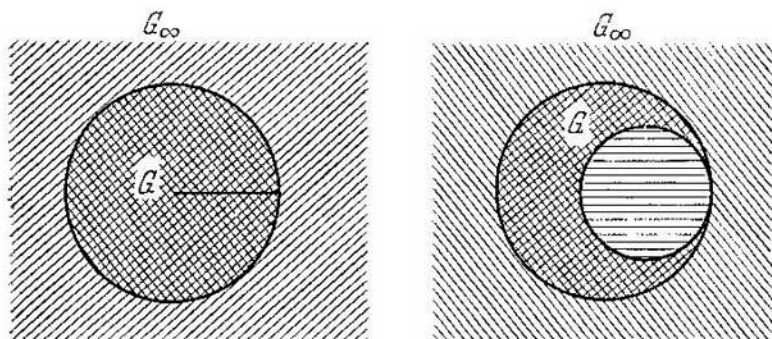


FIG. 22.

G_∞ puede pertenecer a este núcleo. Para obtener el núcleo que coincida con el recinto G , es necesario señalar que se trata del núcleo con respecto a algún punto $z_0 \in G$. Como G contiene a z_0 y pertenece a todos los G_n , el recinto G está contenido en el núcleo correspondiente. Para demostrar que G coincide con el núcleo es suficiente observar que ninguno de los puntos frontera del recinto G puede pertenecer al núcleo. Pero, en efecto, cada uno de tales puntos es también punto frontera para G_∞ (según la definición de recinto de Carathéodory) y, por consiguiente, contiene en cualquier entorno puntos de G_∞ . Y como estos últimos no pueden pertenecer al núcleo, los puntos frontera del recinto G no pertenecen al núcleo. Así, pues, queda demostrada la existencia de la sucesión pedida. El lector demostrará sin dificultad que todo recinto G , para el cual exista una sucesión semejante, es un recinto de Carathéodory. Por cierto, aquí no emplearemos esto.

L e m a. Sea G un recinto de Carathéodory y sea $\{G_n\}$ una sucesión decreciente de recintos acotados simplemente conexos, convergente hacia

G como hacia su núcleo. Entonces, para la sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ que transforman conformemente G_n en el círculo $|w| < 1$ y satisfacen a las condiciones: $f_n(z_0) = 0$, $f'_n(z_0) > 0$ ($z_0 \in G$), y para cualquier número entero no negativo k , se cumple la relación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_G |[f_n(z)]^k f'_n(z) - [f(z)]^k f'(z)|^2 dx dy = 0,$$

donde $f(z)$ transforma conformemente el recinto G en el mismo círculo y satisface a las condiciones análogas: $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.

Demostración. De la desigualdad elemental

$$\left| \sum_1^m a_k \right|^2 \leq m \sum_1^m |a_k|^2 *$$

para $m=2$, se deduce que

$$\begin{aligned} |[f_n(z)]^k f'_n(z) - [f(z)]^k f'(z)|^2 &\leq 2|f_n(z)|^{2k} |f'_n(z) - f'(z)|^2 + \\ &+ 2|f'(z)|^2 |[f_n(z)]^k - [f(z)]^k|^2 < 2|f'_n(z) - f'(z)|^2 + \\ &+ 2k^2 |f'(z)|^2 |f_n(z) - f(z)|^2, \end{aligned} \quad (4.8:1)$$

donde se ha tenido en cuenta que $|f(z)| < 1$ y $|f_n(z)| < 1$.

Designemos con γ_r la imagen circular $f^{-1}(|w|=r)$; cualquiera que sea el conjunto cerrado $F \subset G$, éste quedará contenido dentro de γ_r , si r es suficientemente próximo a la unidad. Sea ε un número positivo arbitrario. Elijamos r_0 y ρ_0 ($< r_0$) de modo que $\pi - \pi\rho_0^2$ sea menor que ε^2 . Finalmente, empleando la convergencia uniforme de las sucesiones $\{f_n(z)\}$ y $\{f'_n(z)\}$ en el interior de G hacia las funciones $f(z)$ y $f'(z)$, respectivamente (en virtud del teorema de Carathéodory), elijamos $N_0(\varepsilon)$ de modo que para $n > N_0$ en γ_{r_0} (y, por consiguiente, en el interior de γ_{r_0}) se cumplan las desigualdades:

$$|f_n(z) - f(z)| < r_0 - \rho_0 \quad \text{y} \quad |f'_n(z) - f'(z)| < \varepsilon.$$

Entonces tendremos:

$$\begin{aligned} &\iint_G |f'_n(z) - f'(z)|^2 dx dy = \\ &= \iint_{g_{r_0}} |f'_n(z) - f'(z)|^2 dx dy + \iint_{G \setminus g_{r_0}} |f'_n(z) - f'(z)|^2 dx dy \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \text{área } g_{r_0} + 2 \iint_{G \setminus g_{r_0}} |f'_n(z)|^2 dx dy + 2 \iint_{G \setminus g_{r_0}} |f'(z)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

*) Esta se obtiene de la desigualdad $\left| \sum_0^m a_k b_k \right|^2 \leq \sum_0^m |a_k|^2 \sum_0^m |b_k|^2$ para $b_1 = \dots = b_m = 1$.

