CAPITULO

SEPTIMO

FUNCIONES ENTERAS Y MEROMORFAS

§ 1. CRECIMIENTO DE UNA FUNCION ENTERA. ORDEN Y TIPO

1.1. Según la definición, una función que es uniforme y analítica en todo el plano, se llama entera. Tal función se expresa por una serie de potencias que es convergente en todos los puntos:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{1.1:1}$$

donde, en virtud de la fórmula de Cauchy-Hadamard,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \tag{1.1:2}$$

En el punto del infinito la función entera puede ser regular, entonces $f(z)$ es constante, puede tener un polo de orden $k \geqslant 1$, entonces $f(z)$ es un polinomio de grado k, y, finalmente, puede tener un punto singular esencial. En el último caso ésta se llama función trascendente entera. Son ejemplos de funciones trascendentes enteras, la función exponencial e^z, las funciones trigonométricas sen z y $\cos z$, y otras.

Aquí estudiaremos principalmente las funciones trascendentes enteras. La característica más importante de tales funciones es el máximo del módulo

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Este es una función creciente de r, que en virtud del teorema de Liouville satisface a la condición

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty. \tag{1.1:3}$$

Está claro que $M(r)$ (para una función trascendente entera) crece más rápidamente que la potencia de r con cualquier exponente fijo.

Además, se cumple la relación

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \infty. \tag{1.1:4}$$

En efecto, suponiendo que

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \mu < \infty,$$

tendremos que, para cualquier número finito $\mu' > \mu$, existe una sucesión $\{r_n\}$ que tiende hacia el infinito, tal que para cada r_n se cumple la desigualdad

$$\ln M(r_n) < \mu' \ln r_n, \quad \text{o bien,} \quad M(r_n) < r_n^{\mu'}.$$

Por lo tanto, para los coeficientes de la serie (1.1:1) obtenemos en virtud de las desigualdades de Cauchy:

$$|a_k| \leqslant \frac{M(r_n)}{r_n^k} < r_n^{\mu'-k}.$$

Como r_n se puede tomar aquí lo grande que se quiera, de aquí se deduce que todos los coeficientes de la serie de Taylor para los cuales $k > \mu' > \mu$, son iguales a cero y, por consiguiente, $f(z)$ es un polinomio de grado no superior a $[\mu]$ ($[\mu]$ es la parte entera de μ).

De lo demostrado se deduce que la función potencial r^μ no es inmediatamente útil para la acotación del crecimiento de una función trascendente entera. Por esta razón se recurre a la función más simple entre las de crecimiento rápido, precisamente, a la función exponencial.

Si existe un número positivo μ tal que para todos los valores de r suficientemente grandes se cumple la desigualdad

$$M(r) < e^{r^\mu}, \tag{1.1:5}$$

se dice que la función entera $f(z)$ es de orden finito. En caso contrario, es decir, si para cualquier $\mu > 0$ existen valores arbitrariamente grandes de r para los cuales $M(r)$ supera a e^{r^μ}, se dice que la función entera es de orden infinito.

El ejemplo más simple de función de orden finito es e^z, y de orden infinito, e^{e^z}.

Examinemos las funciones de orden finito. Consideremos el extremo inferior de aquellos valores de μ para los cuales se cumple la desigualdad (1.1:5) comenzando desde valores suficientemente grandes de $r > r(\mu)$.

Este extremo inferior se llama orden (se supone que es el orden de crecimiento) de la función entera y se designa por ρ.

Así, pues,

$$\rho = \inf \mu \geqslant 0.$$

Para las funciones de orden infinito se hace $\rho = \infty$. Debido a la definición, para cualquier $\varepsilon > 0$ tiene que cumplirse la desigualdad

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \qquad (1.1:6)$$

para $r > R(\varepsilon)$; por otra parte, existen valores arbitrariamente grandes de r: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, que satisfacen a la desigualdad

$$M(r_n) > e^{r_n^{\rho-\varepsilon}}. \qquad (1.1:7)$$

De las desigualdades (1.1:6) y (1.1:7) se deduce que

$$\frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} < \rho + \varepsilon \quad \text{para} \quad r > R(\varepsilon)$$

y que

$$\frac{\ln \ln M(r_n)}{\ln r_n} > \rho - \varepsilon$$

para r_n arbitrariamente grandes. Por lo tanto,

$$\rho = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}. \qquad (1.1:8)$$

Esta expresión puede servir de definición del orden de la función entera.

Si $f(z)$ es de orden finito ρ y existe un número positivo K tal que

$$M(r) < e^{Kr^{\rho}}, \qquad (1.1:9)$$

entonces se dice que $f(z)$ es una función de *tipo finito*. En caso contrario, es decir, si para cualquier $K > 0$ existen valores de r arbitrariamente grandes para los cuales $M(r)$ es superior a $e^{Kr^{\rho}}$, se dice que la función de orden ρ es de *tipo infinito* (o *maximal*).

Detengámonos en las funciones de tipo finito. El extremo inferior de aquellos valores de K para los cuales se cumple la desigualdad (1.1:9) para valores suficientemente grandes de r, se llama *tipo* de la función entera y se designa por σ. Así, pues,

$$\sigma = \inf K \geqslant 0.$$

Entre las funciones de tipo finito se distinguen las funciones de *tipo normal* ($\sigma > 0$) y las funciones de *tipo minimal* ($\sigma = 0$).

Para las funciones de tipo maximal se hace $\sigma = \infty$. Debido a la definición, para cualquier $\varepsilon > 0$ tiene que cumplirse la desigualdad

$$M(r) < e^{(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}} \qquad (1.1:10)$$

para $r > R(\varepsilon)$; por otra parte, existen valores arbitrariamente grandes de r: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, que satisfacen a la desigualdad

$$M(r_n) > e^{(\sigma-\varepsilon)r_n^\rho}. \tag{1.1:11}$$

De las desigualdades (1.1:10) y (1.1.11) se deduce que

$$\frac{\ln M(r)}{r^\rho} < \sigma + \varepsilon \quad \text{para} \quad r > R(\varepsilon)$$

y $\frac{\ln M(r_n)}{r_n^\rho} > \sigma - \varepsilon$ para r_n arbitrariamente grandes. Por esta razón

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^\rho}. \tag{1.1:12}$$

Esta expresión puede servir de definición del tipo de la función entera.

Evidentemente, e^z es una función entera de orden $\rho = 1$ y tipo $\sigma = 1$. Para $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, se tiene:

$$|\operatorname{sh} y| \leqslant |\operatorname{sen} z| \leqslant \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x} \leqslant \operatorname{ch} y.$$

Por lo tanto,

$$\frac{e^r - 1}{2} < \operatorname{sh} r \leqslant M(r) = \max_{|z|=r} |\operatorname{sen} z| \leqslant \operatorname{ch} r = \frac{e^r + e^{-r}}{2} < \frac{e^r + 1}{2},$$

de donde $\rho = 1$ y $\sigma = 1$. Para $\cos z$ resultan los mismos valores de ρ y σ.

1.2. Expresemos el orden y el tipo de una función entera mediante los coeficientes de la serie de potencias (1.1:1). Supongamos que $f(z)$ es una función de orden finito. Entonces, para $r > R = R(K, \mu)$, se tiene:

$$M(r) < e^{Kr^\mu}, \tag{1.2:1}$$

donde $\mu > \rho$, y para una función de orden ρ y tipo finito σ: $\mu = \rho$ y $K > \sigma$. Por consiguiente, en virtud de las desigualdades de Cauchy para los coeficientes de la serie de potencias

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} < \frac{e^{Kr^\mu}}{r^n} \quad \text{para} \quad r > R.$$

La función $\frac{e^{Kr^\mu}}{r^n}$ (como muestra un cálculo sencillo, donde hay que igualar a cero la derivada logarítmica) alcanza el mínimo para $r = \left(\frac{n}{\mu K}\right)^{\frac{1}{\mu}}$; este mínimo es igual a $\left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}$. Eligiendo

$N = N(K, \mu)$ de modo que $\left(\frac{n}{\mu K}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ supere a $R(K, \mu)$ para $n > N$, obtenemos:

$$|a_n| < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} \quad \text{para} \quad n > N. \tag{1.2:2}$$

Así, pues, las desigualdades (1.2:2) son consecuencia de las desigualdades (1.2:1). Observando que para una función entera $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por consiguiente, $\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \to$ $\to +\infty$, obtenemos primero de (1.2:2)

$$\mu > \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} + \frac{\ln \frac{1}{e\mu K}}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} \tag{1.2:3}$$

y luego:

$$\mu \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}.$$

Como se puede tomar por μ cualquier número mayor que ρ, de aquí se deduce que

$$\rho \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}. \tag{1.2:4}$$

En resumen, para una función de orden finito ρ, el valor

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} = \alpha \tag{1.2:5}$$

también es finito y no es superior a ρ.

Supongamos ahora que $f(z)$ es una función de tipo finito σ. Entonces, en la desigualdad (1.2:1) se puede hacer $\mu = \rho$ y se puede tomar por K cualquier número mayor que σ. Para estos valores de μ y K, obtenemos de (1.2:2):

$$n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} < (e\rho K)^{\frac{1}{\rho}},$$

de donde

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant (e\rho K)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Como en el segundo miembro puede ponerse en lugar de K cualquier número mayor que σ, obtenemos:

$$(e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}} \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{1.2:6}$$

En resumen, para una función de orden finito ρ y tipo finito σ, el valor

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} = \beta \tag{1.2:7}$$

también es finito y no es superior a $(e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}$.

Ahora demostraremos que, en la realidad, en las relaciones (1.2:4) y (1.2:6) no se cumplen las desigualdades, de modo que siempre

$$\alpha = \rho \quad \text{y} \quad \beta = (e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Sin hacer ninguna suposición respecto de la función $f(z)$ supongamos que para algunos valores de μ y K se cumplen las desigualdades (1.2:2). Entonces

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{1}{\mu}} \qquad (n > N),$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, es decir, la función $f(z)$ es entera. En virtud de la misma desigualdad, para cualquier $r > 0$ y $n > N$ se tiene:

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{1}{\mu}} r.$$

El segundo miembro de esta desigualdad para $n > [2^{\mu} e\mu K r^{\mu}] = n(r)$ tiene un valor menor que $\frac{1}{2}$. Tomando $R = R(\mu, K) > 1$ tan grande que para $r > R$ se cumpla la desigualdad $n(r) = [2^{\mu} e\mu K r^{\mu}] > N = N(K, \mu)$, se puede afirmar que para todos los valores indicados de r y para $n > n(r)$ se cumplen las desigualdades:

$$\sqrt[n]{|a_n| r^n} < \frac{1}{2}, \quad \text{o sea} \quad |a_n| r^n < \frac{1}{2^n}.$$

Teniendo esto en cuenta, acotemos superiormente $M(r)$. Se tiene:

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \right| \leqslant \sum_{0}^{\infty} |a_n| r^n =$$
$$= \sum_{0}^{n(r)} |a_n| r^n + \sum_{n(r)+1}^{\infty} |a_n| r^n$$

y, por consiguiente, para $r > R$

$$M(r) < \sum_{0}^{n(r)} |a_n| r^n + \sum_{n(r)+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \sum_{0}^{n(r)} |a_n| r^n + 1.$$

Pero

$$\sum_{0}^{n(r)} |a_n| r^n = \sum_{0}^{N} |a_n| r^n + \sum_{N+1}^{n(r)} |a_n| r^n < r^N \sum_{0}^{N} |a_n| +$$
$$+ [n(r) - N] \max_{n=N+1,\ldots,n(r)} |a_n| r^n;$$

puesto que $\max\limits_{N+1 \leqslant n \leqslant n(r)} |a_n| r^n \leqslant \max\limits_{N+1 \leqslant n} |a_n| r^n$, y basándose en la desigualdad (1.2:2), cierta para $n \geqslant N+1$, obtenemos:

$$\max_{N+1 \leqslant n \leqslant n(r)} |a_n| r^n \leqslant \max_{N+1 \leqslant n} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} r^n \leqslant \max_{1 \leqslant n} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} r^n.$$

Fácilmente se comprueba que $\max\limits_{1 \leqslant n} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} r^n$ se alcanza para $n = \mu K r^\mu$ y es igual a e^{Kr^μ}; por consiguiente,

$$\max_{N+1 \leqslant n \leqslant n(r)} |a_n| r^n < e^{Kr^\mu},$$

y como $1 < e^{Kr^\mu}$, resulta:

$$M(r) < r^N \sum_{0}^{N} |a_n| + [n(r) + 1 - N] e^{Kr^\mu} <$$
$$< r^N \sum_{0}^{N} |a_n| + (2^\mu e\mu K r^\mu + 1 - N) e^{Kr^\mu} =$$
$$= e^{Kr^\mu} \left(2^\mu e\mu K r^\mu + 1 - N + r^N e^{-Kr^\mu} \sum_{0}^{N} |a_n|\right).$$

Está claro que para cualquier $\varepsilon > 0$ la expresión que figura entre paréntesis es menor que $e^{\varepsilon r^\mu}$ para r suficientemente grande. Por lo tanto,

$$M(r) < e^{(K+\varepsilon) r^\mu} \quad \text{para} \quad r > R'(\varepsilon) > R. \tag{1.2:8}$$

Queda demostrado que de las desigualdades para los coeficientes (1.2:2) se deduce como consecuencia la desigualdad (1.2:8) para el máximo del módulo de la función.

Supongamos ahora que los coeficientes de la serie de potencias (1.2:1) son tales que la magnitud α (1.2:5) posee un valor finito.

Entonces para cualquier $\mu > \alpha$ se tiene, para $n > n(\mu)$:

$$\frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} < \mu,$$

o bien,

$$|a_n| < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}.$$

Hemos obtenido una desigualdad del tipo (1.2:2), en la cual $e\mu K = 1$, o sea, $K = \frac{1}{e\mu}$. Por consiguiente, según lo demostrado, el máximo del módulo de la función $f(z)$ satisface, para $r > R'(\varepsilon)$, a la desigualdad

$$M(r) < e^{\left(\frac{1}{e\mu}+\varepsilon\right) r^{\mu}}.$$

De aquí se deduce que el orden ρ de la función $f(z)$ no es superior a μ, y como μ es un número cualquiera, mayor que α, se tiene:

$$\rho \leqslant \alpha.$$

De aquí junto con la relación obtenida anteriormente $\rho \geqslant \alpha$ (véase (1.2:4)) resulta:

$$\rho = \alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}. \tag{1.2:9}$$

Hemos obtenido la expresión del orden de una función entera mediante los coeficientes de la serie de potencias. En particular, se observa que si uno de los números α y ρ es finito, entonces el otro también lo es; de aquí se deduce que si uno de ellos es infinito, el otro también lo es. En otras palabras, la relación (1.2:9) es válida también para las funciones de orden infinito.

Supongamos ahora que para los coeficientes de la serie de potencias no sólo es finito α (y, por consiguiente, $f(z)$ es de orden finito $\rho = \alpha$), sino que también la magnitud β (1.2:7). Expresando β en la forma $(e\rho\sigma')^{\frac{1}{\rho}}$, es decir, haciendo $\sigma' = \frac{\beta^{\rho}}{e\rho}$, tendremos para cualquier $K > \sigma'$ y para $n > n(K)$:

$$n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} < (e\rho K)^{\frac{1}{\rho}},$$

o bien,

$$|a_n| < \left(\frac{e\rho K}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}.$$

Esta es una desigualdad del tipo (1.2:2) para $\mu = \rho$; según lo demostrado, de aquí se deduce para $M(r)$ una desigualdad de la forma (1.2:8):

$$M(r) < e^{(K+\varepsilon)r^{\rho}}, \qquad r > R'(\varepsilon).$$

Como el orden de la función $f(z)$ es ρ, de la última desigualdad se deduce que el tipo σ de la función $f(z)$ es finito y satisface a la desigualdad

$$\sigma \leqslant K,$$

o bien, observando que K es cualquier número mayor que σ':

$$\sigma \leqslant \sigma' = \frac{\beta^{\rho}}{e\rho},$$

es decir,

$$(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}} \leqslant \beta.$$

Más arriba (fórmula (1.2:6)) se demostró que $(\sigma e\rho)^{\frac{\rho}{\rho}} \geqslant \beta$, por consiguiente,

$$(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \beta = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|}. \qquad (1.2:10)$$

Hemos obtenido la expresión del tipo de una función entera mediante los coeficientes de la serie de potencias (y mediante su orden ρ, el cual, a su vez, se expresa mediante los coeficientes).

De lo expuesto anteriormente se deduce que la fórmula (1.2:10) es válida también para las funciones de orden finito, pero de tipo infinito (maximal).

Obsérvese que si para una función entera $f(z)$ se supone solamente que es finita la magnitud

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\mu}} \sqrt[n]{|a_n|} = \beta, \qquad (1.2:11)$$

donde μ es un número positivo, respecto del cual no se supone que es el orden de la función, del mismo modo que no se supone que $f(z)$ es una función de orden finito, entonces de aquí se deduce que $f(z)$ es una función de orden μ y tipo $\frac{\beta^{\mu}}{e\mu}$, o bien $f(z)$ es una función de orden inferior a μ.

En efecto, de la hipótesis hecha se deduce que para cualquier $\beta' > \beta$, para $n > N'$, se cumple la desigualdad

$$n^{\frac{1}{\mu}} \sqrt[n]{|a_n|} < \beta'$$

o sea,

$$|a_n| < \left(\frac{\beta'^{\mu}}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}.$$

Esta es una desigualdad del tipo (1.2:2) para $e\mu K = \beta'^{\mu}$; de ella se deduce para $M(r)$ una desigualdad del tipo (1.2:8)

$$M(r) < \exp\left[\left(\frac{\beta'^{\mu}}{e\mu} + \varepsilon\right) r^{\mu}\right]$$

y, por consiguiente, el orden ρ de la función $f(z)$ no es superior a μ. Si éste es igual a μ, entonces de la relación (1.2:11) se deduce, como ya se demostró anteriormente, que el tipo σ de la función $f(z)$ es $\frac{\beta^{\mu}}{e^{\mu}}$.

Entre las funciones trascendentes enteras las más simples son las de *tipo exponencial*. Así se llaman las funciones de primer orden y tipo finito, y también las funciones de orden inferior al primero. De la observación que acabamos de hacer se deduce que las funciones de tipo exponencial se determinan completamente por una relación de la forma

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \sqrt[n]{|a_n|} = \beta < \infty.$$

Precisando, las funciones respectivas serán de primer orden y de tipo $\sigma = \frac{\beta}{e}$, o bien de orden inferior al primero.

Aplicando las fórmulas (1.2:9) y (1.2:10) es fácil mostrar un ejemplo de función entera de un orden arbitrario ρ y tipo σ. Así, pues, haciendo $a_n = \left(\frac{e\rho\sigma}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}$ $(n \geqslant 1)$, donde $\rho > 0$ y $\sigma > 0$, obtenemos el siguiente ejemplo de función entera de orden ρ y tipo σ:

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{e\rho\sigma}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}} z^n.$$

Como se deduce de las fórmulas (1.2:9), para una función de orden nulo tiene que cumplirse la condición:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} = 0.$$

De aquí se deduce que es suficiente tomar

$$|a_n| = \frac{1}{n^{n\,\varepsilon_n}},$$

donde ε_n es una sucesión arbitraria de números positivos, convergente hacia cero. Por ejemplo, cualquier función de la forma

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{n1+\delta}} \qquad (\delta>0)$$

es una función de orden nulo.

Finalmente, para obtener un ejemplo de función de orden infinito, es suficiente someter los números $|a_n|$ a la condición

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}=\infty,$$

es decir, tomar

$$|a_n|=\frac{1}{n^{\alpha_n\cdot n}}\,,$$

donde α_n es una sucesión de números positivos convergente hacia cero, pero no muy rápidamente (de modo que se cumpla la condición necesaria

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha_n}}=0,$$

es decir, que sea $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\ln n=\infty$). Por ejemplo, se puede suponer que $\alpha_n=\dfrac{1}{(\ln n)^{1-\delta}}$ $(0<\delta<1)$. Entonces obtenemos la función

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{z^n}{\exp\,[n\,(\ln n)^{\delta}]}\,.$$

1.3. La función $M(r)$, determinando el crecimiento de la función $f(z)$ en todo el plano, no proporciona datos algunos sobre el comportamiento de la función en tal o cual recinto no acotado y, en particular, en algún ángulo con el vértice en el origen de coordenadas.

Examinemos, por ejemplo, la función exponencial e^z $(\rho=1,\ \sigma=1)$. Como $|e^z|=e^x=e^{r\cos\vartheta}$, en cada ángulo de la forma $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\vartheta<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ el módulo de la función satisface a la condición $e^r>|e^z|>e^{r\operatorname{sen}\varepsilon}$ y, por consiguiente, tiende al infinito cuando $r\to\infty$. En los ángulos de la forma $\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\vartheta<\frac{3\pi}{2}-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ se tiene: $|e^z|<e^{-r\operatorname{sen}\varepsilon}$, y por consiguiente, e^z tiende a cero cuando $r\to\infty$. Así, pues, en este ejemplo existen dos ángulos, cada uno de ellos de magnitud π (los semiplanos de la derecha y de la izquierda), tales que en los ángulos situados junto

con sus lados en el interior de uno de ellos, la función tiende a ∞, mientras que en el interior del otro tiende a 0.

La función $f(z) = e^{P(z)}$, donde $P(z)$ es un polinomio de grado n:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0,\ n \geqslant 1)$$

representa un ejemplo similar de carácter más general. Haciendo $a_k = \sigma_k e^{i\alpha_k}$ y $z = re^{i\vartheta}$, obtenemos:

$$|f(z)| = \left| \exp\left[\sum_0^n \sigma_k r^k e^{i(\alpha_k + k\vartheta)}\right]\right| = \exp\left[\sum_0^n \sigma_k r^k \cos(\alpha_k + k\vartheta\right] =$$

$$= \exp\left\{\sigma_n r^n \left[\cos(\alpha_n + n\vartheta) + \sum_0^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(\alpha_k + k\vartheta)}{\sigma_n r^{n-k}}\right]\right\}.$$

La suma $\sum\limits_0^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(\alpha_k + k\vartheta)}{\sigma_n r^{n-k}}$ tiende a cero cuando $r \to \infty$; por consiguiente, la magnitud que figura entre corchetes para cualquier $\varepsilon > 0$ y para valores suficientemente grandes de r $(r > R(\varepsilon))$, será menor que $1 + \varepsilon$. Por ello, $|f(z) < e^{(1+\varepsilon)\sigma_n r^n}$ si $r > R(\varepsilon)$.

Por otra parte, haciendo $\vartheta = -\frac{\alpha_n}{n}$ obtenemos $\cos(\alpha_n + n\vartheta) = 1$ y, por consiguiente, para los mismos valores de r la magnitud que figura entre corchetes será mayor que $1 - \varepsilon$. Por lo tanto,

$$|f(re^{-i\frac{\alpha_n}{n}})| > e^{(1-\varepsilon)\sigma_n r^n}, \quad \text{si} \quad r > R(\varepsilon).$$

Confrontando estas desigualdades sacamos la conclusión que

$$e^{(1-\varepsilon)\sigma_n r^n} < M(r) < e^{(1+\varepsilon)\sigma_n r^n},$$

si $r > R(\varepsilon)$, por lo cual $f(z)$ es una función de orden entero n y tipo σ_n.

Dividamos el plano en $2n$ ángulos iguales: $g_0, g_1, \ldots, g_{2n-1}$ con el vértice común en el origen de coordenadas, tomando por g_j el ángulo $-\frac{\alpha_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n} < \vartheta < -\frac{\alpha_n}{n} + (2j+1)\frac{\pi}{2n}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2n-1)$, y tomemos en el interior de g_j el ángulo γ_j de menor magnitud:

$$-\frac{\alpha_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n} + \frac{\varepsilon}{n} < \vartheta < -\frac{\alpha_n}{n} + (2j+1)\frac{\pi}{2n} - \frac{\varepsilon}{n},$$

donde $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Entonces, para los puntos del ángulo γ_j, tendremos:

$$j\pi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon < \alpha_n + n\vartheta < j\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

y, por consiguiente,

$$|\cos(\alpha_n + n\vartheta)| > \operatorname{sen} \varepsilon;$$

además, si j es par resulta $\cos(\alpha_n + n\vartheta) > \operatorname{sen} \varepsilon$, y si j es impar, se tiene:

$$\cos(\alpha_n + n\vartheta) < -\operatorname{sen} \varepsilon.$$

Expresemos $|f(z)|$ para $z \in g_j$ en la forma

$$|f(z)| = \exp\left\{\sigma_n \cos(\alpha_n + n\vartheta)\, r^n \left[1 + \sum_0^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(\alpha_k + k\vartheta)}{\sigma_n \cos(\alpha_n + n\vartheta)\, r^{n-k}}\right]\right\}.$$

La magnitud $\left|\sum_0^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(\alpha_k + k\vartheta)}{\sigma_n \cos(\alpha_n + n\vartheta)\, r^{n-k}}\right| < \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon} \sum_0^{n-1} \frac{\sigma_k}{\sigma_n r^{n-k}}$ puede hacerse menor que ε para $r > R(\varepsilon)$. Por consiguiente, para j par y $r > R(\varepsilon)$ tendremos:

$$|f(z)| > \exp[\sigma_n \operatorname{sen} \varepsilon r^n (1 - \varepsilon)],$$

es decir, $f(z)$ tiende a ∞ dentro de los ángulos γ_j de índice par. Para j impar y $r > R(\varepsilon)$ se tiene:

$$|f(z)| < \exp[-\sigma_n \operatorname{sen} \varepsilon r^n (1 - \varepsilon)],$$

o sea, $f(z)$ tiende a 0 dentro de los ángulos γ_j de índice impar.

Vemos, pues, que para la función $e^{P(z)}$ existen $2n$ ángulos iguales g_j de magnitud $\frac{\pi}{n}$ cada uno de ellos ($j = 0, 1, \ldots, 2n - 1$) con el vértice común en el origen de coordenadas, tales que en los ángulos que están situados junto con sus lados en el interior de g_j la función tiende a ∞ si j es par, y a 0 si j es impar.

El teorema de Phragmén-Lindelöf (ap. 3.3, cap. VI) proporciona datos capitales sobre el comportamiento de una función entera de orden finito en el interior de un ángulo si se conoce su comportamiento en los lados del mismo. En lo que se refiere a las funciones enteras, del teorema se deduce la proposición siguiente:

Si $f(z)$ es una función entera de orden no superior a ρ, la cual está acotada en valor absoluto en los lados de un ángulo g de magnitud $\pi\alpha$ con el vértice en el origen de coordenadas:

$$|f(z)| \leq C \text{ en los lados del ángulo } g,$$

y si $\alpha < 1/\rho$, entonces el módulo $|f(z)|$ está acotado también en el interior del ángulo por la misma constante C.

Del teorema 1 del ap. 3.3 del cap. VI se deduce que para una función de orden ρ y tipo minimal la proposición formulada también es válida cuando $\alpha = \frac{1}{\rho}$. En efecto, la condición

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} = 0,$$

que expresa que el orden de $f(z)$ es menor que $\frac{1}{\alpha}$ o es igual a $\frac{1}{\alpha}$, pero entonces el tipo de $f(z)$ es igual a cero (véase la fórmula (1.1:12)), es un caso particular de la condición 2) del teorema 1 del ap. 3.3 del cap. VI.

Del teorema de Phragmén-Lindelöf se deduce que si desde el origen de coordenadas se ha trazado un sistema de rayos que divide al plano en ángulos no mayores que $\frac{\pi}{\rho}$ cada uno $\left(\rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$, entonces al menos en uno de estos rayos la función trascendente entera $f(z)$ de orden inferior a ρ no tiene que estar acotada en valor absoluto. Suponiendo lo contrario hallaríamos, según lo demostrado, que la función está acotada en cada uno de los ángulos comprendidos entre rayos contiguos y, por consiguiente, está acotada en valor absoluto en todo el plano, lo cual es imposible, si $f(z) \not\equiv \text{const}$.

Como ejemplo, consideremos la función $e^{P(z)}$, donde $P(z)$ es un polinomio de grado n. Aquí $\rho = n$, y si trazamos un sistema de rayos que divida al plano en ángulos de magnitud menor que $\frac{\pi}{n}$, entonces al menos uno de los rayos de este sistema caerá dentro de cada uno de los ángulos g_j de índice par, en los cuales $e^{P(z)}$ tiende al infinito cuando $z \to \infty$.

Para una función $f(z) \not\equiv \text{const}$ de orden $\rho < \frac{1}{2}$ o de orden $\rho = \frac{1}{2}$ y de tipo minimal sacamos la conclusión, según lo anterior, que ella tiene que ser no acotada en cada rayo que parta del origen de coordenadas. Para las funciones de orden $\frac{1}{2}$ y tipo $\sigma > 0$ ya no vale esta afirmación, como muestra el ejemplo de la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\sigma\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$ la cual tiende a cero cuando z tiende al infinito sobre la parte positiva del eje real.

En general, el teorema de Phragmén-Lindelöf deja de ser cierto para los ángulos de magnitud $\frac{\pi}{\rho}$ si se consideran funciones de orden ρ (pero no de tipo minimal). Así, en el caso $f(z) = \operatorname{sen} z$, donde $\rho = 1$, la función está acotada en todo el eje real, el cual se puede considerar como los lados de cada uno de los dos ángulos de magnitud $\frac{\pi}{\rho} = \pi$: de los semiplanos superior e inferior. No obstante, el módulo $|\operatorname{sen} z|$

no está acotado en el semiplano superior ni tampoco en el semiplano inferior.

1.4. Para estudiar más detalladamente el comportamiento de las funciones enteras se introduce la característica de su crecimiento sobre cada uno de los rayos que parten del origen de coordenadas. Sea $f(z)$ una función entera de orden finito $\rho > 0$ y de tipo finito σ. Entonces, para cada rayo que forme un ángulo θ con la parte positiva del eje real, se considera la magnitud

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\rho}}. \tag{1.4:1}$$

Esta función es uniforme y periódica, de período 2π. Se llama indicatriz de crecimiento de la función $f(z)$.

Debido a la relación

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}} = \sigma < \infty$$

se tiene:

$$h(\theta) \leqslant \sigma,$$

es decir, $h(\theta)$ está acotada superiormente.

Teorema. *Si θ_1 y θ_2 satisfacen a las condiciones*

$$0 < \theta_2 - \theta_1 < \min\left(\frac{\pi}{\rho},\ 2\pi\right)$$

y a y b son unos números finitos tales que $h(\theta_1) \leqslant a$ y $h(\theta_2) \leqslant b$, entonces en todo el intervalo (θ_1, θ_2) se cumple la desigualdad

$$h(\theta) \leqslant A\cos\theta\rho + B\operatorname{sen}\theta\rho, \tag{1.4:2}$$

donde A y B se determinan por el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} A\cos\theta_1\rho + B\operatorname{sen}\theta_1\rho &= a, \\ A\cos\theta_2\rho + B\operatorname{sen}\theta_2\rho &= b. \end{aligned}\right\} \tag{1.4:3}$$

Además, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene:

$$\ln |f(re^{i\theta})| < (A\cos\theta\rho + B\operatorname{sen}\theta\rho + \varepsilon)\, r^{\rho} \tag{1.4:4}$$

para

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \quad \text{y} \quad r > R(\varepsilon).$$

Demostración. Sea η un número positivo arbitrario. Definamos $\alpha = \alpha(\eta)$ y $\beta = \beta(\eta)$ mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \alpha\cos\theta_1\rho + \beta\operatorname{sen}\theta_1\rho &= a + \eta, \\ \alpha\cos\theta_2\rho + \beta\operatorname{sen}\theta_2\rho &= b + \eta. \end{aligned}\right\} \tag{1.4:3'}$$

Esto es posible, ya que el determinante del sistema $\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1)\rho\neq 0$. Evidentemente,

$$\lim_{\eta\to 0}\alpha(\eta)=A \quad \text{y} \quad \lim_{\eta\to 0}\beta(\eta)=B.$$

Introduzcamos la función auxiliar

$$F_\eta(z)=f(z)\exp[-(\alpha-i\beta)z^\rho].$$

Esta es uniforme (si se hace $z^\rho=(re^{i\theta})^\rho=r^\rho(\cos\theta\rho+i\operatorname{sen}\theta\rho)$ y analítica en el recinto angular g: $0<r<\infty$, $\theta_1<\theta<\theta_2$, y satisface en este recinto, para $r>R_1(\eta)$, a la desigualdad

$$|F_\eta(re^{i\theta})|=|f(z)|\exp[-(\alpha\cos\theta\rho+\beta\operatorname{sen}\theta\rho)r^\rho]<$$
$$<\exp[(\sigma+1)r^\rho-(\alpha\cos\theta\rho+\beta\operatorname{sen}\theta\rho)r^\rho]<\exp(Kr^\rho), \quad (1.4:5)$$

donde $K=K(\eta)$. Además,

$$|F_\eta(re^{i\theta_1})|<\exp[(a+\eta)r^\rho-(\alpha\cos\theta_1\rho+\beta\operatorname{sen}\theta_1\rho)r^\rho]=1,$$
$$|F_\eta(re^{i\theta_2})|<\exp[(b+\eta)r^\rho-(\alpha\cos\theta_2\rho+\beta\operatorname{sen}\theta_2\rho)r^\rho]=1$$

para $r>R_2(\eta)$, es decir, el módulo $|F_\eta(z)|$ está acotado en los lados del ángulo g:

$$|F_\eta(re^{i\theta_1})|<C, \quad |F_\eta(re^{i\theta_2})|<C \qquad (0<r<\infty), \quad (1.4:6)$$

donde $C=C(\eta)$.

De (1.4:5) y (1.4:6) se deduce que a la función $F_\eta(z)$ en el recinto g, el cual representa un ángulo de magnitud $\theta_2-\theta_1<\frac{\pi}{\rho}$, se le puede aplicar el teorema de Phragmén-Lindelöf. Obtenemos:

$$|F_\eta(z)|\leqslant C_\eta, \qquad z\in\overline{g},$$

de donde

$$\ln|f(re^{i\theta})|\leqslant\ln C_\eta+(\alpha\cos\theta\rho+\beta\operatorname{sen}\theta\rho)r^\rho, \qquad re^{i\theta}\in\overline{g}. \quad (1.4:7)$$

Para un $\varepsilon>0$ dado, fijemos un número $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ tan pequeño que se cumplan las desigualdades

$$|\alpha(\eta)-A|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |\beta(\eta)-B|<\frac{\varepsilon}{3},$$

y hallemos después un valor $R(\varepsilon)$ tal, que para $r>R(\varepsilon)$ se cumpla la desigualdad

$$\left|\frac{\ln C_\eta}{r^\rho}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para $\theta_1<\theta<\theta_2$ y $r>R(\varepsilon)$ tendremos según la desigualdad (1.4:7):

$$\ln|f(re^{i\theta})|<(A\cos\theta\rho+B\operatorname{sen}\theta\rho+\varepsilon)r^\rho,$$

o sea, la relación (1.4:4). De esta se deduce luego que

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho}} \leqslant A\cos\theta\rho + B\,\mathrm{sen}\,\theta\rho + \varepsilon$$

y como ε es arbitrariamente pequeño, resulta:

$$h(\theta) \leqslant A\cos\theta\rho + B\,\mathrm{sen}\,\theta\rho \qquad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2).$$

En teorema queda demostrado.

Determinando A y B de las ecuaciones (1.4:3) y sustituyendo los valores hallados en la desigualdad (1.4:2), obtenemos:

$$h(\theta) \leqslant a\frac{\mathrm{sen}\,[(\theta_2-\theta)\rho]}{\mathrm{sen}\,[(\theta_2-\theta_1)\rho]} + b\frac{\mathrm{sen}\,[(\theta-\theta_1)\rho]}{\mathrm{sen}\,[(\theta_2-\theta_1)\rho]} \qquad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2). \qquad (1.4:8)$$

En particular, en la bisectriz del ángulo g

$$\theta_2-\theta = \theta-\theta_1 = \frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$

se tiene:

$$h\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\rho\right)}\,\frac{a+b}{2}. \qquad (1.4:8')$$

Demostremos que *la indicatriz* $h(\theta)$ *tiene un valor finito para cualquier* θ:

$$h(\theta) > -\infty \qquad (1.4:9)$$

Supongamos lo contrario y sea $h(\theta_0) = -\infty$. Fijemos algún número natural $m > \rho$ y apliquemos la desigualdad (1.4:8') a la bisectriz del ángulo: $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{m}$. Resulta:

$$h\left(\theta_0+\frac{\pi}{2m}\right) \leqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi\rho}{2m}}\,\frac{a+b}{2},$$

donde a y b son unos números finitos cualesquiera que satisfacen a las condiciones:

$$a \geqslant h(\theta_0) = -\infty \quad \text{y} \quad b \geqslant h(\theta_1).$$

Fijando b, pasemos al límite en la desigualdad hallada para $a \to -\infty$. Obtenemos: $h\left(\theta_0+\frac{\pi}{2m}\right) = -\infty$. Reiterando este mismo razonamiento hallaremos que, en general,

$$h\left(\theta_0 + k\frac{\pi}{2m}\right) = -\infty, \qquad k = 0, 1, \ldots, 4m-1.$$

En virtud de la definición de la indicatriz $h(\theta)$, la función $f(z)$ tiene que estar acotada en cada rayo $\theta = \theta_0 + k\frac{\pi}{2m}$ $(k = 0, 1, \ldots, 4m - 1)$, de donde se deduce que está completamente acotada, es decir, $f(z) \equiv \text{const}$ (dos rayos contiguos forman un ángulo $\frac{\pi}{2m} < \frac{\pi}{\rho}$). Esto contradice a que la función $f(z)$ es entera de orden $\rho > 0$. Así, pues, la relación (1.4:9) queda demostrada. De ésta se deduce que en el teorema principal de este apartado siempre se puede hacer:

$$a = h(\theta_1), \qquad b = h(\theta_2).$$

Entonces la desigualdad (1.4:8) adquiere la forma siguiente:

$$h(\theta) \leqslant \frac{\operatorname{sen}[(\theta_2 - \theta)\rho]}{\operatorname{sen}[(\theta_2 - \theta_1)\rho]} h(\theta_1) + \frac{\operatorname{sen}[(\theta - \theta_1)\rho]}{\operatorname{sen}[(\theta_2 - \theta_1)\rho]} h(\theta_2). \quad (1.4:10)$$

De ésta se deduce el corolario importante:

La indicatriz de crecimiento de una función de orden finito es una función continua en todos los puntos.

En efecto, fijando arbitrariamente θ_0, hagamos en la relación (1.4:10) $\theta_1 = \theta_0$ y pasemos a límites para $\theta \to \theta_0$. Obtenemos.

$$\varlimsup_{\theta \to \theta_0,\ \theta > \theta_0} h(\theta) \leqslant h(\theta_0).$$

Haciendo en (1.4:10) $\theta_2 = \theta_0$ y pasando a límites para $\theta \to \theta_0$, hallamos:

$$\varlimsup_{\theta \to \theta_0,\ \theta < \theta_0} h(\theta) \leqslant h(\theta_0).$$

Así, pues,

$$\varlimsup_{\theta \to \theta_0} h(\theta) \leqslant h(\theta_0). \quad (1.4:11)$$

Hagamos ahora en (1.4:10) $\theta = \theta_0$ y pasemos a límites una vez para $\theta_1 \to \theta_0$ y otra vez para $\theta_2 \to \theta_0$. Obtendremos:

$$h(\theta_0) \leqslant \varliminf_{\theta_1 \to \theta_0,\ \theta_1 < \theta_0} h(\theta_1); \quad h(\theta_0) \leqslant \varliminf_{\theta_2 \to \theta_0,\ \theta_2 > \theta_0} h(\theta_2),$$

o sea,

$$\varliminf_{\theta \to \theta_0} h(\theta) \geqslant h(\theta_0). \quad (1.4:12)$$

Confrontando (1.4:11) y (1.4:12), hallamos:

$$\varlimsup_{\theta \to \theta_0} h(\theta) = \varliminf_{\theta \to \theta_0} h(\theta) = h(\theta_0),$$

como se quería demostrar.

Demostremos ahora que *si* $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, *entonces no pueden existir dos valores* θ' *y* θ'' *tales que*

$$\theta'' - \theta' = \frac{\pi}{\rho},$$

y

$$h(\theta') < 0 \quad \text{y} \quad h(\theta'') < 0.$$

Supongamos que existen tales valores. Entonces, haciendo en (1.4:8'):

$$\theta_1 = \theta' + \varepsilon, \ \ \theta_2 = \theta'' - \varepsilon, \ \ a = h(\theta' + \varepsilon), \ \ b = h(\theta'' - \varepsilon) \left(0 < \varepsilon < \frac{\theta'' - \theta'}{2}\right)$$

tendremos:

$$h\left(\frac{\theta' + \theta''}{2}\right) \leqslant \frac{h(\theta' + \varepsilon) + h(\theta'' - \varepsilon)}{2 \cos\left[\left(\frac{\theta'' - \theta'}{2} - \varepsilon\right)\rho\right]} = \frac{h(\theta' + \varepsilon) + h(\theta'' - \varepsilon)}{2 \operatorname{sen}(\varepsilon\rho)}.$$

Cuando $\varepsilon \to 0$ el segundo miembro, en virtud de las hipótesis hechas y de la continuidad demostrada de $h(\theta)$, tiene que tender a $-\infty$, lo cual es imposible. De aquí se deduce lo que se afirmaba. En particular, para $\rho = \frac{1}{2}$ no existe ningún valor de θ para el cual sea $h(\theta) < 0$.

Obsérvese que para $0 < \rho < \frac{1}{2}$ tampoco puede existir ningún valor de θ para el cual $h(\theta) < 0$. En efecto, a lo largo del rayo correspondiente la función $f(z)$ tiene que estar acotada, lo cual para las funciones de orden menor que $\frac{1}{2}$, no idénticamente constantes, es imposible (véase el apartado anterior). Así, pues, para una función de orden no superior a $\frac{1}{2}$ la indicatriz de crecimiento es no negativa: $h(\theta) \geqslant 0$.

Supongamos ahora que $\rho > \frac{1}{2}$ y que θ_0 es el valor de θ para el cual $h(\theta_0) < 0$. Como para algunos valores de θ tiene que ser: $h(\theta) \geqslant 0$, existe un intervalo (θ', θ'') que contiene a θ_0 en el cual $h(\theta) < 0$ y en cuyos extremos $h(\theta') = h(\theta'') = 0$. Está claro que $0 < \theta' - \theta'' \leqslant \frac{\pi}{\rho}$; en efecto, suponiendo que $\theta' - \theta'' > \frac{\pi}{\rho}$ se podrían señalar tales valores θ_1 y θ_2 del intervalo (θ_1, θ_2) para los cuales $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{\rho}$. Pero $h(\theta_1) < 0$ y $h(\theta_2) < 0$, y por lo tanto, resulta una contradicción con la propiedad establecida anteriormente de la indicatriz de crecimiento.

Supongamos, para precisar, que θ' es el extremo del intervalo (θ', θ'') más próximo a θ_0; entonces $0 < \theta_0 - \theta' = \delta \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$. Apliquemos la fórmula (1.4:10), sustituyendo en ella θ_1 por $\theta' - \delta + \varepsilon$ y θ_2 por $\theta' + \delta - \varepsilon = \theta_0 - \varepsilon$, siendo $0 < \varepsilon < \delta$. (Esta fórmula es aplicable al caso dado, ya que

$$(\theta' + \delta - \varepsilon) - (\theta' - \delta + \varepsilon) = 2\delta - 2\varepsilon < \frac{\pi}{\rho}.)$$

Obtenemos:

$$h(\theta') = 0 \leqslant \frac{1}{\cos[(\delta - \varepsilon)\rho]} \frac{h(\theta' - \delta + \varepsilon) + h(\theta' + \delta - \varepsilon)}{2},$$

de donde

$$h(\theta' - \delta + \varepsilon) \geqslant -h(\theta' + \delta - \varepsilon).$$

Como esta relación es válida para cualquier $\varepsilon > 0$ y $h(\theta)$ es continua, resulta que también es válida en el límite, cuando $\varepsilon \to 0$. Por lo tanto

$$h(\theta' - \delta) \geqslant -h(\theta' + \delta) = -h(\theta_0).$$

Pero $h(\theta' - \delta) \leqslant \sigma$, donde σ es el tipo de la función $f(z)$; por consiguiente,

$$h(\theta_0) \geqslant -\sigma.$$

Así, pues, para $\rho > \frac{1}{2}$ se tiene:

$$\sigma \geqslant h(\theta) \geqslant -\sigma. \tag{1.4:13}$$

Como ya se vio, para $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ esta desigualdad se sustituye por otra más fuerte:

$$\sigma \geqslant h(\theta) \geqslant 0. \tag{1.4:13'}$$

Obsérvese que para las funciones de tipo minimal, de una y otra desigualdad resulta

$$h(\theta) \equiv 0.$$

Demostremos, finalmente, que en todos los casos

$$\max h(\theta) = \sigma. \tag{1.4:14}$$

En efecto, si se supone que $\max h(\theta) = \sigma_1 < \sigma$, entonces en el teorema principal de este apartado se puede hacer $a = b = \sigma_1$, después de lo cual la desigualdad (1.4:4), en la que sustituimos A y B por sus valores de las ecuaciones (1.4:3), toma la forma

$$\ln|f(re^{i\theta})| < \left\{ \frac{\cos\left[\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2} - \theta\right)\rho\right]}{\cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\rho\right)} \sigma_1 + \varepsilon \right\} r^{\rho}$$

para $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ y $r > R(\varepsilon)$. Hagamos $\frac{\theta_2+\theta_1}{2} = \theta_0$ y $\frac{\theta_2-\theta_1}{2} = \delta$; entonces en el segmento $[\theta_0-\delta, \theta_0+\delta]$ tendremos:

$$\ln|f(re^{i\theta})| < \left[\frac{\cos(\theta_0-\theta)\rho}{\cos\delta\rho}\sigma_1+\varepsilon\right] r^\rho$$

para $r > R(\varepsilon)$.

La expresión comprendida entre corchetes tiende al límite σ_1 para $\delta \to 0$ y $\varepsilon \to 0$ (uniformemente respecto de θ_0 y θ) y, por consiguiente, para valores suficientemente pequeños de $\delta = \delta_0$ y $\varepsilon = \varepsilon_0$ puede hacerse menor que σ_2 siendo $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma$. En resumen,

$$\ln|f(re^{i\theta})| < \sigma_2 r^\rho \quad \text{para} \quad \theta_0-\delta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0+\delta_0 \quad \text{y} \quad r > R_0 = R_0(\theta_0). \tag{1.4:15}$$

Evidentemente, δ_0 se puede tomar igual a $\frac{\pi}{2m}$, donde m es un número natural suficientemente grande. Entonces en todos los ángulos

$$\frac{k\pi}{m} \leqslant \theta \leqslant \frac{(k+1)\pi}{m} \qquad (k=0, \ldots, m-1)$$

se cumple la desigualdad (1.4:15) para valores de r suficientemente grandes, de donde se deduce que

$$\ln|f(re^{i\theta})| < \sigma_2 r^\theta \quad \text{para} \quad r > R$$

y

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})}{r^\rho} \leqslant \sigma_2,$$

lo cual es imposible.

La gráfica de la indicatriz de crecimiento de una función entera en coordenadas polares r y θ:

$$r = h(\theta)$$

se llama *indicatriz de esta función*.

El lector puede convencerse fácilmente de que las indicatrices de crecimiento $h(\theta)$ para las funciones

1) e^{az}, donde $a = \alpha e^{i\varphi}$, 2) $\operatorname{sen} z$, 3) $\cos z$, 4) e^{z^n} (n es natural) son:

$$1)\ \alpha\cos(\theta+\varphi), \quad 2)\ \text{y}\ 3)\ |\operatorname{sen}\theta|, \quad 4)\ \cos n\theta.$$

Las curvas correspondientes [1) es una circunferencia doblemente recorrida, construida sobre el segmento, que une los puntos O y $\bar{a}$, como diámetro; 2) y 3) son dos circunferencias tangentes en el origen de coordenadas, con centros en el eje imaginario y diámetros iguales a 1; 4) es una rosa de $2n$ hojas] están representadas en la fig. 36.

1.5. Como un ejemplo de las leyes que se pueden demostrar para las funciones enteras partiendo del estudio de su crecimiento, expongamos unas cuantas proposiciones elementales que, para el caso de las funciones de orden finito, establecen el llamado teorema pequeño de Picard.

T e o r e m a 1. *Si una función entera $f(z)$ no toma cierto valor A ($\neq \infty$) en ningún punto del plano, entonces $f(z)$ tiene la forma*

$$f(z) = A + e^{g(z)}, \tag{1.5:1}$$

donde $g(z)$ es una función entera.

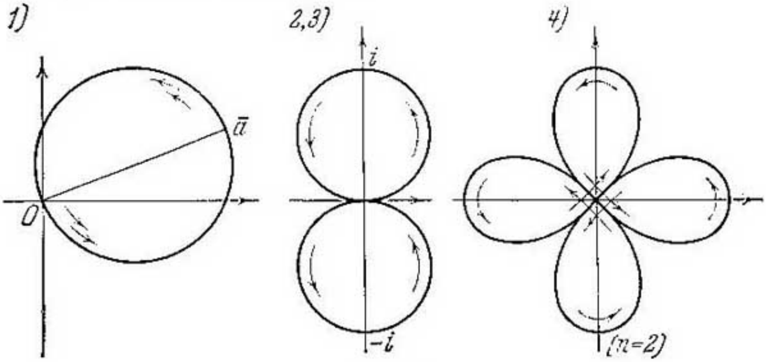

FIG. 36.

D e m o s t r a c i ó n. Como $f(z) - A$ no se anula, la función $\frac{f'(z)}{f(z)-A} = h(z)$ es analítica en todo el plano, es decir, es una función entera. Pero

$$\frac{f'(z)}{f(z)-A} = \frac{d}{dz} \operatorname{Ln}[f(z) - A],$$

por consiguiente,

$$[\operatorname{Ln}[f(z) - A]]_0^z = \int_0^z h(z)\,dz$$

de donde

$$f(z) - A = \exp\left\{\int_0^z h(z)\,dz + \ln[f(0) - A]\right\} = e^{g(z)}$$

siendo también

$$g(z) = \int_0^z h(z)\,dz + \ln[f(0) - A]$$

una función entera.

Demostremos ahora unos lemas que de por sí mismo tienen un valor capital.

L e m a 1. *Si la parte real* $u(r, \vartheta)$ *de una función* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, *que es analítica en un entorno* $|z| < R < \infty$ *del origen de coordenadas, satisface para todos los valores* ρ, $0 < \rho < R$, *a una desigualdad de la forma*

$$u(\rho, \vartheta) \leqslant U \tag{1.5:2}$$

(aquí no se toma $u(\rho, \vartheta)$ en valor absoluto, de modo que, en particular, U puede ser un número negativo), *entonces los coeficientes de la serie de potencias satisfacen a las desigualdades*:

$$|a_m| \leqslant \frac{2(U-\alpha_0)}{R^m}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{1.5:3}$$

donde

$$\alpha_0 = \mathrm{Re}(a_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r, \vartheta)\, d\vartheta.$$

D e m o s t r a c i ó n. Sea $f(z) = u(r, \vartheta) + iv(r, \vartheta)$; entonces para la función $U - f(z) = U - u(r, \vartheta) - iv(r, \vartheta)$ el desarrollo de Taylor tiene la forma $U - a_0 - \sum_1^\infty a_m z^m$. Por consiguiente, los números $-a_m = \alpha_m + i\beta_m$ para $m \geqslant 1$ pueden expresarse en la forma siguiente (véase (1.2:6) y (1.2:7) cap. sexto, en las cuales se debe sustituir $u(\rho, \alpha)$ por $U - u(\rho, \alpha)$):

$$-a_m = \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} [U - u(\rho, \alpha)]\, e^{-im\alpha}\, d\alpha,$$

de donde

$$|a_m| \leqslant \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} \{U - u(\rho, \alpha)\}\, d\alpha = \frac{2U}{\rho^m} - \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\, d\alpha.$$

Pero

$$\frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\, d\alpha = \frac{2}{\rho^m}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\, d\alpha = \frac{2u(0)}{\rho^m} = \frac{2\alpha_0}{\rho^m};$$

de donde resulta:

$$|a_m| \leqslant \frac{2(U-\alpha_0)}{\rho^m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

para cualquier $\rho < R$. Pasando aquí a límites para $\rho \to R$, obtenemos las desigualdades (1.5:3).

L e m a 2. *Si la parte real $u(r, \vartheta)$ de una función entera $f(z)$ satisface para todos los valores de r, comenzando desde cierto r_0, a una desigualdad de la forma*

$$u(r, \vartheta) \leqslant r^{\mu} \qquad (r > r_0), \tag{1.5:4}$$

donde $\mu > 0$, entonces $f(z)$ es un polinomio de grado no superior a $[\mu]$.

D e m o s t r a c i ó n. En virtud del principio del módulo máximo para las funciones armónicas, para todos $\rho < r$ se tiene: $u(\rho, \vartheta) \leqslant \leqslant r^{\mu}$; por ello, según el lema 1

$$|a_m| \leqslant 2\frac{r^{\mu} - \alpha_0}{r^m}.$$

Si $m \geqslant [\mu] + 1$ y r crece indefinidamente, resulta

$$a_{[\mu]+1} = a_{[\mu]+2} = \ldots = 0$$

y, por consiguiente,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{[\mu]} z^{[\mu]},$$

como se quería demostrar.

T e o r e m a 2. *Si una función entera $f(z)$, que no toma cierto valor $A (\neq \infty)$ en ningún punto del plano, es de orden finito ρ, entonces ρ necesariamente es un número entero y $f(z)$ posee la forma*

$$f(z) = A + e^{P(z)},$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado ρ.

D e m o s t r a c i ó n. Debido al teorema 1 $f(z)$ puede expresarse en la forma

$$f(z) = A + e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera. Pero, para cualquier $\varepsilon > 0$ y $r > R(\varepsilon)$, se cumple la desigualdad

$$|f(z)| < e^{r^{\rho + \frac{\varepsilon}{2}}},$$

de donde

$$|e^{g(z)}| < |A| + e^{r^{\rho + \frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Eligiendo $R'(\varepsilon) \geqslant R(\varepsilon)$ de modo que para $r > R'(\varepsilon)$ sea

$$|A| + e^{r^{\rho + \frac{\varepsilon}{2}}} < e^{r^{\rho + \varepsilon}},$$

y observando que $|e^{g(z)}| = e^{\mathrm{Re}\,[g(z)]}$, obtenemos:

$$e^{\mathrm{Re}\,[g(z)]} < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{para} \quad r > R'(\varepsilon).$$

Por consiguiente, para estos mismos valores de r

$$\operatorname{Re}[g(z)] < r^{\rho+\varepsilon},$$

de donde, según el lema 2, $g(z)$ es un polinomio $P(z)$ de grado no superior a $[\rho + \varepsilon]$.

Por otra parte, está claro que si $f(z)$ es una función de orden ρ, entonces $f(z) - A = e^{P(z)}$ también es una función del mismo orden, y como el orden de la función $e^{P(z)}$ es igual al grado n del polinomio $P(z)$ (cosa que se vio al comienzo del ap. 1.3), resulta que $\rho = n$ es un número entero y $P(z)$ es un polinomio de grado ρ. Con esto se termina la demostración.

T e o r e m a 3. *Si una función entera $f(z)$ toma un valor A $(\neq \infty)$ en un número finito de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ con los órdenes de multiplicidad $k_1, k_2, \ldots, k_m$, entonces $f(z)$ es de la forma*

$$f(z) = A + (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera.

En efecto, en virtud de las condiciones del teorema la función $\dfrac{f(z) - A}{(z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m}}$ es entera y no se anula en ningún punto del plano. De aquí que, según el teorema 1, ésta es de la forma $e^{g(z)}$, donde $g(z)$ es una función entera.

Por lo tanto,

$$\frac{f(z) - A}{(z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m}} = e^{g(z)},$$

de donde

$$f(z) = A + (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m} e^{g(z)}.$$

T e o r e m a 4. *Si respecto de una función entera $f(z)$ que satisface a la condición del teorema precedente, se sabe que es de orden finito ρ, entonces ρ tiene que ser un número entero y la función $f(z)$ es de la forma*

$$f(z) = A + (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m} e^{P(z)},$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado ρ.

En efecto, según el teorema 3, $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = A + (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera. Como

$$|e^{g(z)}| = e^{\operatorname{Re}[g(z)]} < \frac{|f(z)| + |A|}{|z - z_1|^{k_1} \ldots |z - z_m|^{k_m}} < |f(z)| + |A|,$$

si $|z - z_1| > 1, \ldots, |z - z_m| > 1$ y además para todos los valores de r suficientemente grandes: $|f(z)| + |A| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$, resulta

$$\operatorname{Re}[g(z)] < r^{\rho+\varepsilon},$$

de donde, del lema 2 se deduce que $g(z)$ es un polinomio $P(z)$ de grado no superior a ρ.

Por otra parte, es evidente que si $f(z)$ es una función de orden ρ, entonces

$$\frac{f(z)-A}{(z-z_1)^{k_1}\dots(z-z_m)^{k_m}}=e^{P(z)}$$

es una función del mismo orden. En efecto, ya se ha observado que

$$|e^{P(z)}|=|e^{g(z)}|<r^{\rho+\varepsilon} \quad \text{para} \quad r>R(\varepsilon),$$

y, por consiguiente, el orden de $e^{P(z)}$ no es superior a ρ. Pero éste no puede ser inferior a ρ, pues en caso contrario tendríamos para algún α positivo que

$$|e^{P(z)}|<e^{r^{\rho-2\alpha}} \quad \text{para} \quad r>R'(\alpha)$$

y, por lo tanto,

$$|f(z)|<|A|+e^{r^{\rho-2\alpha}}(r+|z_1|)^{k_1}\dots(r+|z_m|)^{k_m}$$

para $r>R'(\varepsilon)$.