La integral $\int\int_{G-g_{r_0}} |f'(z)|^2 dx dy$ representa el área de la imagen de la parte del recinto G que está situada fuera de γ_{r_0} , es decir, el área del anillo circular $r_0 < |w| < 1$, igual a $\pi - \pi r_0^2$; según la hipótesis, ésta es menor que ε^2 . La integral $\int\int_{G-g_{r_0}} |f_n(z)|^2 dx dy$ representa el área de la imagen de la misma parte, pero en la transformación $w = f_n(z)$. Como en γ_{r_0} se cumple la desigualdad $|f_n(z) - f(z)| < r_0 - \rho_0$, esta imagen está contenida entre la circunferencia unidad y la circunferencia $|z| = \rho_0$; por lo tanto, el área de la imagen es menor que $\pi - \pi \rho_0^2$, es decir, es menor que ε^2 . Observando también que el área de g_{r_0} es menor que S , obtenemos:

$$\int\int_G |f_n(z) - f(z)|^2 dx dy < \varepsilon^2 (S + 4). \quad (4.8:2)$$

Examinemos la integral $\int\int_G |f'(z)|^2 |f_n(z) - f(z)|^2 dx dy$; se tiene:

$$\begin{aligned} \int\int_G |f'(z)|^2 |f_n(z) - f(z)|^2 dx dy &= \\ &= \int\int_{g_{r_0}} |f'(z)|^2 |f_n(z) - f(z)|^2 dx dy + \\ &+ \int\int_{G \setminus g_{r_0}} |f'(z)|^2 |f_n(z) - f(z)|^2 dx dy \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \int\int_{g_{r_0}} |f'(z)|^2 dx dy + 4 \int\int_{G \setminus g_{r_0}} |f'(z)|^2 dx dy < \pi \varepsilon^2 + 4 \varepsilon^2 = (\pi + 4) \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (4.8:3)$$

De las desigualdades (4.8:1), (4.8:2), (4.8:3) sacamos la conclusión que

$$\begin{aligned} \int\int_G |[f_n(z)]^k f_n(z) - [f(z)]^k f'(z)|^2 dx dy < \\ < 2 \int\int_G |f_n(z) - f(z)|^2 dx dy + 2k^2 \int\int_G |f'(z)|^2 |f_n(z) - f(z)|^2 dx dy < \\ < \varepsilon^2 [2S + 8 + 2k^2 (\pi + 4)] \quad \text{para } n > N_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Como ε es aquí arbitrariamente pequeño, resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_G |[f_n(z)]^k f'_n(z) - [f(z)]^k f'(z)|^2 dx dy = 0,$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema. Supongamos que G es un recinto de Carathéodory y que $F(z)$ es una función analítica en el recinto G que satisface a la condición

$$\iint_G |F(z)|^2 dx dy < \infty *).$$

Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $\Pi(z)$ tal que

$$\iint_G |F(z) - \Pi(z)|^2 dx dy < \varepsilon^2.$$

Demostración. Sustituyendo z en la función $F(z)$ mediante $f^{-1}(w)$, obtenemos una función $F^*(w)$ para la cual se cumple la condición

$$\iint_{|w| < 1} |F^*(w) f^{-1'}(w)|^2 du dv = \iint_G |F(z)|^2 dx dy = C < \infty.$$

Sea

$$\varphi(w) = F^*(w) f^{-1'}(w) = \sum_0^{\infty} a_n w^n;$$

entonces

$$\begin{aligned} \iint_{|w| \leq r < 1} |\varphi(w)|^2 du dv &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \left| \sum_0^{\infty} a_n w^n \right|^2 r dr d\theta = \\ &= \int_0^r dr \left[\int_0^{2\pi} \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_n \bar{a}_m r^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta} d\theta \right] = \\ &= 2\pi \int_0^r \sum_0^{\infty} |a_k|^2 r^{2k+1} dr = \pi \sum_0^{\infty} |a_k|^2 \frac{r^{2k+2}}{k+1} < C. \end{aligned}$$

De aquí que $\pi \sum_0^N |a_k|^2 \frac{r^{2k+2}}{k+1} < C$ para cualquier N y $r < 1$, por lo

cual $\pi \sum_0^N \frac{|a_k|^2}{k+1} \leq C$, y luego $\pi \sum_0^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1} \leq C$ es decir, la serie

$$\sum_0^{\infty} \frac{a_k^2}{k+1}$$

es convergente.