Es evidente que la razón de la magnitud que figura en el segundo miembro de la desigualdad a $e^{r^{\rho-\alpha}}$ tiende a cero cuando $r\to\infty$. Por ello, para $r>R''(\alpha)>R'(\alpha)$ tendremos:

$$|f(z)|<e^{r^{\rho-\alpha}},$$

lo cual es incompatible con la hipótesis del teorema según la cual el orden de la función $f(z)$ es ρ.

Así, pues, el orden de la función $e^{P(z)}$ también es igual a ρ y, por consiguiente, ρ es un número entero que coincide con el grado del polinomio $P(z)$. El teorema 4 queda demostrado.

T e o r e m a 5. *Para una función trascendente entera $f(z)$ de orden finito ρ, el conjunto de sus A-puntos es infinito para cualquier A. Es excepcional solamente el caso en que ρ es un número entero positivo y la función $f(z)$ es de la forma*

$$f(z)=A_0+p(z)\,e^{P(z)}, \tag{1.5:5}$$

donde $p(z)$ y $P(z)$ son polinomios. En este caso, para $A=A_0$ y sólo para este valor único, resulta un conjunto finito de A-puntos (que coinciden con los ceros del polinomio $p(z)$).

En otras palabras: *para una función entera de orden finito no puede existir más de un valor excepcional $A=A_0$ para el cual el conjunto de A-puntos de la función sea finito.*

Obsérvese que la condición de que el orden ρ sea finito en este teorema está dictada solamente por el método elemental elegido de demostración. En la realidad, el teorema 5, conocido por el nombre de teorema pequeño de Picard, es válido para las funciones enteras de cualquier orden, finito o infinito.

Empezando la demostración, señalemos que si la función $f(z)$ tiene para cierto $A = A_0$ ($\neq \infty$) solamente un conjunto finito de A-puntos: $z_1, \ldots, z_m$, con los órdenes de multiplicidad $k_1, \ldots, k_m$, entonces según el teorema 4, ρ tiene que ser un número entero y $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = A_0 + (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m} e^{P(z)}, \tag{1.5:6}$$

donde el grado del polinomio $P(z)$ es igual a $\rho > 0$. Por lo tanto, si ρ no es un número entero positivo, el conjunto de A-puntos de la función entera es infinito para cualquier A ($\neq \infty$).

No queda más que demostrar que cuando ρ es un número entero positivo y $f(z)$ tiene la forma especial (1.5:6), no existe un número B_0 distinto de A_0 ($B_0 \neq \infty$), para el cual el conjunto de A-puntos sea también finito.

Demostrando el teorema por reducción a lo absurdo, supongamos que el conjunto de A-puntos de la función $f(z)$ es también finito para cierto $B_0 \neq A_0$. Entonces, según el teorema 4, $f(z)$ tiene que ser de la forma

$$f(z) = B_0 + (z - \zeta_1)^{l_1} \ldots (z - \zeta_n)^{l_n} e^{Q(z)}, \tag{1.5:7}$$

donde $Q(z)$ también es un polinomio de grado ρ. De (1.5:6) y (1.5:7) resulta la identidad

$$p(z) e^{P(z)} - q(z) e^{Q(z)} = C, \tag{1.5:8}$$

donde

$$p(z) = (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m}, \quad q(z) = (z - \zeta_1)^{l_1} \ldots (z - \zeta_n)^{l_n}$$

y

$$C = B_0 - A_0 \neq 0.$$

Al principio del ap. 1.3 se estableció que para la función $e^{P(z)}$ todo el plano se divide en 2ρ ángulos iguales de magnitud $\frac{\pi}{\rho}$ con el vértice común en el punto $z = 0$: $g_0, \ldots, g_{2\rho-1}$, y tales que dentro de los ángulos de índice par la función $e^{P(z)}$ tiende a ∞, y dentro de los ángulos de índice impar tiende a 0. Para la función $e^{Q(z)}$ existen ángulos similares de la misma magnitud $\frac{\pi}{\rho}$ y con el mismo vértice $z = 0$: $f_0, \ldots, f_{2\rho-1}$. Cualquiera que sea la posición relativa de los ángulos g_j y f_j, siempre se puede afirmar que el ángulo g_1, por ejemplo, tiene puntos interiores comunes con alguno de los ángulos f_j de índice par, o sino coincide tatalmente con un ángulo f_j de índice impar.

En el primer caso, es decir, cuando g_1 tiene puntos interiores comunes con cierto ángulo f_{2s}, existe un ángulo γ con el vértice en el origen de coordenadas, que junto con sus lados está situado en el interior de g_1 y en el interior de f_{2s}. Pero entonces, para cierto ε, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, en los puntos del ángulo γ se verifican las desigualdades siguientes (véase la pág. 264):

$$|e^{P(z)}| < \exp[-\sigma_\rho \operatorname{sen} \varepsilon \cdot r^\rho (1-\varepsilon)]$$

(σ_ρ es el módulo del coeficiente de z^ρ en el polinomio $P(z)$),

$$|e^{Q(z)}| > \exp[\tau_\rho \operatorname{sen} \varepsilon \cdot r^\rho (1-\varepsilon)]$$

(τ_ρ es el módulo del coeficiente de z^ρ en el polinomio $Q(z)$).

Por lo tanto, en los puntos del ángulo γ el módulo del primer miembro de la igualdad (1.5:8) satisface a la desigualdad

$$|p(z)e^{P(z)} - q(z)e^{Q(z)}| > (r - |\zeta_1|)^{l_1} \ldots$$
$$\ldots (r - |\zeta_m|)^{l_m} \exp[\tau_\rho \operatorname{sen} \varepsilon r^\rho (1-\varepsilon)] - (r + |z_1|)^{h_1} \ldots$$
$$\ldots (r + |z_m|)^{h_m} \exp[-\sigma_\rho \operatorname{sen} \varepsilon r^\rho (1-\varepsilon)]$$

y como el minuendo del segundo miembro tiende a ∞ cuando $r \to \infty$ y el sustraendo tiende a cero, todo el primer miembro de la igualdad (1.5:8) tiene que tender a ∞ en los puntos del ángulo γ, lo cual representa una contradicción evidente, pues esta magnitud es constante ($\equiv C$).

No queda más que examinar el caso en que g_1 coincide con algún ángulo f_{2s-1} de índice impar. Ahora, en el ángulo γ con el vértice en el origen de coordenadas, situado junto con sus lados dentro de $g_1 = f_{2s-1}$, debido a las desigualdades establecidas en la pág. 267, tendremos para cierto ε, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$:

$$|e^{P(z)}| < \exp[-\sigma_\rho \operatorname{sen} \varepsilon r^\rho (1-\varepsilon)], \quad |e^{Q(z)}| < \exp[-\tau_\rho \operatorname{sen} \varepsilon r^\rho (1-\varepsilon)].$$

Por consiguiente, para el módulo del primer miembro de (1.5:8) obtenemos la acotación siguiente:

$$|p(z)e^{P(z)} - q(z)e^{Q(z)}| < (r + |z_1|)^{h_1} \ldots$$
$$\ldots (r + |z_m|)^{h_m} \exp[-\sigma_\rho \operatorname{sen} \varepsilon \cdot r^\rho (1-\varepsilon)] + (r + |\zeta_1|)^{l_1} \ldots$$
$$\ldots (r + |\zeta_n|)^{l_n} \exp[-\tau_\rho \operatorname{sen} \varepsilon \cdot r^\rho (1-\varepsilon)].$$

Aquí el segundo miembro tiende a 0 cuando $r \to \infty$; por lo tanto, el primer miembro tiene que tender a 0 cuando $r \to \infty$, lo cual es imposible, puesto que esta magnitud es constante y diferente de cero.

De la contradicción obtenida se deduce que el teorema 5 es cierto*).

Como ilustración del último teorema, calculemos la cantidad de raíces de la ecuación $\operatorname{sen} z - Az = 0$ para cualquier $A \neq \infty$.

Si $A = 0$ resulta la ecuación $\operatorname{sen} z = 0$, la cual posee un conjunto infinito de raíces: $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Observamos que para cualquier número complejo $A \neq 0$ el conjunto de raíces de la ecuación considerada coincide con el conjunto de A-puntos de la función entera $g(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$ Bien se ve que ésta es una función entera de orden $\rho = 1$; como el orden es un número entero, no está descartado que para cierto $A = A_0 \neq 0$ el conjunto de A-puntos de la función $g(z)$ y, por consiguiente, el conjunto de raíces de la ecuación $\operatorname{sen} z - Az = 0$ sea finito.

Para aclarar esta cuestión hasta el fin, introduzcamos la función entera

$$h(z) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} = 1 - \frac{\zeta}{2!} + \frac{\zeta^2}{4!} + \ldots,$$

cuyo orden es igual a $\frac{1}{2}$ (lo cual se comprueba fácilmente, expresando $\operatorname{sen}\sqrt{\zeta}$ mediante la función exponencial, o bien aplicando la fórmula

---

*) D. A. Raikov me indicó otra demostración sencilla de que una relación de la forma (1.5:8)

$$p(z)\exp P(z) - q(z)\exp Q(z) \equiv C \neq 0$$

es imposible cuando al menos uno de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ no es idénticamente constante. Suponiendo cierta esta identidad, derivando hallamos:

$$[p'(z) + p(z)P'(z)]\exp P(z) - [q'(z) + q(z)Q'(z)]\exp Q(z) \equiv 0. \qquad (*)$$

Si se supone que

$$q'(z) + q(z)Q'(z) \equiv 0 \qquad (\text{y } p'(z) + p(z)P'(z) \equiv 0),$$

de aquí sale que $q(z) \equiv \text{const}$ $(p(z) \equiv \text{const})$, pues en caso contrario el polinomio $Q'(z) \equiv -\frac{q'(z)}{q(z)}$ tendría polos en todos los ceros de $q(z)$, lo cual es imposible; por esta razón, $Q(z) \equiv \text{const}$ $(P(z) \equiv \text{const})$. Pero esto contradice a las hipótesis hechas respecto de $P(z)$ y $Q(z)$.

Volviendo a la relación (*) deducimos que

$$\exp[Q(z) - P(z)] = \frac{p'(z) + p(z)P'(z)}{q'(z) + q(z)Q'(z)}$$

y, por consiguiente, la función racional que figura en el segundo miembro no tiene polos ni ceros en el plano finito, es decir, es constante. Por ello $Q(z) - P(z) \equiv \text{const}$, y de la relación (1.5:8) resulta:

$$p(z) - C'q(z) \equiv C\exp[-P(z)],$$

de donde $P(z) \equiv \text{const}$, y de nuevo resulta una contradicción con las hipótesis hechas respecto de $P(z)$ y $Q(z)$.

que expresa el orden ρ de una función entera mediante los coeficientes de la serie de potencias).

Haciendo $z = \sqrt{\zeta}$, escribamos la ecuación $\operatorname{sen} z - Az = 0$ en la forma

$$\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} = A.$$

Está claro que a cada raíz $\zeta \neq 0$ de esta ecuación le van a corresponder dos raíces distintas de la primera ecuación. Por lo tanto, el conjunto de raíces de la primera ecuación será infinito si es infinito el conjunto de raíces de la segunda. Pero las raíces de la segunda ecuación son los A-puntos de la función entera $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}$ de orden fraccionario $\rho = \frac{1}{2}$. En virtud del teorema demostrado, el conjunto de tales puntos es infinito.

Definitivamente, obtenemos que la ecuación

$$\operatorname{sen} z - Az = 0$$

posee un conjunto infinito de raíces para cualquier A $(\neq \infty)$.

§ 2. DESARROLLO EN PRODUCTO INFINITO. RELACION ENTRE EL CRECIMIENTO DE UNA FUNCION ENTERA Y SUS CEROS

2.1. Una función trascendente entera $f(z)$ puede no tener ningún cero, o tener solamente una cantidad finita de ellos, o finalmente, poseer un conjunto infinito de ceros. En el primer caso la función se expresa en la forma

$$f(z) = e^{g(z)},$$

en el segundo caso, en la forma

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ también es una función entera, $z_1, \ldots, z_m$ son los ceros, distintos entre sí, de la función $f(z)$ y $k_1, \ldots, k_m$ son los órdenes respectivos de estos ceros.

Consideremos una función entera $f(z)$ que posea un conjunto infinito de ceros. Sea $z = 0$ un cero λ-múltiple de la función; si $f(0) \neq 0$ se supondrá que $\lambda = 0$. Como $f(z)$ tiene solamente una cantidad finita de ceros en cada círculo $|z| < R < \infty$, éstos pueden numerarse en el orden no decreciente de sus módulos. Esto se hará repitiendo cada cero tantas veces como indique su orden de multiplicidad. Resulta una sucesión de números

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{\lambda}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \tag{2.1:1}$$

donde $|\alpha_n| \leqslant |\alpha_{n+1}|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n| = \infty$.

Demostremos el teorema siguiente:

Teorema de Weierstrass. *Cualquiera que sea la sucesión, de números complejos* (2.1:1), *no decrecientes en valor absoluto, que converja hacia el infinito, siempre existe una función entera $f(z)$ cuyos ceros coinciden con los números de esta sucesión.*

Demostración. Construyamos la sucesión de funciones enteras

$$g_n(z) = z^\lambda \prod_1^n \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)}, \tag{2.1:2}$$

donde $P_k(z)$ son unos polinomios, y demostremos que mediante una elección adecuada de los polinomios $P_k(z)$, la sucesión converge uniformemente en todo círculo $|z| < R$ de radio finito hacia una función $f(z)$ que satisface a todas las condiciones del teorema. Obsérvese que la elección misma de las funciones $g_n(z)$ es completamente natural. Está claro que los ceros de la función $g_n(z)$ son:

$$0, \ldots, 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n,$$

es decir, son los primeros términos de la sucesión (2.1:1). Además, cada uno de los números indicados se toma tantas veces cuantas el mismo aparece en la sucesión dada. Por consiguiente, $g_n(z)$ posee generalmente ceros múltiples de los órdenes dados. En lo que se refiere a los factores de la forma $e^{P_k(z)}$, éstos, sin agregar nuevos ceros, sirven para garantizar la convergencia uniforme de la sucesión (2.1:2).

Comenzando a construir los polinomios $P_k(z)$, fijemos arbitrariamente un círculo $|z| < R$ y supongamos que $N(R) + 1$ denota el índice, comenzando desde el cual todos los puntos α_n están situados fuera de un círculo de doble radio:

$$|\alpha_n| > 2R \quad \text{para} \quad n > N(R). \tag{2.1:3}$$

Representemos $g_n(z)$ en la forma

$$g_n(z) = g_{N(R)}(z) \prod_{N(R)+1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)} =$$

$$= g_{N(R)}(z) \exp\left\{ \sum_{N(R)+1}^{n} \left[\operatorname{Ln}\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) + P_k(z)\right]\right\}.$$

Si $|z| < R$, entonces, en virtud de (2.1:3), $\left|\frac{z}{\alpha_k}\right| < \frac{1}{2}$ para $k > N(R)$. Por consiguiente, $\mathrm{Ln}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)$ se puede desarrollar en serie de potencias

$$\mathrm{Ln}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right) = \ln\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right) + 2m\pi i =$$
$$= 2m\pi i - \frac{z}{\alpha_k} - \frac{z^2}{2\alpha_k^2} - \ldots - \frac{z^k}{k\alpha_k^k} - \ldots$$

Como $\mathrm{Ln}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)$ figura bajo el signo de la función exponencial, se puede hacer aquí $m = 0$, es decir, tomar los valores principales de los logaritmos, sin que cambie por esto el resultado.

El polinomio $P_k(z)$ lo elegiremos de tal modo que difiera sólo en el signo de la suma de los primeros k términos de la serie de potencias de la función $\mathrm{Ln}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)$, es decir, haremos

$$P_k(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \frac{z^2}{2\alpha_k^2} + \ldots + \frac{z^k}{k\alpha_k^k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Entonces tendremos:

$$\ln\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right) + P_k(z) = -\frac{z^{k+1}}{(k+1)\,\alpha_k^{k+1}} - \ldots,$$

de donde

$$\left|\ln\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right) + P_k(z)\right| \leqslant \frac{1}{k+1}\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{k+1} + \frac{1}{k+2}\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{k+2} +$$
$$+ \ldots < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \ldots = \frac{1}{2^k}.$$

Así, pues, habiendo elegido los polinomios $P_k(z)$ del modo indicado, la serie

$$\sum_{N(R)+1}^{\infty} \left[\ln\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right) + P_k(z)\right]$$

converge uniformemente en el círculo $|z| \leqslant R$ y, por consiguiente, representa en el mismo una función analítica $\varphi_R(z)$. Por ello, la sucesión

$$g_n(z) = g_{N(R)}(z) \exp\left\{\sum_{N(R)+1}^{n} \left[\ln\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right) + P_k(z)\right]\right\}$$

también converge uniformemente en el interior del círculo $|z| < R$ (aquí se tiene en cuenta que la función exponencial es continua) y, por consiguiente, representa en el mismo una función analítica

$f(z) = g_{N(R)}(z) \exp[\varphi_R(z)]$. Como en este razonamiento el radio R del círculo era arbitrario, resulta que la sucesión $\{g_n(z)\}$, con la elección indicada de los polinomios $\{P_k(z)\}$, es uniformemente convergente en el interior de cualquier círculo con el centro en el origen de coordenadas y, por consiguiente, $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(z)$ es analítica en todo el plano, es decir, es una función entera. Esta en cada círculo $|z| < R$ tiene la forma $f(z) = g_{N(R)}(z)\cdot\exp[\varphi_R(z)]$ y como $\exp[\varphi_R(z)]$ no se anula en este círculo, resulta que $f(z)$ tiene los ceros comunes con $g_{N(R)}(z)$.

Pero los ceros del polinomio $g_{N(R)}(z)$ son todos aquellos puntos de la sucesión (2.1:1) que están situados en el círculo $|z| \leqslant 2R$. Por consiguiente, en el interior del círculo $|z| < R$ son ceros de $f(z)$ todos los puntos de la sucesión (2.1:1) que están situados en el mismo y sólo ellos.

De lo dicho se deduce que la función construida $f(z)$ satisface a todas las condiciones del teorema. El teorema queda demostrado.

La función obtenida en la demostración del teorema de Weierstrass tiene la forma del límite del producto

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} z^\lambda \prod_1^n \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^k}{k\alpha_k^k}\right).$$

Ordinariamente, para escribir esta última expresión se omite la notación del límite, empleando el símbolo del producto infinito $\prod\limits_1^\infty$:

$$f(z) = z^\lambda \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^k}{k\alpha_k^k}\right).$$

2.2. Empleando el teorema de Weierstrass, fácilmente se demuestra la siguiente proposición:

T e o r e m a. *Toda función entera $f(z)$ con los ceros*

$$0, \ldots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

se puede expresar en la forma

$$f(z) = e^{g(z)} z^\lambda \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^k}{k\alpha_k^k}\right), \qquad (2.2:1)$$

donde $g(z)$ es una función entera.

En efecto, formemos según el teorema de Weierstrass la función entera

$$\varphi(z) = z^\lambda \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^k}{k\alpha_k^k}\right),$$

cuyos ceros son los de $f(z)$ y sólo ellos. Entonces el cociente $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ representará una función entera sin ceros. Según el teorema 1 del ap. 1.5, ésta tendrá que tener la forma

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera, de donde se deduce la fórmula (2.2:1).

La fórmula (2.2:1) se simplifica considerablemente para las funciones enteras de orden finito. Para esto, estudiemos primero la relación existente entre los ceros y el crecimiento de la función entera en el caso de funciones trascendentes enteras cualesquiera. Esta relación se deduce de la desigualdad de Jentzsch (ap. 4.1, cap. 6).

Escribámosla en la forma:

$$\int_0^R \frac{n(r)\,dr}{r} \leqslant \ln \frac{M(R)}{|f_{(0)}^{(\lambda)}/\lambda!\,|\,R^\lambda}$$

(véase la fórmula (4.1:9′), cap. 6). Aquí $n(r)$ denota la cantidad de ceros de la función $f(z)$ (excluyendo el punto $z = 0$) situados en el círculo cerrado $|z| \leqslant r$. Tomando arbitrariamente θ, $0 < \theta < 1$, obtenemos:

$$\int_0^R \frac{n(r)\,dr}{r} > \int_{\theta R}^R \frac{n(r)\,dr}{r} \geqslant n(\theta R) \int_{\theta R}^R \frac{dr}{r} = \ln\frac{1}{\theta}\, n(\theta R).$$

Por lo tanto,

$$n(\theta R) < \frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}} \cdot \ln \frac{M(R)}{|f_{(0)}^{(\lambda)}/\lambda!\,|\,R^\lambda}.$$

Escribamos esta desigualdad en la forma

$$\frac{n(\theta R)}{\ln M \gg (R)} < \frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}} - \frac{\ln\left[|\,f_{(0)}^{(\lambda)}/\lambda!\,|\,R^\lambda\right]}{\ln\frac{1}{\theta}\ln M(R)},$$

lo cual es legítimo para todos los valores de R suficientemente grandes. Aumentando R indefinidamente y observando que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\ln R}{\ln M(R)} = 0$$

(véase (1.1:4)), obtenemos:

$$\varlimsup_{R\to\infty} \frac{n(\theta R)}{\ln M(R)} \leqslant \frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}}. \qquad (2.2:2)$$

Resumiendo, la cantidad $n(\theta R)$ de ceros de una función trascendente entera en un círculo cerrado $|z| \leqslant \theta R$, donde $0 < \theta < 1$, no supera asintóticamente (es decir, en el límite) a una parte fraccionaria determinada de $\ln M(R)$, que depende solamente de θ.

Supongamos, en particular, que $f(z)$ es una función de orden finito. Entonces existen unos números positivos K y μ, tales que

$$\ln M(R) < KR^{\mu}$$

para todos los valores suficientemente grandes de R; por esta razón, de la desigualdad (2.2:2) sacamos la conclusión que

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(\theta R)}{KR^{\mu}} \leqslant \frac{1}{\ln \frac{1}{\theta}},$$

o bien, sustituyendo θR por R:

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(R)}{R^{\mu}} \leqslant \frac{K}{\theta^{\mu} \ln \frac{1}{\theta}}.$$

Aquí θ es un número arbitrario del intervalo $(0, 1)$; sirvámonos de esto para hacer que el segundo miembro de la desigualdad tome el valor mínimo. Este se alcanza para $\theta = e^{-\frac{1}{\mu}}$ y es igual a $Ke\mu$, por lo cual

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(R)}{R^{\mu}} \leqslant Ke\mu. \tag{2.2:2'}$$

Si el orden de la función es igual a ρ, entonces se puede hacer aquí $\mu = \rho + \varepsilon$ y $K = 1$ para cualquier $\varepsilon > 0$; resulta:

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(R)}{R^{\rho+\varepsilon}} \leqslant e(\rho + \varepsilon).$$

Suponiendo que $\rho > 0$ y que la función $f(z)$ es además de tipo σ, hagamos en la relación (2.2:2') $\mu = \rho$ y $K = \sigma + \varepsilon$; entonces tendremos:

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(R)}{R^{\rho}} \leqslant (\sigma + \varepsilon)e\rho, \quad \text{o sea} \quad \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(R)}{R^{\rho}} \leqslant \sigma e\rho.$$

Supongamos que la función $f(z)$ tiene un conjunto infinito de ceros (sólo este caso tiene interés; en caso contrario las desigualdades obtenidas son triviales). Hagamos $|\alpha_n| = R$, entonces tendremos: $n \leqslant n(R)$ y, por consiguiente, las desigualdades en cuestión sólo se hacen más estrictas si se sustituyen en ellas $n(R)$ por n y R por $|\alpha_n|$. En resumen, para una función de orden finito se verifican las siguientes desigualdades:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\alpha_n|^{\mu}} \leqslant Ke\mu$$

y luego

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\alpha_n|^{\rho+\varepsilon}} \leqslant e(\rho+\varepsilon) \quad (\rho \geqslant 0), \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\alpha_n|^{\rho}} \leqslant \sigma e\rho$$

$$(\rho > 0,\ \sigma \geqslant 0), \tag{2.2:2''}$$

donde ε es un número positivo cualquiera.

De la primera de las desigualdades (2.2:2″) se deduce que

$$\frac{1}{|\alpha_n|^{\rho+\varepsilon}} < \frac{e(\rho+2\varepsilon)}{n}$$

o bien

$$\frac{1}{|\alpha_n|^{\rho+2\varepsilon}} < [e(\rho+2\varepsilon)]^{\frac{\rho+2\varepsilon}{\rho+\varepsilon}} \frac{1}{n^{\frac{\rho+2\varepsilon}{\rho+\varepsilon}}}$$

para todos los valores de n suficientemente grandes.

Por lo tanto, la serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^{\lambda}} \tag{2.2:3}$$

es convergente si $\lambda \geqslant \rho + 2\varepsilon$ o sea, (como ε es arbitrariamente pequeño), es convergente si $\lambda > \rho$.

Sea, en general, $\{\zeta_n\}$ una sucesión arbitraria de números complejos distintos de cero, no decreciente en valor absoluto, que converja hacia el infinito. Examinemos la serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^{\lambda}}, \tag{2.2:4}$$

donde λ es un número no negativo.

Si esta serie es convergente para cierto $\lambda_0 > 0$, entonces, evidentemente, será convergente también para todos los valores mayores de λ $\left(\text{puesto que los números } \frac{1}{|\zeta_n|} \text{ son menores que la unidad, comenzando desde uno de ellos en adelante}\right)$. Consideremos el extremo inferior de aquellos valores de λ para los cuales la serie es convergente. Este extremo inferior es un número no negativo y se llama e x p o n e n t e d e c o n v e r g e n c i a d e l a s u c e s i ó n $\{\zeta_n\}$ designándose con τ:

$$\tau = \inf \lambda \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\zeta|^{\lambda}} < \infty \right).$$

Si la serie (2.2:4) es divergente para cualquier $\lambda > 0$, entonces se supone que $\tau = \infty$ y se dice que el exponente de convergencia de la sucesión $\{\zeta_n\}$ es **infinito**.

Fácilmente se comprueba que para la sucesión $\{e^n\}$ el exponente de convergencia es igual a cero, para la sucesión $\{n^{\frac{1}{\tau}}\}$ éste tiene el valor de τ, y para la sucesión $\{\ln(n+1)\}$ es infinito.

Demostremos que en todos los casos el exponente de convergencia puede calcularse por la fórmula

$$\tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|}. \tag{2.2:5}$$

Supongamos que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|} = \alpha \neq \infty$; entonces

$$\frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|} < \alpha + \varepsilon \quad \text{para} \quad n > n(\varepsilon),$$

de donde $\frac{1}{|\zeta_n|} < n^{-\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}$ y, por consiguiente, la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^{\lambda}}$ es convergente para $\lambda > \alpha + \varepsilon$. Como ε es arbitrariamente pequeño, ésta es convergente para cualquier $\lambda > \alpha$, por lo cual $\tau \leqslant \alpha$.

En particular, si α es finito, resulta que τ también lo es. Supongamos ahora que τ es finito y demostremos que entonces α también lo es y no es superior a τ. En efecto, la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^{\tau+\varepsilon}}$ tiene que ser convergente para cualquier $\varepsilon > 0$. Como sus términos no crecen, de aquí se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\zeta_n|^{\tau+\varepsilon}} = 0\ ^{*)}.$$

---

*) En efecto, supongamos que la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \gamma_n$, donde $\gamma_n \geqslant \gamma_{n+1} > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es convergente. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ tiene que existir un $N(\varepsilon)$ tal que para $m > N(\varepsilon)$ y cualquier p natural se cumple la desigualdad

$$\gamma_{m+1} + \ldots + \gamma_{m+p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Haciendo aquí $p = m$ y observando que $\gamma_{m+1} + \ldots + \gamma_{2m} \geqslant m\gamma_{2m}$, obtenemos que $2m\gamma_{2m} < \varepsilon$ para $m > N(\varepsilon)$; exactamente igual, para $p = m + 1$ hallaremos que: $\gamma_{m+1} + \ldots + \gamma_{2m+1} \geqslant (m+1)\gamma_{2m+1}) > \left(m + \frac{1}{2}\right)\gamma_{2m+1}$, de donde $(2m+1)\gamma_{2m+1} < \varepsilon$ para $m > N(\varepsilon)$. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} n\gamma_n = 0.$$

Por lo tanto, para todos los valores de n suficientemente grandes tendremos:

$$\frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|} \leqslant \tau + \varepsilon,$$

de donde, para $n \to \infty$, hallamos:

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|} \leqslant \tau + \varepsilon.$$

Como aquí ε es arbitrariamente pequeño, se tiene: $\alpha \leqslant \tau$. Comparando con la desigualdad hallada anteriormente, resulta:

$$\tau = \alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|},$$

como se quería demostrar.

Ya se vio que las magnitudes τ y α son finitas simultáneamente y, por consiguiente, son infinitas a la vez. Por ello, la relación establecida es válida también para valores infinitos de τ y α.

Volvamos a examinar los ceros de una función entera. Se demostró que la serie (2.2:3) es convergente para todos los valores $\lambda > \rho$. De aquí se deduce que *el exponente de convergencia τ de la sucesión de los ceros de una función entera de orden ρ es finito y no es superior a ρ*:

$$\tau \leqslant \rho. \tag{2.2:6}$$

Este resultado pertenece a Hadamard. Designemos con $\varkappa$ el mayor número entero para el cual la serie (2.2:3) es divergente. Como τ es el exponente de convergencia de la sucesión $\{\alpha_k\}$, resulta que $\varkappa \leqslant \tau$ y, por consiguiente, $\varkappa \leqslant [\tau] \leqslant [\rho]$. En virtud de la definición del número $\varkappa$, la serie (2.2:3) tiene que ser convergente para $\lambda = \varkappa + 1$:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}} < \infty$$

y ser divergente para $\lambda = \varkappa$:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^{\varkappa}} = \infty.$$

Definamos los polinomios $p_k(z)$, suponiendo que son idénticamente nulos cuando $\varkappa = 0$ y son iguales a

$$p_k(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \frac{z^2}{2\alpha_k^2} + \ldots + \frac{z^\varkappa}{\varkappa\alpha_k^\varkappa}$$

cuando $\varkappa \geqslant 1$, y demostremos que el producto

$$z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)} = z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} [1 + v_k(z)]$$

representa una función entera cuyos ceros coinciden con los de la función $f(z)$. Con este fin, tomemos un círculo arbitrario $|z| < R$, y sea $|\alpha_k| > 2R$ para $k > N(R)$. Entonces tendremos $\left|\frac{z}{\alpha_k}\right| < \frac{1}{2}$ y

$$|\ln[1 + v_k(z)]| = \left|\ln\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) + p_k(z)\right| = \left| - \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n\alpha_k^n} + \sum_{1}^{\varkappa} \frac{z^n}{n\alpha_k^n} \right| =$$

$$= \left| - \frac{z^{\varkappa+1}}{\alpha^{\varkappa+1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{p-1}}{(\varkappa + p)\alpha_k^{p-1}} \right| < \frac{R^{\varkappa+1}}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{2R^{\varkappa+1}}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}}.$$

Pero la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}}$ es convergente; por esta razón la serie $\sum_{N(R)+1}^{\infty} |\ln[1 + v_k(z)]|$ es absoluta y uniformemente convergente en el círculo $|z| < R$. Esto significa (véase el t. I, ap. 4.3, cap. tercero) que el producto infinito $\prod_{N(R)+1}^{\infty} [1 + v_k(z)]$ es absolutamente convergente en el círculo indicado y representa en el mismo una función analítica $\varphi_R(z)$ que no se anula. Definitivamente, obtenemos que el producto $z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)}$ es absolutamente convergente en el círculo $|z| < R$ y representa en el mismo una función analítica

$$\varphi(z) = z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)},$$

que se anula en aquéllos, y sólo en aquellos puntos de este círculo, en los cuales se anula la función $f(z)$ (los ceros de ambas funciones poseen los mismos órdenes de multiplicidada, respectivamente). Como $\varphi(z)$ posee las propiedades señaladas en cualquier círculo $|z| < R$, resulta que $\varphi(z)$ es una función entera cuyos ceros coinciden con los de la función $f(z)$.

Formando el cociente $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ y observando que éste representa una función entera que carece de ceros, sacamos la conclusión que

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera, o bien, definitivamente,

$$f(z) = e^{g(z)} z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa \alpha_k^{\varkappa}}}. \qquad (2.2{:}7)$$

Esta fórmula es válida para cualquier función entera de orden finito ρ. La ventaja de ella ante la fórmula general (2.2:1) se debe a que los grados de los polinomios que figuran en el exponente de cada factor no crecen indefinidamente junto con k, sino que conservan un mismo valor $\varkappa \leqslant [\tau] \leqslant [\rho]$. En el caso particular $\varkappa = 0$ (esto ocurre cuando $\rho < 1$, o cuando $\rho \geqslant 1$ pero $\tau < 1$, o finalmente, cuando $\tau = 1$ y la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|}$ es convergente), se puede suponer que los polinomios $p_k(z)$ son nulos. Entonces la fórmula (2.2:7) toma una forma muy sencilla:

$$f(z) = e^{g(z)} z^{\lambda} \sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right). \qquad (2.2{:}8)$$

2.3. En este apartado nos ocuparemos del estudio ulterior de las funciones de orden finito. El objetivo fundamental es demostrar la siguiente proposición:

Teorema de Hadamard. *Si las fórmulas* (2.2:7) *y* (2.2:8) *representan una función entera de orden finito* ρ, *entonces la función* $g(z)$ *que figura en ellas es un polinomio de grado no superior a* $[\rho]$.

Demostración. Hagamos $p_k(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa \alpha_k^{\varkappa}}$, si $\varkappa \geqslant 1$ y $p_k(z) = 0$ si $\varkappa = 0$, y para $R > 1$ arbitrario escribamos las fórmulas (2.2:7) y (2.2:8) en la forma siguiente:

$$f(z) = z^{\lambda} \sum_{1}^{\nu(R)} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \left[e^{g(z) + \sum\limits_{1}^{\nu(R)} p_k(z)} \sum_{\nu(R)+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)} \right],$$

donde $\nu(R)$ denota el subíndice mayor de los números α_k cuyos módulos no son superiores a R, de modo que $|\alpha_k| \leqslant R$ si $k \leqslant \nu(R)$

y $|\alpha_{\nu(R)+1}| > R$. Para abreviar, designemos con $g_R(z)$ la expresión comprendida entre corchetes. Entonces, para $|z| = 2R$ tendremos:

$$M(2R) \geqslant |f(z)| \geqslant (2R)^{\lambda} \prod_{1}^{\nu(R)} \left(\frac{2R}{R} - 1\right) |g_R(z)| \geqslant |g_R(z)|,$$

de donde

$$\max_{|z|=2R} |g_R(z)| \leqslant M(2R).$$

Como $g_R(z)$ es una función analítica (entera), en el círculo $|z| < R$, debido al principio del módulo máximo, tendremos:

$$|g_R(z)| \leqslant M(2R). \qquad (2.3:1)$$

La función $g_R(z)$ puede representarse en el círculo $|z| < R$ en la forma

$$g_R(z) = e^{h_R(z)},$$

donde

$$h_R(z) = g(z) + \sum_{1}^{\nu(R)} p_k(z) + \sum_{\nu(R)+1}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) + p_k(z)\right]$$

es una función analítica en este círculo.

Obsérvese que la serie $\sum\limits_{\nu(R)+1}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) + p_k(z)\right]$ es uniformemente convergente en el círculo $|z| < R$, puesto que para valores suficientemente grandes de $n > N(R)$ los módulos de sus términos no superan a los términos de la serie convergente

$$\sum_{1}^{\infty} 2 \frac{R^{\varkappa+1}}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}} \quad \text{(véase la pág. 289).}$$

De la desigualdad (2.3:1) se deduce que

$$\operatorname{Re}[h_R(z)] < \ln M(2R) \quad \text{para} \quad |z| < R,$$

y, por consiguiente, en virtud del lema 1, ap. 1.5, los coeficientes de Taylor de la función $h_R(z)$ satisfacen a las desigualdades

$$|c_n| = \left|\frac{h_R^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant 2\,\frac{[\ln M(2R) - \alpha_0]}{R^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

donde

$$\alpha_0 = \operatorname{Re} c_0 = \operatorname{Re}[h_R(0)].$$

Pero pueden obtenerse los números c_n sumando los coeficientes de z^n en los desarrollos de Taylor de los sumandos separados que forman $h_R(z)$ (véase el t. I, ap. 7.1, cap. tercero). Tomando $n > \rho \geqslant \tau \geqslant \varkappa$ y observando que $p_k(z)$ son polinomios de grado $\varkappa$, obtenemos:

$$c_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} - \sum_{k=\nu(R)+1}^{\infty} \frac{1}{n\alpha_k^n}.$$

Por consiguiente, para $n > \rho$ se tiene:

$$\left|\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant |c_n| + \sum_{k=\nu(R)+1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^n} \leqslant \frac{2[\ln M(2R) - \alpha_0]}{R^n} + \sum_{\nu(R)+1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^n}.$$

Cuando R tiende aquí a ∞ (para n fijado), hallaremos que el segundo miembro de la desigualdad tiende a cero. En efecto, para $\rho + \varepsilon < n$ y para valores suficientemente grandes de R se tiene:

$$M(2R) < e^{(2R)^{\rho+\varepsilon}},$$

es decir, $\ln M(2R) < (2R)^{\rho+\varepsilon}$ y, por consiguiente,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{2[\ln M(2R) - \alpha_0]}{R^n} = 0.$$

Además, la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^n}$ es convergente (puesto que n es mayor que el exponente de convergencia τ) y, por consiguiente, $\lim_{R\to\infty} \sum_{\nu(R)+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^n} = 0$. Definitivamente, obtenemos que $\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = 0$ si $n > \rho$, de donde se deduce que $g(z)$ es un polinomio de grado no superior a $[\rho]$. El teorema de Hadamard queda demostrado.

Como aplicación de este teorema, deduzcamos de nuevo el desarrollo de sen z en un producto infinito. Ya sabemos que todos los ceros de sen z son simples. Ordenándolos por módulos no decrecientes, tendremos:

$$0,\ -\pi,\ \pi,\ -2\pi,\ 2\pi,\ \ldots,\ -k\pi,\ k\pi,\ \ldots$$

Evidentemente, el exponente de convergencia de la sucesión de estos ceros es $\tau = 1$, y la serie $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \ldots + \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{k\pi} + \ldots$ es divergente, mientras que la serie $\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} + \ldots + \frac{1}{k^2\pi^2} + \frac{1}{k^2\pi^2} + \ldots$ es convergente. Por esta razón, $\varkappa$ es igual aquí a 1 y el desarrollo de sen z en un producto infinito es de la forma

$$\operatorname{sen} z = e^{g(z)}\, z \prod_{1}^{\infty} \left\{ \left[\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \right] \left[\left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-\frac{z}{k\pi}} \right] \right\} =$$

$$= e^{g(z)}\, z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Como el orden de sen z es igual a 1, según el teorema de Hadamard $g(z)$ es un polinomio de grado no superior al primero:

$$g(z) = A_0 + A_1 z.$$

Para determinar los coeficientes A_0 y A_1, lo más fácil es observar que $e^{g(z)} = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z \prod\limits_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}$ es una función par. Por ello, $e^{A_0 + A_1 z} \equiv$ $\equiv e^{A_0 - A_1 z}$, de donde $e^{2A_1 z} \equiv 1$ y, por consiguiente, $A_1 = 0$. Pasando ahora al límite para $z \to 0$, obtenemos: $e^{A_0} = 1$ (o sea, $A_0 = 0$, o, en general, $A_0 = 2m\pi i$, donde m es un número entero). En resumen, $e^{g(z)} \equiv 1$ y

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Este es el resultado pedido.

2.4. Antes se estableció que, para toda función entera $f(z)$ de orden finito ρ, el exponente de convergencia τ de la sucesión de sus ceros no es superior a ρ y que si $\varkappa$ es el mayor número entero para el cual la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{|\alpha_n|^{\varkappa}}$ es divergente, entonces $f(z)$ puede expresarse en la forma

$$f(z) = e^{p(z)}\, z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)},$$

donde $p(z)$ es un polinomio de grado no superior a $[\rho]$ y $p_k(z)$ son polinomios de grado $\varkappa$; precisamente,

$$p(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa \alpha_k^{\varkappa}}, \text{ si } \varkappa \geqslant 1, \text{ y } p_k(z) \equiv 0 \text{ si } \varkappa = 0.$$

Ahora demostraremos una proposición que, hasta cierto punto, es inversa respecto de la anterior.

Teorema de Borel. *Supongamos que la función entera $f(z)$ admite el desarrollo*

$$f(z) = e^{p(z)} z^{\mu} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)}, \tag{2.4:1}$$

donde el exponente de convergencia de la sucesión de los ceros $\{\alpha_k\}$ es un número finito τ, $p_k(z)$ son los polinomios definidos igual que antes y, finalmente, $p(z)$ es un polinomio de grado n. En estas condiciones, $f(z)$ es una función de orden finito ρ, coincidiendo este orden con el mayor de los números τ y n:

$$\rho = \max(\tau, n).$$

Además, si $\tau < n$, o si la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^{\tau}}$ es convergente, $f(z)$ es una función de tipo finito.

Demostración. El teorema de Borel permite acotar superiormente el módulo de la función entera (2.4:1). Para obtener el resultado pedido, acotemos primero el módulo de cada término del producto. Haciendo $\frac{z}{\alpha_k} = \zeta$, representemos $\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)}$ en la forma

$$\varphi(\zeta) = (1 - \zeta) \exp\left(\zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \ldots + \frac{\zeta^{\varkappa}}{\varkappa}\right).$$

Para $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}$ se tiene:

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant \left|\exp\left[\ln(1-\zeta) + \zeta + \ldots + \frac{\zeta^{\varkappa}}{\varkappa}\right]\right| =$$

$$= \left|\exp\left[-\frac{\zeta^{\varkappa+1}}{\varkappa+1} - \frac{\zeta^{\varkappa+2}}{\varkappa+2} - \ldots\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[|\zeta|^{\varkappa+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right)\right] = e^{2|\zeta|^{\varkappa+1}} \leqslant e^{|2\zeta|^{\lambda'}},$$

donde λ' es un número arbitrario, no superior a $\varkappa + 1$. Si $|\zeta| > \frac{1}{2}$ se tiene:

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant (1 + |\zeta|) \exp(|\zeta| + \ldots + |\zeta|^{\varkappa}) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + |\zeta|) \exp\left[|\zeta|^{\varkappa}\left(1 + \frac{1}{|\zeta|} + \ldots + \frac{1}{|\zeta|^{\varkappa-1}}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant (1 + |\zeta|) \exp[|\zeta|^{\varkappa}(1 + 2 + \ldots + 2^{\varkappa-1})] <$$

$$< \exp[|2\zeta|^{\varkappa} + \ln(1 + |\zeta|)] \leqslant \exp[C_0 |2\zeta|^{\lambda''}].$$

donde λ'' es un número positivo, no menor que $\varkappa$ y $C_0 = C_0\lambda'' > 1$.

De aquí que, para cada ζ y cualquier $\lambda > 0$, tal que $\varkappa \leqslant \lambda \leqslant \varkappa + 1$, se tiene:

$$|(1-\zeta)\, e^{\zeta+\ldots+\frac{\zeta^\varkappa}{\varkappa}}| \leqslant \exp[C|\zeta|^\lambda], \tag{2.4:2}$$

donde $C = 2^\lambda C_0\,(\lambda)$.

Elijamos λ de tal modo que la serie $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\lambda}$ sea convergente.

Si la serie $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\tau}$ es convergente, entonces $\varkappa < \tau \leqslant \varkappa + 1$ y hacemos $\lambda = \tau$; si esta serie es divergente, entonces $\varkappa \leqslant \tau < \varkappa + 1$ y λ se puede hacer igual a $\tau + \varepsilon$, donde $0 < \varepsilon < \varkappa + 1 - \tau$.

Sustituyendo en la desigualdad (2.4:2) ζ por $\frac{z}{\alpha_k}$, obtenemos para este valor λ y para cualesquiera z y k la siguiente desigualdad:

$$\left|\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\exp\left[\frac{z}{\alpha_k}+\ldots+\frac{z^\varkappa}{\varkappa\alpha_k^\varkappa}\right]\right| < \exp\left(C\frac{|z|^\lambda}{|\alpha_k|^\lambda}\right).$$

Obsérvese también que si $p(z) = A_0 + \ldots + A_n z^n$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$

$$|z^\mu e^{p(z)}| \leqslant |z|^\mu \exp(|A_0| + \ldots + |A_n|\,|z|^n) < \exp[(|A_n| + \varepsilon)\,|z|^n]$$
$$\text{para } |z| > r(\varepsilon).$$

Por consiguiente,

$$|f(z)| < \exp\left[(|A_n|+\varepsilon)\,|z|^n + C\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\lambda}|z|^\lambda\right] \quad \text{para} \quad |z| > r(\varepsilon). \tag{2.4:3}$$

De aquí se deduce que $f(z)$ es una función de orden finito, siendo

$$\rho \leqslant \max(n, \lambda).$$

Pero λ o es igual a τ, o puede tomarse arbitrariamente próximo a τ. Por ello

$$\rho \leqslant \max(n, \tau).$$

Por otra parte, para una función de orden finito tiene que ser (según el teorema de Hadamard)

$$\tau \leqslant \rho \text{ y } n \leqslant [\rho] \leqslant \rho;$$

por lo tanto,

$$\rho = \max(n, \tau).$$

Obsérvese, finalmente, que cuando $n > \tau$ y, por consiguiente, $\rho = n$, se puede tomar $\tau < \lambda < n$ y según la desigualdad (2.4:3) tendremos para todos los valores suficientemente grandes de $|z|$:

$$|f(z)| < \exp(C_1 |z|^\rho),$$

de donde se deduce que el tipo de la función $f(z)$ es finito.

Si $n \leqslant \tau$, pero la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\tau}$ es convergente, entonces se puede hacer en la desigualdad (2.4:3) $\lambda = \tau$, y de nuevo tendremos:

$$|f(z)| < \exp(C_2 |z|^\rho).$$

Por lo tanto, el tipo de $f(z)$ será finito también en el caso en que $n \leqslant \tau$ y la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\tau}$ es convergente.

De los teoremas de Hadamard y Borel se deduce que *la existencia de un desarrollo de la forma*

$$f(z) = e^{p(z)} z^\lambda \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^\varkappa}{\varkappa \alpha_k^\varkappa}\right),$$

donde $p(z)$ *es un polinomio de grado* n *y* $\varkappa$ *es el mayor número entero para el cual la serie* $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\varkappa}$ *es divergente, es una característica propia de las funciones enteras de orden finito.*

Está claro que si una misma función $f(z)$ admite un desarrollo más de la misma forma

$$f(z) = e^{q(z)} z^\mu \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\beta_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\beta_k} - \ldots + \frac{z^\nu}{\nu \beta_k^\nu}\right),$$

donde ν es el mayor número entero para el cual la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\nu}$ es divergente, entonces los números β_k tienen que coincidir con los números correspondientes α_k (con un cambio adecuado del orden de numeración de los ceros que poseen módulos iguales), ν tiene que coincidir con $\varkappa$ y, finalmente, el polinomio $q(z)$ tiene que diferir de $p(z)$ solamente en un sumando de la forma $2m\pi i$ (m es un número entero).

En algunas investigaciones sobre la teoría de las funciones enteras desempeña un papel notable el mayor de los dos números enteros: n y $\varkappa$. Este número se denota con la letra p y se llama g é n e r o de la función entera

$$p = \max(n, \varkappa).$$

Como $\rho = \max(n, \tau)$ y $\tau \geqslant \varkappa$, resulta que $\rho \geqslant p$. Pero $\tau \leqslant \varkappa + 1$ y, por consiguiente, $\rho \leqslant \max(n, \varkappa) + 1 = p + 1$. Por lo tanto,

$$p \leqslant \rho \leqslant p + 1$$

por lo cual, se cumple una de las dos relaciones:

$$p = [\rho] \quad \text{o bien} \quad p = [\rho] - 1.$$

El lector demostrará fácilmente que se cumple la última relación cuando, y sólo cuando, $n < \tau$, τ es un número entero y la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^\tau}$ es convergente.

Como ejemplo, señalemos dos funciones:

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \quad y \quad f(z) = \prod_{1}^{\infty} \left\{1 - \frac{z}{k\,[\ln(k+1)]^2}\right\}.$$

Para la primera de ellas $n = 0$, $\tau = \varkappa = 1$ y, por consiguiente,

$$\rho = \max(n, \tau) = 1 \quad \text{y} \quad p = \max(n, \varkappa) = 1 = \rho.$$

Para la segunda $n = 0$, $\tau = 1$, $\varkappa = 0$ y, por lo tanto, $\rho = 1$ y $p = 0$.

En resumen, las funciones pueden tener un mismo orden ($\rho = 1$) y distinto género (aquí $p = 1$ y $p = 0$).

Obsérvese que las funciones de género 0 se caracterizan completamente por la existencia de un desarrollo de la forma

$$f(z) = Cz^\lambda \sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right),$$

donde la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k}$ es convergente.

De los teoremas de Hadamard y Borel se deduce una ley importante respecto de los A-puntos de una función entera.

Sea $f(z)$ una función de orden finito ρ, donde ρ no es un número entero. Entonces, para cualquier número complejo A, la función $f(z) - A$ también es de orden ρ. Por consiguiente, son válidos los desarrollos de la forma

$$f(z)=e^{g(z)}z^{\lambda}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\exp\left(\frac{z}{\alpha_k}+\ldots+\frac{z^{\varkappa}}{\varkappa\alpha_k^{\varkappa}}\right),$$

$$f(z)-A=e^{\gamma(z)}z^{\mu}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\beta_k}\right)\exp\left(\frac{z}{\beta_k}+\ldots+\frac{z^{\nu}}{\nu\beta_k^{\nu}}\right),$$

donde

$$\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{\lambda},\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$$

son los ceros de la función $f(z)$ y

$$\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{\mu},\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots$$

son los ceros de la función $f(z)-A$.

Sean n y m los grados de los polinomios $g(z)$ y $\gamma(z)$ y supongamos que τ y τ_A son los exponentes de convergencia de las sucesiones $\{\alpha_k\}$ y $\{\beta_k\}$. Como los órdenes de las funciones $f(z)$ y $f(z)-A$ son iguales, según el teorema de Borel tiene que ser:

$$\rho=\max(n,\tau)=\max(m,\tau_A).$$

Pero en el caso considerado ρ no es un número entero, por lo cual $\rho\neq n$ y $\rho\neq m$ y, por consiguiente,

$$\rho=\tau=\tau_A.$$

En resumen, *para una función entera $f(z)$ de orden fraccionario, los exponentes de convergencia de las sucesiones de A-puntos de esta función no dependen de A y coinciden con el orden ρ de la función.*

Esta proposición representa un complemento esencial del teorema pequeño de Picard (véase el ap. 1.5 del presente capítulo). En efecto, de este último solamente se deduce que la ecuación

$$f(z)-A=0$$

posee un conjunto infinito de raíces para cualquier A; en otras palabras, *los exponentes de convergencia para la sucesión de las raíces son positivos para cualquier A*. Ahora se puede afirmar que estos exponentes tienen un mismo valor y son iguales a ρ.

Consideremos como ejemplo los A-puntos de la función $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ cuyo orden es igual a $\frac{1}{2}$. Por lo demostrado, se puede afirmar que para cualquier A el exponente de convergencia de la sucesión de sus

A-puntos también es igual a $\frac{1}{2}$. Supongamos, en particular, que $A = 0$. Entonces los A-puntos serán las raíces de la ecuación $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 0$, es decir, los términos de la sucesión π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, . . . Evidentemente, el exponente de convergencia es $\frac{1}{2}$.

Para las funciones de orden entero puede existir un valor excepcional $A = A_0$ para el cual el exponente de convergencia de la sucesión de los A-puntos es menor que ρ. Tal valor excepcional (denominado b o r e l i a n o) es, por ejemplo, el valor A_0 que toma la función solamente en un conjunto finito de puntos (v a l o r e x c e p c i o n a l d e P i c a r d), puesto que para los A_0-puntos correspondientes se debe considerar que $\tau_{A_0} = 0$. Puede servir de ejemplo la función e^z, la cual no toma el valor 0, o la función $p(z)\, e^{P(z)}$ (donde $p(z)$ y $P(z)$ son polinomios), la cual toma el valor 0 en un conjunto finito de puntos, que es igual al grado del polinomio $p(z)$. Pero el valor excepcional boreliano puede no ser de Picard, es decir, puede tomar la función tal valor en un conjunto infinito de puntos. Puede servir de ejemplo la función de segundo orden $e^{z^2} \operatorname{sen} z$, cuyos ceros coinciden con los de $\operatorname{sen} z$ y, por consiguiente, poseen un exponente de convergencia que es igual a la unidad. Aquí 0 es un valor excepcional boreliano, sin ser un valor excepcional de Picard. Se puede demostrar que no pueden existir dos valores excepcionales borelianos, de modo que para las funciones de orden entero también se cumple siempre la igualdad $\tau_A = \rho$, a excepción, posiblemente, de un valor $A = A_0$, para el cual se cumple la desigualdad $\tau_A < \rho$.

§ 3. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES MEROMORFAS EN FRACCIONES SIMPLES

3.1. Las funciones meromorfas se definieron anteriormente como aquellas que se expresan en forma de un cociente de dos funciones enteras:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \qquad (h(z) \not\equiv 0). \tag{3.1:1}$$

De aquí se deduce que en los puntos finitos del plano una función meromorfa no puede tener otras singularidades más que polos. En efecto, $f(z)$ puede tener singularidades solamente en aquellos puntos en los que $h(z)$ se anula. Si en tal punto $g(z)$ no se anula, obtenemos un polo de $f(z)$. Si $g(z)$ también se anula, entonces se deben comparar los órdenes de multiplicidad de este punto como cero de las funciones $h(z)$ y $g(z)$. Supongamos que $z = \zeta$ es un cero de orden γ de $h(z)$ y es un cero de orden δ de $g(z)$. Entonces, para

$f(z)$ tendremos:

$$f(z)=\frac{\frac{g^{(\delta)}(\zeta)}{\delta!}(z-\zeta)^{\delta}+\dots}{\frac{h^{(\gamma)}(\zeta)}{\gamma!}(z-\zeta)^{\gamma}+\dots}=(z-\zeta)^{\delta-\gamma}\frac{\frac{g^{(\delta)}(\zeta)}{\delta!}+\dots}{\frac{h^{(\gamma)}(\zeta)}{\gamma!}+\dots},$$

donde $g^{(\delta)}(\zeta)\neq 0$ y $h^{(\gamma)}(\zeta)\neq 0$, de lo que se ve que $z=\zeta$ es un punto regular para $f(z)$ si $\delta\geqslant\gamma$ y es un polo de orden $\gamma-\delta$ si $\delta<\gamma$.

Como los ceros del denominador $h(z)$ no pueden tener un punto de acumulación en ningún punto finito del plano, los polos de la función $f(z)$, comprendidos entre los ceros del denominador $h(z)$, no pueden tener tampoco ningún punto de acumulación en un punto finito del plano.

Consideremos una función uniforme arbitraria $F(z)$ que no tenga otros puntos singulares en los puntos finitos del plano más que polos. Si no tiene polos, entonces $F(z)$ es una función entera y, por consiguiente, pertenece a la clase de las funciones meromorfas. Si existe al menos un polo, pero el número de polos es finito: $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, y sus órdenes son: $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, entonces formamos el polinomio $P(z)=(z-\zeta_1)^{\gamma_1}\dots(z-\zeta_n)^{\gamma_n}$, el cual tiene un cero de orden γ_j en el polo ζ_j del mismo orden. Está claro que el producto $F(z)\,P(z)$ es una función entera $G(z)$, de donde $F(z)=\frac{G(z)}{P(z)}$, y de nuevo nos convencemos que $F(z)$ es una función meromorfa.

Supongamos, finalmente, que $F(z)$ posee un conjunto infinito de polos. Obsérvese que en cada círculo cerrado K: $|z|\leqslant R<\infty$ sólo puede haber una cantidad finita de ellos. En efecto, en caso contrario existiría en K un punto de acumulación de polos, el cual, siendo un punto singular no aislado de la función $F(z)$, no puede ser polo. Pero la existencia de tal punto singular contradice a la definición de la función $F(z)$. Como en cada círculo de radio finito existe solamente una cantidad finita de polos de la función $F(z)$, éstos pueden ordenarse por módulos no decrecientes. Sea $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$ la sucesión de todos los polos de $F(z)$, distintos entre sí, y sean $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ sus órdenes. Está claro que $\lim\zeta_n=\infty$; por consiguiente, según el teorema de Weierstrass de las funciones enteras, se puede construir una función entera $H(z)$ cuyos ceros sean solamente los puntos ζ_j y cada uno de éstos sea de orden γ_j, respectivamente. Entonces el producto $F(z)\,H(z)$ será una función entera $G(z)$ que no se anula en ninguno de los puntos ζ_j. Resulta que en este caso $F(z)$ representa también el cociente de dos funciones enteras:

$$F(z)=\frac{G(z)}{H(z)},$$

es decir, es una función meromorfa.

Las proposiciones establecidas permiten sustituir la definición admitida de función meromorfa por otra que es equivalente:

Una función uniforme $f(z)$ se llama meromorfa, si no tiene otros puntos singulares en los puntos finitos del plano más que, posiblemente, polos.

Si el conjunto de polos de una función meromorfa es infinito, entonces, como ya se vio, éste no puede tener un punto de acumulación finito y, por consiguiente, tiene un punto único de acumulación en el infinito. Así, pues, en este caso, el punto del infinito es un punto singular no aislado de la función $f(z)$; precisamente es un punto de acumulación de polos.

Supongamos ahora que $f(z)$ posee solamente una cantidad finita de polos. Entonces el punto del infinito puede ser un punto regular de $f(z)$ o un punto singular aislado de carácter uniforme, es decir, un polo o un punto singular esencial.

Demosremos que cuando $z = \infty$ es un punto regular o un polo de la función meromorfa $f(z)$, esta función es racional.

En efecto, sean $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ los polos de la función $f(z)$ (tiene que haber solamente una cantidad finita de ellos, puesto que si hubiese un conjunto infinito de éstos, el punto ∞ sería un punto de acumulación de polos y, por consiguiente, no podría ser ni punto regular ni polo) y sean $g_1(z), \ldots, g_n(z)$ sus partes principales correspondientes de los desarrollos de Laurent de la función $f(z)$:

$$g_j(z) = \frac{A_{-\gamma_j}}{(z-\zeta_j)^{\gamma_j}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-\zeta_j},$$

donde $A_{-\gamma_j} \neq 0$, de modo que γ_j es el orden del polo ζ_j.

Designemos además con $g_0(z)$ el polinomio que representa la parte principal del desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno del punto del infinito (suponiendo que $g_0(z) \equiv 0$ cuando ∞ es un purto regular de la función $f(z)$), y sea

$$\varphi(z) = f(z) - \sum_0^n g_j(z).$$

En un entorno del punto z_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ se puede representar $\varphi(z)$ en la forma

$$\varphi(z) = f(z) - g_j(z) - \\ -[g_0(z) + g_1(z) + \ldots + g_{j-1}(z) + g_{j+1}(z) + \ldots + g_n(z)]$$

y como el desarrollo de Laurent de la diferencia $f(z) - g_j(z)$ según las potencias de $z - \zeta_j$ no contiene términos con potencias negativas de $z - \zeta_j$ y cada una de las funciones comprendidas entre corchetes es regular en $z = z_j$, la función $\varphi(z)$ también es regular en el punto $z = z_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. De aquí se deduce que $\varphi(z)$ es una función analítica en todos los puntos del plano, es decir, es una función entera. Pero en un entorno del punto del infinito $\varphi(z)$ se puede representar en la forma:

$$\varphi(z) = f(z) - g_0(z) - [g_1(z) + \ldots + g_n(z)],$$

y como el desarrollo de Laurent de la diferencia $f(z) - g_0(z)$ según las potencias de z no contiene potencias positivas de z y cada una de las funciones comprendidas entre corchetes es regular en el punto $z = \infty$, la función $\varphi(z)$ es regular en el punto $z = \infty$.

Pero una función entera que tiene un punto regular en el punto del infinito, es idénticamente constante.

Así, pues,

$$f(z) - \sum_0^{\infty} g_j(z) \equiv \text{const} = c,$$

de donde

$$f(z) = c + \sum_0^{n} g_j(z), \qquad (3.1:2)$$

es decir, $f(z)$ es la suma de una cantidad finita de funciones racionales y, por consiguiente, ella misma es una función racional.

Es obvio que también es válida la proposición inversa a la demostrada, puesto que una función racional o es regular en el punto del infinito, o tiene en el mismo un polo.

Por lo tanto, hemos descubierto una propiedad característica de la función racional: *una función meromorfa es racional cuando, y sólo cuando, el punto del infinito es para la misma o un punto regular o un polo.*

La fórmula (3.1:2) obtenida proporciona la expresión de una función racional arbitraria $f(z)$ en forma de una suma de funciones racionales, tales que cada una de ellas tiene un solo polo en el plano ampliado (∞ para $g_0(z)$ y z_j para $g_j(z)$). Estas funciones son las partes principales de los desarrollos de Laurent de $f(z)$ en los entornos de sus polos. Cada una de éstas se expresa en forma de una suma de potencias $\left(\text{de } z \text{ o de } \frac{1}{z - z_j}\right)$, denominadas **fracciones simples**; el desarrollo hallado se llama **desarrollo de la función racional en fracciones simples.**

Ya veremos a continuación que se pueden obtener desarrollos similares según las partes principales para cualquier función meromorfa.

3.2. En un entorno de un polo ζ de orden γ la función $f(z)$ admite un desarrollo

$$f(z) = \frac{A_{-\gamma}}{(z-\zeta)^{\gamma}} + \frac{A_{-\gamma+1}}{(z-\zeta)^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-\zeta} + A_0 + A_1(z-\zeta) + \ldots,$$

donde la función racional $\frac{A_{-\gamma}}{(z-\zeta)^{\gamma}}+\ldots+\frac{A_{-1}}{z-\gamma}$ representa la parte principal de $f(z)$ en el punto ζ.

Demostremos que, tanto los polos de una función meromorfa como las partes principales referentes a los mismos pueden darse *a priori*, de modo que siempre existen funciones meromorfas que poseen unos polos y unas partes principales en los mismos, previamente asignados.

Teorema de Mittag-Leffler. *Sea $\{\zeta_n\}$ una sucesión de números complejos, distintos entre sí, que no decrecen en valor absoluto, convergente hacia el infinito, y sea $\{G_n(z)\}$ una sucesión de funciones racionales, cada una de las cuales es de la forma*

$$G_n(z)=\frac{A^{(n)}_{-\gamma_n}}{(z-\zeta_n)^{\gamma_n}}+\ldots+\frac{A^{(n)}_{-1}}{z-\zeta_n},$$

de modo que el punto ζ_n es un polo de la función $G_n(z)$ de orden γ_n y ésta no posee más polos. Entonces existe una función meromorfa $f(z)$ que tiene polos en los puntos ζ_n, y sólo en estos puntos, y cuyas partes principales en los puntos ζ_n coinciden con las funciones dadas $G_n(z)$.

Demostración. La función buscada $f(z)$ la obtendremos en forma de la suma de una serie

$$f(z)=\sum_{1}^{\infty}[G_k(z)+P_k(z)], \tag{3.2:1}$$

donde $P_k(z)$ son ciertos polinomios. Evidentemente, cualquiera que sea el polinomio $P_k(z)$, la suma $G_k(z)+P_k(z)$ es una función racional con un polo en el punto ζ_k y cuya parte principal coincide con $G_k(z)$. En los puntos finitos del plano esta función no tiene otros polos.

Demostremos que se pueden elegir los polinomios $P_n(z)$ de tal modo, que en cualquier círculo $|z|<R$ sea uniformemente convergente la serie $\sum\limits_{N(R)+1}^{\infty}[G_k(z)+P_k(\zeta)]$, que resulta de la serie (3.2:1) al excluir unos cuantos términos primeros. Supongamos que $\sum\limits_{1}^{\infty}\varepsilon_k$ es una serie convergente de términos positivos. Si $\zeta_1=0$, entonces suponemos que el polinomio correspondiente $P_1(z)$ es igual a cero. Supongamos ahora que $\zeta_k\neq 0$ $(k\geqslant 1)$. Como $G_k(z)$ es una función analítica en el círculo $|z|<|\zeta_k|$, su desarrollo de Taylor

$$G_k(z)=A_0^{(k)}+A_1^{(k)}z+\ldots+A_n^{(k)}z^n+\ldots$$

es convergente en el interior del círculo indicado y es uniformemente convergente en el círculo $|z| \leqslant \frac{1}{2}|\zeta_k|$. Elijamos $n = n_k$ de tal modo que en el último círculo se cumpla la desigualdad

$$|G_k(z) - [A_0^{(k)} + \ldots + A_{n_k}^{(k)} z^{n_k}]| < \varepsilon_k,$$

y hagamos:

$$P_k(z) = -A_0^{(k)} - \ldots - A_{n_k}^{(k)} z^{n_k}.$$

Entonces

$$|G_k(z) + P_k(z)| < \varepsilon_k, \quad \text{si} \quad |z| \leqslant \frac{1}{2}|\zeta_k|. \tag{3.2:2}$$

Sea $|z| < R$ un círculo arbitrario con el centro en el origen de coordenadas y sea $N(R) + 1$ el índice, comenzando desde el cual todos los puntos ζ_k están situados fuera de un círculo de radio doblemente mayor:

$$|\zeta_k| > 2R \text{ para } k > N(R). \tag{3.2:3}$$

Consideremos la serie

$$\sum_{N(R)+1}^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)]; \tag{3.2:4}$$

todos los polos ζ_k de sus términos satisfacen a la condición (3.2:3), por lo cual $\frac{1}{2}|\zeta_k|$ es superior a R y, por consiguiente, el círculo $|z| < R$ está contenido en cada uno de los círculos $|z| < \frac{1}{2}|\zeta_k|$. Por esto, en virtud de (3.2:2), se puede afirmar que

$$|G_k(z) + P_k(z)| < \varepsilon_k, \quad \text{si} \quad |z| < R \text{ y } k > N(R).$$

De aquí se deduce que la serie (3.2:4) es absoluta y uniformemente convergente en el círculo $|z| < R$ y, por consiguiente, representa en este círculo una función analítica $\varphi_R(z)$. Por lo tanto, para la elección hecha de los polinomios $P_k(z)$, la suma de la serie (3.2:1) también será analítica en el círculo $|z| < R$. Esta puede escribirse en la forma

$$f(z) = \sum_{0}^{N(R)} [G_k(z) + P_k(z)] + \varphi_R(z),$$

de donde se deduce que los polos de la función $f(z)$ en el círculo $|z| < R$ coinciden con los términos de la sucesión $\{\zeta_k\}$ que están situados en el círculo; además, las partes principales de la función $f(z)$ en los puntos ζ_k coinciden con $G_k(z)$.

Como esta conclusión es válida para cualquier círculo $|z| < R$, de aquí se deduce que la suma de la serie (3.2:1) es una función meromorfa que satisface a todas las condiciones propuestas en el teorema. El teorema de Mittag — Leffler queda demostrado.

De éste, como consecuencia, se deduce la siguiente proposición:

Teorema. *Una función meromorfa arbitraria $f(z)$ que posee la sucesión de polos $\{\zeta_k\}$ y la sucesión de las partes principales correspondientes $\{G_k(z)\}$, se puede expresar en forma de una serie*

$$f(z) = g(z) + \sum_1^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)], \qquad (3.2:5)$$

donde $g(z)$ es una función entera y $P_k(z)$ son ciertos polinomios.

Para demostrarlo, construyamos, según el teorema de Mittag — Leffler, una función meromorfa $\varphi(z)$ que tenga los mismos polos y las mismas partes principales que la función $f(z)$; obtendremos

$$\varphi(z) = \sum_1^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)].$$

Es obvio que la diferencia $f(z) - \varphi(z)$ representa una función $g(z)$ que es analítica en todos los puntos finitos del plano, es decir, una función entera. De aquí que

$$f(z) = g(z) + \varphi(z) = g(z) + \sum_1^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)]$$

Obsérvese que, como se deduce de la demostración del teorema de Mittag—Leffler, en cada círculo $|z| < R$ la serie $\sum_{N(R)+1}^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)]$ es uniformemente convergente. (Para hablar de la convergencia y, en particular, de la convergencia uniforme de la serie (3.2:5), se deben separar de ella una cantidad finita de los términos primeros que tengan polos en el círculo considerado).

Como una ilustración sencilla del teorema de Mittag — Leffler, resolvamos mediante el mismo el problema siguiente:

Sea $\{\zeta_k\}$ una sucesión de números complejos distintos, no decrecientes en valor absoluto, que converge hacia el infinito, y sea $\{A_k\}$ una sucesión arbitraria de números complejos; se pide construir una función entera $\varphi(z)$ que tome los valores A_k en los puntos ζ_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

Para la resolución, construyamos primero, aplicando el teorema de Weierstrass, una función entera $h(z)$ que tenga polos simples en los puntos ζ_k y sólo en estos puntos:

$$h(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\zeta_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\zeta_k} + \ldots + \frac{z^k}{k\zeta_k^k}\right),$$

y calculemos los valores de su derivada $h'(z)$ en los puntos ζ_k. Obtenemos una sucesión de números $\{h'(\zeta_k)\}$ distintos de cero. Por otra parte, basándose en el teorema de Mittag — Leffler, hallamos una función meromorfa $\varphi(z)$ que tenga polos simples en los puntos $\{\zeta_n\}$, y sólo en ellos, con las partes principales correspondientes $\dfrac{\frac{A_k}{h'(\zeta_k)}}{z-\zeta_k}$.

Tendremos:

$$\varphi(z)=\sum_1^{\infty}\left[\frac{\frac{A_k}{h'(\zeta_k)}}{z-\zeta_k}+P_k(z)\right],$$

donde $P_k(z)$ son unos polinomios elegidos adecuadamente.

Está claro que el producto $h(z)\,\varphi(z)$ representa entonces una función entera $f(z)$ que satisface a las condiciones del problema:

$$f(\zeta_k)=\lim_{z\to\zeta_k}[h(z)\,\varphi(z)]=\lim_{z\to\zeta_k}\left[\frac{h(z)-h(\zeta_k)}{z-\zeta_k}\varphi(z)(z-\zeta_k)\right]=\frac{h'(\zeta_k)\,A_k}{h'(\zeta_k)}=A_k$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

3.3. En algunos casos particulares los desarrollos de las funciones meromorfas que se obtienen según el teorema de Mittag — Leffler pueden sustituirse por otros más sencillos. Antes, en las aplicaciones de la teoría de los residuos (ap. 4.2, cap. IV), ya vimos unos cuantos ejemplos. Consideremos aquí algunas aplicaciones de la fórmula de Weierstrass a las funciones enteras. Supongamos, por ejemplo, que se necesita construir una función meromorfa $f(z)$ que tenga polos simples en los puntos de una sucesión $\{\zeta_k\}$ $(\zeta_k\neq 0)$, con las partes principales correspondientes $\dfrac{1}{z-\zeta_k}$.

Construyamos según el teorema de Weierstrass una función entera $\varphi(z)$ que tenga ceros simples en los puntos ζ_k:

$$\varphi(z)=\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{\zeta_k}\right)\exp[P_k(z)],$$

donde $P_k(z)=\dfrac{z}{\zeta_k}+\ldots+\dfrac{z^k}{k\zeta_k^k}$. En el caso particular en que la sucesión $\{\zeta_n\}$ posee un exponente de convergencia finito τ y, por consecuencia, existe el mayor número entero $\varkappa$ para el cual la serie $\sum\limits_1^{\infty}\dfrac{1}{|\zeta_k|^{\varkappa}}$ es divergente, en lugar de $P_k(z)$ se pueden tomar polinomios $P_\varkappa(z)$ de un mismo grado $\varkappa$:

$$P_k(z)=\frac{z}{\zeta_k}+\ldots+\frac{z^\varkappa}{\varkappa\zeta_k^\varkappa}$$

Entonces, en cada círculo fijado $|z|<R$, donde la serie

$$\sum_{N(R)+1}^{\infty}\left[\ln\left(1-\frac{z}{\zeta_k}\right)+P_k(z)\right]$$

es absoluta y uniformemente convergente, se tiene:

$$\operatorname{Ln}[\varphi(z)]=\sum_{1}^{N(R)}\left[\operatorname{Ln}\left(1-\frac{z}{\zeta_k}\right)+P_k(z)\right]+$$
$$+\sum_{N(R)+1}^{\infty}\left[\ln\left(1-\frac{z}{\zeta_k}\right)+P_k(z)\right],$$

de donde

$$f(z)=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\sum_{1}^{N(R)}\left[\frac{1}{z-\zeta^k}+P_k'(z)\right]+\sum_{N(R)+1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\zeta_k}+P_k'(z)\right]=$$
$$=\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\zeta_k}+P_k'(z)\right].$$

Está claro que $f(z)=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ es una función meromorfa con polos simples en los puntos ζ_k y con las partes principales correspondientes $\frac{1}{z-\zeta_k}$. Los polinomios que garantizan la convergencia de la serie tienen aquí una forma muy simple

$$P_k'(z)=\frac{1}{\zeta_k}+\frac{z}{\zeta_k^2}+\ldots+\frac{z^{k-1}}{\zeta_k^k},$$

y en el caso particular en que existe el número entero mayor $\varkappa$ para el cual es divergente la serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\zeta_k|^\varkappa}$ (y, por consiguiente, es convergente la serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\zeta_k|^{\varkappa+1}}$), se puede tomar:

$$P_k'(z)=\frac{1}{\zeta_k}+\frac{z}{\zeta_k^2}+\ldots+\frac{z^{\varkappa-1}}{\zeta_k^\varkappa}.$$

La función $F(z)$ más general que resuelve el problema planteado se puede expresar en la forma

$$F(z)=g(z)+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\zeta_k}+\frac{1}{\zeta_k}+\frac{z}{\zeta_k^2}+\ldots+\frac{z^{\nu_k-1}}{\zeta_k^{\nu_k}}\right], \qquad (3.3:1)$$

donde $g(z)$ es una función entera y $\nu_k=\varkappa$ o $\nu_k=k$, según que la sucesión $\{\zeta_k\}$ posea un exponente de convergencia finito o no.

Construyamos también una función meromorfa que tenga polos de segundo orden en los puntos ζ_k con las partes principales correspondientes $\frac{1}{(z-\zeta_k)^2}$. Con este fin, derivemos término a término la serie obtenida anteriormente (la cual, como se deduce del método de su obtención, es uniformemente convergente en cualquier círculo $|z|<R$, si no se tienen en cuenta una cantidad finita de términos de la serie que tienen polos en el interior del círculo). Resulta:

$$F'(z)=g'(z)+\sum_{1}^{\infty}\left[-\frac{1}{(z-\zeta_k)^2}+\frac{1}{\zeta_k^2}+\frac{2z}{\zeta_k^3}+\ldots+\frac{(\nu_k-1)\,z^{\nu_k-2}}{\zeta_k^{\nu_k}}\right].$$

Está claro que la función $\Phi(z)=-F'(z)$ satisface a las condiciones del problema. Designando la función entera $g'(z)$ mediante $h(z)$, tendremos:

$$\Phi(z)=h(z)+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-\zeta_k)^2}-\frac{1}{\zeta_k^2}-\frac{2z}{\zeta_k^3}-\ldots-\frac{(\nu_k-1)\,z^{\nu_k-2}}{\zeta_k^{\nu_k}}\right].$$

Examinemos, en particular, el caso en que la serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\zeta_k|^3}$ es convergente. Entonces se puede hacer $\nu_k=2$ $\Big($independientemente de que la serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\zeta_k|^2}$ sea divergente o convergente$\Big)$, y tendremos.

$$\Phi(z)=h(z)+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-\zeta_k)^2}-\frac{1}{\zeta_k^2}\right]. \qquad (3.3:2)$$

Naturalmente, para la obtención de las fórmulas indicadas no había necesidad de aplicar la fórmula de Weierstrass. Se podría haber buscado inmediatamente la función en la forma

$$g(z)=\sum_{2}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\zeta_k}+P_k(z)\right)$$

(en el primer problema) o en la forma

$$h(z)+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-\zeta_k)^2}+P_k(z)\right)$$

(en el segundo problema) eligiendo después los polinomios $P_k(z)$ de modo que quede garantizada la convergencia de las series.

3.4. Consideremos un recinto G del plano ampliado, (para precisar, que no contenga en su interior al punto $z=\infty$), y en el mismo, una sucesión de puntos distintos $\{\zeta_k\}$ cuyos puntos de acumulación todos pertenezcan a la frontera del recinto G. Supongamos, además, que se ha dado una sucesión de funciones racionales $\{g_n(z)\}$, cada una de las cuales tiene en el plano ampliado un polo único en el punto ζ_n de orden γ_n:

$$g_n(z)=\frac{A^{(n)}_{-\gamma_n}}{(z-\zeta_n)^{\gamma_n}}+\ldots+\frac{A^{(n)}_{-1}}{z-\zeta_n}.$$

Demostremos que *existe una función $f(z)$, uniforme y analítica en el recinto G, a excepción de los puntos $\{\zeta_n\}$, tal que en cada uno de los puntos ζ_n tiene un polo de orden γ_n con la parte principal $g_n(z)$*. Esta proposición, perteneciente también a Mittag — Leffler, representa, evidentemente, una generalización del teorema del ap. 3.2, que corresponde al caso en que el recinto G es todo el plano finito, de modo que la frontera de G se reduce a un punto: al del infinito.

Sea ρ_n la distancia desde ζ_n hasta la frontera Γ del recinto G. Si G no coincide con el plano finito (lo cual se va a suponer), entonces $0<\rho_n<+\infty$. Sin restringir generalidad se puede exigir que se cumpla la condición $\lim \rho_n=0$. Para ello es suficiente cambiar adecuadamente la numeración de los puntos $\{\zeta_n\}$. Primero hay que numerar de nuevo aquellos que distan de Γ no menos que 1, después todos los restantes para los cuales esta distancia no es menor que 1/2, luego aquellos para los cuales la distancia hasta Γ no es menor que 1/3, etc.

Designemos con a_n el punto de Γ más próximo a ζ_n (si hay unos cuantos, se toma uno de ellos). Entonces $|\zeta_n-a_n|=\rho_n$ y en el recinto $|\zeta-a_n|>\rho_n$ la función $g_n(z)$, la cual se anula en el punto $z=\infty$, se puede desarrollar en una serie de Laurent de la forma:

$$g_n(z)=\frac{C^{(n)}_1}{z-a_n}+\frac{C^{(n)}_2}{(z-a_n)^2}+\ldots \tag{3.4:1}$$

Fijemos una sucesión de números positivos $\{\varepsilon_n\}$ tal que la serie $\sum\limits_{1}^{\infty}\varepsilon_n$ sea convergente. Como la serie (3.4:1) es uniformemente convergente para $|z-a_n| \geqslant 2\rho_n$, existen unos números m_n tales que

$$\left| g_n(z) - \sum_{j=1}^{m_n} \frac{C_j^{(n)}}{(z-a_n)^j} \right| < \varepsilon_n \quad \text{para} \quad |z-a_n| \geqslant 2\rho_n. \qquad (3.4:2)$$

Formemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ g_n(z) - \sum_{j=1}^{m_n} \frac{C_j^{(n)}}{(z-a_n)^j} \right\}. \qquad (3.4:3)$$

Sea F un subconjunto cerrado acotado arbitrario del recinto G y sea ρ la distancia entre F y Γ. Entonces, para $n > N(\rho)$ tendremos $\rho_n < \frac{\rho}{2}$ y, por consiguiente, todos los puntos de F pertenecen al recinto $|z-a_n| > 2\rho_n$; $a_n \in \Gamma$. Por ello, para $n > N(\rho)$ se cumplen las desigualdades (3.4:2) en todos los puntos de F. Por lo tanto la serie (3.4:3) es uniformemente convergente en cada $F \subset G$ y representa en el recinto G una función uniforme y analítica $f(z)$ con los polos en los puntos ζ_n y con las partes principales correspondientes $g_n(z)$. El teorema queda demostrado.

De éste se puede deducir una generalización del teorema de Weierstrass respecto de la existencia de una función entera con los ceros asignados. Precisamente, se verifica el siguiente teorema: *Para toda sucesión de puntos $\{\zeta_n\}$ perteneciente al recinto G y que no tenga puntos de acumulación en el interior de G, y para cada sucesión de números naturales $\{\lambda_n\}$, existe una función $h(z)$ uniforme y analítica en el recinto G, cuyos ceros coinciden con los puntos $\{\zeta_n\}$ y cada cero ζ_n es de orden λ_n.*

Conservando las notaciones del teorema precedente, construyamos una función $f(z)$ que tenga los polos en los puntos ζ_n con las partes principales correspondientes $g_n = \frac{\lambda_n}{z-\zeta_n}$. En este caso, el desarrollo (3.4:1) se reduce a la progresión geométrica

$$g_n(z) = \lambda_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\zeta_n - a_n)^{j-1}}{(z-a_n)^j}.$$

Eligiendo los números correspondientes m_n, obtenemos:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[\frac{1}{z-\zeta_n} - \sum_{j=1}^{m_n} \frac{(\zeta_n - a_n)^{j-1}}{(z-a_n)^j} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\left[\frac{1}{z-\zeta_n} - \frac{1}{z-a_n} \right) - \sum_{j=1}^{m_n - 1} \frac{(\zeta_n - a_n)^j}{(z-a_n)^{j+1}} \right].$$

Si el punto $z_0 \in G$ es distinto de los puntos $\{\zeta_n\}$, entonces, integrando desde z_0 hasta z en el recinto G, resulta:

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[\ln\left(\frac{z_0 - a_n}{z - a_n} \cdot \frac{z - \zeta_n}{z_0 - \zeta_n}\right) + R_n(z) - R_n(z_0)\right] + 2\pi i \nu(z),$$

donde $R_n(z) = \sum_{j=1}^{m_n - 1} \frac{1}{j}\left(\frac{\zeta_n - a_n}{z - a_n}\right)^j$ y $\nu(z)$ es un número entero. Hagamos finalmente:

$$h(z) = \exp\varphi(z) = \prod_{1}^{\infty} \left\{\left(\frac{z_0 - a_n}{z - a_n} \cdot \frac{z - \zeta_n}{z_0 - \zeta_n}\right) \exp\left[R_n(z) - R_n(z_0)\right]\right\}^{\lambda_n}. \tag{3.4:4}$$

La función $h(z)$ satisface a todas las condiciones del teorema. En efecto, del método de su construcción se deduce que el producto infinito es uniformemente convergente en el interior del recinto G, y son ceros del mismo solamente los puntos ζ_n, teniendo cada uno de éstos el orden asignado λ_n.

A una función $F(z)$ que puede expresarse en el recinto G en forma del cociente de dos funciones uniformes y analíticas en este recinto, $G(z)$ y $H(z)$, la llamaremos *meromorfa en este recinto*. Está claro que las funciones que hasta ahora las llamábamos meromorfas son funciones meromorfas en todo el plano (finito).

Si $F(z)$ es meromorfa en G, entonces no puede tener aquí otros puntos singulares más que polos. Como estos polos tienen que estar contenidos entre los ceros de la función $H(z)$ $\left(F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}\right)$, éstos no tienen ningún punto de acumulación en el recinto G. De aquí se deduce que los polos de la función F forman un conjunto finito o numerable de puntos del recinto G. Para convencerse de esto último es suficiente numerar primero todos los polos que distan de la frontera Γ no menos que 1, después los restantes que distan de Γ no menos que 1/2, etc.

Demostremos que cualquier función $f(z)$ que no tenga en el recinto G otros puntos singulares más que polos, es meromorfa en este recinto. Obsérvese primero que el conjunto de polos no puede tener ningún punto de acumulación en el interior de G, puesto que tal punto de acumulación tendría que ser un punto singular no aislado de la función $f(z)$, en contra de la suposición de que $f(z)$ tiene solamente puntos singulares aislados en el interior del recinto G. Si el conjunto de polos es finito y consta de los puntos $\zeta_1, \ldots$

. . ., ζ_n de órdenes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, entonces, formando el polinomio $p(z) = (z-\zeta_1)^{\alpha_1} \ldots, (z-\zeta_n)^{\alpha_n}$ y multiplicándole por $f(z)$, resulta una función $g(z) = f(z)\, p(z)$ que es analítica en todos los puntos del recinto G. Por lo tanto, $f(z) = \frac{g(z)}{p(z)}$ es una función meromorfa en el recinto G. Si el conjunto de polos de la función $f(z)$ es infinito, entonces, según lo observado anteriormente, éste es un conjunto numerable $\{\zeta_n\}$ que no tiene puntos de acumulación en el interior del recinto G. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n, \ldots$ los órdenes de los polos. Formemos entonces una función $h(z)$, analítica en el recinto G, que tenga en cada punto ζ_n un cero de orden γ_n y que no tenga ningún cero distinto de los puntos ζ_n. Entonces el producto $f(z)\, h(z)$ será una función $g(z)$ analítica en el recinto G, y de nuevo tendremos que $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ es una función meromorfa en el recinto G.

De lo demostrado se deduce que *la función meromorfa en un recinto dado se puede definir también como una función que no tiene en este recinto otros puntos singulares más que polos, posiblemente*

§ 4. FUNCION GAMMA

4.1. **La función Gamma** $\Gamma(z)$ es la más simple e importante entre el conjunto infinito de funciones meromorfas, mediante las cuales se extiende el concepto de factorial $n!$ al caso de números complejos arbitrarios z. Por ciertas causas históricas esta función, introducida en la ciencia por Euler, se define de tal modo que el valor $n!$ resulta para $z = n+1$, o sea, $\Gamma(n+1) = n!$. Por consiguiente, la relación característica para el factorial

$$n\cdot(n-1)! = n!$$

se escribe para la función Gamma así:

$$n\Gamma(n) = \Gamma(n+1).$$

Además, para $\Gamma(1)$ debe ser:

$$\Gamma(1) = 0! = 1.$$

Construyamos esta función, exigiendo ante todo que satisfaga a la relación

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

para todos los valores complejos de z. Así, pues, en la definición de la función Gamma partiremos de la ecuación funcional

$$zf(z) = f(z+1), \quad f(1) = 1. \tag{4.1:1}$$

No obstante, esta condición todavía no es suficiente para definir completamente la función. En efecto, si $f_0(z)$ es alguna función meromorfa para la cual

$$zf_0(z) = f_0(z+1),\ f_0(1) = 1,$$

entonces para la razón $\varphi(z) = \frac{f(z)}{f_0(z)}$ obtenemos:

$$\varphi(z) = \varphi(z+1),\ \varphi(1) = 1$$

es decir, $\varphi(z)$ es una función meromorfa de período 1 que toma el valor 1 para $z = 1$.

Tomando tal función arbitrariamente, representamos cualquiera de las funciones $f(z)$ que satisfacen (4.1:1) en la forma:

$$f(z) = \varphi(z) f_0(z).$$

Apliquemos la relación (4.1:1) a los valores $z, z+1, \ldots, z+n-1$ (n es un número natural) y multipliquemos las igualdades obtenidas; hallaremos:

$$z(z+1)\ldots(z+n-1) f(z) = f(z+n). \qquad (4.1:2)$$

De aquí, para $z = 1$ obtenemos:

$$f(n+1) = n!, \qquad (4.1:3)$$

es decir, en los puntos $z = 2, 3, \ldots, n+1, \ldots$ los valores de $f(z)$ coinciden con los valores de los factoriales: $1!, 2!, \ldots, n!, \ldots$ (esto es cierto también para $z = 1$, puesto que $f(1) = 1 = 0!$). Si en la relación (4.1:2) z tiende a $-(n-1) = -m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), resulta:

$$\lim_{z\to -m} (z+m) f(z) = \frac{f(1)}{(-1)^m m!} = \frac{(-1)^m}{m!} \qquad (4.1:4)$$

Por lo tanto, $f(z)$ tiene que tener polos simples en todos los puntos $z = -m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) con los residuos iguales a $\frac{(-1)^m}{m!}$

Sometamos $f(z)$ a la condición complementaria

$$f(z) \textit{ no tiene polos distintos de } z = -m$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots), \textit{ y no tiene ceros.} \qquad (4.1:5)$$

Si alguna función $f_0(z)$ satisface a las dos condiciones (4.1:1) y (4.1:5), entonces la función $\frac{\operatorname{tg}(i+2\pi z)}{\operatorname{tg} i} f_0(z)$, por ejemplo, satisface a (4.1:1), pero no satisface a (4.1:5), puesto que ésta tiene un conjunto infinito de ceros y polos imaginarios. Sin embargo, junto con $f_0(z)$ satisface a las mismas condiciones (4.1:1) y (4.1:5) toda función de la forma $\varphi(z) f_0(z)$, donde $\varphi(z)$ es una función entera de período 1, que toma el valor 1 en el punto $z = 1$ y carece de ceros.

Así, pues, a pesar de haber introducido la condición (4.1:5), todavía queda cierta arbitrariedad en la construcción de la función Gamma. No obstante, aplicando esta condición se puede afirmar que la función

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} \tag{4.1:6}$$

es entera y tiene ceros simples en los puntos $z = -m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, no teniendo otros ceros más que los indicados.

Por ello, ésta puede expresarse en la forma siguiente:

$$F(z) = e^{g(z)} z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}, \tag{4.1:7}$$

donde $g(z)$ es una función entera (al elegir los factores $e^{-\frac{z}{m}}$ que garantizan la convergencia del producto se ha tenido en cuenta que la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ es convergente). Por consiguiente, toda función meromorfa $f(z)$ que satisface a las condiciones (4.1:1) y (4.1:5) tiene que tener la forma:

$$f(z) = e^{-g(z)} \frac{1}{z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}}. \tag{4.1:8}$$

Evidentemente, ésta satisface a la condición (4.1:5), independientemente de como se elija la función entera $g(z)$. Para estudiar la condición (4.1:1), expresemos la fórmula (4.1:8) en la forma:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-g(z)}}{z \prod_{1}^{n} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \exp\left[-g(z) + \sum_{1}^{n} \frac{z}{m}\right]}{z(z+1)\ldots(z+n)}. \tag{4.1:9}$$

Haciendo para abreviar

$$\frac{n! \exp\left[-g(z) + \sum_{1}^{n} \frac{z}{m}\right]}{z(z+1)\ldots(z+n)} = f_n(z).$$

obtenemos:

$$\frac{zf(z)}{f(z+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{zf_n(z)}{f_n(z+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(z+n+1)\exp\left[-g(z)+g(z+1)-\sum_1^n\frac{1}{m}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z+1}{n}\right)\exp\left[-g(z)+g(z+1)-\left(\sum_1^n\frac{1}{m}-\ln n\right)\right]=$$

$$=\exp\{-g(z)+g(z+1)-C\}$$

Aquí C denota la constante conocida de Euler

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n\frac{1}{m}-\ln n\right)=0{,}5772\ldots$$

En resumen, si se exige que la función entera $g(z)$ cumpla la condición

$$g(z+1)-g(z)=C+2k\pi i \quad (k \text{ es un número entero}),$$

quedará satisfecha la ecuación funcional (4.1:1).

Además, de la condición $f(1)=1$ se deduce que

$$1=\lim_{n\to\infty}f_n(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\exp\left[-g(1)+\sum_1^n\frac{z}{m}-\ln n\right]}{1+\frac{1}{n}}=\exp(-g(1)+C),$$

de donde

$$g(1)=C+2l\pi i \quad (l \text{ es un número entero}).$$

Entre las funciones enteras que satisfacen a las condiciones halladas, la más simple es la función lineal entera

$$g_0(z)=Cz.$$

Efectuando precisamente esta sencillísima elección de la función $g(z)$, quedará definida completamente la función Gamma. Designando esta última mediante $\Gamma(z)$, según la fórmula (4.1:8) tendremos:

$$\Gamma(z)=e^{-Cz}\frac{1}{z\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}}. \tag{4.1:9}$$

Para la función entera $\frac{1}{\Gamma(z)}$ resulta:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}. \qquad (4.1{:}10)$$

Como aquí el exponente de convergencia τ de la sucesión de ceros es igual a 1 y el grado del polinomio Cz también es igual a 1, tendremos que, según el teorema del ap. 2.4, el orden de esta función es igual a 1.

Los relieves de las funciones $\Gamma(z)$ y $\frac{1}{\Gamma(z)}$, representados en las figuras 37 y 38 *), dan una idea visible del comportamiento de estas funciones.

De la fórmula (4.1:10) se deduce una relación importante que liga $\Gamma(z)$ y sen πz:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right) =$$

$$= -\frac{z}{\pi} \cdot \left[\pi z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{m^2 \pi^2}\right)\right] = -\frac{z \operatorname{sen} \pi z}{\pi}. \qquad (4.1{:}11)$$

o bien

$$\frac{1}{\Gamma(z)\left[-z\Gamma(-z)\right]} = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi}.$$

Pero, según la fórmula (4.1:1), $-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$, por lo cual

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi},$$

o sea,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}. \qquad (4.1{:}11')$$

De aquí, en particular, resulta:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi,$$

y como en la fórmula (4.1:9') $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, se tiene:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \qquad (4.1{:}12)$$

---

*) Los dibujos se han adaptado de las «Tablas de funciones» de Jahnke y Emde.

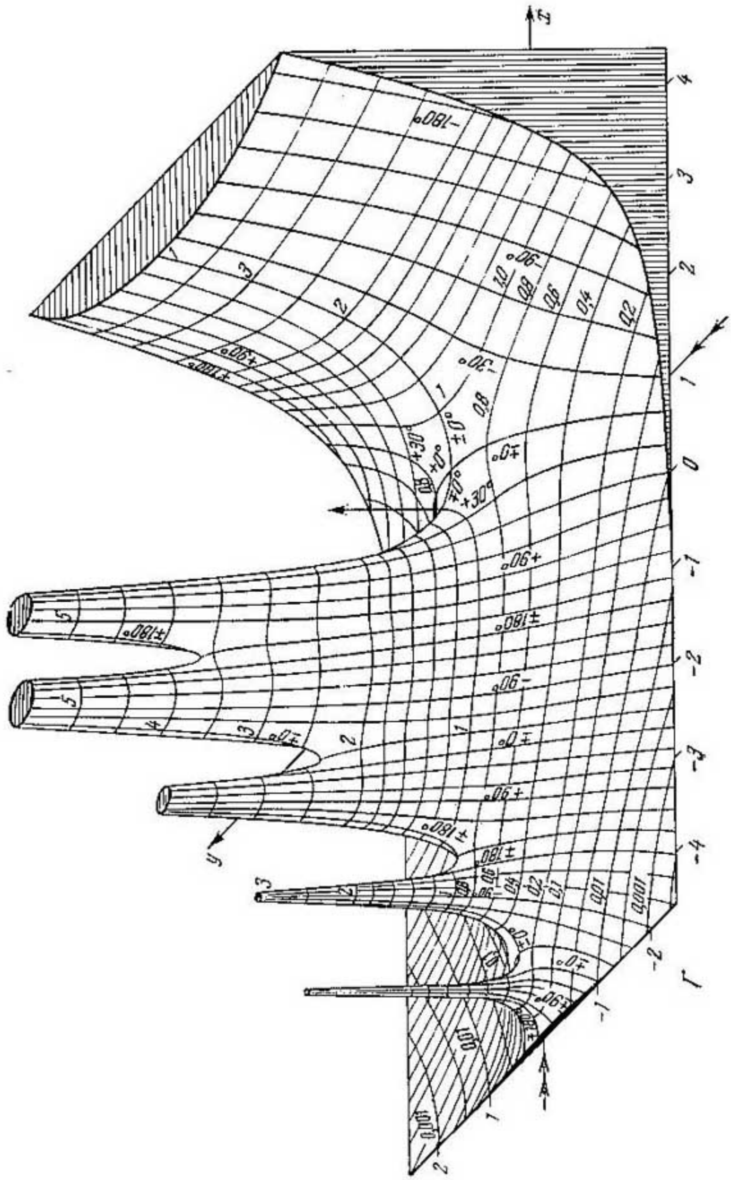

FIG. 37

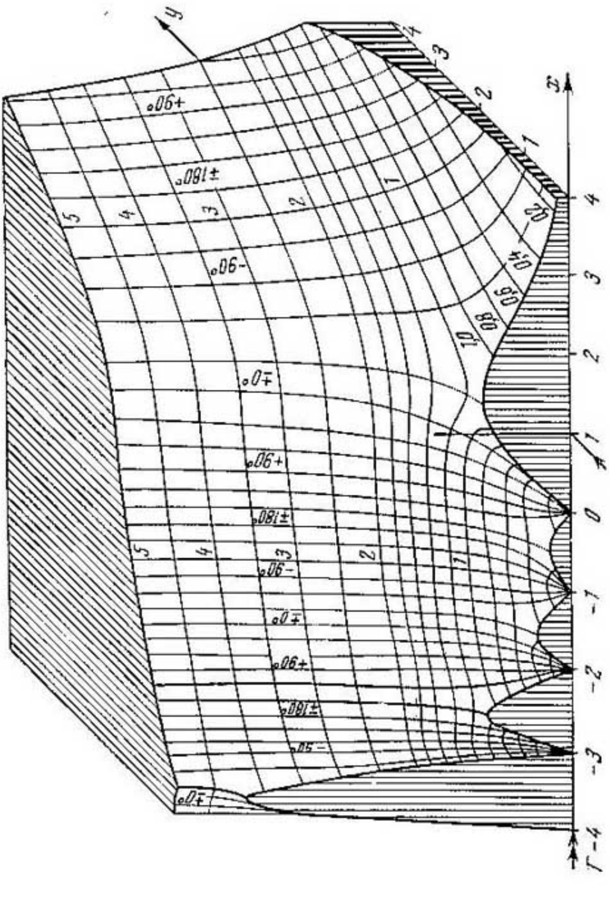

FIG. 38.

La fórmula (4.1:9) para $g(z) = Cz$ proporciona la siguiente expresión para la función Gamma:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \exp\left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{m} - C\right) z}{z(z+1)\ldots(z+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \exp\left[\left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{m} - \ln n - C\right) + \ln n\right] z}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{m} - \ln n - C\right) = 0 \text{ y } \exp(z \ln n) = n^z, \quad \text{resulta:}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} . \tag{4.1:13}$$

Esta fórmula fue obtenida por primera vez por Euler y por ello debe llevar su nombre (en los libros de estudio, ordinariamente, figura con el nombre de Gauss).

4.2. En este apartado se expondrán las expresiones integrales más importantes de la función Gamma. Demostremos ante todo que para $\operatorname{Re} z > 0$ se verifica la fórmula

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{4.2:1}$$

donde la integración se efectúa a lo largo de la parte positiva del eje real. Esta fórmula también pertenece a Euler (integral euleriana de segunda especie).

Consideremos la integral

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{4.2:2}$$

donde t^{z-1} denota $\exp[(z-1)\ln t]$. Como

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} \cdot t^{x-1},$$

esta integral es absolutamente convergente para cada z perteneciente al recinto D: $x = \operatorname{Re} z > 0$. Además, la función $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$ está uniformemente acotada en el interior del recinto D, es decir, en cada conjunto acotado y cerrado de puntos de este recinto. De aquí y como $e^{-t}t^{z-1}$ es una función entera de z para cada t, $0 < t < \infty$, sacamos la conclusión, según el ap. 1.2, cap. cuarto, t. I, que $F(z)$ es una función analítica en el semiplano D. Antes de demostrar la igualdad (4.2:1), demostremos la relación auxiliar:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt. \tag{4.2:3}$$

Efectuando la sustitución de la variable de integración $t = n\tau$ en la integral $F_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt$, obtenemos:

$$F_n(z) = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1}\, d\tau$$

o bien, después de n integraciones por partes:

$$F_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1}\, d\tau = \frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}.$$

Pero de aquí se deduce que la fórmula (4.2:3) coincide con la fórmula (4.1:13) (para $\operatorname{Re} z > 0$) y, por consiguiente, es justa. Ahora no queda más que demostrar que

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z), \quad z \in D$$

o bien que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\, dt = 0, \quad z \in D \tag{4.2:4}$$

$\left(\text{puesto que } F(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n e^{-t}t^{z-1}\, dt\right)$.

Observando que para $|t| < n$:

$$1 + \frac{t}{n} \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{t}{n}},$$

obtenemos:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t \ \text{ y } \ \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t};$$

por consiguiente,

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leqslant e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right] =$$
$$= e^{-t}\frac{t^2}{n^2}\left[1 + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n-1}\right] \leqslant \frac{t^2e^{-t}}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_0^n \left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\,dt\right| < \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{x+1}\,dt < \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+1}\,dt.$$

de donde se deduce (4.2:4). Así pues, la relación (4.2:1) queda demostrada.

Representemos la fórmula (4.2:1) en la forma siguiente:

$$\Gamma(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt, \quad \operatorname{Re} z>0. \qquad (4.2:5)$$

Sustituyendo en la primera de las integrales del segundo miembro la función e^t por su desarrollo en serie de potencias e integrando término a término, obtenemos:

$$\varphi(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\,dt=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}. \qquad (4.2:6)$$

Hemos establecido esta fórmula para $\operatorname{Re} z>0$. Pero la serie obtenida es absoluta y uniformemente convergente en cada recinto acotado, del que se han excluido los puntos $0, -1, -2, \ldots$ Por lo tanto, ésta representa una función $\varphi(z)$ uniforme y analítica en todo el plano finito, a excepción de los puntos $0, -1, -2, \ldots$, en los cuales tiene polos simples. Por consiguiente, $\varphi(z)$ es una función meromorfa. Está claro que el residuo de $\varphi(z)$ respecto del polo $-m$ es igual a $\frac{(-1)^m}{m!}$, es decir, coincide con el residuo de $\Gamma(z)$ respecto del mismo polo. Por consigüiente, la diferencia $\Gamma(z)-\varphi(z)$ es una función entera. Pero de la fórmula (4.2:5) se deduce que en el recinto D esta diferencia se expresa por la integral $\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$. Mas esta integral, como fácilmente se observa, es absolutamente convergente para cualquier z y representa una función entera en todo el plano finito. Así, pues, para cualquier z se tiene:

$$\Gamma(z)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt. \qquad (4.2:7)$$

El paso de la fórmula (4.2:5) a la fórmula (4.2:7) se funda en la sustitución de la expresión integral de la función meromorfa $\varphi(z)$, que es convergente solamente en el semiplano D, por su desarrollo en fracciones simples, el cual es convergente en todo el plano. Evidentemente, la fórmula (4.2:7) *representa el desarrollo en fracciones simples de la función* $\Gamma(z)$.

Deduzcamos otra expresión integral más para $\Gamma(z)$. Designemos con G el recinto cuya frontera es la parte negativa del eje real (incluyendo el punto $z = 0$), y consideremos la integral

$$\psi_n(z) = \int_{\gamma_n^{(\varepsilon)}} e^t t^{-z}\, dt, \tag{4.2:8}$$

donde el contorno γ_n consta del segmento del semieje negativo $-n \leqslant t \leqslant -\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), de la circunferencia $|z| = \varepsilon$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, y, finalmente, del mismo segmento del eje negativo, recorrido en dirección del punto $t = -\varepsilon$ hacia el punto $t = -n$. Aquí se distingue el segmento $-n \leqslant t \leqslant -\varepsilon$, recorrido por primera vez, del mismo segmento recorrido por segunda vez, considerándole alternativamente como el borde inferior o superior de un corte efectuado a lo largo del semieje negativo. Definiendo la función t^{-z} en el recinto G según la fórmula $t^{-z} = \exp(-z \ln t)$, suponemos que en los puntos del borde inferior del corte $t^{-z} = \exp(-z \ln |t| + i\pi z)$ y en los puntos del borde superior $t^{-z} = \exp(-z \ln |t| - i\pi z)$.

En estas condiciones, la fórmula (4.2:8) determina una función uniforme y analítica en todo el plano finito, es decir, una función entera. Es obvio que la sucesión $\{\psi_n(z)\}$ es uniformemente convergente en cada recinto acotado del plano, puesto que para $|z| < R$ se tiene:

$$\begin{aligned}|\psi_{n+p}(z) - \psi_n(z)| &\leqslant \Big| \int_{-(n+p)}^{-n} \exp(t - z\ln|t| + i\pi z)\, dt - \\ &- \int_{-(n+p)}^{-n} \exp(t - z\ln|t| - i\pi z)\, dt \Big| \leqslant \\ &\leqslant 2 \int_{-(n+p)}^{-n} \exp(t - x\ln|t| + \pi|y|)\, dt = \\ &= 2 \int_{n}^{n+p} e^{-t} t^{-x} e^{\pi|y|}\, dt < 2e^{\pi R} \int_{n}^{n+p} e^{-t} t^{R}\, dt,\end{aligned}$$

de donde se deduce la convergencia uniforme de esta sucesión. Por esta razón $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(z) = \psi(z)$ es una función entera que se expresa por la integral impropia

$$\psi(z) = \int_{\gamma^{(\varepsilon)}} e^t t^{-z}\, dt, \tag{4.2:9}$$

donde $\gamma^{(\varepsilon)}$ consta de la semirrecta $-\infty < t \leqslant -\varepsilon$, de la circunferencia $|z| = \varepsilon$ y otra vez más de la misma semirrecta recorrida en sentido contrario.

Demostremos que $\psi(z)$ no depende de ε; en efecto, la diferencia de dos integrales (4.2:9), tomadas a lo largo de $\gamma^{(\varepsilon)}$ y $\gamma^{(\eta)}$ $(\varepsilon > \eta > 0)$, se expresa por la integral $\int e^t t^{-z}\, dt$ tomada a lo largo del circuito cerrado que consta de dos circunferencias $|z| = \varepsilon$ y $|z| = \eta$ y del segmento $-\varepsilon \leqslant t \leqslant -\eta$ que una estos puntos, doblemente recorrido. En virtud del teorema integral de Cauchy, esta integral es igual a cero (es suficiente representar la integral en forma de la suma de dos integrales, tomadas a lo largo de los semianillos en que el circuito considerado se divide por la parte positiva del eje real, y aplicar después el teorema a cada semianillo por separado). De aquí que la integral (4.2:9) no depende de ε.

Supongamos ahora que $x < 1$ y $|t| = \varepsilon e^{i\varphi}$, donde $\varepsilon < 1$, y que ε tiende a cero. Entonces, como $|e^t t^{-z}| = \exp\left(\varepsilon \cos \varphi + x \ln \frac{1}{\varepsilon} + \right.$ $\left. + \varphi y\right) < \varepsilon^{-x} e^{1+\pi |y|}$, se tiene: $\left| \int\limits_{|z|=\varepsilon} e^t t^{-z} dz \right| < 2\pi \varepsilon^{1-x} e^{1+\pi|y|} \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.

Por consiguiente, $\psi(z)$ para $\operatorname{Re} z < 1$ puede expresarse en la forma

$$\psi(z) = \int\limits_{\gamma^{(0)}} e^t t^{-z}\, dt,$$

donde $\gamma^{(0)}$ es la parte negativa del eje real recorrida dos veces en sentidos opuestos. Precisando,

$$\psi(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(t - z \ln |t| + z\pi i)\, dt - \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(t - z \ln |t| - z\pi i)\, dt =$$

$$= e^{z\pi i} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} t^{-z}\, dt - e^{-z\pi i} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} t^{-z}\, dt = (e^{z\pi i} - e^{-z\pi i}) \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} t^{(1-z)-1}\, dt.$$

Como, para $\operatorname{Re} z < 1$, se tiene: $\operatorname{Re}(1 - z) > 0$, resulta según la fórmula (4.2:1) que la integral $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} t^{(1-z)-1}\, dt$ es igual a $\Gamma(1 - z)$.

Por consiguiente,

$$\psi(z) = 2i \operatorname{sen} \pi z \Gamma(1 - z);$$

según la fórmula (4.1:11'), esta relación puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\psi(z)}{2\pi i}.$$

Esta última fórmula se ha demostrado solamente para $\operatorname{Re} z < 1$; pero, como ambas funciones $\frac{1}{\Gamma(z)}$ y $\frac{\psi(z)}{2\pi i}$ son enteras, esta igualdad tiene que subsistir en todo el plano finito. Reemplazando $\psi(z)$ por la expresión integral (4.2:9), la cual es válida para todos los valores de z, hallamos:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}} e^t t^{-z}\,dt. \tag{4.2:10}$$

Sustituyendo aquí z por $1-z$ y aplicando la fórmula (4.1:11'), obtenemos:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2i\operatorname{sen}\pi z}\int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}} e^t t^{z-1}\,dt. \tag{4.2:11}$$

Obsérvese que para cualquier α, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, el circuito $\gamma^{(\varepsilon)}$ se puede cambiar por el circuito $\gamma^{\varepsilon}(\alpha)$ que consta del rayo rectilíneo

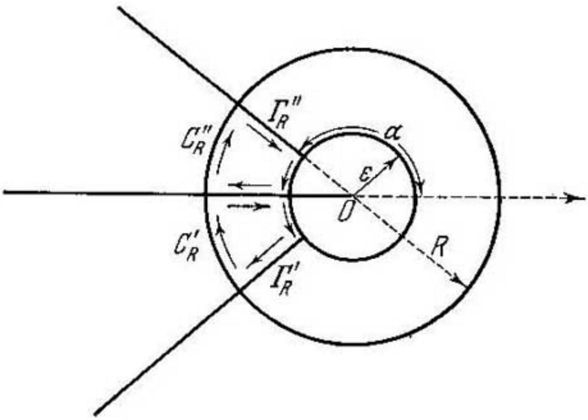

FIG. 39.

$\arg t=-\alpha$, $|t|\geqslant\varepsilon$, del arco de la circunferencia $|z|=\varepsilon$ que se define por la condición $|\arg t|\leqslant\alpha$, y del rayo rectilíneo $\arg t=$ $=\alpha$, $|t|\geqslant\varepsilon$, que es simétrico al primero respecto del eje real.

Comprobemos esto para la fórmula (4.2:10). La integral $\frac{1}{2\pi i}\int e^t t^{-z}dt$, tomada a lo largo de cada uno de los circuitos cerrados Γ_R' y Γ_R'' que tienen la forma de rectángulos curvilíneos (fig. 39), es igual a cero. Por otra parte, las integrales $\frac{1}{2\pi i}\int e^t t^{-z}\,dt$, tomadas a lo largo de cada uno de los dos arcos C_R' y C_R'' de la circunferencia $|t| = R$, que forman parte de Γ_R' y Γ_R'', tienden a cero cuando $R \to \infty$, puesto que en estos arcos se tiene:

$$|e^t t^{-z}| = \exp(R\cos\theta - x\ln R + y\theta) \leqslant$$
$$\leqslant \exp[-R\cos(\pi-\alpha) - x\ln R + 2\pi|y|].$$

Pasando al límite para $R \to \infty$ en las relaciones

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R'} e^t t^{-z}\,dt = 0 \text{ y } \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R''} e^t t^{-z}\,dt = 0,$$

obtenemos que la integral $\frac{1}{2\pi i}\int e^t t^{-z}\,dt$, tomada a lo largo del camino formado por el borde inferior del corte $-\infty < t \leqslant -\varepsilon$ y el arco de la circunferencia $|t| = \varepsilon$ determinado por la desigualdad $-\pi \leqslant \arg t \leqslant -\alpha$, es igual a la integral de la misma función tomada a lo largo del rayo $\arg t = -\alpha$, $|t| \geqslant \varepsilon$. Resulta una circunstancia similar para el camino que consta del borde superior del corte $-\infty \leqslant t \leqslant \varepsilon$ y del arco de la circunferencia $|t| = \varepsilon$, $\pi \geqslant \arg t \geqslant \alpha$ y del rayo $\arg t = \alpha$, $|t| \geqslant \varepsilon$.

De aquí que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}} e^t t^{-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}(\alpha)} e^t t^{-z}\,dt$$

para todos los z, es decir,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}(\alpha)} e^t t^{-z}\,dt. \qquad (4.2{:}10')$$

Análogamente

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i\,\mathrm{sen}\,\pi z}\int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}(\alpha)} e^t t^{z-1}\,dt. \qquad (4.2{:}11')$$

4.3. Estudiemos aquí el comportamiento asintótico de la función Gamma. Previamente nos hará falta una relación elemental existente entre las sumas e integrales, que representa un caso particular de la fórmula de sumación de Euler.

Sea $f(t)$ una función, definida y continua para $t \geqslant 0$ junto con su derivada primera. Entonces, para cualquier número natural k, se tiene:

$$f(k)-\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt=f(k)-\int_{k-1}^{k} f(t)\,d\left(t-k+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=f(k)-\frac{f(k)+f(k-1)}{2}+\int_{k-1}^{k} f'(t)\left(t-k+\frac{1}{2}\right)dt.$$

Sea $[t]$ la parte entera de t y sea $t-[t]=\{t\}$ la parte fraccionaria de t; entonces, para $k>t\geqslant k-1$, se tiene: $k=[t]+1$ y $t-k+\frac{1}{2}=\{t\}-\frac{1}{2}$. Evidentemente, $\{t\}-\frac{1}{2}$ es una función periódica de período 1, la cual es continua para todos los valores de t que no son iguales a números enteros y satisface a la desigualdad

$$-\frac{1}{2}\leqslant\{t\}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}.$$

Sustituyendo bajo el signo de la integral $\left(t-k+\frac{1}{2}\right)$ por $\{t\}-\frac{1}{2}$ (los valores de estas dos funciones son distintos solamente para $t=k$, lo cual no influye en el valor de la integral), obtenemos:

$$f(k)-\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt=\frac{f(k)-f(k-1)}{2}+\int_{k-1}^{k} f'(t)\left[\{t\}-\frac{1}{2}\right]dt.$$

Sumando las igualdades obtenidas para $k=1, 2, \ldots, n$, resulta:

$$\sum_{1}^{n} f(k)-\int_{0}^{n} f(t)\,dt=\frac{f(n)-f(0)}{2}+\int_{0}^{n} f'(t)\left[\{t\}-\frac{1}{2}\right]dt,$$

o bien

$$\sum_{0}^{n} f(k)-\int_{0}^{n} f(t)\,dt=\frac{f(0)+f(n)}{2}+\int_{0}^{n} f'(t)\left[\{t\}-\frac{1}{2}\right]dt. \qquad (4.3:1)$$

Esta es la igualdad que necesitábamos.