*) La integral se entiende como impropia.

Examinemos la integral

$$\begin{aligned} & \iint_{|w| \leq r < 1} \left| \varphi(w) - \sum_0^N a_k w^k \right|^2 du dv = \\ & = \iint_{|w| \leq r < 1} \left| \sum_{N+1}^{\infty} a_k w^k \right|^2 du dv = \pi \sum_{N+1}^{\infty} |a_k|^2 \frac{r^{2k+2}}{k+1} < \pi \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1}. \end{aligned}$$

Pasando aquí al límite para $r \rightarrow 1$, tendremos:

$$\iint_{|w| < 1} \left| \varphi(w) - \sum_0^N a_k w^k \right|^2 du dv < \pi \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1}$$

y, finalmente,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \iint_{|w| < 1} \left| \varphi(w) - \sum_0^N a_k w^k \right|^2 du dv = 0.$$

Volviendo a la variable inicial mediante la transformación $w = f(z)$, hallaremos que

$$\begin{aligned} & \iint_{|w| < 1} \left| \varphi(w) - \sum_0^N a_k w^k \right|^2 du dv = \int_G \left| \frac{F(z)}{f'(z)} - \right. \\ & \left. - \sum_0^N a_k [f(z)]^k \right|^2 |f'(z)|^2 dx dy = \int_G \left| F(z) - \sum_0^N a_k [f(z)]^k f'(z) \right|^2 dx dy, \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_G \left| F(z) - \sum_0^N a_k [f(z)]^k f'(z) \right|^2 dx dy = 0.$$

Basándonos en el lema y en el teorema de Runge, demostraremos ahora que las funciones $\sum_0^N a_n [f(z)]^n f'(z)$ se pueden sustituir aquí por polinomios.

Sea ε un número positivo arbitrario. Fijemos $N_0 = N(\varepsilon)$ de modo que se cumpla la desigualdad

$$\int_G \left| F(z) - \sum_0^{N_0} a_k [f(z)]^k f'(z) \right|^2 dx dy < \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

Observando que

$$\begin{aligned} & \iint_G \left| \sum_0^{N_0} a_h [f(z)]^h f'(z) - \sum_0^{N_0} a_h [f_n(z)]^h f'_n(z) \right|^2 dx dy \leq \\ & \leq N_0 \sum_0^{N_0} |a_h|^2 \iint_G |[f(z)]^h f'(z) - [f_n(z)]^h f'_n(z)|^2 dx dy, \end{aligned}$$

elijamos $n = n_0(\varepsilon)$ basándose en el lema, de modo que el segundo miembro de la desigualdad sea menor que $\frac{\varepsilon^2}{16}$. Entonces tendremos:

$$\begin{aligned} & \iint_G \left| F(z) - \sum_0^{N_0} a_h [f_{n_0}(z)]^h f'_{n_0}(z) \right|^2 dx dy \leq \\ & \leq 2 \iint_G \left| F(z) - \sum_0^{N_0} a_h [f(z)]^h f'(z) \right|^2 dx dy + \\ & + 2 \iint_G \left| \sum_0^{N_0} a_h [f(z)]^h f'(z) - \sum_0^{N_0} a_h [f_{n_0}(z)]^h f'_{n_0}(z) \right|^2 dx dy < \frac{\varepsilon^2}{4}. \end{aligned} \tag{4.8:4}$$

Aplicando el teorema de Runge a la función $\sum_0^{N_0} a_h [f_{n_0}(z)]^h f'_{n_0}(z)$, la cual es analítica en el recinto simplemente conexo G_{n_0} , y al conjunto $\bar{G} \subset G_{n_0}$, hallaremos un polinomio $\Pi(z)$ tal que

$$\left| \sum_0^{N_0} a_h [f_{n_0}(z)]^h f'_{n_0}(z) - \Pi(z) \right|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4S}, \quad z \in \bar{G},$$

donde S denota el área del recinto G . Entonces obtenemos:

$$\iint_G \left| \sum_0^{N_0} a_h [f_{n_0}(z)]^h f'_{n_0}(z) - \Pi(z) \right|^2 dx dy < \frac{\varepsilon^2}{4} \tag{4.8:5}$$

y, finalmente, confrontando (4.8:4) y (4.8:5):

$$\iint_G |F(z) - \Pi(z)|^2 dx dy < \varepsilon^2,$$

que es lo que se quería demostrar.

Los recintos de Carathéodory no son los recintos más generales a los que se extiende el teorema demostrado. Este es válido para todos los recintos que en un sentido determinado, que admite unas

características cuantitativas completamente exactas, son próximos a los recintos de Carathéodory.