Apliquemos ahora la fórmula de Euler (4.1:13)

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

donde $n^z=\exp(z\ln n)$; resulta:

$$\ln\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(\ln(z+k)-\ln(1+k))-(z-1)\ln n+2\pi i m_n\right],$$

donde m_n son números enteros

Suponiendo que el punto z está fijo y que no está situado en el semieje negativo (incluyendo también en el mismo el origen de coordenadas), apliquemos la fórmula (4.3:1) a la función $\ln(z+t)$; obtendremos:

$$\sum_{0}^{n} \ln(z+k) - \int_{0}^{n} \ln(z+t)\,dt = \frac{\ln(z)+\ln(z+n)}{2} + \int_{0}^{n} \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt$$

o bien $\left(\text{observando que } \int\limits_{0}^{n} \ln(z+t)\,dt = (z+n)\ln(z+n) - z\ln z - n\right)$

$$\sum_{0}^{n} \ln(z+k) = \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln(z+n) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - n + \int_{0}^{n} \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt.$$

Hagamos aquí $z=1$ y restemos término a término la igualdad obtenida de la igualdad dada; obtendremos:

$$\sum_{0}^{n} (\ln(z+k) - \ln(1+k)) = \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln(z+n) - \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(1+n) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + \int_{0}^{n} \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt - \int_{0}^{n} \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{1+t}\,dt.$$

Por consiguiente,

$$\ln\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln(z+n) - \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(1+n) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - (z-1)\ln n + I_n(z) - I_n(1) + 2\pi i m_n\right], \quad (4.3:2)$$

donde 72

$$I_n(z) = \int_{0}^{n} \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt.$$

Escribamos en la forma que sigue el conjunto de términos entre corchetes que contienen logaritmos dependientes de n:

$$(z-1)\left[\ln(z+n) - \ln n\right] + \left(n+\frac{3}{2}\right)\left[\ln(z+n) - \ln(1+n)\right] =$$

$$= (z-1)\int_{n}^{z+n} \frac{dz}{z} + \left(n+\frac{3}{2}\right)\int_{1+n}^{z+n} \frac{dz}{z} = (z-1)\int_{1}^{1+z} \frac{d\zeta}{\zeta+n-1} + \int_{1}^{z} \frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)d\zeta}{\zeta+n},$$

donde la integración se puede extender, por ejemplo, a lo largo de segmentos rectilíneos. De aquí que todo este conjunto de términos tiende a $(z-1)$ cuando $n \to \infty$.

Transformemos ahora la expresión de $I_n(z)$.

Obsérvese con este fin que

$$\int_{k-1}^{k} \left(\{t\}-\frac{1}{2}\right) dt = \int_{k-1}^{k} \left(t-k+\frac{1}{2}\right) dt = 0,$$

y, por consiguiente,

$$\varphi(t) = \int_{0}^{t} \left(\{t\}-\frac{1}{2}\right) dt = \int_{[t]}^{t} \left(\{t\}-\frac{1}{2}\right) dt =$$

$$= \int_{0}^{\{t\}} \left(\tau-\frac{1}{2}\right) d\tau = \frac{1}{2}\{t\}(\{t\}-1).$$

Por ello, $\varphi(t)$ es una función continua y periódica, de período 1, la cual toma valores reales que satisfacen a la desigualdad:

$$-\frac{1}{8} \leqslant \varphi(t) \leqslant 0.$$

Empleando a la integral $\int_0^n \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\, dt$ el método de integración por partes, obtenemos:

$$I_n(z) = \frac{\varphi(t)}{z+t}\Big|_0^n + \int_0^n \frac{\varphi(t)\, dt}{(z+t)^2} = \int_0^n \frac{\varphi(t)\, dt}{(z+t)^2},$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} I_n(z) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\, dt}{(z+t)^2}.$$

Teniendo en cuenta lo dicho, se puede escribir la fórmula (4.3:2) en la forma

$$\ln\frac{1}{\Gamma(z)} = (z-1) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\, dt}{(z+t)^2} - \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\, dt}{(1+t)^2} + 2\pi i m(z), \qquad (4.3:3)$$

donde $m(z)$ es un número entero.

Cerciorémonos primero que si g_δ: $x < \delta$, $|y| < \delta$ es una semifranja fijada de anchura 2δ que contiene a la parte negativa del eje real, entonces, para todos los puntos z no pertenecientes a g_δ, se tiene:

$$\left|\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2}\right| \leqslant C'(\delta) < \infty. \tag{4.3:4}$$

En efecto,

$$\left|\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2}\right| \leqslant \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{dt}{|z+t|^2} = \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^2+y^2}.$$

Si $x<\delta$ e $|y|\geqslant\delta$, entonces la última integral, que es igual a $\frac{1}{8|y|}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{|y|}\right)$ es menor que $\frac{\pi}{8\delta}$; si $x\geqslant\delta$, entonces

$$\frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^2+y^2} \leqslant \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^2} = \frac{1}{8x} \leqslant \frac{1}{8\delta}.$$

Así, pues, queda demostrada la relación considerada y, además, para $C'(\delta)=\frac{\pi}{8\delta}$. De aquí se deduce que

$$\ln\frac{1}{|\Gamma(z)|} = \operatorname{Re}\left[\ln\frac{1}{\Gamma(z)}\right] = x-1-\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln|z| + y\arg z + C(z), \tag{4.3:3'}$$

donde $|C(z)|<\frac{\pi}{4\delta}$, si $z \,\bar{\in}\, g_\delta$.

En particular, esta fórmula se puede utilizar a lo largo de cualquier rayo fijado $\arg z=\alpha$, donde $0\leqslant|\alpha|<\pi$ (para $|z|$ suficientemente grandes). Por esta razón, a lo largo de tal rayo se tiene:

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{|\Gamma(z)|}}{|z|\ln|z|} = -\cos\alpha,$$

es decir,

$$\exp\{(-\cos\alpha+\varepsilon)|z|\ln|z|\} > \frac{1}{|\Gamma(z)|} > \exp\{(-\cos\alpha-\varepsilon)|z|\ln|z|\}$$

para todos los valores de $|z|$ suficientemente grandes. De aquí se deduce que la *función entera* $\frac{1}{\Gamma(z)}$, cuyo orden es igual a 1, *es de tipo maximal* ($\sigma=\infty$), es decir, para ésta no existen tales constantes positivas C y K de modo que se cumpla la desigualdad

$$\frac{1}{|\Gamma(z)|} < Ce^{K|z|}$$

para todos los valores de z.

Deduzcamos una cota para el módulo de $\frac{1}{|\Gamma(z)|}$ que sea válida para todos los valores de z de módulo suficientemente grande. Fijando un número $\delta > 0$ hallaremos por la fórmula (4.3:3′) que en cualquier punto $z = \rho e^{i\alpha}$ situado fuera de la semifranja g_δ:

$$\ln \frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} = \varphi_\rho(\alpha) + \frac{1}{2}\ln\rho + C(\rho e^{i\alpha}) - 1, \tag{4.3:5}$$

donde

$$\varphi_\rho(\alpha) = -\rho(\ln\rho - 1)\cos\alpha + \rho\alpha \operatorname{sen}\alpha.$$

Acotemos $\max\limits_{[-\pi, +\pi]} \varphi_\rho(\alpha)$; se supondrá que ρ es suficientemente grande (en todo caso, $\rho > e^\pi$). Observando que $\varphi_\rho(\alpha)$ es una función par, examinemos su comportamiento en el segmento $[0, \pi]$. Se tiene: $\varphi_\rho'(\alpha) = \rho(\ln\rho \operatorname{sen}\alpha + \alpha\cos\alpha)$ y $\varphi_\rho(\pi) = -\varphi_\rho(0) = \rho(\ln\rho - 1)$; como $\varphi_\rho'(\pi) < 0$, se alcanza el $\max\limits_{[-\pi, \pi]} \varphi_\rho(\alpha) = \max\limits_{[0, \pi]} \varphi_\rho(\alpha)$ en un punto $\alpha_\rho \in (0, \pi)$. Fácilmente se observa que α_ρ es la única raíz de la ecuación

$$\ln\rho \operatorname{sen}\alpha_\rho + \alpha_\rho \cos\alpha_\rho = 0, \quad \text{o} \quad \operatorname{tg}\alpha_\rho = -\frac{\alpha_\rho}{\ln\rho}$$

en el intervalo $(0, \pi)$.

Hagamos $\alpha_\rho = \pi - \beta_\rho$, entonces

$$\operatorname{tg}\beta_\rho = \frac{\pi - \beta_\rho}{\ln\rho},$$

de donde $0 < \beta_\rho < \frac{\pi}{\ln\rho}$, es decir, $\beta_\rho = \frac{\pi\vartheta_\rho}{\ln\rho}$, donde $0 < \vartheta_\rho < 1$. De la ecuación para β_ρ se deduce que $\lim\limits_{\rho\to\infty} \ln\rho \operatorname{tg}\beta_\rho = \pi$; por ello, $\lim\limits_{\rho\to\infty} \ln\rho\, \beta_\rho = \pi$, es decir, $\lim\limits_{\rho\to\infty} \vartheta_\rho = 1$. Por consiguiente, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene $2\vartheta_\rho > 2 - \varepsilon$ si ρ es suficientemente grande. Obsérvese también que

$$\cos\beta_\rho = \left[1 + \frac{(\pi - \beta_\rho)^2}{(\ln\rho)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{\pi^2}{(\ln\rho)^2}\left(1 - \frac{\vartheta_\rho}{\ln\rho}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{(\ln\rho)^2} + \frac{\pi^2\vartheta_\rho}{(\ln\rho)^3} + \ldots$$

Por lo tanto,

$$\max_{[-\pi, \pi]} \varphi_\rho(\alpha) = \varphi_\rho(\pi - \beta_\rho) =$$
$$= \rho\ln\rho\cos\beta_\rho\left[1 - \frac{1}{\ln\rho} + \frac{\pi^2}{(\ln\rho)^2}\left(1 - \frac{\beta_\rho}{\pi}\right)^2\right] =$$
$$= \rho\ln\rho\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{(\ln\rho)^2} + \frac{\pi^2\vartheta_\rho}{(\ln\rho)^3} + \ldots\right]\left[1 - \frac{1}{\ln\rho} + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi^2}{(\ln\rho)^2} - \frac{2\pi^2\vartheta_\rho}{(\ln\rho)^3} + \ldots\right] =$$
$$= \rho\ln\rho\left[1 - \frac{1}{\ln\rho} + \frac{\pi^2}{2(\ln\rho)^2} - \frac{\pi^2(2\vartheta_\rho - 1)}{2(\ln\rho)^3} + \ldots\right] <$$
$$< \rho\ln\rho\left[1 - \frac{1}{\ln\rho} + \frac{\pi^2}{2(\ln\rho)^2} - \frac{\pi^2(1 - \varepsilon)}{2(\ln\rho)^3}\right]$$

ara todos los valores de ρ suficientemente grandes. Por consiguiente,

$$\ln \frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha}|} < \rho \ln \frac{\rho}{e} + \frac{\pi^2\rho}{2\ln\rho} - \frac{\pi^2\rho(1-\varepsilon_0)}{2(\ln\rho)^2},$$

o sea,

$$\frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} < \left(\frac{\rho}{e}\right)^\rho \exp\left[\frac{\pi^2}{2}\frac{\rho}{\ln\rho} - \frac{\pi^2\rho(1-\varepsilon_0)}{2(\ln\rho)^2}\right], \tag{4.3:6}$$

donde $\varepsilon_0 = 2\varepsilon$, $z \bar{\in} g_\delta$ y ρ es suficientemente grande.

Supongamos ahora que $z = \rho e^{i\alpha} \in g_\delta$ siendo $\alpha = \rho\cos\alpha < -\delta$; entonces $\rho\,|\operatorname{sen}\alpha| < \delta$ y $-z = \rho e^{i(\alpha\pm\pi)} \bar{\in} g_\delta$. Empleemos la fórmula (4.1:11) de ésta se deduce que

$$\ln\frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} = \ln\frac{1}{\pi} + \ln\rho + \ln|\operatorname{sen}(\pi\rho e^{i\alpha})| - \ln\frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i(\alpha\pm\pi)})|},$$

o bien, sustituyendo $\ln\frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i(\alpha\pm\pi)})|}$ por la fórmula: (4.3:5):

$$\ln\frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} = \ln\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\ln\rho + \ln|\operatorname{sen}(\pi\rho e^{i\alpha})| - \varphi_\rho(\alpha\pm\pi) - C(\rho e^{i(\alpha\pm\pi)}) + 1.$$

Del análisis efectuado anteriormente queda claro que

$$\min_{[-\pi,\pi]} \varphi_\rho(\alpha) = -\rho(\ln\rho - 1), \quad \text{o sea,} \quad -\varphi_\rho(\alpha\pm\pi) \leqslant \rho(\ln\rho - 1).$$

Observando también que en el caso dado

$$|\operatorname{sen}(\pi\rho e^{i\alpha})| \leqslant \operatorname{ch}(\pi\rho\,|\operatorname{sen}\alpha|) \leqslant \operatorname{ch}\pi\delta,$$

obtenemos:

$$\ln\frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} < \rho(\ln\rho - 1) + \frac{1}{2}\ln\rho + C_2(\delta)$$

para $z \in g_\delta$ y todos los valores $\rho = |z|$ suficientemente grandes. En otras palabras, en la semifranja g_ρ es válida la cota:

$$\frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} < C_3(\delta)\sqrt{\rho}\left(\frac{\rho}{e}\right)^\rho.$$

De aquí se deduce que la acotación (4.3:6) es aplicable también en el recinto g_δ, es decir, se puede aplicar la desigualdad (4.3:6) en todos los puntos del plano sin restricción alguna, si $|z| = \rho$ es suficientemente grande.

Volvamos a examinar la fórmula (4.3:3). Sea ε un número positivo menor que π; designemos con D_ε el recinto $|\arg z| < \pi - \varepsilon$; en este recinto

$$\lim_{z\to\infty}\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2} = 0. \tag{4.3:7}$$

En efecto, para $\Delta > 0$ arbitrariamente grande se puede indicar un $R(\Delta, \varepsilon)$ tal que el punto z perteneciente a D_ε y situado fuera del círculo $|z| < R(\Delta, \varepsilon)$ estará también situado fuera de la semifranja g_Δ (esto es consecuencia inmediata de que la parte g_Δ situada en D_ε representa un conjunto acotado). De aquí se deduce, según lo anterior, que

$$\left| \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2} \right| < \frac{\pi}{8\Delta},$$

si $z \in D_\varepsilon$ y $|z| > R(\Delta, \varepsilon)$; por consiguiente, la relación (4.3:7) es cierta.

Finalmente, calculemos la constante $\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(1+t)^2} = c_0$. Con este fin, obsérvese que según la fórmula (4.1:11)

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(-z)} = -\frac{z \operatorname{sen} \pi z}{\pi},$$

de donde, para $z = iy$, resulta:

$$\frac{1}{\Gamma(iy)\,\Gamma(-iy)} = \frac{y \operatorname{sh} \pi y}{\pi}.$$

Pero $\Gamma(-iy) = \overline{\Gamma(iy)}$ (debido a que $\Gamma(z)$ toma valores reales para valores reales de z, como esto se deduce, por ejemplo, de la fórmula (4.1:9′)); por esta razón, la relación obtenida se escribe así:

$$\frac{1}{|\Gamma(iy)|^2} = \frac{y \operatorname{sh} \pi y}{\pi}.$$

Haciendo en la fórmula (4.3:3) $z = iy$, $y > 0$, y separando en la misma las partes reales, obtenemos:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1}{|\Gamma(iy)|^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y \operatorname{sh} \pi y}{\pi} \right) =$$

$$= -1 + \frac{1}{2} \ln y + \frac{\pi}{2} y + \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(iy+t)^2} \right] - c_0,$$

o sea

$$\frac{1}{2} \ln \frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{e^{\pi y}} = -1 + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(iy+t)^2} \right] - c_0.$$

Pasando al límite para $y \to \infty$ y observando que, según lo demostrado anteriormente,

$$\lim_{y \to \infty} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(iy+t)^2} \right] = 0,$$

hallamos que

$$c_0 = \frac{1}{2} \ln 2\pi - 1.$$

Definitivamente, la fórmula (4.3:3) toma la forma

$$\ln \frac{1}{\Gamma(z)} = -\left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + z - \frac{1}{2} \ln 2\pi + \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2} + 2\pi i m(z). \quad (4.3:8)$$

Esta se llama **fórmula de Stirling**, y puede escribirse en la forma

$$\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \exp\left[-z - \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2}\right]. \quad (4.3:8')$$

Como en todo recinto de la forma D_ε la integral que figura entre corchetes tiende a cero, se tiene:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z)}{z^{z-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \cdot e^{-z}} = 1, \quad z \in D_\varepsilon,$$

o bien, empleando la notación de la igualdad asintótica:

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}, \qquad z \in D_\varepsilon. \quad (4.3:8'')$$

Ordinariamente, cuando se habla de la fórmula de Stirling, se supone que se trata precisamente de esta última fórmula. Su importancia consiste en que ella proporciona una expresión asintótica de $\Gamma(z)$ mediante una combinación finita de funciones elementales. En particular, para $z = n + 1$ (n es natural) resulta $\Gamma(n+1) = n!$ y, por consiguiente,

$$n! \sim \sqrt{2\pi} (n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n-1},$$

de donde, observando que $(n+1)^{n+\frac{1}{2}} = n^{n+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \sim$ $\sim en^{n+\frac{1}{2}}$, obtenemos la expresión asintótica para el factorial

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (4.3:8''')$$

§ 5. FUNCIONES PERIODICAS

5.1. Las funciones periódicas forman una clase especial muy amplia de funciones meromorfas. Se dice que una función meromorfa $f(z)$ es **periódica** si existe un número ω, distinto de cero, tal que

$$f(z+\omega)=f(z) \tag{5.1:1}$$

para cualquier z (en particular, si la función tiene un polo en el punto z, entonces tiene que tener también un polo en el punto $z+\omega$). El número ω que posee la propiedad (5.1:1), se llama p e r í o d o de la función $f(z)$.

Sustituyendo z por $z-\omega$, de la fórmula (5.1:1) obtenemos:

$$f(z)=f(z-\omega)$$

para cualquier z. Así, pues, si ω es un período de la función $f(z)$, entonces $-\omega$ también es un período de esta función.

Sean ω_1 y ω_2 dos períodos de la función $f(z)$ (iguales o distintos entre sí). Entonces tendremos:

$$f(z+\omega_1+\omega_2)=f(z+\omega_1)=f(z),$$

de donde se deduce que $\omega_1+\omega_2$ también es un período de la función $f(z)$. En particular, si $\omega_2=-\omega_1$, se tiene que considerar que 0 también es un período de la función $f(z)$. Por inducción obtenemos que la suma $\omega_1+\ldots+\omega_n$ de cualquier número de períodos de la función $f(z)$ también es un período de esta función. De aquí se deduce que $\omega+\ldots+\omega=n\omega$ y $-\omega\ldots-\omega=-n\omega$ también son períodos de la función $f(z)$. En otras palabras, si ω es un período de $f(z)$, entonces cualquier entero múltiplo de ω también es un período de $f(z)$. El resultado general que sintetiza todas estas observaciones particulares consiste en lo siguiente: si $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *son períodos de la función* $f(z)$ *y* $m_1, \ldots, m_n$ *son unos números enteros, entonces* $m_1\omega_1+\ldots+m_n\omega_n$ *también es un período de* $f(z)$.

Demostremos que si $f(z)\not\equiv$ const, entonces, el *conjunto de todos los números complejos que son períodos de* $f(z)$ *no puede tener ningún punto de acumulación finito*. Suponiendo lo contrario, sea ω_0 un punto de acumulación del conjunto de períodos. Esto significa que existe una sucesión de períodos $\{\omega_n\}$, distintos entre sí, que converge hacia ω_0, por lo cual tendremos:

$$f(0)=f(\omega_1)=f(\omega_2)=\ldots=f(\omega_k)=\ldots,$$

es decir, $f(z)$ toma valores iguales entre sí en un conjunto de puntos que tiene un punto de acumulación finito ω_0, lo cual es imposible si $f(z)\not\equiv$ const.

Supongamos ahora que $\omega'\neq 0$ es algún período de una función $f(z)\not\equiv$ const. Entonces, también serán períodos todos los números de la forma $m\omega'$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), los cuales están situados en una recta L que pasa por el origen de coordenadas y por el punto ω' (fig. 40). En virtud de todo lo expuesto, el segmento $[-\omega', \omega']$

de esta recta contiene solamente una cantidad finita de períodos de la función $f_1(z)$. Por lo tanto, tiene que haber en éste unos períodos ω_1 y $-\omega_1$, distintos de cero, que están más próximos al origen de coordenadas que los demás, los cuales, en particular, pueden coincidir con ω' y $-\omega'$. Así, pues, en recta L tenemos un segmento $[-\omega_1, \omega_1]$, dentro del cual no existe ningún período de $f(z)$ distinto de cero. Demostremos que cualquier período de la función $f(z)$ situado en esta misma recta es de la forma $n\omega_1$, donde n es un número entero. Supongamos lo contrario, y sea Ω un período que se representa por un punto de la recta considerada y que está situado entre

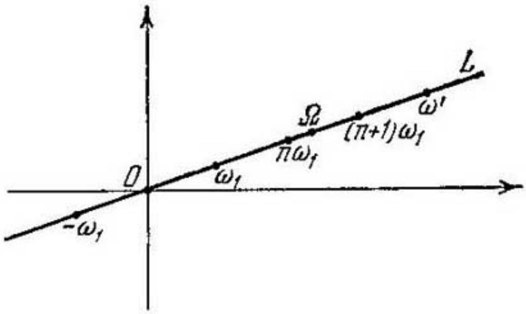

FIG. 40.

los puntos $n\omega_1$ y $(n+1)\,\omega_1$. Entonces $0 < |\,\Omega - n\omega_1\,| < |\,\omega_1\,|$, es decir, $\Omega - n\omega_1$ es un período de la función $f(z)$ que se representa por un punto interior del segmento $[-\omega_1, \omega_1]$ y es distinto de cero. Ha resultado una contradicción con la propiedad del último segmento, de donde se deduce que $\Omega = n\omega_1$.

Si todos los puntos de la función $f(z)$ se agotan con los números $n\omega_1$, entonces $f(z)$ se llama «monoperiódica» o «simplemente periódica» y el número ω_1 (o también $-\omega_1$), que posee la propiedad de que cualquier período de la función se expresa en forma de un entero múltiplo del mismo, se llama período fundamental *) de esta función.

La función exponencial e^z puede servir de ejemplo elemental de función monoperiódica. Su período fundamental es $2\pi i$ (o $-2\pi i$).

Supongamos ahora que $f(z)$ posee períodos que no están situados en la recta L. Sea ω_2' uno de ellos. Examinemos el triángulo D' con los vértices 0, ω_1 y ω_2 (fig. 41). Ya sabemos que el segmento $[0, \omega_1]$ no contiene otros períodos más que sus extremos 0 y ω_1. Si en el triángulo D' (en el interior o en sus lados) existen períodos

*) También se llama período primitivo. (*Nota del T*)

distintos de los vértices de D', entonces éstos no pertenecen al segmento $[0, \omega_1]$ y hay solamente una cantidad finita de ellos. Por consiguiente, entre los mencionados habrá al menos un punto ω_2 cuya distancia hasta la recta será mínima. De aquí se deduce que el triángulo D con los vértices 0, ω_1 y ω_2 ya no contiene ningún período distinto de sus vértices: 0, ω_1 y ω_2. Si lo completamos hasta un paralelogramo Δ con los vértices 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$ y ω_2, entonces en este paralelogramo tampoco habrá ningún período distinto de los vértices del paralelogramo. En efecto, suponiendo que ω es un período situado en Δ (dentro o en los lados) y distinto de 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$ y ω_2, construimos un paralelogramo con los vértices ω_1,

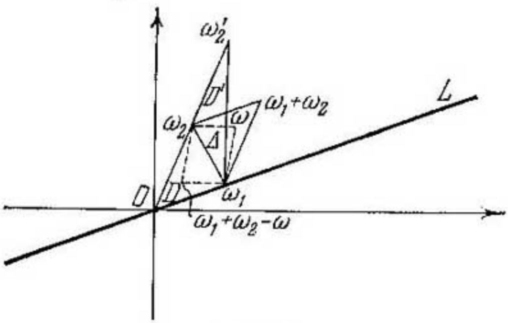

FIG. 41.

ω, ω_2 y $\omega_1 + \omega_2 - \omega$. El segmento $[\omega_1, \omega_2]$ es una de sus diagonales y, por consiguiente, uno de sus vértices ω, $\omega_1 + \omega_2 - \omega$ (cada uno de éstos es un período) caerá en uno y otro en el otro de los dos triángulos en que esta diagonal divide Δ. Ha resultado que en el triángulo D hay un período (ω o $\omega_1 + \omega_2 - \omega$) distinto de los vértices de este triángulo, lo cual contradice a la construcción de D.

Así, pues, en el caso estudiado existe un paralelogramo que contiene períodos solamente en los vértices: 0, ω_1, ω_2 y $\omega_1 + \omega_2$. Demostremos que en este caso cualquier período de la función $f(z)$ puede expresarse en la forma $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, donde m_1 y m_2 son números enteros. Con este fin, dividamos todo el plano en paralelogramos congruentes a Δ que no tengan puntos interiores comunes dos a dos y que no dejen sin cubrir ningún punto del plano (r e t í c u l o d e p a r a l e l o g r a m o s). Cada uno de los paralelogramos construidos Δ_{m_1, m_2} tendrá vértices de la forma $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ («el ángulo inferior de la izquierda» del paralelogramo Δ_{m_1, m_2}), $(m_1 + 1)\,\omega_1 + m_2\omega_2$, $m_1\omega_1 + (m_2 + 1)\,\omega_2$ y $(m_1 + 1)\,\omega_1 + (m_2 + 1)\,\omega_2$ («el ángulo superior de la derecha» del paralelogramo $\Delta_{m_1 m_2}$); además, cada punto de la forma $\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$ (μ_1 y μ_2 son números enteros) será un vértice común de cuatro paralelogramos del retículo. Si se supone que existe un período Ω distinto de cada uno de los vértices del retículo, entonces tiene que haber un paralelogramo $\Delta_{m_1 m_2}$ al cual pertenece Ω (fig. 42). Como Ω no coincide con ninguno de los vértices del paralelogramo $\Delta_{m_1 m_2}$, resulta

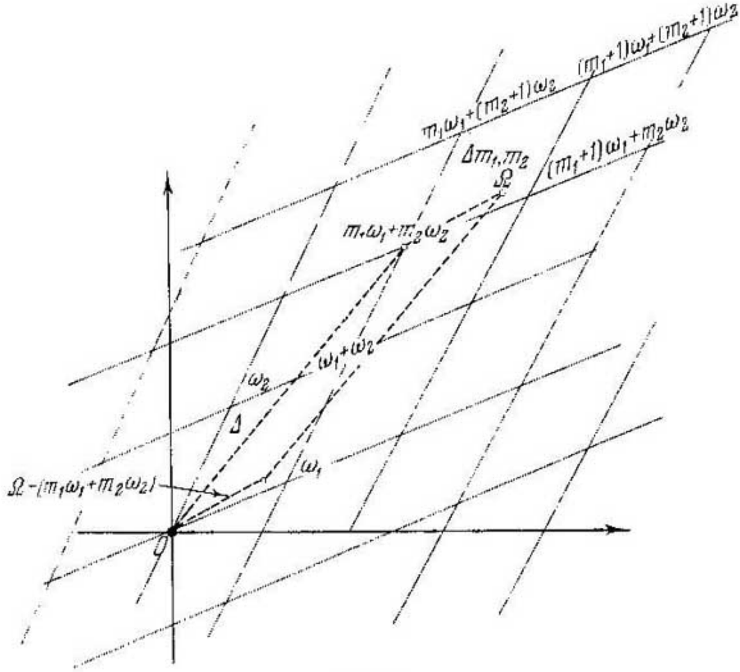

FIG. 42

que $\Omega - (m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ es un período de la función $f(z)$ que pertenece al paralelogramo Δ y es distinto de sus vértices. De la contradicción obtenida se deduce que Ω coincide con uno de los vértices del retículo de paralelogramos:

$$\Omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Por lo tanto, en el caso considerado existen dos períodos tales, que cualquier período de la función $f(z)$ se expresa en forma de una combinación lineal entera de estos dos períodos ω_1 y ω_2. La función meromorfa correspondiente $f(z)$ se llama **doblemente periódica** o **elíptica**, los períodos ω_1 y ω_2 se llaman **períodos fundamentales** y el paralelogramo construido Λ se llama **paralelogramo fundamental de períodos**.

Fácilmente se observa que para una misma función doblemente periódica existe un conjunto infinito de pares de períodos fundamentales distintos entre sí, lo cual corresponde a un conjunto infinito de paralelogramos fundamentales distintos entre sí.

En efecto, supongamos que ω' y ω'' son dos períodos de la forma

$$\omega' = m_1'\omega_1 + m_2'\omega_2, \quad \omega'' = m_1''\omega_1 + m_2''\omega_2,$$

y que la expresión $m_1'm_2'' - m_1''m_2'$ es igual a ± 1.

Entonces, de estas igualdades tendremos:

$$\omega_1 = \pm (m_2''\omega' - m_2'\omega''), \quad \omega_2 = \pm (-m_1''\omega' + m_1'\omega''),$$

y, por consiguiente, cualquier período $\Omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ puede expresarse en forma de una combinación lineal de los períodos ω' y ω'' de coeficientes enteros:

$$\Omega = \pm [(m_1m_2'' - m_2m_1'')\,\omega' + (-m_1m_2' + m_2m_1')\,\omega''].$$

Por lo tanto, ω' y ω'' también representan un par de períodos fundamentales de la función $f(z)$. Está claro que existe un conjunto infinito de tales pares, puesto que existe un conjunto infinito de cuaternas de números enteros que satisfacen a la condición $m_1'm_2'' - m_1''m_2' = \pm 1$.

En este apartado nos hemos convencido que *las funciones periódicas meromorfas pueden ser o simple periódicas o doblemente periódicas (elípticas); otras clases más de funciones periódicas meromorfas no existen.*

5.2. Expongamos unas cuantas proposiciones que son válidas para cualquier función periódica meromorfa (simplemente o doblemente periódica).

Sea $\omega \neq 0$ un período de la función $f(z)$; a saber, el período fundamental si $f(z)$ es simplemente periódica, o uno de los períodos fundamentales si $f(z)$ es doblemente periódica.

Haciendo la sustitución de la variable $\zeta = \frac{2\pi}{\omega} z$, resulta una función meromorfa $F(\zeta) = f\left(\frac{\omega}{2\pi}\,\zeta\right)$ de período 2π. Por lo tanto, mediante una simple transformación, que se reduce a una rotación y una dilatación del plano z respecto del origen de coordenadas, el caso de una función de período arbitrario ω se reduce al caso de una función de período 2π.

Consideremos la función multiforme $\zeta = \frac{1}{i}$ Ln t, definida en el recinto G que se obtiene del plano t al excluir los puntos $t = 0$ y $t = \infty$. En cada punto $t \in G$ esta función posee un conjunto infinito numerable de valores que difieren dos a dos en enteros múltiplos de 2π. De aquí que $F\left(\frac{1}{i} \operatorname{Ln} t\right)$ es una función uniforme de t, definida en el recinto G. Hagamos

$$F\left(\frac{1}{i}\operatorname{Ln} t\right) = F^*(t) \qquad (5.2:1)$$

y cerciorémonos de que $F^*(t)$ es analítica en todo el recinto G, a excepción de algunos puntos, correspondientes a los polos de la función $F(\zeta)$, en los cuales $F^*(t)$ también tiene polos y, además, del mismo orden que $F(\zeta)$.

Sea ζ_0 uno de los valores de $\frac{1}{i}$ Ln t_0. En un entorno U del punto t_0, contenido en el recinto G, la función $\frac{1}{i}$ Ln t tiene una rama uniforme y analítica $\varphi_0(t)$ que se caracteriza completamente por el valor ζ_0 que toma en el punto t_0. Esta rama transforma U biunívocamente en cierto recinto $\varphi(U)$ del plano ζ que contiene en su interior al punto ζ_0. Si el punto ζ_0 es regular para $F(\zeta)$, entonces el entorno U se puede tomar tan pequeño que todos los puntos del entorno $\varphi_0(U)$ (el cual se contrae hacia ζ_0 cuando U se contrae hacia t_0) sean también regulares para $F(\zeta)$. Obtendremos que $F^*(t) = F[\varphi_0(t)]$ será analítica en U, como función analítica de una función analítica. Si ζ_0 es un polo de la función $F(\zeta)$, el entorno U se puede tomar tan pequeño que el punto ζ_0 sea el único polo de $F(\zeta)$ en el recinto $\varphi_0(U)$. Por consiguiente, $F^*(t) = F[\varphi_0(t)]$ será una función uniforme y analítica en todos los puntos del entorno U, a excepción de $t = t_0$. Pero $\lim\limits_{t\to t_0} F^*(t) = \lim\limits_{\zeta\to\zeta_0} F(\zeta) = \infty$; por lo tanto, t_0 es un polo de la función $F^*(t)$. No queda más que observar que si ζ_0 es un polo de orden k para $F(\zeta)$, de modo que $\lim (\zeta - \zeta_0)^k F(\zeta) = A$ $(\neq 0, \infty)$, entonces

$$\lim_{t\to t_0} (t-t_0)^k F^*(t) = \lim_{t\to t_0}\left[(\zeta-\zeta_0)^k F(\zeta) : \left(\frac{\zeta-\zeta_0}{t-t_0}\right)^k\right] =$$

$$= \lim_{t\to t_0}\left\{(\zeta-\zeta_0)^k F(\zeta) : \left[\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right]^k\right\} = A : [\varphi'(t_0)]^k \qquad (\neq 0, \infty)$$

$$\left(\varphi'(t_0) = \left(\frac{1}{i}\operatorname{Ln} t\right)'_{t=t_0} = \frac{1}{it_0} \neq 0, \infty\right).$$

De aquí se deduce que el punto t_0 es un polo de la función $F^*(t)$ del mismo orden k. Por lo tanto, hemos demostrado que $F^*(t)$ es una función meromorfa en el recinto G.

La fórmula (5.2:1) pone en correspondencia a cada función $F(\zeta)$ que es meromorfa en el plano y posee período 2π, una función $F^*(t)$ meromorfa en el recinto G.

Recíprocamente, dada arbitrariamente una función $\Phi^*(t)$, meromorfa en el recinto G, podemos ponerle en correspondencia mediante la transformación $t = e^{i\zeta}$ (recíproca respecto de la transformación $\zeta = \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\,t$) la función $\Phi(\zeta) = \Phi^*(e^{i\zeta})$, la cual es meromorfa en el plano ζ y posee el período 2π.

A cada franja γ limitada por rectas paralelas al eje imaginario y de anchura 2π, la llamaremos *franja de períodos* de la función $F(\zeta)$. Como se sabe, la función $t = e^{i\zeta}$ transforma biunívoca y conformemente tal franja en el recinto Γ del plano t que se obtiene del plano excluyendo de éste un rayo rectilíneo Λ que une los puntos 0 y ∞ (véase el ap. 3.5, cap. II). Este rayo es la imagen de cada una de las dos rectas que limitan la franja.

Adjuntando al recinto Γ el rayo Λ, resulta todo el recinto G. De aquí se deduce que los valores que toma la función $F^*(t)$ en el recinto G coinciden con los valores que toma la función $F(\zeta)$ en cualquiera de las franjas de períodos g, a la cual hay que adjuntar además una de las rectas l que la limitan. En particular, el conjunto de polos de la función $F^*(t)$ coincidirá con el conjunto de las imágenes de los polos de la función $F(\zeta)$ que pertenecen solamente a una de las franjas de períodos g (a la cual se la han adjuntado los puntos de la recta l). Por lo tanto, $F^*(t)$ tendrá en todo el recinto G un conjunto finito o infinito de polos, según que sea finito o infinito el conjunto de polos de $F(\zeta)$ en la franja $g \cup l$.

Supongamos que $F(\zeta)$ tiene una cantidad finita de polos en cada franja $g \cup l$. Entonces $F^*(t)$ tiene una cantidad finita de polos en el recinto G y, por consiguiente, 0 y ∞ no serán puntos de acumulación de polos para $F^*(t)$. Por ello, éstos pueden ser solamente puntos regulares o singulares aislados de la función $F^*(t)$. De la relación $t = e^{i\zeta}$ se deduce que $|t| = e^{-\eta}$, es decir, t tiende a 0 cuando η tiende a ∞ (el *extremo superior* de la franja de períodos), y t tiende a ∞ cuando η tiende a $-\infty$ (el *extremo inferior* de la franja de períodos). Por consiguiente, para averiguar el carácter del punto 0 (o ∞) para la función $F^*(t)$, es suficiente estudiar el comportamiento de la función $F(\zeta)$ cuando el punto ζ, manteniéndose en una de las franjas de períodos, tiende a su extremo superior (respectivamente, a su extremo inferior).

Son posibles los casos siguientes:

a) $F(\zeta)$ se mantiene acotada en valor absoluto cuando ζ tiende al extremo superior (inferior) de la franja. Entonces $F^*(t)$ queda acotada en valor absoluto cuando t tiende a 0 (respectivamente a ∞), y, por consiguiente, el punto $t = 0$ (o ∞) es regular para $F^*(t)$, de modo que $F^*(t)$ es desarrollable en serie $F^*(t) = \sum_0^\infty \alpha_k t^k$ en un entorno $|t| < r$ del punto 0 (respectivamente, $F^*(t) = \sum_0^\infty \beta_k t^{-k}$ en un entorno $|t| > R$ del punto ∞). Por lo tanto, $F(\zeta)$ es desarrollable en serie $\sum_0^\infty \alpha_k e^{ik\zeta}$ en el semiplano $\eta > \ln \frac{1}{r}$ $\Big($respectivamente, en serie $\sum_0^\infty \beta_{-k} e^{-ik\zeta}$ en el semiplano $\eta < \ln \frac{1}{R}\Big)$.

b) $F(\zeta)$ tiende a ∞ cuando ζ tiende al extremo superior (inferior) de la franja. Entonces $F^*(t)$ también tiende a ∞ cuando $t \to 0$ $(t \to \infty)$, y, por consiguiente, el punto $t = 0$ $(t = \infty)$ es un polo para $F^*(t)$, de modo que $F^*(t)$ es desarrollable en serie $F^*(t) = \sum_{-m}^\infty \alpha_k t^k$ en un entorno $|t| < r$ del punto 0 (respectivamente $F^*(t) = \sum_{-m}^\infty \beta_{-k} t^{-k}$ en un entorno $|t| > R$ del punto ∞). Por ello, $F(\zeta)$ es desarrollable en serie $\sum_{-m}^\infty \alpha_k e^{ik\zeta}$ en el semiplano $\eta > \ln \frac{1}{r}$ $\Big($respectivamente, en serie $\sum_{-m}^\infty \beta_{-k} e^{-ik\zeta}$ en el semiplano $\eta < \ln \frac{1}{R}\Big)$.

c) $F(\zeta)$ no tiende hacia un límite finito o infinito cuando ζ tiende al extremo superior (inferior) de la franja. Entonces $F^*(t)$ tampoco tiende hacia un límite finito o infinito cuando $t \to 0$ $(t \to \infty)$ y, por consiguiente, el punto $t = 0$ (o $t = \infty$) es un punto singular esencial para $F^*(t)$, de modo que $F^*(t)$ es desarrollable en serie $F^*(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k t^k$ en un entorno $|t| < r$ del punto 0 (respectivamente, $F^*(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{-k} t^{-k}$ en un entorno $|t| > R$ del punto ∞). Por ello, $F(\zeta)$ es desarrollable en serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\zeta}$ en el semiplano $\eta > \ln \frac{1}{r}$ $\Big($respectivamente, en serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{-k} e^{-ik\zeta}$ en el semiplano $\eta < \ln \frac{1}{R}\Big)$.

Supongamos que $F(\zeta)$ es una función entera periódica. Entonces la función correspondiente $F^*(t)$ carece de puntos singulares en el recinto G y, por consiguiente, es desarrollable en este recinto en serie de Laurent:

$$F^*(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k t^k. \tag{5.2:2}$$

Volviendo a la función $F(\zeta)$ mediante la sustitución $t = e^{i\zeta}$, obtenemos para esta función el desarrollo

$$F(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\zeta}. \tag{5.2:3}$$

La serie de Laurent (5.2:2) es uniformemente convergente en cada anillo circular $0 < r \leqslant |t| \leqslant R < \infty$. Como $|t| = |e^{i\zeta}| = e^{-\eta}$, y al anillo circular le corresponde en el plano ζ la franja $\ln r \leqslant -\eta \leqslant \ln R$ o $\ln \frac{1}{r} \geqslant \eta \geqslant \ln \frac{1}{R}$, limitada por rectas paralelas al eje real, la serie (5.2:3) es uniformemente convergente en tal franja. Tomando r suficientemente pequeño y R suficientemente grande, se puede obtener una franja arbitrariamente ancha que contenga cualquier franja prefijada con los lados paralelos al eje real.

De aquí se deduce que la serie (5.2:3) es uniformemente convergente en todo el eje real y, en particular, en su segmento δ: $-\pi \leqslant \xi \leqslant \pi$, $\eta = 0$. Multiplicando la serie (5.2:3) por $e^{-n\zeta i}$ e integrando a lo largo de este segmento, hallamos que

$$\int_{\delta} F(\zeta)\, e^{-n\zeta i}\, d\zeta = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n \int_{\delta} e^{(k-n)\zeta i}\, d\zeta.$$

Aquí

$$\int_{\delta} F(\zeta)\, e^{-n\zeta i}\, d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\, e^{-n\xi i}\, d\xi \quad \text{y} \quad \int_{\delta} e^{(k-n)\zeta i}\, d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{(k-n)\xi i}\, d\xi.$$

Evidentemente, las últimas integrales se anulan si $k \neq n$, y son iguales a 2π si $k = n$. Por consiguiente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\, e^{-n\xi i}\, d\xi = 2\pi\alpha_n,$$

de donde

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\, e^{-n\xi i}\, d\xi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{5.2:4}$$

Sustituyendo $e^{ik\zeta}$ por $\cos k\zeta + i \operatorname{sen} k\zeta$, podemos escribir la serie (5.2:3) en la forma

$$F(\zeta) = \alpha_0 + \sum_{1}^{\infty} [(\alpha_k + \alpha_{-k}) \cos k\zeta + i(\alpha_k - \alpha_{-k}) \operatorname{sen} k\zeta],$$

donde

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} a_0,$$

$$\alpha_k + \alpha_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \frac{(e^{-k\xi i} + e^{k\xi i})\, d\xi}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \cos k\xi\, d\xi = a_k,$$

$$i(\alpha_k - \alpha_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi)\, \frac{e^{k\xi i} - e^{-k\xi i}}{2i}\, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \operatorname{sen} k\xi\, d\xi = b_k$$

$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Por lo tanto, hemos obtenido para $F(\zeta)$ el desarrollo en serie de Fourier

$$F(\zeta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos k\zeta + b_k \operatorname{sen} k\zeta) \tag{5.2:5}$$

con los coeficientes

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \cos k\xi\, d\xi, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \operatorname{sen} k\xi\, d\xi \tag{5.2:6}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Del método de obtención de la serie (5.2:5) se deduce que ésta es uniformemente convergente en cada franja limitada por rectas paralelas al eje real.

Si $F(\zeta)$, cuando ζ tiende hacia cada uno de los extremos de la franja de períodos, se mantiene acotada o tiende al infinito, entonces $F^*(t)$ tiene en el punto correspondiente $t = 0$ o $t = \infty$ un punto regular o un polo. Por ello, la serie de Laurent (5.2:2) sólo puede contener en este caso una cantidad finita de términos con coeficientes no nulos y, por consiguiente, $F^*(t)$ es una función racional de t de la forma especial

$$F^*(t) = \sum_{-m}^{m} \alpha_k t^k$$

(el coeficiente α_m o α_{-m} puede ser igual a cero). De aquí se deduce que *si la función entera $F(\zeta)$ tiende a un límite finito o infinito en cada uno de los extremos de la franja de períodos, entonces necesaria-*

mente es de la forma

$$F(\zeta)=\sum_{-m}^{m}\alpha_k e^{ik\zeta}=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{m}(a_k\cos k\zeta+b_k \operatorname{sen} k\zeta), \qquad (5.2:7)$$

donde

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\xi)\cos k\xi\,d\xi \quad \text{y} \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\xi)\operatorname{sen} k\xi\,d\xi,$$

es decir, es un polinomio trigonométrico.

Fácilmente se observa que es cierta también la proposición recíproca: *todo polinomio trigonométrico de la forma* (5.2:7) *es una función entera de período* 2π *que tiene límite finito o infinito en cualquier extremo de la franja de períodos.*

Resumiendo, la propiedad indicada es una propiedad característica que distingue a los polinomios trigonométricos entre todas las funciones periódicas enteras.

Señalemos otra propiedad característica de los polinomios trigonométricos:

Una función entera $F(\zeta)\not\equiv$ const *de período* 2π *es de tipo exponencial cuando, y sólo cuando, ésta es un polinomio trigonométrico. En este caso, su orden es igual a* 1 *y el tipo coincide con el orden* m *del polinomio trigonométrico.*

En efecto, si $F(\zeta)$ es un polinomio trigonométrico (5.2:7) de grado m (al menos uno de los coeficientes α_m o α_{-m} es distinto de cero), entonces el orden de su crecimiento es igual a 1 y el tipo es igual a m, puesto que para valores suficientemente grandes de $|\zeta|$ se cumple la desigualdad $|F(\zeta)|<e^{(m+\varepsilon)|\zeta|}$ $(\varepsilon>0)$ y, por otra parte, existen valores de ζ_n arbitrariamente grandes en valor absoluto, para los cuales $|F(\zeta_n)|>e^{(m-\varepsilon)|\zeta_n|}$.

Recíprocamente, sea $F(\zeta)$ una función entera de tipo exponencial y de período 2π. Entonces $F(z)$ satisface a una desigualdad de la forma

$$|F(\zeta)|<e^{C|\zeta|} \quad \text{para} \quad |\zeta|>R_0$$

y, por consiguiente, en los segmentos de las rectas $\eta=\pm\ln R$ comprendidos en la franja de períodos $-\pi\leqslant\xi<\pi$ satisface a la desigualdad

$$|F(\xi+i\eta)|<\exp[C|\xi\pm i\ln R|]=\exp\left[C\ln R\left|1\pm i\frac{\xi}{\ln R}\right|\right]<$$

$$<\exp\left[C\ln R\left(1+\frac{\pi}{\ln R}\right)\right]<\exp[(C+\varepsilon)\ln R]=$$

$$=R^{C+\varepsilon} \quad \text{para} \quad R>R(\varepsilon).$$

Al hacer la transformación $t=e^{i\zeta}$, a los segmentos indicados de rectas les corresponden en el recinto G las circunferencias $|t|=\frac{1}{R}$

y $|t| = R$. Por ello, en la primera de éstas se cumple la desigualdad

$$|F^*(t)| < \frac{1}{|t|^{C+\varepsilon}}, \tag{5.2:8}$$

y, en la segunda, la desigualdad

$$|F^*(t)| < |t|^{C+\varepsilon}. \tag{5.2:9}$$

Para valores suficientemente grandes de R ($R > R(\varepsilon)$) puede usarse una y otra desigualdad. Por consiguiente, la primera es válida para todas las circunferencias $|t| = \rho$ de radio suficientemente pequeño $\left(\rho = \frac{1}{R} < \frac{1}{R(\varepsilon)}\right.$, mientras que la segunda, para todas las circunferencias $|t| = \rho$ de radio suficientemente grande $\left.(\rho = R > R(\varepsilon)\right)$.

Basándose en la desigualdad (5.2:8), demostremos que en el desarrollo de Laurent de la función $F^*(t)$ son iguales a cero todos los coeficientes de las potencias negativas de t cuyos subíndices son mayores que $[C]$ en valor absoluto.

En efecto, para α_{-k} se tiene la fórmula

$$|\alpha_{-k}| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho}\frac{F^*(t)}{t^{-k+1}}\,dt\right| = \frac{\rho^k}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} F^*(\rho e^{i\theta})\,e^{ik\theta}\,d\theta\right|$$

y para todos los valores suficientemente pequeños de ρ, en virtud de (5.2:8), se tiene:

$$|\alpha_{-k}| < \frac{\rho^k}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{\rho^{C+\varepsilon}} = \rho^{k-(C+\varepsilon)}.$$

De aquí que, si ρ tiende a cero, resulta $\alpha_{-k} = 0$ para $k > C+\varepsilon$, o bien, como ε es arbitrariamente pequeño

$$\alpha_{-k} = 0 \quad \text{si} \quad k > [C].$$

Exactamente igual, basándose en la desigualdad (5.2:9), si el radio de la circunferencia $|t| = \rho$ tiende a ∞, hallamos que también son iguales a cero todos los coeficientes de las potencias positivas de t cuyos subíndices son mayores que $[C]$:

$$\alpha_k = 0 \quad \text{si} \quad k > [C].$$

De aquí se deduce que

$$F^*(t) = \sum_{-[C]}^{[C]} \alpha_k t^{-k}$$

y

$$F(\zeta) = \sum_{-[C]}^{[C]} \alpha_k e^{ik\zeta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{[C]} (a_k \cos k\zeta + b_k \operatorname{sen} k\zeta),$$

es decir, $F(\zeta)$ es un polinomio trigonométrico.

5.3. Una vez estudiadas las funciones periódicas, demostremos que toda función meromorfa periódica $F(\zeta)$ de período 2π, puede expresarse en forma de un cociente de dos funciones enteras periódicas del mismo período 2π. Claro, este hecho no se desprende de la definición de función meromorfa, ya que por el mero hecho de ser una función periódica el cociente de dos funciones enteras no se puede sacar la conclusión de que cada una de estas funciones enteras es periódica (por ejemplo, $\operatorname{sen} z = \frac{z \operatorname{sen} z}{z}$, donde z, así como $z \operatorname{sen} z$, no son periódicas).

No obstante, consideremos la función $F^*(t)$ que corresponde a la función $F(z)$. Ya se demostró anteriormente que ésta es meromorfa en el recinto G, en el sentido de que no puede tener aquí otros puntos singulares más que polos. Por consiguiente, es también meromorfa en este recinto en el sentido de que $F^*(t)$ se expresa en forma de un cociente de dos funciones que son analíticas en el recinto G (ap. 3.4):

$$F^*(t) = \frac{\Phi^*(t)}{\Psi^*(t)}.$$

Por lo tanto, para $F(\zeta)$ obtenemos la expresión

$$F(\zeta) = F^*(e^{i\zeta}) = \frac{\Phi^*(e^{i\zeta})}{\Psi^*(e^{i\zeta})} = \frac{\Phi(\zeta)}{\Psi(\zeta)},$$

donde

$$\Phi(\zeta) = \Phi^*(e^{i\zeta}) \quad \text{y} \quad \Psi(\zeta) = \Psi^*(e^{i\zeta})$$

son, evidentemente, dos funciones periódicas enteras de período 2π.

El aserto en cuestión queda demostrado.

Ha resultado que *cualquier función meromorfa de período* 2π *se expresa en forma de un cociente de dos funciones enteras del mismo período*. Pero, como ya se vio anteriormente, toda función entera (periódica) puede expresarse por una serie de Fourier, convergente en todos los puntos. De aquí que, *toda función periódica meromorfa* $F(\zeta)$ *se expresa en forma de un cociente de dos series de Fourier, convergentes en todos los puntos:*

$$F(\zeta) = \frac{\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos k\zeta + b_k \operatorname{sen} k\zeta)}{\frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (A_k \cos k\zeta + B_s \operatorname{sen} k\zeta)}.$$

Resulta un caso particular importantísimo cuando $F(\zeta)$ posee una cantidad finita de polos en cada franja de período y, además, tiende a un límite finito o infinito en cada uno de los extremos de la franja de períodos. Entonces la función correspondiente $F^*(t)$ posee solamente una cantidad finita de polos en el recinto G y, además, los puntos 0 y ∞ son para ésta puntos regulares o polos. De aquí se deduce que $F^*(t)$ no posee otras singularidades en el plano ampliado t más que polos, por lo cual es una función racional de t. Por consiguiente, $F^*(t)$ es de la forma

$$F^*(t)=\frac{A_0+A_1t+\ldots+A_mt^m}{B_0+B_1t+\ldots+B_nt^n},$$

de donde

$$F(\zeta)=\frac{A_0+A_1e^{i\zeta}+\ldots+A_me^{im\zeta}}{B_0+B_1e^{i\zeta}+\ldots+B_ne^{in\zeta}}.$$

En resumen, en las hipótesis mencionadas $F(\zeta)$ es una función trigonométrica de ζ. Es obvio que cualquier función trigonométrica satisface a estas condiciones. Por lo tanto, *la clase de las funciones trigonométricas puede definirse como la clase de aquellas funciones meromorfas de período 2π que poseen solamente una cantidad finita de polos en cada franja de períodos y tiende a unos límites determinados en cada extremo de dicha franja.*

Todo lo expuesto se extiende a las funciones de período arbitrario ω mediante la transformación $z=\frac{\omega}{2\pi}\zeta$ o $\zeta=\frac{2\pi}{\omega}z$. En particular, para una función entera periódica $f(z)$ obtenemos el desarrollo

$$f(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}\left(a_k\cos k\frac{2\pi}{\omega}z+b_k\operatorname{sen}k\frac{2\pi}{\omega}z\right),$$

y para una función meromorfa, el desarrollo de la forma

$$f(z)=\frac{\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{1}^{\infty}\left(a_k\cos k\dfrac{2\pi}{\omega}z+b_k\operatorname{sen}k\dfrac{2\pi}{\omega}z\right)}{\dfrac{A_0}{2}+\sum\limits_{1}^{\infty}\left(A_k\cos k\dfrac{2\pi}{\omega}z+B_k\operatorname{sen}k\dfrac{2\pi}{\omega}z\right)}.$$

§ 6. FUNCIONES ELIPTICAS Y FUNCIONES LIGADAS CON ELLAS. THETA-FUNCIONES

6.1. Ocupémonos del estudio de las funciones doblemente periódicas (elípticas). Se establecerán aquí algunas propiedades generales de las funciones elípticas antes de exponer ejemplos concretos de las mismas. Sea $f(z)$ una función meromorfa doblemente periódica; sus períodos fundamentales los designaremos con $2\omega_1$ y $2\omega_3$, conservando la notación $2\omega_2$ para la suma $2\omega_1+2\omega_3$, la cual representa el vértice del paralelogramo fundamental de períodos Δ que es opuesto al origen de coordenadas. En virtud de las propiedades de los períodos establecidas en el ap. 5.2, los vectores $2\omega_1$ y $2\omega_3$ no están situados en una recta. Distribuiremos las notaciones $2\omega_1$ y $2\omega_3$ entre los dos períodos fundamentales de tal modo que el recorrido del contorno del paralelogramo de períodos, correspondiente al orden de los vértices 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, se efectúe en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj (la parte interior del paralelogramo queda a la izquierda del observador que hace el recorrido). Es fácil comprobar que esto ocurre cuando, y sólo cuando, el número complejo $\frac{2\omega_3}{2\omega_1}$ posee una parte imaginaria positiva: $\operatorname{Im}\left(\frac{2\omega_3}{2\omega_1}\right) > 0$.

Diremos que dos puntos distintos del plano z, z' y z'', son c o n g r u e n t e s (respecto de los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$) si, y sólo si, $z' - z''$ es cierto período: $z' - z'' = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_3$. Es evidente que el paralelogramo de períodos no contiene ningún par de puntos congruentes, mientras que los puntos que están situados en sus lados y son distintos de los vértices se dividen en pares de puntos congruentes entre sí, y los vértices del paralelogramo representan una cuaterna de puntos congruentes entre sí.

Convengamos en adjuntar a continuación a cada paralelogramo Δ_{m_1, m_2} con los vértices $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_3$, $(2m_1 + 1)\,\omega_1 + 2m_2\omega_3$, $(2m_1 + 1)\,\omega_1 + (2m_2 + 1)\,\omega_3$, $2m_1\omega_1 + (2m_2 + 1)\,\omega_3$ su extremo inferior de la izquierda $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_3$ y los puntos de los lados inferior e izquierdo, excluyendo de éstos sus extremos $(2m_1 + 1)\,\omega_1 + 2m_2\omega_3$ y $2m_1\omega_1 + (2\,m_2 + 1)\,\omega_3$. Debido a esto, queda adjuntado al paralelogramo solamente un punto de cada par o cuaterna de puntos del contorno congruentes entre sí. El paralelogramo de períodos completado con estos puntos, el cual, igual que anteriormente, lo representaremos por Δ_{m_1, m_2}, posee las siguientes propiedades evidentes:

a) dos puntos cualesquiera distintos del paralelogramo Δ_{m_1, m_2} no son congruentes entre sí;

b) para cada punto z' del plano, en el paralelogramo Δ_{m_1, m_2} siempre hay un punto z, y sólo uno, que es congruente con z'.

Obsérvese que si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son dos funciones elípticas con unos mismos períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$, entonces su suma, resta, producto y cociente (se forma este último solamente cuando el divisor *no* es idénticamente nulo) son funciones meromorfas con los mismos períodos, es decir, son funciones elípticas.

En general, efectuando operaciones racionales con cualquier cantidad de funciones elípticas $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ que tienen unos mismos períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ (excluyéndose la división por una función idénticamente nula), resulta una combinación racional de las funciones dadas

$$R[f_1(z), \ldots, f_n(z)],$$

la cual será una función meromorfa con los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$, o sea, será una función elíptica.

Consideremos también la derivada de una función elíptica $f(z)$. Siendo la derivada de una función meromorfa, ella misma es meromorfa. Además, de la igualdad

$$f(z+2m_1\omega_1+2m_3\omega_3)=f(z),$$

que se cumple para cualquier z, se deduce que también

$$f'(z+2m_1\omega_1+2m_3\omega_3)=f'(z)$$

para cualesquiera z, es decir, $f'(z)$ posee períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$. En resumen, la derivada de una función elíptica también es una función elíptica.

6.2. Demostremos los teoremas siguientes que expresan las propiedades principales de las funciones elípticas.

Teorema 1. *Una función elíptica* $f(z) \not\equiv \text{const}$ *no puede ser entera.*

En efecto, suponiendo que $f(z)$ es una función entera, hallaremos que en el paralelogramo cerrado de períodos $\overline{\Delta}$ ésta es continua y, por consiguiente, está acotada en valor absoluto:

$$|f(z)|<C.$$

Como en cualquier punto del plano z' la función toma el mismo valor que en el punto congruente z, perteneciente al paralelogramo Δ, la desigualdad obtenida tiene que cumplirse en todos los puntos del plano. Por consiguiente, según el teorema de Liouville, $f(z) \equiv \equiv \text{const}$, lo cual contradice a la hipótesis del teorema.

De la demostración del teorema 1 se deduce que una función elíptica $f(z) \not\equiv \text{const}$ tiene por lo menos un polo en el paralelogramo de períodos.

La cantidad total de polos pertenecientes a uno de los paralelogramos de períodos tiene que ser finito (suponiendo lo contrario, hallaríamos en el paralelogramo cerrado de períodos un punto de acumulación de polos).

Junto con el paralelogramo Δ, consideremos un paralelogramo D construido sobre otro par de períodos fundamentales:

$$2\Omega_1=m\cdot 2\omega_1+n\cdot 2\omega_3,\ 2\Omega_3=p\cdot 2\omega_1+q\cdot 2\omega_3, \qquad mq-np=1.$$

A cada polo $b \in D$ le corresponde un polo $\beta \in \Delta$ congruente con él, y sólo uno, y recíprocamente. Además, los órdenes de los polos b y β son iguales. En efecto, como $f(z)$ es periódica, su desarrollo de Laurent en un entorno de β se convierte en el desarrollo en un entorno de b mediante la sustitución de $z - b$ por $z - \beta$ sin que se alteren los coeficientes. De aquí se deduce que la suma de los órdenes de todos los polos que pertenecen a un mismo paralelogramo de períodos no depende de la elección de los períodos fundamentales. Esta suma (la cantidad de polos situados en un paralelogramo, teniendo en cuenta sus órdenes), se llama **orden de la función elíptica**.

Teorema 2. *La suma de los residuos de una función elíptica $f(z)$, respecto de todos los polos situados en el paralelogramo de períodos, es igual a cero.*

Para la demostración, es suficiente observar que la integral de $f(z)$ a lo largo de un circuito que contenga en su interior a todos

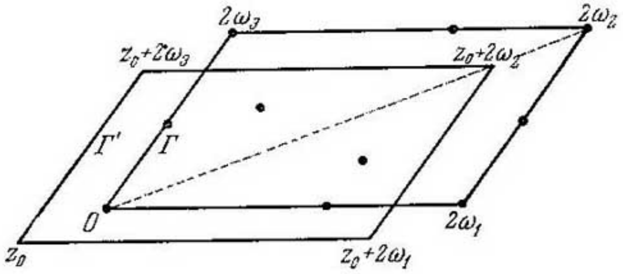

FIG. 43.

los polos pertenecientes a uno de los paralelogramos de períodos Δ y que no contenga a otros polos, es igual a cero. Si en el contorno Γ del paralelogramo cerrado Δ no hay ningún polo de la función $f(z)$, entonces este contorno servirá para la integración. Supongamos que en Γ hay polos de la función $f(z)$. Los que están situados en el lado de la derecha o en el lado superior del paralelogramo no se incluyen a Δ. En particular, no se incluyen a Δ los polos que pueden estar situados en el vértice inferior de la derecha o en el vértice superior de la izquierda del paralelogramo Δ. Por ello, se puede sustituir el circuito Γ por el contorno Γ' de un paralelogramo Δ' con los lados paralelos e iguales, respectivamente, a los lados del paralelogramo Δ, de modo que en Γ' no haya ningún polo de la función $f(z)$, y en el interior de Γ' estén contenidos todos los polos pertenecientes a Δ, y sólo estos polos (en la fig. 43 los polos están indicados con redondeles). Para esto es suficiente desplazar Γ por la diagonal del paralelogramo Δ en dirección desde el vértice $2\omega_2$ hacia el vértice O en una magnitud menor que la distancia desde el conjunto de polos, pertenecientes a Δ, hasta el conjunto de puntos pertenecientes al lado de la derecha y al lado superior. Los vértices del circuito de integración Γ' los denotaremos con z_0, $z_0+2\omega_1$, $z_0+2\omega_2$ y $z_0+2\omega_3$ (si Γ' coincide con Γ, entonces $z_0=0$). Resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0+2\omega_1} f(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0+2\omega_1}^{z_0+2\omega_2} f(z)\,dz+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0+2\omega_2}^{z_0+2\omega_3} f(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0+2\omega_3}^{z_0} f(z)\,dz. \qquad (6.2:1)$$

Demostremos que la suma de la primera y tercera integrales del segundo miembro, así como la suma de la segunda y cuarta integrales, es igual a cero.

En efecto, si la ecuación del lado que une los vértices z_0 y $z_0+2\omega_1$ es

$$z=z_0+2\omega_1 t, \qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0+2\omega_1} f(z)\,dz=\frac{2\omega_1}{2\pi i}\int_0^1 f(z_0+2\omega_1 t)\,dt.$$

La ecuación del lado que une los vértices $z_0+2\omega_3$, $z_0+2\omega_2$, se puede escribir en la forma

$$z=z_0+2\omega_3+(2\omega_2-2\omega_3)\,t=z_0+2\omega_3+2\omega_1 t, \qquad 0\leqslant t\leqslant 1$$

y, por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0+2\omega_2}^{z_0+2\omega_3} f(z)\,dz=\frac{-1}{2\pi i}\int_{z_0+2\omega_3}^{z+2\omega_2} f(z)\,dz=-\frac{2\omega_1}{2\pi i}\int_0^1 f(z_0+2\omega_3+2\omega_1 t)\,dt=$$
$$=-\frac{2\omega_1}{2\pi i}\int_0^1 f(z-2\omega_1 t)\,dt.$$

Vemos, pues, que la suma de las dos integrales calculadas es igual a cero. Del mismo modo nos convencemos que la suma de las dos integrales restantes del segundo miembro de la igualdad (6.2:1) es igual a cero. Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(z)\,dz=0,$$

es decir, la suma de los residuos de la función $f(z)$ respecto de todos los polos que están situados en el interior de Γ' es igual a cero, como se quería demostrar.

C o r o l a r i o. *El orden de una función elíptica* $f(z) \not\equiv$ const *no es menor que dos.*

En efecto, supongamos que $f(z)$ posee en el paralelogramo de períodos un solo polo β y que éste es simple. Entonces, la parte principal del desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en un entorno del punto β tiene que tener la forma $\frac{B}{z-\beta}$, donde B es el residuo de la función $f(z)$ respecto del punto β. Según lo demostrado en el teorema 2, $B = 0$, de donde se deduce que $f(z)$, en la realidad, no tiene polos en el paralelogramo de períodos y, por consiguiente, según el teorema 1, $f(z) \equiv$ const.

T e o r e m a 3. *La cantidad de A-puntos de una función elíptica* $f(z) \not\equiv$ const, *pertenecientes al paralelogramo de períodos, no depende de A y es igual al orden de la función elíptica (o sea, al menos es igual a dos).*

Para $A = \infty$ la tesis del teorema se deduce de la definición del orden de la función elíptica. Sea $A \neq \infty$; recordemos (ap. 3.5, cap. IV), que la integral $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-A}$, tomada en sentido positivo a lo largo del circuito que contiene en su interior a todos los polos y a todos los A-puntos pertenecientes a uno de los paralelogramos de períodos, es igual a la diferencia entre el número de polos y A-puntos. Por esta razón, es suficiente convencerse de que esta integral es igual a cero.

Por circuito de integración tomaremos el circuito Γ' introducido en la demostración del teorema 2, exigiendo además que en Γ' no estén situados los polos de la función $f(z)$, ni tampoco sus A-puntos *).

La función $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)-A}$, siendo una combinación racional de las funciones elípticas $f'(z)$ y $f(z)$, es también elíptica, con los mismos períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$. Por ello, se le puede aplicar toda la demostración del teorema 2 y, por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \varphi(z)\,dz = 0.$$

Con esto se termina la demostración del teorema 3.

T e o r e m a 4. *La suma de todos los A-puntos de una función elíptica* $f(z) \not\equiv$ const, *pertenecientes a un paralelogramo de períodos,*

---

*) Si el contorno Γ del paralelogramo Δ no satisface a estas condiciones, entonces lo desplazamos por la diagonal desde $2\omega_2$ hasta 0 en una magnitud menor que la distancia desde el conjunto de todos los polos y todos los A-puntos del paralelogramo Δ (para un A fijado) hasta el conjunto de los puntos del lado de la derecha y del lado superior de este paralelogramo.

es congruente a la suma de todos los polos, pertenecientes también a un paralelogramo de períodos.

Para $A = \infty$ la tesis es evidente; supongamos que $A \neq \infty$. Consideremos el circuito Γ' que se empleó en la demostración del teorema 3, y formemos la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz$. Según el ap. 3.5, cap. IV, esta integral es igual a la diferencia entre la suma de todos los A-puntos situados en el interior de Γ' y la suma de todos los polos situados también en el interior de Γ'. Por ello, es suficiente demostrar que la integral es igual a algún período de la función $f(z)$. Representando, para abreviar, los lados del circuito Γ' por I, II, III y IV, de modo que sus puntos iniciales y finales sean: z_0 y $z_0 + 2\omega_1$ para el segmento I, $z_0 + 2\omega_1$ y $z_0 + 2\omega_2$ para el segmento II, $z_0 + 2\omega_3$ y $z_0 + 2\omega_2$ para el segmento III y z_0 y $z_0 + 2\omega_3$ para el segmento IV, respectivamente, obtendremos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{I}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{II}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz - {}$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{III}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{IV}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz. \qquad (6.2.2)$$

Demostremos que la suma de la primera y tercera integrales del segundo miembro, así como la suma de la segunda y cuarta integrales, representan unos períodos de la función $f(z)$. En efecto, el segmento I tiene la ecuación $z = z_0 + 2\omega_1 t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{I}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz = \frac{2\omega_1}{2\pi i}\int\limits_0^1 (z_0 + 2\omega_1 t)\frac{f'(z_0+2\omega_1 t)}{f(z_0+2\omega_1 t)-A}\,dt.$$

La ecuación del segmento III se puede expresar en la forma:

$$z = z_0 + 2\omega_3 + (2\omega_2 - 2\omega_3)\,t = z_0 + 2\omega_3 + 2\omega_1 t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

de donde

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{III}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz =$$
$$= -\frac{2\omega_1}{2\pi i}\int\limits_0^1 (z_0 + 2\omega_3 + 2\omega_1 t)\frac{f'(z_0+2\omega_3+2\omega_1 t)}{f(z_0+2\omega_3+2\omega_1 t)-A}\,dt =$$
$$= -\frac{2\omega_1}{2\pi i}\int\limits_0^1 (z_0 + 2\omega_3 + 2\omega_1 t)\frac{f'(z_0+2\omega_1 t)}{f(z_0+2\omega_1 t)-A}\,dt.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{I}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{III}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz=$$

$$=-\frac{2\omega_1}{2\pi i}2\omega_3\int\limits_0^1\frac{f'(z_0+2\omega_1 t)}{f(z_0+2\omega_1 t)-A}\,dt=-\frac{2\omega_3}{2\pi i}\left[\operatorname{Ln}\{f(z_0+2\omega_1 t)-A\}\right]_0^1=$$

$$=-\frac{2\omega_3}{2\pi i}\operatorname{Ln}\frac{f(z_0+2\omega_1)-A}{f(z_0)-A}=-\frac{2\omega_3}{2\pi i}\operatorname{Ln}1=$$

$$=-\frac{2\omega_3}{2\pi i}2k\pi i=-2k\omega_3=\text{período de } f(z).$$

Del mismo modo hallamos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{II}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{IV}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz=2l\omega_1=\text{ período de } f(z).$$

Así, pues,

$$\frac{1}{2\pi i}\int z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz=2l\omega_1-2k\omega_3=\Omega,$$

donde Ω es cierto período de la función $f(z)$.

El teorema queda demostrado.

6.3. Para la construcción de las funciones elípticas nos hará falta también la siguiente proposición.

L e m a. *La serie*

$$\sum{}'\frac{1}{|\Omega|^{\lambda}}, \tag{6.3:1}$$

donde la sumación se extiende a todos los periodos

$$\Omega=2k\omega_1+2l\omega_3$$

(el signo $'$ sobre la suma denota que se excluye el valor $\Omega=0$), *es convergente si* $\lambda>2$.

Obsérvese que todos los períodos Ω sin excepción, distintos de cero, están situados en los contornos de ciertos paralelogramos que son semejantes entre sí, con los centros en el origen de coordenadas; tres de ellos están representados en la fig. 44. El primero de los mencionados contiene en su contorno ocho períodos distintos, el segundo contiene dieciseis. Si suponemos que el contorno del k-ésimo paralelogramo contiene $8k$ períodos, entonces, proyectándolos sobre el $(k+1)$-ésimo paralelogramo en direcciones paralelas a $2\omega_1$ y $2\omega_3$, obtendremos que a cada período situado en el contorno del k-ésimo paralelogramo y distinto de los vértices, le corresponde en el contorno del $(k+1)$-ésimo paralelogramo un período, mientras que a cada uno de los cuatro vértices le corresponden dos períodos (véase la fig. 44, donde se ha supuesto que $k = 2$ y la correspondencia se indica con flechas). Si a todo esto se añaden los cuatro vértices del $(k + 1)$-ésimo paralelogramo, obtendremos en su contorno ocho períodos más que en el contorno del paralelogramo precedente, es decir, en total $8(k + 1)$ períodos.

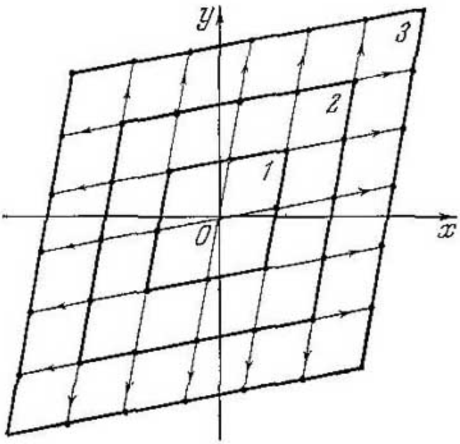

FIG. 44.

En resumen, la cantidad de períodos crece en progresión aritmética con la diferencia 8. Como los paralelogramos son semejantes y su situación es homotética respecto del punto $z = 0$, designando con d la distancia del origen de coordenadas hasta el contorno del primer paralelogramo, tendremos que la distancia desde el mismo punto hasta el contorno del k-ésimo paralelogramo es igual a kd. Por lo tanto, para el módulo de cualquier período Ω situado en el último circuito, se tiene la desigualdad

$$|\Omega| \geqslant kd,$$

de donde

$$\frac{1}{|\Omega|^{\lambda}} \leqslant \frac{1}{k^{\lambda} d^{\lambda}}$$

y, por consiguiente, la suma de los términos de la serie (6.3:1) que corresponden a todos los $8k$ períodos situados en el contorno del k-ésimo paralelogramo no es superior a

$$\frac{8k}{k^{\lambda}d^{\lambda}}=\frac{8}{d^{\lambda}k^{\lambda-1}}.$$

De aquí se deduce, finalmente, que la suma parcial de los términos de la serie (6.3:1) que corresponde a los períodos que están situados en el interior y en los lados del k-ésimo paralelogramo, no es superior a

$$\frac{8}{d^{\lambda}}\sum_{1}^{k}\frac{1}{j^{\lambda-1}}.$$

Pero la serie $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{j^{\lambda-1}}$ es convergente para $\lambda>2$; por esta razón, la serie (6.3:1) también es convergente para $\lambda>2$, con lo cual se termina la demostración del lema.

Si designamos con D el mayor de los módulos de los períodos situados en el contorno del primer paralelogramo, hallaremos del mismo modo que la suma parcial de la serie (6.3:1) que corresponde a todos los períodos situados en el interior y en los lados del k-ésimo paralelogramo no es inferior a

$$\frac{8}{D^{\lambda}}\sum_{1}^{k}\frac{1}{j^{\lambda-1}}.$$

De aquí se deduce que la serie (6.3:1) es divergente si $\lambda\leqslant 2$. Así, pues, *el exponente de convergencia de la sucesión* $\{\Omega\}$ (los períodos son distintos de cero y están ordenados por módulos no decrecientes) *es igual a* 2.

Del lema se desprende que la serie

$$\sum\frac{1}{(z-\Omega)^{3}}\tag{6.3.2}$$

es absoluta y uniformemente convergente en cada recinto acotado del plano (donde cada vez se excluye una cantidad finita de términos de la serie que tienen polos en este recinto). Es suficiente suponer que z pertenece a un círculo fijado arbitrario con el centro en el origen de coordenadas $|z|<R$, y considerar los términos de la serie que corresponden a los períodos Ω que están situados fuera de un círculo de radio $2R$. Entonces, para estos términos

$\left|\frac{z}{\Omega}\right| < \frac{1}{2}$, y obtenemos la acotación siguiente:

$$\left|\frac{1}{(z-\Omega)^3}\right| \leqslant \frac{1}{(|\Omega|-|z|)^3} = \frac{1}{\left(1-\frac{|z|}{|\Omega|}\right)^3}\frac{1}{|\Omega|^3} < \frac{8}{|\Omega|^3},$$

de donde, en virtud del lema, se deduce la convergencia absoluta y uniforme de la serie (6.3:2).

Designando la suma de la serie mediante $f(z)$, representémosla en el círculo $|z| < R$ en la forma

$$f(z) = \sum_{|\Omega| \leqslant R} \frac{1}{(z-\Omega)^3} + \sum_{|\Omega| > R} \frac{1}{(z-\Omega^3)}.$$

La primera suma del segundo miembro es una función racional que tiene un polo de tercer orden en cada período perteneciente al círculo $|z| < R$. La parte principal correspondiente tiene la forma $\frac{1}{(z-\Omega)^3}$. La segunda suma solamente se diferencia en un número finito de términos de la serie $\sum\limits_{|\Omega|>2R} \frac{1}{(z-\Omega)^3}$, cuya convergencia uniforme en el círculo $|z| < R$ acabamos de establecer. Por consiguiente, ésta es una función analítica en el círculo $|z| < R$. Así, pues, la función $f(z)$ es analítica en cualquier círculo $|z| < R$, a excepción de polos de tercer orden en todos los períodos pertenecientes al círculo indicado. Por consiguiente, ésta es una función meromorfa (en todo el plano finito).

Demostremos que $2\omega_1$ y $2\omega_3$ son períodos de la función $f(z)$. En efecto,

$$f(z+2\omega_j) = \sum \frac{1}{[z-(\Omega-2\omega_j)]^3}. \qquad (6.3:3)$$

Pero $\Omega - 2\omega_j$ también es uno de los períodos dados: $\Omega - 2\omega_j = \Omega'$, y cuando Ω recorre el conjunto de todos los períodos dados, Ω' recorre también todo este conjunto, puesto que la transformación $\Omega - 2\omega_j = \Omega'$ significa un desplazamiento del retículo de períodos, según el cual éste se transforma en sí mismo. Por lo tanto, la serie (6.3:3) solamente se diferencia en el orden de los términos de la serie absolutamente convergente (6.3:2), es decir, su suma es igual a $f(z)$. En resumen,

$$f(z+2\omega_j) = f(z) \qquad (j = 1, 3).$$

Demostremos que $2\omega_1$ y $2\omega_3$ es un par de períodos fundamentales de la función $f(z)$. En efecto, sea ω un período cualquiera de esta función. Como Ω es un polo de la función $f(z)$, $\Omega + \omega$ tiene que ser uno de los polos, o sea,

$$\Omega + \omega = \Omega',$$

de donde

$$\omega = \Omega' - \Omega = 2m_1\omega_1 + 2m_3\omega_3.$$

Por consiguiente, cualquier período de la función $f(z)$ es combinación lineal de los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ con coeficientes enteros m_1 y m_3.

De aquí se deduce que $f(z)$ es una función meromorfa con los períodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$.

Por lo tanto, hemos construido una función elíptica que posee unos períodos fundamentales prefijados. Cada vértice del paralelogramo fundamental 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ es un polo de tercer orden para $f(z)$, pero de todos estos cuatro polos solamente uno, el que está situado en el origen de coordenadas, se incluye al paralelogramo fundamental, mientras que los otros tres pertenecen a los paralelogramos vecinos. De esto se deduce que $f(z)$ es una función elíptica de tercer orden.

Obsérvese también que ésta es una función impar. En efecto,

$$f(-z) = \sum \frac{1}{(-z-\Omega)^3} = -\sum \frac{1}{[z-(-\Omega)]^3}.$$

Pero el conjunto de todos los números $-\Omega$ coincide con el conjunto de todos los Ω; por esta razón, la serie $\sum \frac{1}{[z-(-\Omega)]^3}$ se diferencia de la serie (6.3:2) solamente en el orden de los términos y su suma es $f(z)$. De aquí que

$$f(-z) = -f(z),$$

es decir, $f(z)$ es una función impar.

Partiendo de esta función e integrando se puede obtener una función elíptica de segundo orden (par).

En efecto, sea z_0 un punto arbitrario del plano y distinto de los polos de la función $f(z)$. Integrando término a término la serie (6.3:2) a lo largo de alguna curva rectificable γ que no pase por los polos y que una z_0 con otro punto z, también distinto de los polos de la función $f(z)$, resulta:

$$\varphi(z) = C + \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = C - \frac{1}{2}\sum \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{(z_0-\Omega)^2}\right]. \qquad (6.3:4)$$

La serie (6.3:4), que se ha obtenido al integrar la serie uniformemente convergente (6.3:2), también es uniformemente convergente en cualquier recinto acotado, si se desprecia una cantidad finita de términos de la serie que tienen polos en este recinto. Por consiguiente, ésta es una función meromorfa que tiene un polo de segundo orden en cada punto Ω. Escribamos $\varphi(z)$ en la forma

$$\varphi(z) = C - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}\sum{}' \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{(z_0-\Omega)^2}\right], \qquad (6.3{:}4')$$

donde la suma se extiende a todos los puntos Ω distintos del origen de coordenadas. De la última fórmula se deduce que $\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}$ es una función meromorfa, para la cual el origen de coordenadas es un punto regular. Su valor para $z = 0$ es igual a

$$\left[\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}\right]_{z=0} = C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}\sum{}' \left[\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{(z_0-\Omega)^2}\right]. \qquad (6.3{:}4'')$$

Elijamos la constante de integración C de tal manera que este valor sea igual a cero. Entonces, restando término a término (6.3:4″) de (6.3:4′), obtendremos:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right]\right\}.$$

La función meromorfa que figura entre corchetes se diferencia de $\varphi(z)$ solamente en un factor constante. Esta función, introducida por Weierstrass, se representa por $\wp(z)$ (se lee «pe de z», y el signo $\wp$ se llama **signo de Weierstrass**). Así, pues, según la definición,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right]. \qquad (6.3{:}5)$$

Esta es una función meromorfa con polos de segundo orden en cada uno de los puntos Ω (incluyendo el origen de coordenadas). La parte principal correspondiente al polo Ω tiene la forma $\frac{1}{(z-\Omega)^2}$. Demostremos que esta serie (6.3:5) es absolutamente convergente. En efecto, considerando solamente los términos de la serie para los cuales $|\Omega| > 2|z|$, obtenemos:

$$\left|\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right| = \left|\frac{(2\Omega - z)z}{\Omega^2(z-\Omega)^2}\right| \leqslant \frac{2|\Omega|\left(1+\frac{|z|}{2|\Omega|}\right)|z|}{|\Omega|^4\left(1-\frac{|z|}{|\Omega|}\right)^2} < \frac{10|z|}{|\Omega|^3},$$

de donde, en virtud del lema del presente apartado se deduce la convergencia absoluta de la serie (6.3:5). Fácilmente se observa que $\wp(z)$ es una función par; en efecto,

$$\wp(-z)=\frac{1}{z^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(z+\Omega)^2}-\frac{1}{\Omega^2}\right]=$$
$$=\frac{1}{z^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{[z-(-\Omega)]^2}-\frac{1}{(-\Omega)^2}\right],$$

y la última serie se diferencia de la serie (6.3:5) solamente en el orden de los términos, por lo cual su suma es $\wp(z)$.

La derivada $\wp'(z)$ tiene la forma

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}-\sum{}'\frac{2}{(z-\Omega)^3}=-2\sum\frac{1}{(z-\Omega)^3}=-2f(z),$$

es decir, se diferencia solamente en un factor numérico de la función elíptica $f(z)$ de períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$, considerada anteriormente. Por consiguiente,

$$\wp'(z+2\omega_j)-\wp'(z)=0 \qquad (j=1,\ 3),$$

de donde, integrando:

$$\wp(z+2\omega_j)-\wp(z)=C_j.$$

Poniendo aquí $z=-\omega_j$, resulta:

$$\wp(\omega_j)-\wp(-\omega_j)=C_j,$$

o bien, como $\wp(z)$ es par:

$$C_j=0 \qquad (j=1,\ 3).$$

De aquí se deduce que

$$\wp(z+2\omega_j)=\wp(z),$$

o sea, $\wp(z)$ es una función doblemente periódica de períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$. Del mismo modo que en el caso de la función $f(z)$, nos convencemos de que $2\omega_1$ y $2\omega_3$ son los períodos fundamentales de la función $\wp(z)$. De aquí que al paralelogramo fundamental de períodos de $\wp(z)$ con los vértices $0,\ 2\omega_1,\ 2\omega_2,\ 2\omega_3$ se le debe adjuntar solamente un polo doble en el origen de coordenadas, o sea, $\wp(z)$ es una función elíptica de segundo orden.

He aquí un resumen de todo lo que hemos conseguido demostrar: *$\wp(z)$ es una función elíptica par de segundo orden, de períodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$, con polos dobles en todos los puntos $\Omega=2m_1\omega_1+2m_3\omega_3$ y las partes principales correspondientes de la forma* $\frac{1}{(z-\Omega)^2}$.

De la construcción misma de esta función o directamente de la ecuación (6.3:5) se deduce que *la diferencia* $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ *se anula para* $z = 0$. *La derivada de la función* $\wp(z)$

$$\wp'(z) = -2 \sum \frac{1}{(z-\Omega)^3} \tag{6.3:6}$$

es una función elíptica impar de tercer orden, de períodos fundamentales $2\omega_1$ *y* $2\omega_3$, *con polos triples en todos los puntos* Ω *y con las partes principales correspondientes de la forma* $-\frac{2}{(z-\Omega)^3}$.

Estas dos funciones, $\wp(z)$ y $\wp'(z)$, son las fundamentales en la teoría de las funciones elípticas. Ambas se llaman **funciones elípticas de Weierstrass.**

Como el orden de la función $\wp'(z)$ es igual a tres, del teorema 3, ap. 6.1, se deduce que para cada A esta función tiene tres A-puntos en el paralelogramo de períodos. Si $A = \infty$, estos tres puntos se confunden en uno — en un polo triple de la función $\wp'(z)$. Sea $A = 0$, entonces tenemos que obtener tres ceros de la función $\wp'(z)$.

De la relación

$$\wp'(-z) = -\wp'(z)$$

se deduce que

$$\wp'(2\omega_j - z) = -\wp'(z) \qquad (j = 1, 2, 3),$$

de donde, para $z = \omega_j$ resulta:

$$\wp'(\omega_j) = -\wp'(\omega_j)$$

y como $\wp'(\omega_j) \neq \infty$, se tiene:

$$\wp'(\omega_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Hemos obtenido tres ceros ω_1, ω_2, ω_3, pertenecientes al paralelogramo fundamental de períodos con los vértices 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$ y $2\omega_3$. Uno de ellos, ω_2, está situado en el centro del paralelogramo, y los otros dos, ω_1 y ω_3, en los puntos medios de los lados. Está claro que cada uno de estos ceros es simple. En caso contrario la cantidad total de ceros de $\wp'(z)$ en el paralelogramo de períodos sería mayor que tres, lo cual es imposible. Obsérvese que la suma de los ceros hallados $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2\omega_1 + 2\omega_3$ se diferencia de la suma de los polos $0 + 0 + 0 = 0$, en un período, como tiene que ser según el teorema 4 (ap. 6.1).

El orden de la función $\wp(z)$ es igual a dos. Por consiguiente, para cualquier A existen dos A-puntos de esta función en el paralelogramo de períodos. Si $A = \infty$, ambos puntos se confunden en uno — en un polo doble (es decir, en el origen de coordenadas, si se trata del paralelogramo fundamental de períodos). Si A tiene uno de los valores $\wp(\omega_j) = e_j$, los A-puntos correspondientes se confunden dos a dos en los puntos ω_j ($j = 1, 2, 3$), puesto que en cada uno de ellos $\wp'(\omega_j)$ se anula, mientras que $\wp''(\omega_j) \neq 0$, es decir, los puntos ω_j son dobles para $\wp(z)$. Para todos los demás valores de A ($A \neq \infty$, $A \neq e_j$, $j = 1, 2, 3$) tenemos que tener pares de A-puntos distintos entre sí. Suponiendo lo contrario, obtendríamos que $\wp'(z)$ tendría ceros en el paralelogramo de períodos además de los tres puntos ω_1, ω_2 y ω_3, lo cual es imposible.

Señalemos la posición de cada par en el paralelogramo de períodos. Como la función $\wp(z)$ es par, se tiene:

$$\wp(-z) = \wp(z),$$

de donde se deduce que

$$\wp(2\omega_j - z) = \wp(z) \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{6.3:7}$$

es decir, $\wp(z)$ toma valores iguales en los puntos z y $2\omega_j - z$, los cuales son simétricos respecto de ω_j. Sea $A \neq \infty$ y $A \neq e_j$; si z_0 es uno de los A-puntos de la función $\wp(z)$, entonces $z_0 \neq 0$ y $z_0 \neq \omega_j$. Si z_0 está situado en el interior del paralelogramo fundamental de períodos, entonces $2\omega_2 - z_0$ también está situado en el interior del mismo, simétricamente respecto del centro ω_2 del paralelogramo y, por consiguiente, es el segundo A-punto de la función $\wp(z)$. Si z_0 está situado en el lado que une los vértices 0 y $2\omega_j$ ($j = 1, 3$) del paralelogramo fundamental, entonces el punto $2\omega_j - z_0$ está situado en el mismo lado simétricamente respecto del punto medio ω_j de este lado y, por consiguiente, es el segundo A-punto de la función $\wp(z)$. En resumen, los A-puntos de la función $\wp(z)$ para todos los valores complejos posibles de A están situados simétricamente respecto del centro del paralelogramo (en el interior de él) o respecto de los puntos medios de sus lados (en los lados). Los puntos que están situados en el centro o en los puntos medios de los lados son dobles, del mismo modo que es doble también el punto que está situado en el ángulo inferior de la izquierda del paralelogramo (polo doble).

En la figura 45 está representada la superficie $u = |\wp(z)|$, que es el relieve de la función $\wp(z)$*).

Empleemos los resultados obtenidos para estudiar más detalladamente el comportamiento de la función $\wp(z)$ en dos casos particulares importantes. Supongamos primero que $2\omega_1$ es un número real positivo 2α ($\alpha > 0$) y que $2\omega_3$ es un número imaginario puro con la parte imaginaria positiva: $2\omega_3 = 2\beta i$ ($\beta > 0$). En este caso los paralelogramos de períodos son rectángulos.

Estudiemos el comportamiento de la función $\wp(z)$ en el rectángulo D: $0 \leqslant x \leqslant \alpha$, $0 \leqslant y \leqslant \beta$, que forma una cuarta parte del

*) El dibujo se ha adaptado de las «Tablas de funciones» de Jahnke y Emde.

paralelogramo fundamental de períodos. Debido a lo demostrado anteriormente, no pueden pertenecer a este rectángulo dos A-puntos distintos de la función $\wp(z)$, a excepción de los puntos dobles que están situados en los vértices del rectángulo. Por lo tanto, $\wp(z)$ toma valores distintos en diferentes puntos del rectángulo D, o sea,

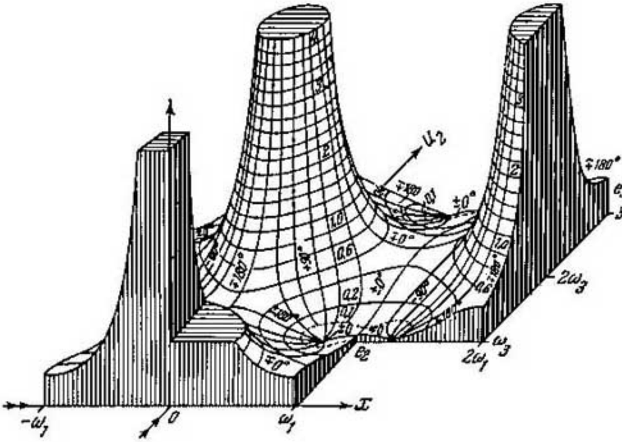

FIG. 45.

es una función univalente en este recinto. Por consiguiente, $\wp(z)$ transforma D biunívoca y conformemente en cierto recinto G del plano z; además, la frontera del recinto G es la imagen de la frontera del rectángulo D (véase el ap. 1.1, cap. quinto). Así, pues, no nos queda más que estudiar la imagen de la frontera del rectángulo D.

Partiremos de la fórmula

$$\wp(x+iy)=\frac{1}{(x+iy)^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(x+iy-2m\alpha-2ni\beta)^2}-\frac{1}{(2m\alpha+2ni\beta)^2}\right].$$

De ésta se deduce que los valores $\wp(x+iy)$ y $\wp(x-iy)$ son números complejos conjugados. En efecto,

$$\overline{\wp(x-iy)}=\frac{1}{(x-iy)^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(x-iy-2m\alpha+2ni\beta)^2}-\frac{1}{(2m\alpha-2ni\beta)^2}\right].$$

Pero los números $2m\alpha-2ni\beta$ para todas las combinaciones posibles de números enteros m y n forman, evidentemente, el mismo conjunto de números (los períodos de la función $\wp(z)$) que los números

$2m\alpha + 2ni\beta$. Por ello, todos los términos de la última serie sólo se diferencian en el orden de los términos de la serie

$$\wp(x-iy) = \frac{1}{(x-iy)^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(x-iy-2m\alpha-2ni\beta)^2} - \frac{1}{(2m\alpha+2ni\beta)^2}\right]$$

y, por consiguiente,

$$\overline{\wp(x+iy)} = \wp(x-iy),$$

es decir, $\wp(x+iy)$ y $\wp(x-iy)$ son números complejos conjugados.

Hagamos aquí, en particular, $y=0$; obtendremos:

$$\overline{\wp(x)} = \wp(x),$$

es decir, $\wp(x)$ es un número real para cualquier x real.

Supongamos ahora que $z=\alpha+iy$. Entonces, por una parte

$$\overline{\wp(\alpha+iy)} = \wp(\alpha-iy),$$

y por otra,

$$\wp(\alpha+iy) = \wp(\alpha-iy),$$

puesto que los puntos $\alpha+iy$ y $\alpha-iy$ son simétricos respecto del semiperíodo $\omega_1=\alpha$. Por esta razón, los valores $\wp(\alpha+iy)$ también son reales para cualquier y.

Observando que

$$\wp(x+i\beta) = \wp(x-i\beta)$$

(puesto que $2i\beta$ es el período de la función $\wp(z)$), sacamos la conclusión de que los valores $\wp(x+i\beta)$ también son reales para cualquier x.

Finalmente, como

$$\wp(iy) = \wp(-iy)$$

(puesto que la función $\wp(z)$ es par), hallamos que todos los valores $\wp(iy)$ son reales.

Por lo tanto, observamos que la función $\wp(z)$ toma valores reales en los lados del rectángulo de períodos y en sus líneas medias. En particular, todos los valores que toma la función $\wp(z)$ en los lados del rectángulo D son reales. Por ello, cuando el punto z describe el contorno del rectángulo D en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, comenzando desde el vértice $z=0$; el punto $w=\wp(z)$ se mueve de un modo determinado sobre el eje real, comenzando desde $\wp(0)=\infty$ y terminando en este mismo punto. Además, $w=\wp(z)$ se desplaza todo el tiempo hacia un mismo lado, es decir, no pasa dos veces por un mismo punto. Esto se debe a que los valores de $\wp(z)$ en el contorno del rectángulo D se toman también una vez en cada una de las partes de sus líneas medias y de sus lados que no pertenecen a D. Por lo tanto, variando continuamente desde $-\infty$ hasta ∞, el punto $w=\wp(z)$ tiene que describir una sola vez tódo el eje real. Para los valores reales $z = x$ próximos a cero, en la expresión de $\wp(x)$ predomina el término $\frac{1}{x^2}$, de donde se deduce que el punto w parte de $+\infty$ y se mueve luego por el eje real dirigiéndose hacia $-\infty$ $\Big($cuando $z = iy$ e y es próximo a cero, entonces en la expresión de $\wp(iy)$ predomina el término $-\frac{1}{y^2}\Big)$, pasando por los puntos intermedios siguientes

$$\wp(\omega_1) = \wp(\alpha) = e_1, \quad \wp(\omega_2) = \wp(\alpha + \beta i) = e_2, \quad \wp(\omega_3) = \wp(\beta i) = e_3.$$

en el orden en que están escritos. Como este orden es de decrecimiento, en el caso dado se tiene:

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Como el contorno del rectángulo D se transforma en el eje real, este rectángulo se transforma en un semiplano. Pero el rectángulo D

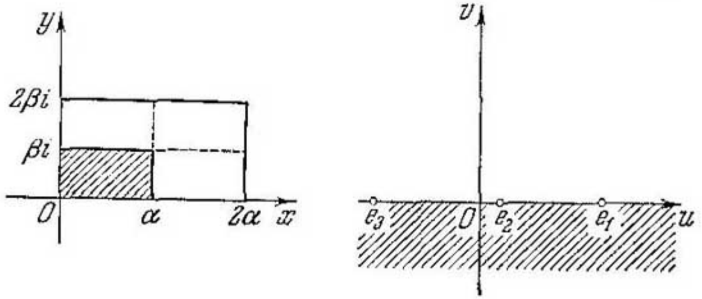

FIG. 46.

queda a la izquierda del observador que recorre su contorno en el sentido indicado. Por lo tanto, el semiplano correspondiente tiene que quedar a la izquierda del observador que recorre el eje real en dirección de decrecimiento, es decir, éste es el semiplano inferior. Por consiguiente, hemos demostrado que *la función $w = \wp(z)$, de períodos fundamentales 2α y $2\beta i$, transforma conformemente el rectángulo $0 < x < \alpha$, $0 < y < \beta$ en el semiplano inferior* (fig. 46).

Como $\wp(z)$ toma valores iguales en los puntos que son simétricos respecto de los semiperíodos, sacamos la conclusión de que esta función toma dos veces todos los valores reales del intervalo $(e_1, +\infty)$ en el lado del paralelogramo fundamental $0 \leqslant x \leqslant 2\alpha$, $y = 0$, toma dos veces los valores del intervalo (e_2, e_1) en la línea media $x = \alpha$, $0 \leqslant y \leqslant 2\beta$, toma dos veces los valores del intervalo

(e_3, e_2) en la línea media $0 \leqslant x \leqslant 2\alpha$, $y = \beta$, y, finalmente, toma dos veces los valores reales del intervalo $(-\infty, e_3)$ en el lado $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 2\beta$.

Como $\wp(z)$ es una función de segundo orden, en todos los demás puntos del paralelogramo fundamental ésta toma valores imagina-

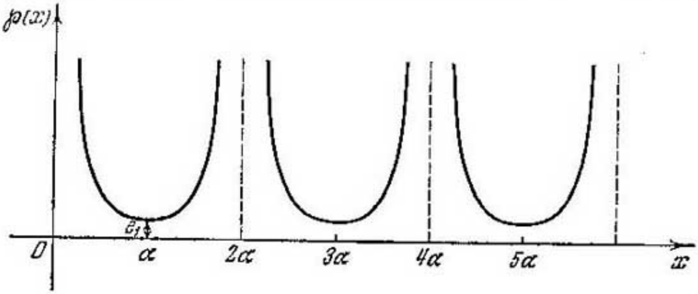

FIG. 47.

rios. En las figuras 47—50 están representadas las gráficas de las funciones $\wp(x)$, $\wp(\alpha + iy)$, $\wp(x + i\beta)$, $\wp(iy)$, las cuales dan una idea completa de todos los valores reales de la función $\wp(z)$ en el caso en que uno de los períodos fundamentales es real y el

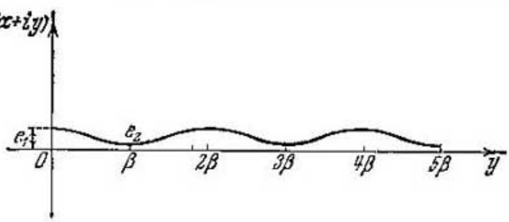

FIG. 48.

otro imaginario puro. Naturalmente, hay que tener presente que la función, por ser periódica, toma estos mismos valores en un conjunto infinito de rectas paralelas al eje real o imaginario.

Veamos ahora el caso en que $\wp(z)$ posee un par de períodos conjugados $2\omega_1 = 2a - 2bi$ y $2\omega_3 = 2a + 2bi$. Entonces, los paralelogramos de períodos son rombos cuyas diagonales son paralelas al eje real e imaginario, respectivamente.

En este caso $\wp(z)$ también posee un período real $4a = 2\omega_3 + 2\omega_1$ y un período imaginario puro $4bi = 2\omega_3 - 2\omega_1$. Pero, a

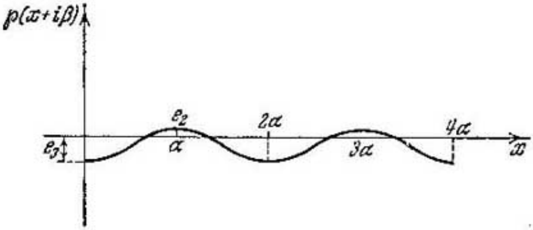

FIG. 49.

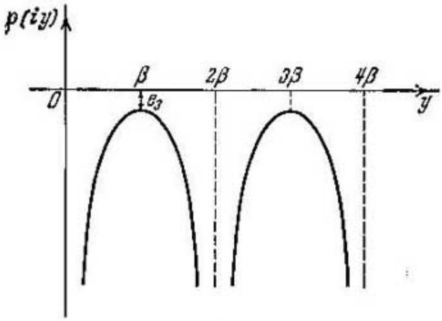

FIG. 50.

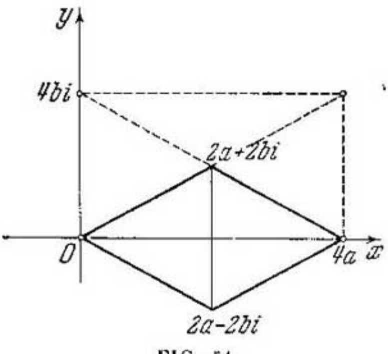

FIG. 51.

diferencia del caso anterior, estos períodos no son fundamentales, puesto que el rectángulo construido sobre los lados $4a$ y $4bi$ contienen en su interior (en su centro) un período, precisamente $2a + 2bi$ (fig. 51).

De un modo semejante a lo que se hizo anteriormente, de la fórmula

$$\wp(x+iy) = \frac{1}{(x+iy)^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{[x+iy-2(a-bi)m-2(a+bi)n]^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{[2(a-bi)m+2(a+bi)n]^2} \right\}$$

deducimos que

$$\overline{\wp(x+iy)} = \wp(x-iy).$$

De aquí, en particular, se deduce que

$$\overline{\wp(x)} = \wp(x),$$

es decir, que $\wp(x)$ es real para cualquier x.

Por otra parte,

$$\overline{\wp(2a+iy)} = \wp(2a-iy) \quad \text{y} \quad \wp(2a+iy) = \wp(3a-iy)$$

(puesto que los puntos $2a + iy$ y $2a - iy$ son simétricos respecto del semiperíodo $\omega_2 = 2a$). Por ello $\wp(2a + iy)$ también toma

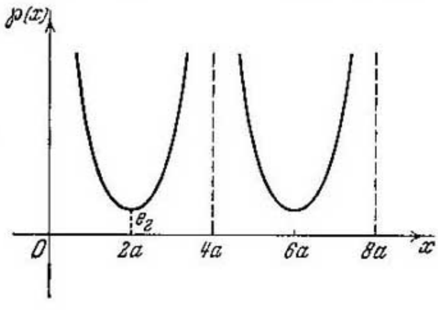

FIG. 52.

valores reales para cualesquiera y. Así, pues, $\wp(z)$ toma valores reales en cada una de las diagonales del rombo. En el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2a$, $y = 0$ decrece desde $+\infty$ hasta $\wp(\omega_2) = \wp(2a) = e_2$ y después en el segmento $x = 2a$, $0 \leqslant y \leqslant 2b$ continúa decreciendo desde e_2 hasta $-\infty$. De aquí se deduce que $\wp(z)$ toma dos veces cada valor real mayor que e_2 en la diagonal del paralelogramo fundamental situada en el eje real, y toma también dos veces cada valor real menor que e_2 en la diagonal del paralelogramo (del rombo) que es perpendicular al eje real. Por lo tanto, en los puntos del paralelogramo fundamental que no están situados en la diagonal,

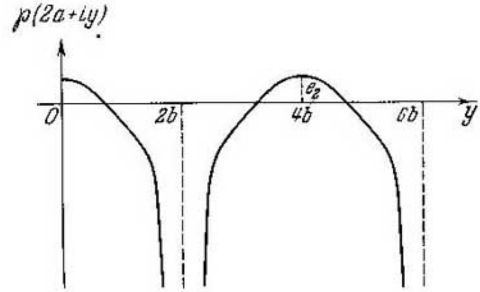

FIG. 53.

esta función toma valores imaginarios. En particular, son imaginarios y, además, conjugados, los números

$$e_1 = \wp(\omega_1) = \wp(a - bi) \quad \text{y} \quad e_3 = \wp(\omega_3) = \wp(a + bi).$$

Como $\wp(z)$ es periódica, en el eje imaginario esta función también toma valores reales

$$\wp(iy) = \wp[2a + i(y + 2b)].$$

En las figuras 52—53 están representadas las gráficas de $\wp(x)$ y $\wp(2a + iy)$.

6.4. De la fórmula (6.3:5) es fácil obtener el desarrollo de la función $\wp(z)$ en serie de Laurent en un entorno del origen de coordenadas. Con este fin, desarrollemos la función $\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}$ $(\Omega \neq 0)$ en serie de potencias de z:

$$\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{\Omega^2}\left[\left(1 - \frac{z}{\Omega}\right)^{-2} - 1\right] = \sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{\Omega^{n+2}} z^n.$$

La última serie es convergente en el círculo $|z| < |\Omega|$. De aquí se desprende para $\wp(z)$ el siguiente desarrollo en serie de potencias de z

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{2z}{\Omega^3} + \frac{3z^2}{\Omega^4} + \ldots + \frac{(n+1)z^n}{\Omega^{n+2}} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{z^2} + 2\sum{}' \frac{1}{\Omega^3} z + 3\sum{}' \frac{1}{\Omega^4} z^2 + \ldots (n+1) \sum{}' \frac{1}{\Omega^{n+2}} z^n + \ldots$$

el cual es convergente en el recinto $0 < |z| < \delta$ (δ es el menor de los módulos de los períodos distintos de cero; la reducción de los términos semejantes es legítima, debido a lo dicho en el ap. 7.1, cap. III).

Como la función $\wp(z)$ es par, todos los coeficientes de las potencias impares de z tienen que ser iguales a cero. Por ello

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \ldots + c_{2m} z^{2m} + \ldots, \tag{6.4:1}$$

donde

$$c_{2m} = (2m+1) \sum{}' \frac{1}{\Omega^{2m+2}}. \tag{6.4:2}$$

Derivando término a término (6.4:1), tendremos:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_4 z^3 + \ldots + 2mc_{2m} z^{2m-1} + \ldots \tag{6.4:3}$$

Apliquemos los desarrollos hallados para obtener una relación algebraica entre $\wp(z)$ y $\wp'(z)$. El método que utilizaremos consiste en formar una combinación racional sencilla de las funciones $\wp(z)$ y $\wp'(z)$ que no tenga polos en el paralelogramo fundamental. Tal combinación, si se consigue construirla, tiene que ser una función elíptica sin polos y, por lo tanto, constante (teorema 1, ap. 6.2). Escribiendo esto, obtendremos la relación pedida. Observando que la parte principal del desarrollo de $\wp'(z)$ es $-\frac{2}{z^3}$ y que la parte principal del desarrollo de $\wp(z)$ es $\frac{1}{z^2}$, formemos primero la combinación

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3.$$

Reemplazando aquí $\wp'(z)$ y $\wp(z)$ por sus expresiones (6.4:1) y (6.4:3) y elevando a las potencias indicadas las series absolutamente convergentes respectivas, hallaremos que

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 = \left(\frac{4}{z^6} - \frac{8c_2}{z^2} - 16c_4 + \ldots\right) - \\ -4\left(\frac{1}{z^6} + \frac{3c_2}{z^2} + 3c_4 + \ldots\right) = -\frac{20c_2}{z^2} - 28c_4 - \ldots$$

(los términos no escritos contienen potencias no negativas de z).

Añadiendo a la expresión considerada el término $20c_2\wp(z)$, resulta:

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + 20c_2\wp(z) = -28c_4 + \ldots$$

Esta es la combinación pedida. El primer miembro representa una función elíptica que no tiene polos en el paralelogramo fundamental de períodos. Por consiguiente, ésta es una constante. Pero, como muestra el segundo miembro, para $z = 0$ el valor de la función es $-28c_4$. Por la tanto,

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + 20c_2\wp(z) = -28c_4,$$

o sea,

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - 20c_2\wp(z) - 28c_4.$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial de primer orden, a la cual satisface $\wp(z)$. Los coeficientes $20c_2$ y $28c_4$ se designan con g_2 y g_3, respectivamente, y se llaman *invariantes* de la función $\wp(z)$.

La última denominación se debe a que g_2 y g_3 no dependen de la forma en que se hayan elegido los períodos fundamentales de la función $\wp(z)$.

En efecto, de las fórmulas (6.4:2) se deduce que

$$g_2 = 20c_2 = 60\sum{}' \frac{1}{\Omega^4}, \quad g_3 = 28c_4 = 140\sum{}' \frac{1}{\Omega^6}, \tag{6.4:4}$$

o sea, g_2 y g_3 se expresan en forma de sumas de series absolutamente convergentes (véase el lema del ap. 6.3), extendidas al conjunto de todos los períodos de la función $\wp(z)$ que son distintos de cero. Mas este último conjunto es el mismo para cualquier par de períodos fundamentales de esta función que sean elegidos.

Escribamos definitivamente la ecuación obtenida en la forma

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3 \tag{6.4:5}$$

o bien, haciendo $\wp(z) = w$,

$$\left[\frac{dw}{dz}\right]^2 = 4w^3 - g_2w - g_3. \tag{6.4:5'}$$

La ecuación hallada se puede expresar en otra forma. Obsérvese que $\wp'(z)$ posee los ceros ω_1, ω_2, ω_3. Por consiguiente, el polinomio $4w^3 - g_2w - g_3$ tiene que anularse para $w_j = \wp(\omega_j) = e_j$ ($j = 1, 2, 3$). Por ello

$$4w^3 - g_2w - g_3 = 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3), \tag{6.4:6}$$

y, por consiguiente, la ecuación (6.4:5) adquiere la forma

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z) - e_1][\wp(z) - e_2][\wp(z) - e_3].$$

Como e_1, e_2 y e_3 son números distintos entre sí, el discriminante de la ecuación cúbica

$$4w^3 - g_2w - g_3 = 0$$

tiene que ser distinto de cero, es decir

$$\Delta = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2 \neq 0\,^{*}). \qquad (6.4{:}7)$$

Obsérvense también las siguientes fórmulas que se desprenden de las relaciones (6.4:5) y (6.4:6):

$$\begin{gathered} e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}, \\ e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}. \end{gathered} \qquad (6.4{:}8)$$

La ecuación (6.4:5′) proporciona para cada w dos valores de w' que se diferencian entre sí sólo en el signo. Esto último concuerda con el hecho de que $\wp(z)$ no varía al sustituir z por $-z$, mientras que $\wp'(z)$ cambia el signo. No obstante, $\wp'(z)$ es una función uniforme de z. Por ello, en la relación

$$\wp'(z) = \sqrt{4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3} \qquad (6.4{:}9)$$

entre los dos valores de la raíz cuadrada se debe elegir cada vez uno de ellos (el que da el valor de $\wp'(z)$).

Consideremos alguna curva rectificable γ que una algún punto z_0 con otro punto z y que no pase por los polos de la función $\wp(z)$. Escribiendo (6.4:9) en la forma

$$dz = \frac{d\wp(z)}{\sqrt{4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3}}$$

e integrando a lo largo de γ, obtenemos:

$$z - z_0 = \int_\gamma \frac{d\wp(z)}{\sqrt{4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3}}.$$

Si la imagen de la curva γ en el plano w es la curva $\wp(\gamma) = \Gamma$, la cual une los puntos $w_0 = \wp(z_0)$ y $w = \wp(z)$, entonces la última expresión puede también representarse en forma de la integral a lo largo de Γ:

$$z - z_0 = \int_{w_0}^{w} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}.$$

Esta integral determina una función multiforme de w. En efecto, el valor de la integral a lo largo de distintos caminos Γ que unan w_0

*) Véase, por ejemplo, A. G. Kurosch, Curso de álgebra superior, Editorial Mir, Moscú 1968, págs. 352—354.

y w siempre será el mismo, si los caminos en cuestión pertenecen a un mismo recinto simplemente conexo que no contenga a los puntos singulares de la función subintegral e_1, e_2 y e_3 (en cada uno de estos puntos la expresión subradical se anula). Mas no se puede afirmar ya que los valores de las integrales serán iguales para dos caminos entre los cuales esté situado uno o varios puntos e_j ($j = 1, 2, 3$), pues a un mismo valor de $w = \wp(z)$ le corresponde un conjunto infinito de valores distintos de z. Todos ellos están contenidos en la fórmula

$$z = \pm z' + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

donde z' es alguno de los w-puntos de la función $\wp(z)$, y m y n son números enteros arbitrarios. Uniendo z_0 con uno de estos puntos z de la curva rectificable γ y tomando la integral desde $\frac{1}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}$ a lo largo de la imagen $\wp(\gamma) = \Gamma$ de esta curva, obtenemos como valor de la integral el número correspondiente $z - z_0$.

Cuando z_0 tiende a cero, $w_0 = \wp(z_0)$ tiende a ∞ y como la integral impropia

$$\int_{\infty}^{w} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}$$

es convergente, resulta

$$z = \int_{\infty}^{w} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}. \qquad (6.4:10)$$

En esta igualdad $w = \wp(z)$ y el valor de la raíz cuadrada bajo el signo integral tiene que coincidir con $\wp'(z)$. De la fórmula (6.4:10) se deduce que la función $\wp(z)$ es inversa respecto de la integral (6.4:10). Esta última se llama **integral elíptica de primera especie en la forma normal de Weierstrass**.

En general, se llaman **integrales elípticas** las de la forma

$$\int_{w_0}^{w} R\left(t, \sqrt{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4}\right) dt,$$

donde $R(t, \tau)$ es una función racional y el polinomio bajo el signo de la raíz cuadrada es un polinomio de cuarto grado ($a_4 \neq 0$) o de tercer grado ($a_4 = 0$, $a_3 \neq 0$).

La denominación de integrales elípticas es debida a que la longitud del arco de la elipse se expresa por ellas. En efecto, la longitud del arco de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^1}{b^2}=1$ se expresa por la integral

$$l=\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^x \sqrt{\frac{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}{a^2-x^2}}\,dx=a\int_0^{\frac{x}{a}}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt=$$

$$=a\int_0^{\frac{x}{a}}\frac{1-k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt.$$

donde

$$k^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}.$$

Esta es una integral *elíptica*.

De las integrales, la denominación citada se extendió a las funciones que son inversas respecto de las integrales elípticas.

Poniendo en la fórmula (6.4:10) $z=\omega_j$ y observando que $w=\wp(\omega_j)=e_j$, resulta:

$$\omega_j=\int_\infty^{e_j}\frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}\qquad (j=1,\ 2,\ 3). \tag{6.4:11}$$

En estas fórmulas se deben tomar como caminos de integración las imágenes de cualesquiera curvas rectificables que unan el punto $z=0$ con los puntos ω_1, ω_2 y ω_3, respectivamente. Si en ellas se emplean caminos de integración arbitrarios que unan el punto ∞ con el punto e_j, entonces en el primer miembro resultarán distintos semiperíodos de la forma $\omega_j+2m\omega_1+2n\omega_3$, donde m y n son números enteros arbitrarios. En este caso, la elección de tal o cual valor de la raíz cuadrada no es esencial, puesto que esto solamente influye en el signo del semiperíodo.

6.5. En el ap. 6.4 se demostró que cada función $w=\wp(z)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=4w^3-g_2w-g_3,$$

donde g_2 y g_3 son los invariantes de $\wp(z)$.

Empleando esto se demuestra fácilmente que los invariantes determinan unívocamente la función $\wp(z)$, es decir, que no pueden existir dos funciones distintas $\wp(z)$ con unos mismos invariantes. Está claro que es suficiente establecer la unicidad de la solución analítica de la ecuación dada que satisface a la condición inicial $\varphi(0) = \infty$.