Estas cuestiones, que exigieron la aplicación de métodos muy sutiles del análisis y de la teoría de funciones, fueron estudiadas por M. V. Kéldish, A. L. Shaguinián y M. M. Dzhrbashián.

Para abreviar, designemos con H'_2 el conjunto de todas las funciones $\{F(z)\}$ que son analíticas en un recinto de Carathéodory G y satisfacen a la condición

$$\iint_G |F(z)|^2 dx dy < \infty,$$

(funciones de cuadrado del módulo integrable). Según el teorema demostrado, para cada función $F(z) \in H'_2$ existe una sucesión de polinomios $\Pi_n(z)$ que satisface a la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_G |F(z) - \Pi_n(z)|^2 dx dy = 0,$$

o sea, que converge en media hacia F (sobre la superficie del recinto). Demostremos que para las funciones analíticas de variable compleja, de la convergencia en media se deduce la convergencia uniforme en el interior del recinto. En efecto, supongamos que $z_0 \in G$ y que ρ_0 es la distancia de este punto hasta la frontera del recinto G ; entonces el círculo $k: |z - z_0| < \rho_0$ pertenece al recinto G . Si $\{F_n(z)\}$ es una sucesión de funciones analíticas que converge en media hacia $F(z)$ y

$$\iint_G |F(z) - F_n(z)|^2 dx dy = \varepsilon_n^2,$$

con más razón

$$\iint_k |F(z) - F_n(z)|^2 dx dy < \varepsilon_n^2.$$

Desarrollemos $F(z) - F_n(z)$ en serie de Taylor según las potencias de $z - z_0$:

$$F(z) - F_n(z) = \sum_0^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

En virtud del cálculo hecho al comienzo de la demostración del teorema del presente apartado, se tiene:

$$\pi \sum_0^{\infty} |a_k|^2 \frac{\rho_0^{2k+2}}{k+1} \leq \iint_k |F(z) - F_n(z)|^2 dx dy < \varepsilon_n^2,$$

de donde

$$\pi \rho_0^2 |a_0|^2 \leq \varepsilon_n^2.$$

Pero $a_0 = F(z_0) - F_n(z_0)$, por consiguiente,

$$|F(z_0) - F_n(z_0)|^2 < \frac{\varepsilon_n^2}{\pi \rho_0^2}.$$

Con esta desigualdad queda establecida la convergencia uniforme de $\{F_n(z)\}$ hacia $F(z)$ en el interior del recinto G .

La proposición recíproca no es justa: de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones analíticas en el interior de un recinto dado no se deduce ni mucho menos la convergencia en media. Así, por ejemplo, la sucesión $\{\sqrt{n+1} z^n\}$ converge uniformemente hacia cero en el interior del círculo unidad, mientras que

$$\iint_{|z| < 1} |\sqrt{n+1} z^n|^2 dx dy = \pi$$

para cualquier n , es decir, la sucesión no converge en media hacia cero (y, por consiguiente, no puede ser en general convergente en media, puesto que como se vio, el límite en media, si existiese, tendría que coincidir con el límite en el sentido de la convergencia uniforme).

4.9. Construyamos una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$, de grado n , que sean ortogonales y estén normalizados sobre la superficie de un recinto G , es decir, que satisfagan a las condiciones

$$\iint_G P_n(z) \overline{P_m(z)} dx dy = \delta_{nm},$$

donde $\delta_{nm} = 0$, si $n \neq m$ y $\delta_{nn} = 1$ ($n, m = 0, 1, 2, \dots$).

Exijamos también, para precisar, que el coeficiente de la potencia superior de z en la expresión de $P_n(z)$ sea un número real positivo. Entonces los polinomios quedarán determinados unívocamente.

Así, pues, para $P_0(z)$ obtenemos: $P_0(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{S}}$, donde S es el área del recinto G . Supongamos que ya se han construido los polinomios $P_0(z), P_1(z), \dots, P_n(z)$ y que el grado del polinomio $P_j(z)$ es igual a j ($j = 0, \dots, n$). Entonces cualquier polinomio $p(z)$ de grado $n+1$ con el coeficiente positivo μ en z^{n+1} , puede escribirse en la forma

$$p(z) = \mu z^{n+1} + \lambda_n P_n(z) + \dots + \lambda_0 P_0(z).$$

De aquí resulta que

$$\iint_G p(z) \overline{P_m(z)} dx dy = \mu \iint_G z^{n+1} \overline{P_m(z)} dx dy + \lambda_m,$$

y, por consiguiente, las condiciones $\lambda_m = -\mu \iint_G z^{n+1} \overline{P_m(z)} dx dy - \mu c_m$ ($m = 0, \dots, n$) son necesarias y suficientes para que sea $\iint_G p(z) \overline{P_m(z)} dx dy = 0$ ($m = 0, \dots, n$).