En efecto, sea z_0 algún punto que no sea semiperíodo de $\wp(z)$ y sea $w = \varphi(z)$ una función analítica en un entorno de z_0 que satisfaga a la ecuación en cuestión y a la condición inicial $\varphi(0) = \infty$. Entonces ésta puede expresarse en la forma:

$$\varphi(z) = \wp[s(z)],$$

donde $s(z) = \wp^{-1}\varphi(z)$ es una función analítica en un entorno de z_0. Se tiene:

$$\left[\frac{d\wp(s)}{ds}\right] = 4[\wp(s)]^3 - g_2\wp(s) - g_3,$$

pues $\wp(z)$, según la condición, es solución de la ecuación dada. Por otra parte, $\varphi(z)$ satisface a la misma ecuación; por ello

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = \left[\frac{d\wp(s)}{ds}\right]^2 \left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 4[\wp(s)]^3 - g_2\wp(s) - g_3.$$

Comparando ambos resultados obtenemos: $\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 1$, de donde $s = \pm z + C'$ y, por consiguiente,

$$\varphi(z) = \wp(\pm z + C') = \wp(z + C).$$

Si se exige que la función $\varphi(z)$ satisfaga además a la condición $\varphi(0) = \infty$, entonces resulta que C es un período de la función $\wp(z)$, o sea,

$$\varphi(z) \equiv \wp(z).$$

Ahora surge la siguiente pregunta natural: ¿se puede afirmar que a cualquier ecuación diferencial de primer orden

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 4w^3 - g''w - g''',$$

donde g'' y g''' son unos números complejos dados, siempre satisface alguna función elíptica de Weierstrass $w = \wp(z)$? Evidentemente, a los números g'' y g''' es necesario imponer una restricción, a la cual tienen que someterse los invariantes de la función de Weierstrass, a saber:

$$g''^3 - 27g'''^2 \neq 0.$$

¿Pero es suficiente sólo esta condición?

La resolución de esta cuestión representa el llamado **problema de la inversión de una integral elípti-**

ca. En efecto, se trata de demostrar que la función inversa de la integral elíptica

$$z=\int_{\infty}^{w}\frac{dt}{\sqrt{4t^3-g''t-g'''}},$$

es una función elíptica $w=\wp(z)$ con los invariantes g'' y g'''.

El problema de la inversión quedaría resuelto si demostrásemos la existencia de unos números complejos $2\omega'$ y $2\omega'''$, cuya razón no sea un número real y que satisfagan a las ecuaciones:

$$g''=60\sum{}'\frac{1}{(2m\omega'+2n\omega''')^4},\quad g'''=140\sum{}'\frac{1}{(2m\omega'+2n\omega''')^6}.$$

En efecto, construyendo una función $\wp(z)$ de períodos fundamentales $2\omega'$ y $2\omega'''$, podríamos afirmar que sus invariantes coinciden con los números dados g'' y g''' y que, por consiguiente, satisface a la ecuación diferencial propuesta.

Aquí nos limitaremos a resolver el problema de la inversión en el caso más sencillo y, a la vez, más importante para las aplicaciones, en que g'' y g''' son números reales.

Se distinguirán dos casos:

$$\text{a)}\quad \Delta=\frac{1}{16}(g''^3-27g'''^2)>0,\qquad \text{b)}\quad \Delta=\frac{1}{16}(g''^3-27g'''^2)<0.$$

En el caso a) todas las raíces de la ecuación

$$4t^3-g''t-g'''=0$$

son reales y distintas. Designémoslas mediante e', e'', e''', eligiendo estas notaciones de tal modo que se cumplan las desigualdades

$$e'>e''>e'''.$$

Observando que el polinomio

$$4t^3-g''t-g'''=4(t-e')(t-e'')(t-e''')$$

toma valores reales para t real y, además, positivos si $t>e'$ y negativos si $t<e'''$, hagamos:

$$\left.\begin{aligned}\omega'&=\int_{+\infty}^{e'}\frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3-g''t-g'''}}}=\int_{e'}^{+\infty}\frac{dt}{2\sqrt{(t-e')(t-e'')(t-e''')}},\\ \omega'''&=\int_{-\infty}^{e'''}\frac{dt}{-i\underset{+}{\sqrt{-4t^3+g''t+g'''}}}=i\int_{-\infty}^{e'''}\frac{dt}{2\underset{+}{\sqrt{-(t-e')(t-e'')(t-e''')}}}.\end{aligned}\right\}\tag{6.5:1}$$

Evidentemente, ω' es un número real positivo, mientras que ω''' es un número imaginario puro con la parte imaginaria positiva. Tomemos ω' y ω''' por semiperíodos de la función elíptica $\wp(z)$ y demostremos que esta función representa la solución del problema planteado, es decir, que posee los invariantes g'' y g'''.

Transformemos previamente las fórmulas (6.5:1). En la primera de ellas introducimos una nueva variable $\tau > 0$ bajo el signo de la integral según la fórmula

$$t = e''' + \frac{e' - e'''}{\tau^2}.$$

Observando que a los límites de integración e' y ∞ las corresponden ahora los límites nuevos 1 y 0, obtenemos:

$$\omega' = \int_1^0 \frac{-2\dfrac{e'-e'''}{\tau^3}\,d\tau}{2\sqrt[+]{(e'-e''')^3(1-\tau^2)\left(1-\dfrac{e''-e'''}{e'-e'''}\tau^2\right):\tau^6}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[+]{e'-e'''}} \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt[+]{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}},$$

donde

$$0 < k^2 = \frac{e''-e'''}{e'-e'''} < 1.$$

Análogamente, sustituyendo primero en la segunda de las fórmulas (6.5:1) t por $-t$, hallamos:

$$\omega''' = \frac{i}{2} \int_{-e'''}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt[+]{(t+e')(t+e'')(t+e''')}},$$

y después, haciendo

$$t = \frac{e'-e'''}{\tau^2} - e' \qquad (\tau > 0)$$

y efectuando los cálculos necesarios, obtenemos:

$$\omega''' = \frac{1}{\sqrt[+]{e'-e'''}} \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt[+]{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}},$$

donde

$$0 < k'^2 = \frac{e'-e''}{e'-e'''} = 1 - k^2 < 1.$$

De las fórmulas obtenidas se deduce que

$$\frac{i\omega'}{\omega'''}=\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}}}.$$

Cuando k^2 crece desde 0 hasta 1, la integral que figura en el numerador crece desde $\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\frac{\pi}{2}$ hasta el infinito. En este caso $k'^2=1-k^2$ decrece desde 1 hasta 0 y, por consiguiente, el denominador decrece desde el infinito hasta $\frac{\pi}{2}$. De aquí que la razón $\frac{i\omega'}{\omega'''}$ crece desde 0 hasta ∞, pasando por todos los valores positivos cuando $k^2=\frac{e''-e'''}{e'-e'''}$ crece desde 0 hasta 1.

Por esta razón, a cualquier valor de la razón $\frac{i\omega'}{\omega'''}$, dado *a priori*, le corresponde un valor de k^2 comprendido entre 0 y 1, y sólo uno. Determinando k^2 por los valores dados de ω' y ω''', de la fórmula

$$\sqrt{e'-e'''}=\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}:\omega'$$

hallamos $e'-e'''$. Por ello, se puede suponer conocido también $e''-e'''=(e'-e''')k^2$ y, finalmente, empleando la relación $e'+e''+e'''=0$, obtenemos cada uno de los números e', e'' y e'''. En resumen, dando *a priori* los valores de las integrales

$$\omega'=\int_{+\infty}^{e'} \frac{dt}{-\sqrt[+]{4t^3-g''t-g'''}} \quad \text{y} \quad \omega'''=i\int_{-\infty}^{e'''} \frac{dt}{\sqrt[+]{-(4t^3-g''t-g''')}}$$

(de modo que ω' y $\frac{\omega'''}{i}$ sean números positivos), podemos determinar unívocamente los valores de las raíces e', e'' y e''' de la ecuación $4t^3-g''t-g'''=0$ y, por consiguiente, también los valores de los coeficientes g'' y g'''. Utilizaremos esta observación para demostrar que los invariantes g_2 y g_3 de la función construida $\wp(z)$ coinciden con los números g'' y g''', con lo cual se termina la resolución del problema de la inversión en el caso considerado.

En el ap. 6.3 ya se estudió la función $\wp(z)$ con un período real y otro imaginario puro, y nos convencimos que $w=\wp(z)$ toma valores reales y decrece desde ∞ hasta $e_1 = \wp(\omega')$ cuando varía a lo largo del eje real desde 0 hasta ω'.

Designando con g_2 y g_3 los invariantes de la función $\wp(z)$ y observando que $\wp'(z)$ toma valores reales negativos para $0 < z = x < \omega'$, obtenemos:

$$\wp'(x) = -\underset{+}{\sqrt{4[\wp(x)]^3 - g_2\wp(x) - g_3}},$$

de donde

$$\omega' = \int_{-\infty}^{e_1} \frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}}$$

Análogamente, $\wp(z)$ toma valores reales y crece desde $-\infty$ hasta e_3 cuando $z = iy$ varía desde 0 hasta ω''' a lo largo del eje imaginario. Además, la derivada $\frac{d\wp(z)}{dz} = -i\frac{d\wp(iy)}{dy}$ toma valores imaginarios puros con partes imaginarias negativas. Por lo tanto, para $z = iy$, donde $0 < y < \frac{\omega'''}{i}$, obtenemos:

$$\wp'(iy) = -i\underset{+}{\sqrt{-\{4[\wp(iy)]^3 - g_2\wp(iy) - g_3\}}},$$

de donde

$$\omega''' = i\int_{+\infty}^{e_3} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g_2 t - g_3)}}}\,.$$

Como, según lo demostrado, los valores de los coeficientes del polinomio subradical se determinan unívocamente por los valores de las integrales consideradas

$$\omega' = \int_{+\infty}^{e'} \frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3 - g''t - g'''}}} = \int_{+\infty}^{e_1} \frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}},$$

$$\omega''' = i\int_{-\infty}^{e'''} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g''t - g''')}}} = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g_2 t - g_3)}}},$$

resulta $g_2 = g''$ y $g_3 = g'''$, con lo que se termina la demostración en el caso a).

Consideremos ahora el caso b). Aquí la ecuación

$$4t^3 - g''t - g''' = 0$$

tiene que tener una raíz real e'' y dos raíces imaginarias conjugadas e' y e'''.

Elijamos las notaciones de tal manera que la parte imaginaria de la raíz e''' sea positiva. Observando que el polinomio

$$4t^3 - g''t - g''' = 4(t - e')(t - e'')(t - e''')$$

toma valores reales para t real y, además, positivos si $t > e''$ y negativos si $t < e''$, hagamos:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \int\limits_{+\infty}^{e''} \frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3 - g''t - g'''}}} = \int\limits_{e''}^{\infty} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{4t^3 - g''t - g'''}}} \\ &\text{y} \\ &\beta i = \int\limits_{-\infty}^{e''} \frac{dt}{-i\underset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g''t - g''')}}} = i \int\limits_{-\infty}^{e''} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g''t - g''')}}} . \end{aligned}\right\} \qquad (6.5:2)$$

Aquí α y β son números reales y positivos. Construyamos una función elíptica $\wp(z)$ de períodos $2\omega' = \alpha - i\beta$ y $2\omega''' = \alpha + i\beta$ y demostremos que ésta representa la solución del problema de inversión planteado, es decir, que posee los invariantes g'' y g'''.

Transformemos previamente las fórmulas (6.5:2). Hagamos en la primera de ellas la sustitución de la variable

$$t = e'' + \tau^2 \qquad (\tau > 0).$$

Obtendremos:

$$\alpha = \int\limits_0^{\infty} \frac{2\tau\, d\tau}{2\underset{+}{\sqrt{\tau^2(\tau^2 + e'' - e')(\tau^2 + e'' - e''')}}} = \int\limits_0^{\infty} \frac{d\tau}{\underset{+}{\sqrt{(\tau^2 + e'' - e')(\tau^2 + e'' - e''')}}} .$$

Hagamos $e'' - e' = \rho e^{i\varphi}$ y, por consiguiente, $e'' - e''' = \rho e^{-i\varphi}$, donde $0 < \varphi < \pi$. Entonces tendremos:

$$\alpha = \int\limits_0^{\infty} \frac{d\tau}{\underset{+}{\sqrt{\tau^4 + 2\rho\tau^2 \cos\varphi + \rho^2}}} ,$$

o finalmente, haciendo $\tau = \sqrt{\rho}\, t$:

$$\alpha\sqrt{\rho} = \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 2t^2 \cos\varphi + 1}} .$$

Del mismo modo, sustituyendo primero en la segunda de las fórmulas (6.5:2) t por $-t$, hallamos:

$$\beta = \int\limits_{-e''}^{\infty} \frac{dt}{2\sqrt{(t + e')(t + e'')(t + e''')}} ,$$

y haciendo después

$$t=-e''+\tau^2 \qquad (\tau>0)$$

y efectuando los cálculos necesarios, obtenemos:

$$\beta=\int_0^\infty \frac{2\tau\,d\tau}{2\sqrt[+]{\tau^2(\tau^2+e'-e'')(\tau^2+e'''-e'')}}=$$

$$=\int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt[+]{[\tau^2-(e''-e')][\tau^2-(e''-e''')]}}=\int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt[+]{\tau^4-2\rho\tau^2\cos\varphi+\rho^2}}.$$

Finalmente, haciendo aquí $\tau=\sqrt{\rho}t$, resulta:

$$\beta\sqrt{\rho}=\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt[+]{t^4-2t^2\cos\varphi+1}}.$$

De las fórmulas halladas se deduce que

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt[+]{t^4+2t^2\cos\varphi+1}}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt[+]{t^4-2t^2\cos\varphi+1}}}.$$

Si φ varía en el segundo miembro desde 0 hasta π, $\cos\varphi$ decrece desde 1 hasta -1 y, por consiguiente, la integral que figura en el numerador crece desde $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$ hasta el infinito y la integral que figura en el denominador decrece desde ∞ hasta $\frac{\pi}{2}$. De aquí se deduce que la razón $\frac{\alpha}{\beta}$ crece desde 0 hasta ∞ y, por consiguiente, a cada valor de la razón $\frac{\alpha}{\beta}$, dado *a priori*, le corresponde un valor único φ entre los límites 0 y π.

Determinando φ por los valores dados de α y β y poniéndolo en la expresión de α, hallamos:

$$\sqrt{\rho}=\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt[+]{t^4+2t^2\cos\varphi+1}}:\alpha.$$

Por consiguiente, los valores de ρ y φ se determinan unívocamente por los valores dados de α y β. Por lo tanto, se determinan unívocamente las diferencias $e''-e'$ y $e''-e'''$ y luego, mediante la relación $e' + e'' + e''' = 0$, todas las tres raíces e', e'' y e''' de la ecuación $4t^3 - g''t - g''' = 0$ y, finalmente, sus coeficientes g'' y g'''.

En resumen, dando *a priori* los valores de las integrales

$$\alpha = \int_{+\infty}^{e''} \frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3 - g''t - g'''}}} \quad y \quad i\beta = i \int_{-\infty}^{e'''} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g''t - g''')}}},$$

(de modo que α y β sean números positivos) se pueden determinar unívocamente los coeficientes g'' y g''' del polinomio $4t^3 - g''t - g'''$. Utilizaremos esta observación para demostrar que los invariantes g_2 y g_3 de la función analítica que hemos construido coinciden con los números dados g'' y g'''.

En el ap. 6.3 ya se estudió la función $\wp(z)$ en el caso en que ésta tiene un par de períodos fundamentales conjugados $\alpha - i\beta$ y $\alpha + i\beta$, y nos convencimos que $w = \wp(z)$ toma valores reales y decrece desde $+\infty$ hasta $e_2 = \wp(\alpha)$ cuando $z = x$ recorre el segmento del eje real desde 0 hasta α. Observando que la derivada $\wp'(x)$ tiene que tener en este caso valores reales negativos, obtenemos:

$$\wp'(x) = -\underset{+}{\sqrt{4[\wp(x)]^3 - g_2\wp(x) - g_3}},$$

de donde

$$\alpha = \int_{+\infty}^{e_2} \frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}}.$$

Análogamente, $\wp(z)$ toma valores reales y decrece desde e_2 hasta $-\infty$ cuando $z = \alpha + iy$ recorre el segmento de la recta paralela al eje imaginario desde el punto α hasta el punto $\alpha + i\beta$. Además, la derivada

$$\frac{d\wp(z)}{dz} = -i\,\frac{d\wp(\alpha + iy)}{dy}$$

toma valores imaginarios puros con la parte imaginaria positiva. Por ello, para $z = \alpha + iy$, donde $0 < y < \beta$:

$$\wp'(\alpha + iy) = i\underset{+}{\sqrt{-\{4[\wp(\alpha + iy)]^3 - g_2\wp(\alpha + iy) - g_3\}}},$$

de donde

$$i\beta = (\alpha + i\beta) - \alpha = i\int_{-\infty}^{e_2} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g_2t - g_3)}}}.$$

Como, según lo demostrado, los valores de los coeficientes del polinomio subradical se determinan unívocamente por los valores de las integrales consideradas

$$\alpha = \int_{+\infty}^{e''} \frac{dt}{-\overset{+}{\sqrt{4t^3 - g''t - g'''}}} = \int_{+\infty}^{e_2} \frac{dt}{-\overset{+}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}},$$

$$i\beta = i \int_{-\infty}^{e''} \frac{dt}{\overset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g''t - g''')}}} = i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dt}{\overset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g_2 t - g_3)}}},$$

resulta $g_2 = g''$ y $g_3 = g'''$, con lo cual se termina la demostración.

Del estudio realizado se deduce, en particular, que si los invariantes g_2 y g_3 de la función $\wp(z)$ son números reales, entonces $\wp(z)$ posee o un par de períodos fundamentales, uno de los cuales es real y el otro imaginario puro (si el discriminante Δ es positivo), o posee un par de períodos fundamentales conjugados (si el discriminante es negativo). En efecto, en cada uno de estos casos $w = \wp(z)$ representa la in ersión de la integral elíptica

$$z = \int_{\infty}^{w} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$$

y, por consiguiente, según lo demostrado, o posee un par de períodos fundamentales de la forma

$$2\omega_1 = \int_{+\infty}^{e_1} \frac{dt}{-\overset{+}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}} \quad \text{y} \quad 2\omega_3 = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{-i\overset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g_2 t - g_3)}}}$$

(cuando $\Delta > 0$), o es un par de períodos fundamentales de la forma

$$\alpha + i\beta = \int_{+\infty}^{e_2} \frac{dt}{-\overset{+}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}} + i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dt}{\overset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g_2 t - g_3)}}},$$

$$\alpha - i\beta = \int_{+\infty}^{e_2} \frac{dt}{-\overset{+}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}} - i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dt}{\sqrt{-(4t^3 - g_2 t - g_3)}}$$

(cuando $\Delta < 0$).

Obsérvese, finalmente, que la condición de que sean reales ambos invariantes es necesaria y suficiente para que la función $\wp(z)$ tome valores reales en el eje real.

En efecto, si g_2 y g_3 son números reales, entonces, como acabamos de ver, $\wp(z)$ o posee un período fundamental real y el otro imaginario puro, o dos períodos fundamentales conjugados. En cada uno de estos casos, como se mostró en el ap. 6.3, $\wp(z)$ toma valores reales en el eje real (y también en el eje imaginario).

Recíprocamente, si $\wp(z)$ toma valores reales en el eje real, entonces el polinomio

$$4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3 = [\wp'(z)]^2$$

también toma valores reales para $z = x$. Por ello

$$\wp(x)\,\mathrm{Im}\,g_2 + \mathrm{Im}\,g_3 = 0$$

para todos los valores reales de x, de donde

$$\mathrm{Im}\,g_2 = \mathrm{Im}\,g_3 = 0,$$

o sea, g_2 y g_3 son números reales.

6.6. Si se comparan las funciones doblemente periódicas con las simplemente periódicas, entonces, como analogía de la función $\wp(z)$, la cual tiene un polo doble en cada uno de los períodos $\Omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ con la parte principal $\frac{1}{(z-\Omega)^2}$, se puede señalar la función $\operatorname{cosec}^2 z$, la cual también posee un polo doble en cada uno de sus períodos $\omega = n\pi$ con la parte principal $\frac{1}{(z-\omega)^2}$. Entre las funciones trigonométricas hay también funciones más simples que $\operatorname{cosec}^2 z$ y que están estrechamente ligadas con esta función: tales son: $\operatorname{cotg} z$ con polos simples en cada uno de los períodos ω y con las partes principales correspondientes $\frac{1}{z-\omega}$, y $\operatorname{sen} z$ con ceros simples en cada uno de los períodos. En lo que se refiere a las relaciones de estas funciones con $\operatorname{cosec}^2 z$, dejando a un lado las relaciones algebraicas, se tiene, evidentemente:

$$(\operatorname{cotg} z)' = -\operatorname{cosec}^2 z \ \text{ y } \ (\operatorname{Ln} \operatorname{sen} z)' = \operatorname{cotg} z.$$

Entre las funciones elípticas no pueden existir funciones con polos simples en los períodos (y que no tengan otros polos más), ni funciones enteras. Sin embargo, sin exigir que sean elípticas, se pueden construir funciones que estén ligadas con $\wp(z)$ del mismo modo que las funciones $\operatorname{cotg} z$ y $\operatorname{sen} z$ están ligadas con $\operatorname{cosec}^2 z$. Ahora nos dedicaremos a definir y analizar las funciones que son análogas a $\operatorname{cotg} z$ y $\operatorname{sen} z$, las cuales desempeñan un papel importante en todos los cálculos con funciones elípticas.

La función análoga a cotg z es la función $\zeta(t)$ theta-función de Weierstrass *), definida por las siguientes condiciones:

$$[\zeta(z)]' = -\wp(z) \quad \text{y} \quad \lim_{z\to 0}\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]=0. \tag{6.6:1}$$

Esta función puede expresarse también en la forma:

$$\zeta(z)-\frac{1}{z}=-\int_0^z\left[\wp(z)-\frac{1}{z^2}\right]dz,$$

donde la integración se efectúa a lo largo de cualquier curva rectificable que no pase por los puntos $\Omega\neq 0$. Reemplazando $\wp(z)$ por su desarrollo en fracciones simples e integrando término a término, obtenemos:

$$\zeta(z)-\frac{1}{z}=-\int_0^z\sum{}'\left[\frac{1}{(z-\Omega)^2}-\frac{1}{\Omega^2}\right]dz=\sum{}'\left[\frac{1}{z-\Omega}+\frac{1}{\Omega}+\frac{z}{\Omega^2}\right],$$

o sea,

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum{}'\left[\frac{1}{z-\Omega}+\frac{1}{\Omega}+\frac{z}{\Omega^2}\right]. \tag{6.6:2}$$

La función $\zeta(z)$ es meromorfa y tiene polos simples en los puntos $z=\Omega$ con las partes principales correspondientes $\frac{1}{z-\Omega}$.

Fácilmente se observa que $\zeta(z)$ es una función impar. En efecto,

$$[\zeta(z)+\zeta(-z)]'=\zeta'(z)-\zeta'(-z)=-\wp(z)+\wp(-z)\equiv 0$$

y, por consiguiente,

$$\zeta(z)+\zeta(-z)\equiv C,$$

o sea,

$$\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]+\left[\zeta(-z)+\frac{1}{z}\right]\equiv C.$$

Para $z\to 0$ el primer miembro tiende a 0; por consiguiente, $C=0$ y

$$\zeta(-z)=-\zeta(z). \tag{6.6:3}$$

*) No hay que confundirla con otra theta-función que desempeña un papel importante en la teoría de los números y que se define mediante la serie de Dirichlet: $\zeta(z)=\sum_1^\infty \frac{1}{n^z}$ (esta serie es convergente en el semiplano $\operatorname{Re} z>1$). Esta última función fue introducida en la ciencia por Euler; sin embargo, por tradición, esta función se llama ordinariamente theta-función de Riemann.

Obsérvese también que

$$[\zeta(z+2\omega_j)-\zeta(z)]'=\zeta'(z+2\omega_j)-\zeta'(z)=\wp(z)-\wp(z+2\omega_j)\equiv 0,$$

por lo cual

$$\zeta(z+2\omega_j)-\zeta(z)\equiv 2\eta_j \qquad (j=1,\ 2,\ 3), \tag{6.6:4}$$

es decir, cuando z varía en $2\omega_j$ la función $\zeta(z)$ varía en una constante aditiva $2\eta_j$. Entre las cantidades $2\omega_j$ y $2\eta_j$ existen unas relaciones muy simples. Para deducirlas integraremos la función $\zeta(z)$ a lo largo del contorno γ del paralelogramo con los vértices $-\omega_2$, $\omega_1-\omega_3$, ω_2, $-\omega_1+\omega_3$. Como $\zeta(z)$ tiene en el interior de este paralelogramo un polo único $z=0$ con el residuo 1, se tiene:

$$\int_\gamma \zeta(z)\,dz=2\pi i.$$

Por otra parte, esta misma integral puede expresarse en forma de una suma de dos diferencias de integrales, extendidas a los pares de lados opuestos del paralelogramo:

$$\left[\int_0^1 \zeta(-\omega_1-\omega_3+2t\omega_1)\,2\omega_1\,dt-\int_0^1 \zeta(-\omega_1+\omega_3+2t\omega_1)\,2\omega_1\,dt\right]+$$

$$+\left[\int_0^1 \zeta(\omega_1-\omega_3+2t\omega_3)\,2\omega_3\,dt-\int_0^1 \zeta(-\omega_1-\omega_3+2t\omega_3)\,2\omega_3\,dt\right].$$

En virtud de (6.6:4) esto puede expresarse en la forma

$$-4\omega_1\eta_3+4\omega_3\eta_1,$$

de donde

$$2\omega_3\eta_1-2\omega_1\eta_3=\pi i. \tag{6.6:5}$$

Observando que $2\omega_2=2\omega_1+2\omega_3$ y

$$2\eta_2=\zeta(z+2\omega_2)-\zeta(z)=[\zeta(z+2\omega_1+2\omega_3)-\zeta(z+2\omega_3)]+$$
$$+[\zeta(z+2\omega_3)-\zeta(z)]=2\eta_1+2\eta_3,$$

obtenemos de (6.6:5) las siguientes relaciones:

$$2\omega_1\eta_2-2\omega_2\eta_1=-\pi i,\quad 2\omega_2\eta_3-2\omega_3\eta_2=-\pi i. \tag{6.6:5'}$$

Las igualdades (6.6:5) y (6.6:5′) se llaman **relaciones de Legendre**.

Construyamos ahora la función análoga a sen z. Esta función se representa por $\sigma(z)$ (**sigma-función**) y se define del modo siguiente:

$$\frac{d\,\mathrm{Ln}\,\sigma(z)}{dz}=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\zeta(z) \quad \text{y} \quad \lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}=1. \tag{6.6:6}$$

Para esta función se tiene:

$$\mathrm{Ln}\frac{\sigma(z)}{z}=\int_0^z\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]dz=\sum{}'\left[\mathrm{Ln}\left(1-\frac{z}{\Omega}\right)+\frac{z}{\Omega}+\frac{z^2}{2\Omega^2}\right],$$

de donde

$$\sigma(z)=z\exp\left\{\int_0^z\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]dz\right\}=z\Pi'\left(1-\frac{z}{\Omega}\right)e^{\frac{z}{\Omega}+\frac{z^2}{2\Omega^2}}. \tag{6.6:7}$$

Hemos obtenido un producto infinito, extendido a todos los $\Omega\neq 0$. De esta representación se ve que $\sigma(z)$ es una función entera con ceros simples en los puntos $\Omega=2n\omega_1+2m\omega_3$.

Su orden es igual a 2, puesto que el exponente de convergencia de la sucesión de sus ceros es igual a 2 (véase el ap. 5.3).

Obsérvese que

$$\sigma(-z)=-z\exp\left\{\int_0^{-z}\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]dz\right\}=-z\exp\left\{\int_0^{z}\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]dz\right\}$$

(aquí se tuvo en cuenta que la función $\zeta(z)$ es impar); por lo tanto,

$$\sigma(-z)=-\sigma(z), \tag{6.6:8}$$

es decir, $\sigma(z)$ es una función impar.

De las fórmulas (6.6:6) y (6.6:4) se desprende que

$$\frac{\sigma'(z+2\omega_j)}{\sigma(z+2\omega_j)}-\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\equiv 2\eta_j \qquad (j=1,\ 2,\ 3),$$

de donde, integrando:

$$\mathrm{Ln}\,\frac{\sigma(z+2\omega_j)}{\sigma(z)}=2\eta_jz-c_j,$$

o sea

$$\sigma(z+2\omega_j)=\sigma(z)\,e^{2\eta_jz+c_j}.$$

Pongamos aquí $z=-\omega_j$; entonces, teniendo en cuenta que la función $\sigma(z)$ es impar, se tiene:

$$-1=e^{-2\eta_j\omega_j+c_j}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma(z+2\omega_j) = -\sigma(z)\, e^{2\eta_j(z+\omega_j)} \qquad (j=1,\ 2,\ 3). \qquad (6.6{:}9)$$

En resumen, cuando z varía en $2\omega_j$ la función $\sigma(z)$ adquiere el factor exponencial.

6.7. Cualquier función elíptica puede expresarse en forma finita mediante las sigma- y theta-funciones. Aquí consideraremos las funciones elípticas de períodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ y las funciones $\zeta(z)$ y $\sigma(z)$ que se construyeron partiendo de estos períodos fundamentales.

Teorema 1. *Sea $f(z)$ una función elíptica de orden n y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sus ceros y polos, respectivamente, (escritos de acuerdo a sus órdenes de multiplicidad) pertenecientes al paralelogramo fundamental de períodos. Entonces*

$$f(z) = C\,\frac{\sigma(z-\alpha_1)\ldots\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\ldots\sigma(z-\beta_n')}, \qquad (6.7{:}1)$$

donde C es una constante y $\beta_n' = (\alpha_1+\ldots+\alpha_n)-(\beta_1+\ldots+\beta_{n-1})$ *).

Demostración. Como $\sigma(z)$ tiene polos simples en todos los puntos $\Omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$, la función $\sigma(z-c)$ tiene un polo simple en cada uno de los paralelogramos de períodos: en el punto c del paralelogramo fundamental y en todos los puntos que son congruentes a él. De aquí que

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z-\alpha_1)\ldots\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\ldots\sigma(z-\beta_n')}$$

es una función meromorfa que tiene n ceros y n polos en cada uno de los paralelogramos de períodos de la función $f(z)$, los cuales son congruentes a los ceros y polos de la función $f(z)$ situados en el paralelogramo fundamental. Obsérvese que, en virtud del teorema 4, ap. 6.2, $\beta_n'-\beta_n = (\alpha_1+\ldots+\alpha_n)-(\beta_1+\ldots+\beta_n)$ es uno de los períodos de la función $f(z)$ y, por consiguiente, β_n' es congruente con β_n. De aquí se deduce que los ceros y polos de la función $\varphi(z)$ coinciden con los ceros y polos de la función $f(z)$ en cada paralelogramo de períodos.

Cerciorémonos ahora de que $\varphi(z)$ es doblemente periódica y, por consiguiente, es una función elíptica. En efecto, según las fór-

*) Obsérvese que en el último factor del denominador en la fórmula (6.7:1) el número β_n se sustituye por β_n'. (*Nota del T.*)

mulas (6.6:9)

$$\varphi(z+2\omega_j)=\exp\{2\eta_j[(z-\alpha_1+\omega_j)+\ldots+(z-\alpha_n+\omega_j)-$$
$$-(z-\beta_1+\omega_j)-\ldots-(z-\beta_n'+\omega_j)]\}\,\varphi(z)=$$
$$=\exp\{2\eta_j[(\beta_1+\ldots+\beta_n')-(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)]\}\,\varphi(z)=\varphi(z)$$
$$(j=1,\ 2,\ 3).$$

Por consiguiente, el cociente $f(z):\varphi(z)$ es una función elíptica sin ceros y polos, es decir, es una constante C. La fórmula (6.7:1) queda demostrada.

De la demostración misma se deduce que los puntos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n'$ se pueden sustituir por cualesquiera otros puntos congruentes, siempre que se cumplan las relaciones de igualdad entre la suma de los ceros considerados y la suma de los polos.

T e o r e m a 2. *Sea $f(z)$ una función elíptica, cuyos polos en el paralelogramo fundamental de períodos son los puntos $b_1, \ldots, b_r$ con los órdenes $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ y las partes principales correspondientes*:

$$g_k(z)=\frac{A_1^{(k)}}{z-b_k}+\ldots+\frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(z-b_k)^{\varkappa_k}}.$$

Entonces

$$f(z)=C+\sum_{k=1}^{r}\left\{A_1^{(k)}\zeta(z-b_k)-\frac{A_2^{(k)}}{1!}\zeta'(z-b_k)+\right.$$
$$\left.+\frac{A_3^{(k)}}{2!}\zeta''(z-b_k)-\ldots+(-1)^{\varkappa_k-1}\frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(\varkappa_k-1)!}\zeta^{(\varkappa_k-1)}(z-b_k)\right\},\quad (6.7:2)$$

donde C es una constante.

Obsérvese que $\zeta'(z-b_k)=-\wp(z-b_k)$ y, en general, $\zeta^{(j)}(z-b_k)=-\wp^{(j-1)}(z-b_k)$.

D e m o s t r a c i ó n. Está claro que $\zeta(z-b)$ tiene polos simples en todos los puntos $b+\Omega$ con las partes principales $\frac{1}{z-(b+\Omega)}$, y $\zeta^{(j)}(z-b)$ tiene polos de orden $j+1$ en todos los puntos $b+\Omega$, con las partes principales $(-1)^{(j)}\frac{j!}{[z-(b+\Omega)]^{j+1}}$. Por ello, la suma que figura en el segundo miembro de la fórmula (6.7:2) representa una función meromorfa $\varphi(z)$ para la cual los polos, sus órdenes y las partes principales coinciden con los polos, órdenes y partes principales de la función $f(z)$. Demostremos que $\varphi(z)$ es una función elíptica de períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$. En efecto, en virtud de la fórmula (6.6:4), se tiene:

$$\varphi(z+2\omega_j)-\varphi(z)=$$
$$=\sum_{k=1}^{r} A_1^{(k)}[\zeta(z+2\omega_j-b_k)-\zeta(z-b_k)]=2\eta_j\sum_{k=1}^{r} A_1^{(k)}.$$

Pero $\sum\limits_{k=1}^{r} A_1^{(k)}$ es la suma de los residuos de la función elíptica $f(z)$ respecto de todos sus polos pertenecientes al paralelogramo fundamental de períodos. Por lo tanto, $\sum\limits_{k=1}^{r} A_1^{(k)}=0$ (teorema 2, ap. 6.2) y, por consiguiente,

$$\varphi(z+2\omega_j)-\varphi(z)=0 \qquad (j=1,\ 2,\ 3),$$

es decir, $\varphi(z)$ es una función elíptica. En resumen, $f(z)-\varphi(z)$ es una función elíptica sin polos, o sea,

$$f(z)-\varphi(z)\equiv C,$$

con lo que se termina la demostración de la fórmula (6.7:2).

Si se hace una analogía con la teoría de las funciones racionales, entonces la función $\sigma(z)$ se puede comparar con z, mientras que la función $\zeta(z)$ con $\frac{1}{z}$. Entonces el teorema 1 del presente apartado corresponderá exactamente al teorema de la posibilidad de expresar una función racional de orden n con los ceros finitos α_k y los polos finitos β_k ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) en forma de un cociente de dos polinomios descompuestos en factores lineales:

$$f(z)=C\frac{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)\ldots(z-\beta_n)},$$

y el teorema 2, al desarrollo de una función racional en fracciones simples:

$$f(z)=C+\sum_{1}^{r}\left[\frac{A_1^{(k)}}{z-b_k}+\frac{A_2^{(k)}}{(z-b_k)^2}+\ldots+\frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(z-b_k)^{\varkappa_k}}\right].$$

Proponemos al lector construir las expresiones análogas para las funciones trigonométricas, donde en lugar de $\sigma(z)$ se debe tomar sen z, en lugar de $\zeta(z)$ se debe tomar cotg z y, finalmente, en lugar del paralelogramo de períodos se debe tomar la franja de períodos. En este caso los ceros y polos de la función trigonométrica deben tomarse en alguna de las franjas de períodos, por ejemplo, $-\pi\leqslant x<\pi$.

Como aplicación de los teoremas de este apartado, consideremos el problema del cálculo de la integral elíptica

$$\int R\left(t, \sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}\right) dt,$$

donde $R(t, \tau)$ es una función racional y $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Para tener derecho a aplicar los resultados del ap. 6.5, referentes a la inversión de integrales elípticas, supondremos ademas que g_2 y g_3 son reales, pues éste es el caso más importante en la práctica. Debido al ap. 6.5, existe una función elíptica $\wp(z)$ que satisface a la ecuación

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

Sustituyendo en la integral t por $\wp(z)$, podemos reemplazar $\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}$ por $\wp'(z)$ y, por consiguiente, resulta la integral

$$\int R[\wp(z), \wp'(z)]\, \wp'(z)\, dz.$$

Pero $R[\wp(z), \wp'(z)]\, \wp'(z) = f(z)$ es una función elíptica. Expresándola según la fórmula (6.7:2) e integrando, obtendremos:

$$\int f(z)\, dz = C_0 + Cz + \sum_{k=1}^{r} \left\{ A_1^{(k)} \int \zeta(z - b_k)\, dz - \frac{A_2^{(k)}}{1!} \zeta(z - b_k) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\varkappa_k - 1} \frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(\varkappa_k - 1)!} \zeta^{(\varkappa_k - 2)}(z - b_k) \right\}.$$

Para calcular las integrales $\int \zeta(z - b_k)\, dz$ se sustituye $\zeta(z - b_k)$ por $\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} \sigma(z - b_k)$. Resulta definitivamente:

$$\int f(z)\, dz = C_0 + Cz + \sum_{k=1}^{r} \left\{ A_1^{(k)} \operatorname{Ln} \sigma(z - b_k) - \frac{A_2^{(k)}}{1!} \zeta(z - b_k) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{\varkappa_k - 1} \frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(\varkappa_k - 1)!} \zeta^{(\varkappa_k - 2)}(z - b_k) \right\}.$$

Este es el resultado de la integración, al cual, para volver a la variable inicial, se debe agregar además la relación

$$t = \wp(z) \quad \text{o sea} \quad z = \int_{\infty}^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau^3 - g_2\tau - g_3}}.$$

6.8. De los teoremas del apartado precedente se pueden deducir numerosas identidades de la teoría de las funciones elípticas. Señalemos solamente las más importantes.

Sea $\mathfrak{z}$ un número complejo que no sea período de $\wp(z)$. Examinemos la diferencia

$$f(z) = \wp(z) - \wp(\mathfrak{z}).$$

Esta es una función elíptica de segundo orden. Sus ceros son los puntos $\mathfrak{z}$, $-\mathfrak{z}$ y todos los puntos que son congruentes con los indicados. Si $\mathfrak{z} - (-\mathfrak{z}) = 2\mathfrak{z}$ no es un período (o sea, si $\mathfrak{z}$ no es un semiperíodo), entonces $\mathfrak{z}$ y $-\mathfrak{z}$ no son congruentes entre sí y, por consiguiente, cualquier cero de la función $f(z)$ es congruente con $\mathfrak{z}$ o con $-\mathfrak{z}$. Si $2\mathfrak{z}$ es un período, entonces $\mathfrak{z}$ es un semiperíodo que no es período. De aquí que $\wp'(\mathfrak{z}) = 0$, es decir, $\mathfrak{z}$ es un cero doble de la función $\wp(z)$ y de nuevo cada cero de la función $f(z)$ es congruente con $\mathfrak{z}$ y $-\mathfrak{z}$. Observando que $f(z)$ tiene un polo doble en el origen de coordenadas, apliquemos el teorema 1 del ap. 6.7. Hagamos $\alpha_1 = \mathfrak{z}$, $\alpha_2 = -\mathfrak{z}$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2' = 0$. Es obvio que aquí se cumple la condición $\beta_2' = (\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_1$. Tendremos:

$$\wp(z) - \wp(\mathfrak{z}) = C\frac{\sigma(z-\mathfrak{z})\,\sigma(z+\mathfrak{z})}{\sigma^2(z)},$$

de donde, multiplicando por z^2 y pasando a límites cuando $z \to 0$, resulta:

$$1 = C\frac{\sigma(-\mathfrak{z})\,\sigma(\mathfrak{z})}{\left[\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}\right]^2} = -C\sigma^2(\mathfrak{z}),$$

o sea,

$$C = -\frac{1}{\sigma^2(\mathfrak{z})}.$$

En resumen,

$$\wp(z) - \wp(\mathfrak{z}) = -\frac{\sigma(z-\mathfrak{z})\,\sigma(z+\mathfrak{z})}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(\mathfrak{z})}. \qquad (6.8{:}1)$$

Hagamos aquí $\mathfrak{z} = \omega_j$; entonces $\wp(\mathfrak{z}) = e_j$ y en virtud de las fórmulas (6.6:9)

$$\sigma(z+\omega_j) = -\sigma(z-\omega_j)\,e^{2\eta_j z},$$

de donde

$$\sigma(z-\omega_j) = -\sigma(z+\omega_j)\,e^{-2\eta_j z}$$

y, por consiguiente,

$$\wp(z) - e_j = e^{-2\eta_j z}\frac{\sigma^2(z+\omega_j)}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(\omega_j)}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, obtenemos:

$$\sqrt{\wp(z)-e_j} = e^{-\eta_j z} \frac{\sigma(z+\omega_j)}{\sigma(z)\,\sigma(\omega_j)} . \qquad (6.8:2)$$

Se ha elegido aquí una de las dos ramas de la raíz cuadrada; precisamente la que representa al segundo miembro de la fórmula (6.8:2).

Hagamos las notaciones

$$e^{-\eta_j z} \frac{\sigma(z+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)} = \sigma_j(z) \qquad (j=1,\ 2,\ 3). \qquad (6.8:3)$$

Está claro que las funciones $\sigma_j(z)$ son enteras; éstas se llaman σ-**funciones asociadas**. Las fórmulas (6.8:2) se escriben mediante ellas en la forma

$$\sqrt{\wp(z)-e_j} = \frac{\sigma_j(z)}{\sigma(z)} \qquad (6.8:4)$$

y, por consiguiente,

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)-e_1][\wp(z)-e_2][\wp(z)-e_3] = 4\frac{\sigma_1^2(z)\,\sigma_2^2(z)\,\sigma_3^2(z)}{\sigma^6(z)},$$

de donde

$$\wp'(z) = \pm 2\frac{\sigma_1(z)\cdot\sigma_2(z)\cdot\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)} .$$

Para elegir aquí correctamente el signo, multipliquemos ambos miembros por z^3 y pasemos a límites para $z \to 0$. Como $z^3\wp'(z) \to$ $\to -2$, $\frac{\sigma(z)}{z} \to 1$ y, finalmente, $\sigma_j(0) = 1$ (debido a la definición), hallaremos que en la última fórmula se debe tomar el signo menos. Así, pues,

$$\wp'(z) = -2\frac{\sigma_1(z)\,\sigma_2(z)\,\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)} . \qquad (6.8:5)$$

Volvamos a examinar la fórmula (6.8:1). Tomando en ambos miembros la derivada logarítmica respecto de z, obtenemos:

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})} = \zeta(z+\mathfrak{z}) + \zeta(z-\mathfrak{z}) - 2\zeta(z), \qquad (6.8:1')$$

o bien, cambiando de sitio z y $\mathfrak{z}$:

$$\frac{\wp'(\mathfrak{z})}{\wp(\mathfrak{z})-\wp(z)} = \zeta(z+\mathfrak{z}) - \zeta(z-\mathfrak{z}) - 2\zeta(\mathfrak{z}). \qquad (6.8:1'')$$

Sumando y dividiendo por 2, hallamos:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})}{\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})} = \zeta(z+\mathfrak{z}) - \zeta(z) - \zeta(\mathfrak{z}). \qquad (6.8:6)$$

Derivando ambos miembros de la igualdad (6.8:6) respecto de z, resulta:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})}-\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)[\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})]}{[\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})]^2}=-\wp(z+\mathfrak{z})+\wp(z).$$

Cambiamos de nuevo de sitio z y $\mathfrak{z}$:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp''(\mathfrak{z})}{\wp'(\mathfrak{z})-\wp'(z)}-\frac{1}{2}\frac{\wp'(\mathfrak{z})[\wp'(\mathfrak{z})-\wp'(z)]}{[\wp'(\mathfrak{z})-\wp'(z)]^2}=-\wp(z+\mathfrak{z})+\wp(\mathfrak{z}),$$

y sumamos término a término las igualdades obtenidas

$$\frac{1}{2}\frac{\wp''(z)-\wp''(\mathfrak{z})}{\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})}-\frac{1}{2}\frac{[\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})]^2}{[\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})]^2}=-2\wp(z+\mathfrak{z})+\wp(z)+\wp(\mathfrak{z}). \tag{6.8:6'}$$

Obsérvese finalmente que de la ecuación

$$[\wp'(z)]^2=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3$$

se deduce que

$$2\wp'(z)\wp''(z)=12\wp^2(z)\wp'(z)-g_2\wp'(z),$$

o sea

$$\wp''(z)=6\wp^2(z)-\frac{1}{2}g_2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{\wp''(z)-\wp''(\mathfrak{z})}{\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})}=\frac{1}{2}\frac{6[\wp^2(z)-\wp^2(\mathfrak{z})]}{\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})}=3[\wp(z)+\wp(\mathfrak{z})]$$

y, por consiguiente, la relación (6.8:6′) puede expresarse en la forma

$$\wp(z+\mathfrak{z})+\wp(z)+\wp(\mathfrak{z})=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})}{\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})}\right]^2. \tag{6.8:7}$$

Esta es una de las formas del **teorema de la suma** para la función elíptica $\wp(z)$. En efecto, la fórmula (6.8:7) representa una relación **algebraica** entre $\wp(z+\mathfrak{z})$, $\wp(z)$ *y* $\wp(\mathfrak{z})$, si se emplean además las ecuaciones:

$$[\wp'(z)]^2=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3,$$
$$[\wp'(\mathfrak{z})]^2=4\wp^3(\mathfrak{z})-g_2\wp(\mathfrak{z})-g_3.$$

6.9. *Como un ejemplo simple de aplicación de las funciones de Weierstrass, consideremos el problema del* **péndulo esférico**. *Así se llama un punto material que se mueve sin rozamiento sobre la superficie de una esfera.*

Elijamos un sistema de coordenadas cilíndrico así como se muestra en la fig. 54. Entonces la ecuación de la esfera se expresa así:

$$\rho^2 + u^2 = l^2, \tag{6.9:1}$$

donde l es el radio de la esfera. Como el péndulo está bajo la acción de la fuerza de gravedad $-mg$ y la reacción normal de la esfera, según el teorema de las fuerzas vivas, aplicado al péndulo, tendremos:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -mg(u - u_0),$$

o sea,

$$V^2 = -2gu + h, \tag{6.9:2}$$

donde h es una constante.

Por otra parte, como las fuerzas que actúan sobre el péndulo siempre están situadas en un plano con el eje u, se puede aplicar también el teorema de las áreas, el cual afirma que la velocidad

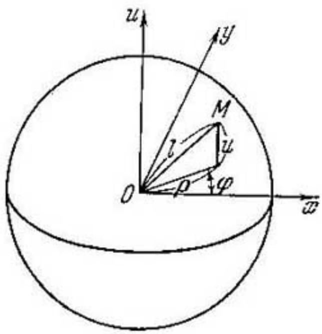

FIG. 54.

areolar del movimiento de la proyección del péndulo sobre el plano $u = 0$ respecto del origen de coordenadas se mantiene constante:

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C. \tag{6.9:3}$$

De aquí se deduce que el ángulo φ es una función monótona del tiempo t. Las ecuaciones (6.9:1), (6.9:2) y (6.9:3) determinan las coordenadas u, ρ y φ del punto móvil en función del tiempo. Demostremos que estas coordenadas se expresan mediante las funciones $\wp$, ζ y σ.

Determinemos primero u, para lo cual eliminamos ρ y φ en las ecuaciones en cuestión.

Se tiene:

$$\rho = \underset{+}{\sqrt{l^2 - u^2}}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{\rho^2}$$

y

$$V^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

Por consiguiente, de (6.9:2) obtenemos:

$$\frac{u^2u'^2}{l^2 - u^2} + \frac{C^2}{l^2 - u^2} + u'^2 = -2gu + h,$$

donde se ha puesto $\frac{du}{dt} = u'$. De aquí que

$$l^2u'^2 = (h - 2gu)(l^2 - u^2) - C^2 = q(u), \qquad (6.9:4)$$

donde $q(u)$ es un polinomio de tercer grado.

Si u_0 $(-l < u_0 < l)$ es la coordenada del péndulo en el momento inicial, entonces, evidentemente, tendremos que tener: $q(u_0) \geqslant 0$ (puesto que la velocidad $u' = \pm \frac{\sqrt{q(u)}}{l}$ es un número real).

Observando que $q(+\infty) = +\infty$, $q(l) = -C^2 < 0$, $q(u_0) \geqslant 0$, $q(-l) = -C^2 < 0$, $q(-\infty) = -\infty$, sacamos la conclusión de que todos los ceros u_1, u_2, u_3 del polinomio de tercer grado $q(u)$ son reales. Si $q(u_0) > 0$, entonces éstos están situados en los intervalos $(l, +\infty)$, (u_0, l) y $(-l, u_0)$, uno en cada intervalo. Designémoslos en el orden siguiente:

$$-l < u_3 < u_0 < u_2 < l < u_1, \qquad (6.9:5)$$

Si $q(u_0) = 0$, entonces en el intervalo $(l, +\infty)$ habrá igual que anteriormente un cero u_1, de modo que el número total de ceros en el mismo será impar, mientras que el intervalo $(-\infty, -l)$ no contendrá ningún cero (puesto que el número total de ceros en el mismo es par). Por consiguiente, dos ceros tienen que estar situados en uno de los semiintervalos $(-l, u_0]$ o $[u_0, l)$ y resulta la misma disposición que antes, con la sola diferencia que entre u_0 y u_3 o entre u_0 y u_2 aparece el signo de igualdad. En particular, es posible el caso en que

$$u_2 = u_3 = u_0.$$

Entonces $q(u) = 2g(u - u_1)(u - u_0)^2$, y, como fácilmente se observa, la ecuación (6.9:4) es integrable en funciones elementales.

Omitimos la discusión de este caso particular *). Así, pues, a continuación se supone que todas las raíces de la ecuación $q(u) = 0$ son simples.

En este caso $q(u)$ se mantiene no negativo en el segmento $[u_3, u_2]$, que contiene el valor u_0, y cambia de signo al pasar u por la frontera de este segmento. De aquí se deduce que durante todo el tiempo del movimiento la coordenada u tiene que satisfacer a las desigualdades

$$-l < u_3 \leqslant u \leqslant u_2 < l, \tag{6.9:6}$$

es decir, el péndulo se mantiene todo el tiempo dentro de cierto segmento esférico. Volviendo a examinar la ecuación (6.9:4), hagamos en la misma una sustitución de la forma

$$u = av + b,$$

donde $a \neq 0$ y b son unos coeficientes reales. Resulta:

$$a^2l^2v'^2 = q(av+b) \quad \text{o sea} \quad v'^2 = \frac{1}{a^2l^2} q(av+b).$$

Elijamos a y b de tal modo que el polinomio $\frac{1}{a^2l^2} q(av+b)$ tome la forma

$$4v^3 - g_2v - g_3.$$

Para ello es suficiente igualar a cuatro el coeficiente superior del polinomio e igualar a cero el coeficiente de v^2. Entonces tendremos:

$$a = \frac{2l^3}{g}, \quad b = \frac{h}{6g}. \tag{6.9:7}$$

Después de esto la ecuación (6.9:4) se escribe en la forma:

$$v'^2 = 4v^3 - g_2v - g_3. \tag{6.9:8}$$

Los ceros del polinomio $4v^3 - g_2v - g_3$ son:

$$e_j = \frac{u_j - b}{a} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

donde $e_1 > e_2 > e_3$, puesto que $u_1 > u_2 > u_3$ y $a > 0$. Al segmento $u_3 \leqslant u \leqslant u_2$ le corresponde ahora el segmento $e_3 \leqslant v \leqslant e_2$.

De aquí se deduce que el discriminante

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0,$$

---

*) Véase este caso, por ejemplo, en el libro de G. K. S ú s l o v, Mecánica teórica (Г. К. С у с л о в, Теоретическая механика, Издание третье, Гостехиздат, 1944, стр 204—207).

y, por consiguiente (ap. 6.5), existe una función elíptica $\wp(\tau)$ con los períodos fundamentales: uno real 2α y uno imaginario puro $2i\beta$, la cual satisface a la ecuación

$$[\wp'(\tau)]^2 = 4[\wp(\tau)]^3 - g_2\wp(\tau) - g_3. \tag{6.9:9}$$

Los períodos 2α y $2i\beta$ se calculan por las fórmulas (6.5:1):

$$\alpha = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3}}, \quad \beta = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{d\lambda}{\sqrt{-(4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3)}}.$$

Si $\tau = \sigma + i\beta$, entonces, como ya se vio en el ap. 6.3, $\wp(\tau) = \wp(\sigma + i\beta)$ es una función de σ de período 2α, la cual es diferenciable y creciente desde e_3 hasta e_2 en el segmento $[0, \alpha]$ y decreciente desde e_2 hasta e_3 en el segmento $[\alpha, 2\alpha]$. Los mismos valores toma también $\wp(\tau)$ en cualquier recta $\tau = \sigma + (2k + 1) i\beta$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. Hagamos en la ecuación (6.9:8) una sustitución más de la función incógnita v:

$$v = \wp(\sigma + i\beta).$$

Resulta:

$$\left(\frac{d\wp(\sigma + i\beta)}{d\sigma}\right)^2 \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 4[\wp(\sigma + i\beta)]^3 - g_2\wp(\sigma + i\beta) - g_3,$$

de donde

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 1,$$

o sea,

$$\sigma = \pm(t - t_0),$$

donde $\pm t_0$ es la constante de integración y, por consiguiente,

$$v = \wp[\pm(t - t_0) + i\beta].$$

Como

$$\wp(-\sigma + i\beta) = \wp(\sigma - i\beta) = \wp(\sigma + i\beta),$$

la elección del signo en el resultado obtenido es indiferente. Haremos

$$v = \wp[(t - t_0) + i\beta]$$

de modo que para $t = t_0$ $\wp(i\beta) = e_3 = \min v$. Calcularemos el tiempo t desde este momento; entonces tendremos:

$$v = \wp(t + i\beta)$$

y

$$u = av + b = \frac{2l^2}{g}\wp(t+i\beta) + \frac{h}{g}. \qquad (6.9:10)$$

Así, pues, la ecuación (6.9:4) queda resuelta. Como $l^2u'^2 - q(u)$ es una función meromorfa de u, la cual se anula para todos los $0 \leqslant t < \infty$, o sea, para todos los u del segmento $u_3 \leqslant u \leqslant u_2$, resulta que, en virtud del teorema de unicidad para las funciones analíticas, ésta es idénticamente igual a cero. Por consiguiente, para cualquier número complejo τ se tiene:

$$l^2u'^2 - q(u) = a^2l^2\wp'^2(\tau) - q[a\wp(\tau) + b] = 0. \qquad (6.9:4')$$

Esta observación la emplearemos más adelante.

Ha resultado que u es una función periódica de t, de período 2α, la cual se expresa mediante una función elíptica $\wp$; además, alcanza el valor mínimo u_3 en los momentos $t = 0, 2\alpha, 4\alpha, \ldots$ y el valor máximo u_2 en los momentos $t = \alpha, 3\alpha, 5\alpha, \ldots$

Para calcular el ángulo $\varphi = \varphi(t)$, expresemos $d\varphi$ en la forma

$$d\varphi = \frac{C\,dt}{l^2-u^2} = \frac{C\,dt}{2l}\left(-\frac{1}{u-l} + \frac{1}{u+l}\right).$$

Obsérvese que la función $u = a\wp(\tau) + b$ toma los valores $\pm l$ para

$$\wp(\tau) = \frac{\pm l - b}{a}.$$

Pero

$$\frac{l-b}{a} > \frac{u_2-b}{a} = e_2 \quad \text{y} \quad \frac{-l-b}{a} < \frac{u_3-b}{a} = e_3.$$

Por consiguiente (véase el ap. 6.3), el valor de τ que satisface a la condición

$$u = a\wp(\tau) + b = l,$$

puede expresarse en la forma

$$\tau = \alpha + i\gamma,$$

y el valor de τ que satisface a la condición

$$u = a\wp(\tau) + b = -l,$$

en la forma

$$\tau = i\delta,$$

donde γ y δ son números reales.