En estas condiciones $p(z)$ toma la forma $p(z) = \mu |z|^{n+1} - c_n P_n(z) - \dots - c_0 P_0(z) = \mu q(z)$, donde $q(z) \neq 0$, y los coeficientes del polinomio $q(z)$ no dependen de μ .

Se tiene:

$$\iint_G |p(z)|^2 dx dy = \mu^2 \iint_G |q(z)|^2 dx dy \neq 0,$$

y, por consiguiente, existe un valor de μ (real y positivo), y solamente uno, para el cual

$$\iint_G |p(z)|^2 dx dy = 1.$$

De estos razonamientos se deduce que, si los polinomios ortogonales y normalizados $P_0(z), \dots, P_n(z)$ ya están construidos, entonces existe un polinomio $P_{n+1}(z)$, y solamente uno (con la condición de que el coeficiente superior sea positivo), que forma con ellos un sistema ortogonal y normal. Por lo tanto, queda demostrada la existencia y unicidad del sistema pedido de polinomios.

Observando que cualquier polinomio $\Pi_n(z)$ de grado no superior a n puede expresarse en la forma

$$\Pi_n(z) = c_0 P_0(z) + \dots + c_n P_n(z),$$

elegiremos los coeficientes c_j ($j = 0, \dots, n$) de modo que la integral

$$\iint_G |F(z) - \Pi_n(z)|^2 dx dy,$$

donde $F(z) \in H'_2$, tenga el valor mínimo posible. Un sencillo cálculo nos lleva al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} & \iint_G |F(z) - \Pi_n(z)|^2 dx dy = \\ & = \iint_G \left[F(z) - \sum_0^n c_j P_j(z) \right] \cdot \left[\overline{F(z)} - \sum_0^n \overline{c_j} \overline{P_j(z)} \right] dx dy = \\ & = \iint_G |F(z)|^2 dx dy - \sum_0^n c_j \iint_G \overline{F(z)} P_j(z) dx dy - \\ & \quad - \sum_0^n \overline{c_j} \iint_G F(z) \overline{P_j(z)} dx dy + \sum_0^n |c_j|^2. \end{aligned}$$

Haciendo la notación $a_j = \iint_G F(z) \overline{P_j(z)} dx dy$ ($j = 0, 1, 2, \dots$),

llamaremos a estos números coeficientes de Fourier de la función $F(z)$ respecto del sistema $\{P_n(z)\}$. Entonces la última relación se escribirá así

$$\begin{aligned} & \iint_G |F(z) - \Pi_n(z)|^2 dx dy = \\ & = \iint_G |F(z)|^2 dx dy - \sum_0^n c_j \bar{a}_j - \sum_0^n \bar{c}_j a_j + \sum_0^n c_j \bar{c}_j = \\ & = \iint_G |F(z)|^2 dx dy - \sum_0^n |a_j|^2 + \sum_0^n |c_j - a_j|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que el valor mínimo buscado se alcanza solamente para $c_j = a_j$ ($j = 0, \dots, n$) y éste es igual a

$$\iint_G |F(z)|^2 dx dy - \sum_0^n |a_j|^2 \geq 0.$$

Resumiendo,

$$\begin{aligned} \iint_G |F(z) - \Pi_n(z)|^2 dx dy & \geq \iint_G \left| F(z) - \sum_0^n a_j P_j(z) \right|^2 dx dy = \\ & = \iint_G |F(z)|^2 dx dy - \sum_0^n |a_j|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (4.9:1)$$

donde a_j son los coeficientes de Fourier de la función $F(z)$.

En virtud del teorema del apartado anterior, para la función $F(z)$ existe una sucesión de polinomios $\{\Pi_n(z)\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_G |F(z) - \Pi_n(z)|^2 dx dy = 0.$$

Debido a la desigualdad (4.9:1), posee esta misma propiedad la sucesión de polinomios $\left\{ \sum_0^n a_j P_j(z) \right\}$. En otras palabras, esta sucesión converge en media hacia $F(z)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_G \left| F(z) - \sum_0^n a_j P_j(z) \right|^2 dx dy = 0. \quad (4.9:2)$$

De aquí, según el apartado anterior, sacamos la conclusión de que la misma sucesión converge uniformemente hacia $F(z)$ en el interior de G , es decir, para cualquier función $F(z) \in H_2$ se verifica el desarrollo:

$$F(z) = \sum_0^{\infty} a_n P_n(z), \quad a_n = \iint_G F(z) \overline{P_n(z)} dx dy. \quad (4.9:3)$$

Este se llama desarrollo de Fourier de la función $F(z)$ (según los polinomios ortogonales sobre la superficie $\{P_n(z)\}$).

Comparando (4.9:2) y (4.9:1), obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\iint_G |F(z)|^2 dx dy - \sum_0^n |a_j|^2 \right] = 0,$$

o sea, la serie $\sum_0^{\infty} |a_n|^2$ es convergente y

$$\sum_0^{\infty} |a_n|^2 = \iint_G |F(z)|^2 dx dy. \quad (4.9:4)$$

Esta relación representa la igualdad de Parseval para los desarrollos considerados.

Cerciorémonos de que una serie escrita *a priori*

$$\sum_0^{\infty} \alpha_n P_n(z), \quad (4.9:5)$$

para la cual se cumpla la condición

$$\sum_0^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty, \quad (4.9:6)$$

representa la serie de Fourier de cierta función $\Phi(z) \in H_2'$. En efecto, según el ap. 4.8, de la igualdad

$$\iint_G \left| \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_h P_h(z) \right|^2 dx dy = \sum_{n+1}^{n+p} |\alpha_n|^2,$$

se deduce que

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_h P_h(z_0) \right|^2 < \frac{\sum_{n+1}^{n+p} |\alpha_h|^2}{\pi \rho_0^2},$$

donde ρ_0 es la distancia desde el punto z_0 hasta la frontera del recinto G , y como la serie (4.9:6) es convergente, la serie (4.9:5) será

uniformemente convergente en el interior del recinto G , y, por consiguiente, su suma es una función analítica $\Phi(z)$. Sea \bar{g} un recinto cerrado (un dominio), contenido en el recinto G . En virtud de la convergencia uniforme de la serie (4.9:5), se tiene:

$$\iint_{\bar{g}} |\Phi(z)|^2 dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\bar{g}} \left| \sum_0^n \alpha_k P_k(z) \right|^2 dx dy.$$

Pero

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{g}} \left| \sum_0^n \alpha_k P_k(z) \right|^2 dx dy &\leq \iint_G \left| \sum_0^n \alpha_k P_k(z) \right|^2 dx dy = \\ &= \sum_0^n |\alpha_k|^2 \leq \sum_0^\infty |\alpha_k|^2, \end{aligned}$$

por lo cual

$$\iint_{\bar{g}} |\Phi(z)|^2 dx dy \leq \sum_0^\infty |\alpha_k|^2 < \infty,$$

y como \bar{g} es un dominio cualquiera contenido en el recinto G , la integral $\iint_G |\Phi(z)|^2 dx dy$ existe (es convergente), es decir, $\Phi(z) \in H_2'$.

Además

$$\iint_G |\Phi(z)|^2 dx dy \leq \sum_0^\infty |\alpha_k|^2.$$

Aplicando el resultado obtenido a la serie $\sum_{n+1}^\infty \alpha_k P_k(z) = \Phi(z) - \sum_0^n \alpha_k P_k(z)$, hallaremos que

$$\iint_G \left| \Phi(z) - \sum_0^n \alpha_k P_k(z) \right|^2 dx dy \leq \sum_{n+1}^\infty |\alpha_k|^2.$$

Por lo tanto, para $n \geq m$, donde m es un número entero no negativo:

$$\begin{aligned} &\left| \iint_G \Phi(z) \overline{P_m(z)} dx dy - \alpha_m \right|^2 = \\ &= \left| \iint_G \left[\Phi(z) - \sum_0^n \alpha_k P_k(z) \right] \overline{P_m(z)} dx dy \right|^2 \leq \\ &\leq \iint_G \left| \Phi(z) - \sum_0^n \alpha_k P_k(z) \right|^2 dx dy \iint_G |\overline{P_m(z)}|^2 dx dy \leq \sum_{n+1}^\infty |\alpha_k|^2, \end{aligned}$$

y como el primer miembro no depende de n , mientras que el segundo tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, resulta $\alpha_m = \iint_G \Phi(z) \overline{P_m(z)} dx dy$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), de donde se deduce que la serie (4.8:5) es la serie de Fourier de la función $\Phi(z) \in H'_2$.

De lo demostrado se deduce que el espacio H'_2 es completo. Precisando, demos-tremos que si una sucesión $\{F_n(z)\} \subset H'_2$ satisface al criterio de Cauchy: para cada $\varepsilon > 0$ se tiene $\iint_G |F_m(z) - F_n(z)|^2 dx dy < \varepsilon^2$ si $m > N(\varepsilon)$ y $n > N(\varepsilon)$, entonces ella converge en media hacia cierta función $F(z) \in H'_2$.

Flagamos

$$F_n(z) = \sum_0^{\infty} a_k^{(n)} P_k'(z);$$

entonces

$$\iint_G |F_m(z) - F_n(z)|^2 dx dy = \sum_0^{\infty} |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}|^2 < \varepsilon^2$$

para $m > N(\varepsilon)$ y $n > N(\varepsilon)$.