Así, pues,

$$u - l = a[\wp(t) - \wp(\alpha + i\gamma)], \quad u + l = a[\wp(t) - \wp(i\delta)]$$

y

$$d\varphi=\frac{C\,dt}{2al}\left[-\frac{1}{\wp(t)-\wp(\alpha+i\gamma)}+\frac{1}{\wp(t)-\wp(i\delta)}\right].\qquad(6.9{:}11)$$

Para calcular aquí la constante C, obsérvese que debido a (6.9:4') y (6.9:4)

$$a^2l^2\,[\wp'(\alpha+i\gamma)]^2=q(l)=-C^2$$

y

$$a^2l^2\,[\wp'(i\delta)]^2=q(-l)=-C^2.$$

De aquí que

$$[\wp'(\alpha+i\gamma)]^2=[\wp'(i\delta)]^2=-\frac{C^2}{a^2l^2}.$$

Como

$$\wp(\alpha+i\gamma)=\wp(-\alpha-i\gamma)=\wp(\alpha-i\gamma)=l$$

y

$$\wp(i\delta)=\wp(-i\delta)=-l,$$

mientras que

$$\wp'(\alpha+i\gamma)=-\wp'(-\alpha-i\gamma)=-\wp'(\alpha-i\gamma)$$

y

$$\wp'(i\delta)=-\wp'(-i\delta),$$

se pueden elegir los valores de γ y δ de tal modo que se cumplan las igualdades

$$\wp'(\alpha+i\gamma)=\wp'(i\delta)=\frac{iC}{al}$$

junto con las igualdades $\wp(\alpha+i\gamma)=l$ y $\wp(i\delta)=-l$. Entonces la ecuación (6.9:11) se escribe en la forma

$$2i\,\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\wp'(i\delta)}{\wp(t)-\wp(i\delta)}-\frac{\wp'(\alpha+i\gamma)}{\wp(t)-\wp(\alpha+i\gamma)}$$

o, en virtud de la fórmula (6.8:1')

$$\begin{aligned}2i\,\frac{d\varphi}{dt}&=-\zeta(i\delta+t)-\zeta(i\delta-t)+2\zeta(i\delta)\\&+\zeta(\alpha+i\gamma+t)+\zeta(\alpha+i\gamma-t)-2\zeta(\alpha+i\gamma),\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}2i\varphi&=\operatorname{Ln}A-\operatorname{Ln}\sigma(t+i\delta)+\operatorname{Ln}\sigma(t-i\delta)+2\zeta(i\delta)\,t+\\&+\operatorname{Ln}\sigma(t-\alpha+i\gamma)-\operatorname{Ln}\sigma(t-\alpha-i\gamma)-2\zeta(\alpha+i\gamma)\,t\end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$e^{2i\varphi} = A\frac{\sigma(t+\alpha+i\gamma)\,\sigma(t-i\delta)}{\sigma(t-\alpha-i\gamma)\,\sigma(t+i\delta)}\exp 2\,[\zeta(i\delta)-\zeta(\alpha+i\gamma)]\,t.$$

Para $t=0$ resulta: $e^{2i\varphi_0}=A$; por lo tanto,

$$e^{2i(\varphi-\varphi_0)} = \exp 2\,[\zeta(i\delta)-\zeta(\alpha+i\gamma)]\,t\cdot\frac{\sigma(t+\alpha+i\gamma)\,\sigma(t-i\delta)}{\sigma(t-\alpha-i\gamma)\,\sigma(t+i\delta)}. \qquad (6.9:12)$$

Las fórmulas (6.9:10) y (6.9:12) resuelven completamente el problema del movimiento del péndulo esférico. De la fórmula (6.6:9)

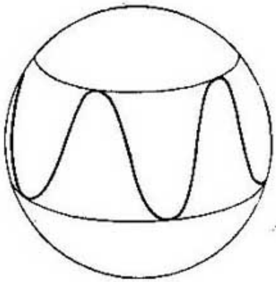

FIG. 55.

se deduce que, cuando t varía en una magnitud igual al período 2α, el segundo miembro de la fórmula (6.9:12) adquiere un factor de la forma

$$\exp 2\,\{2\alpha\,[\zeta(i\delta)-\zeta(\alpha+i\gamma)]+2\eta_1(2\alpha+i\gamma-i\delta)\}$$

y, por consiguiente, el ángulo φ varía en una cantidad constante. En la figura 55 está representada la trayectoria del péndulo esférico.

6.10. En este apartado nos dedicaremos a construir las funciones elípticas de Jacobi mediante las sigma-funciones asociadas (ap. 6.8).

De las fórmulas (6.8:3) y de las propiedades de la función $\sigma(z)$ se deduce que $\sigma_j(z)$ ($j=1, 2, 3$) son funciones enteras con ceros simples en los puntos

$$2n\omega_1+2m\omega_3-\omega_j \qquad (j=1,\ 2,\ 3).$$

Estos ceros vienen escritos en la tabla siguiente:

$\sigma_1(z)$	$\sigma_2(z)$	$\sigma_3(z)$
$(2n-1)\omega_1+2m\omega_3$	$(2n-1)\omega_1+(2m-1)\omega_3$	$2n\omega_1+(2m-1)\omega_3$

Está claro que

$$\sigma_j(-z) = e^{\eta_j z} \frac{\sigma(-z+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)} = \frac{e^{-\eta_j z}}{\sigma(\omega_j)} [-e^{2\eta_j z} \sigma(z-\omega_j)],$$

de donde, en virtud de (6.6:9)

$$\sigma_j(-z) = e^{-\eta_j z} \frac{\sigma(z+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)} = \sigma_j(z),$$

o sea, $\sigma_j(z)$ ($j = 1, 2, 3$) son todas funciones pares de z. Obsérvese que $\sigma_j(0) = 1$ ($j = 1, 2, 3$). Por otra parte, mediante (6.6:9) se obtienen las siguientes fórmulas que muestran cómo varían las funciones $\sigma_j(z)$ al sustituir z por $z + 2\omega_k$:

$$\sigma_j(z+2\omega_k) = \exp[-\eta_j(z+2\omega_k)] \frac{\sigma(z+\omega_j+2\omega_k)}{\sigma(\omega_j)} =$$

$$= -\exp[-\eta_j(z+2\omega_k)+2\eta_k(z+\omega_j+\omega_k)] \frac{\sigma(z+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)} =$$

$$= -\exp[2\eta_k(z+\omega_k)+2\eta_k\omega_j-2\omega_k\eta_j]\,\sigma_j(z).$$

Si aquí $j \neq k$, entonces, según las fórmulas (6.6:5) o (6.6:5′)

$$2\eta_k\omega_j - 2\omega_k\eta_j = \pm\pi i$$

y, por consiguiente,

$$\sigma_j(z+2\omega_k) = e^{2\eta_k(z+\omega_k)}\,\sigma_j(z); \tag{6.10:1}$$

si $j = k$ resulta:

$$\sigma_j(z+2\omega_j) = -e^{2\eta_j(z+\omega_j)}\sigma_j(z). \tag{6.10:2}$$

Consideremos las siguientes razones de las sigma-funciones:

$$\lambda(z) = \frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \lambda_1(z) = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)}, \quad \lambda_2(z) = \frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)}. \tag{6.10:3}$$

Todas estas funciones son meromorfas, con unos mismos polos, simples en los puntos $2n\omega_1 + (2m-1)\,\omega_3$. Sus ceros vienen escritos en la siguiente tabla:

$\lambda(z)$	$\lambda_1(z)$	$\lambda_2(z)$
$2n\omega_1 + 2m\omega_3$	$(2n-1)\,\omega_1 + 2m\omega_3$	$(2n-1)\,\omega_1 + (2m-1)\,\omega_3$

Todos ellos son simples. La función $\lambda(z)$ es impar, mientras que las funciones $\lambda_1(z)$ y $\lambda_2(z)$ son pares, siendo

$$\lambda(0) = 0, \; \lambda'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\sigma(z)}{z} \frac{1}{\sigma_3(z)} = 1, \; \lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 1.$$

Debido a las fórmulas (6.6:9), (6.10:1) y (6.10:2), se tiene:

$$\lambda(z+2\omega_1)=\frac{-\exp[2\eta_1(z+\omega_1)]\,\sigma(z)}{\exp[2\eta_1(z+\omega_1)]\,\sigma_3(z)}=-\lambda(z),$$

$$\lambda(z+2\omega_3)=\frac{-\exp[2\eta_3(z+\omega_3)]\,\sigma(z)}{-\exp[2\eta_3(z+\omega_3)]\,\sigma_3(z)}=\lambda(z).$$

De un modo similar hallamos:

$$\lambda_1(z+2\omega_1)=-\lambda_1(z),\qquad \lambda_1(z+2\omega_2)=\lambda_1(z),$$
$$\lambda_2(z+2\omega_1)=\lambda_2(z)\qquad \lambda_2(z+2\omega_3)=-\lambda_2(z).$$

De aquí se deduce que las funciones en cuestión son doblemente periódicas y, por consiguiente, son elípticas, con los pares de períodos $4\omega_1$ y $2\omega_3$ para $\lambda(z)$, $4\omega_1$ y $2\omega_2$ para $\lambda_1(z)$, $2\omega_1$ y $4\omega_3$ para $\lambda_2(z)$.

Fácilmente se observa que estos pares de períodos son fundamentales para las funciones correspondientes. Comprobemos esto para $\lambda(z)$. Si $\lambda(z+\Omega)=\lambda(z)$ y z es un polo de la función $\lambda(z)$: $z=2n\omega_1+(2m-1)\,\omega_3$, entonces $z+\Omega$ también tiene que ser un polo y, por consiguiente,

$$z+\Omega=2n'\omega_1+(2m'-1)\,\omega_3.$$

de donde

$$\Omega=2\mu\omega_1+2\nu\omega_3,$$

donde μ y ν son números enteros. Si μ es un número par, entonces Ω es una combinación lineal entera (de coeficientes enteros) de los períodos $4\omega_1$ y $2\omega_3$. Suponiendo que μ es impar: $\mu=2\mu'+1$, obtenemos:

$$\Omega-4\mu'\omega_1-2\nu\omega_3=2\omega_1,$$

es decir, $2\omega_1$ tiene que ser un período de la función $\lambda(z)$. Pero esto contradice a que $\lambda(z+2\omega_1)=-\lambda(z)$. En resumen, cualquier período Ω de la función $\lambda(z)$ es combinación lineal entera de los períodos $4\omega_1$ y $2\omega_3$, es decir, estos últimos son los períodos fundamentales de la función $\lambda(z)$.

En la fig. 56 están representados los paralelogramos fundamentales de períodos para $\lambda(z)$, $\lambda_1(z)$ y $\lambda_2(z)$, en los cuales los ceros de las funciones correspondientes se señalan con redondeles y los polos con cruces.

Vemos, pues, que todas estas funciones son elípticas de segundo orden, así como la función $\wp(z)$. La diferencia esencial con esta última consiste en que ambos polos de cada una de las funciones $\lambda(z)$, $\lambda_1(z)$ y $\lambda_2(z)$ son simples, mientras que $\wp(z)$ posee en el paralelogramo de períodos un solo polo doble.

La diferencia entre las funciones $\lambda(z)$, $\lambda_1(z)$ y $\lambda_2(z)$ y las funciones elípticas de Jacobi clásicas no es esencial. Para obtener estas últimas, consideremos el número complejo $\sqrt{e_1 - e_3}$ ($e_j = \wp(\omega_j)$).

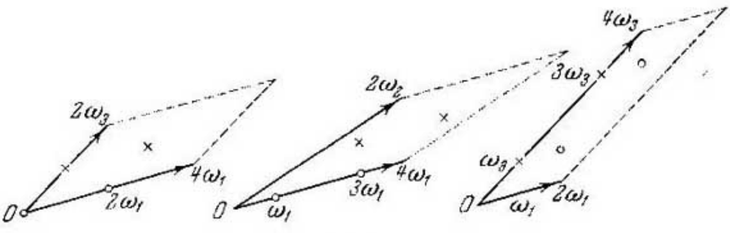

FIG. 56.

Fijando algún valor de la raíz cuadrada (por ejemplo, $\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)}$, véase la fórmula (6.8:4)), introduzcamos las siguientes notaciones:

$$\sqrt{e_1-e_3}\cdot z = u, \quad \sqrt{e_1-e_3}\cdot\omega_1 = K, \quad \sqrt{e_1-e_3}\cdot\omega_3 = iK', \qquad (6.10:4)$$

y hagamos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \sqrt{e_1-e_3}\,\lambda(z) = \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}, \\ \operatorname{cn} u &= \lambda_1(z) = \frac{\sigma_1\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}, \quad \operatorname{dn} u = \lambda_2(z) = \frac{\sigma_2\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.10:5)$$

Estas se llaman *funciones de Jacobi*. Sus denominaciones se leen letra por letra (por ejemplo, «ese ene u»). Todas sus propiedades se deducen inmediatamente de las propiedades de las funciones $\lambda(z)$, $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$. En la fig. 57 se muestran las gráficas de las funciones de Jacobi para $z = x$ real (en este caso se supone que K y K' también son reales).

He aquí las propiedades más elementales de las funciones de Jacobi:

1) $\operatorname{sn} u$ es una función elíptica de segundo orden, con los períodos fundamentales $4K$ y $2iK'$, con los polos simples $2nK +$

$+ (2m - 1)\, iK'$ y con los ceros simples $2nK + 2miK'$. Esta es una función impar; además, $\operatorname{sn} 0 = 0$ y $\operatorname{sn}' 0 = 1$.

2) $\operatorname{cn} u$ es una función elíptica de segundo orden, con los períodos fundamentales $4K$ y $2K + 2iK'$, con los polos simples $2nK + (2m - 1)\, iK'$ y con los ceros simples $(2n - 1)\, K + 2miK'$. Esta es una función par; además, $\operatorname{cn} 0 = 1$.

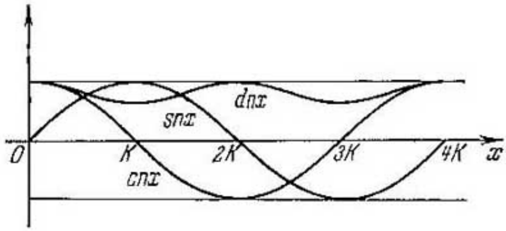

FIG. 57.

3) $\operatorname{dn} u$ es una función elíptica de segundo orden, con los períodos fundamentales $2K$ y $4iK'$, con los polos simples $2nK + (2m - 1)\, iK'$ y con los ceros simples $(2n - 1)\, K + (2m - 1)\, iK'$. Esta es una función par; además, $\operatorname{dn} 0 = 1$.

Comparando las fórmulas (6.10:5) y (6.8:4) hallamos las siguientes expresiones de las funciones de Jacobi mediante la función de Weierstrass $\wp(z)$ $(z = u/\sqrt{e_1 - e_3})$:

$$\operatorname{sn} u = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp(z) - e_3}}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\sqrt{\wp(z) - e_1}}{\sqrt{\wp(z) - e_3}}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{\wp(z) - e_2}}{\sqrt{\wp(z) - e_3}}. \tag{6.10:5'}$$

De aquí se deducen inmediatamente las siguientes relaciones algebraicas entre las funciones de Jacobi:

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1, \tag{6.10:6}$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \tag{6.10:7}$$

es un número que se llama **módulo de las funciones de Jacobi**.

De la primera de las fórmulas (6.10:5') obtenemos:

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 u},$$

de donde

$$\wp'(z) = -\frac{2(e_1-e_3)^{\frac{3}{2}}(\operatorname{sn} u)'}{\operatorname{sn}^3 u}.$$

Por otra parte, de la fórmula (6.8:5) se deduce que

$$\wp'(z) = -2\frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)} = -2\frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)}\frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)} : \left[\frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}\right]^3 =$$

$$= -2\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u : \frac{\operatorname{sn}^3 u}{(e_1-e_3)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2(e_1-e_3)^{\frac{3}{2}}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^3 u}.$$

Comparando las dos expresiones de $\wp'(z)$, hallamos:

$$(\operatorname{sn} u)' = \operatorname{cn} u\, dn\, u. \tag{6.10:8}$$

Derivando las relaciones (6.10:6) y aplicando la fórmula (6.10:8) obtenemos para las derivadas de $\operatorname{cn} u$ y $\operatorname{dn} u$ las fórmulas:

$$(\operatorname{cn} u)' = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad (\operatorname{dn} u)' = -k^2 \operatorname{sn} u\, dn\, u. \tag{6.10:9}$$

Mediante las relaciones (6.10:6) la igualdad (6.10:8) puede expresarse en la forma

$$(\operatorname{sn} u)' = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u)},$$

donde se debe tomar el valor de la raíz que es igual a 1 para $u=0$. De aquí que

$$u = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{6.10:10}$$

es decir, la función $\operatorname{sn} u$ es inversa respecto de la integral elíptica de primera especie en la forma normal de Legendre.

6.11. Para los cálculos numéricos en los que figuran funciones elípticas es importante tener unas expresiones analíticas de las mismas que posean una convergencia rápida. Por cierto, no satisfacen a esta condición los desarrollos en fracciones simples de las funciones $\wp(z)$ y $\zeta(z)$, ni tampoco el desarrollo en producto infinito de la función $\sigma(z)$, es decir, el aparato analítico mediante el cual expresamos diversas funciones elípticas.

Sin embargo, existen unas expresiones de las funciones elípticas que son rápidamente convergentes. En el caso de las funciones de Jacobi éstas pueden obtenerse sustituyendo los cocientes de las sigma-funciones por los cocientes de otras funciones periódicas enteras.

Consideremos de nuevo las fórmulas (6.6:9):

$$\sigma(z+2\omega_j) = -\sigma(z)\, e^{2\eta_j(z+\omega_j)}. \qquad (6.11:1)$$

Es fácil señalar una función elemental entera que al sustituir z por $z+2\omega_1$ adquiera el mismo factor que la función $\sigma(z)$. En efecto, sea $f(z) = \exp(\alpha z^2 + \beta z)$, donde α y β son unos coeficientes que se determinarán a continuación. Se tiene:

$$f(z+2\omega_j) = \exp(\alpha z^2 + \beta z)\exp[4\alpha\omega_j(z+\omega_j) + 2\beta\omega_j].$$

Para obtener el factor necesario para $j=1$, hagamos:

$$\alpha = \frac{\eta_1}{2\omega_1} \quad \text{y} \quad \beta = -\frac{\pi i}{2\omega_1}.$$

Entonces para la función

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z)}{\exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2 - \frac{\pi i}{2\omega_1}z\right)} = \sigma(z)\exp\left(-\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2 + \frac{\pi i}{2\omega_1}z\right)$$

tendremos:

$$\varphi(z+2\omega_1) = \varphi(z),$$

$$\varphi(z+2\omega_3) = -\varphi(z)\exp\left[\frac{2\eta_3\omega_1 - 2\eta_1\omega_3}{\omega_1}(z+\omega_3) + \frac{\pi i\omega_3}{\omega_1}\right] =$$

$$= -\varphi(z)\exp\left(-\frac{\pi i}{\omega_1}z\right)$$

(hemos aplicado aquí la fórmula (6.6:5)).

Hagamos $\frac{z}{2\omega_1} = v$ y $e^{\pi i v} = s$; entonces tendremos:

$$\varphi(z+2\omega_1) = \varphi(z), \quad \varphi(z+2\omega_3) = -\varphi(z)\, s^{-2}. \qquad (6.11:2)$$

La función que hemos construido difiere de $\sigma(z)$ solamente en el factor $\exp\left(-\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2 + \frac{\pi i}{2\omega_1}z\right)$, que carece de ceros, y tiene la ventaja ante $\sigma(z)$ de que ella es periódica y ésta última no lo es.

Hallemos el desarrollo de la función periódica $\varphi(z)$ en serie de potencias de $e^{\frac{2\pi i z}{2\omega_1}} = e^{2\pi i v} = s^2$ $\Bigl($véase (5.2:3), donde $\zeta = \frac{2\pi z}{\omega} = \frac{2\pi z}{2\omega_1}\Bigr)$:

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k s^{2k};$$

esta serie es absoluta y uniformemente convergente en cualquier conjunto cerrado que no contenga los puntos $s=0$ y $s=\infty$. Sustituyamos aquí z por $z + 2\omega_3$ y observemos que con esto v se reemplaza por $v + \frac{\omega_3}{\omega_1} = v + \tau$, y s^2 por $s^2 e^{2\pi i \tau} = s^2 q^2$. Resulta:

$$\varphi(z + 2\omega_3) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k q^{2k} s^{2k},$$

de donde, en virtud de (6.11:2),

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k q^{2k} s^{2k} = -s^{-2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m s^{2m}.$$

Como el desarrollo en serie de Laurent posee la propiedad de unicidad, de aquí se deduce que

$$\alpha_k q^{2k} = -\alpha_{k+1},$$

o sea,

$$(-1)^{k+1} \alpha_{k+1} q^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} = (-1)^k \alpha_k q^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Por ello

$$(-1)^k \alpha_k q^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} = C,$$

donde C es una constante, de aquí que

$$\alpha_k = C(-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}$$

y, por consiguiente,

$$\varphi(z) = C \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} s^{2k} = C \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{2\pi i k v} =$$

$$= C e^{\pi i v} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v}.$$

La función $i \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v}$ representa una de las **theta-funciones de Jacobi**; se representa por $\vartheta_1(v)$. Así pues,

$$\vartheta_1(v) = i \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v} =$$

$$= 2 \sum_{0}^{\infty} (-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \operatorname{sen}(2m+1)\pi v. \qquad (6.11:3)$$

Por consiguiente,

$$\varphi(z)=\sigma(z)\exp\left(-\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2+\frac{\pi i}{2\omega_1}z\right)=-Ci\exp\frac{\pi iz}{2\omega_1}\vartheta_1(v)$$

y

$$\sigma(z)=-Ci\exp\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\vartheta_1(v).$$

Para determinar aquí el valor de la constante C, dividamos ambos miembros por $z=2\omega_1 v$ y pasemos a límites para $z\to 0$. Resulta:

$$1=-Ci\lim\frac{\vartheta_1(v)}{2\omega_1 v}=-\frac{Ci}{2\omega_1}\vartheta_1'(0),$$

o sea,

$$-Ci=\frac{2\omega_1}{\vartheta_1'(0)}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma(z)=2\omega_1\exp\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)} \qquad (6.11:4)$$

Esta fórmula permite deducir todas las propiedades de la función $\vartheta_1(v)$ de las propiedades respectivas de la función $\sigma(z)$.

De aquí o directamente de (6.11:3), sacamos la conclusión que $\vartheta_1(v)$ es una función entera impar de período 2. Como $q=e^{\pi i\tau}$ y $\operatorname{Im}\tau=\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)>0$, resulta $|q|<1$ y, por consiguiente, el desarrollo (6.11:3), cada término del cual contiene el factor $q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$, posee una convergencia extraordinariamente rápida. La ventaja de las theta-funciones de Jacobi ante las sigma-funciones de Weierstrass estriba precisamente en la existencia de un desarrollo semejante.

Como todos los ceros de la función $\sigma(z)$ son simples y tienen la forma $z=2n\omega_1+2m\omega_3$, de la fórmula (6.11:4) se desprende que todos los ceros de la función $\vartheta_1(v)$ también son simples y están contenidos en la fórmula

$$v=n+m\tau \quad \left(\tau=\frac{\omega_3}{\omega_1};\ m,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\right).$$

Del mismo modo que la función $\vartheta_1(v)$ está ligada con la función $\sigma(z)$, las otras tres theta-funciones de Jacobi están ligadas con las funciones $\sigma_j(z)$ $(j=1,\ 2,\ 3)$. Mediante la fórmula (6.11:4) se halla que

$$\sigma_j(z)=e^{-\eta_j z}\frac{\sigma(z+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)}=$$

$$=\frac{2\omega_1}{\sigma(\omega_j)\vartheta_1'(0)}\exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2+\frac{2\eta_1\omega_j-2\omega_1\eta_j}{2\omega_1}z+\frac{\eta_1\omega_j^2}{2\omega_1}\right)\vartheta_1\left(v+\frac{\omega_j}{2\omega_1}\right),$$

de donde

$$\sigma_1(z) = C_1 e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2} \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right),$$

$$\sigma_2(z) = C_2 e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2} \cdot e^{\pi i v} \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right),$$

$$\sigma_3(z) = C_3 e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2} e^{\pi i v} \vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right).$$

Del desarrollo (6.11:3) se deduce que

$$\vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v},$$

$$\vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v} e^{(2k-1)\pi i \frac{\tau}{2}} =$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} e^{-\pi i v} \sum_{-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2k\pi i v},$$

$$(6.11:5)$$

$$\vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = i \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v} e^{(2k-1)\pi i \frac{\tau}{2}} =$$

$$= i q^{-\frac{1}{4}} e^{-\pi i v} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} e^{2k\pi i v}.$$

Hagamos

$$\vartheta_2(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v} = 2 \sum_{0}^{\infty} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2m+1)\pi v,$$

$$\vartheta_3(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2k\pi i v} = 1 + 2 \sum_{1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2m\pi v, \qquad (6.11:6)$$

$$\vartheta_4(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} e^{2k\pi i v} = 1 + 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2m\pi v.$$

Estas son las otras tres theta-funciones de Jacobi. Comparando las fórmulas (6.11:5) y (6.11:6) sacamos la conclusión que

$$\vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(v), \quad \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) =$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} e^{-\pi i v} \vartheta_3(v), \quad \vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = i q^{-\frac{1}{4}} e^{-\pi i v} \vartheta_4(v). \qquad (6.11:7)$$

Por lo tanto, para las funciones $\sigma_j(z)$ hallamos las siguientes expresiones:

$$\sigma_1(z) = C_1 e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2} \vartheta_2(v), \ \sigma_2(z) = C_2' e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2} \vartheta_3(v), \ \sigma_3(z) = C_3' e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2} \vartheta_4(v).$$

Pongamos aquí $z = 0$ (y, por consiguiente, $v = 0$). Obtenemos:

$$1 = C_1 \vartheta_2(0), \ 1 = C_2' \vartheta_3(0), \ 1 = C_3' \vartheta_4(0),$$

por lo cual

$$\sigma_j(z) = \exp \frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2 \, \frac{\vartheta_{j+1}(v)}{\vartheta_{j+1}(0)} \qquad (j = 1, 2, 3). \qquad (6.11{:}8)$$

De los desarrollos (6.11:3) y (6.11:6) es fácil deducir unas fórmulas análogas a (6.11:7), las cuales expresan las variaciones de $\vartheta_j(v)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) al sustituir v por $v + \frac{1}{2}$, $v + \frac{\tau}{2}$, $v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, $v + 1$, $v + \tau$, $v + 1 + \tau$. Dejando los cálculos a cuenta del lector, expondremos los resultados en la tabla siguiente:

v	$v + \frac{1}{2}$	$v + \frac{\tau}{2}$	$v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$	$v + 1$	$v + \tau$	$v + 1 + \tau$
ϑ_1	ϑ_2	$iM\vartheta_4$	$M\vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-N\vartheta_1$	$N\vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$M\vartheta_3$	$-iM\vartheta_4$	$-\vartheta_2$	$N\vartheta_2$	$-N\vartheta_2$ (*)
ϑ_3	ϑ_4	$M\vartheta_2$	$iM\vartheta_1$	ϑ_3	$N\vartheta_3$	$N\vartheta_3$
ϑ_4	ϑ_3	$iM\vartheta_1$	$M\vartheta_2$	ϑ_4	$-N\vartheta_4$	$-N\vartheta_4$

Aquí se han empleado las notaciones: $M = q^{-\frac{1}{4}} e^{-\pi i v}$, $N = q^{-1} e^{-2\pi i v}$.

Formemos también una tabla de los ceros de estas funciones. De la fórmula (6.11:7) se deduce que $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ y $\vartheta_4(v)$ tienen ceros simples, los cuales se obtienen de los ceros de la función $\vartheta_1(v)$ restando $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ y $\frac{\tau}{2}$, respectivamente. Por lo tanto, resulta la tabla siguiente:

$\vartheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$
$n+m\tau$	$n-\frac{1}{2}+m\tau$	$(n-\frac{1}{2})+(m-\frac{1}{2})\tau$	$n+(m-\frac{1}{2})\tau$

Señalemos que las funciones $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ y $\vartheta_4(v)$ son pares, lo cual se deduce de las fórmulas (6.11:6).

6.12. Examinemos ahora las expresiones de las funciones elípticas $\wp(z)$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ y $\operatorname{dn} u$ mediante las theta-funciones. Debido a las fórmulas (6.8:4), (6.11:4) y (6.11:8), se tiene:

$$\sqrt{\wp(z)-e_j}=\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1\vartheta_{j+1}(0)}\frac{\vartheta_{j+1}(v)}{\vartheta_1(v)} \qquad (j=1,\,2,\,3). \qquad (6.12:1)$$

donde $v=\frac{z}{2\omega_1}$. En particular, para $z=\omega_1$ y $j=3$ resulta:

$$\sqrt{e_1-e_3}=\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_4\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)};$$

análogamente, para $z=\omega_2$ y $j=3$ tendremos:

$$\sqrt{e_2-e_3}=\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_4\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)}=\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}.$$

Por consiguiente,

$$k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}=\left[\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2. \qquad (6.12:2)$$

De las fórmulas (6.10:5), (6.11:4) y (6.11.8) hallamos las siguientes expresiones para las funciones elípticas de Jacobi $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ y $\operatorname{dn} u$

$$(u=\sqrt{e_1-e_3}\,z=2\omega_1\sqrt{e_1-e_3}\,v=2Kv):$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sn} u=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{2\omega_1\vartheta_4(0)}{\vartheta_1'(0)}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)},\\&\operatorname{cn} u=\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \qquad \operatorname{dn} u=\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}.\end{aligned}\right\} \qquad (6.12:3)$$

De la fórmula (6.12:2) se deduce que $\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}$ es uno de los valores de $\frac{1}{\sqrt{k}}$. Fijemos este valor:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}. \qquad (6.12:4)$$

Haciendo luego

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

de las fórmulas (6.12:1) obtenemos:

$$k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} = \left[\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2. \tag{6.12:5}$$

Este número se llama **módulo complementario** de las funciones elípticas de Jacobi.

Por consiguiente, $\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}$ es uno de los valores de $\sqrt{k'}$.

Fijemos este valor:

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}. \tag{6.12:6}$$

Observando que

$$\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)} = \sqrt{\frac{k'}{k}},$$

escribamos las fórmulas (6.12:3) en la forma

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \ \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \ \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}. \tag{6.12:7}$$

Para usar estas fórmulas con los períodos dados $2\omega_1$ y $2\omega_3$ de la función $\wp(z)$, obramos del modo siguiente: Calculamos $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ y $q = e^{\pi i \tau}$; por las fórmulas (6.11:6) hallamos

$$\vartheta_2(0) = 2\sum_0^\infty q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}, \ \vartheta_3(0) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{m^2} \text{ y } \vartheta_4(0) =$$

$$= 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^m q^{m^2}$$

y por las fórmulas (6.12:4) y (6.12:6) calculamos $\frac{1}{\sqrt{k}}$ y $\sqrt{k'}$. Para pasar de u a $v = \frac{u}{2K}$ es necesario conocer también el valor de $K = \omega_1\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\vartheta_1'(0) \cdot \vartheta_3(0)}{2\vartheta_4(0)\vartheta_2(0)}$, es decir, además de lo hallado hay que hallar también el valor de

$$\vartheta_1'(0) = 2\sum_0^\infty (-1)^m (2m+1)\pi q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

De lo expuesto se deduce que para determinar las funciones $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ y $\operatorname{dn} u$, los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ no desempeñan ningún papel. Solamente es esencial su razón τ o el valor q.

Los cálculos con los valores de las theta-funciones y sus derivadas para $v = 0$ se simplifican si se utiliza la relación

$$\vartheta_1'(0) = \pi\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0). \qquad (6.12{:}8)$$

Para demostrarla, escribamos (6.12:1) en la forma

$$\sqrt{\wp(2\omega_1 v) - e_j} = \frac{1}{2\omega_1}\,\frac{1 + \dfrac{\vartheta_{j+1}''(0)}{\vartheta_{j+1}(0)}\dfrac{v^2}{2} + \ldots}{v + \dfrac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}\dfrac{v^3}{6} + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{2\omega_1 v}\left\{1 + \left[\frac{\vartheta_{j+1}''(0)}{\vartheta_{j+1}(0)} - \frac{1}{3}\,\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}\right]\frac{v^2}{2} + \ldots\right\}$$

(aquí se ha tenido en cuenta que las funciones $\vartheta_{j+1}(v)$ $(j = 1, 2, 3)$ son pares y que la función $\vartheta_1(v)$ es impar). De aquí que

$$\wp(2\omega_1 v) = \frac{1}{4\omega_1^2 v^2} + \left[\frac{\vartheta_{j+1}''(0)}{4\omega_1^2\vartheta_{j+1}(0)} - \frac{1}{3\cdot 4\omega_1^2}\cdot\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} - e_j\right] + \ldots,$$

y como el desarrollo de Laurent de la función $\wp(2\omega_1 v)$ en un entorno del origen de coordenadas no contienen el término independiente, resulta:

$$e_j = \frac{1}{4\omega_1^2}\left[\frac{1}{3}\,\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} - \frac{\vartheta_{j+1}''(0)}{\vartheta_{j+1}(0)}\right] \qquad (j = 1, 2, 3). \qquad (6.12{:}9)$$

De aquí que

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{1}{4\omega_1^2}\left[\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\vartheta_{j+1}''(0)}{\vartheta_{j+1}(0)}\right] = 0,$$

o sea,

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\vartheta_{j+1}''(0)}{\vartheta_{j+1}(0)}. \qquad (6.12{:}10)$$

Volviendo a examinar los desarrollos (6.11:3) y (6.11:6), consideremos las funciones $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ y $\vartheta_4(v)$ como funciones de dos variables: τ (mediante $q = e^{\pi i\tau}$) y v. Como funciones de v éstas son enteras. Si v está fijado y τ se considera como variable compleja que toma valores del semiplano superior ($\operatorname{Im}\tau > 0$), entonces las series mencionadas serán uniformemente convergentes para $\operatorname{Im}\tau > \varepsilon > 0$, es decir, para $|q| = \exp[-\pi\operatorname{Im}\tau] \leqslant e^{-\pi\varepsilon} < 1$ y cualquier $\varepsilon > 0$, de donde se deduce que éstas son funciones analíticas de τ para $\operatorname{Im} \tau > 0$ y que estas series pueden derivarse término a término respecto de τ. De (6.11:3) hallamos:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1(v)}{\partial v^2} = -i \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k (2k-1)^2 \pi^2 q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v}$$

y

$$\frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial \tau} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \pi q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial \tau}.$$

Es fácil comprobar de un modo exactamente igual que a esta ecuación en derivadas parciales satisface cada una de las theta-funciones. Así, pues,

$$\frac{\partial^2 \vartheta_j(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_j(v)}{\partial \tau} \qquad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{6.12:11}$$

De aquí que

$$\frac{\partial^3 \vartheta_j(v)}{\partial v^3} = 4\pi i \frac{\partial^2 \vartheta_j(v)}{\partial \tau\, \partial v} = 4\pi i \frac{\partial^2 \vartheta_j(v)}{\partial v\, \partial \tau}. \tag{6.12:11'}$$

(Es inmediato comprobar que la permutación del orden de derivación es legítima).

Haciendo en las ecuaciones (6.12:11) y (6.12:11′) $v = 0$, obtenemos:

$$\vartheta_j''(0) = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_j(0)}{\partial \tau}, \qquad \vartheta_j'''(0) = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_j'(0)}{\partial \tau}.$$

Por lo tanto, la relación (6.12:10) toma la forma

$$\frac{\partial \vartheta_1'(0)}{\partial \tau} \Big/ \vartheta_1'(0) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vartheta_{j+1}(0)}{\partial \tau} \Big/ \vartheta_{j+1}(0),$$

de donde

$$\vartheta_1'(0) = C \vartheta_2(0)\, \vartheta_3(0)\, \vartheta_4(0).$$

No queda más que determinar la constante C. Se tiene:

$$\vartheta_1'(0) = 2\pi q^{\frac{1}{4}} (1 - 3q^2 + \ldots), \quad \vartheta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}} (1 + q^2 + \ldots),$$
$$\vartheta_3(0) = 1 + 2q + \ldots, \qquad \vartheta_4(0) = 1 - 2q + \ldots .$$

o bien, poniendo en la relación hallada anteriormente:

$$\pi(1-3q^2+\ldots)=C(1+q^2+\ldots)(1+2q+\ldots)(1-2q+\ldots).$$

Como esta identidad liga las sumas de series de potencias de q que son convergentes para $|q|<1$, sacamos la conclusión de que los términos independientes del primero y segundo miembros tienen que ser iguales y, por consiguiente, $C=\pi$. La igualdad (6.12:8) queda completamente demostrada. Aplicando esta igualdad las relaciones (6.12:1) pueden sustituirse por las siguientes:

$$\sqrt{\wp(z)-e_1}=\pi\frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)}{2\omega_1}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_1(v)},\quad \sqrt{\wp(z)-e_2}=\pi\frac{\vartheta_2(0)\,\vartheta_4(0)}{2\omega_1}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_1(v)},$$

$$\sqrt{\wp(z)-e_3}=\pi\frac{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}{2\omega_1}\frac{\vartheta_4(v)}{\vartheta_1(v)}.$$

Por otra parte, para $\sqrt{e_k-e_j}$ obtenemos:

$$\sqrt{e_1-e_3}=\pi\frac{[\vartheta_3(0)]^2}{2\omega_1},\qquad \sqrt{e_2-e_3}=\pi\frac{[\vartheta_2(0)]^2}{2\omega_1},$$

$$\sqrt{e_1-e_2}=\pi\frac{[\vartheta_4(0)]^2}{2\omega_1}. \tag{6.12:12}$$

Finalmente, para $K=\omega_1\sqrt{e_1-e_3}$ y $iK'=\omega_3\sqrt{e_1-e_3}$ hallamos:

$$K=\pi\frac{[\vartheta_3(0)]^2}{2},\quad iK'=\pi\tau\frac{[\vartheta_3(0)]^2}{2}. \tag{6.12:13}$$

6.13. Finalmente, tenemos que deducir también las fórmulas que expresan los desarrollos de las theta-funciones en productos infinitos y aplicarlas para la representación de las funciones $\wp(z)$ y $\zeta(z)$ en forma de series de fracciones simples rápidamente convergentes. Naturalmente, los desarrollos de las theta-funciones en productos infinitos se pueden obtener fácilmente del conocido desarrollo en producto de la función $\sigma(z)$. Mas aquí nos interesarán aquellos desarrollos en los que las theta-funciones se consideran como funciones de

$$t=s^2=e^{2\pi i v}=e^{\pi i\frac{z}{\omega_1}}.$$

Comencemos con $\vartheta_3(v)$. Esta función entera de período 2π es uniforme y analítica respesto de $t=e^{2\pi i v}$ $(0<|t|<\infty)$:

$$\vartheta_3(v)=\sum_{-\infty}^{\infty}b_nt^n.$$

En virtud de que ésta, como función de v, tiene los ceros simples $v=n-\frac{1}{2}+\left(m-\frac{1}{2}\right)\tau$, considerándola como función de t

tendrá los ceros simples:

$$t = e^{2\pi i v} = -e^{(2m-1)\pi i\tau} = -q^{2m-1} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Examinemos primero los ceros $-q^{-1}$, $-q^{-3}$, $-q^{-5}$, . . .

Es obvio que la función $\psi(t) = \prod\limits_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}t)$ es entera y posee los ceros indicados. En efecto, la convergencia absoluta y uniforme de este producto en cualquier conjunto acotado de puntos del plano es consecuencia de la convergencia de la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} | q |^{2m-1}$ $(| q | < 1)$.

Pasando a examinar los ceros $-q$, $-q^3$, $-q^5$, . . ., hallaremos que la función

$$\chi(t) = \prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}t^{-1}),$$

la cual se expresa por un producto que es absoluta y uniformemente convergente en cualquier conjunto cerrado que no contenga al punto $t = 0$, es analítica en todos los puntos, a excepción del origen de coordenadas, y posee ceros simples en los puntos indicados. Por consiguiente, la función

$$\psi(t)\,\chi(t) = \prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}t)\prod_{0}^{\infty}(1 + q^{2m-1}t^{-1})$$

es analítica para $0 < | t | < \infty$ y posee los mismos ceros que la función $\vartheta_3(v)$ (en el plano t).

Volviendo a la variable v mediante la sustitución $t = e^{2\pi i v}$, obtenemos la función

$$\nu(v) = \psi(e^{2\pi i v})\,\chi(e^{2\pi i v}) = \prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}e^{2\pi i v})\prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}e^{-2\pi i v}),$$

la cual es entera (respecto de v), es periódica, de período 1 y posee los mismos ceros que $\vartheta_3(v)$.

De aquí se deduce que $\dfrac{\vartheta_3(v)}{\nu(v)}$ es una función entera de período 1.

Observando que

$$\nu(v + \tau) = \prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m+1}e^{2\pi i v})\prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-3}e^{-2\pi i v}) =$$

$$= \frac{1 + q^{-1}e^{-2\pi i v}}{1 + qe^{2\pi i v}}\,\nu(v) = q^{-1}e^{-2\pi i v}\nu(v) = N\nu(v),$$

sacamos la conclusión de que, al sustituir v por $v + \tau$, la función $\nu(v)$ adquiere un factor igual que $\vartheta_3(v)$. Por ello, $\dfrac{\vartheta_3(v)}{\nu(v)}$ es una función elíptica de períodos 1 y τ y, por consiguiente, es constante, puesto que es entera. En resumen,

$$\vartheta_3(v) = C\nu(v) = C\prod_1^{\infty}[(1+q^{2m-1}e^{2\pi iv})(1-q^{2m-1}e^{-2\pi iv})],$$

donde C es una constante.

Utilizando la tercera fila de la tabla (*) en la pág. 412 hallamos:

$$\vartheta_4(v) = \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right) = C\prod_1^{\infty}[(1-q^{2m-1}e^{2\pi iv})(1-q^{2m-1}e^{-2\pi iv})],$$

$$\vartheta_2(v) = \frac{1}{M}\vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = Cq^{\frac{1}{4}}e^{\pi iv}\prod_1^{\infty}[(1+q^{2m}e^{2\pi iv})(1+q^{2m-2}e^{-2\pi iv})],$$

$$\vartheta_1(v) = -\frac{i}{M}\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right) =$$

$$= -Ciq^{\frac{1}{4}}e^{\pi iv}\prod_1^{\infty}[(1-q^{2m}e^{2\pi iv})(1-q^{2m-2}e^{-2\pi iv})].$$

Escribamos las fórmulas obtenidas en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1(v) &= -Ciq^{\frac{1}{4}}(e^{\pi iv}-e^{-\pi iv})\prod_1^{\infty}[(1-q^{2m}e^{2\pi iv})(1-q^{2m}e^{-2\pi iv})] = \\
&= 2Cq^{\frac{1}{4}}\operatorname{sen}\pi v\prod_1^{\infty}(1-2q^{2m}\cos 2\pi v+q^{4m}),\\
\vartheta_2(v) &= Cq^{\frac{1}{4}}(e^{\pi iv}+e^{-\pi iv})\prod_1^{\infty}[(1+q^{2m}e^{2\pi iv})(1+q^{2m}e^{-2\pi iv})] = \\
&= 2Cq^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\prod_1^{\infty}(1+2q^{2m}\cos 2\pi v+q^{4m}),\\
\vartheta_3(v) &= C\prod_1^{\infty}[(1+q^{2m-1}e^{2\pi iv})(1+q^{2m-1}e^{-2\pi iv})] = \\
&= C\prod_1^{\infty}(1+2q^{2m-1}\cos 2\pi v+q^{4m-2}),\\
\vartheta_4(v) &= C\prod_1^{\infty}[(1-q^{2m-1}e^{2\pi iv})(1-q^{2m-1}e^{-2\pi iv})] = \\
&= C\prod_1^{\infty}(1-2q^{2m-1}\cos 2\pi v+q^{4m-2}).
\end{aligned}\right\}\quad(6.13{:}1)$$

Estas son las fórmulas pedidas. Para determinar aquí C, utilicemos la relación (6.12:8).

Se tiene:

$$\vartheta_1'(0) = \lim_{v \to 0} \frac{\vartheta_1(v)}{v} = 2C\pi q^{\frac{1}{4}} \prod_1^{\infty} (1 - q^{2m})^2,$$

$$\vartheta_2(0) = 2Cq^{\frac{1}{4}} \prod_1^{\infty} (1 - q^{2m})^2, \qquad \vartheta_3(0) = C \prod_1^{\infty} (1 + q^{2m-1})^2,$$

$$\vartheta_4(0) = C \prod_1^{\infty} (1 - q^{2m-1})^2.$$

Por consiguiente,

$$\prod_1^{\infty} (1 - q^{2m})^2 = C^2 \prod_1^{\infty} (1 + q^{2m})^2 \prod_1^{\infty} (1 + q^{2m-1})^2 \prod_1^{\infty} (1 - q^{2m-1})^2.$$

Consideremos el producto $\prod\limits_1^{\infty} (1 - q^n)^2$. En virtud de su convergencia absoluta ($|q| < 1$) éste puede expresarse en la forma

$$\prod_1^{\infty} (1 - q^n)^2 = \prod_1^{\infty} (1 - q^{2m})^2 \prod_1^{\infty} (1 - q^{2m-1})^2 =$$

$$= \prod_1^{\infty} (1 - q^m)^2 \prod_1^{\infty} (1 + q^m)^2 \prod_1^{\infty} (1 - q^{2m-1})^2,$$

de donde, sustituyendo en los primeros productos del segundo miembro m por n y simplificando, resulta:

$$1 = \prod_1^{\infty} (1 + q^n)^2 \prod_1^{\infty} (1 - q^{2m-1})^2 =$$

$$= \prod_1^{\infty} (1 + q^{2m})^2 \prod_1^{\infty} (1 + q^{2m-1})^2 \prod_1^{\infty} (1 - q^{2m-1})^2.$$

De aquí se deduce que

$$\prod_1^{\infty} (1 - q^{2m})^2 = C^2$$

y

$$C = \pm \prod_1^{\infty} (1 - q^{2m}).$$

C es una función de τ (o de q) que es analítica en el semiplano superior. Si $q = e^{\pi i \tau}$ es un número real positivo (lo cual será si τ es imaginario puro), entonces C es un número real. De la fórmula para $\vartheta_3(0)$ se deduce que

$$\vartheta_3(0)=1=C\prod_1^\infty (1+q^{2m-1})^2,$$

es decir, en la expresión de C se debe tomar el signo $+$.

En resumen,

$$C=\prod_1^\infty (1-q^{2m}). \tag{6.13:2}$$

Para aplicar las fórmulas obtenidas a la representación de las funciones $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ y $\wp(z)$, partiremos de las fórmulas (6.11:4). Resulta $(z=2\omega_1 v)$:

$$\sigma(z)=C_1\exp[2\omega_1\eta_1 v^2]\,\mathrm{sen}\,\pi v\prod_1^\infty (1-q^{2m}e^{2\pi i v})(1-q^{2m}e^{-2\pi i v}).$$

Para determinar C_1, dividamos ambos miembros por z y pasemos a límites para $z\to 0$. Obtenemos:

$$1=\frac{C_1\pi}{2\omega_1}\prod_1^\infty (1-q^{2m})^2=C_1C^2\pi,$$

de donde

$$C_1=\frac{2\omega_1}{\pi C^2}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma(z)=\frac{2\omega_1}{\pi C^2}\exp 2\omega_1\eta_1 v^2\,\mathrm{sen}\,\pi v\prod_1^\infty \{(1-q^{2m}e^{2\pi i v})(1-q^{2m}e^{-2\pi i v})\}. \tag{6.13:3}$$

Tomando de ambos miembros la derivada logarítmica respecto de z, hallaremos:

$$\zeta(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\frac{4\omega_1\eta_1 v}{2\omega_1}+\frac{\pi}{2\omega_1}\,\mathrm{cotg}\,\pi v+$$
$$+\sum_1^\infty \frac{2\pi i}{2\omega_1}\left[\frac{q^{2m}e^{-2\pi i v}}{1-q^{2m}e^{-2\pi i v}}-\frac{q^{2m}e^{2\pi i v}}{1-q^{2m}e^{2\pi i v}}\right],$$

o sea,

$$\zeta(z)=2\eta_1 v+\frac{\pi}{2\omega_1}\left[\mathrm{cotg}\,\pi v+i\sum_1^\infty\left(\frac{2q^{2m}e^{-2\pi i v}}{1-q^{2m}e^{-2\pi i v}}-\frac{2q^{2m}e^{2\pi i v}}{1-q^{2m}e^{2\pi i v}}\right)\right]. \tag{6.13:4}$$

Derivando esta igualdad respecto de z y cambiando los signos, obtenemos:

$$\wp(z) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \operatorname{cosec}^2 \pi v -$$

$$-\frac{\pi^2}{\omega_1^2} \sum_1^{\infty} \left[\frac{q^{2m}e^{-2\pi i v}}{(1-q^{2m}e^{-2\pi i v})^2} + \frac{q^{2m}e^{2\pi i v}}{(1-q^{2m}e^{2\pi i v})^2}\right]. \qquad (6.13:5)$$

Los desarrollos obtenidos poseen una convergencia suficientemente satisfactoria (gracias a los factores q^{2m}). Por ello, en todos los cálculos numéricos con funciones de Weierstrass se debe tener más predilección por estos desarrollos que por aquellas expresiones que empleábamos en la definición inicial de estas funciones.

§ 7. FUNCION CARACTERISTICA $T(\rho)$

7.1. Apliquemos la fórmula de Poisson-Jentzsch del ap. 4.1, cap. 6 al estudio de las funciones que son meromorfas en un círculo K: $|z| \leq R$, donde $R < \infty$ (círculo finito) o $R = \infty$ (el plano finito). Sea $f(z)$ una función meromorfa en el círculo K; supongamos que $a_1, a_2, \ldots$ son sus ceros y que $b_1, b_2, \ldots$ son sus polos, dispuestos por orden de no decrecimiento de sus módulos, donde los puntos a_j y b_k son distintos de $z = 0$ y cada uno de ellos viene escrito tantas veces como sea el orden del cero o del polo. Sea $c_\lambda z^\lambda$ el término menor del desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en un entorno de $z = 0$, de modo que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^\lambda} = c_\lambda \neq 0$. Entonces, en virtud de la fórmula (4.1:2′) del cap. 6, para $r = |z| < \rho$ y cualquier ρ, $0 < \rho < R$, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\alpha-\theta)}\, d\alpha =$$

$$= \ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^\lambda}\right| + \lambda\ln\rho - \sum_1^{n(\rho)} \ln\frac{\rho\,|z-a_k|}{|\rho^2 - \bar{a}_k z|} + \sum_1^{p(\rho)} \ln\frac{\rho\,|z-b_k|}{|\rho^2 - \bar{b}_k z|}.$$

donde $n(\rho)$ y $p(\rho)$ indican la cantidad de puntos a_j y b_k, respectivamente, situados en el círculo $|z| < \rho$ (teniendo en cuenta los órdenes de estos puntos). Haciendo en esta fórmula $r = 0$, obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha = \ln|c_\lambda| + \lambda\ln\rho + \sum_1^{n(\rho)} \ln\frac{\rho}{|a_k|} - \sum_1^{p(\rho)} \ln\frac{\rho}{|b_k|}.$$

Según la fórmula (4.1:8) del cap. 6, la suma $\sum_{1}^{n(\rho)} \ln \frac{\rho}{|a_k|}$ puede expresarse en forma integral

$$\sum_{1}^{n(\rho)} \ln \frac{\rho}{|a_k|} = \int_0^{\rho} \frac{n(t)}{t}\, dt;$$

análogamente

$$\sum_{1}^{p(\rho)} \ln \frac{\rho}{|b_k|} = \int_0^{\rho} \frac{p(t)}{t}\, dt.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha = \ln |c_\lambda| + \lambda \ln \rho +$$
$$+ \int_0^{\rho} \frac{n(t)}{t}\, dt - \int_0^{\rho} \frac{p(t)}{t}\, dt. \tag{7.1:1}$$

Obsérvese también que la fórmula (7.1:1) sigue siendo válida si por $n(t)$ y $p(t)$ se entiende la cantidad de ceros o polos, respectivamente, en el círculo cerrado $|z| \leqslant t$ y no en el círculo abierto $|z| \leqslant t$ (véase la pág. 226).

Expresemos la fórmula (7.1:1) de una forma más simétrica. Con este fin, introduzcamos la función

$$n(t, f) = n(t, \infty),$$

que representa la cantidad de polos que tiene $f(z)$ (teniendo en cuenta sus órdenes) en el círculo $|z| \leqslant t$; aquí $n(0, \infty)$ denota el orden del polo posible en el punto $z = 0$. Entonces, para cualquier $A \neq \infty$

$$n\left(t, \frac{1}{f-A}\right) = n(t, A)$$

determina la cantidad de polos de la función $\frac{1}{f(z)-A}$, es decir, la cantidad de A-puntos de $f(z)$ en el mismo círculo $|z| \leqslant t$. En particular, $n(t, 0)$ denota la cantidad de ceros que tiene $f(z)$ en el círculo $|z| \leqslant t$ y $n(0, 0)$ denota el orden del cero posible en el punto $z = 0$.

Mediante las notaciones introducidas obtenemos:

$$n(t) = n(t, 0) - n(0, 0), \quad p(t) = n(t, \infty) - n(0, \infty)$$

y

$$\lambda(0) = n(0, 0) - n(0, \infty).$$

Lo último se debe a que, si $\lambda > 0$, entonces $n(0, \infty) = 0$ y $\lambda = n(0, 0)$; si $\lambda < 0$, entonces $n(0, 0) = 0$ y $\lambda = -n(0, \infty)$; finalmente, si $\lambda = 0$, entonces $n(0, 0) = n(0, \infty) = 0$. Representemos también $\ln|f(\rho e^{i\alpha})|$ en la forma:

$$\ln|f(\rho e^{i\alpha})| = \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})| - \ln^-|f(\rho e^{i\alpha})| = \ln^+|(\rho e^{i\alpha})| - \ln^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})|}$$

(véase el ap. 5.1, cap. 6). La fórmula (7.1:1) toma la forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,dt + n(0, \infty)\ln\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})|}\,d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, 0) - n(0, 0)}{t}\,dt + n(0, 0)\ln\rho + \ln|c_\lambda|. \tag{7.1:2}$$

La última relación muestra que existe un equilibrio peculiar entre los valores de una función meromorfa que son mayores que la unidad en valor absoluto y los que son menores que la unidad en valor absoluto. En efecto, en el primer miembro figuran integrales que dependen de los valores de la función que son mayores que la unidad en valor absoluto y de la cantidad de polos que hay en el círculo $|z| \leqslant t$, mientras que en el segundo miembro (si no se cuenta la constante $\ln|c_\lambda|$) figuran integrales que dependen de los valores de la función que son menores que la unidad en valor absoluto y de la cantidad de ceros que hay en el mismo círculo.

7.2. Apliquemos la fórmula (7.1:2) a la función $f(z) - A$, donde A es un número finito arbitrario. Observando que esta función tiene los mismos polos y con los mismos órdenes que $f(z)$, obtenemos que para ella la distribución de los polos se caracteriza por la función anterior $n(t, \infty)$ y la distribución de los ceros, por la función $n(t, A)$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha}) - A|\,d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,dt + n(0, \infty)\ln\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha}) - A|}\,d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, A) - n(0, A)}{t}\,dt +$$

$$+ n(0, A)\ln\rho + \ln|c(A)|,$$

donde $c(A)$ es el coeficiente del término inferior (distinto de cero) en el desarrollo de Laurent de la función $f(z) - A$ en un entorno del punto $z = 0$. Observando que

$$\ln^+|f(\rho e^{i\alpha}) - A| \leqslant \ln^+(|f| + |A|) \leqslant \ln 2 + \ln|f(\rho e^{i\alpha})| + \ln^+|A|$$

y que

$$\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})| = \ln^+|A+(f-A)| \leqslant \ln 2 + \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})-A| + \ln^+|A|,$$

resulta:

$$\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})-A| = \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})| + \theta_1(\ln^+|A|+\ln 2),$$

donde $-1 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$. Por ello

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})-A|}\,d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, A)-n(0, A)}{t}\,dt + n(0, A)\ln\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty)-n(0, \infty)}{t} + n(0, \infty)\ln\rho + \varphi_A(\rho), \tag{7.2:1}$$

donde

$$|\varphi_A(\rho)| \leqslant \ln^+|A| + \ln 2 + |\ln|c(A)||.$$

Aclaremos el significado de (7.2:1). Introduzcamos primero otras notaciones más; hagamos

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})-A|}\,d\alpha = m(\rho, A), \\ &\int_0^{\rho} \frac{n(t, A)-n(0, A)}{t}\,dt + n(0, A)\ln\rho = N(\rho, A). \end{aligned}\right\} \tag{7.2:2}$$

Tanto una como la otra son funciones de ρ que dependen además del número complejo A; ambas son no negativas. Influyen en la cantidad $m(\rho, A)$ solamente aquellos valores de $f(\rho e^{i\alpha})$ que satisfacen a la condición

$$|f(\rho e^{i\alpha})-A| < 1,$$

y además, influyen tanto más (en el sentido del crecimiento de $m(\rho, A)$) cuanto más se aproximen a A los valores de $f(\rho e^{i\alpha})$ y cuanto mayor sea la medida angular de aquellos arcos de la circunferencia $|z| = \rho$ en los cuales $f(\rho e^{i\alpha})$ se diferencia poco de A. En otras palabras, la cantidad $m(\rho, A)$ aprecia de un modo especial el grado de *aproximación en media de la función* $f(z)$ *al número* A en la circunferencia $|z| = \rho$.

En la cantidad $N(\rho, A)$ sólo influye directamente la distribución de los puntos en los que $f(z)$ *toma exactamente el valor* A, es decir, la cantidad $n(t, A)$ de A-puntos de $f(z)$ en el círculo $|z| \leqslant t$, considerada como función de t.