Por consiguiente,

$$|a_k^{(m)} - a_k^{(n)}| < \varepsilon \quad \text{para } m > N(\varepsilon), \quad n > N(\varepsilon) \text{ y } k \text{ fijo.}$$

De aquí se deduce la existencia de los límites de los coeficientes:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_k^{(m)} = a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Sea Q un número natural arbitrario. Entonces, de la desigualdad

$$\sum_{h=0}^Q |a_h^{(m)} - a_h^{(n)}|^2 \leq \sum_{h=0}^{\infty} |a_h^{(m)} - a_h^{(n)}|^2$$

deducimos que

$$\sum_{h=0}^Q |a_h^{(m)} - a_h^{(n)}|^2 < \varepsilon^2,$$

o bien, pasando al límite para $m \rightarrow \infty$:

$$\sum_{h=0}^Q |a_h - a_h^{(n)}|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{para } n > N(\varepsilon).$$

De aquí que, en primer lugar:

$$\sum_{h=1}^Q |a_h|^2 \leq \sum_{h=0}^Q (|a_h^{(n)}| + |a_h - a_h^{(n)}|)^2 < 2 \sum_0^{\infty} |a_h^{(n)}|^2 + 2\varepsilon^2,$$

es decir, la serie $\sum_0^{\infty} |a_h|^2$ es convergente, y, en segundo lugar,

$$\sum_{h=0}^{\infty} |a_h - a_h^{(n)}|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \text{para } n > N(\varepsilon).$$

Por consiguiente, $\sum_0^{\infty} a_h P_h(z) = F(z) \in H'_2$ y la sucesión $\{F_n(z)\}$ converge en media hacia $F(z)$. Queda demostrado que el espacio H'_2 es completo.

Aplicamos los resultados a la construcción de la serie de Fourier para la derivada $f'(z)$ de la función $f(z)$ que transforma conformemente el recinto G en el círculo unidad ($f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$).

Evidentemente, $f'(z) \in H'_2$, puesto que $\int_G |f'(z)|^2 dx dy = \pi$.

Demostremos que para cualquier función $F(z) \in H'_2$, que satisfaga a la condición $F(z_0) \neq 0$, se cumple la relación

$$\int_G \left| \frac{F(z)}{F(z_0)} \right|^2 dx dy \geq \int_G \left| \frac{f'(z)}{f'(z_0)} \right|^2 dx dy = \frac{\pi}{|f'(z_0)|^2}, \quad (4.9:7)$$

donde vale el signo de igualdad solamente cuando $\frac{F(z)}{F(z_0)} = \frac{f'(z)}{f'(z_0)}$.

En efecto,

$$\int_G \left| \frac{F(z)}{F(z_0)} \right|^2 dx dy = \int_{|w| < 1} \left| \frac{F[f^{-1}(w)]}{F(z_0)} \right|^2 |f^{-1}'(w)|^2 du dv;$$

hagamos $\varphi(w) = \frac{F[f^{-1}(w)]}{F(z_0)} f^{-1}'(w) = \sum_0^{\infty} a_n w^n$; entonces hallaremos (véase el cálculo del ap. 4.8):

$$\int_G \left| \frac{F(z)}{F(z_0)} \right|^2 dx dy \geq \pi \sum_0^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \geq \pi |a_0|^2. \quad (4.9:8)$$

Pero $a_0 = \varphi(0) = \frac{F[f^{-1}(0)]}{F(z_0)} f^{-1}'(0) = \frac{1}{f'(z_0)}$ (pues $f^{-1}(0) = z_0$), por lo cual

$$\int_G \left| \frac{F(z)}{F(z_0)} \right|^2 dx dy \geq \frac{\pi}{|f'(z_0)|^2}.$$

El signo de igualdad supone aquí la igualdad en (4.9:8), es decir, la igualdad

$$\pi |a_0|^2 = \pi \sum_0^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1},$$

de donde $a_1 = a_2 = \dots = 0$ y $\varphi(w) = a_0 = \frac{1}{f'(z_0)}$, es decir, $\frac{F[f^{-1}(w)]}{F(z_0)} = \frac{1}{f^{-1}'(w) \cdot f'(z_0)}$ y, finalmente, $\frac{F(z)}{F(z_0)} = \frac{f'(z)}{f'(z_0)}$, que es lo que se quería demostrar.