La segunda de las fórmulas (7.2:2) muestra que $N(\rho, A)$ crece (no decrece) junto con ρ (para A fijado). Precisando, de la misma fórmula se deduce que

$$\frac{dN(\rho, A)}{d\ln\rho} = n(\rho, A) - n(0, A) + n(0, A) = n(\rho, A)$$

para cada ρ tal que en la circunferencia $|z| = \rho$ no haya ningún A-punto de la función $f(z)$ (si en la circunferencia $|z| = \rho_0$ hay A-puntos de la función $f(z)$, entonces $n(\rho, A)$ admite discontinuidad de primera especie en el punto $\rho = \rho_0$). Como $n(\rho, A)$ es una función no decreciente de ρ, de aquí se deduce que $N(\rho, A)$ es una función *convexa* de $\ln\rho$.

Obsérvese que $m(\rho, A)$ no sólo no es convexa, sino que, por lo general, no es una función no decreciente. Así, por ejemplo, si $f(z)$ es un polinomio de grado no infreior al primero, la función $m(\rho, 0)$ es distinta de cero (es positiva) para cada ρ que sea igual al módulo de un cero cualquiera de la función, y se anula para todos los valores de ρ, comenzando desde un valor suficientemente grande de ρ (tal que sea $|f(\rho e^{i\alpha})| \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$).

En lo que se refiere a las funciones que figuran en el segundo miembro de (7.2:1), se observa que éstas son similares en todo a $m(\rho, A)$ y $N(\rho, A)$, con la única diferencia que en lugar del valor finito A figura ∞. Precisando, en el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha$$

para un ρ dado, influyen solamente los valores del módulo $|f(\rho e^{i\alpha})|$ que son mayores que la unidad, y además, tanto más cuanto mayor sea $|f(\rho e^{i\alpha})|$ (cuanto más «se aproxime» $f(z)$ a ∞) y cuanto mayor sea la medida angular de aquellos arcos de la circunferencia $|z| = \rho$ en los cuales $|f(\rho e^{i\alpha})|$ es grande. Del mismo modo, en el valor

$$\int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,dt + n(0, \infty)\ln\rho$$

sólo influye directamente la distribución de los polos de la función $f(z)$, es decir, la cantidad de polos $n(t, \infty)$ que hay en el círculo $|z| \leqslant t$, considerada como función de t. Todo lo dicho justifica la introducción de las siguientes notaciones:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha = m(\rho, \infty),$$

$$\int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,dt + n(0, \infty)\ln\rho = N(\rho, \infty), \qquad (7.2:3)$$

La función $N(\rho, \infty)$ crece (no decrece) junto con ρ y es una función convexa de $\ln \rho$; la función $m(\rho, \infty)$, por lo general, no sólo no es convexa, sino que tampoco es no decreciente.

Mediante las notaciones introducidas la fórmula (7.2:1) se escribe así:

$$m(\rho, A) + N(\rho, A) = m(\rho, \infty) + N(\rho, \infty) + \varphi_A(\rho).$$

Hagamos también

$$m(\rho, \infty) + N(\rho, \infty) = T(\rho); \tag{7.2:4}$$

entonces

$$m(\rho, A) + N(\rho, A) = T(\rho) + \varphi_A(\rho); \tag{7.2:5}$$

esta fórmula es válida también para $A = \infty$ (en este caso ésta se convierte en la fórmula (7.2:4)). Hemos obtenido la siguiente proposición:

Primer teorema fundamental de la teoría de las funciones meromorfas. *Para toda función $f(z)$ que sea meromorfa en el círculo $|z| < R \leqslant \infty$, existe una función $T(\rho)$, definida en el intervalo $0 < \rho < R$, tal que, para cualquier número complejo A (finito o infinito) la suma $m(\rho, A) + N(\rho, A)$* (cuyo valor depende solamente de la medida en que los valores de la función $f(z)$ se aproximan en media a A, y también de la frecuencia con que $f(z)$ toma el valor A) *difiere de $T(\rho)$ en una función acotada $\varphi_A(\rho)$ ($|\varphi_A(\rho)| \leqslant \ln^+ |A| + \ln 2 + |\ln|c(A)||$, si $A \neq \infty$, y $\varphi_\infty(\rho) \equiv 0$, si $A = \infty$).* La función $T(\rho)$ se llama función característica de la función meromorfa $f(z)$.

Este teorema puede considerarse como una generalización extremadamente amplia del hecho según el cual las funciones meromorfas elementales — las funciones racionales — toman cualquier valor complejo A en una misma cantidad de puntos, igual al orden de la función (véase el t. I, ap. 4.1, cap. 2).

En resumen, la suma $m(\rho, A) + N(\rho, A)$ no depende del valor A (salvo una función acotada $\varphi_A(\rho)$). Este teorema permite afirmar (en el caso en que la función característica crece indefinidamente cuando ρ tiende a R) que si para cierto A la cantidad de A-puntos de la función $f(z)$ es relativamente pequeño y, por consiguiente, los valores de la función $N(\rho, A)$ no son relativamente grandes, entonces los valores de la función $m(\rho, A)$ tienen que ser relativamente grandes, es decir, la función se aproxima bastante bien en media a A. Es justo también lo recíproco. Así, pues, la insuficiente cantidad de A-puntos se recompensa con una buena aproximación media de la función $f(z)$ hacia el punto A y una mala aproximación media hacia A trae consigo un aumento de la cantidad de A-puntos. Tal es el significado y la importancia del primer teorema fundamental de la teoría de las funciones meromorfas.

Este teorema se amplía esencialmente con un teorema capital más difícil, denominado segundo teorema fundamental de la teoría de las funciones meromorfas *), del cual, en particular, se deduce que para una mayoría preponderante de valores de A la función $m(\rho, A)$ es infinitamente pequeña en comparación con la función característica $T(\rho)$. Por esto, la parte principal en la suma $m(\rho, A) + N(\rho, A)$ corresponde a la función $N(\rho, A)$. Para dar a esta afirmación un sentido exacto, llamemos a un valor A defecto o valor excepcional (en el sentido de R. Nevanlinna) de la función meromorfa dada $f(z)$ si para este

$$\varlimsup_{\rho\to R} \frac{m(\rho, A)}{T(\rho)} = \delta(A) > 0.$$

De la relación (7.2:5) se deduce que

$$\delta(A) = 1 - \varlimsup_{\rho\to R} \frac{N(\rho, A)}{T(\rho)} \leqslant 1 \qquad (7.2:6)$$

(suponiendo que $T(\rho) \to \infty$ para $\rho \to R$). Por lo tanto, el número $\delta(A)$, denominado defecto del valor A, muestra lo que le falta a la razón $\frac{N(\rho, A)}{T(\rho)}$ para ser igual a la unidad (en el límite cuando ρ tiende a R).

Del segundo teorema fundamental mencionado se deduce que para cualquier función $f(z) \not\equiv$ const, que sea meromorfa en el plano finito (como se demostrará en el ap. 7.4, para ella $T(\rho) \to \infty$ si $\rho \to \infty$), y también para una función meromorfa en un círculo finito (con la condición $\varliminf_{\rho\to R} \frac{\ln \frac{1}{R-\rho}}{T(\rho)} = 0$, la cual no siempre se cumple), el conjunto de todos los valores excepcionales es, en primer lugar, no más que numerable, y en segundo lugar, la suma de los defectos de todos estos valores no es superior a dos:

$$\Sigma\delta(A) \leqslant 2 \qquad (7.2:7)$$

(relación de los defectos).

De aquí se deduce que pueden existir no más de dos valores con el defecto máximo posible, igual a uno. Como tales valores se caracterizan completamente por la condición

$$\lim_{\rho\to R} \frac{N(\rho, A)}{T(\rho)} = 0$$

---

*) En este curso no incluimos el segundo teorema fundamental. Véase la monografía de R. Nevanlinna Eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlín; 2ª ed., 1953 y también el libro de W. K. Hayman, Meromorphic functions. Oxford at the Clarendon Press 1964.

(lo cual se deduce de la fórmula (7.2:6)), se puede afirmar que *existen no más de dos valores **A** para los cuales la función $N(\rho, A)$ es infinitamente pequeña en comparación con $T(\rho)$*. Esta afirmación contiene como un caso particular el teorema de Picard para las funciones meromorfas. Al final del capítulo octavo la obtendremos de otro modo.

7.3. Ilustremos lo expuesto en el ap. 7.2 con unos cuantos ejemplos:

1) Función racional. Sea $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, donde $P(z)$ es un polinomio de grado p, $Q(z)$ es un polinomio de grado q y $P(z)$ y $Q(z)$ no tienen ceros comunes. Entonces $f(z)$ es una función racional de orden $r = \max(p, q)$. Supongamos, para precisar, que $p > q$; entonces $r = p$. Para todos los valores suficientemente grandes de p, se tiene:

$$f(z) = az^{p-q}[1 + \varepsilon(z)],$$

donde, a es la razón de los coeficientes de los términos superiores de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$, $\varepsilon(z)$ es una función racional que tiende a cero cuando $z \to \infty$. Por lo tanto,

$$\ln|f(e^{i\alpha})| = (p-q)\ln\rho + O(1)^{*})$$

y, por consiguiente,

$$m(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha = (p-q)\ln\rho + O(1).$$

Si ρ es superior al módulo máximo ρ' de los ceros del polinomio $Q(z)$, entonces la cantidad de polos $n(\rho, \infty)$ de la función $f(z)$ conserva un valor constante, igual a q. Por ello, para $N(\rho, \infty)$ obtenemos:

$$N(\rho, \infty) = \int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,dt + n(0, \infty)\ln\rho =$$

$$= \int_0^{\rho'} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,dt + \int_{\rho'}^{\rho} \frac{q\,dt}{t} - \int_{\rho'}^{\rho} \frac{n(0, \infty)\,dt}{t} + n(0, \infty)\ln\rho =$$

---

*) $O(1)$ denota una cantidad acotada. En general, se escribe $\varphi(\rho) = O[\psi(\rho)]$ si $\varphi(\rho)$ y $\psi(\rho)$ están definidas para todos los valores suficientemente grandes de ρ y $|\varphi(\rho)| < C|\psi(\rho)|$, donde $C < \infty$ es cierta constante. Análogamente, $o(1)$ denota una cantidad que tiende a cero. En general, se escribe

$$\varphi(\rho) = o[\psi(\rho)] \quad \text{si} \quad \lim_{\rho\to\infty} \frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)} = 0.$$

$$= q \ln \rho + \left[\int_0^{\rho'} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + (n(0, \infty) - q) \ln \rho' \right] =$$

$$= q \ln \rho + O(1);$$

y, por consiguiente,

$$T(\rho) = m(\rho, \infty) + N(\rho, \infty) = p \ln \rho + O(1).$$

De aquí se deduce que

$$\delta(\infty) = \varliminf_{\rho \to \infty} \frac{m(\rho, \infty)}{T(\rho)} = 1 - \frac{q}{p} > 0,$$

es decir, ∞ es un valor excepcional (en el sentido de R. Nevanlinna) para la función racional $f(z)$ si $p > q$. Demostremos que éste es el único valor excepcional. Sea $A \neq \infty$; de la relación

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{f(z) - A} = 0$$

se deduce que

$$\ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\theta}) - A|} = 0$$

para todos los valores suficientemente grandes de ρ y, por consiguiente,

$$m(\rho, A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha}) - A|} d\alpha = 0$$

(para valores de ρ suficientemente grandes).

Así, pues, $\delta(A) = 0$ si $A \neq \infty$, o sea, los valores finitos A no son excepcionales para $f(z)$.

Instamos al lector que demuestre, que si $p = q$, el único valor excepcional para $f(z)$ es el cociente a de los coeficientes de los términos superiores de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$, y si $p < q$, el valor excepcional es igual a cero. En cada uno de estos casos, para la función característica resulta:

$$T(\rho) = r \ln \rho + O(1),$$

de modo que para cualquier función racional

$$T(\rho) = O(\ln \rho).$$

2) **Función exponencial.** Esta función no se anula ni se hace infinita. Por lo tanto, para ella

$$N(\rho, \infty) = N(\rho, 0) = 0,$$

es decir, ambos valores 0 y ∞ son excepcionales con el valor máximo del defecto, igual a uno. Calculemos la función característica $T(\rho)$ y comprobemos que la función exponencial no posee ningún valor más con defecto positivo. Observando que

$$\ln|\exp(\rho e^{i\alpha})| = \rho\cos\alpha$$

es positivo en el semiplano de la derecha y es negativo en el semiplano de la izquierda, hallamos:

$$m(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|\exp(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha = \frac{\rho}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos d\alpha = \frac{\rho}{\pi}$$

y análogamente

$$m(\rho, 0) = \frac{\rho}{\pi}.$$

Por consiguiente,

$$T(\rho) = m(\rho, \infty) + N(\rho, \infty) = \frac{\rho}{\pi}.$$

Si $A \neq 0$ y $A \neq \infty$, entonces

$$N(\rho, A) = \int_0^{\rho} \frac{n(t, A) - n(0, A)}{t}\,dt + n(0, A)\ln\rho$$

Pero los A-puntos de la función e^z son los valores $\operatorname{Ln} A = \ln|A| + i(\arg a + 2k\pi)$; éstos están situados en la recta $\operatorname{Re} z = \ln|A|$ y la distancia entre ellos es igual a 2π. Como la circunferencia $|z| = t$ intercepta en esta recta un segmento de longitud $2\sqrt{t^2 - (\ln|A|)^2}$, la cantidad de A-puntos que caen en el círculo $|z| \leqslant t$ se acota del modo siguiente:

$$n(t, A) \sim \frac{2\sqrt{t^2 - (\ln A)^2}}{2\pi} \sim \frac{t}{\pi}$$

y, por consiguiente,

$$N(\rho, A) \sim \int_1^{\rho} \frac{\frac{1}{\pi}t - n(0, A)}{t}\,dt + n(0, A)\ln\rho \sim \frac{1}{\pi}\rho = T(\rho).$$

De aquí que, para el valor del defecto del número A ($A \neq 0$, $A \neq \infty$) se tiene:

$$\delta(A) = 1 - \overline{\lim_{\rho\to\infty}} \frac{N(\rho, A)}{T(\rho)} = 0.$$

3) En el caso de una función racional se ha observado sólo un valor excepcional. Este valor ecxepcional era el $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$. La función

exponencial para $z \to \infty$ tiende uniformemente a ∞ en el ángulo $|\arg z| < \frac{\pi}{2} < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ y a cero en el ángulo opuesto por el vértice a éste. En correspondencia con esto, aquí hay dos valores excepcionales: 0 y ∞. Sea ahora n cualquier número natural $\geqslant 2$. Dividamos el plano por rayos que partan del origen de coordenadas en $2n$ ángulos iguales: $d_1, d_2, \ldots, d_{2n}$, comenzando desde el ángulo d_1: $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2n}$. Demostremos que para $z \to \infty$ la función entera $g_n(z) = \int\limits_0^z \exp(-z^n)\,dz$ tiende a ∞ en los ángulos d_{2j} $(j = 1, \ldots, n)$, y en cada uno de los ángulos d_{2j+1} $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ tiende al límite finito $A_j = Ie^{\frac{2\pi ij}{n}}$, donde $I = \int\limits_0^\infty e^{-t^n}\,dt$ $(t > 0)$. Este comportamiento de la función $g_n(z)$ arroja como consecuencia de que la misma posee $n+1$ valores excepcionales:

$$\infty,\ A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{n-1}.$$

Obsérvese primero que

$$\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\rho^n \cos\theta)\,d\theta = \rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\rho^n \operatorname{sen}\theta)\,d\theta <$$

$$< \rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2}{\pi}\rho^n\theta\right)d\theta < \frac{\pi}{2}\rho^{1-n} \to 0$$

para $\rho \to \infty$.

Apliquemos el teorema integral de Cauchy a la función $\exp(-\zeta^n)$ y al contorno de algún sector del círculo $|z| \leqslant \rho$, perteneciente a d_{2j+1}; uno de los radios que limitan el sector lo dirigiremos por la bisectriz del ángulo d_{2j+1}, la cual forma el ángulo $\frac{2\pi j}{n}$ con la dirección positiva del eje real, y el otro lo dirigiremos hacia el punto

$$z = \rho \exp\left[i\left(\frac{2\pi j}{n} + \alpha\right)\right],\quad |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2n}.$$

Resulta:

$$g_n(z) - e^{\frac{2\pi ij}{n}} \int\limits_0^\rho e^{-t^n}\,dt = \int\limits_{\rho e^{\frac{2\pi ij}{n}}}^{z} e^{-\zeta^n}\,d\zeta,$$

de donde

$$\left| g_n(z) - e^{\frac{2\pi i j}{n}} \int_0^\rho e^{-t^n}\, dt \right| < \left| \int_{\frac{2\pi j}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}+\alpha} \exp(-\rho^n \cos n\theta)\, \rho\, d\theta \right| =$$

$$= \frac{\rho}{n} \left| \int_0^{\alpha n} \exp(-\rho^n \cos\theta)\, d\theta \right| \leqslant \frac{\rho}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\rho^n \cos\theta)\, d\theta < \frac{\pi}{2}\rho^{1-n}.$$

Como $\lim\limits_{\rho\to\infty} e^{\frac{2\pi i j}{n}} \int\limits_0^\rho e^{-t^n}\, dt = A_j$, de aquí se deduce, en primer lugar, que $g_n(z)$ para $z \to \infty$ tiende uniformemente al límite A_j en d_{2j+1}, y, en segundo lugar, que para cualquier rayo L que parta del punto $z = 0$ y que pertenezca a $\overline{d_{2j+1}}$:

$$\int_L \exp(-\zeta^n)\, d\zeta = A_j.$$

Para acotar inferiormente $m(\rho, A_j)$ se necesita obtener una cota asintótica para $|g_n(z) - A_j|$. Trazando un rayo L por el punto $z = \rho \exp\left(\frac{2\pi j i}{n} + \alpha i\right)$, $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2n}$, hallamos:

$$g_n(z) - A_j = g_n(z) - \int_L \exp(-\zeta^n)\, d\zeta =$$

$$= -\int_z^\infty \exp(-\zeta^n)\, d\zeta = \frac{1}{n} \int_z^\infty \zeta^{-n+1} d \exp(-\zeta^n) =$$

$$= -\frac{1}{n} z^{-n+1} \exp(-z^n) - \frac{n-1}{n^2} \int_z^\infty \zeta^{-2n+1} d \exp(-\zeta^n) =$$

$$= -\frac{1}{n} z^{-n+1} \exp(-z^n) + \frac{n-1}{n^2} z^{-2n+1} \exp(-z^n) -$$

$$- \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \int_z^\infty \zeta^{-2n} \exp(-\zeta^n)\, d\zeta.$$

Como $|z^{-n+1} \exp(-z^n)| = \rho^{-n+1} \exp(-\rho^n \cos n\alpha)$ y

$$\left| \int_z^\infty \zeta^{-2n} \exp(-\zeta^n)\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\rho^\infty t^{-2n} \exp(-t^n \cos n\alpha)\, dt \leqslant \frac{1}{2n-1} \rho^{-2n+1} \exp(-\rho^n \cos n\alpha),$$

resulta:

$$g_n(z) - A_j = -\frac{1}{n} z^{-n+1} \exp(-z^n)\,[1 + o(1)], \quad z \in d_{2j+1}$$

(se podría haber sustituido $o(1)$ por la cota más exacta $O(\rho^{-n})$, mas para lo que sigue no se necesita tanta exactitud).

Por consiguiente:

$$\ln \frac{1}{|g_n(z) - A_j|} = \rho^n \cos n\alpha + \ln \{n\rho^{n-1}[1 + o(1)]\} =$$
$$= \rho^n [\cos n\alpha + o(1)], \quad z \in d_{2j+1},$$

de donde

$$m(\rho, A_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|g_n(z) - A_j|}\, d\alpha \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi j/n - \pi/2n}^{2\pi j/n + \pi/2n} \ln^+ \frac{1}{|g_n(z) - A_j|}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^n \cos\theta\, d\theta + o(\rho^n) =$$
$$= \frac{1}{\pi n} \rho^n [1 + o(1)].$$

Calculemos, finalmente, $T(\rho) = m(\rho, \infty)$ (puesto que $N(\rho, \infty) = 0$); para ello, acotemos $g_n(z)$ en los ángulos d_{2j} ($j = 1, 2, \ldots, n$). Obsérvese que la bisectriz del ángulo d_{2j} forma el ángulo $\frac{(2j-1)\pi}{n}$ con la dirección positiva del eje real. Por ello, cada punto $z \in \overline{d_{2j}}$, $z \neq 0$, se caracteriza por la expresión $z = \rho \exp\left[\frac{(2j-1)\pi i}{n} + \alpha i\right]$, donde $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2n}$. Integrando dos veces por partes, el valor de la función $g_n(z)$ en este punto puede escribirse en la forma:

$$g_n(z) = \int_0^z \exp(-\zeta^n)\, d\zeta = \int_1^z \exp(-\zeta^n)\, d\zeta + O(1) =$$
$$= -\frac{1}{n} z^{-n+1} \exp(-z^n) + \frac{n-1}{n^2} z^{-2n+1} \exp(-z^n) +$$
$$+ \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \int_1^z \zeta^{-2n} \exp(-\zeta^n)\, d\zeta + O(1).$$

Pero si $z = \rho \exp\left[\frac{(2j-1)\pi i}{n} + \alpha i\right]$ y $n|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}$, resulta

$$|z^{-n+1} \exp(-z^n)| = \rho^{-n+1} \exp(\rho^n \cos n\alpha),$$
$$\left| \int_1^z \zeta^{-2n} \exp(-\zeta^n)\, d\zeta \right| \leqslant \int_1^\rho t^{-2n} \exp(t^n \cos n\alpha)\, dt$$

y

$$\int_1^\rho t^{-2n} \exp(t^n \cos n\alpha)\, dt = o\,[\rho^{-n+1} \exp(\rho^n \cos n\alpha)] \qquad (n \geqslant 2).$$

Esta última relación se comprueba aplicando la regla de l'Hospital a la fracción:

$$\frac{\int_1^\rho t^{-2n} \exp(t^n \cos n\alpha)\, dt}{\rho^{-n+1} \exp(\rho^n \cos n\alpha)}.$$

Por consiguiente, en cada uno de los ángulos d_{2j} $(j = 1, \ldots, n)$ es válida la acotación:

$$g_n(z) = -\frac{1}{n} z^{-n+1} \exp(-z^n)\,[1 + o(1)];$$

por lo cual, para $z = \rho \exp\left[\frac{(2j-1)\pi i}{n} + \alpha i\right] \in d_{2j}$:

$$\ln|g_n(z)| = \rho^n \cos n\alpha + \ln\left\{\frac{1}{n}\rho^{-n+1}[1 + o(1)]\right\} = \rho^n [\cos n\alpha + o(1)].$$

Además, como se observó anteriormente, en cada uno de los ángulos d_{2j+1}:

$$\ln|g_n(z)| = \ln|A_j| + o(1) = O(1).$$

De aquí se deduce que

$$m(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|g_n(z)|\, d\alpha =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{(2j-1)\pi/n-\pi/2n}^{(2j-1)\pi/n+\pi/2n} \ln^+|g_n(z)|\, d\alpha + O(1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho^n}{2\pi n}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta + o(1)\right] + O(1) = \frac{\rho^n}{\pi}[1 + o(1)].$$

Finalmente,

$$\delta(A_j) = \varliminf_{\rho\to\infty} \frac{m(\rho, A_j)}{T(\rho)} = \varliminf_{\rho\to\infty} \frac{m(\rho, A_j)}{m(\rho, \infty)} \geqslant \varliminf_{\rho\to\infty} \frac{\frac{1}{\pi n}\rho^n[1 + o(1)]}{\frac{1}{\pi}\rho^n[1 + o(1)]} = \frac{1}{n};$$

además,

$$\delta(\infty) = \varliminf_{\rho\to\infty} \frac{m(\rho, \infty)}{T(\rho)} = 1.$$

En resumen, queda demostrado que todos los valores: ∞, A_0, ..., A_{n-1}, tienen defectos positivos. Como la suma de los defectos calculados:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \delta(A_j) + \delta(\infty) \geqslant 2,$$

y en virtud de la relación de los defectos esta suma no puede ser superior a 2, se deduce que

$$\delta(A_j) = \frac{1}{n}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

4) F u n c i ó n $\wp(z)$. Esta función ofrece interés porque carece de valores excepcionales.

Comenzaremos con el cálculo de $N(\rho, \infty)$. Como en cada paralelogramo de períodos la función $\wp(z)$ tiene un polo doble, calcularemos primero la cantidad de paralelogramos que están enteramente situados en el círculo cerrado $|z| \leqslant \rho$; supongamos que éstos hay $\nu(\rho)$. Después calcularemos la cantidad $\mu(\rho)$ de paralelogramos que tienen cada uno de ellos al menos un punto común con el círculo cerrado $|z| \leqslant \rho$. Está claro que

$$2\nu(\rho) \leqslant n(\rho, \infty) \leqslant 2\mu(\rho).$$

Designando con la letra D el área de cada paralelogramo de períodos y con la letra d la longitud de la diagonal mayor, tendremos:

$$\pi\rho^2 > \nu(\rho) D > \pi(\rho - d)^2,$$

$$[\mu(\rho) - \nu(\rho)] D < \pi(\rho + d)^2 - \pi(\rho - d)^2 = 4\pi\rho d.$$

En efecto, $\nu(\rho)$ paralelogramos situados en el círculo $|z| \leqslant \rho$ cubren por completo el círculo $|z| \leqslant \rho - d$, mientras que $\mu(\rho) - \nu(\rho)$ paralelogramos que tienen puntos comunes con la circunferencia $|z| = \rho$ están contenidos en el anillo circular $\rho - d \leqslant |z| \leqslant \rho + d$ (se supone que $\rho > d$).
Por ello

$$\frac{\pi\rho^2}{D} > \nu(\rho) > \frac{\pi}{D}(\rho - d)^2,$$

$$\mu(\rho) < \nu(\rho) + \frac{4\pi\rho d}{D} < \frac{\pi\rho^2}{D} + \frac{4\pi\rho d}{D}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{2\pi\rho^2}{D} - \frac{4\pi d\rho}{D} + \frac{2\pi d^2}{D} < n(\rho, \infty) < \frac{2\pi\rho^2}{D} + \frac{8\pi\rho d}{D},$$

o sea,

$$n(\rho, \infty) = \frac{2\pi\rho^2}{D} + O(\rho).$$

Por lo tanto, para $N(\rho, \infty)$ obtenemos (obsérvese que $n(0, \infty) = 2$):

$$N(\rho, \infty) = \int_0^\rho \frac{n(t, \infty) - 2}{t}\, dt + 2 \ln \rho = \int_1^\rho \frac{n(t, \infty)\, dt}{t} + O(1) = \frac{\pi\rho^2}{D} + O(\rho).$$

Calculemos ahora

$$m(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |\wp(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha$$

y demostremos que $m(\rho, \infty) = O(1)$. Con este fin, cubramos todo el plano por tales paralelogramos de períodos que los polos de la función $\wp(z)$ coincidan con los centros de estos paralelogramos.

Sea Δ_0 uno de estos paralelogramos y sea z_0 su centro. Como la función $\wp(z)$ tiene en Δ_0 el único polo doble en z_0, para $\wp(z)$ resulta la desigualdad

$$|\wp(z)| < \frac{C^2}{|z - z_0|^2},$$

la cual es válida en todos los puntos del paralelogramo Δ_0. Aquí C es la misma constante para cualquier paralelogramo Δ, si z_0 denota el centro de este paralelogramo Δ (aquí nos basamos en que $\wp(z)$ es una función doblemente periódica). Consideremos ahora todos los paralelogramos que tienen puntos comunes con la circunferencia $|z| = \rho$, y sean $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\varkappa(\rho)}$ los arcos en que se divide la circunferencia por estos paralelogramos. Según lo anterior la cantidad de tales paralelogramos es:

$$\varkappa(\rho) = \mu(\rho) - \nu(\rho) < \frac{\pi(\rho + d)^2 - \pi(\rho - d)^2}{D} = \frac{4\pi\rho d}{D}.$$

Si el arco σ_j pertenece al paralelogramo Δ_j y z_j es el centro del paralelogramo, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_j} \ln^+ |\wp(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha < \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_j} \ln^+ \frac{C^2}{|\rho e^{i\alpha} - z_j|^2}\, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{C^2}{|\rho e^{i\alpha} - z_j|^2}\, d\alpha.$$

Para acotar la última integral, consideremos el arco Σ_j que intercepta el círculo $|z - z_j| \leqslant C$ en la circunferencia $|z| = \rho$, y sea $2\gamma_j$ el ángulo central correspondiente con el vértice en el punto $z = 0$. Es obvio que γ_j es un ángulo agudo para ρ suficientemente grande, puesto que $\frac{|z_j|}{\rho} \to 1$ para $\rho \to \infty$ (no hay que olvidarse que z_j es el centro de un paralelogramo de períodos que tiene puntos comunes con la circunferencia $|z| = \rho$). Por ello, de la desigualdad $\operatorname{sen} \gamma_j \leqslant \frac{C}{\rho}$ se desprende que $\gamma_j = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Ahora se tiene:

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{C^2}{|\rho e^{i\alpha} - z_j|^2}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_j} \ln \frac{C^2}{|\rho e^{i\alpha} - z_j|^2}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_j} \ln \frac{C^2}{\rho^2 + r_j^2 - 2\rho r_j \cos(\alpha - \theta_j)}\, d\alpha,$$

donde $z_j = r_j e^{i\theta_j}$. Integrando por partes hallamos:

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_j} \frac{2\rho r_j \operatorname{sen}(\alpha - \theta_j)(\alpha - \theta_j)\, d\alpha}{\rho^2 + r_j^2 - 2\rho r_j \cos(\alpha - \theta_j)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\gamma_j} \frac{2\rho r_j \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha}{(\rho - r_j)^2 + 4\rho r_j \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}\, d\alpha,$$

de donde

$$I_j \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{\gamma_j} \frac{\alpha^2}{\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\alpha^2}{4}}\, d\alpha < \frac{\pi \gamma_j}{2}$$

y, por consiguiente,

$$I_j = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Por esta razón

$$m(\rho, \infty) = \sum_1^{\varkappa(\rho)} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_j} \ln^+ |\wp(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha = O\left(\frac{\varkappa(\rho)}{\rho}\right) = O(1).$$

Así, pues, para la función característica $T(\rho)$ resulta:

$$T(\rho) = m(\rho, \infty) + N(\rho, \infty) = \frac{\pi\rho^2}{D} + O(\rho).$$

Si ahora A es un valor finito arbitrario, la acotación de la función $N(\rho, A)$ será similar en todo a la acotación realizada de la función $N(\rho, \infty)$. En efecto, cada paralelogramo de períodos contiene dos ceros de la función $\wp(z) - A$ y, por consiguiente,

$$n(\rho, A) = \frac{2\pi\rho^2}{D} + O(\rho),$$

de donde

$$N(\rho, A) = \frac{\pi\rho^2}{D} + O(\rho).$$

En virtud del primer teorema fundamental, para $m(\rho, A)$ obtenemos:

$$m(\rho, A) = T(\rho) - N(\rho, A) + O(1) = O(\rho).$$

Así, pues, para cualquier valor A, finito o infinito,

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{m(\rho, A)}{T(\rho)} = 0,$$

es decir, ningún valor es excepcional para la función $\wp(z)$.

7.4. En este apartado estudiaremos las propiedades generales de la función característica $T(\rho)$. Ante todo, demostraremos que $T(\rho)$, del mismo modo que el logaritmo del módulo máximo $M(\rho)$ de una función analítica, es no decreciente y representa una función convexa de $\ln \rho$ (compárese con el teorema de los tres círculos, ap. 3.2, cap. 6). En la demostración partiremos del hecho de que la función $N(\rho, \infty)$ posee las propiedades pedidas (véase el ap. 7.2), y procuraremos expresar $T(\rho)$ mediante $N(\rho, \infty)$. Supongamos primero que $f(0) \neq \infty$; aplicando la fórmula (7.1:1) a la función $f(z) - e^{i\vartheta}$, donde ϑ es un número real fijo, hallaremos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha}) - e^{i\vartheta}|\, d\alpha = \ln|f(0) - e^{i\vartheta}| + N(\rho, e^{i\vartheta}) - N(\rho, \infty) \tag{7.4:1}$$

o bien, multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{2\pi}d\vartheta$ e integrando desde 0 hasta 2π:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha}) - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta\right] d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(0) - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(\rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta - N(\rho, \infty). \tag{7.4:2}$$

Consideremos la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|w - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta,$$

donde w es un número fijo. Si $|w| \leqslant 1$, entonces, aplicando la fórmula general (7.1:1) a la función $\ln|\zeta - w|$, tendremos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|w - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta = \ln|w| - \ln|w| = 0;$$

si $|w|>1$, la función $\ln|w-\zeta|$ es armónica en el círculo $|\zeta|\leqslant 1$, de donde

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|w-e^{i\vartheta}|\,d\vartheta=\ln|w|.$$

En resumen, en todos los casos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|w-e^{i\vartheta}|\,d\vartheta=\ln^+|w|.$$

Por ello, la fórmula (7.4:2) toma la forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|=\ln^+|f(0)|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(\rho,e^{i\vartheta})\,d\vartheta-N(\rho,\infty),$$

o sea,

$$T(\rho)=m(\rho,\infty)+N(\rho,\infty)=\ln^+|f(0)|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(\rho,e^{i\vartheta})\,d\vartheta. \quad (7.4{:}3)$$

En el caso en que $f(0)=\infty$, en lugar de la fórmula inicial (7.4:1) tendríamos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})-e^{i\vartheta}|\,d\alpha=\ln|c_\lambda|+N(\rho,e^{i\vartheta})-N(\rho,\infty),$$

donde c_λ es el coeficiente del término inferior en el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en un entorno del punto $z=0$. Por esta razón, en este caso la fórmula (7.4:3) se sustituye por la fórmula

$$T(\rho)=\ln|c_\lambda|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(\rho,e^{i\vartheta})\,d\vartheta. \quad (7.4{:}3')$$

En uno y otro caso vemos que las propiedades de no decrecimiento y convexidad de la función $T(\rho)$, considerada como función de $\ln\rho$, se deducen de las propiedades correspondientes de la función $N(\rho,e^{i\vartheta})$. Precisando,

$$T(\rho')-T(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[N(\rho',e^{i\vartheta})-N(\rho,e^{i\vartheta})]\,d\vartheta\geqslant 0$$

ara $\rho'>\rho$ y

$$\frac{dT(\rho)}{d\ln\rho}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dN(\rho,e^{i\vartheta})}{d\ln\rho}\,d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n(\rho,e^{i\vartheta})\,d\vartheta$$

es una función no decreciente de $\ln\rho$.

Obsérvese que si $f(z)$ es una función meromorfa en todo el plano finito ($R = \infty$) y $f(z) \not\equiv$ const, entonces $T(\rho)$ necesariamente tiende al infinito cuando ρ tiende al infinito. En efecto, designando $f(0)$ con A, tendremos en virtud del teorema fundamental

$$m(\rho, A) + N(\rho, A) = T(\rho) + O(1),$$

de donde

$$N(\rho, A) = \int_0^\rho \frac{n(t, A) - n(0, A)}{t}\, dt + n(0, A) \ln \rho \leqslant T(\rho) + O(1);$$

mas, por otra parte,

$$N(\rho, A) \geqslant n(0, A) \ln \rho \geqslant \ln \rho.$$

Por lo tanto,

$$\ln \rho \leqslant T(\rho) + O(1),$$

de donde se deduce que

$$\lim_{\rho \to \infty} T(\rho) = \infty$$

y, además,

$$\varliminf_{\rho \to \infty} \frac{T(\rho)}{\ln \rho} \geqslant 1.$$

En el caso de funciones meromorfas en un círculo finito ($R < \infty$) no hay razones para afirmar que la función característica $T(\rho)$ tiende al infinito cuando ρ tiende a R. Consideremos, en particular, el caso de funciones que no tienen polos en el círculo $|z| < R$; entonces, para éstas

$$N(\rho, \infty) = 0 \quad \text{y} \quad T(\rho) = m(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha.$$

Ya se vio en el ap. 5.2, cap. 6, que la condición de que la última función esté acotada cuando ρ tiende a R es equivalente a la hipótesis de que $f(z)$ pueda expresarse en el círculo $|z| < R$ en forma de un cociente de dos funciones analíticas que estén acotadas en valor absoluto. En realidad, este resultado se extendió en el ap. 6.4 del mismo capítulo a las funciones meromorfas. A saber, se había demostrado allí que el conjunto de las dos condiciones:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (R - |b_k|) < +\infty \quad \text{y} \quad \varlimsup_{\rho \to R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha < +\infty,$$

donde $\{b_k\}$ es la sucesión de los polos de la función $f(z)$ que están situados en el círculo $|z| < R$, es equivalente a la condición de que $f(z)$ se exprese en el mismo círculo en forma de un cociente de dos funciones analíticas y acotadas en valor absoluto.

Comprobemos que estas condiciones expresan que $T(\rho)$ está acotada. En efecto, de lo dicho en el ap. 4.2, cap. 6, se deduce que la convergencia de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(R-|b_k|)$ equivale a la convergencia del producto infinito $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{R}{|b_k|}$, lo cual, a su vez, equivale a que esté acotado

$$\ln\prod_{k=1}^{p(\rho)}\frac{\rho}{|b_k|}=\sum_{1}^{p(\rho)}\ln\frac{\rho}{|b_k|}\quad\text{cuando } \rho\to R.$$

Pero

$$\sum_{1}^{p(\rho)}\ln\frac{\rho}{|b_k|}=\int_0^{\rho}\frac{p(t)}{t}\,dt=\int_0^{\rho}\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\,dt$$

(véase el ap. 7.1); al fin y al cabo, las condiciones que determinan la clase de las funciones meromorfas de forma acotada en el círculo $|z|<R$, equivalen a que estén acotadas las cantidades

$$N(\rho)=\int_0^{\rho}\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\,dt+n(0,\infty)\ln\rho\quad\text{y}\quad m(\rho,\infty),$$

es decir, a que esté acotada la función característica $T(\rho)$. En resumen, la clase de las funciones meromorfas de forma acotada coincide con la clase de las funciones de característica acotada.

7.5. Estudiemos el caso de una función trascendente entera $f(z)$ y aclaremos para ésta la relación entre el módulo máximo $M(\rho)$ y la función característica $T(\rho)$. Como en este caso $N(\rho,\infty)=0$, resulta:

$$T(\rho)=m(\rho,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha\leqslant\ln^+M(\rho).$$

Pero $\ln M(\rho)$ tiende a ∞ junto con ρ; por ello,

$$\ln^+M(\rho)=\ln M(\rho),$$

comenzando desde cierto ρ, y se tiene:

$$T(\rho)\leqslant\ln M(\rho).$$

Por otra parte, según la fórmula de Poisson-Jentzsch,

$$\ln |f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\alpha})| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\alpha - \theta)}\, d\alpha -$$

$$- \ln\left[\frac{\rho^\lambda}{r^\lambda}\prod_1^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|}\right] \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\alpha})| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\alpha - \theta)}\, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(e^{i\alpha})| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\alpha - \theta)}\, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho + r}{\rho - r}\, m(\rho, \infty) \leqslant \frac{\rho + r}{\rho - r}\, T(\rho);$$

por lo cual

$$\ln M(r) \leqslant \frac{\rho + r}{\rho - r}\, T(\rho).$$

Así, pues,

$$T(r) \leqslant \ln M(r) \leqslant \frac{\rho + r}{\rho - r}\, T(\rho), \tag{7.5:1}$$

de donde

$$\ln T(r) \leqslant \ln \ln M(r) \leqslant \ln \frac{\rho + r}{\rho - r} + \ln T(\rho).$$

Por consiguiente, haciendo $\rho = 2r$, obtenemos:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(r)}{\ln r} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(2r)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(2r)}{\ln (2r)},$$

o sea,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(r)}{\ln r}.$$

Recordando la definición de orden de crecimiento de una función entera (ap. 1.1), vemos que en esta definición puede utilizarse la función característica $T(r)$ en lugar del módulo máximo $M(r)$, sustituyendo $\ln M(r)$ por $T(r)$.

Examinemos ahora el caso de una función $f(z)$ que es meromorfa en el plano finito y no es entera. Aquí la función $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ no puede desempeñar inmediatamente el mismo papel que desempeñaba en la teoría de las funciones enteras. En efecto, $M(r)$ ya no es una función no decreciente, puesto que, haciéndose infinita para cada $r = r_0$ que coincida con el módulo de algún polo de la función $f(z)$, toma valores finitos para todos los valores de

r suficientemente próximos a r_0 y distintos de r_0. Además, deja ya de coincidir con el módulo máximo en el círculo cerrado: $\max\limits_{|z|\leq r} |f(z)|$. La función característica $T(r)$ la cual, como se vio en el ap. 7.4, es una función no decreciente y convexa de $\ln r$, representa una sustitución natural del módulo máximo para una función meromorfa arbitraria. Aplicándola se puede extender el concepto de orden de crecimiento a cualesquiera funciones meromorfas, suponiendo por definición que el *orden de crecimiento* de la función es $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\ln T(r)}{\ln r}$.

Para ilustrar esto, determinemos el orden de crecimiento de la función $\operatorname{tg} z$. Como se sabe, esta función no toma los valores i y $-i$ (t. 1, ap. 4.10, cap. 2). Por lo tanto, en este caso $N(\rho, i) = 0$ y, por consiguiente, para calcular $T(\rho)$ se tiene (en virtud del teorema fundamental del ap. 7.2):

$$T(\rho) = m(\rho, i) + O(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|\operatorname{tg}(\rho e^{i\alpha}) - i|}\, d\alpha + O(1).$$

Pero

$$\frac{1}{|\operatorname{tg}(\rho e^{i\alpha}) - i|} = \frac{|\exp(i\rho e^{i\alpha}) + \exp(-i\rho e^{i\alpha})|}{|2\exp(i\rho e^{i\alpha})|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\exp(\rho \operatorname{sen}\alpha) + \exp(-\rho\operatorname{sen}\alpha)}{2\exp(-\rho\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp(2\rho\operatorname{sen}\alpha);$$

la última cantidad no supera a 1 si $\pi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, por lo cual en el segmento $[\pi, 2\pi]$:

$$\ln^+ \frac{1}{|\operatorname{tg}(\rho e^{i\alpha}) - i|} = 0.$$

En el intervalo $0 < \alpha < \pi$ se tiene:

$$2\rho\operatorname{sen}\alpha > \ln \frac{1}{|\operatorname{tg}(\rho e^{i\alpha}) - i|} =$$

$$= 2\rho\operatorname{sen}\alpha + \ln \frac{1 + e^{-2\rho\operatorname{sen}\alpha}}{2} > 2\rho\operatorname{sen}\alpha - \ln 2;$$

por lo cual

$$\ln^+ \frac{1}{|\operatorname{tg}(\rho e^{i\alpha}) - i|} = 2\rho\operatorname{sen}\alpha + O(1)$$

y, por consiguiente,

$$T(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2\rho\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha + O(1) = \frac{2}{\pi}\rho + O(1).$$

De aquí se deduce, finalmente, que el orden de crecimiento de la función $\operatorname{tg} z$ es igual a

$$\varlimsup_{\rho\to\infty} \frac{\ln\left[\frac{2}{\pi}\rho+O(1)\right]}{\ln\rho}=1.$$

En resumen, $\operatorname{tg} z$ es una función meromorfa de primer orden.

Calculemos también el orden de la función meromorfa $\wp(z)$. Como para ésta $T(\rho)=\frac{\pi\rho^2}{D}+O(\rho)$, donde D es el área del paralelogramo fundamental de períodos (véase el ejemplo 4) del ap. 7.3), resulta

$$\varlimsup_{\rho\to\infty}\frac{\ln T(\rho)}{\ln\rho}=2,$$

es decir, la función elíptica $\wp(z)$ es de segundo orden.

7.6. Para terminar este párrafo deduzcamos la fórmula general para la representación de las funciones meromorfas de orden finito.

Partiremos de la fórmula de **Poisson — Jentzsch**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha=$$

$$=\ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^\lambda}\right|+\lambda\ln\rho-\sum_1^{n(\rho)}\ln\frac{\rho|z-a_k|}{|\rho^2-\bar a_k z|}+\sum_1^{p(\rho)}\ln\frac{\rho|z-b_k|}{|\rho^2-\bar b_k z|}.$$

Está claro que la función armónica que figura en el primer miembro de la igualdad es la parte real de la función analítica de $z=re^{i\theta}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\cdot\frac{\rho e^{i\alpha}+z}{\rho e^{i\alpha}-z}\cdot d\alpha$$

(véase la fórmula (1.2:15), cap. 6), y la función armónica del segundo miembro de la igualdad representa la parte real de la siguiente función analítica:

$$\operatorname{Ln}\frac{f(z)}{z^\lambda}+\lambda\ln\rho-\sum_1^{n(\rho)}\operatorname{Ln}\frac{\rho(z-a_k)}{\rho^2-\bar a_k z}+\sum_1^{p(\rho)}\operatorname{Ln}\frac{\rho(z-b_k)}{\rho-\bar b_k z};$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\frac{\rho e^{i\alpha}+z}{\rho e^{i\alpha}-z}\,d\alpha=Ci+\operatorname{Ln}\frac{f(z)}{z^\lambda}+\lambda\ln\rho-$$

$$-\sum_1^{n(\rho)}\operatorname{Ln}\frac{\rho(z-a_k)}{\rho^2-\bar a_k z}+\sum_1^{p(\rho)}\operatorname{Ln}\frac{\rho(z-b_k)}{\rho^2-\bar b_k z}. \qquad (7.6:1)$$

Designemos con q el menor número entero para el cual se cumple la igualdad

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{T(\rho)}{\rho^{q+1}}=0 \qquad (0\leqslant q<\infty).$$

Tal número existe, pues, por la hipótesis, $f(z)$ es una función de orden finito μ. Evidentemente, $q=[\mu]$ si μ no es un número entero y $q=\mu$ o $q=\mu-1$ si μ es un número entero. Derivando la fórmula (7.6:1) término a término $q+1$ veces obtenemos que

$$\frac{d^{q+1}\operatorname{Ln} f(z)}{dz^{q+1}}=\lambda\frac{(-1)^q q!}{z^{q+1}}+\sum_{1}^{n(\rho)}\frac{(-1)^q q!}{(z-a_k)^{q+1}}+$$
$$+\sum_{1}^{n(\rho)}\frac{q!\,\bar a_k^{q+1}}{(\rho^2-\bar a_k z)^{q+1}}-\sum_{1}^{p(\rho)}\frac{(-1)^q q!}{(z-b_k)^{q+1}}-\sum_{1}^{p(\rho)}\frac{q!\,\bar b_k^{q+1}}{(\rho^2-\bar b_k z)^{q+1}}+$$
$$+\frac{(q+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\cdot\frac{2\rho e^{i\alpha}}{(\rho e^{i\alpha}-z)^{q+2}}\,d\alpha. \tag{7.6:2}$$

Consideremos las funciones

$$S_\rho(z)=q!\sum_{1}^{n(\rho)}\frac{\bar a_k^{q+1}}{(\rho^2-\bar a_k z)^{q+1}}-q!\sum_{1}^{p(\rho)}\frac{\bar b_k^{q+1}}{(\rho^2-\bar b_k z)^{q+1}}$$

$$I_\rho(z)=\frac{(q+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\,\frac{2\rho e^{i\alpha}}{(\rho e^{i\alpha}-z)^{q+2}}\,d\alpha$$

y demostremos que éstas tienden a cero cuando ρ tiende al infinito y, además, uniformemente respecto de z, $|z|\leqslant r<\infty$. En efecto, si $|z|\leqslant r<\rho$, se tiene:

$$\left|\frac{\bar a_k}{\rho^2-\bar a_k z}\right|\leqslant\frac{|a_k|}{\rho^2-|a_k|\,z}\leqslant\frac{1}{\rho-r},$$

puesto que $|a_k|\leqslant\rho$. Por consiguiente,

$$\left|\sum_{1}^{n(\rho)}\frac{\bar a_k^{q+1}}{(\rho^2-\bar a_k z)^{q+1}}\right|\leqslant\frac{n(\rho,0)}{(\rho-r)^{q+1}}=\frac{n(\rho,0)}{\rho^{q+1}}\cdot\left(1-\frac{r}{\rho}\right)^{-q-1};$$

pero

$$n(\rho,0)=n(\rho,0)\int_\rho^{e\rho}\frac{dt}{t}\leqslant\int_\rho^{e\rho}\frac{n(t,0)}{t}\,dt\leqslant N(e\rho,0)<T(e\rho)+O(1);$$

por lo tanto,

$$\frac{n(\rho,\ 0)}{\rho^{q+1}} < \frac{e^{q+1}T(e\rho)}{(e\rho)^{q+1}} + \frac{O(1)}{\rho^{q+1}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \rho \to \infty.$$

Así, pues,

$$\lim_{\rho\to\infty} \sum_{1}^{n(\rho)} \frac{\bar{a}_k^{q+1}}{(\rho^2 - \bar{a}_k z)^{q+1}} = 0;$$

del mismo modo se demuestra que

$$\lim_{\rho\to\infty} \sum_{1}^{p(\rho)} \frac{\bar{b}_k^{q+1}}{(\rho^2 - \bar{b}_k z)^{q+1}} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{\rho\to\infty} S_\rho(z) = 0.$$

Acotemos ahora el módulo de la integral $I_\rho(z)$:

$$|I_\rho(z)| \leqslant \frac{(q+1)!\,\rho}{\pi(\rho - r)^{q+2}} \int_0^{2\pi} |\ln|f(\rho e^{i\alpha})||\,d\alpha =$$

$$= \frac{(q+1)!\,\rho}{\pi(\rho - r)^{q+2}} \left[\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha + \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})|}\,d\alpha\right] =$$

$$= \frac{(q+1)!}{\pi\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^{q+2}} \frac{m(\rho,\ \infty) + m(\rho,\ 0)}{\rho^{q+1}} <$$

$$< \frac{(q+1)!}{\pi\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^{q+1}} \frac{2T(\rho) + O(1)}{\rho^{q+1}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \rho \to \infty.$$

Por esta razón, de la fórmula (7.6:2) se deduce la relación siguiente:

$$\frac{d^{q+1}\ln f(z)}{dz^{q+1}} = (-1)^{q+1} q! \lim_{\rho\to\infty} \left[\sum_{1}^{p(\rho)} \frac{1}{(z - b_k)^{q+1}} - \frac{\lambda}{z^{q+1}} - \sum_{1}^{n(\rho)} \frac{1}{(z - a_k)^{q+1}}\right], \tag{7.6·3}$$

siendo uniforme la convergencia en cada círculo $|z| \leqslant r < \infty$. De aquí, integrando bajo el signo del límite $q+1$ veces, obtenemos:

$$nf(z) = \lambda \ln z + \sum_{0}^{q} c_j z^j + \lim_{\rho\to\infty} \left\{\sum_{1}^{n(\rho)} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) + \right.\right.$$

$$+\frac{z}{a_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_k}\right)^q\Bigg]-\sum_{1}^{p(\rho)}\Bigg[\ln\left(1-\frac{z}{b_k}\right)+$$

$$+\frac{z}{b_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_k}\right)^q\Bigg]\Bigg\}+2m\pi i, \qquad (7.6{:}4)$$

donde los coeficientes $j!\,c_j$ $(j=0, \ldots, q)$ representan los valores de $\frac{d^j \ln[f(z)\,z^{-\lambda}]}{dz^j}$ en el punto $z=0$ y $m=m_z$ es un número entero. Llegamos al siguiente teorema: *toda función meromorfa en el plano finito, que satisface a la condición* $\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{T(\rho)}{\rho^{q+1}}=0$ *(q es un número entero), se expresa según la fórmula* (7.6:4) *o según la fórmula siguiente*:

$$f(z)=z^{\lambda}\exp\left(\sum_{0}^{q}c_j z^j\right)\times$$

$$\times\lim_{\rho\to\infty}\frac{\prod\limits_{1}^{n(\rho)}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left[\frac{z}{a_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_k}\right)^q\right]}{\prod\limits_{1}^{p(\rho)}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)\exp\left[\frac{z}{b_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_k}\right)^q\right]}. \qquad (7.6{:}5)$$

Si las series $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{q+1}}$ y $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{|b_k|^{q+1}}$ son convergentes, entonces los productos infinitos

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left[\frac{z}{a_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_k}\right)^q\right]$$

y

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)\exp\left[\frac{z}{b_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_k}\right)^q\right]$$

convergen absoluta y uniformemente en cada círculo de radio finito. En este caso la fórmula (7.6:5) se puede sustituir por la siguiente:

$$f(z)=z^{\lambda}\exp\left(\sum_{1}^{q}c_j z^j\right)\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left[\frac{z}{a_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_k}\right)^q\right]}{\prod\limits_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)\exp\left[\frac{z}{b_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_k}\right)^q\right]}. \qquad (7.6{:}6)$$

Así, pues, para $\operatorname{tg} z$ la función característica tiene la forma $T(\rho) = \frac{2\rho}{\pi} + O(1)$ y, por consiguiente, $q = 1$. Como los ceros de $\operatorname{tg} z$ son los puntos $j\pi$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), y los polos son: $(2j+1)\frac{\pi}{2}$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), las series $\sum_1^\infty \frac{1}{|a_k|^2}$ y $\sum_1^\infty \frac{1}{|b_k|^2}$ son convergentes y la fórmula (7.6:6) toma la forma:

$$\operatorname{tg} z = z e^{c_0 + c_1 z} \frac{\prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}}}{\prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{(2j+1)\frac{\pi}{2}}\right) e^{\frac{z}{(2j+1)\frac{\pi}{2}}}} =$$

$$= z e^{c_0 + c_1 z} \frac{\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)}{\prod_1^\infty \left[1 - \frac{4z^2}{(2j+1)^2 \pi^2}\right]}.$$

Como $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$ es una función par, el coeficiente c_1 tiene que ser igual a cero. De la relación $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{tg} z}{z} = 1$ sale que $c_0 = 0$ (o $2m\pi i$, donde m es un número entero); por consiguiente,

$$\operatorname{tg} z = z \cdot \frac{\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)}{\prod_1^\infty \left[1 - \frac{4z^2}{(2j+1)^2 \pi^2}\right]}.$$

Claro, esta fórmula puede obtenerse fácilmente partiendo del conocido desarrollo de $\operatorname{sen} z$ en producto infinito.

Si $f(z)$ es una función entera de orden μ, entonces, según el apartado anterior, tendremos para esta función

$$\overline{\lim_{\rho\to\infty}} \frac{\ln T(\rho)}{\ln \rho} = \mu.$$

De aquí se deduce que a la función $f(z)$ se le puede aplicar la relación (7.6:5), haciendo en ésta $q = [\mu]$ o $q = [\mu] - 1$ (de modo que se cumpla la relación $\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{T(\rho)}{\rho^{q+1}}=0\Big)$ y sustituyendo por la unidad el producto que figura en el denominador. Entonces tendremos:

$$f(z)=z^{\lambda}\exp\Big(\sum_{0}^{q}c_jz^j\Big)\prod_{1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{a_k}\Big)\exp\Big(\frac{z}{a_k}+\ldots+\frac{1}{q}\Big(\frac{z}{a_k}\Big)^q\Big].$$

Hemos obtenido el desarrollo de una función entera de orden finito en producto infinito; este resultado se obtuvo de otro modo en el § 2 del presente capítulo.

Finalmente, apliquemos la fórmula (7.6:6) para demostrar el siguiente t e o r e m a:

Para que una función $f(z)$, meromorfa en el plano finito, sea racional, es necesario y suficiente que se cumpla la relación

$$\underline{\lim}\frac{T(\rho)}{\ln\rho}=r<\infty. \tag{7.6:7}$$

Esta relación es necesaria, pues para una función racional se tiene: $T(\rho)=O(\ln\rho)$ (véase el ejemplo 1, ap. 7.3). Para demostrar que es suficiente, obsérvese que, debido a la condición (7.6:7), para cualquier valor A, finito o infinito, se tiene:

$$\varliminf_{\rho\to\infty}\frac{N(\rho,A)}{\ln\rho}\leqslant\varliminf_{\rho\to\infty}\frac{T(\rho)}{\ln\rho}=r<\infty.$$

Pero, para cualquier $\rho_0>1$ se tiene también

$$N(\rho,A)=\int_0^{\rho}\frac{n(t,A)-n(0,A)}{t}\,dt+n(0,A)\ln\rho\geqslant$$

$$\geqslant\int_1^{\rho}\frac{n(t,A)-n(0,A)}{t}\,dt+n(0,A)\ln\rho\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{n(t,A)}{t}\,dt\geqslant n(\rho_0,A)\ln\rho\Big(1-\frac{\ln\rho_0}{\ln\rho}\Big).$$

Por consiguiente,

$$n(\rho_0,A)\leqslant\varliminf_{\rho\to\infty}\frac{N(\rho,A)}{\ln\rho}\leqslant r,$$

es decir, la cantidad de A-puntos de la función $f(z)$ en cualquier círculo no es superior a r. Por ello, en particular, no es superior a r también la cantidad de ceros n_0 y la cantidad de polos p_0 en todo el plano finito. Utilizando esto, y teniendo en cuenta que en la fórmula (7.6:5) se puede poner en el caso dado $q = 0$, hallamos de ésta:

$$f(z) = z^{\lambda} \exp c_0 \cdot \frac{\prod\limits_{1}^{n_0} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)}{\prod\limits_{1}^{n_0} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right)},$$

o sea, $f(z)$ es una función racional de grado no superior a r.

Evidentemente, el teorema demostrado se puede formular del modo siguiente:

Para toda función trascendente $f(z)$, que sea meromorfa en el plano finito, se cumple la relación

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{T(\rho)}{\ln \rho} = \infty.$$