Consideremos el polinomio $K_n(z, z_0) = \sum_0^n P_h(z) \overline{P_h(z_0)}$. Evidentemente, $K_n(z_0, z_0) = \sum_0^n |P_h(z_0)|^2 \neq 0$ (puesto que $P_0(z_0) \neq 0$) y, por consiguiente, en virtud de (4.9:7):

$$\int_G \int \left| \frac{K_n(z, z_0)}{K_n(z_0, z_0)} \right|^2 dx dy = \frac{\sum_0^n |\overline{P_h(z_0)}|^2}{\left(\sum_0^n |P_h(z_0)|^2 \right)^2} = \frac{1}{\sum_0^n |P_h(z_0)|^2} \geq \frac{\pi}{|f'(z_0)|^2}.$$

Como la desigualdad hallada se verifica para cualquier n , la serie $\sum_0^\infty |P_h(z_0)|^2$ es convergente y

$$\frac{1}{\sum_0^\infty |P_h(z_0)|^2} \geq \frac{\pi}{|f'(z_0)|^2}.$$

De la convergencia de la serie $\sum_0^\infty |\overline{P_h(z_0)}|^2$ se deduce que $\sum_0^\infty \overline{P_h(z_0)} P_h(z)$ es la serie de Fourier de cierta función $K(z, z_0) \in H_z$.

Para ella $\int_G \int |K(z, z_0)|^2 dx dy = \sum_0^\infty |P_h(z_0)|^2$, de donde

$$\int_G \int \left| \frac{K(z, z_0)}{K(z_0, z_0)} \right|^2 dx dy = \frac{1}{\sum_0^\infty |P_h(z_0)|^2} \geq \frac{\pi}{|f'(z_0)|^2}. \quad (4.9:9)$$

Sea $\sum_0^\infty c_h P_h(z)$ la serie de Fourier de $f'(z)$. Entonces

$$\frac{\pi}{|f'(z_0)|^2} = \int \int \left| \frac{f'(z)}{f'(z_0)} \right|^2 dx dy = \frac{\sum_0^\infty |c_h|^2}{\left| \sum_0^\infty c_h P_h(z_0) \right|^2}$$

y como $\left| \sum_0^{\infty} c_k P_k(z_0) \right|^2 \leq \sum_0^{\infty} |c_k|^2 \cdot \sum_0^{\infty} |P_k(z_0)|^2$, resulta

$$\frac{\pi}{|f'(z_0)|^2} = \frac{\sum_0^{\infty} |c_k|^2}{\left| \sum_0^{\infty} c_k P_k(z_0) \right|^2} \geq \frac{1}{\sum_0^{\infty} |P_k(z_0)|^2}. \quad (4.9:10)$$

Comparando (4.9:9) y (4.9:10), sacamos la conclusión de que

$$\frac{\pi}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{\sum_0^{\infty} |P_k(z_0)|^2}, \text{ es decir,}$$

$$f'(z_0) = \sqrt{\pi \sum_0^{\infty} |P_k(z_0)|^2}, \quad (4.9:11)$$

y luego de que, para la función $F(z) = K(z, z_0)$, en la relación (4.9:7) se alcanza la igualdad.

Por lo tanto, $\frac{K(z, z_0)}{K(z_0, z_0)} = \frac{f'(z)}{f'(z_0)}$, es decir.

$$f'(z) = \frac{f'(z_0)}{K(z_0, z_0)} K(z, z_0) = \sqrt{\frac{\pi}{\sum_0^{\infty} |P_k(z_0)|^2}} \sum_0^{\infty} \overline{P_k(z_0)} P_k(z) \quad (4.9:12)$$

Esta es la fórmula buscada, que permite hallar $f'(z)$ y, por consiguiente, también la función $f(z)$ que transforma conformemente el recinto dado en un círculo. El desarrollo de la última función en una serie uniformemente convergente de polinomios (que, por cierto, no son ortogonales) resulta de la forma:

$$f(z) = \int_{z_0}^z f'(z) dz = \sqrt{\frac{\pi}{\sum_0^{\infty} |P_k(z_0)|^2}} \sum_0^{\infty} \overline{P_k(z_0)} \int_{z_0}^z P_k(z) dz. \quad (4.9:13)$$

Para la función $\frac{f(z)}{f'(z_0)}$ la derivada en el punto z_0 es igual a 1, por lo cual, $w = \frac{f(z)}{f'(z_0)}$ transforma conformemente el recinto G en un círculo cuyo radio $R_{z_0} = \frac{1}{f'(z_0)}$ es el radio conforme del recinto

respecto del punto z_0 (véase el ap. 2.2). De la fórmula (4.9:11) obtenemos:

$$R_{z_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi \sum_0^{\infty} |P_k(z_0)|^2}}. \quad (4.9:14)$$

Finalmente, obsérvese que para el caso de un recinto limitado por una curva cerrada rectificable de Jordan Γ , se pueden construir unos polinomios $\{p_n(z)\}$, ortogonales y normalizados en el contorno: $\int_{\Gamma} p_n(z) \cdot \overline{p_m(z)} dz = \delta_{nm}$, y estudiar los desarrollos en serie de estos polinomios. La teoría correspondiente ha sido desarrollada en las obras de V. I. Smirnov, M. V. Kéldish, M. A. Lavréntiev y P. P. Korovkin.